МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра Теоретической механики и мехатроники

Отчет по второй задаче практикума по ЭВМ

Преподаватель:
Самохин Александр
Сергеевич
Работу выполнил:
Студент 422 группы
Дергунов Максим
Олегович

Москва, 2021 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления с фиксированным временным отрезком, с ненулевой терминальной частью, а именно с ограничением вида "меньше или равно":

$$\begin{gathered}\int_0^1 \left(\ddot{x}/\left(1+\alpha t^4\right)\right) \mathrm{d}t \to \inf \\ |\ddot{x}| \leqslant 1 \\ x(0)=\dot{x}(0)=0, \\ x(1)=-11/24 \\ \alpha=\{0.0; 0.1; 1.0; 11.0\}\end{gathered}$$

Требуется формализовать задачу как задачу оптимального управления в понтрягинской форме, принципом максимума Понтрягина свести задачу к краевой задаче, численно решить полученную краевую задачу методом стрельбы.

2 Формализация задачи

Формализуем задачу как задачу оптимального управления. Для этого обозначим $y=\dot{x}$. Тогда система из пункта 1 перепишится в следующем виде:

$$\begin{cases}\dot{x}=y \\ \dot{y}=u \\ u \in [-1,1] \\ x(0)=0 \\ y(0)=0 \\ x(1)=-11/24 \\ B_0=\varphi_0=\int_0^1 \left(u/\left(1+\alpha t^4\right)\right) \mathrm{d}t \to \inf\end{cases}$$

m=0; m'=2

3 Система необходимых условий оптимальности

Выпишем функции Лагранжа и Понтрягина:

$$\mathfrak{L} = \int_0^1 L dt + l$$

Лагранжиан $L = \lambda_0 \frac{u}{1+\alpha t^4} + p_x(\dot{x} - y) + p_y(\dot{y} - u)$,

Терминант $l = \lambda_1 x(0) + \lambda_2 y(0) + \lambda_3 (x(1) + 11/24)$

H=p$_x y + p_y u - \lambda_0 \frac{u}{1+\alpha t^4}$.

Применим к задаче оптимального управления принцип максимума Понтрягина.

Необходимые условия оптимальности:

а) условия стационарности по x - уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\dot{p}_x = 0, \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Имеем:

$$\begin{cases} \dot{p}_x = 0 \\ \dot{p}_y = -p_x \end{cases}$$

б) Условие оптимальности по управлению:

$$u = \underset{u \in [-1,1]}{\text{argabsmax}} H(u)$$

Имеем:

$$u = \underset{u \in [-1,1]}{\text{argabsmax}} \left(p_y u - \lambda_0 \frac{u}{1+\alpha t^4} \right) = \begin{cases} \text{any} & \text{if } p_y - \frac{\lambda_0}{(1+\alpha t^4)} = 0 \\ 1 & \text{if } p_y - \frac{\lambda_0}{(1+\alpha t^4)} > 0 \\ -1 & \text{if } p_y - \frac{\lambda_0}{(1+\alpha t^4)} < 0 \end{cases}$$

в) Условие трансверсальности:

$$p_x\left(t_k\right)=(-1)^k\frac{\partial l}{\partial x(t_k)},$$
$$p_y\left(t_k\right)=(-1)^k\frac{\partial l}{\partial y(t_k)}.$$

Имеем:

$$p_x(0)=\frac{\partial l}{\partial x(0)}=\lambda_1,$$
$$p_x(1)=-\frac{\partial l}{\partial x(1)}=\lambda_3,$$
$$p_y(0)=\frac{\partial l}{\partial y(0)}=\lambda_2,$$
$$p_y(1)=-\frac{\partial l}{\partial y(1)}=0,$$

г) Условия стационарности по времени:

$$H\left(t_0\right)=-\frac{\partial l}{\partial t_0},$$
$$H\left(t_1\right)=\frac{\partial l}{\partial t_1}.$$

В данной задаче условия нет, так как t_0, t_1 - известные константы.
д) Условия дополняющей нежесткости: $\lambda_i B_i=0$.
В данной задаче отсутствуют, так как нет условий вида "меньше или равно".
е) Условие неотрицательности : $\lambda_i \geq 0$. и $\lambda_0 \geq 0$.
ж) Условие нормировки: множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительной константы.
з) НЕРОН: множители Лагранжа не равны одновременно нулю.

4 Анормальный случай и исследования задачи

Исследуем возможность анормального случая $\lambda_0 = 0$. При этом система перепишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \\ \dot{p_x} = 0 \\ \dot{p_y} = -p_x \end{cases}$$

Пусть p_y не равно нулю, тогда Из условия б)

$$u = \underset{u \in [-1,1]}{\operatorname{argabsmax}} (p_y u) = \begin{Bmatrix} 1, \\ -1, \end{Bmatrix}$$

Если u=1:
$y = C_1 t = 0$
$x = C_2 - 0$
$p_x = C_3$
$p_y = -C_3 t + C_4$

Тк начальные условия $C_1 = C_2 = 0$
Из условия в):

$$\lambda_1 = -\lambda_3 = C_3$$

Если $C_3 = 0$ то снова из условия в получаем сначала $C_4 = C_3$,а затем $\lambda_2 = C_4$ Следовательно $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Противоречие с НЕРОН.
Если u=-1:
$y = -C_1 t = 0$
$x = C_2 - 0$
$p_x = C_3$
$p_y = -C_3 t + C_4$

Рассуждения аналогичные, тк просто меняется знак при константах C_1 и C_2 Следовательно $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Противоречие с НЕРОН.
Если же $p_y = 0$, из условия в) сразу же следует $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Соответственно случай $\lambda_0 = 0$ невозможен.

Т.к. $\lambda_0 \neq 0$, то в силу однородности функции Лагранжа по множителям Лагранжа можем выбрать следующее условие нормировки: $\lambda_0 = 1$.

5 Краевая задача

С помощью принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления сводится к краевой задаче:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \begin{cases} \text{any} & \text{if } p_y - \frac{1}{(1+\alpha t^4)} = 0 \\ 1 & \text{if } p_y - \frac{1}{(1+\alpha t^4)} > 0 \\ -1 & \text{if } p_y - \frac{1}{(1+\alpha t^4)} < 0 \end{cases} \\ \dot{p}_x = 0 \\ \dot{p}_y = -p_x \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 0, x(1) = -11/24, p_y(1) = 0,$$
$$\alpha = \{0.0; 0.1; 1.0; 11.0\}$$

6 Численное решение краевой задачи методом стрельбы

Краевая задача решается численно с помощью методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбираются недостающие для решения задачи Коши значения при t $= 0 : \alpha_1 = p_x(0), \alpha_2 = p_y(0)$

Задав эти значения произвольным образом и решив задачу Коши на отрезке $[0, 1]$, получим функции $x(.)\left[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right], y(.)\left[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right], p_x(.)\left[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right], p_y(.)\left[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right]$.

Задача Коши решается численно явным методом Рунге-Кутты, основанном на расчетных формулах Дормана-Принса 4(5) с автоматическим выбором шага. Для решения краевой задачи необходимо подобрать значения α_1, α_2 так, чтобы выполнялись условия:

$$p_y(1)\left[\alpha_1, \alpha_2\right] = 0$$
$$x(1)\left[\alpha_1, \alpha_2\right] + 11/24 = 0$$

Вектор-функцией невязок будет функция $X(\boldsymbol{\alpha})$,

определяемая равенством: $X(\boldsymbol{\alpha}) = (p_y(1)[\boldsymbol{\alpha}], x(1)[\boldsymbol{\alpha}] + 11/24)$. Таким образом решение краевой задачи свелось к решению системы двух алгебраических уравнений от 2 неизвестных. Корень $\boldsymbol{\alpha}$ находится методом Ньютона с модификацией Исаева-Сонина.

7 Тест решения задачи Коши для гармонического осцилятора

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений гармонического осцилятора:

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{z} = -x \\ x(0) = 0, z(0) = 1 \end{cases}$$

Будем решать систему на отрезке $[0, T]$ при различных значениях T и максимально допустимой относительной погрешности на шаге интегрирования tol. Рассмотрим несколько случаев и для каждого из них посчитаем следующие велечины: steps - общее число сделанных шагов интегрирования, оценка глобальной погрешности, числа Рунге, и $x(T) - \sin T, z(T) - \cos T$.

T	tol	steps	x(T) $-\sin T$	z(T) $-\cos T$	$Glob - err(T)$	R$_x$	R$_z$
2π	10^{-8}	464	2.144284e − 14	8.230083e − 13	1.565159e − 10	10.653857	2.871561
5π	10^{-8}	1155	5.055749e − 14	2.058465e − 12	3.917154e − 10	36.209654	6.906690
10π	10^{-8}	2308	8.587911e − 14	4.118150e − 12	7.838891e − 10	8.376851	2.708943
25π	10^{-8}	5767	2.917892e − 14	1.029488e − 11	1.960411e − 09	3.596463	1.639589
2π	10^{-10}	1160	8.062941e − 16	7.438494e − 15	3.935467e − 12	0.545860	0.411221
5π	10^{-10}	2898	1.376411e − 14	2.109424e − 14	9.846845e − 12	20.932538	7.464935
10π	10^{-10}	5794	4.222761e − 14	4.241052e − 14	1.969772e − 11	3.201522	1.506507
25π	10^{-10}	14483	4.340313e − 13	1.074696e − 13	4.925282e − 11	0.970239	0.962983
2π	10^{-12}	2066	8.598238e − 15	2.409184e − 14	6.507711e − 12	67.778850	24.801328
5π	10^{-12}	5191	1.368290e − 14	5.473400e − 14	1.590613e − 11	: 0.558472;	0.376376
10π	10^{-12}	10359	1.850690e − 14	1.079137e − 13	3.214008e − 11	7.151058	2.552932
25π	10^{-12}	25986	2.206802e − 13	2.680078e − 13	8.039571e − 11	1.030159	1.051023

8 Численное решение для указанных значений параметра

Для вычисления я использовал точность шага 10^{-9} , для отыскания точек переключения был выбран метод бисекции с точностью 10^{-15} , начальные параметры пристрелки для $\alpha = 0$,$\alpha = 0.1$,$\alpha = 1$ и $\alpha = 11$ были взяты из аналитического решения для более быстрой работы метода Ньютона и проверки такие: $p_x = 1.0215$ и $p_y = 1.0215$. На удивление программа сработала для всех значений α сразу.

В следующей таблице приведены найденные с помощью метода стрельбы значения начальных условий системы: $x(0), y(0), p_x(0), p_y(0)$.

α	x(0)	y(0)	p$_x$(0)	p$_y$(0)
0.0	0	0	1.0215078369	1.0215078369
0.1	0	0	1.0215078168	1.0215078168
1.0	0	0	1.0215076361	1.0215076361
11.0	0	0	0.9067263582	0.9067263582

Основная идея модификации метода Рунге-Кутта с автоматическим подбором шага такова:
В моем случае создается функция

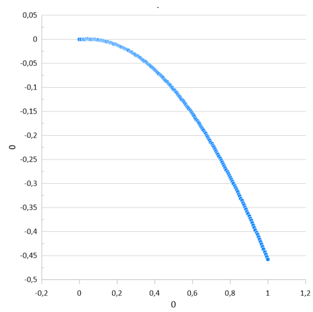
```
double switchplus(double t,long double p_y) {
    return p_y -1.0/(1 + alpha*t*t*t*t);
}
```

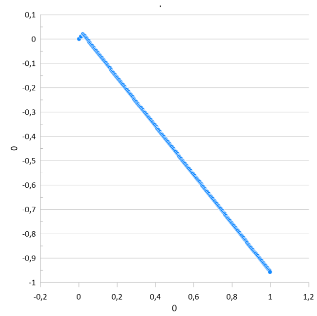
Обращение в ноль которых знаменует переключение управления.И так, стандартный метод проверяет шаг на допустимость как в 7 задаче из прошлого отчета. Вот делается некоторый допустимый шаг h. Сразу же проверяю условие:
switchplus(t)*switchplus(t+h)<= 0
Если оно выполнено, значит при этом шаге произошла смена управления.На этом отрезке с помощью метода бисекции находится точка переключения t_1 и после делается шаг $t - t_1$ со старым управлением.

9 Графики решений

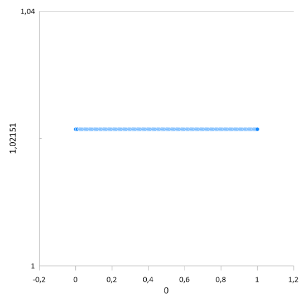
9.1 $\alpha = 0.0$.

В этом случае имеем одну точку переключения при t = 0.021054989

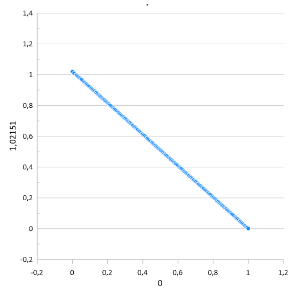




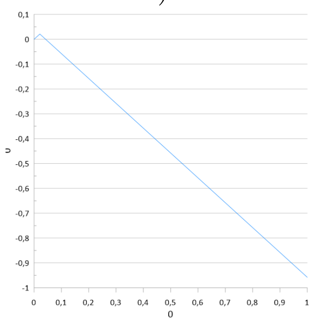
b)



c)



d)



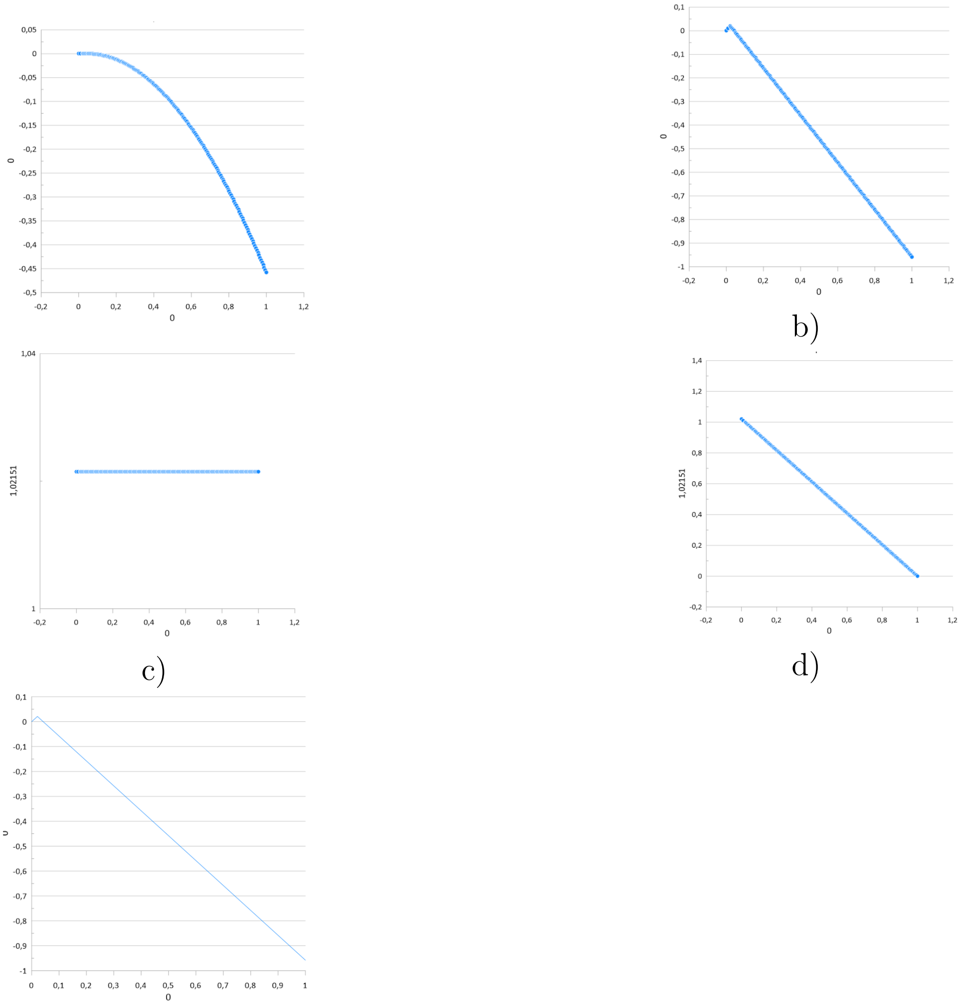
e)

Рис. 1. a)$x(t)$, b)$y(t)$, c)$p_x(t)$, d)$p_y(t)$, e)$B0(t)$

Значение функционала в точке 1 : $B_0(1) = -0.95789002084493704597$

9.2 $\alpha = 0.1$.

В этом случае так же имеем одну точку. Значение функционала в точке 1 :



b)

c)

d)

e)

Рис. 2. a)$x(t)$, b)$y(t)$, c)$p_x(t)$, d)$p_y(t)$, e)$B0(t)$

$B_0(1) = -0.93873909510603697749$

9.3 $\alpha = 1.0.$

В этом случае так же имеем одну точку. Значение функционала в точке 1 :

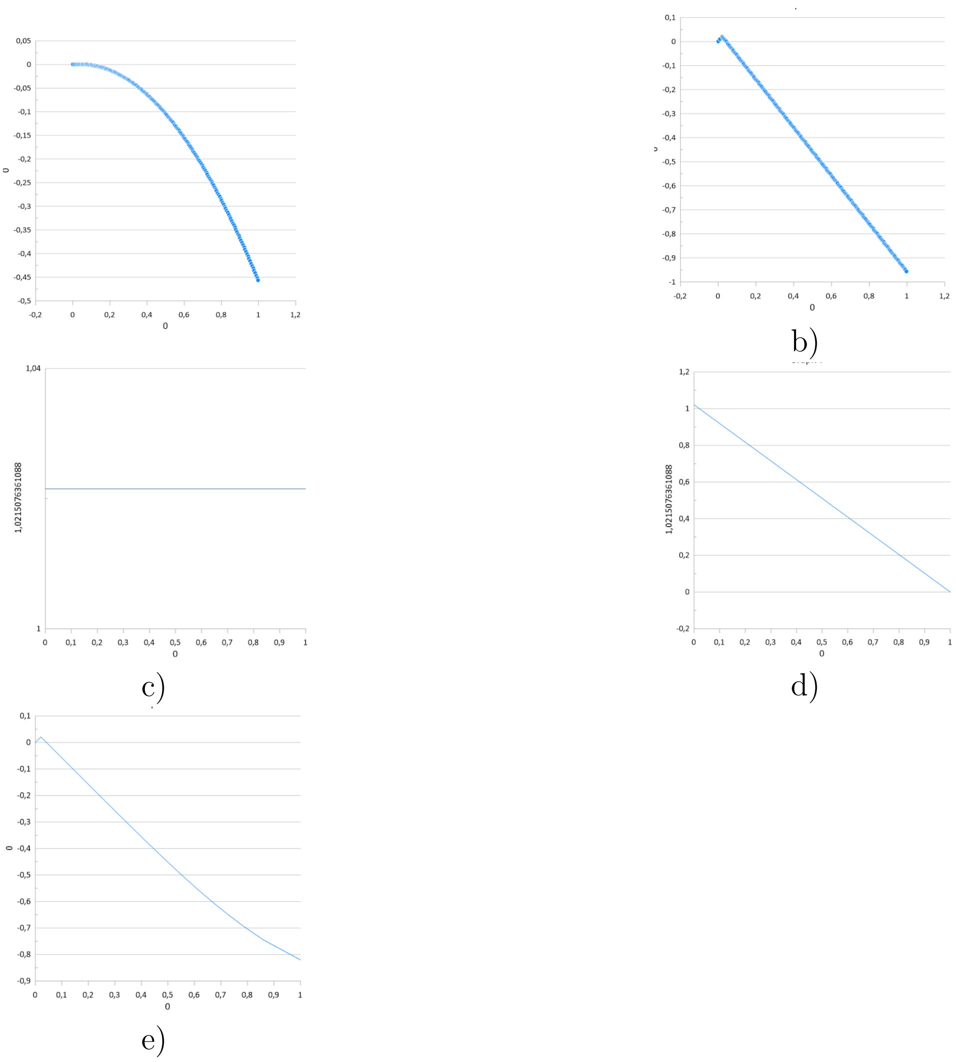


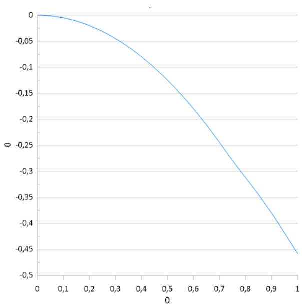
Рис. 3. a)$x(t)$, b)$y(t)$, c)$p_x(t)$, d)$p_y(t)$, e)$B0(t)$

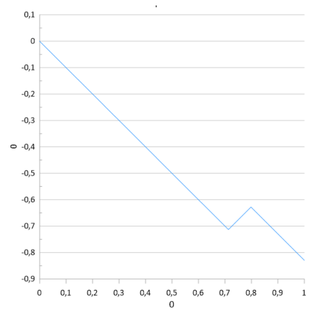
$B_0(1) = -0.82015874720190540828$

9.4 $\alpha = 11.0.$

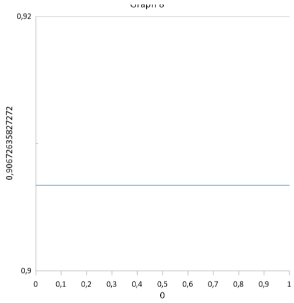
Для этого параметра имеем две точки переключения :
$\mathrm{t}_1 = 0.71296803442416889496$
$\mathrm{t}_2 = 0.79820633655476203039$

Значение функционала в точке 1 : $B_0(1) = -0.54313556687899777292$

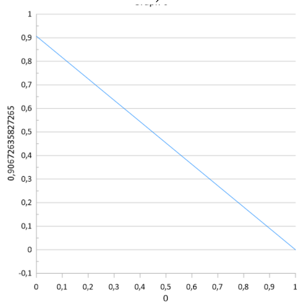




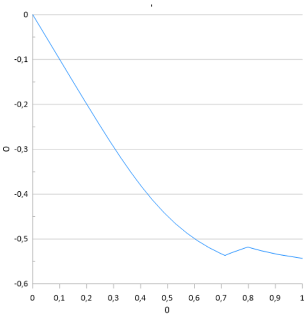
b)



c)



d)



e)

Рис. 4. a)$x(t)$, b)$y(t)$, c)$p_x(t)$, d)$p_y(t)$, e)$B0(t)$

10 Аналитическое решение

Для $\alpha = 0$ Решим задачу аналитически

Перепишем систему используя наши предположения

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \begin{cases} 1 & \text{if } p_y - 1 > 0 \\ -1 & \text{if } p_y - 1 < 0 \end{cases} \\ \dot{p}_x = 0 \\ \\ \dot{p}_y = -p_x \end{cases}$$

$x(0) = 0, y(0) = 0, x(1) = -11/24, p_y(1) = 0$

Пусть $p_x = C_1$, тогда $p_y = -C_1 t + C_2$ из условия $p_y(1) = 0$ получаем $C_1 = C_2$

Обозначим C_1 как C тогда $p_y = -Ct + C$ и соответственно

$$y(t) = \begin{cases} t + c_1, -ct + c \geq 1 \\ -t + c_2, -ct + c \leq 1 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_3, -ct + c \geq 1 \\ -\frac{t^2}{2} + c_2 t + c_4, -ct + c \leq 1 \end{cases}$$

Воспользуемся начальным условием в точке $x(1) = -\frac{11}{24}$

$$x(1) = -\frac{1}{2} + c_2 + c_4 = -\frac{11}{24} \text{ ,Тогда получим } c_2 + c_4 = \frac{1}{24}$$

Соответственно имеем:

$$y(t) = \begin{cases} t + c_1, -ct + c \geq 1 \\ -t + c_2, -ct + c \leq 1 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_3, -ct + c \geq 1 \\ -\frac{t^2}{2} + c_2 t + c_4, -ct + c \leq 1 \end{cases}$$

Осталось применить условие $x(0) = y(0) = 0$

Предположим что $c \geq 1$, решим задачу в этом предположении и если подтвердится это неравенство,значит решение верно.

Тогда условие :

$y(0) = 0$, даёт $\quad c_1 = 0$

$x(0) = 0$, даёт : $\quad c_3 = 0$

Тогда получим :

$$y(t) = \begin{cases} t, -ct + c \geq 1 \\ -t + c_2, -ct + c \leq 1 \end{cases} \quad x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, -ct + c \geq 1 \\ -\frac{t^2}{2} + c_2 t + \frac{1}{24} - c_2, -ct + c \leq 1 \end{cases}$$

Проведем склейку в точке $t = 1 - \frac{1}{c}$

Для y имеем :

$1 - \frac{1}{c} = -1 + \frac{1}{c} + c_2$

$2 - \frac{2}{c} = c_2$

Для x имеем :

$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{c} + \frac{1}{c^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{c} + \frac{1}{c^2}\right) + c_2\left(1 - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{24} - c_2$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{c} + \frac{1}{2c^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2c^2} + 2\left(1 - \frac{2}{c} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{1}{24} - 2 + \frac{2}{c}$

$0 = 1 + \frac{2}{c} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{24} - 2 - \frac{2}{c}$

$0 = -\frac{23}{24} + \frac{1}{c^2} \to c = \sqrt{\frac{24}{23}}$

$$y(t) = \begin{cases} t, -ct + c \geq 1 \\ -t + 2 - \frac{2}{c}, -ct + c \geq 1 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, -ct + c \geq 1 \\ -\frac{t^2}{2} + \left(2 - \frac{2}{c}\right)t + \frac{1}{24} - \left(2 - \frac{2}{c}\right), -ct + c \leq 1 \end{cases}$$

Подставим найденное c

$$y(t) = \begin{cases} t, -\sqrt{\frac{24}{23}}t + \sqrt{\frac{24}{23}} \leq 1 \\ -t + 2 - \frac{2\sqrt{23}}{\sqrt{24}}, -\sqrt{\frac{24}{23}}t + \sqrt{\frac{24}{23}} \geq 1 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, -\sqrt{\frac{24}{23}}t + \sqrt{\frac{24}{23}} \geq 1 \\ -\frac{t^2}{2} + \left(2 - \frac{2\sqrt{23}}{\sqrt{24}}\right) t + \frac{1}{24} - \left(2 - \frac{2\sqrt{23}}{\sqrt{24}}\right), -\sqrt{\frac{24}{23}}t + \sqrt{\frac{24}{23}} \geq 1 \end{cases}$$

Соответственно точка переключения: $t = 1 - \sqrt{\frac{23}{24}} \approx 0,02105498962$

Параметры пристрелки, которые мы должны получить в численном решении,учитывая что $\sqrt{\frac{24}{23}} = 1.02150783691$

α	x(0)	y(0)	$p_x(0)$	$p_y(0)$
0.0	0	0	1.0215078369104984	1.0215078369104984

Графики решений ;

График для У(t)

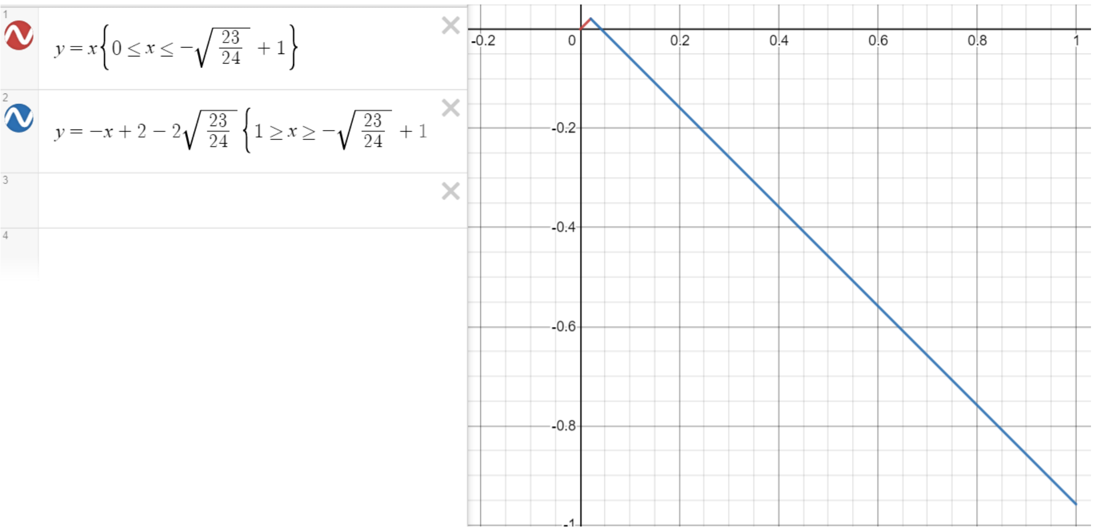
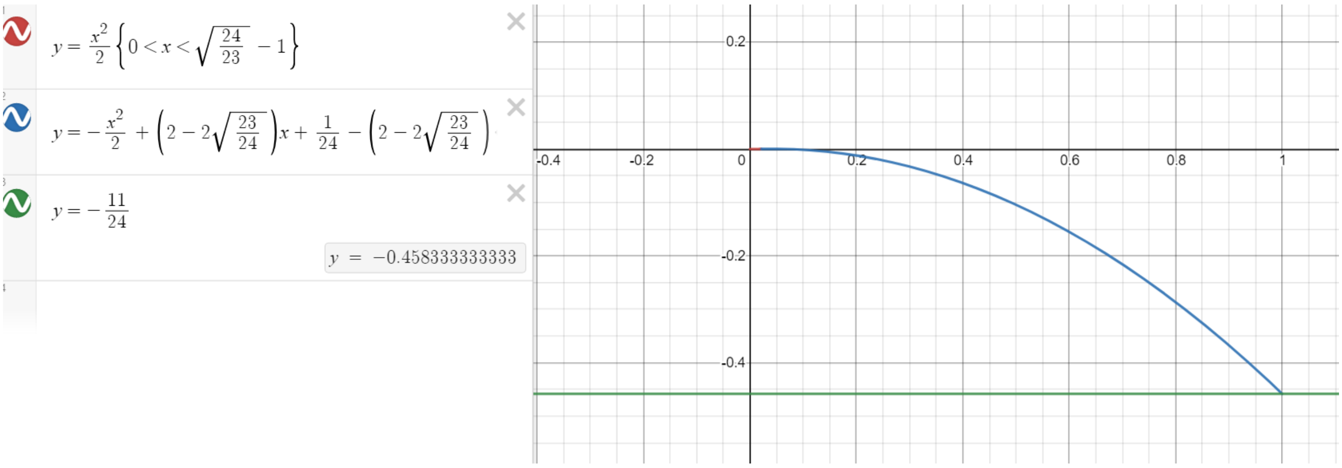


График для X(t)



В точке t = 0 результаты аналитического решения таковы :

x(0)	y(0)	$p_x(0)$	$p_y(0)$
0	0	1.0215078369	1.0215078369

Напомним результаты численного решения:

x(0)	y(0)	$p_x(0)$	$p_y(0)$
0	0	1.02150783685	1.02150783685

11 Список литературы

Список литературы

[1] И. С. Григорьев. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. — М., Издательство Центра прикладных иссле- дований при механико-математическом факультете МГУ, 2005.

[2] В. В. Александров, Н. С. Бахвалов, К. Г. Григорьев, Г. Ю. Данков, М. И. Зеликин, С. Я. Ищенко, С. В. Конягин, Е. А. Лапшин, Д. А. Силаев, В. М. Тихомиров, А. В. Фурсиков. Практикум почисленным методам в задачах оптимального управления — М.: Издательство Московского университета, 1988.

[3] Эрист Хайрер, Сиверт Пауль Нёрсетт, Герхард Ваннер. Решение обыкновенных дифференци- альных уравнений — М.: Мир, 1989.