第一章 弹性与滞弹性

(Elasticity and Anelasticity)

本章弹性部分要点与要求:

- (1)全面了解各类固体材料的弹性特点(类型、弹性变形能力、抵抗弹性变形的能力)
- (2) 认识晶体的弹性各向异性现象,掌握其弹性的描述方法,了解其弹性常数与晶体结构之间的关系
- (3) 掌握弹性变形的两类微观机理,了解弹性模量的相关因素及影响因素
- (4) 了解某些材料中的特殊弹性现象及原因

1.1 材料的弹性概述

弹性变形

随应力产生、且应力去除后消失的(那部分)变形

材料的弹性

材料受力作用时具有弹性变形能力的性质

注意

准确把握弹性变形的意义,要将其与塑性变形进行比较。

不同材料的弹性特点——(弹性变形能力和抗力特点)

金属: 弹性模量高 (Fe-210GPa, Cu-140GPa, Al-70GPa)

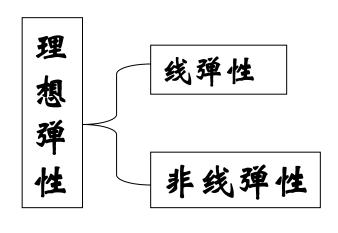
屈服前纯弹性变形量小(不超过0.5%,非晶及晶须除外)

陶瓷:弹性模量高(弹性变形量比金属还小,一般低于0.1%)

高分子:弹性模量低,高弹性

(橡胶等elastomer的最大弹性变形量一般在200%以上)

材料的弹性概述 - 固体弹性类别



应力-弹性应变之间成线性比例关系(金属及陶瓷材料中的典型弹性)

应力-弹性应变之间呈非线性关系 (典型代表是高分子材料中高弹体)



滞弹性

此

应力-弹性应变关系受时间的影响 (实际固体材料普遍特性)



理想弹性

应力-应变一一对应 应变为应力的"状态函数"; 应力-应变关系可逆

 $\varepsilon(\sigma)$

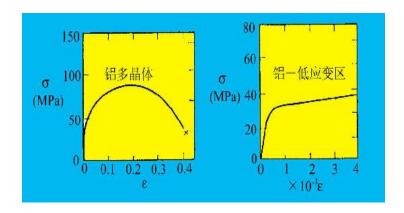
滞弹性

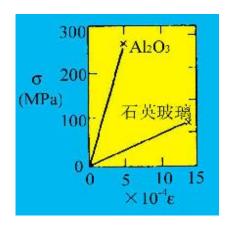
应变-应力与时间有关的多值函数: 应变-应力关系不可逆

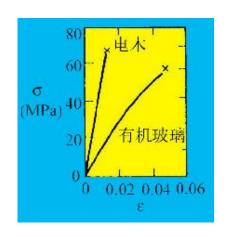
 $\varepsilon(\sigma,t)$

线弹性、非线弹性试验曲线

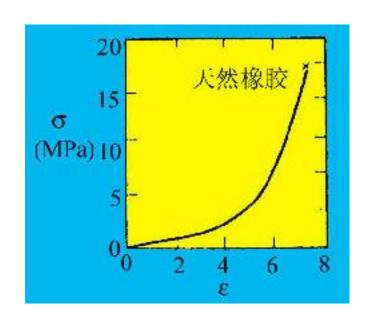
线弹性-金属、陶瓷部分高分子材料







非线弹性-高分子材料 高弹体(Elastomer)





弹性变形的时间特性

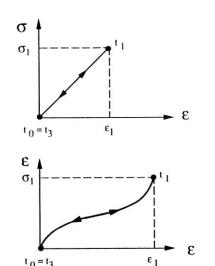
理想弹性

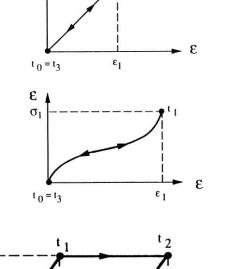
应变瞬间完成

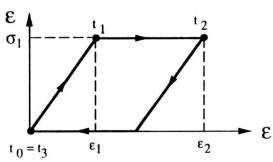
可逆 (线性/非线性)

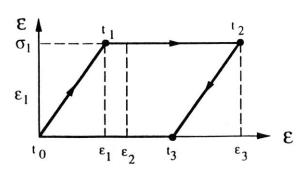
滞弹性

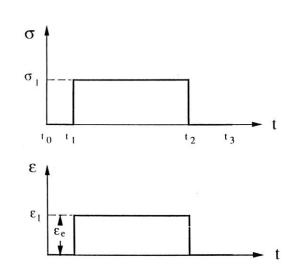
弹性应变滞后 不可逆 (能量损耗)

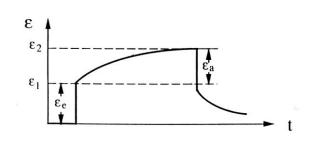


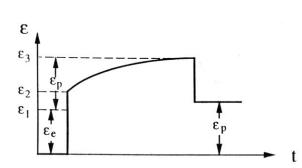












塑性变形-蠕变

应变不恢复

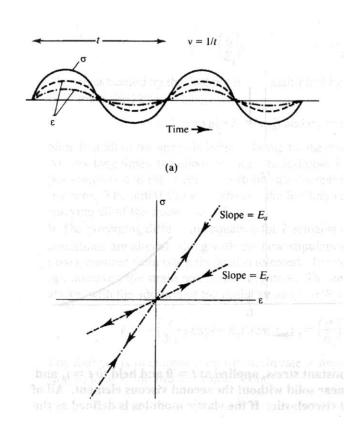
理想弹性与滞弹性对比曲线

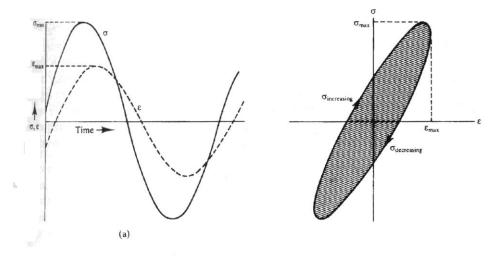
理想弹性:

- 应力 应变同相位
- 可逆

滞弹性:

- 应力 应变有相位差
- 不可逆 (能量损耗)





(a) The strain response to a cyclical stress when the applied stress frequency is comparable to the "natural" frequency of the viscoelastic material. In this case the strain "lags" behind the stress and the ratio of $\sigma_{\max}/\varepsilon_{\max}$ lies between E_r and E_u . (b) A crossplot of stress vs. strain from (a). The stress-strain behavior is different on loading $(\sigma_{\text{increasing}})$ and unloading $(\sigma_{\text{decreasing}})$. The area enclosed by the σ - ε curve represents hysteretic elastic work performed each cycle, and is manifested by heat

1.2 理想弹性 (Ideal elastic deformation)

一一金属与陶瓷应力-弹性应变关系

Hooke's law

性能参量

单 应 状 正应力一应变

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Young's modulus E

"横向收缩"效应

$$v = -\frac{\mathcal{E}_{\perp}}{\mathcal{E}_{//}}$$

Poisson's ratio

切应力一应变

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

shear modulus G

各向同性材料中
$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

多向应力状态下

$$\varepsilon_{x} = \frac{\sigma_{x}}{E} - \upsilon \cdot \frac{1}{E} \left(\sigma_{y} + \sigma_{z} \right)$$

晶体的弹性各向异性

室温下铜的杨氏模量:

$$E_{\{111\}} = 191.1$$
GPa,

$$E_{\{100\}}$$
=66.7GPa

相同正应力,沿着{111}面法向时所产生的弹性变形,仅是沿着{100}面法向时变形量的大约1/3!

晶体各向异性表现

- 磁晶各向异性
- 磁致伸缩
- 光线传输

共性原因:

原子(或离子)空间排列情况,不同晶体学方向上不同

应力张量、应变张量关系表达式

$$\varepsilon_{ij} = S_{ij11}\sigma_{11} + S_{ij12}\sigma_{12} + S_{ij13}\sigma_{13} + S_{ij21}\sigma_{21} + \dots + S_{ij33}\sigma_{33}$$

记做:

$$\varepsilon = S\sigma$$

$$\sigma_{ij} = C_{ij11}\varepsilon_{11} + C_{ij12}\varepsilon_{11} + C_{ij13}\varepsilon_{13} + C_{ij21}\varepsilon_{21} + \dots + C_{ij33}\varepsilon_{33}$$

记做:
$$\sigma = C\varepsilon$$

 S_{ijkl} 与 C_{iikl} 分别称作弹性柔度系数和弹性常数,是材料常数 它们分别是9x9阶矩阵,各有81个数值!

4阶张量,34个数值

应力应变张量各有6个"有效"值 胡克定律可简化为:

正应变分量

切应变分量

$$\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23} = \gamma_{yz}$$

$$\varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13} = \gamma_{xz}$$

$$\varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} = \gamma_{xy}$$

正应力与切应力分量

$$\sigma_1 = \sigma_{11}$$
 $\sigma_2 = \sigma_{22}$ $\sigma_3 = \sigma_{33}$

$$\sigma_4 = \sigma_{23}$$
 $\sigma_5 = \sigma_{13}$ $\sigma_6 = \sigma_{12}$

$$\sigma_6 = \sigma_{12}$$

广义胡克定律简化形式中的应力-应变量

简化胡克定律中的量

应力、应变张量分量

$$\sigma : \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \cdot & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \cdot & \cdot & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \cdot & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \cdot & \cdot & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}: \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_6 & \boldsymbol{\varepsilon}_5 \\ \cdot & \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \boldsymbol{\varepsilon}_4 \\ \cdot & \cdot & \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11} & 2\boldsymbol{\varepsilon}_{12} & 2\boldsymbol{\varepsilon}_{13} \\ \cdot & \boldsymbol{\varepsilon}_{22} & 2\boldsymbol{\varepsilon}_{23} \\ \cdot & \cdot & \boldsymbol{\varepsilon}_{33} \end{pmatrix}$$

1.3 广义胡克定律与晶体弹性各向异性

比较弹性变形规律表达形式

前面的多向应力状态下:
$$\varepsilon_{x} = \frac{\sigma_{x}}{E} - \upsilon \cdot \frac{1}{E} \left(\sigma_{y} + \sigma_{z} \right) \left[E \cdot G \hbar \nu \right]$$

适用对象:各向同性材料!

(2个独立材料弹性常数)

应力-应变张量形式:

S

(形式上是36个数值描述材料弹性)

独立材料弹性常数个数及原因分析:

- (1) 各向同性材料中,一定也是两个独立的弹性常数!
- (2) 各向异性材料中独立弹性常数超出2个。
- (3) 引入张量表达式及更多的材料弹性常数: 原因是表达晶体材料弹性的各向异性所需

室温下铜的杨氏模量: $E_{\{111\}}$ =191.1GPa, $E_{\{100\}}$ =66.7GPa

晶体的弹性各向异性

室温下铜的杨氏模量: $E_{\{111\}}$ =191.1GPa, $E_{\{100\}}$ =66.7GPa

晶体弹性各向异性的归纳分析

- (1) S表达了晶体弹性各向异性
- (2) 与晶体结构的关系是什么?
- (3) 典型晶体结构中形式如何? 特别是能否有比较简化的形式?
- (4) 在各向同性的特殊情况下,与"经典"的结论相符,如何具体体现?

晶体的弹性常数与晶体对称性关系

- 一般性结论(弹性力学理论证明):
- 随晶体结构对称性提高,独立的材料弹性常数个数逐渐减少
- 对称性最低的晶体(三斜晶体),也存在关系: $S_{ij} = S_{ji}$ 因而最多需要21个独立的弹性常数描述其弹性

立方晶体: 3个独立弹性柔度系数,采用<u>晶轴坐标系</u>时 $S_{11}=S_{22}=S_{33},\ S_{12}=S_{13}=S_{23},\ S_{44}=S_{55}=S_{66}$ 其余为零

分析例:分别沿着[100]、[010]、[001] 为析例:分别沿着[100]、[001] 为向施加相同数值的单轴正应力 σ_0 ,应变量 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ 和 ε_{33} 分别是 $S_{11}\sigma_0$ 、 $S_{22}\sigma_0$ 和 $S_{33}\sigma_0$;由于原子排列的等价性,这三个正应变也应当相同。依此: $S_{11}=S_{22}=S_{33}$



$$egin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \ \end{pmatrix}$$



立方晶体特殊情况的应力一应变关系

广义胡克定律

立方晶体承受[100] 方向的单轴正应力

2600 沿[100]方向施加单轴正应力 σ_0 ,即 $\sigma_1 = \sigma_0$,而其余5个应力分量都为0,因此,[100]方向的正应变 $\varepsilon_1 = S_{11}$ σ_0

晶面(HKL)的正应变弹性模量 $E_{
m (HKL)}$ 定义:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

(HKL)面的[UVW]方向上切变弹性模量G:

$$G_{\text{(HKL)[UVW]}} = \frac{\tau}{\gamma}$$

立方结构晶 体中的正弹 性模量

$$\frac{1}{E_{\rm HKL}} = S_{11} - 2 \left[S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2} S_{44} \right] \left(l_1^2 l_2^2 + l_2^2 l_3^2 + l_3^2 l_1^2 \right)$$

各向异性系数

$$A = \frac{2(S_{11} - S_{12})}{S_{44}}$$

li为(HKL)面法向与第xi轴(某个<100>方向)的夹角余弦

与上述三个弹性常数之间的关系可以按照下列步骤计算得出:

- (1) 假设相应的作用应力(单向应力)
- (2) 将此应力通过坐标转换给出晶体坐标系下的应力张量
- (3) 依据胡克定律计算出应变张量
- (4) 坐标转换计算出所关心的晶面(及方向)上的应变
- (5) 计算出相应的弹性模量数值

晶体弹性 各向异性

一些立方系金属的弹性常数及各向异性系数

金属	弹性柔度 (x 10 ⁻¹¹ Pa ⁻¹)			弾性模量(GPa)		各向异性
	S ₁₁	S ₁₂	S ₄₄	E_{111}	E_{100}	系数 A
钼	1.57	-0.57	3.51	76.1	63.7	1.19
铜	1.50	-0.63	1.33	191.1	66.7	2.87
金	2.33	-1.07	2.38	116.7	42.9	2.72
铁	0.80	-0.28	0.86	272.7	125.0	2.18
镍	0.73	-0.27	0.80	303.0	137,0	2.50
钨	0.26	-0.07	0.66	384.6	384.6	1.00

各向同性立方 晶体材料中, 只有两个独立 弹性柔度系数

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{pmatrix}$$

六方晶体的弹性常数

采用晶轴坐标系射

弹性常数矩阵

5个独立弹性系数:

$$C_{11}=C_{22},\ C_{33},\ C_{12},\ C_{13}=C_{23}$$

 $C_{44}=C_{55},\ C_{66}=(C_{11}-C_{12})/2$
共余为零

$$egin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & rac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) \end{pmatrix}$$

课后思考:

正方晶系, 晶轴坐标系下

- (1) 依据晶体结构对称性,分析 C_{44} 、 C_{55} 、 C_{66} 的关系及其意义;
- (2) 写出Txv与各应变分量的关系表达式

晶体材料弹性各向异性的实际意义

各向异性材料

- 单晶材料应用
- 多晶织构材料的性质

各向同性材料

- · 各向同性材料 (如W的弹性)
- •多晶无织构材料
- 宏观各向同性,是各向异性的平均
- 一伴随效应:外部作用造成内部各晶 粒变化的不协调而产生内部"应力"

其它方面

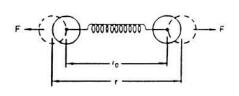
固态相变是调整材料性能的重要手段之一。固态转变过程中,基体中析出的第二相粒子,常具有特定形状(如薄片状等),而且两相之间有特定的位向关系。

原因:固态相变中晶格错配引发弹性畸变能,受到基体相弹性各向异性的影响。适当的取向关系可以使弹性畸变能降至最低,从而使第二相析出阻力最小。

1.4 弹性变形本质与弹性模量的规律

金属与陶瓷材料

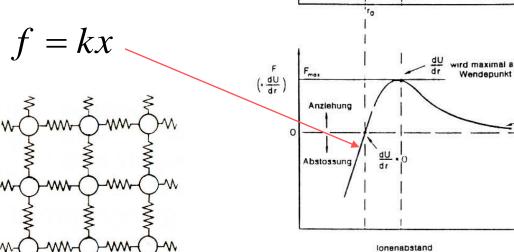
弹性的原子结合能解释



$$U(r) = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}$$

$$U(r) = -\frac{1}{2}kx^2$$

理想弹簧:



原子结合特征 的弹簧示意:

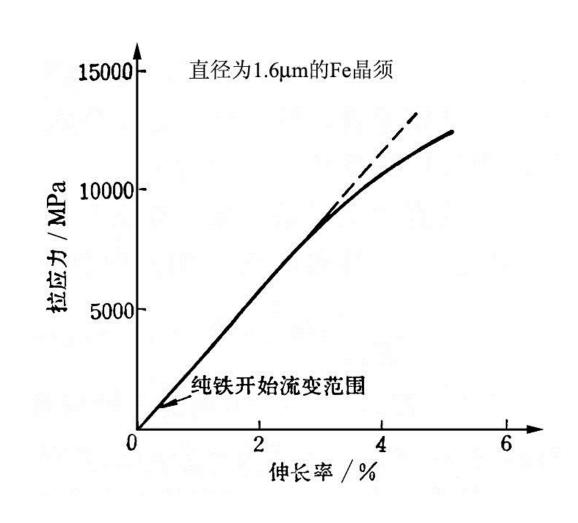
金属晶须的非线性弹性变形与弹性变形的极限

拉伸曲线:

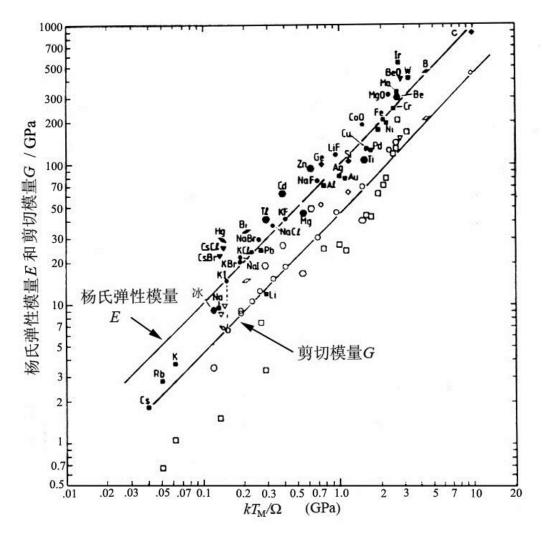
高应变量下, 弹性 明显偏离线弹性

原因?

固体中原子结合能, 不等同于理想的弹 ——不是对称的 抛物线关系



固体中原子结合能曲线——弹性变形的极限约10%

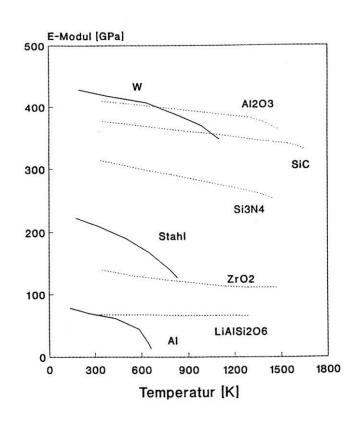


 $E = 100kT_{\rm M}/\Omega$

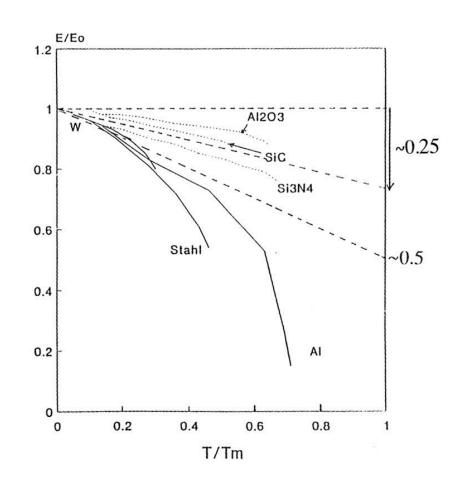
Tm —— 熔点 k —— Boltzmann Ω ——原子体积

常数

温度对弹性模量的影响



金属的弹性模量随温度升高的下降速度比陶瓷材料高出大约1倍—高温下,希望用陶瓷材料替代金属



$$\frac{T_{M}}{E_{O}} \cdot \frac{dE}{dT} \approx \frac{-0.5 \text{ Metal}}{-0.25 \text{ ceramics}}$$

弹性模量属于非组织敏感特性

弹性变形涉及材料中每个原子,是整体平均效果,而且每个原子的贡献是平均的。要改变材料的弹性,需要显著改变材料的原子组成。这样的性质或性能,对于材料的局部变化不敏感。这类性质称为内秉参量,或组织不敏感参量。

其相反面——组织敏感性能:

所涉及的状态变化起源于局部,并经历一个比较漫长的发展过程后,影响全局。这样的性能对于材料的局部性质非常敏感。

1.5 高分子材料的弹性

第一类键合能机制

弹性变形时,键长、键角要改变——共价键

一次键: C-C结合能很高, 全刚石弹性模量很高, E=1000GPa

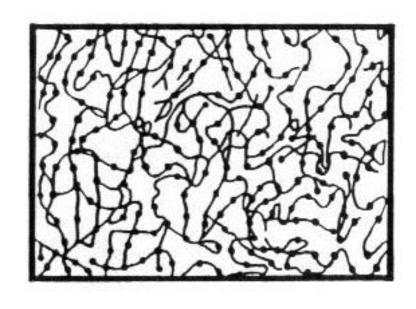
<u>分子键</u>:热塑性塑料在玻璃化温度以下,分子链问依靠分子问 力作用交联。分子键能量低,弹性模量低。

第二类 熵机制

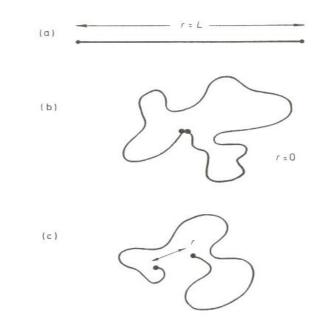
变形时,分子链中C-C键的键长、键角基本上不改变。通过C-C键内旋转来改变分子链的打开长度,而产生显著的宏观变形

高分子材料的熵弹性

处于高弹性状态的弹性体, 其分子接近于线状链



一个高分子链三种张 开状态示意图



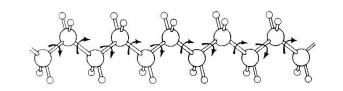
基本出发点:分子链的打开长度改变对应于宏观尺寸的变化 不改变C-C结合键的键角或键长,能否改变分子链的打开长度?

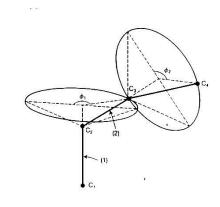
不改变C-C结合键的键角或键长,改变分子链打开长度所产生的变形,是否是弹性变形?

高弹体是链状高分子

C-C键保持键长和键角都不改变的情况下,一维的长链可以通过键的旋转来改变起端和终端之间的距离

C-C键发生<u>内旋转</u>,保持键 角和键长不变,键合能量几 乎不变,所需应力很低。





内旋转图像

基本出发点:分子链的打开长度改变对应于宏观尺寸的变化 链状高分子,保持键角和键长不变的情况下,通过C-C键内旋转完成打开长度的变化——即发生宏观变形。 由于键合能量几乎不变,变形所需应力很低。

高分子材料的熵弹性

高分子链三种张开状态

差别?稳定态?

$$G = U + PV - TS$$



(b)

(c) 5

按照无轨行走规则,可以确定大分子链的打开长度与分子链节之间的关系——最可几长度,对应于最高熵

大分子两端的打开长度,决定了分子中原子结合组态可能方式的数量,因此,决定了该分子的熵S

高弹体的弹性变形原因

大分子链的打开长度决定了分子的熵S;

未受力作用时,材料中所有分子的打开长度呈现的分布对应于体系的组态熵很高的状态,以此使体系的自由焓G=U+PV-TS处于低值的稳定状态;

受力作用,发生弹性变形时,各分子的"打开长度"发生变化,使体系熵降低,从而使体系自由焓升高。

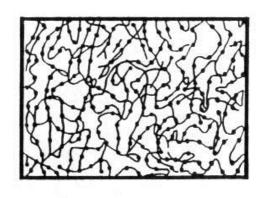
当外力去除时,体系要恢复其低能状态,方式是各分子的"打开长度"恢复原值,对外表现为变形的恢复,从而表现出弹性。

改变分子链打开长度所产生的变形是弹性变形。

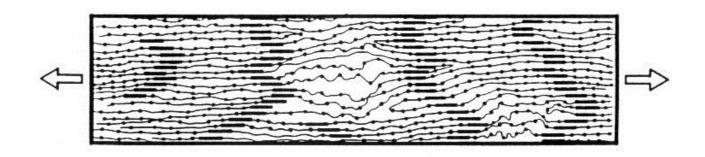
高弹体的弹性变形微观图像

分子链沿着外力方向伸展,张开位移增大

受力作用前



受力作用后



高弹体弹性变形的特性

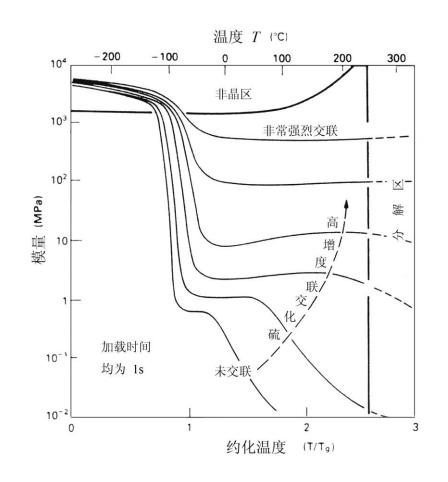
变形过程的阻力来自熵的变化,与结合键能无关,阻力低。 交联、成立体网络的材料,限制内旋转,降低熵变弹性变 形能力,提高弹性模量

橡胶:

硫化交联由液态变体 交联度提高,弹性模量提高

思考:

熵弹性机制下,弹性模量随 着温度如何变化?



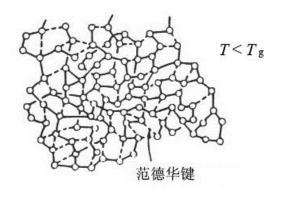
高分子材料的弹性变形与弹性模量

热塑性塑料

玻璃化温度以上变形时,分子键的键长、键角基本不改变,应力作用帮助分子链改变打开长度而宏观变形。 弹性模量非常低

T<Tg时,分子链间依靠分子间力作用交联。变形时,分子键的键长、键角要改变——分子键能量低,故此弹性模量低,通常1GPa。



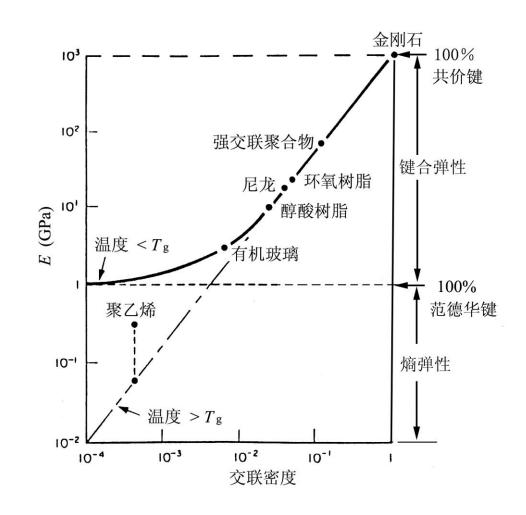


热固性塑料

键合与熵机制共存。分子链一般严重交联,形成立体网状。 弹性变形时,键合机制对变形贡献小(可忽略)。

主要看交联对于分子链 打开长度的限制作用。 故此,弹性模量正比于 "交联度"。

交联的极端情况: 金刚石, 不再有键长和键角都不变时的旋转, 具有极高的弹性模量



1.6 材料中特殊弹性

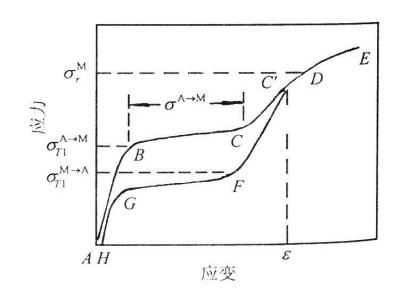
一、SME与SMA

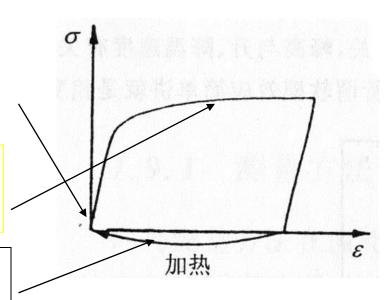
- 1、形状记忆合全(SMA)中的 **份弹性**(pseudo-elasticity), 又称超弹性(可以达到2%甚 至更高的弹性变形)
- 2、形状记忆效应(SME)

低温下,切变机制发生热弹性马氏 体相变,马氏体与奥氏体共格

马氏体具有多种变体,在外应力作用下界面移动发生塑性变形

加热时马氏体转变成舆氏体,回 到初始形状





Ti-Ni合全的SME曲线

材料中特殊弹性

SMA的伪弹性

Ag-Cd合金的伪弹性

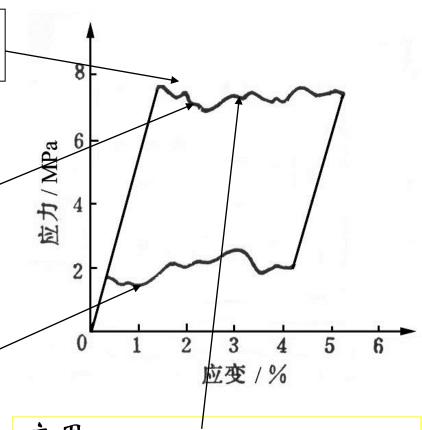
温度在马氏体开始转变温度以上,但不能太高

应力诱发马氏体相变: 奥氏体受力发生马氏体转变 +

多种马氏体变体切变变形 → 宏观变形

应力去除,马氏体回到母相奥氏体的形态、恢复原始形状

宏观表现为弹性变形 本质上是马氏体的塑性变形

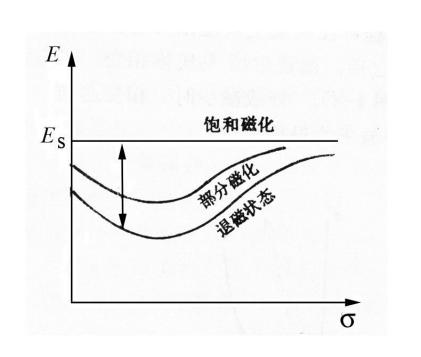


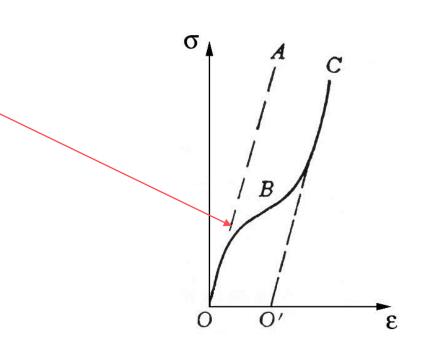
应用:

恒应力弹簧——矫形, 镜框 储能——高应力、大变形量

二、磁有序物质的弹性模量损失, ΔE 效应

磁致伸缩效应与应力耦合,使 应力作用下发生磁化,磁化又 导致附加的磁致伸缩而产生额 外变形,因而降低弹性模量





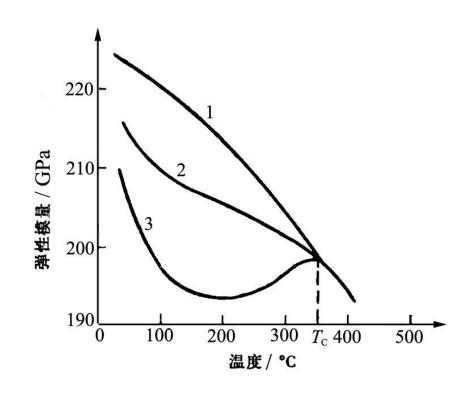
退磁状态下该效应显著。

而磁化饱和状态下,应力不会 再导致磁致伸缩而产生附加的 弹性变形,故模量恒定。

铁磁、亚铁磁与反铁磁物质弹性模量损失、 ΔE 效应

曲线1与3分别是磁化饱和与退磁两种状态下测量得到的弹性模量随着温度的变化曲线。二者之间的差别是弹性模量损失的具体表现

温度升高,磁化强度降低,磁 致伸缩减弱,模量损失减小



<u>恒弹性合金</u>—利用铁磁性、正铁磁性、反铁磁性金属中的效应可以达到在一定温度范围内弹性模量基本不变,或利用某些材料的特殊性获得恒弹性。

材料构件的刚度

材料构件的刚度:承受载荷与弹性变形之比,表征构件在给定载荷作用下抵抗弹性变形的能力

承受单向拉、压应力的杆状构件,其刚度可以简单表示为: EA 刚度是对构件而言的,必须给出构件的特征参数(如横截面积A) 其中包括材料的特性,E

注意:不同形状的构件,以及所承受的不同形式的载荷,刚度的表达式不同。需要借助工程力学的知识加以具体分析

在运动耗能构件中,往往需要考虑比刚度,在满足刚度需求的情况下,尽量减少材料的用量(也就是承载面积)。比刚度就是刚度与材料密度的比值。

木材因为其天然性、和密度较低的特点,具有较高的压杆稳定性,广泛用作支柱材料。

材料弹性简单归纳总结

材料弹性特征—弹性变形能力,弹性模量,应变-应力关系类型 材料弹性类型—<u>线</u>弹性、<u>非线</u>弹性;<u>滞</u>弹性

晶体材料的<u>弹性各向异性</u>现象——线弹性范围内 广义胡克定律

晶体弹性常数:独立弹性常数的个数与晶体的对称性密切相关; 立方晶体最少,3个独立;各向同性时2个常数独立

弹性机理

结合能弹性——与熔点关系,温度的影响规律 **熵弹性**

弹性反常(特性内容): SME中伪弹性,铁磁性合金的磁致伸缩 反常与恒弹性合金