材料科学与工程学院

第14次课

主讲：叶荣昌

§ 3.7 应力强度因子理论及断裂韧性

Griffith判据是根据热力学原理得出的断裂发生的必要条件，但这并不意味着断裂一定发生。

对于含裂纹构件，在服役过程中，裂纹是否扩展，以多大速度扩展，与裂纹尖端附近的应力场直接相关。

应力强度因子理论利用线弹性力学的基本原理，分析裂纹前沿的应力-应变状态及裂纹扩展规律，并在此基础上建立断裂判据，在工程上得到广泛应用。

3.7.1应力强度因子理论

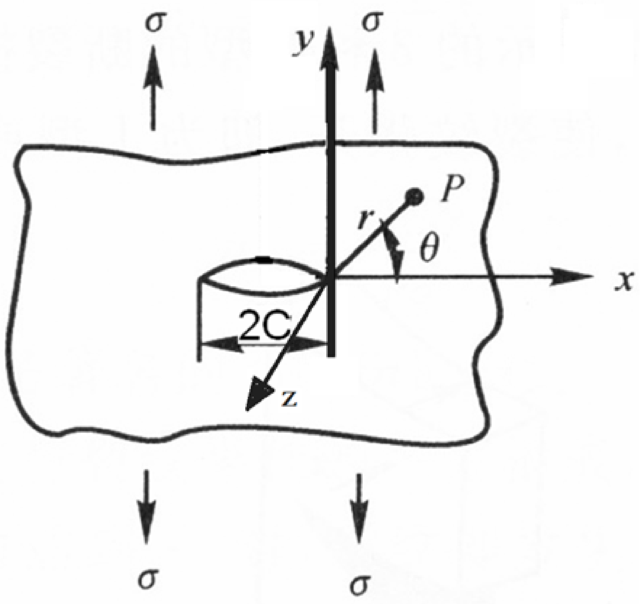
——线弹性假设

一、裂纹前沿应力场分布（Irwin，1957年）

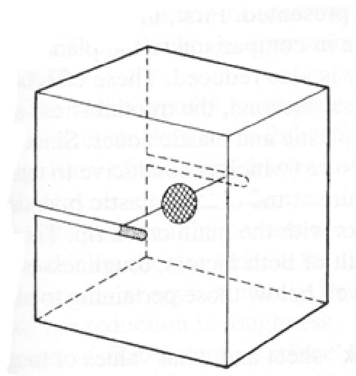
- 无限大平板
- 两端作用平行分布拉应力
- 穿透尖裂纹2c

——I型裂纹

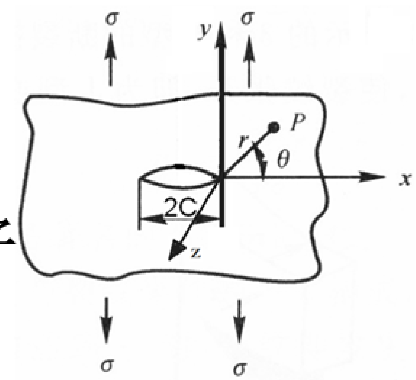
（c > r > ρ，ρ为裂纹尖端曲率半径）



•平面应变状态 ——含裂纹厚板的中心部位



裂纹前沿某点$P(r,\theta)$应力分量



$$
\left.\begin{cases}
\sigma_x = \sigma\left(\dfrac{c}{2r}\right)^{1/2}\left[\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right)\right] \\
\sigma_y = \sigma\left(\dfrac{c}{2r}\right)^{1/2}\left[\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right)\right] \\
\sigma_z = \nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right) \\
\tau_{xy} = \sigma\left(\dfrac{c}{2r}\right)^{1/2}\left[\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2}\right]
\end{cases}\right\}
$$

公共因子 $\sigma c^{1/2}$

——应力强度因子

I型中心穿透裂纹

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi c}$$

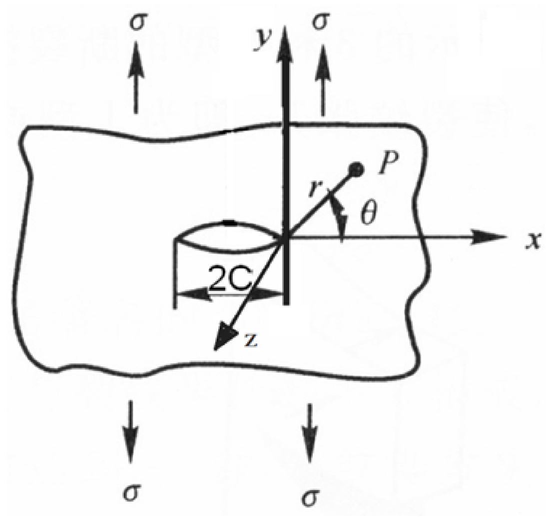
$$
\left.\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\
\sigma_y = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\
\sigma_z = \upsilon\left(\sigma_x+\sigma_y\right) \\
\tau_{xy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2}
\end{cases}\right\} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_i(\theta)
$$

•平面应力状态——薄板

裂纹尖端附近某点$P(r,\theta)$应力分量

$$\left.\begin{cases}\sigma_x = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} \end{cases}\right\} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{\mathrm{i}}(\theta)$$

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$



裂纹正前方(θ=0)的应力分布

➢ 平面应力状态

$$\begin{cases}\sigma_{\mathrm{x}} = \sigma_{\mathrm{y}} = \dfrac{\mathrm{K_I}}{\sqrt{2\pi \mathrm{r}}} \\ \sigma_z = 0 \\ \tau_{yz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\end{cases}$$

——两向拉应力状态

➢ 平面应变状态

$$\begin{cases}\sigma_{\mathrm{x}} = \sigma_{\mathrm{y}} = \dfrac{\mathrm{K_I}}{\sqrt{2\pi \mathrm{r}}} \\ \sigma_{\mathrm{z}} = \upsilon\left(\sigma_{\mathrm{x}} + \sigma_y\right) \\ \tau_{yz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\end{cases}$$

——三向拉应力状态

主观题 10分

请分别计算两种情况下的应力状态软性系数（υ=0.3）

裂纹正前方(θ=0)的应力分布

➢ 平面应力状态

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_z = 0 \\ \tau_{yz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{cases}$$

——两向拉应力状态

➢ 平面应变状态

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_z = \upsilon(\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{yz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{cases}$$

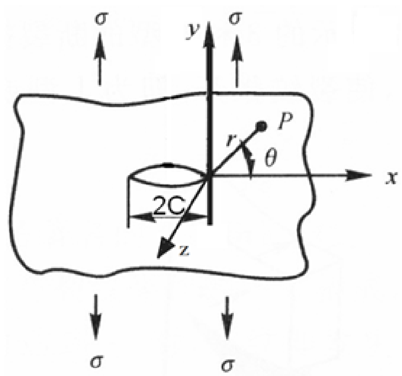
——三向拉应力状态

裂纹正前方(θ=0)的应力分布

- 平面应力状态

$$\begin{cases}\sigma_x=\sigma_y=\dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\\ \sigma_z=0\\ \tau_{yz}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0\end{cases}$$

——两向拉应力状态



- 平面应变状态

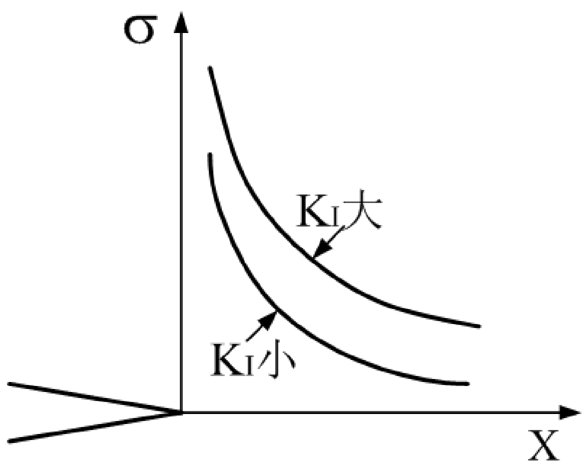
$$\begin{cases}\sigma_x=\sigma_y=\dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\\ \sigma_z=\upsilon(\sigma_x+\sigma_y)\\ \tau_{yz}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0\end{cases}$$

——三向拉应力状态

•裂纹尖端正前方切应力分量为0，正应力分量最大，裂纹最易沿x轴方向扩展。

•正应力大小随r变化

•应力强度因子K_I越大，应力集中程度越高



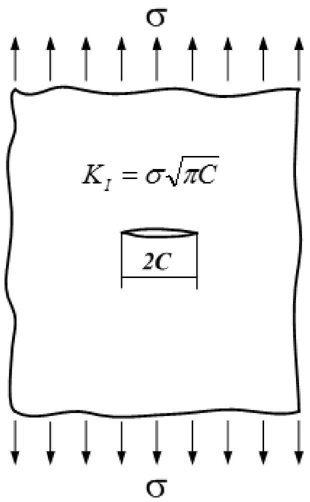
K因子取决于外加应力、裂纹几何形状、尺寸及其在裂纹体中的位置等。

I型裂纹应力强度因子的一般表达式

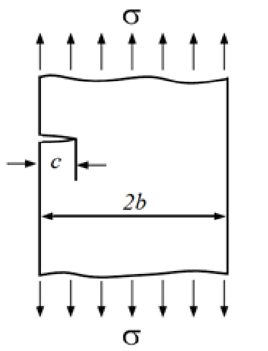
$$K_{\mathrm{I}} = Y\sigma\sqrt{c} \qquad (MPa\sqrt{m})$$

式中，Y—形状因子，无量纲；
σ—外加应力，c—裂纹尺寸

无限大板中心穿透裂纹

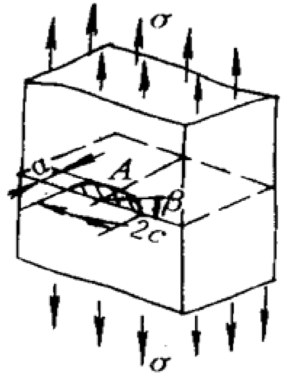


有限宽板单边直裂纹



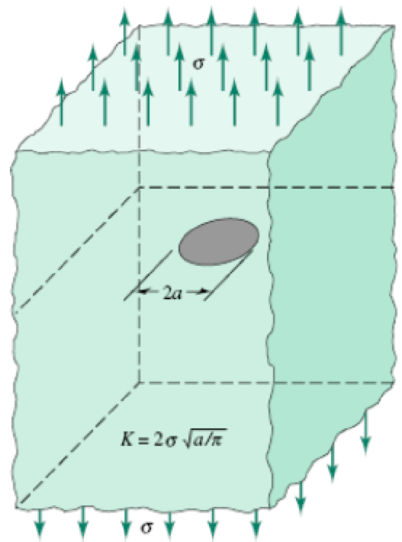
$K_I = \sigma\sqrt{\pi c}\cdot f(\frac{c}{b})$

无限大物体表面有半椭圆形裂纹



$K_I = \frac{1.1\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi}$

无限体内含圆盘状裂纹

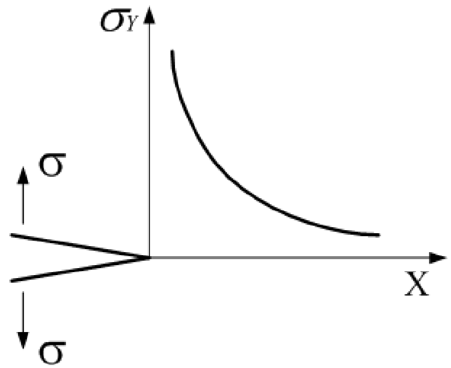


二、I型裂纹前沿塑性区及其应力强度因子的修正

应力强度因子K理论是建立在线弹性断裂力学基础上
——假定裂纹尖端处于线弹性状态

I型裂纹前沿应力分布

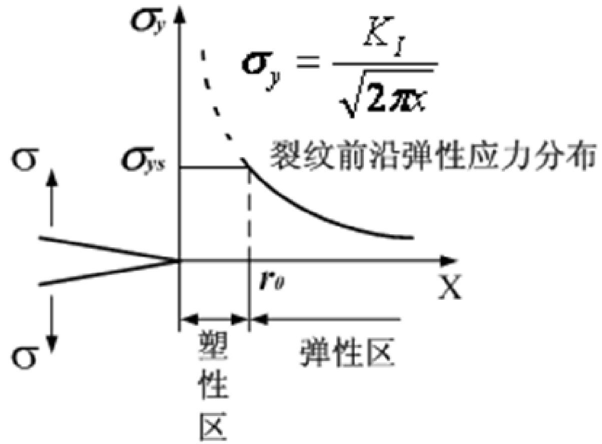
$$\left.\begin{matrix}\sigma_x \\ \sigma_y\end{matrix}\right|_{\theta=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}$$



- 当 $x \to 0,\ \sigma_x, \sigma_y \to \infty$
- 实际情况

——裂纹前沿应力不可能无限增大

当裂纹前沿的应力σ达到材料的**有效屈服极限σ_{ys}**时，裂纹前沿的材料发生屈服，应力集中得到松弛。



问题的提出：

•裂纹前沿呈现弹塑性状态，不再满足线弹性状态假设

——应力强度因子理论还是否适用？

——如何评价塑性区的影响？

研究表明，如果裂纹前沿塑性区很小，又被弹性区所包围，经过必要的修正后，应力强度因子理论仍可适用。

问题的关键：

——裂纹前沿材料的屈服条件？

——裂纹前沿塑性区有多大？

——如何评价塑性区的出现对裂纹前沿应力强度因子的影响？

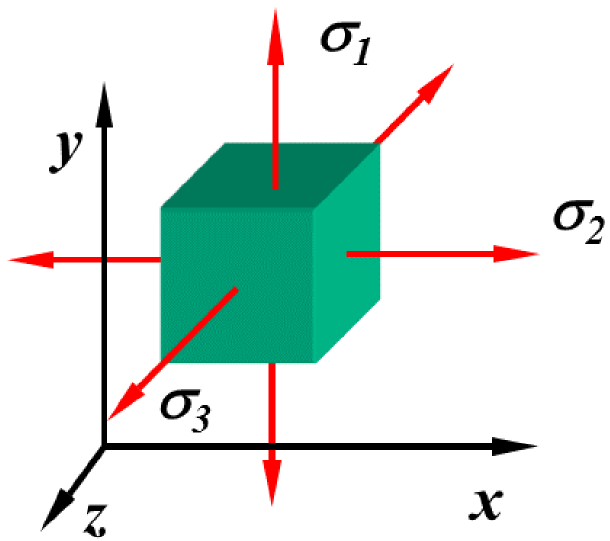
1、裂纹前沿屈服判据及塑性区尺寸

（1）材料的屈服判据

Tressca 判据　　$\tau_{max}=\tau_s$

在材料内部任一点，必然存在三个主应力σ_1、σ_2和σ_3（$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$），其与最大切应力$\tau_{max}$之间满足如下关系

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

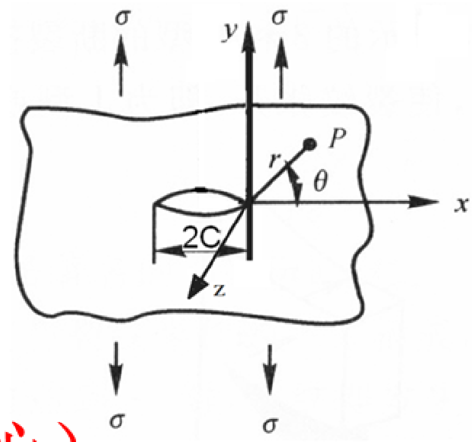


材料的塑性变形行为与应力状态密切相关，在不同应力状态下，塑性变形行为会表现出较大差异。

- 单轴拉伸状态
- 两轴拉伸状态
- 三轴拉伸状态

——三向拉伸状态抑制了塑性变形的发生，使塑性变形必须在更高应力水平下进行。为了方便讨论，**把达到屈服的最大主应力σ_1定义为有效屈服应力**，用σ_{ys}表示，即$\sigma_1 = \sigma_{ys}$

（2）裂纹前沿屈服判据



•平面应变状态（厚板中心）

——裂纹尖端附近区域处于三向应力状态

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\
\sigma_y = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\
\sigma_z = \upsilon\left(\sigma_x+\sigma_y\right) \\
\tau_{xy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2}
\end{cases}
$$

特殊方向：

θ＝0，裂纹前沿x轴正向

$$
\begin{cases}
\left.\begin{array}{l}\sigma_x \\ \sigma_y\end{array}\right|_{\theta=0} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \\
\sigma_z = \nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right) = \dfrac{2\nu K_I}{\sqrt{2\pi x}} \\
\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0
\end{cases}
$$

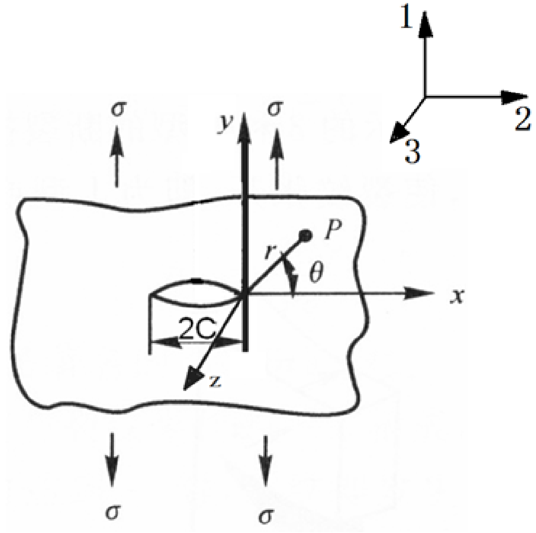
——三向拉伸状态

令$\sigma_1=\sigma_y$， $\sigma_2=\sigma_x$， $\sigma_3=\sigma_z$

当$\tau_{max}=\tau_s$时，材料屈服

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{\sigma_1-2\nu\sigma_1}{2}=\frac{\sigma_1(1-2\nu)}{2}=\tau_s$$

$$\Rightarrow \sigma_1=\frac{2\tau_s}{1-2\nu}=\frac{\sigma_s}{1-2\nu}$$



•平面应变状态下裂纹前沿屈服判据

$$\sigma_1=\sigma_{ys}=\frac{\sigma_s}{1-2\nu}$$

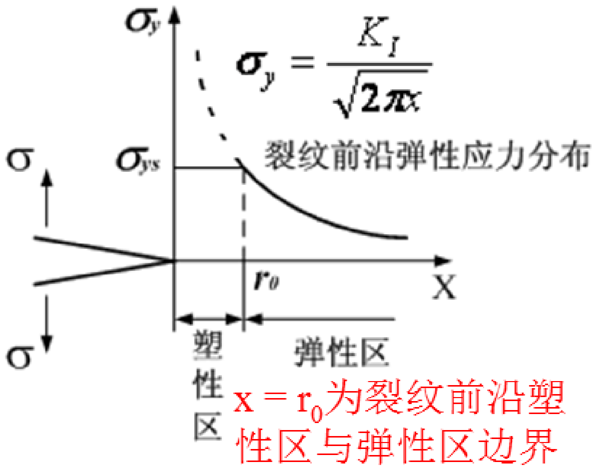
式中，ν—泊松比，ν=0.25～0.35

•平面应力状态下裂纹前沿屈服判据

$$\sigma_1=\sigma_{ys}=\sigma_s$$

平面应变状态下材料塑性变形抗力增大，塑性变形更加困难。

（3）裂纹前沿塑性区尺寸



屈服后I型裂纹前沿x轴方向（θ＝0）的应力分布（未考虑应力重新分布的影响）

平面应变条件下

$x \le r_0$，裂纹前沿塑性区的应力

$$\sigma_y\big|_{\theta=0} = \sigma_{ys} = \frac{\sigma_s}{1-2\nu}$$

$x \ge r_0$，塑性区以外弹性区的应力

$$\sigma_y\big|_{\theta=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}$$

平面应变条件下裂纹前沿塑性区的尺寸

$$r_0 = \frac{(1-2\nu)^2}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_S}\right)^2$$

平面应力状态下裂纹前沿塑性区的尺寸

$$r_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_S}\right)^2$$

$$r_{0\text{平面应变}} = (1-2\nu)^2\, r_{0\text{平面应力}}$$

2、应力松弛对塑性区的影响

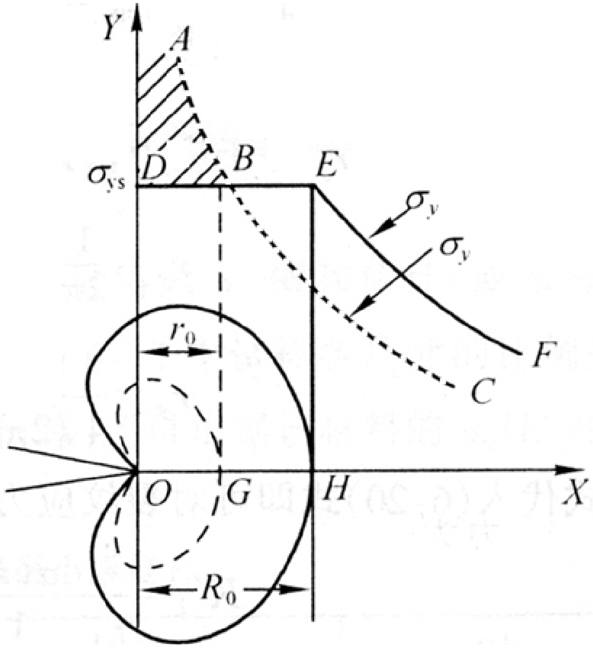
裂纹前沿实际应力分布状态：

——应力超出σ_{ys}的区域发生塑性变形，产生应力松弛，应力分布由AB段变为DB段

——松弛掉的应力由毗邻区域承担，导致塑性变形区域扩大，应力分布由BC段变为BEF段

因此，应力松弛及导致裂纹前沿塑性区尺寸进一步扩大

$$r_0 \rightarrow R_0 \ = ?$$



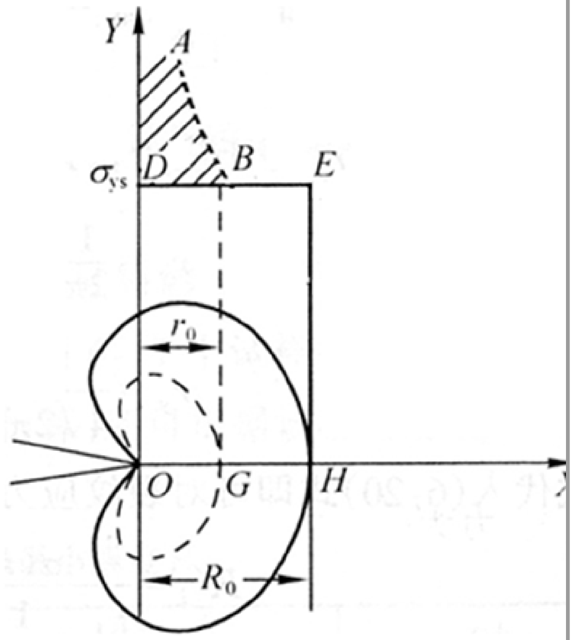
裂纹前沿应力-应变状态分布示意图

不考虑加工硬化及机械能损耗

→曲线ABC与曲线DBEF下积分面积应相等

•EF段与BC段曲线均代表弹性应力场的变化规律→FEH与CBG下的面积近似相等

•ABG下的面积应与DBEH下的面积相等



$$R_0 \cdot \sigma_{ys} = \int_0^{r_0} \sigma_y \big|_{\theta=0} dx = \int_0^{r_0} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} dx = \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} r_0^{1/2}$$

平面应变状态 $$R_0 = \frac{(1-2\nu)^2}{\pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_S}\right)^2 = 2r_0$$

平面应力状态 $$R_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_S}\right)^2 = 2r_0$$

考虑应力松弛效应后，裂纹前沿塑性区实际尺寸

在工程实际中，由于金属材料的加工硬化，即应变硬化效应，裂纹尖端塑性区尺寸比上面得到的结果要小。

3、裂纹前沿塑性区的空间分布

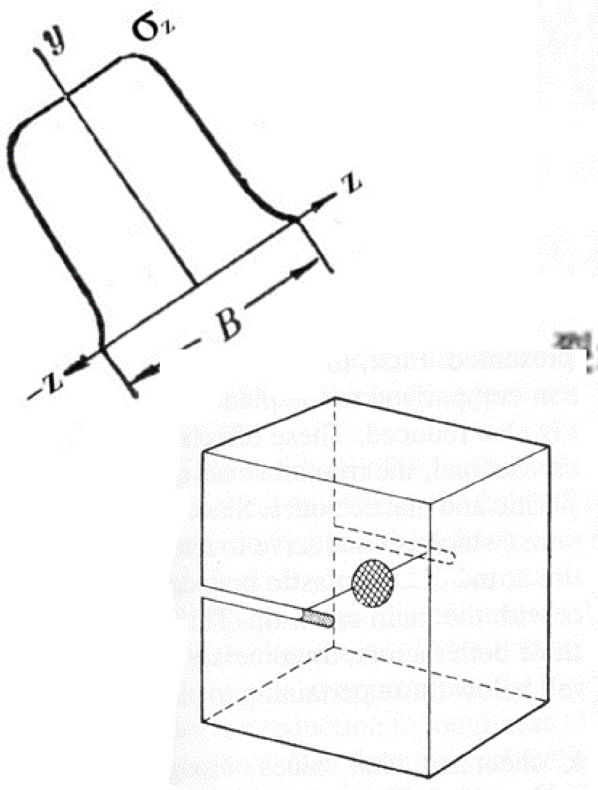
——裂纹前沿的塑性变形是在空间一定范围内发生的

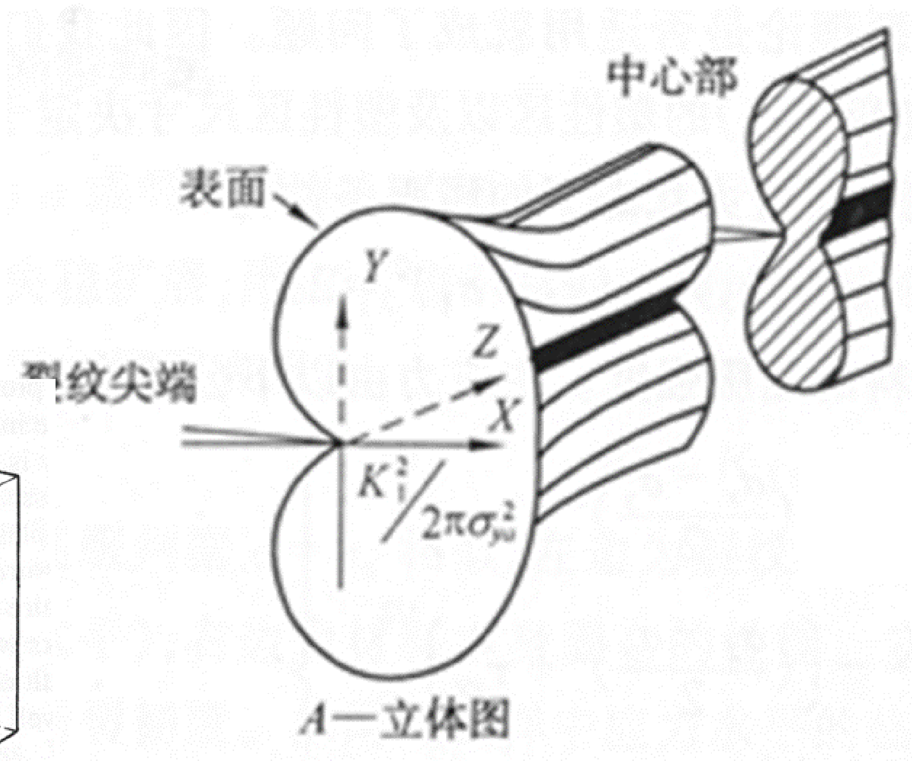
平面应变状态 $$r = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma_s}\right)^2\left[\cos^2\frac{\theta}{2}\left[(1-2\nu)^2 + 3\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\right]$$

平面应力状态 $$r = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma_s}\right)^2\left[\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 + 3\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

平面应变条件下的塑性区空间尺寸比平面应力条件下的要小得多，这主要是由于平面应变状态下裂纹尖端的塑性变形受到强烈约束所致。

无论是哪一种应力状态，裂纹前沿塑性区尺寸都是沿x轴方向最小，这意味着裂纹沿着这一方向扩展所消耗的塑性变形功最低，因此，裂纹倾向于沿着x轴方向扩展。





厚板裂纹前沿塑性区分布

一般而言，厚板裂纹体的表面为平面应力状态，而中间部分由于受变形约束影响为平面应变状态，由此导致裂纹前沿塑性区分布沿板厚方向是变化的，形成一种两头大、中间小的类似哑铃状形态。

4、应力强度因子K_I的修正

裂纹前沿材料发生塑性变形，裂纹前沿应力场分布呈弹塑性状态。

应力强度因子理论的适用条件——小范围屈服

(1) 物体尺寸要足够大，裂纹要有一定深度，物体表面平面应力状态对裂纹前沿的应力分布不产生影响；

(2) 裂纹前沿塑性区尺寸很小，明显小于弹性区；

(3) 裂纹尖端要足够尖锐，裂纹尺寸c要明显大于裂纹尖端曲率半径ρ（ $c>>\rho$），必须是裂纹而不是缺口。

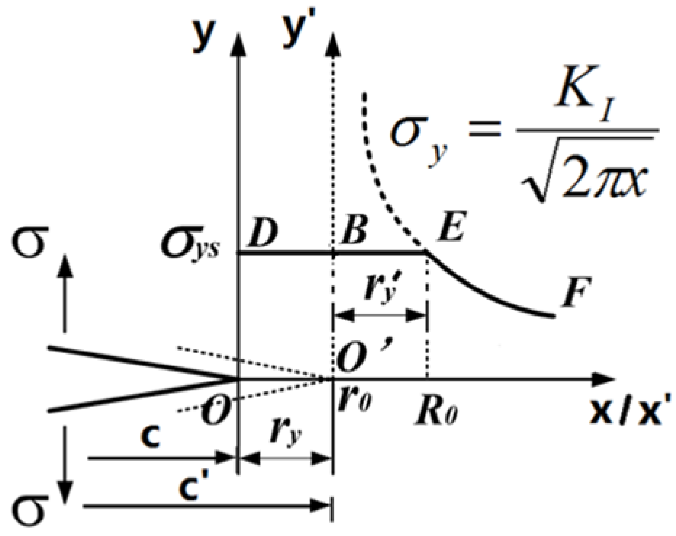
应力强度因子修正

$$K_I = Y\sigma\sqrt{c^*}$$

式中，c*为等效裂纹尺寸

$c^* = c + r_y$

$r_y = ?$



•在新坐标系下，塑性区尺寸$r`_y = R_0 - r_y$

E点
$$\left.\begin{cases} \sigma_y(r_y')\big|_{\theta=0} = \sigma_{ys} \\ \sigma_y(r_y')\big|_{\theta=0} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r_y'}} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi(R_0 - r_y)}} \end{cases}\right\} r_y = R_0 - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}}\right)^2$$

平面应变 $$r_y = \frac{(1-2\nu)^2}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_s}\right)^2$$

平面应力 $$r_y = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_s}\right)^2$$

等效裂纹尖端正好位于塑性区中心。
——塑性变形导致裂纹体断裂抗力增大。

主观题 10分

一块含有16mm中心穿透尖裂纹的宽大薄钢板，受到350MPa垂直于裂纹平面的名义应力作用，试讨论：

1）如果材料的屈服强度是1400MPa，求塑性区尺寸和裂纹顶端有效应力强度因子值。

2）如果材料的屈服强度是385MPa，求塑性区尺寸和裂纹顶端有效应力强度因子值。

3）试比较并讨论上述两种情况下，对应力强度因子进行修正的意义。

4）如果换成厚板，试求塑性区尺寸和裂纹顶端有效应力强度因子值，并与薄板情况加以比较。