

材料的滞弹性与内耗

主要内容和要点:

- (1) 了解滞弹性现象和三种主要表现形式
- (2) 了解标准线性固体的滞弹性规律性一般形式及应力松弛和弹性后效两种特殊规律性
- (3) 了解复弹性变量的定义、实部和虚部的构成
- (4) 了解内耗的概念及其与复弹性模量之间的关系
- (5) 理解Snoek内耗峰现象、产生机理，以及应力频率和温度的影响
- (6) 简单了解金属材料中的其他内耗及机理

材料的滞弹性现象及表现形式

(Anelasticity / Viscoelasticity / Viscosity)

材料在应力作用下，发生随时间而改变的弹性变形

典型表现方式

1. 弹性后效

—应力恒定不变的情况下，弹性变形量随着时间的延长而增加的现象；

2. 应力松弛

—弹性变形量恒定的情况下，材料构件内部承受的应力随时间延长逐渐降低的现象；

3. 重要效应：内耗

—交变应力作用下，形成应力-应变回线，因为应力-应变不可逆导致能量损耗。回线面积等于一个应力-弹性应变循环周期单位体积材料所消耗的能量(转换成热能散失)

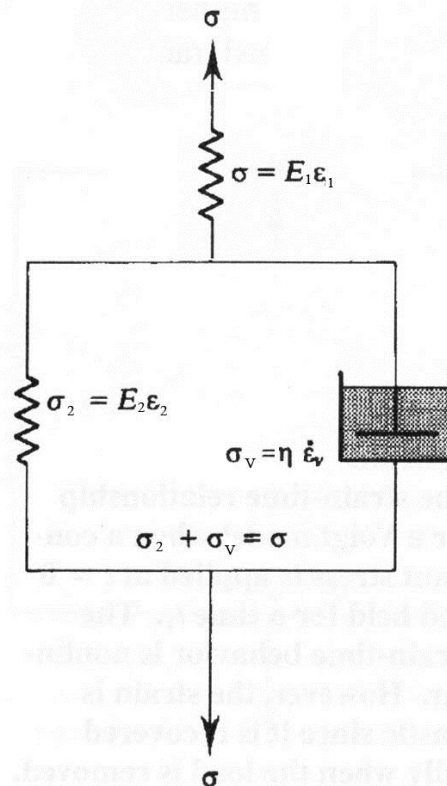
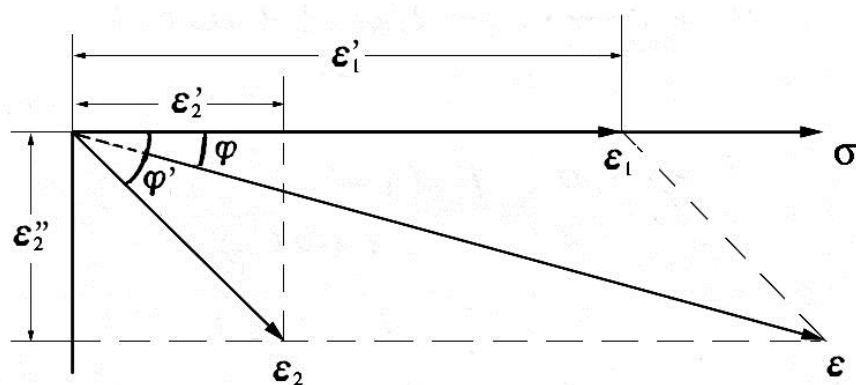
1.8 材料滞弹性的模型与规律

标准线性固体模型(Zener Model)

- 理想弹性部分：一个理想弹簧 E_1
- 滞弹性部分：一个理想弹簧 E_2 + 一个阻尼器，两者呈并联关系

其应力-变形特性：

与应力同相位部分 + 时间上滞后部分



应力-应变-时间的关系

$$\sigma + \dot{\sigma} \tau_\epsilon = E_R (\epsilon + \dot{\epsilon} \tau_\sigma)$$

数学推导作为课后练习题

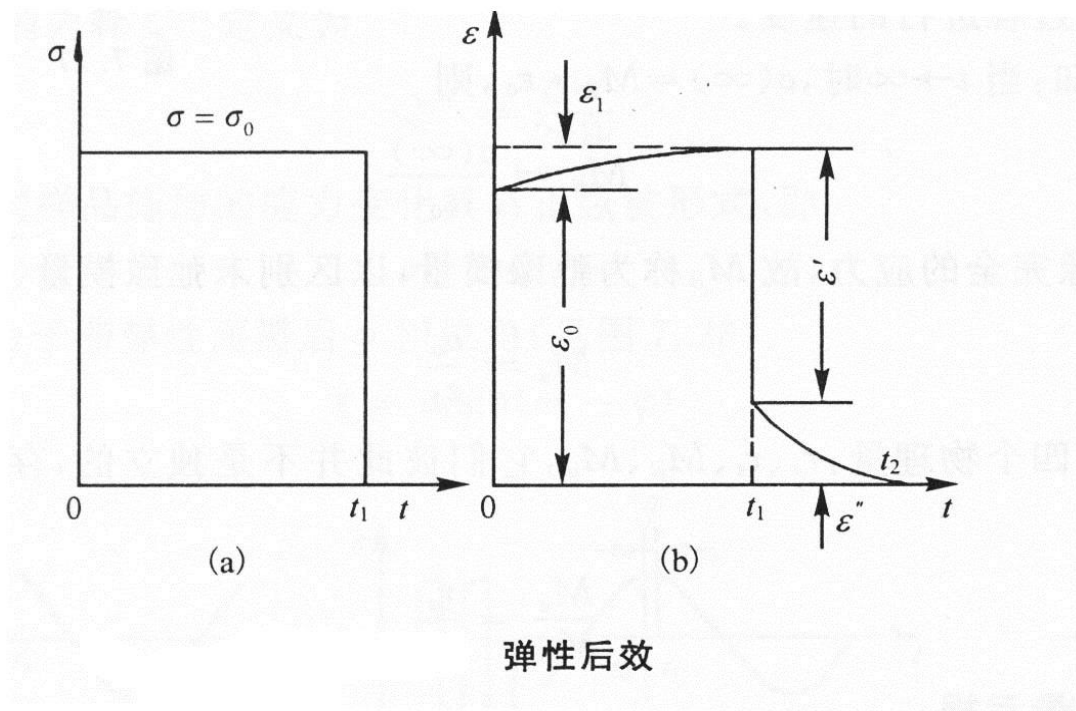
弹性后效规律

$$\sigma + \dot{\sigma} \tau_{\varepsilon} = E_R (\varepsilon + \dot{\varepsilon} \tau_{\sigma})$$

问题： 已知 $\sigma(t) = \sigma_0$ 求解： $\varepsilon(t)$

根据标准线性固体的应力-应变-时间函数关系，考虑弹性后效的具体特点，有：

$$\sigma_0 = E_R (\varepsilon + \dot{\varepsilon} \tau_{\sigma})$$



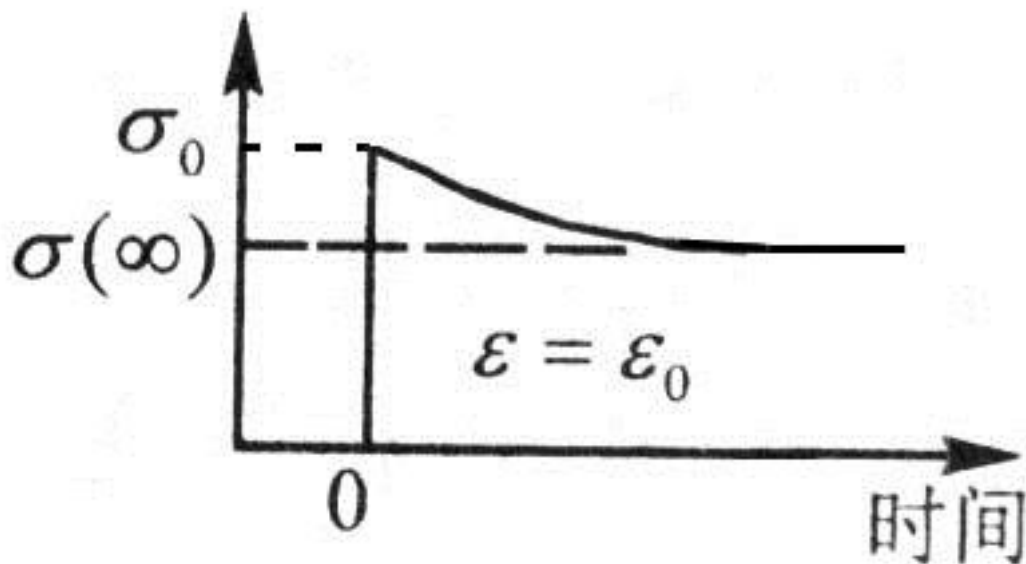
微分方程的求解给出：

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 / E_U + \sigma_0 \left(\frac{1}{E_R} - \frac{1}{E_U} \right) [1 - \exp(-t/\tau_{\sigma})]$$

应力松弛的规律

问题： 已知 $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \longrightarrow \sigma(t) = ?$

$$\sigma + \dot{\sigma}\tau_\varepsilon = E_R \varepsilon_0$$



$$\sigma(t) = E_U \varepsilon_0 - (E_U - E_R) \varepsilon_0 [1 - \exp(-t/\tau_\varepsilon)]$$

一般情况下的应力-应变关系

弹性应变随时间变化，在“相位”上落后于应力。其行为特征，通常施加随时间变化为正弦形式的应力作用去考察分析。此时，应力、应变的函数关系通常转化成复变函数来进行处理

正弦应力 $\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t)$



$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$$

弹性应变(落后应力一个相位角)

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

应力-应变在复数空间中描述



$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

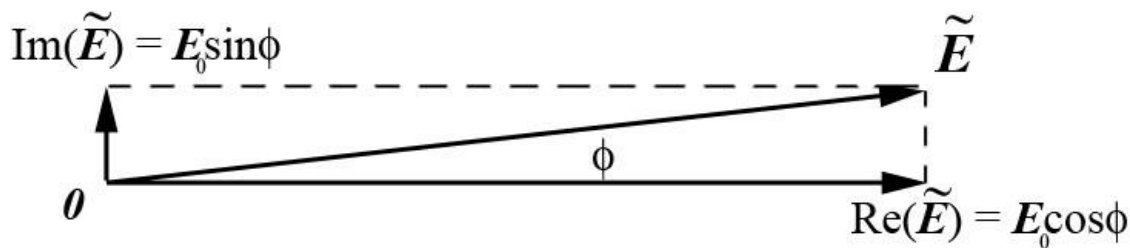
类似于电容、电阻、电感中电压与电流的相位关系的描述与分析

复弹性模量

正弦形式的应力下，应力与应变之比： $\tilde{E} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)}$

$$\tilde{E} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} = E_0 \cdot e^{i\varphi} = E + iE'$$

复弹性模量的特征



- E — 实部 (real part)
- E' — 虚部 (imaginary part)
- 复弹性模量的模 — $|\tilde{E}| = \sqrt{E^2 + E'^2}$

复弹性模量的图示

在通常情况下，相位差很小，此时，虚部与实部数值相比可以忽略，就可以用实部来近似作为弹性模量

1.9 滞弹性与内耗

一根固溶有少量碳的纯铁丝，使其扭摆，即使完全消除装置的各种阻力其摆动振幅也会逐渐减小，并最终停止下来。该过程中，开始存储于铁丝中的弹性能在扭摆过程中被不断消耗掉了(转变成热能散失掉)。能量的消耗来自于材料内部过程——这就是内耗现象。

实际中有利有弊：

- 许多机构中的弹性元件，希望其自身的内耗越低越好；
 - 机床不可避免有震动，机床底座材料具有较高的内耗，可以将震动能量尽量多地转化消耗掉，达到降噪效果
- 机床底座多采用灰口铸铁，而不采用碳钢材料，原因是灰口铸铁在金属材料中属于高内耗材料。

1.9 材料的内耗

主要是能量损耗的“速度”

例如：在上述扭摆实验中，弹性丝所存储的弹性能量正比于摆动振幅的平方(A^2)，因此可以通过测量振幅的变化来检测内耗。

内耗参量一般用机械品质因数的倒数来表示：

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\Delta W}{W}$$

W 为系统具有的最大弹性能。 ΔW 为应力循环一周过程中因内耗损耗的能量。

对不同的材料的内耗大小进行比较时，一般取随时间正弦波方式变化的应力进行实验

应力循环中的能耗与内耗

体系单周应力循环的损耗功为：

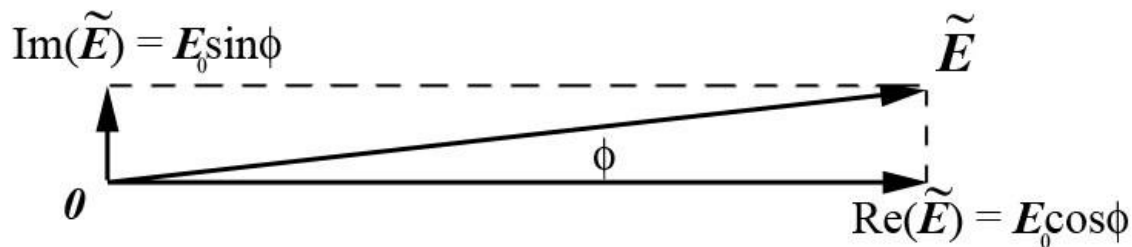
$$\Delta W = \text{外部对体系做功} - \text{体系对外做功}$$

单位体积材料消耗的能量为： $\Delta W = \oint \sigma \cdot d\varepsilon = \pi \varepsilon_0 \sigma_0 \sin \varphi$

体系的最大弹性能为：

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sigma_0 \varepsilon_0$$

$$Q^{-1} = \sin \varphi$$

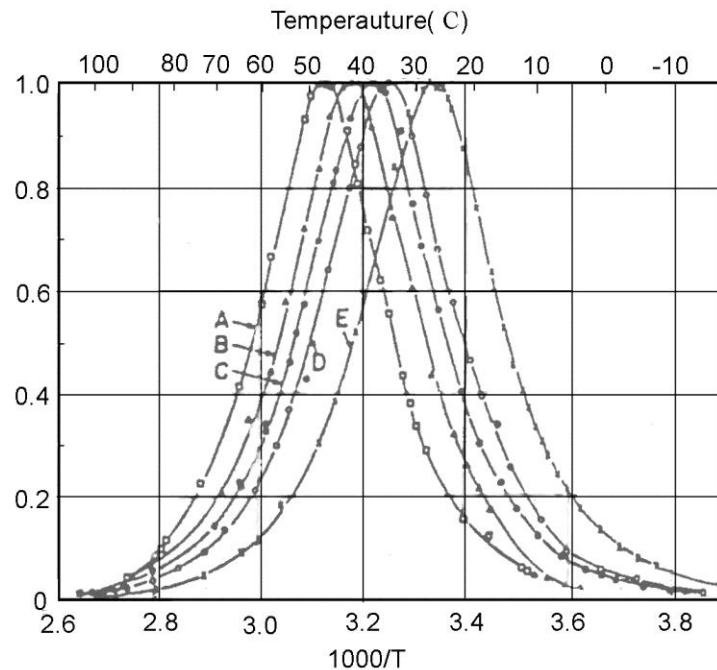


应力-应变相位差较小时 $Q^{-1} = \sin \varphi \approx \varphi \approx \tan \varphi = \frac{E'}{E}$

弹性范围的应力-应变循环过程中，
能量损耗正比于复弹性模量的虚部

典型的内耗

例：Fe(C)的内耗—Snoek内耗峰：40℃左右，
在大约为1Hz的应力作用下出现的内耗峰



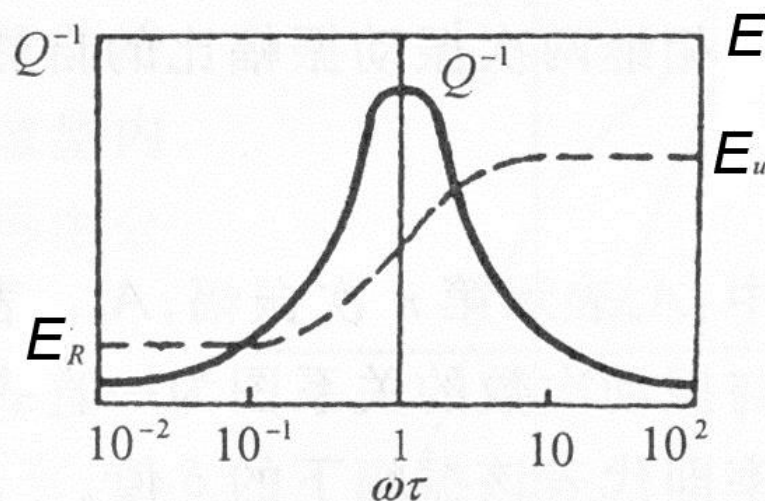
动态损耗的频率响应特性

具有标准线性固体滞弹性特性的材料，根据其应力-应变-时间关系及内耗的定义，得到应力频率对于内耗的影响关系

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \frac{\omega \bar{\tau}}{1 + (\omega \bar{\tau})^2}$$

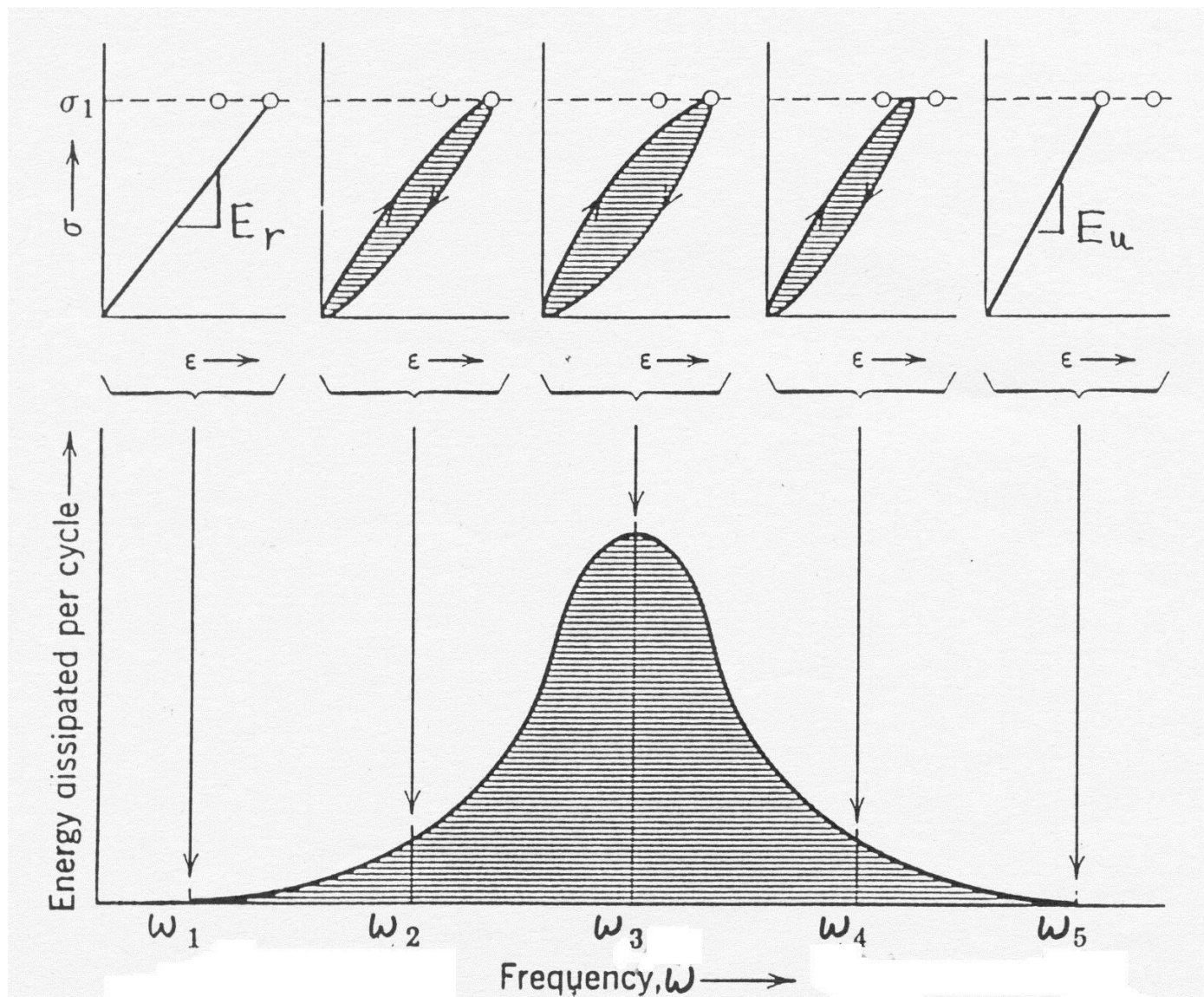
$\omega \bar{\tau} = 1$ 时，出现内耗峰

反映了外部应力与材料自身特性之间的关联性。该条件称为共振条件(resonance state)



内耗、动态模量同 $\omega\tau$ 关系

动态损耗的频率响应特性



Snoek 内耗机理

内耗及滞弹性与Fe中固溶C原子的扩散相关

C原子的微观分布状态(八面体间隙的不对称性), 受纯剪切应力(或周期性拉-压应力作用)的作用, 造成C原子的局部定向扩散

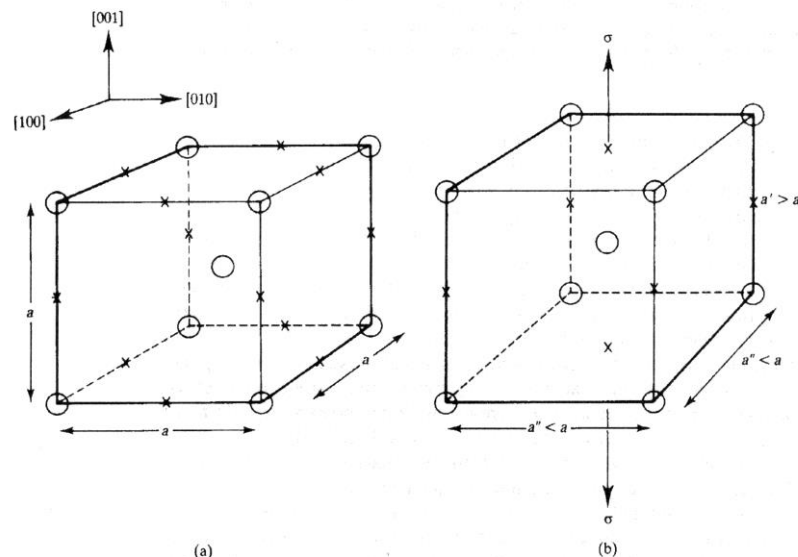


Figure 2.21
(a) An unstressed body-centered cubic unit cell. The crosses denote octahedral sites along unit cell edges. These are occupied by interstitial atoms, as are other octahedral sites (not designated) at the center of the cell faces. In the unstressed state, all sites have equal probability of being occupied by interstitial atoms.
(b) Under stress, the sites along $[001]$ (the direction of the applied tensile stress) become preferred occupancy sites as a result of the increased interstitial volume there. Thus, interstitial atoms tend to jump into these sites from sites along adjacent $[100]$ and $[010]$ axes. If the stress applied is cyclical, and of frequency comparable to the natural vibration frequency of interstitial atoms, mechanical hysteresis results.

产生附加的时间相关的弹性变形；依靠C原子扩散产生的变形，时间上滞后，属于滞弹性变形，并由此导致内耗

Snoek 内耗分析

应力频率的影响：

与C原子扩散能力有关(因此与温度有关)

- 高频下：扩散少，附加变形小，弹性模量高，内耗低
- 低频下：扩散充分，附加变形大，弹性模量低，但应力-应变同步性好，内耗低
- 共振条件下：拖曳力最强，内耗最大

关于内耗的类比：

大人带小孩“跑步”

大人很快——双方脱开；对小孩没有“做功”，没有消耗；

大人很慢——小孩自己速度足够，大人也无需对小孩做功；

小孩速度上限时，大人做功才最多

Snoek 内耗分析

共振状态 - 内耗峰条件分析:

• C 定向扩散特征时间 τ 满足:

$$\sqrt{D\bar{\tau}} \sim \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

• 选取应力频率使 $\omega\bar{\tau} = 1$

因此内耗峰应力频率

$$\ln \omega_R = C_0 - \frac{Q}{kT}$$

由于

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right)$$

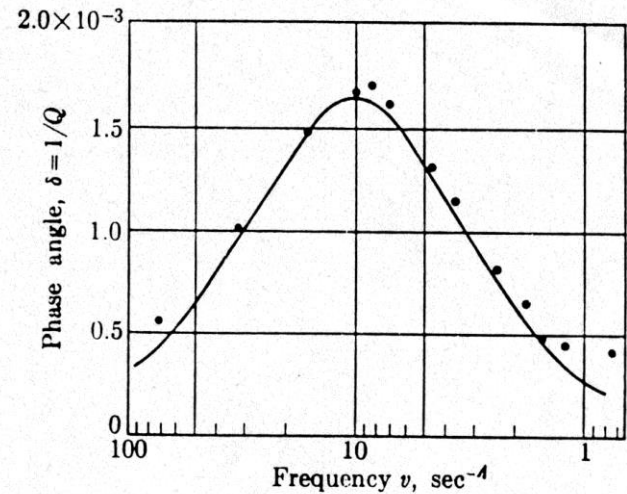
弛豫时间

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{Q}{kT}\right)$$

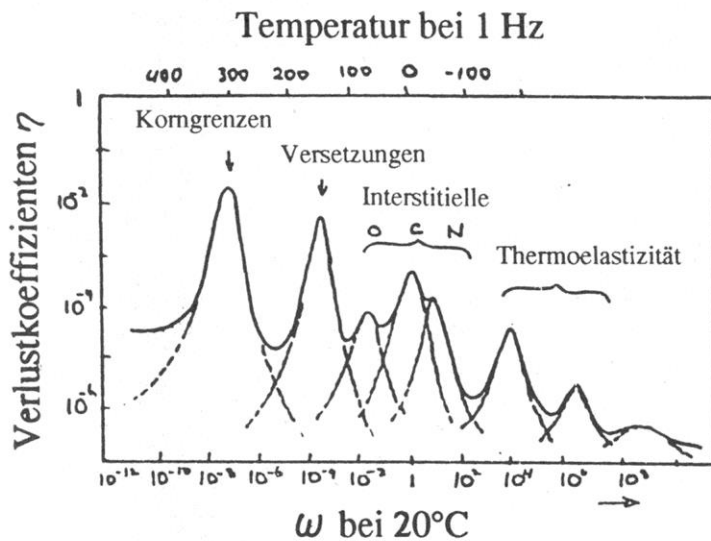
测量不同温度下的内耗-频率曲线，得到共振频率，由此可确定材料中决定内耗的内部C原子扩散过程的激活能 Q 。(习题)

动态损耗频谱特性

一种材料中可存在多种机制的损耗，而各种损耗发生的频率区间可能各不相同，在一个频率范围内测试损耗，可以得到能耗谱。

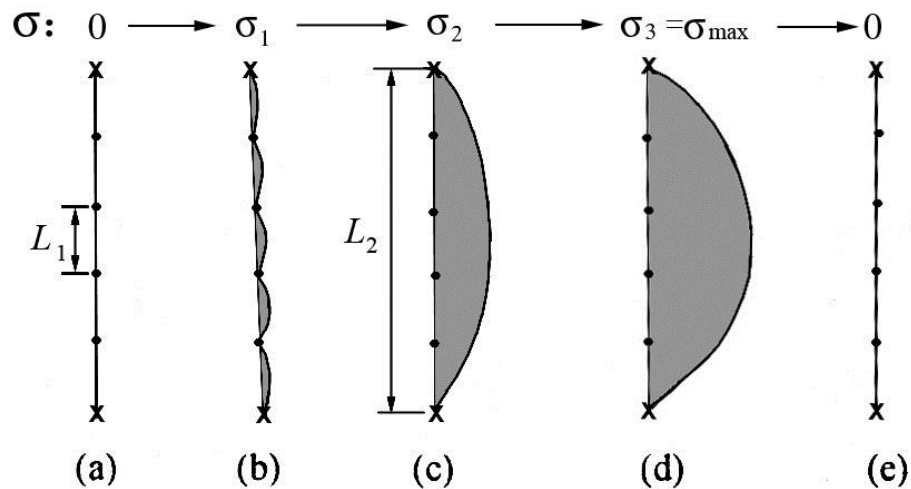


Ag的内耗频率特征曲线



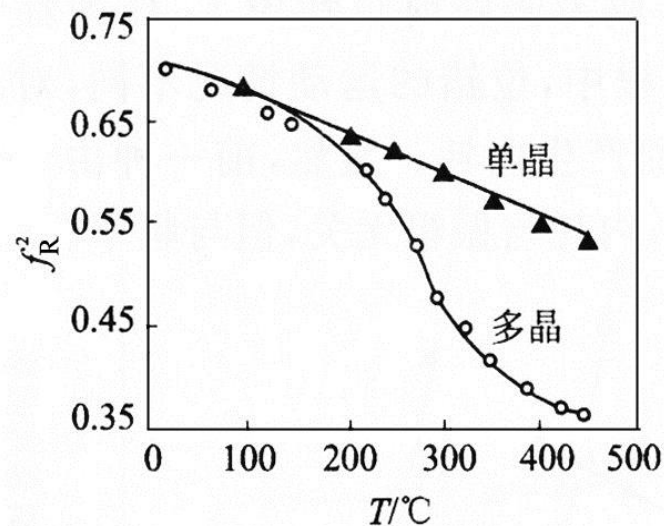
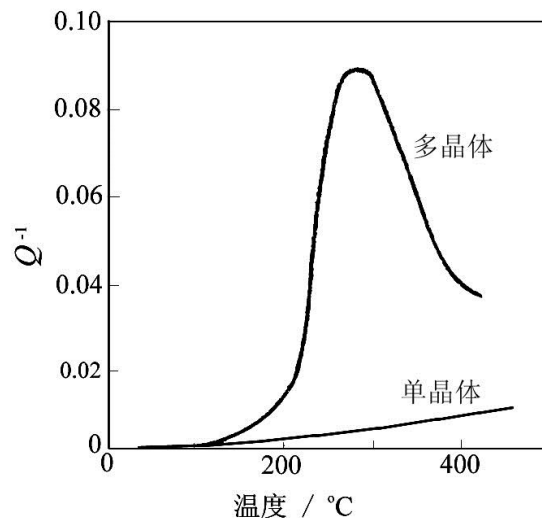
其它形式的损耗简介

位错机制



晶界的影响

Mg基减振合金，孪晶界往返移动
内摩擦力产生内耗



Al的试验结果

静态损耗

另一类重要的损耗

例如：铁磁性畴壁位移造成的磁滞损耗(交变电磁场中铁磁性的主要损耗项之一)

特点：

单周循环产生的损耗与频率无关；

单周循环过程的损耗，关键取决于磁场-磁感的变化幅度