Teoria F317

Estatística | I.C para a média 18/11/2014 20:14

Exemplo: I.C para a média

Uma fábrica A de produtos eletrónicos produz chips para alguma marca de computadores.

O comprimento de cada chip é uma v.a com desvio padrão 0,15 um (unidades de medida)

Construa um I.C a 99% para comprimento médio dos chips produzidos na fábrica A, sabendo que, numa amostra de 50 chips, foi encontrado um comprimento médio de 1,1 um.

Resolução proposta

Seja μ o comprimento médio do chips produzida pela fábrica A.

$IC_{99\%}$ para μ?

Amostra: $n=50 \geq 30$

seja $\bar{X}_{50} = \frac{1}{50}\sum_{i=0}^{100} X_i$, $X_i \to$ o comprimento de qualquer chip i em um, produzido pela fábrica A.

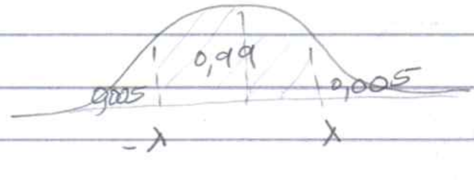
$E(X_i) = \mu = ?$ $V(X_i) = \sigma^2 = 0,15^2$

Pelo teorema do Limit central, tem-se que:

$\bar{X}_{50} \sim N(\mu, \frac{0,15^2}{50})$ $\sigma = \frac{0,15}{\sqrt{50}}$

$P(a \leq \mu \leq b) = \gamma$, $\gamma = 0,99 \Leftrightarrow P(-\lambda \leq Z \leq \lambda) = \gamma$

$\gamma = 0,99$



$\lambda = \Phi^{-1}(0{,}995)$
$= 2{,}58$

$\Phi(2{,}58) = 0{,}9951$ "tabela Normal"

os extremos do intervalo são obtidos a partir de:

$$\begin{cases} a = \bar{x}_{50} - \Delta \\ b = \bar{x}_{50} + \Delta \end{cases}$$

$\bar{x}_{50} = 1{,}1$ (valor da amostra)

$\Delta = \lambda \dfrac{0{,}15}{\sqrt{50}} = 2{,}58 \cdot \dfrac{0{,}15}{\sqrt{50}}$

$$\begin{cases} a = 1{,}1 - 2{,}58 \cdot \dfrac{0{,}15}{\sqrt{50}} \\ b = 1{,}1 + 2{,}58 \cdot \dfrac{0{,}15}{\sqrt{50}} \end{cases}$$

Sai EXAM

Intervalo de confiança

$$IC_{99\%}(x) = [\,1{,}05;\ 1{,}15\,]$$

>> sempre que se fala em confiança é intervalo de confiança.

Escolha do tamanho $\underline{n}$ de UMA AMOSTRA

n ideal = ???

Se o desvio-padrão da população é conhecido podemos escolher n tal que o intervalo de confiança para a média tem uma amplitude fixada $2 \times \Delta$ fixada.

Estatística | teoria F317 17/11/2014 19:10

T.L.C
Dist Média Amostral
" Proporção Amostral

Inferência estatística

Estimação de Parametros. μ. p

Inferência
- Paramétrica - a distribuição da população é conhecida, faltando apenas estimar os seus parametros
- Não paramétrica - a distribuição não é conhecida

Os estimadores de uma dada populações têm associado um indicador do grau de precisão (confiança) com que os mesmos se aproximam dos valores dos parametros da populações. Por exemplo o estimador médio amostral $\bar{X}_n$ da média μ de uma população é indicado a forma de intervalo, dentro do qual se encontra μ com um determinado grau de confiança. Este intervalo designa-se INTERVALO DE CONFIANÇA para μ.

Genericamente:
Seja $x = (x_1, \ldots, x_n)$ uma amostra aleatória que depende de um parametro desconhecido θ. Um intervalo de confiança (IC) para esse parametro é da forma: $a < \theta < b$ onde a, b são valores que o parametro θ toma numa dada amostra. A precisão com que o IC contém o verdadeiro valor do parametro é dada em termos probabilísticos:

$$P(a < \theta < b) = 1 - \alpha$$

Diz-se que $a < \theta < b$ é o IC a $(1-\alpha) \times 100\%$ para θ, com $0 < \alpha < 1$

que de confiança: $(1-\alpha)\times 100\%$ $\boxed{\gamma = 1-\alpha}$ formulário

No nosso estudo, só vamos considerar grandes amostras ($n \geq 30$).

— // —

INTERVALO DE CONFIANÇA (BILATERAL)

PARA MÉDIA μ DE UMA POPULAÇÃO

Sejam $X_1, \dots X_n$, v.a. independentes com a mesma distribuição, de média μ desconhecida ou ~~não~~, e variância σ^2.

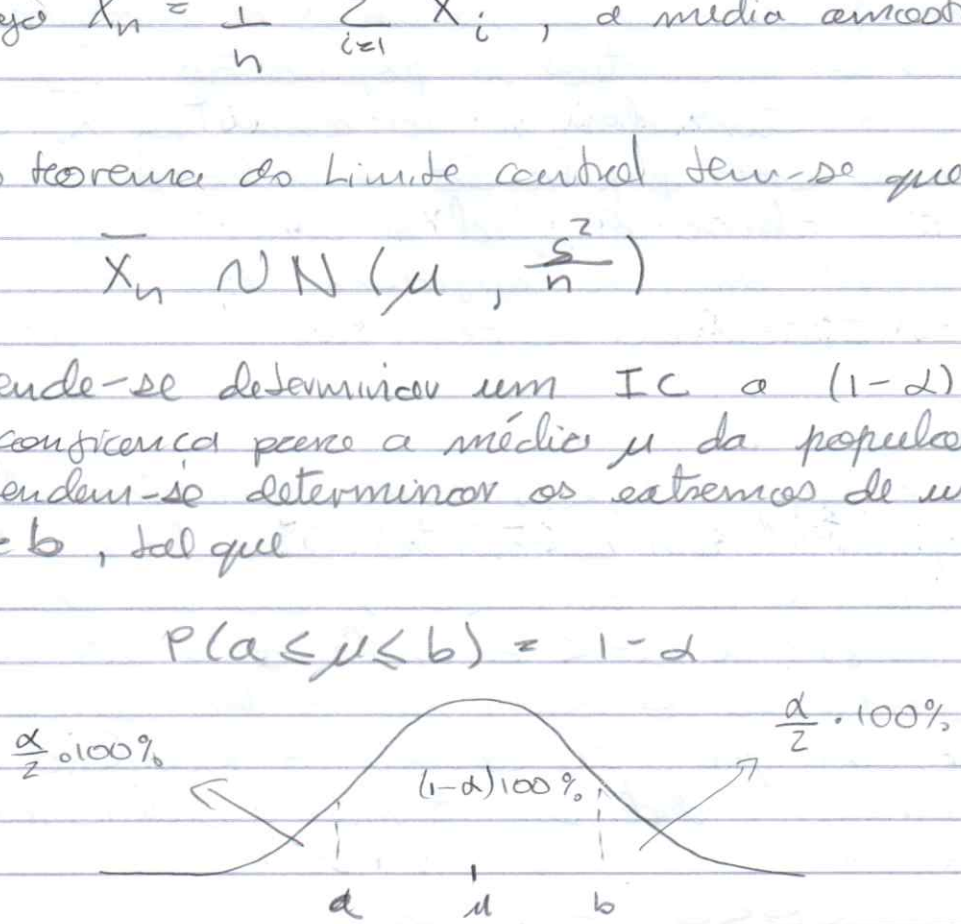
Seja $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, a média amostra ($n \geq 30$)

Pelo teorema do Limite central tem-se que:

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Pretende-se determinar um IC a $(1-\alpha)\times 100\%$ de confiança para a média μ da população, i.e., pretendem-se determinar os extremos de um intervalo, a e b, tal que

$$P(a \leq \mu \leq b) = 1-\alpha$$



calcular os valores de a e b = ?

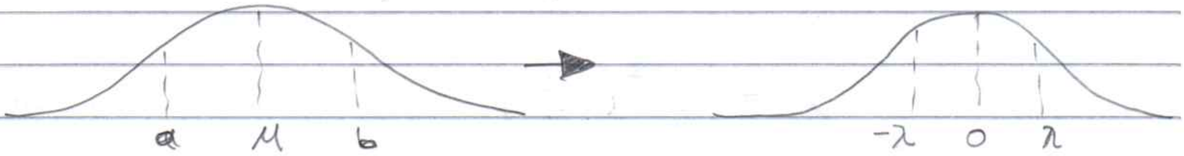
Estatística | teórica F317 17/11/2014 19:30

$$P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha = \gamma$$

considerando-se a redução da variável $\overline{X}_n$

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P(-\lambda \leq Z \leq \lambda) = 1 - \alpha$$



$$P\left(-\lambda \leq \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \lambda\right) = (1 - \alpha)$$

$$P\left(-\lambda \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}_n - \mu \leq \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\overline{X}_n - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\overline{X}_n + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\overline{X}_n - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

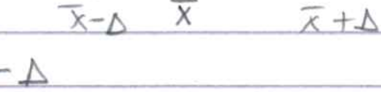
$\downarrow$

$\overline{x}_n \rightarrow$ média da amostra

$$P\left(\overline{x}_n - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x}_n + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\overline{x} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

os extremos do intervalo, são:



$$\begin{cases} a = \overline{x}_n - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ b = \overline{x}_n + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \overline{x} - \Delta \\ b = \overline{x} + \Delta \end{cases}$$

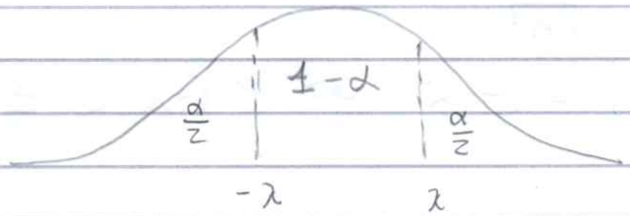
$$\Delta = \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Nota IMPORTANTE: δ^2 desconhecida

$\delta^2 \cong s^2$ → desvio de padrão da amostra.

caso não é dado δ^2 usar s^2 nos exercícios, que deve ser calculada.

$\lambda = ?$



$$-\lambda = \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\lambda = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Por exemplo

IC a 95% para a média μ

$$1 - \alpha = 0,95 \iff \alpha = 0,05 \iff \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$-\lambda = \Phi^{-1}(0,025) \iff \lambda = \Phi^{-1}(0,9750)$$

tabela da Normal

$\lambda = 1,96$

$$\left[\bar{x} - 1,96\frac{\delta}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right) = I.C(\mu).$$

Estatística I   teoria   F317   18/11/2014   20:41

delta

$$\begin{cases} a = \bar{x} - \Delta \\ b = \bar{x} + \Delta \end{cases}$$

$[x - \Delta ; x + \Delta]$

Amplitude $= \bar{x} + \Delta - (\bar{x} - \Delta)$
$= \Delta$

O valor de n é calculado a partir de

$$\lambda \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \lambda\,\Delta$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{\lambda\ \sigma}{\Delta} \Rightarrow n = \left(\frac{\lambda\ \sigma}{\Delta}\right)^2$$

>> para aumentar a precisão ou diminuir o intervalo.

Outro parametro

INTERVALO DE CONFIANÇA BILATERAL PARA A POPULAÇÃO $\boxed{p}$ DE UMA POPULAÇÃO

seja X uma variável aleatória que conta o numero de sucessos em 'n' repetições independentes de uma mesma experiência. (sabe-se que cada experiencia é uma prova de Bernoulli). tem-se que $X \cap B_i(n, \boxed{p})$

p - probabilidade de sucesso que é desconhecida.

consideremos uma estimativa de p, $\hat{p} = \frac{x}{n}$

(amostra)

Para n suficientemente grande ($n \geq 30$), tem-se a distribuição da variável aleatória proporção amostral:

$\hat{p}_n = \frac{X}{n}$ que pelo teorema do limit central:

$$\hat{p}_n \sim N\left(p ; \frac{p.q}{n}\right)$$

nota.

$$\boxed{\begin{array}{l} E(x) = n.p \\ V(x) = n.p\,q \end{array}}$$

$$V\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n^2}.V(x)$$

$$= \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cancel{n}.p.q$$

$$= \frac{1}{n} p.q = \frac{pq}{n}$$

onde $q = 1-p$. tendo $\hat{p}$ uma estimativa de $\hat{P}$ (p grande)

Um IC $[a,b]$ a $(1-\alpha) \times 100\%$ de confiança para a proporção p da população é tal que:

$$P(a \leq p \leq b) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(-x \leq Z \leq x) = 1-\alpha$$

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p.q}{n}}} \sim N(0,1)$$

Os extremos do intervalo são obtidos a partir de:

$$\begin{cases} a = \hat{p} - x.\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}} \\ b = \hat{p} + x\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}} \end{cases}$$

$\hat{p} \to$ valor da amostra

$$\boxed{\hat{q} = 1 - \hat{p}}$$

Estatística teórica F317 18/11/2014 21:00

Formulário

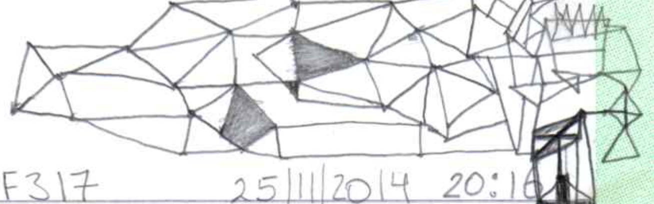
$$\begin{cases} \alpha = \hat{P} - \Delta \\ \beta = \hat{P} + \Delta \end{cases} \qquad \Delta = \lambda \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$\hat{p} = \hat{p}_0 = \hat{p}$$

$\hat{p}_0$ - p observado

Para calcular da variância:

$p \cong \hat{p}_0 \qquad q \cong 1 - \hat{p}_0$



Estatística T F317 25/11/2014 20:16

testes de Hipóteses para a Média μ de uma população.

Amostra aleatória de n variações independentes e identicamente distribuídas

X_i - v.a , $i = 1, \ldots, n$

$E(X_i) = \mu \quad V(X_i) = \sigma^2$ < conhecida / desconhecida

v.a. média amostral

>> não mostra as classificações ao público
>> tem vergonha do seus próprios

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \underset{A.N}{\Rightarrow} \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$X_i \not\sim N(\mu, \sigma^2),\ n \geq 30 \ \Big|\ \underset{T.L.C}{\Rightarrow} \overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Teste Bilateral

>> separar os do dia dos da noite

$H_0 : \mu = \mu_0$, nível de significância : α

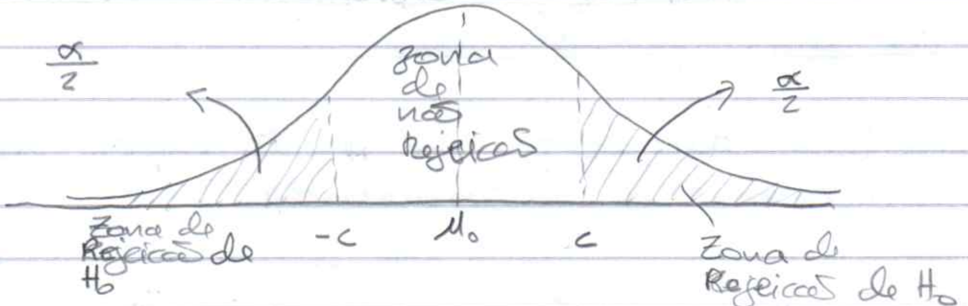
$H_1 : \mu \neq \mu_0$ $\boxed{IC}$

supondo H_0 verdadeiro: $\overline{X}_{H_0} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

α = P("ERRO DE TIPO I") = P(Rejeitar H_0 | H_0 verdadeiro)

$$\alpha = P(\overline{X}_{H_0} \leq -C) + P(\overline{X}_{H_0} \geq C)$$

$C \rightarrow$ valor crítico $\quad C = ?$



$$P(\bar{X}_{H_0} \geq c) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P(\bar{X}_{H_0} \leq c) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$P(\bar{X}_{H_0} \leq c) = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad \bar{X}_{H_0} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$P\left(Z^{H_0} \leq \frac{c-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Phi\left(\frac{c-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{c-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow c = \mu_0 + \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Região de Rejeição: Região Crítica Rc

$$R_c =]-\infty, -c] \cup [c, +\infty[$$

Regra de decisão

com base na amostra fornecida n elementos

$\bar{x} \to$ média da amostra $s^2 \to$ variância amostral

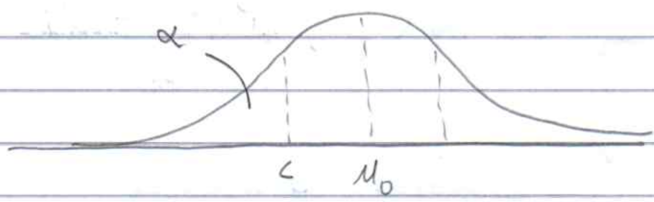
$\bar{x} \in R_c$ então rejeita-se H_0

$\bar{x} \notin R_c$ " não rejeita-se H_0

σ^2 desconhecido usamos a estimativa $\sigma^2 \approx s^2$, para n, suficientemente.

teste Unilateral Esquerdo (Inferior)

$H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu < \mu_0$



$\alpha = P(\text{"ERRO de Tipo I"}) = P(\bar{X}_{H_0} \leq C)$

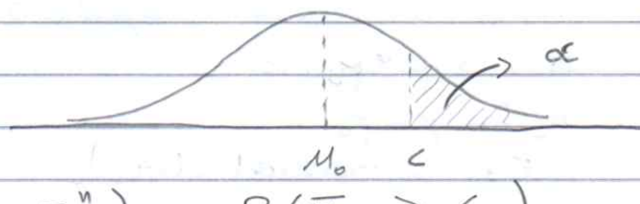
$P(\bar{X}_{H_0} \leq C) = \alpha \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{c-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha$

$C = \mu_0 + \Phi^{-1}(\alpha) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$R_c =]-\infty, c]$

teste Unilateral Direito (superior)

$H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu > \mu_0$



$\alpha = P(\text{"ERRO DE TIPO I"}) = P(\bar{X}_{H_0} \geq C)$

$P(\bar{X}_{H_0} \geq C) = \alpha \Leftrightarrow P(\bar{X}_{H_0} \leq C) = 1 - \alpha$

$C = \mu_0 + \Phi^{-1}(1-\alpha) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$R_c = [c, +\infty[$

Testes de hipoteses para a proporção de uma população

$$\hat{P}_n \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

↓

v.a proporção amostral

AMOSTRA : n elementos

$\hat{p} = \frac{x}{n}$ → nº de elementos da amostra possuidores de um determinado característica

n → nº de elementos da amostra

Teste Bilateral

$H_0 : p = p_0$
$H_1 : p \neq p_0$

teste unilateral esquerdo
$H_0 : p = p_0$
$H_1 : p < p_0$
teste unilateral direito
$H_0 : p = p_0$
$H_1 : p > p_0$

$\hat{p}$ → proporção observada na amostra
$\hat{p} \in R.C \rightarrow R\ H_0$
$\hat{p} \notin R.C \rightarrow NR\ H_0$