Estatística I 21/10/2019

18:15

— 11 —

teorema do limit central

{ Media é soma dos medias
{ Variancia soma do variancias.

Exemplo.

a)

X_i – " Erro cometido na i-esima operações (mili) " independentes

$i = 1, 2, 3, 4 \ldots, 100$

$$X_i \sim U_n [-5, 5]$$

$$\mu = E(X_i) = \frac{-5+5}{2} = 0$$

$$\sigma^2 = V(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-(-5))^2}{12}$$

$$= \frac{10^2}{12}$$

X_T – " Soma dos Erros de 100 operações (mili) "

$$X_T = \sum_{i=1}^{100} X_i \underset{\substack{TLC \\ n \geq 30}}{\sim} N\left(100 \times 0;\ 100 \times \frac{10^2}{12}\right)$$

T.L.C – teorema do Limit central

aport
{ X_i: Bernoulli
{ X_i: Be (0,5)

$$X_T \sim N(0;\ 10000)$$

b) $P(X_T > 30) =$ norm cdf $(30, 99999, \sqrt{\frac{10000}{12}})$

= calculador PC Normal (casio)

= 0,1493

teorema do Limit central

→ Um parametro é funcção de toda a populaçao (slides) pg 6

Diferenciação entre parametro e estatística.

grandes amostras → $n \geq 30$ T.L.C

Media Amostral

1 Media $-\bar{X}$

2 $\bar{X}_A - X_B$

3 P_1

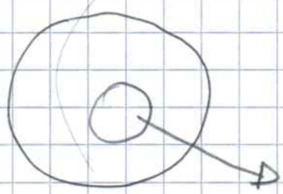
4 $P_A - P_B$

supor $X \sim N(\mu; \delta^2)$

sabe-se

$E(\frac{1}{n} Y) = \frac{1}{n} E(Y)$

$V(\frac{1}{n} Y) = (\frac{1}{n})^2 V(Y)$



$$\boxed{\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N(n\mu; n\delta^2)}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \qquad \sim N(\frac{n}{n}\mu; \frac{n\delta^2}{n^2})$$

$$\therefore \bar{X} \sim N(\mu; \frac{\delta^2}{n})$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \begin{cases} \xrightarrow{n \geq 30} \bar{X}_{\substack{TLC \\ \geq 30}} \sim N(\mu; \frac{\delta^2}{2}) \\ \bar{X} \text{ ñ é normal.} \end{cases}$$

Exemplo

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{40} \frac{X_i}{40} \sim N(120; \frac{25}{40})$$ pg 11

Exemplo 2

se numero amostras $\geq 30 \Rightarrow$ TLC

Distributions

Binomial

1. A set of n experiments or trials are conducted.
   the number of trial n is finite
   the events are discrete events

2. Each trial could result in either a success or a failure.
   Each trial must result in success or failure

3. The probability p of success is the same for all trials.
   the probability of success p is constant for each trial

4. the outcomes of different trials are independent.
   the trials are independent of each other

5. We are interested in the total number of successes in these n trials.

A binomial random variable Bin(n,p) is the sum of n independent Bernoulli Ber(p).

$\mu = n \times p$

$\delta^2 = n p q$

Poisson

1. the number of events that occur in any time interval is independent of the number of events in any other disjoint interval. Here "time interval" is the standard example of an "exposure variable" and other interpretations are possible. Example: Error rate per page in a book.
   the number of trials n should be indefinitely large i.e., $n > \infty$

2. the distribution of number of events in an interval is the same for all intervals of the same size.
   the probability of success p ~~for~~ each trial is indefinitely small.

3. For "small" time intervals, the probability of observing an event is proportional to the length of the interval. The proportionality constant corresponds to the "rate" at which events occur
   $n \times p = \lambda$, should be finite where λ is constant

4. the probability of observing two or more events in an interval approaches zero as the interval becomes smaller

Under the above assumption, let λ be the rate at which events occur, t be the length of a time interval, and X be the total number of events in that time interval. then, X is called a Poisson random variable and the probability distribution of X is called the Poisson distribution.

Let $\bar{\mu} = \lambda t$, then, μ can be interpreted as the average, or mean, number of events in an interval of length t.

Exponential

An important fact is that when times between random "events" follow the exponential distribution with rate λ then the total number of events in a time period of length t follows the Poisson distribution with parameter λt.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

Distribuições Discretas

Definições T

01) Distribuição de Bernoulli

É a distribuição que conta o número de sucessos numa única prova.

1) Distribuição Binomial

É uma distribuição que esta associado, dentro de certas condições, à contagem do numero de sucessos em n provas.

2) Distribuição de poisson

É uma distribuição que esta associado, dentro de certas condições, à contagem do numero de sucessos que ocorrem num determinado intervalo de tempo/espaço.

Distribuição de Bernoulli $X \sim B_e(p)$

$$f(x) = \begin{cases} 1-p & , \quad x=0 \\ p & ; \quad x=1 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = 0.(1-p)+1.p = p$$

$$\delta^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 p_i - \mu^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

1.1 - As provas são todas de Bernoulli
- As provas são <u>independentes</u>. (o resultado obtido numa das provas não afeta as restantes)
- A probabilidade de sucesso é igual em todas as provas. Denotamos por p a probabilidade de obter sucesso.

$X \sim B_i(n, p)$

n - numero de provas
p - probabilidade de ocorrer "sucesso numa única prova. $(0 \leq p \leq 1)$

2.1 - A probabilidade de que ocorram x acontecimentos num intervalo de tempo depende apenas do número x e da duração t do intervalo de tempo (nao depende do inicio da contagem)
- O nº de eventos que ocorrem em intervalos de tempo distintos são independentes. (não tem memoria)
- A probabilidade de ocorrer um evento num intervalo muito pequeno é proporcional ao comprimento do intervalo
- A probabilidade de ocorrer mais do que um evento num intervalo muito pequeno é nula.

Distribuição de Poisson como aproximação à distribuição binomial

Pode-se mostrar que

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda = n \cdot p}} \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \qquad \lambda = n \cdot p \text{ fixo}$$

$X \sim B_i(n; p)$ tende para $X_a \sim P_o(np)$

cada vez mais próxima quanto menor n e p

em geral utiliza-se para $n \cdot p < 5$

Ex

$X \sim B_i(100; 0{,}05) \cong X_a \; P_o(100 \times 0{,}05)$

$P(X=4) \cong P(X_a = 4) = 0{,}1755.$

Distribuições contínuas

Definições 7

Distribuição Uniforme.

A distribuição uniforme é usada para representar uma quantidade que varia aleatoriamente num intervalo $[a, b]$ e cuja probabilidade de tomar valores num sub-intervalo de $[a, b]$ é proporcional ao seu comprimento.

$$X \sim U_n(a, b)$$

Distribuição Exponencial $Exp(\lambda)$

A distribuição exponencial é usada em situações em que se consegue identificar um processo de Poisson. É usada para representar intervalos de tempo entre eventos independentes num processo de Poisson. (timer RC)

exemplo Y - "numero de chegadas, por unidade de tempo" $\Rightarrow P_o(\lambda)$

W - "numero de chegadas, por x unidades de tempo" $\Rightarrow P_o(\lambda \cdot x)$.

$$P(W=w) = f(w) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^w}{w!}$$

X - "Tempo até uma chegada, em unidades de tempo"

$$P(X > x) = P(W=0) = f(0) = e^{-\lambda x}$$

$$P(T \leq x) = F(x) = 1 - e^{-\lambda}$$

- A distribuição exponencial não considera o "desgaste". Não tem memória.

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

NB - A distribuição exponencial pode ser interpretada como o tempo de espera entre dois acontecimentos de Poisson.

$$W \sim P_o(\lambda) \Rightarrow E(W) = \lambda$$

$$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow E(X) = 1/\lambda$$

Ou seja, numa distribuição exponencial o tempo médio de espera entre dois registos sucessivos de um processo de Poisson é o inverso do ritmo médio desses registos.

Exemplo: o tempo de duração de um componente electronico A tem distribuição exponencial de media 2500 horas

X - "tempo de duração de um componente electrónico (horas)"

$$X \sim \mathcal{E}_x(\lambda)$$
$$E(X) = 2500 = \frac{1}{\lambda}$$

$\lambda = \frac{1}{2500}$ $\rightarrow$ tudo $\Rightarrow X \sim \mathcal{E}x\left(\frac{1}{2500}\right)$

Distribuição Normal

- o domínio é $\mathbb{R}$
- tem a forma de sino e um único máximo em $x = \mu$
- É simétrica relativamente a um eixo vertical em $x = \mu$ (média), a mediana também ocorre em $x = \mu$
- tem dois pontos de inflexão em $x = \mu - \delta$ e $x = \mu + \delta$
- o eixo xx é uma assimptota.

$$P(\mu - \delta < X < \mu + \delta) \cong 0,6826$$
$$P(\mu - 2\delta < X < \mu + 2\delta) \cong 0,9544$$
$$P(\mu - 3\delta < X < \mu + 3\delta) \cong 0,9973$$

$N(\mu, \delta^2)$

$E(X) = \mu$

$V(X) = \delta^2$

$Z \sim N(\mu = 0, \delta^2 = 1)$ é a Distribuição Normal Reduzida

Se $X \sim N(\mu, \delta^2)$ e tem

$X = \mu + \delta Z \sim N(\mu, \delta^2)$

e se $Z \sim N(\mu = 0, \delta = 1)$ então

$Z = \frac{X - \mu}{\delta} \sim N(\mu = 0, \delta^2 = 1)$

$\hookrightarrow$ simétrico relativo ao $Z = 0$

teorema: se $X \sim N(\mu, \delta^2)$

$\therefore Z = \frac{X - \mu}{\delta} \sim N(0,1)$

$\Phi = F(z)$ $\quad P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a - \mu}{\delta}\right) = F(a)$

$$= \Phi\left(\frac{a - \mu}{\delta}\right)$$

Distribuições contínuas. Definições T

Distribuição Normal $X \sim N(\mu, \delta^2)$

$$P(X \leq k) = A$$
$$\Phi\left(\frac{k-\mu}{\delta}\right) = A \quad \text{NB}$$
$$\frac{k-\mu}{\delta} = \Phi^{-1}(A)$$
$$k = (\Phi^{-1}(A) \times \delta) + \mu.$$

teorema da aditividade

NB
$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \delta_1^2 + \delta_2^2)$$
$$X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \delta_1^2 + \delta_2^2)$$

se $X_1 e X_2$ $\mu_1 = \mu_2$ e $\delta_1^2 = \delta_2^2$

$\Rightarrow X_T \sim N(2 \times \mu, 2 \times \delta^2)$ $\boxed{\text{Pg } 32}$

ESTAT C2B.

Ver bem os exemplos

E3

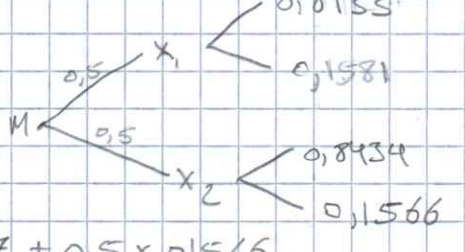
a) NormCD (−99999, 63, 55, $\sqrt{81}$) $\cong$ 0,8369
NormCD (−99999, 63, 60, $\sqrt{9}$) = 0,84134

$\therefore$ $P(X_1 < 63) = 0{,}8129$
$P(X_2 < 63) = 0{,}84134$

Logo é mais provável X_2 ter sucesso.

b)

Moeda



$0{,}5 \times 0{,}1867 + 0{,}5 \times 0{,}1566$
$= 0{,}17165$

c) corolário 1

tira cópias dos exemplos todos das teóricas!!

Estatística

Conceitos Base

$$\boxed{0 \leq P(X) \leq 1}$$

leis de Moore

- Acontecimentos incompatíveis

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Acontecimento mutuamente exclusivo

1º Fazer um resumo organizado de forma a perceber o que e quando aplicar os axiomas em diferentes circunstâncias.

2º Fazer resumo definições e condições recentes das distribuições

- Acontecimentos Independentes

$$P(A \cap B) \neq 0 = P(A) \times P(B)$$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)}$$

- Acontecimento condicionado Bayes.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Acontecimentos independentes podem ser sobrepostos ou não.

$$P(A) = P(A|S) - \frac{P(A \cap S)}{P(S)}$$
$$= P(A)$$

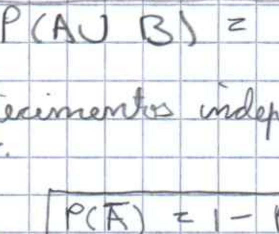
quando há reposição há independência.

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$
$$P(A \cup \bar{A}) = 1$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

independente.

+ Acontecimentos Dependentes (acontecimento condicionado

recorre há arvore



$A \cap C = A \times C$

$A \cap \bar{C} = A \times \bar{C}$

condicionado