ESTAT1920 Formulário nº1

1. Teoria de Probabilidades

P1) $P(S)=1$	P7) $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$
P2) $0\le P(A)\le 1$	**P8) Probabilidade condicionada** $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}, P(B)>0$
P3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)\ sse\ A\cap B=\phi$	**P9) Regras da multiplicação** $P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)$ $P(A\cap B)=P(B)P(A\mid B)$
P4) $P(\phi)=0$	**P10) A e B independentes** $\Leftrightarrow P(A\mid B)=P(A)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$
P5) $P(\overline{A})=1-P(A)$	**P11) Teorema da probabilidade total** $P(B)=P(A_1\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$ Nota: $A_1,A_2,\ldots,A_n$ formam uma partição de S.
P6) Regra da Adição $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$	**P12) Teorema Bayes** $P(A_k\vert B)=\dfrac{P(A_k\cap B)}{\sum_{i=0}^{n}P(A_i\cap B)}$ Nota: $A_1,A_2,\ldots,A_n$ formam uma partição de S.

A designa um acontecimento, **S** o acontecimento certo, $\overline{A}$ é o acontecimento complementar de A e ϕ designa o acontecimento impossível.

2. Distribuições Discretas

2.1 Quadro de Distribuição

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
$P(X=x_i)=p_i$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	

Propriedades

$$P1)\, p_i\ge 0,\quad i=1,2,3,\ldots$$
$$P2)\sum_i p_i=1$$

Função de Probabilidade

$$f(x)=P(X=x)=\begin{cases}0\,, & x\ne x_i\\ p_i\,, & x=x_i\end{cases}$$

Função de distribuição

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i\le x}f(x_i)$$

Esperança matemática ou valor médio

$$\mu=E(X)=\sum_i x_i f(x_i)=\sum_i x_i p_i$$

Variância e desvio padrão

$$\sigma^2=V(X)=E[(X-\mu)^2]=E(X^2)-\mu^2$$
$$=\sum_i x_i^2 f(x_i)-\mu^2\quad e\quad \sigma=+\sqrt{V(X)}$$

2.3 Distribuição Binomial - $X \sim B_i(n,p)$

Função de Probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \neq 0,1,2,\ldots,n \\ C_x{}^n p^x q^{n-x}, & x = 0,1,2,\ldots,n \end{cases}$$

$$onde\ q = 1 - p\ e \quad C_x{}^n = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

Função de distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} C_{x_i}{}^n p^{x_i} q^{n-x_i}$$

Esperança matemática ou valor médio

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = np$$

Variância e desvio padrão

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2] = npq$$

$$\sigma = +\sqrt{npq}$$

2.4 Distribuição de Poisson - $X \sim P_o(\mu)$

Função de Probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \neq 0,1,2,\ldots,n,\ldots \\ e^{-\mu}\dfrac{\mu^x}{x!}, & x = 0,1,2,\ldots,\ldots \end{cases}$$

Função de distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} e^{-\mu}\frac{\mu^{x_i}}{x_i!}$$

Esperança matemática ou valor médio

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = \mu$$

Variância e desvio padrão

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2] = \mu$$

$$\sigma = +\sqrt{\mu}$$

3. Distribuições Contínuas

Função densidade de probabilidade

$$f(x)\ é\ f.d.p\ sse \begin{cases} f(x) \geq 0 & x \in R \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

Função de distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad (b \geq a)$$

Esperança matemática ou valor médio

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Variância e desvio padrão

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$

$$\sigma = +\sqrt{V(X)}$$

3.1 Distribuição Uniforme - $X \sim Un[a,b]$

Função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , x \in [a,b] \\ 0 & , x \notin [a,b] \end{cases}$$

Função de distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & se \quad a \leq x \leq b \\ 1 & se \quad x > b \end{cases}$$

Esperança matemática ou valor médio

$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Variância e desvio padrão

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3.2 Distribuição Exponencial - $X \sim Ex(\lambda)$

Função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$

Função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \end{cases}$$

Esperança matemática ou valor médio

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Variância e desvio padrão

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \sigma = \mu$$

3.3 Distribuição Normal - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \forall x \in R$$

Função de distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Esperança matemática ou valor médio $E(X) = \mu$

Variância e desvio padrão

$V(X) = \sigma^2$

T1 Teorema da Aditividade da Distribuição Normal

Se $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ são v.a's independentes tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, ..., n$ então

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2), \quad a_i \in R, i = 1, 2, ..., n$$

Corolários

1) $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$

2) $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ então $X_1 \pm X_2 \sim N(\mu_1 \pm \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

3) Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, ..., n$ então $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

T2 Teorema do Limite Central (TLC)

Se $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ são v.a's independentes i.i.d. tais que $E(X_i) = \mu_i, V(X_i) = \mu_i, i = 1, 2, 3, ..., n$ então

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \; aprox \; N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$$

Nota: Na prática pode aplicar-se o TLC quando n≥30 (grandes amostras).

4. Amostragem

4.1 Distribuição da média amostral e diferença de médias amostrais

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N(\mu; \frac{\sigma^2}{n})$$

$n \geq 30 \; se \; X \; não \; é \; normal$

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2; \frac{\sigma_1^{\;2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\;2}}{n_2})$$

$n_1 \geq 30 \; se \; X_1 \; não \; é \; normal$
$n_2 \geq 30 \; se \; X_2 \; não \; é \; normal$

4.2 Distribuição da proporção amostral e diferença de proporções amostrais

$$\hat{P} = \frac{X}{n} \sim N(p; \frac{pq}{n})$$

$n \geq 30$

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \sim N\left(p_1 - p_2; \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)$$

$n_1 \geq 30, n_2 \geq 30$