Ficha 2 | Distribuição binomial / distribuição de Poisson

1) Retira-se de uma caixa que contém 4000 condensadores perfeitos e 1000 defeituosos uma amostra de 15 condensadores, escolhidos aleatoriamente, com reposição. Calcule a probabilidade de se obterem:

a) Três condensadores defeituosos.

$$^{15}C_3 \cdot \frac{1}{5}^3 \cdot \frac{4}{5}^{12} \approx 0{,}2501$$

$\boxed{\text{protocolo}}$ X - "condensadores defeituosos"

$X \sim B_i(15, \frac{1}{5})$

calculadora
DP Binomial
$x = 3$
$N = 15$
$p = 0{,}2$
0,2501

$$P(X=3) = {}^nC_x \, p^x \cdot q^{n-x}$$

$$= {}^{15}C_3 \, \frac{1}{5}^3 \cdot \frac{4}{5}^{12}$$

justificação como as amostras são independentes e só tem dois resultados possíveis no número de experiências trata-se de uma distribuição binomial. Dai que a probabilidade de uma amostra de 15 condensadores obter 3 com defeito é 25,01 %

b) Pelo menos 4 condensadores defeituosos.

X - "condensadores defeituosos"

$X \sim B_i(15, \frac{1}{5})$

$$P(X \geq 4) = \sum_{x_i=4}^{15} {}^{15}C_{x_i} \, p^{x_i} \cdot q^{15-x_i}$$

$x' = 4 \quad n = 15 \quad p = \frac{1}{5}$ pela tabela Binomial somada.

$P(X \geq 4) = 0{,}3518$

c) Menos de 6 condensadores defeituosos.

X - "condensadores defeituosos"

$X \sim B_i(15, \frac{1}{5})$

$$P(X < 6) = P(X \leq 5) = 1 - P(X \geq 6)$$

$$1 - \sum_{x_i=6}^{15} {}^{15}C_{x_i} \, p^{x_i} \cdot q^{15-x_i} = 1 - B_i(15, \tfrac{1}{5}, 6)\,[\text{somada}]$$

$$= 1 - 0{,}0611 = 0{,}9389 \Rightarrow 93{,}89\,\%$$

d) Mais de 2 e no Maximo 10 condensadores defeituosos.

X - "condensadores defeituosos"

$X \sim Bi(15, \frac{1}{5})$

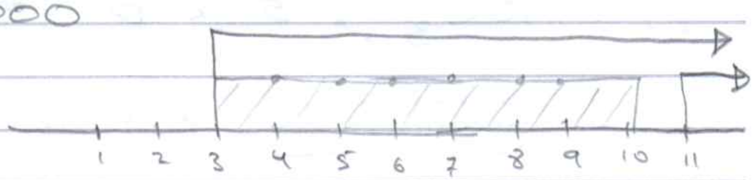
$$P(X \geq 3 \cap X \leq 10) = \sum_{x_i=3}^{10} C^{15}_{x_i} \cdot 0,2^{x_i} \cdot (1-0,2)^{15-x_i}$$

$= P(x \geq 3) - P(X \geq 11)$ ⇒ tabela binomeal somada

$\simeq 0,6020 - 0,000$

$\simeq 0,6020$

c.a)



2) Um fabricante vende latas com o seu produto sabendo que 10% vão mal cheias. Um cliente compra 6 latas. Calcule a probabilidade de:

>> tomar como sabido que é uma distribuição binomeal pois não é mencionado a reposição da lata, sendo a combinação diferente.

a) Todas estarem bem cheias.

X - "lata bem cheia" $X \sim Bi(6, 0,9)$ e $x' = 6$

$P(X=1) = 0,9$

$P(\cancel{X}=6) = C^6_6 \, (0,9)^6 \cdot (0,1)^0$

$= 0,5314$

$= P(X \cap X \cap X \cap X \cap X \cap X \cap X \cap X \cap X \cap X)$

b) Pelo menos uma ~~não~~ estar completa

Y - "lata mal cheia"

$Y \sim Bi(6, 0,1)$ $y' = 1$

$$P(Y \geq 1) = \sum_{y_i=1}^{6} C^6_{y_i} \cdot 0,1^{y_i} \cdot (1-0,1)^{6-y_i}$$

$= 0,4686$ $[n=6; p=0,1; y'=1]$

tabela binomeal somada.

c) Os ultimos 8 clientes levaram 6 latas cada. Calcule a probabilidade de apenas um ter razão de queixa.

o cliente tem razão de queixa ⇔ cumpre alínea anterior ⇒ $P(Y \geq 1) = 0,4686 \simeq 0,45$

ficha 2

$Y \sim B_i\,(8\,;\,0{,}45)$ — Y - nº de clientes, em oito, escolhidos aleatoriamente que tem razão de queixa

$P(Y=1) = {}^{8}C_1\, 0{,}45^1 \times (1-0{,}45)^{8-1}$

= «tabela binomial»

$= 0{,}0548 \Rightarrow 5{,}48\,\%$

3) Retira-se repetidamente uma carta de um baralho de 40 cartas, com reposição

a) Calcule a probabilidade de apenas sair uma figura em 4 repetições da experiência.

P - "probabilidade de sair uma figura"

$p = \dfrac{12}{40} \Rightarrow q = \dfrac{28}{40}$

trata-se de uma distribuição binomial devido as extracções serem independentes, com reposição, tendo só dois resultados possíveis.

$n = 4 \qquad p = 0{,}3$

$P \sim B_i\,(n\,;\,p) \Leftrightarrow P \sim B_i\,(4\,;\,0{,}3)$

$n = 4\,;\ p = 0{,}3\,;\ q = 0{,}7\,;\ x = 1$

recorrendo a tabela da Função Probabilidade Binomial

$$P(x=1) = C^{n}_{x}\, p^{x}\, q^{n-x}$$

$$= C^{4}_{1}\, p^{1}\, q^{4-1}$$

$$= C^{4}_{1}\, 0{,}3^{1}\, 0{,}7^{3} = 0{,}4116$$

b) Determine o número mínimo de vezes que deve ser repetida a experiencia para que a probabilidade de obter pelo menos uma das 12 figuras seja superior a 90%

pretende-se determinar n de forma a probabilidade de obter pelo menos uma das 12 figuras seja superior a 90%.

p - "probabilidade de sair uma figura"

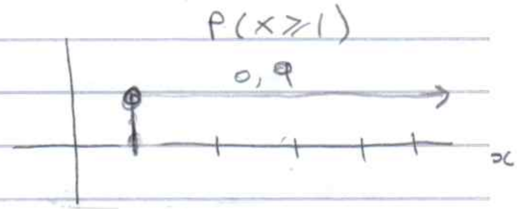
X - "nº de vezes de sai uma figura de um baralho de 40 cartas"

$X \sim Bi(n, p)$

$n = ?$; $p = 0,3$

$P(X \geq 1) > 0,9$

$P(X = 0) < 0,1$



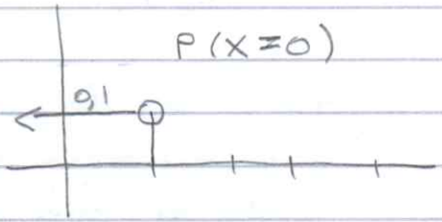
ou

$1 - P(X < 1) > 0,9$

$-P(X < 1) > 0,9 - 1$

$-P(X < 1) > -0,1 \quad \times -1$

$P(X < 1) < 0,1$



como é uma variável discreta

$P(X = 0) < 0,1$

Nota

$P(X=0) = q^n$

$P(X=1) =$

$P(x=0) = C^n_x \, p^x \, q^{n-x}$

$= C^n_0 \, p^0 \, q^{n-0}$

$= q^{n-0} = 0,7^n$

$a^n = x$

$\log(a^n) = \log(x)$

$n \log(a) = \log(x)$

$n = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$

$\therefore \quad 0,7^n < 0,1$

$n = ?$ $\quad p = 0,1$

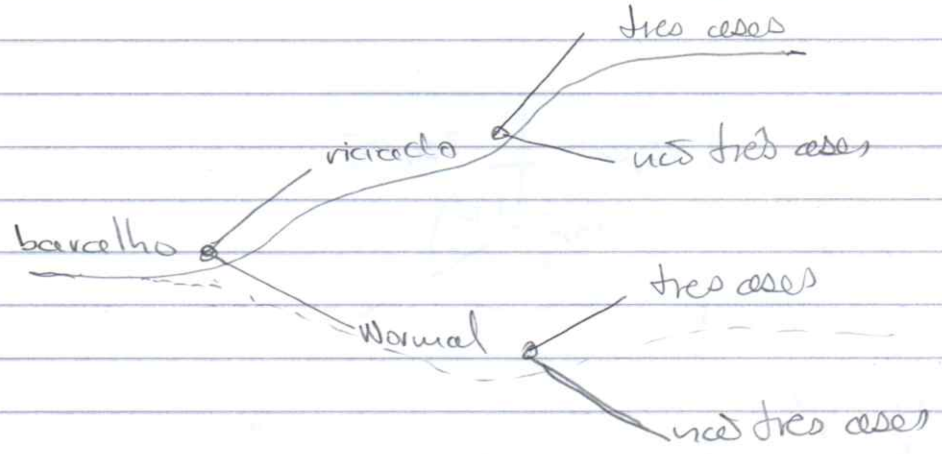
se $n = 6$ $\quad 0,7^6 \cong 0,1176 > 0,10$

se $n = 7$ $\quad 0,7^7 \cong 0,0823 < 0,10$

logo $n = 7$.

ficha 2

c) Dispomos de dois baralhos, um baralho convencional (40 cartas) e um baralho viciado de 40 cartas que contém 6 ases, escolhe-se um dos baralhos aleatoriamente, retiram-se 12 cartas, com reposição e obtem-se 3 ases. calcule a probabilidade de ter sido seleccionado o baralho viciado



Destribuição binomial com $n=12$ sendo
p - "probabilidade de sair ás"

$p_v = \frac{6}{40}$ $\quad q_v = \frac{34}{40}$

$p_n = \frac{4}{40}$ $\quad q_n = \frac{36}{40}$

X - "numero de ases que saem repetindo a experiência"

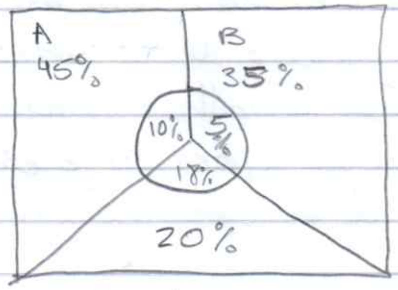
$P_v(X=3) = C^{12}_{3}\ 0,15^3 \cdot 0,85^9$
$\simeq 0,1719 \simeq 0,172$

$P_n(X=3) = C^{12}_{3}\ 0,1^3 \cdot 0,9^9$
$\simeq 0,08523$
$\simeq 0,0852$

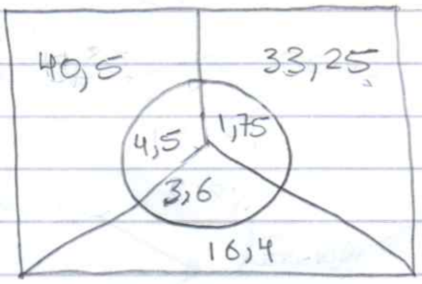
logo a probabilidade

$= \frac{0,172}{0,0852+0,172} = 0,6687$

4.



logo



a) $n = 10$

X = "nº de peças defeituosas"

p - "probabilidade de sair peça defeituosa"

$p = 0{,}0985$ $\quad q = 0{,}9015$

$\cong 0{,}1$

$X \sim Bi(n, p)$

$P(X > 5) = P(X \geq 6)$

$= \sum_{X=6}^{X=10} C_x^{10}\, p^x\, q^{10-x}$ $\quad x' = 6$

logo pela tabela Distribuição Binomial somada para $n = 10$; $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$; $x' = 6$

$P(X \geq 6) = 0{,}0001$

b) Maquina A

p_A - "peças defeituosas"

X_A - "nº peças defeituosas em amostra"

$X_A \sim Bi(10, p_A)$

$P(X_A \geq 3) = ?$

Maquina B

p_B - "Peças defeituosas"

X_B - "Numero peças defeituosas em amostra"

$X_B \sim Bi(20, p_B)$

$P(X_B \geq 3) = ?$

ficha 2

4. b) $n=10$

maquina A

maquina B

$p_A = 0,1$

$p_B = 0,05$

$P(X \geq 3) = 0,0702$

$P(X \geq 3) = 0,0755$

maquina B tem maior probabilidade doque maquina A.

4. c)

total 500 peças

$n = 20$

$E(x) = ?$

Função de probabilidade.

Y - "valor a pagar por peça"

p - "probabilidade de encontrar uma peça defeituosa em 500"

X - "nº de peças defeituosas numa amostra"

$p \simeq 0,1$; $q \simeq 0,9$; $n = 20$

$P(Y=5) = P(x<2) = 1 - P(X \geq 2)$

$= 1 - 0,6083$

$= 0,3917$

$n=20$; $p=0,1$; $x'=2$

↳ tabela (D.B.S) 0,6083

$P(Y=2,5) = P(2 \leq X \leq 4) = P(X \geq 2) - P(X \geq 5)$

$= 0,6083 - 0,0432$

$= 0,5651$

$P(Y=0,5) = P(X>4) = P(X \geq 5) = 0,0432$

$n=20$; $p=0,1$; $x'=5$

↳ tabela (D.B.S)

Y	0,5	2,5	5
$p_i = P(Y=y_i)$	0,0432	0,5651	0,3917

$E(X) = 0,5 \times 0,0432 + 2,5 \times 0,5651 + 5 \times 0,3917$
$= 3,39285$

3,39285 € por peça

para 500 peças será $500 \times 3,39285$
$\cong 1696,43$ €

5.) X - "numero de vezes que o processo "cu201" é activado"

$X \sim P_o(\mu)$ $\rightarrow$ $\mu = 7,2$ (pedidos por dia)

a)

i) $P(X=2) = \dfrac{e^{-\mu} \cdot \mu^{x}}{x!} = \dfrac{e^{-7,2} \cdot 7,2^{2}}{2}$

$\cong 0,01935$

$\cong 0,0194$

ii) $P(X>2) = P(X \geq 3)$ $\mu = 7,2;\ x' = 3$

$= 0,9745$ tabela (D. P.S)

iii) $P(X<6) = 1 - P(X \geq 6)$ $\mu = 7,2;\ x' = 6$

$= 1 - 0,7241$

$= 0,2759$

iv) $P(2 < X \leq 5) = P(3 \leq X \leq 5)$

$= P(X \geq 3) - P(X \geq 6)$

$= 0,9745 - 0,7241$

$= 0,2504$

b) $\mu = 7,2 \Leftrightarrow 24h$

sendo uma Distribuição Binomial de Poisson esta é linear $\therefore$ $\dfrac{60}{24} \cdot 7,2 = \mu' = 18$

$P(X < 20) \Leftrightarrow X \sim P_o(18)$

ficha Nº 2

Distribuição de Poisson somada.

$P(X<20) = P(X \leq 19)$
$= 1 - P(X \geq 20)$
$= 1 - 0,3491$ tabela (D. P. S)
$= 0,6509$

5c) $n = 10$

p - "probabilidade de ocorrerem mais de 8 ocdrucções"
Y - "nº de amostras de p"

$P(Y \geq 3) = ?$

$X \sim P_o(7,2)$

$p = P(X>8) = P(X \geq 9) = 0,2973$ tabela DPS

logo
$n=10;\ p \cong 0,3;\ x' = 3$

$Y \sim B_i(n, p)$

$P(Y \geq 3) = \sum_{x=3}^{x=n} {}^nC_x\, p^x q^{(n-x)}$ tabela D.B.S

$= 0,6172$

6) Distribuição de Poison

X - "numero de camiões que dão entrada numa estação de passagem".

$X \sim P_o(\mu) \rightarrow \mu = ?$

$P(X=0) = 0,05$ tabela (F. P. P)
$x = 0$ o valor mais proximo e $0,0498 \cong 0,05$

$\therefore\ \mu = 3$

6

a) i) $P(X > 5) = P(X \geq 6) = \sum_{x=6}^{x=\infty} \frac{e^{-3} . 3^x}{6}$

$\mu = 3$; $x' = 6$ $\qquad = 0{,}0839$

ii) $P(5 < X < 7) = P(6 \leq X \leq 6)$

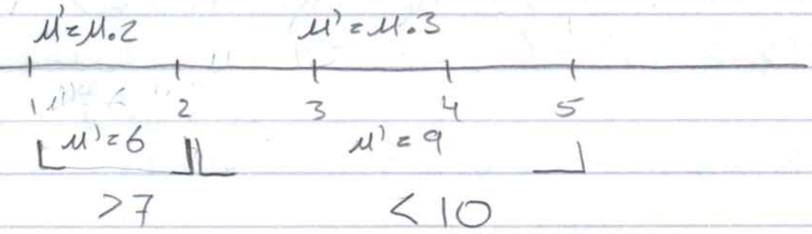
$= P(X \geq 6) - P(X \geq 7)$

$= 0{,}0839 - 0{,}0335$

<< tabela D.P.S >> $= 0{,}0504$

$\mu = 3$; $x' = 6$; $x' = 7$

b) Distribuição de Poisson é linear



X_1 - nº de camiões que dão entrada nos dois primeiros dias

X_2 - nº de camiões que dão entrada nos três últimos dias.

$X_1 \sim P_0(6)$ $\qquad$ $X_2 \sim P_0(9)$

$P(X_1 > 7 \cap X_2 < 10) = P(X_1 > 7) \times P(X_2 < 10)$

$= P(X_1 \geq 8) \times (1 - P(X_2 \geq 10))$

$\mu' = 6$; $x' = 8$ $\times$ $\mu' = 9$; $x' = 10$ $\qquad$ tabela D.P.S

$= 0{,}2560 \times (1 - 0{,}4126)$

$\simeq 0{,}1503744$

7 a) X - "numero de pedidos de aterragem que chegam a uma base militar em meia hora"

$X \sim P_0(\mu) \rightarrow \mu = ?$

sabe-se que $P(X > 5) = 0{,}55$

$P(X \geq 6) = 0{,}55 \rightarrow \mu = ?$

se $\mu = 6$; $x' = 6 \Rightarrow P(X \geq 6) = 0{,}5543$

ficha 2 | ficha nº 2

7. $\mu = 6$

$X \sim P_o(\mu)$

a) $P(7 \leq X < 10)$

$= P(X \geq 8) - P(X \geq 10)$

$\mu = 6;\ x' = 8$ $\qquad$ $\mu = 6;\ x' = 10$

$= 0{,}2560 - 0{,}0839$

$= 0{,}1721$

b) Distribuição de poisson é linear

$\therefore\ \mu = 6$ para $\frac{1}{2}$ hora

$\Rightarrow\ \mu = 12$ para 1 hora.

Y – "numero de pedidos de aterragem que chegam a uma base militar numa hora"

$P(Y > 20) = P(Y \geq 21)$

$\mu = 12;\ x' = 20$

$= 0{,}0116$ $\qquad$ tabela D.P.S.

C → "custo por aparelho desviados"

c_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	≤ 20	$= 21$	$= 22$	$= 23$	$= 24$	$= 25$	$= 26$	$= 27$	$= 28$
$\simeq$ $P(C = c_i)$	0,9884	0,0055	0,0030	0,0016	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000

c a) $P(Y \leq 20) = 1 - P(Y > 20) = 1 - P(Y \geq 21)$

$= 1 - 0{,}116 = 0{,}9884$

$E_{(C)} = 10000 \cdot 0{,}0055 + 20000 \cdot 0{,}0030 + 30000 \times 0{,}0016 + 40000 \times 0{,}0008 + 50000 \times 0{,}0004 + 60000 \times 0{,}0002 + 70000 \times 0{,}0001 + 80000 \times 0{,}00005 =$

$= 55 + 60 + 48 + 32 + 20 + 12 + 7 = 234$ um