ficha 5 | Distribuição Normal

1) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; $V(x) = 4$

Determine μ tal que

$P(X+4>0) = 0{,}8413$

$P(X>-4) = 0{,}8413$

$1 - P(X \leq -4) = 0{,}8413$

$P(X \leq -4) = 1 - 0{,}8413$

$= 0{,}1587$

$F(-4) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}1587 \xrightarrow{\text{tabela}} \Phi(-1{,}00)$

conversão para reduzida.

$\left(z = \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$-1{,}00 = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$-1{,}00 = \frac{-4-\mu}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow \mu = -2$

— // —

2) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; $\mu = 3$; $\sigma = 2$; $\sigma^2 = 4$

Determine o valor da constante c,
tal que

$P(X>c) = 3 \cdot P(X \leq c)$

$1 - P(X \leq c) = 3 \cdot P(X \leq c)$ sendo v.a contínua

$1 - P(Z \leq \frac{c-3}{2}) = 3 \cdot P(Z \leq \frac{c-3}{2})$

$1 = 3 \cdot P(Z \leq \frac{c-3}{2}) + P(Z \leq \frac{c-3}{2})$ $\quad Z \sim N(0,1)$

$1 = 4\, P(Z \leq \frac{c-3}{2})$

$P(Z \leq \frac{c-3}{2}) = \frac{1}{4}$

$\approx \Phi(0{,}67) = 0{,}2514$

$\Phi\left(\frac{c-3}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$0{,}68 = \frac{c-3}{2}$

$c = 1{,}66$

3.

X – tempo de realização de um dado percurso por um atleta.

$$X \sim N(12, 2)$$ σ - em minutos

a)

$P(X < 15) = P(X \leq 15)$, trata-se de uma variável aleatória contínua

$P(X \leq 15) = P\left(Z \leq \frac{15-12}{2}\right)$; $Z \sim N(0,1)$

$P(Z \leq 1,5)$ → recorrendo à tabela da distribuição Normal Reduzida de $\Phi(z)$

$z = 1,5$

$$\Phi(1,50) = 0,9332$$

b) $P(11 \leq X \leq 14)$ v.a. contínua

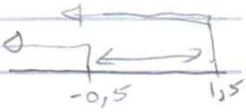
$P\left(\frac{11-12}{2} \leq Z \leq \frac{14-12}{2}\right)$; $Z \sim N(0,1)$

$P(-0,5 \leq Z \leq 1)$

$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0,5)$

$= 0,8413 - 0,3085$

$= 0,5328$



c)

$P(|X-12| > 2) = P(X-12 < 2 \cup X-12 > 2)$

$P(X < 10 \cup X > 14) = P(X < 10) + P(X > 14)$

pelo teorema da aditividade

observação
$\boxed{P(X > \mu + \sigma)}$

$P(X \leq 10) + 1 - P(X \leq 4)$; v.a contínua

$P\left(Z \leq \frac{10-12}{2}\right) + 1 - P\left(Z \leq \frac{14-12}{2}\right)$; $Z \sim N(0,1)$

$\Phi(-1,00) + 1 - \Phi(1,00) =$

ficha 5

4. X - "comprimento das peças produzidas por uma máquina em milímetros"

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$P(|X - \mu| > \sigma) \Rightarrow$ peça defeituosa

sabe-se que

$P(X < 0,25) = 0,5$

$P(0,25 < X < 0,642) = 0,475$

a) calcule μ e σ

$P(X < 0,25) = P\left(Z < \frac{0,25 - \mu}{\sigma}\right) = 0,5$

$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$; $Z \sim N(0,1)$

$\Phi\left(\frac{0,25 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(0)$

$\therefore \ 0 = \frac{0,25 - \mu}{\sigma} \Rightarrow \mu = 0,25$

também

$\Phi\left(\frac{0,642 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0,25 - \mu}{\sigma}\right) = 0,475$

$\Phi\left(\frac{0,642 - \mu}{\sigma}\right) - \underbrace{\Phi\left(\frac{0,25 - \mu}{\sigma}\right)}^{=0,5} = \Phi(0,07)$

$\Phi\left(\frac{0,642 - \mu}{\sigma}\right) = 0,475 + 0,5 = 0,975$

$\Downarrow$

$\Phi(1,96)$

$1,96 = \frac{0,642 - \mu}{\sigma}$; $\mu = 0,25$

$\Rightarrow \sigma = 0,2$

b) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; $\mu = 0{,}25$; $\sigma = 0{,}2$

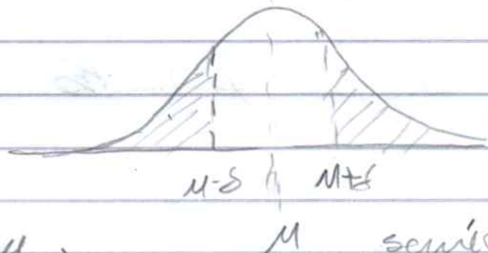
$P(|X-\mu| > \sigma) = ?$

$P(X-\mu < -\sigma \ \cup \ X-\mu > \sigma) = ?$

$P(X < \mu-\sigma) + P(X > \mu+\sigma)$

pelo teorema da aditividade

$P(\mu+\sigma < X < \mu-\sigma) = 2 \times P(X < \mu-\sigma)$



simétrico

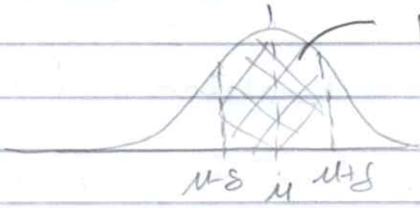
$= 2 \times P\left(Z \leq \frac{(\mu-\sigma)-\mu}{\sigma}\right)$

$= 2 \times P(Z \leq -1)$; $Z \sim N(0,1)$

$= 2 \times \Phi(-1) = 0{,}1587 \times 2$

$= 0{,}3174$

$1 - 0{,}3174 = 0{,}6826$



c.a) $(\mu-\sigma)-\mu = -\mu+\sigma+\mu$

ficha 5

5. X_1 - "peso de duas chávenas de açúcar"
X_2 - "peso de oito claras"
⇒ em gramas

$\mu_{açucar}$ - peso médio de cada chávena

$\delta_{açucar}$ - desvio padrão de cada chávena

μ_{clara} - peso médio de uma clara

δ_{clara} - desvio padrão de cada clara

Y_1 - "peso de uma clara"

Y_2 - "peso de uma chávena de açúcar"

$P(Y_{1clara} < 15) = 0,7$

$0,7 \cong 0,6985 \quad \Phi(z) = 0,6985 \Rightarrow z = 0,52$

$Z = \frac{y_i - \mu}{\delta}$; $Z \sim N(0,1)$

$\frac{15-14}{\delta} = 0,52 \Rightarrow \delta \cong 1,923$

∴

$Y_2 \sim N(\mu_{1chávena\ açúcar}, \delta^2_{1chávena\ açúcar})$

$\mu_{1chávena\ açúcar} = 70$; $\delta_{1chávena\ açúcar} = 3$

$Y_1 \sim N(\mu_{1clara}, \delta^2_{1clara})$

$\mu_{1clara} = 14$; $\delta_{1clara} = 1,923$

a) $Y_1 \sim N(14, 1{,}923^2)$

$Y_2 \sim N(70, 3^2)$

$D \sim N(2\times 70 + 8\times 14, 2\times 3^2 + 8\times 1{,}923^2)$

pelo princípio da aditividade da Normal

$D = Y_1 + Y_2$

$D \sim N(\mu_{Y_1} + \mu_{Y_2}, \sigma^2_{Y_1} + \sigma^2_{Y_2})$

$D \sim N(8\times \mu_{Y_1} + 2\times\mu_{Y_2}, 8\times \sigma^2_{Y_1} + 2\,\sigma^2_{Y_2})$

$D \sim N(252, \sqrt{47{,}583432}^2)$

c.a) $\sigma^2 = 47{,}583432$
$\sigma = \sqrt{47{,}583432}$

$\therefore\; P(D > 240) = P(D \geq 240)$; pq v.a contínua

$= 1 - P(D \leq 240)$

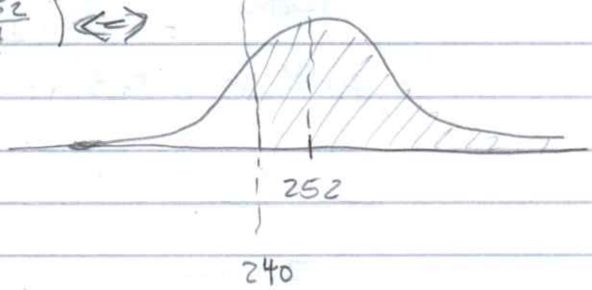
$= 1 - P\left(Z \leq \frac{240-252}{\sqrt{47{,}583432}}\right) \Leftrightarrow$

$z = \frac{240-252}{\sqrt{47{,}583432}}$; $Z \sim N(0,1)$

c.a

$z \cong -1{,}73961$

$z \cong -1{,}74$



$1 - P\left(Z \leq \frac{240-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(-1{,}74)$

$= 1 - 0{,}0409$

$= 0{,}9591$

b) $P(P(Y_1 > 15) \mid P(Y_1 > 14))$

$= \frac{P(Y_1 \geq 15)}{P(Y_1 \geq 14)}$ pq v.a contínua

ficha 5

5 b)

$z_1 \tilde{=} 0,52$ (→ 0,6985) $\qquad z_2 = 0$

$$\frac{1-0,6985}{1-0,5} = 0,603$$

6)

tecido A - 1000 escudos/metro
tecido B - 2000 escudos/metro

X - "quantidade de tecido vendido diariamente em metros"

$X_A \sim N(15, 2,5^2)$
$X_B \sim N(5, \delta^2)$

sabe-se

$P(X_B > 8,5) = 0,04$
$\Leftrightarrow P(X_B \geq 8,5) = 0,04$; pq v.a contínua.
$1 - P(X_B \leq 8,5) = 0,04$
$P(X_B \leq 8,5) = 1 - 0,04$
$P(X_B \leq 8,5) = 0,96$

$z = \frac{8,5-5}{\delta}$; $Z \sim N(0,1)$

$\Phi(z) = 0,96 \Leftrightarrow z = 1,75$

$\therefore$

$1,75 = \frac{8,5-5}{\delta} \Leftrightarrow \delta = 2$

$\therefore X_B \sim N(5, 2^2)$

a)

conversão para escudos/metro segue a propriedade de aditividade da Normal

logo

$X_A \sim N(15, 2{,}5^2)$ — 1000 escudos/metro
$X_B \sim N(5, 2^2)$ — 2000 escudos/metro

tem-se
$X_A \sim N(15000, 1000^2 \cdot 2{,}5^2)$

$X_B \sim N(10000, 2000^2 \cdot 2^2)$

L — "lucro diário"

$\boxed{\text{Nota — no caso de conversão}}$

$L = X_A + X_B$

$L \sim N(15000 + 10000, \sqrt{625 \cdot 10^4}^2 + \sqrt{16 \cdot 10^6}^2)$
$L \sim N(25000, \sqrt{2225 \cdot 10^4}^2)$; $\delta \doteq 4717$

$P(24 < L < 27)$
$= P(24 \cdot 10^3 \leq L \leq 27 \cdot 10^3)$; pq v.a contínua.

$= P(-0{,}212 \leq Z \leq 0{,}424)$

$= -\Phi(-0{,}212) + \Phi(0{,}424)$
$= -0{,}4168 + 0{,}6628 = 0{,}246$

$\boxed{V(X) = \delta^2}$

$\boxed{V(aX) = a^2 \cdot V(X) = a^2 \cdot \delta^2}$

ficha 5

6 b)

$L_A \sim N(15000, \sqrt{625 \cdot 10^4}^2)$; $\delta = 2500$

LD – "lucro obtido em n dias do tecido A"

$LD \sim N(D \times 15000, D * 2500^2)$

$\delta = \sqrt{D \cdot 2500^2}$

$P(LD > 200 \cdot 10^3) = 0,96$

$P(LD \leq 200 \cdot 10^3) = 0,04$ pq v.a contínua

$P\left(\frac{200 \cdot 10^3 - D \cdot 15000}{\sqrt{D} \cdot 2500} \geq Z\right)$; $Z \sim N(0,1)$

$= 0,04 \rightarrow -1,75$

$(a-b)(a-b)$

$a^2 - ab - ab + b^2$

$\therefore -1,75 = \frac{200 \cdot 10^3 - D \cdot 15 \cdot 10^3}{\sqrt{D} \cdot 2500}$

$3,0625 = \frac{4 \cdot 10^{10} + D^2\, 225 \cdot 10^6 - 6 \cdot 10^9 D}{D\ 62500}$

$191406{,}25\, D + 6 \cdot 10^9 D - 4 \cdot 10^{10} - D^2\, 225 \cdot 10^6 = 0$

$225 \cdot 10^6\, D^2 - 6019140625\, D + 4 \cdot 10^{10} = 0$

$D = 14,441 \quad \vee$

$D = 12,31$

7.

X – "Rebido mensal teorico do SMGE por kWh"

Y – "consumo mensal de um cliente por mês em kWh"

$$Y \sim N(400, 40^2)$$

a)

$$P(X > a) = 0{,}3085$$
$$1 - P(X \leq a) = 0{,}3085$$
$$P(X \leq a) = 0{,}6915$$

$$z = \frac{a-400}{40} \; ; \; Z \sim N(0,1) \qquad \Phi(z) = 0{,}6915 \quad z = 0{,}5$$

$$\frac{a-400}{40} = 0{,}5$$

$$a = 420 \text{ kWh}$$

b)

$$Y_{3meses} \sim N(3.400, 3.40^2)$$
$$Y_{3meses} \sim N(1200, \sqrt{4800}^{\,2})$$

pela propriedade de aditividade

c)

$$P(Y_{3meses} > a) = 0{,}3085$$
$$P(Y_{3meses} \leq a) = 0{,}6915 \rightarrow z = 0{,}5$$

$$z = \frac{a-1200}{\sqrt{4800}} = 0{,}5 \qquad a \cong 1234{,}6$$

ficha 5

7c)

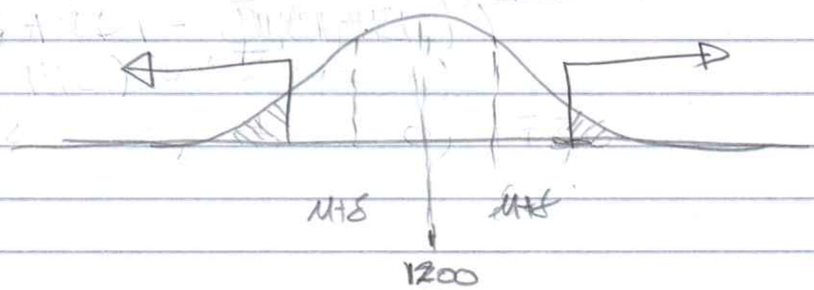
valor teorico ao fim de 3 meses

$\approx 1234,6$ $\qquad\qquad \delta \cong 69,3$

$P(|Y_{3meses} - 1234,6| \geq 100) = ?$

$P(Y_{3meses} - 1234,6 < -100 \cup Y_{3meses} - 1234,6 > 100)$

$P(Y_{3meses} \leq 1134,6) + P(Y_{3meses} \geq 1334,6)$



$2\,P(Y_{3meses} \leq 1134,6) = 2 \times \Phi(-0,94)$

$= 2 \times 0,1736$

$= 0,3472$