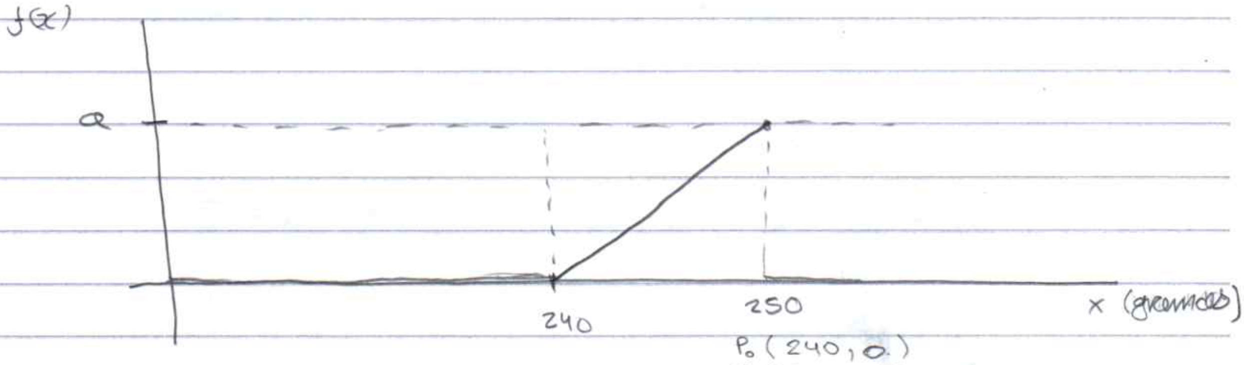
ficha 3 | variáveis aleatórias contínuas.

1. X - "quantidade de café que é depositada nas embalagens de 250 gramas"

função densidade de probabilidade



$P_0(240, 0)$
$P_1(250, a)$

a) calcule o valor de a.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$y - \overset{0}{y_0} = \frac{\overset{a}{y_1} - \overset{0}{y_0}}{\underset{250}{x_1} - \underset{240}{x_0}} \cdot (x - \overset{240}{x_0})$$

$$y = \frac{a}{10}(x - 240)$$

logo

$$\int_{240}^{250} \frac{a}{10}x - 24a\,dx = 1$$

(a)

$$y = \frac{a - 0}{250 - 240} \cdot (x - 240)$$

$$y = \frac{a}{10}(x - 240)$$

$$y = \frac{ax}{10} - 24a$$

$$y = \frac{a}{10}x - 24a$$

$$= \int_{240}^{250} \frac{a}{10}x\,dx - \int_{240}^{250} 24a\,dx = 1$$

$$= \frac{a}{10}\left|\frac{x^2}{2}\right|_{240}^{250} - 24a\left[x\right]_{240}^{250} = 1$$

$$= \frac{a}{\cancel{10}} \cdot 245\cancel{0} - 24a \cdot 10$$

$$= 245a - 240a = 1$$

$$= 5a = 1$$

$$= a = \frac{1}{5} = 0,2$$

ou pela area.

$$\frac{10 \cdot a}{2} = 1$$

b) Defina a função de densidade de probabilidade da v.a X

$$f(x) \begin{cases} 0 \quad , x < 240 \\ \frac{1}{50}x - \frac{24}{5} \quad , 240 \leqslant x \leqslant 250 \\ 0 \quad , \quad x \geqslant 250 \end{cases}$$

$$y = \frac{a}{10} x - 24a \qquad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1}{50} x - \frac{24}{5}$$

c) $$P(243 \leqslant X \leqslant 247) = \int_{243}^{247} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{50}\int_{243}^{247} x\, dx - \frac{24}{5}\int_{243}^{247} 1\, dx$$

$$= \frac{1}{50}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{243}^{247} - \frac{24}{5}\left[x\right]_{243}^{247}$$

$$= 0,4 \qquad \Rightarrow 40\%$$

d) $$E(x) = \mu = \int_{240}^{250} x \cdot \left(\frac{1}{50}x - \frac{24}{5}\right) dx$$

$$= \int_{240}^{250} \frac{1}{50}x^2 - \frac{24}{5}x \quad dx$$

$$= \frac{1}{50}\int_{240}^{250} x^2\, dx - \frac{24}{5}\int_{240}^{250} x\, dx$$

$$= \frac{1}{50}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{240}^{250} - \frac{24}{5}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{240}^{250}$$

ficha 3

1 d)

$$\frac{1}{50}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{240}^{250} - \frac{24}{50}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{240}^{250}$$

$E(x) = 246,6^{\circ} \cong 246,67$

$P(X \geq 246,67)$

$f(246,67) = \frac{1}{50} \cdot 246,67 - \frac{24}{5} = 0,1334$

$A_{\square} = 1 - A_{\triangle} = 1 - \frac{6,67 \times 0,1334}{2}$

$= 0,555 \cong 0,56$

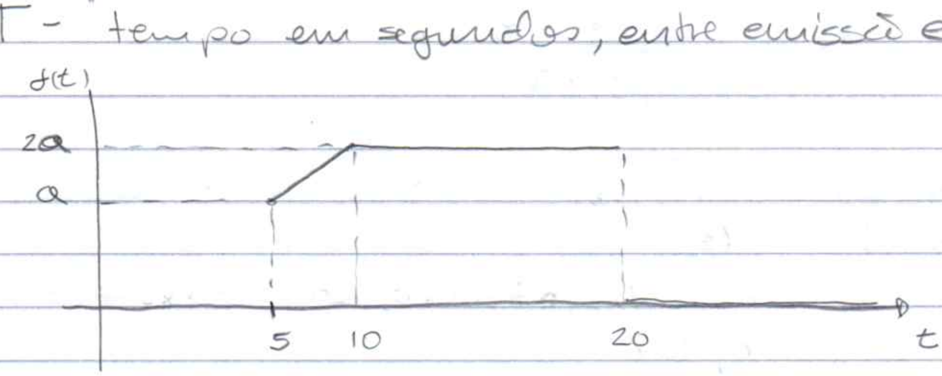
$\therefore \quad P(X \geq \mu) \cong 56\%$

2. três sinais S_1 S_2 S_3

S_1 - "recepção sinal 1"
S_2 - " " " 2" "os sinais são independentes
S_3 - " " " 3" um do outro"

$P(S1) = 0,2$; $P(S2) = 0,3$; $P(S_3) = 0,4$

T - "tempo em segundos, entre emissão e a recepção"



Area total = 1
logo

$$(15 \times 2a) - \frac{5 \times a}{2} = 1$$

$30a - 2,5a = 1$

$27,5a = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{55}$

a) $P(s_1 \mid (s_1 s_2 \bar{s}_3) \cup (s_1 \bar{s}_2 s_3) \cup (\bar{s}_1 s_2 s_3))$

A - "recebeu apenas dois sinais dos três emitido"

$$P(A) = P(s_1 s_2 \bar{s}_3 \cup s_1 \bar{s}_2 s_3 \cup \bar{s}_1 s_2 s_3)$$
$$= P(s_1 s_2 \bar{s}_3) + P(s_1 \bar{s}_2 s_3) + P(\bar{s}_1 s_2 s_3)$$
$$= P(s_1) . P(s_2) . P(\bar{s}_3) + P(s_1) . P(\bar{s}_2) . P(s_3) + P(\bar{s}_1) . P(s_2) P(s_3)$$
$$= 0,2 . 0,3 . 0,6 + 0,2 . 0,7 . 0,4 + 0,8 . 0,3 . 0,4$$
$$= 0,188$$

$$P(s_1 \mid A) = \frac{P(s_1 \cap A)}{P(A)}$$

$$P(s_1 \cap A) = P(s_1 s_2 \bar{s}_3 \cup s_1 \bar{s}_2 s_3)$$
$$= 0,2 \times 0,3 \times 0,6 + 0,2 \times 0,7 \times 0,4 = 0,092$$

$$\therefore \quad P(s_1 \mid A) = \frac{0,092}{0,188} = 0,49$$

b) X - numero de sinais recebidos em 3 emitidos

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 3$

$\{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X=0) = P(\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3) = 0,8 \times 0,7 \times 0,6 = 0,336$$
$$P(X=1) = P(s_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3) + P(\bar{s}_1 s_2 \bar{s}_3) + P(\bar{s}_1 \bar{s}_2 s_3)$$
$$= 0,2 \times 0,7 \times 0,6 + 0,8 \times 0,3 \times 0,6 + 0,8 \times 0,7 \times 0,4$$
$$= 0,452$$
$P(X=2) =$ alinea a) $\Rightarrow$ $0,188$

$$P(X=3) = P(s_1 s_2 s_3) = 0,2 \times 0,3 \times 0,4 = 0,02$$

O numero mais provavel é 1.

ficha 3

2 b)

x_i	0	1	2	3
	0,34	0,45	0,19	0,02

$$E(x) = \sum_{i=0}^{i=3} x_i p_i = 0,89$$

c) como $f(t)$ é uma f d p $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$

$a = \frac{2}{55}$

$$P(T > 15) = P(T \geq 15) = \int_{15}^{20} f(t)\, dt$$

$$= \int_{15}^{20} 2a\, dt$$

$$= 2a \int_{15}^{20} 1\, dt$$

$$= 2a \left[x \right]_{15}^{20}$$

$$= 2a \cdot (20-15)$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{55} \cdot 5 = \frac{20}{55} = \frac{4}{11}$$

d) $P(T \geq 15) = \frac{4}{11} \cong 0,3636 \cong 0,35$

$p \cong 0,35$ para leitura da tabela

$q = 0,65$

Y – "nº de acontecimentos de p" $n = 10$

$P(Y \geq 5)$ $Y \sim B_i(n, p)$

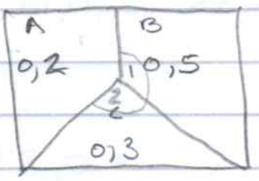
$\Rightarrow$ $n = 10$ $p = 0,35$ $x' = 5$

$\Rightarrow$ 0,2485 pela tabela Destribuição binomial Somada

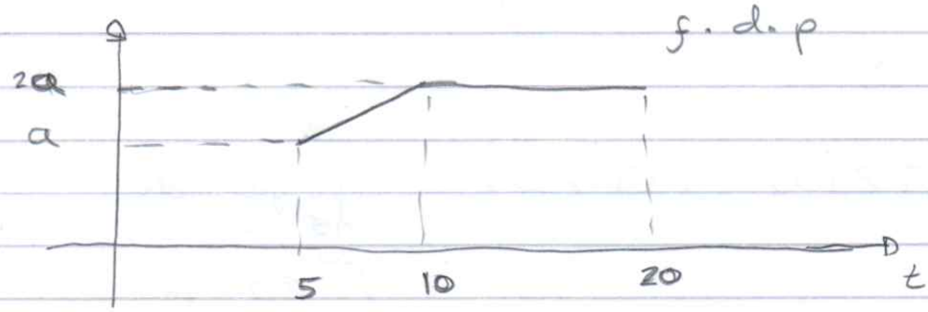
3. caso Miniburger

tipo de hamburger	Pickles que contém
A	0
B	1
C	2

probabilidade de escolha do hamburger



T - "tempo de fabrico de um qualquer tipo de hamburger"



pelo exercicio anterior $a = \frac{2}{55}$

a) $\frac{0,5}{0,3+0,5} = \frac{0,5}{0,8} = \frac{5}{8} = 0,625$

b) p - "probabilidade do hamburger ser do tipo C"
X - "nº de acontecimentos p" ; $n = 10$
$X \sim Bi(n; p)$

$P(X \geq 5)$ = Distribuição Binomial somada
$= \sum_{x=x'}^{x=n} C_x^n \, p^x \, q^{(n-x)}$

$n = 10$; $p = 0,3$; $x' = 5$ tabela P.B.S
$= 0,1503$

c) $P(T > 10) = P(T \geq 10) = \int_{10}^{20} ft \, dt$

ficha 3

3 c)

$$P(T \geq 10) = \int_{10}^{20} 2a \, dt = 2a \int_{10}^{20} dt$$
$$= 2a \left| x \right|_{10}^{20}$$
$$= 2 . a . (20-10)$$
$$= 2 . a . 10$$
$$= 2 . \frac{2}{55} . 10 = \frac{40}{55} = \frac{8}{11}$$

d) $$\frac{P(T \geq 15)}{P(T \geq 10)} = \frac{P(T \geq 15)}{\frac{8}{11}} = \frac{5 \times 2a}{\frac{8}{11}}$$
$$= \frac{5 \times 2 \times \frac{2}{55}}{\frac{8}{11}}$$
$$= \frac{20}{55} \cdot \frac{11}{8}$$
$$= \frac{1}{2} \Rightarrow 50\%$$

4 A < B

$$\begin{cases} P(A) = 3 \; P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{cases} \begin{cases} P(A) = 3 \times (1 - P(A)) \\ \end{cases}$$

$$P(A) = 3 - 3P(A)$$
$$4P(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

X - "permanencia de um concorrente no concurso A em minutos"

$$f(x) \begin{cases} k \frac{10}{x^3} & se \; x \geq 5 \\ 0 & se \; x = o.v. \end{cases}$$

Y - "permanencia de um concorrente no concurso B em minutos"

$$E(X) = 15 \text{ min} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{15} \quad Y \sim Ex\left(\frac{1}{15}\right)$$

4
$$\int_5^{+\infty} f(x)\,dx = 1 = 10k \int_5^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$= 10k \int_5^{+\infty} x^{-3} = 10k \left| \frac{x^{-2}}{-2} \right|_5^{+\infty}$$

$$= 10k \left| -\frac{1}{2x^2} \right|_5^{+\infty}$$

$$= 10k \left(0 + \frac{1}{50} \right)$$

$$= \frac{10k}{50} = 1$$

$$K = \frac{50}{10} = 5$$

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{50}{x^3} & \text{se } x \geq 5 \\ 0 & \text{se } x = \text{o.v} \end{cases}$$

a)

$$P(X \geq 20) = \int_{20}^{+\infty} \frac{50}{x^3}\,dx$$

$$= 50 \int_{20}^{+\infty} \frac{1}{x^3}$$

$$= 50 \left| -\frac{1}{2x^2} \right|_{20}^{+\infty}$$

$$= 50 \cdot \left(0 + \frac{1}{800} \right)$$

$$= \frac{5}{80} \Rightarrow 6{,}25\%$$

b) Desvio padrão $= V(x) = \delta^2 = \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{15}\right)^2} = 225$

$$\delta = \sqrt{V(x)} = 15$$

ficha 3

4 b)

$P(Y < 15) = P(Y \leq 15) = F(15)$

$= 1 - e^{-\lambda x} \quad ; \; x = 15$

$= 1 - e^{-1}$

$\simeq 0{,}6321 \quad \Rightarrow \quad 63\%$

c) p – "probabilidade de permanecer mais de 20 minutos"

R – " nº de ocorrências p" $n = 10$

$R \sim Bi\,(n, p)$

$n = 10 \; ; \quad p = \frac{5}{80} \; ; \quad q = \frac{75}{80} \; ; \quad x' = 6$

tabela Destribuição binomial somada

cumpre com independência, só dois casos possíveis.

$p = 0{,}0625$ implica $p \simeq 0{,}05$

$P(R > 5) = P(R \geq 6) = 0{,}0000$

d) $P(X \geq 20) = \frac{5}{80}$

$P(Y \geq 20) = 1 - F(20)$

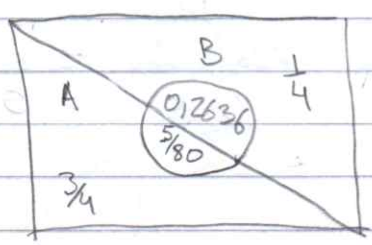
$= 1 - (1 - e^{-\lambda 20})$

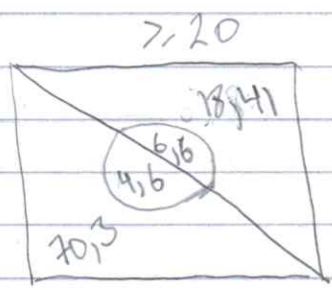
$= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{15} \cdot 20})$

$= 1 - (1 - e^{-\frac{20}{15}})$

$= 1 - 0{,}7364$

$\simeq 0{,}2636$





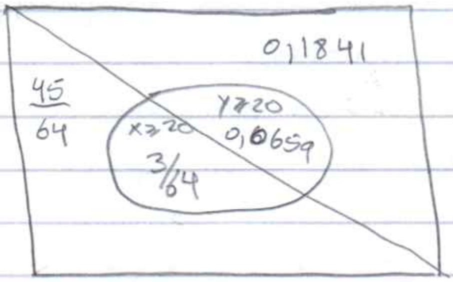
concorrente em prova mais de 20 minutos

$P(X \geq 20 \cup Y \geq 20) = \frac{5}{80} \cdot \frac{3}{4} + 0{,}2636 \times \frac{1}{4}$

4 d) $P(P(X \geq 20) \mid P(X \geq 20) \cup P(Y \geq 20))$

$$= \frac{\frac{5}{80} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{5}{80} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0{,}2636} = 0{,}4156$$

$$\cong 41{,}56\,\%$$



$$\frac{\frac{3}{64}}{\frac{3}{64} + 0{,}0659} \Rightarrow 41{,}56\,\%$$

5) B - "quantidade de bolos vendidos na Universidade em kg diariamente"

f.d.p

$$f(x) = \begin{cases} \frac{K}{5}(10 - x) & \text{se } 5 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{se } x \text{ é qualquer outro valor} \end{cases}$$

$K = ?$

$$\int_5^{10} f(x)\,dx = 1 \quad \text{, pq } f.d.p$$

$$\int_5^{10} 2K - \frac{Kx}{5}\,dx = 2K\int_5^{10} dx - \frac{K}{5}\int_5^{10} x\,dx$$

$$= 2K \left| x \right|_5^{10} - \frac{K}{5} \left| \frac{x^2}{2} \right|_5^{10}$$

$$= 10K - \frac{K}{5}\left(50 - \frac{25}{2}\right)$$

ficha 3

5)

$$10k - \frac{k}{5}\left(50 - \frac{25}{2}\right) = 1$$

$$\cancel{10k} - \cancel{10k} + \frac{k}{5} \cdot \frac{25}{2} = 1$$

$$\frac{5}{2} k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}$$

$$f(x) \begin{cases} \frac{20}{25} - \frac{2}{25} x & \text{se } 5 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{se } x \text{ é qualquer outro valor} \end{cases}$$

c.a $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$

$$P(B \geq 6) = \int_6^{10} \frac{20}{25} - \frac{2}{25} x \, dx$$

$$= \frac{20}{25} \int_6^{10} dx - \frac{2}{25} \int_6^{10} x \, dx$$

$$= \frac{20}{25} \left| x \right|_6^{10} - \frac{2}{25} \left| \frac{x^2}{2} \right|_6^{10}$$

$$= \frac{20}{25} \cdot 4 - \frac{2}{25} (50 - 18)$$

$$= 0,64 \Rightarrow 64\%$$

b) $$\frac{P(B \leq 7,5) \cap P(B \geq 6)}{P(B \geq 6)}$$

$$\frac{\int_6^{7,5} \frac{20}{25} - \frac{2}{25} x \, dx}{P(B \geq 6)} \quad ; \quad P(B \geq 6) = 0,64$$

$$\frac{20}{25} \cdot 1,5 - \frac{2}{25} \cdot \left(\frac{7,5^2}{2} - \frac{6^2}{2} \right) = 0,39$$

$$\frac{0,39}{0,64} = 0,6093 \cong 0,61$$

5c) p - "quantidade de bolas ultrapassar 6Kg"

$p = 0,64 \Rightarrow$ para tabela $\underline{0,65}$

X - "nº de acontecimentos p" $\quad n = 5$

$X \sim Bi\,(n, p)$

X é binomial devido a ser independente e so exist dois casos possíveis de saída.

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X \geq 3) \qquad \Rightarrow x' = 3$$

$$= 1 - \sum_{x=x'}^{x=n} C_x^n \, p^x \, q^{n-x}$$

como $p > 0,5$

$$\sum_{x=n-x'+1}^{x=n} C_x^n \, p^{n-x} \, q^x$$

why?

$n = 5 \quad p = 0,35 \quad x' = 3$

$P(X \leq 2) = 0,2352$

d) $p \cong 0,65$

X - "quantidade de bolas em Kg vendidos diariamente 10"

$X \sim Un\,[a, b] \qquad a = 5 \,;\; b = 10$

$$F(6) = \frac{x-a}{b-a} \qquad \text{se } x \in [a, b]$$

$$= \frac{6-5}{10-5} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$P(X \leq 6) = 0,2$

$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 6)$

$= 1 - 0,2$

$= 0,8$