ficha 1 | Variáveis aleatórias Discretas

1) O número de componentes avariados de certo equipamento, constituído por 5 componentes, é uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade:

x_i	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)=p_i$	0,1	0,3	a	0,25	0,15	b

sabe-se também que 55% dos equipamentos tem menos de 3 componentes avariados

a) Determine as constantes a e b.

X - numero de componentes avariados

$P(X<3) = 0,55 \Rightarrow P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$\sum_{x_i=0}^{5} P(x_i) = 1$ - Distribuições Discreta

$\begin{cases} 0,1+0,3+a = 0,55 \\ 0,1+0,3+a+0,25+0,15+b=1 \end{cases}$

$\begin{cases} a = 0,55-0,1-0,3 \Leftrightarrow a = 0,15 \\ b = 1-0,1-0,3-0,15-0,25-0,15 \Leftrightarrow b = 0,05 \end{cases}$

b) Qual a probabilidade de que, quando considerados dois equipamentos, um tenha pelo menos 2 componentes avariados e o outro não.

X_1 - nº de componentes avariados equipamento 1
X_2 - " " " " 2

X_1 e X_2 são independentes.

$P[(X_1 \geq 2 \cap X_2 < 2) \cup (X_1 < 2 \cap X_2 \geq 2)]$
$= P(X_1 \geq 2 \cap X_2 < 2) + P(X_1 \cap X_2 \geq 2)$
$= P(X_1 \geq 2) \times P(X_2<2) + P(X_1<2) \times P(X_2 \geq 2)$
$= 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6$
$= 0,48 \Leftrightarrow 48\%$

x_i	0	1	2	3	4	5
$f(x_i) = p_i$	0,1	0,3	0,15	0,25	0,15	0,05
$= x_i \times f(x_i)$	0	0,3	0,3	0,75	0,6	0,25

$$E(X) = \sum_{i=0}^{i=5} x_i \cdot p_i = 0 + 0,3 + 0,3 + 0,75 + 0,6 + 0,25$$
$$= 2,2$$

b) X_1 – "nº de componentes avariados no 1º equipamento"

X_2 – " " " " " 2º

X_1 e X_2 são independentes

$$P(X_1 \geq 2 \cap X_2 < 2) = P(X_1 \geq 2) \times P(X_2 < 2)$$
$$= (0,15 + 0,25 + 0,15 + 0,05) \times (0,1 + 0,3)$$
$$= 0,24$$

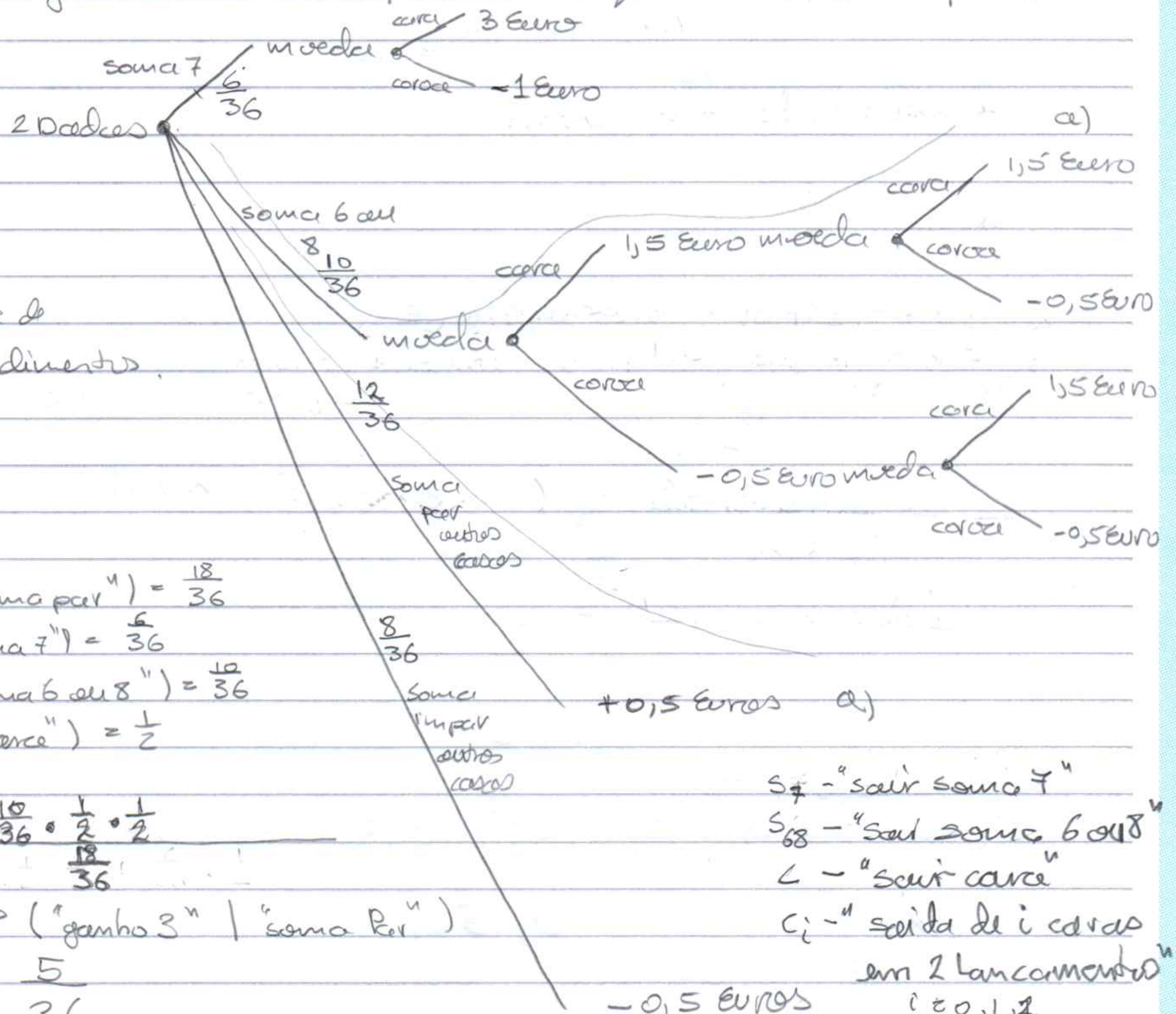
c) considerando apenas equipamentos com alguma avaria, qual a percentagem dos que tem menos de 3 avarias?

$$P(X < 3 \mid X \geq 1) = \frac{P(X<3 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)}$$
$$= \frac{P(0 < X < 3)}{P(X \geq 1)}$$
$$= \frac{P(X=1) + P(X=2)}{1 - P(X=0)}$$
$$= \frac{0,3 + 0,15}{1 - 0,1} = \frac{0,45}{0,9}$$
$$= 0,5$$

Ficha 1

2.) Lançam-se 2 dados. Se a soma dos pontos obtidos for 7, lança-se uma moeda. Por cada cara obtida ganha-se 3 euros. Por cada coroa perde-se 1 Euro. Se a soma for 6 ou 8, lança-se 2 moedas. Por cada cara ganha-se 1,5 Euro, por cada coroa perde-se 0,5 Euro. Em todos os outros casos, ganha-se 0,5 Euros se a soma for par, e perde-se 0,5 Euro se a soma for impar.

a) Calcule a probabilidade de, numa só jogada, se ganhar 3 Euros, sabendo que saiu soma par.



árvore de procedimentos.

P("soma par") = $\frac{18}{36}$

P("soma 7") = $\frac{6}{36}$

P("soma 6 ou 8") = $\frac{10}{36}$

P("cara") = $\frac{1}{2}$

$$\frac{\frac{10}{36}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{18}{36}}$$

= P("ganho 3" | "soma Par")

= $\frac{5}{36}$

S_7 – "sair soma 7"

S_{68} – "sair soma 6 ou 8"

C – "sair cara"

C_i – "saída de i caras em 2 lançamentos" $i = 0, 1, 2$

$P(S_7 C \cup S_{68} C_2 \mid S_{68} \cup S_{op})$ S_{op} – "sair somas outros pares" S_{oi} – "sair soma outros impar"

$= \frac{P(S_{68} C_2)}{P(S_{68} \cup S_{op})}$

D_i – "saída de i pontos num dado" $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

b) Seja X a variável aleatória que traduz o ganho no final de uma jogada. Calcule o valor esperado e a variância de X

X - "Ganho no final de uma jogada"

$X = \{ -1 ; -0,5 ; 0,5 ; 1 ; 3 \}$

$X = x_i$	-1	$-0,5$	$0,5$	1	3 €
$f(x_i) = p_i$	$\frac{11}{72}$	$\frac{24}{72}$	$\frac{16}{72}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{11}{72}$
$x_i \cdot p_i$	$-\frac{11}{72}$	$-\frac{24}{144}$	$\frac{16}{144}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{33}{72}$
$x_i^2 \cdot p_i$	$\frac{11}{72}$	$\frac{24}{288}$	$\frac{16}{288}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{99}{72}$

$$E(x) = \sum_{i=-1}^{3} x_i \cdot p_i$$

$$= 0,38^{\circ} \simeq 0,39 \text{ €}$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

c.a

$$E(x)^2 = (0,39)^2 = 0,1521$$

$$E(x^2) = \sum_{i=-1}^{3} x_i^2 \cdot f(x_i)$$

$$= \sum_{i=-1}^{3} x_i^2 \cdot p_i$$

$$= 1,805^{\circ} \simeq 1,806$$

c.a) $E(x)^2 = 0,39^2 = 0,1521$

$$V(x) = 1,806 - 0,1521$$

$$= 1,6539 \text{ Euros}^2$$

Desvio padrão $\quad \delta(x) = \sqrt{V(x)}$

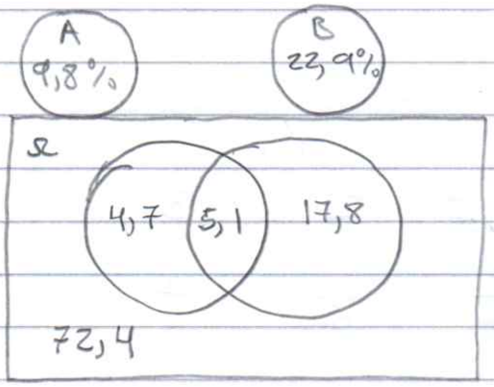
$$\simeq \sqrt{1,6539}$$

$$\simeq 1,28 \text{ €}$$

Ficha 1

3. O dono de um quiosque estima que 9,8% dos seus clientes adquirem a revista A, 22,9% a revista B e 5,1% a revista A e a B.

a) Um cliente comprou uma revista. Qual a probabilidade de ele ter comprado a revista A?



$P(A \cup B) = 27,6\ \%$

$P(A \cap B) = 5,1\ \%$

$P(A \cap \bar{B}) = 4,7\ \%$

$P(B \cap \bar{A}) = 17,8\ \%$

$P(\bar{A}) = 90,2\ \%$

$P(\bar{B}) = 77,1\ \%$

$P(\bar{A}\,\bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 72,4$

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$
$= 1 - P(A \cup B)$

sabe-se
$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

X - "comprou uma revista"

$P(X) = 4,7 + 17,8$
$= 22,5$

$P(A \mid (A \cup B)) = 0,355$

$$P(A \mid X) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(X)} = \frac{0,047}{0,225} = 0,208 \approx 0,21$$

b) Seja X o número de revistas compradas por cada cliente. Calcule o valor esperado dessa v.a.)

$X = x_i$	0	1	2
$f(x_i) = p_i$	0,724	0,225	0,051
	0	0,225	0,102

$E(X) = \sum_{i=0}^{2} x_i \cdot p_i = 0,327$ un

4. Considere o problema 4 da ficha 2^{a} de Revisões seja $Y = 2X + 4$ a variável aleatória que tradez o ganho (em euros) no final de uma jogada, sendo X o número de pontos obtidos por jogada. Calcule o ganho esperado e a respectiva variância no final de 5 jogos

X - "numero de pontos obtidos por jogado"

$X = x_i$	-1	$0,5$	1	3
$f(x_i) = p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$Y = 2X + 4$	2	5	6	10
$x_i \cdot p_i$	$\frac{2}{6}$	$\frac{15}{6}$	1	$\frac{10}{6}$
$x_i^2 \cdot p_i$	$\frac{4}{6}$	$\frac{75}{6}$	6	$\frac{100}{6}$

$\boxed{\sum_{i=1}^{3} p_i = 1 \checkmark}$

$$E(y) = \sum_{y_i=1}^{3} y_i \; p_i = 5,5 \text{ €}$$

como são jogadas independes e mutuamente exclusivos para cinco jogos será linear o valor de $5 \times 5,5 = 27,5$ €

$$E(y)^2 = 5,5^2 = 30,25$$

$$E(y^2) = \sum_{y_i=1}^{3} y_i^2 \cdot p_i = 35,83$$

$$V(y) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= 35,83 - 30,25$$
$$= 5,58$$

para 5 jogadas será

$$5 \times 5,58 = 27,9 \text{ €}^2$$