Estatística TP F302 26/11/2014 19:10

Ficha 7

1)

Marca de classe x_i	Distância (Km)	classe da variável Número de serviços
$\frac{0+10}{2}$ 5	0 - 10	5
	10 - 20	11
	20 - 30	17
	72	1

μ - extensão média dos serviços do taxista

$IC(\mu) = ?$
94%

AMOSTRA:

$n = 34$

$\bar{x} = ?$

$s^2 = ?$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \cdot n_i \qquad \left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n \right)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} \left(x_i^2 n_i - n \bar{x}^2 \right)$$ variância corrida

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

Marca de classe x_i	Distância	n_i Nº serviços
$\frac{0+10}{2} = 5$	0-10	5
15	10-20	11
25	20-30	17
72	72	1

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \left((5 \cdot 5) + (15 \cdot 11) + (25 \cdot 17) + (72 \cdot 1) \right)$$

$n = 34$

$$= 20{,}205$$

$$s^2 = \frac{1}{33} \Big((5^2 \cdot 5 - 34 \cdot 20{,}205^2) + (15^2 \cdot 11 - 34 \cdot 20{,}205^2)$$

$n\bar{x}^2 = 13887{,}1$

$$+ (25^2 \cdot 17 - 13887{,}1) + (72 \cdot 1 - 13887{,}1) \Big)$$

$$= \cancel{\ldots} \quad 137{,}03$$

$\bar{X}_{34}$ → v.a. média amostral extensão média de qualquer amostra de 34 serviços do taxista, em km.

$$\bar{X}_{34} = \frac{1}{34} \sum_{i=1}^{34} X_i$$

X_i - extensão do serviço, i, do taxista em km

$E(X_i) = \mu \quad V(X_i) = \delta^2$

Pelo teorema do limit central; nas $n = 34 \geq 30$, tem-se

$\bar{X}_{34} \sim N\left(\mu, \frac{\delta^2}{34}\right)$

Pretende-se encontrar um intervalo de confiança para μ a 94%.

$[\alpha, \beta] = ?$

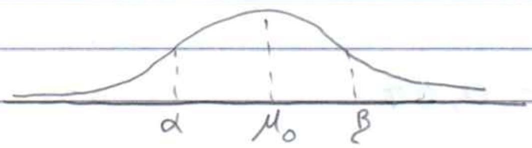
$x \; M \sqrt{\;} \; p$

$Z \; M \sqrt{\;} \; x$

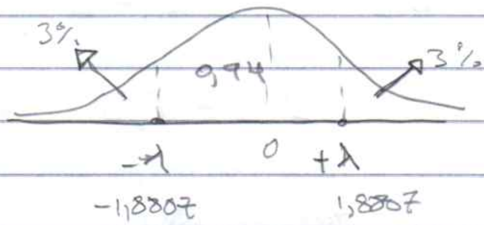
$P(\alpha \leq \mu \leq \beta) = 0{,}94 \iff$ $\Rightarrow P$

$P(-\lambda \leq Z \leq \lambda) = 0{,}94$

onde $Z = \dfrac{\bar{X}_{34} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{34}}} \sim N(0,1)$



$\Rightarrow$



$\lambda = \Phi^{-1}(0{,}97)$

$\lambda = 1{,}88$

Os extremos vêm:

$$\begin{cases} \alpha = \bar{x} - \Delta \\ \beta = \bar{x} + \Delta \end{cases} \qquad \bar{x} = 20{,}21$$

$$\Delta = \lambda \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \Delta = 1{,}88 \times \frac{\sigma}{\sqrt{34}}$$

$\sigma \cong s$ porque é desconhecido e n é suficientemente grande.

$\sigma \cong \sqrt{137{,}03}$

$$\begin{cases} \alpha = 20{,}21 - 1{,}88 \cdot \dfrac{\sqrt{137{,}03}}{\sqrt{34}} \\ \beta = 20{,}21 + 1{,}88 \times \dfrac{\sqrt{137{,}03}}{\sqrt{34}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 16,4 \\ \beta = 24,0 \end{cases}$$

$$IC_{94\%}(\mu) = [\,16,4 \,;\, 24,0\,]$$

intervalo de confiança IC

b) $[\bar{x} - \Delta \,,\, \bar{x} + \Delta]$ AMPLITUDE: 2Δ

$2\Delta = 7,6 \Rightarrow 2\Delta = 6,84$

primeira amplitude do clínico (Δ)

$\Delta = 3,42$

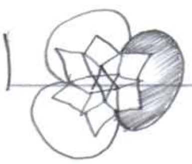
$\Delta = 3,42$

$$\lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3,42 \Rightarrow 1,88 \cdot \frac{\sqrt{137,03}}{\sqrt{n}} = 3,42$$

$n = ?$

$$\sqrt{n} = \frac{1,88 \; \sqrt{137,03}}{3,42}$$

$$n = \left(\frac{1,88 \times \sqrt{137,03}}{3,42} \right)^2 = 41$$

1  Estatística TP F302 26/11/2014 19:55

$11\,Kg > \mu > 10\,Kg$ peso médio ~~do~~ exam um produto, em Kg

desvio padrão $\sigma = 0,7\,Kg$ $n = 30 \Rightarrow \cancel{\bar{x}} = 10,6\,Kg$

a) X - "peso médio de um produto fabricado por uma fábrica em Kg"

$IC_{95\%}(\mu) = ?$

$\bar{X}_{30} \to$ v.a média amostral que representa o peso médio de uma amostra aleatória de 30 produtos, em kg.

$$\bar{X}_{30} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} X_i$$

$X_i \to$ peso, em Kg, do produto

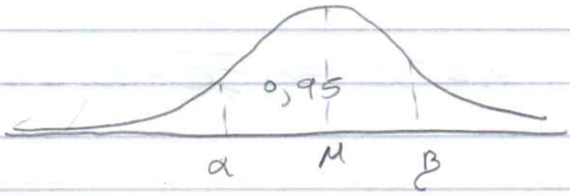
$E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = 0,7^2$

$n \geq 30$, pelo TLC $\bar{X}_{30} \sim N(\mu, \frac{0,7^{2 \to V}}{30})$

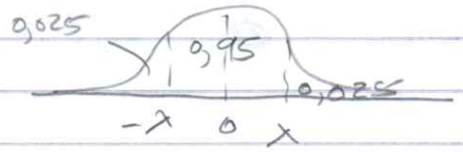
$[\alpha, \beta]: \quad P(\alpha \leq \mu \leq \beta) = 0,95 \to z$

$\Leftrightarrow \quad P(-\lambda \leq Z \leq \lambda) = 0,95$

onde $Z = \dfrac{\bar{X}_{30} - \mu}{\frac{0,7}{\sqrt{30}}} \sim N(0,1)$



$\rightarrow$



$\lambda = \Phi^{-1}(0,95)$

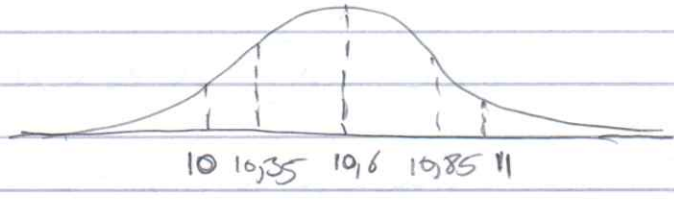
$\lambda = 1,96$

Os extremos vêm:

$\begin{cases} \alpha = \bar{x} - \Delta \\ \beta = \bar{x} + \Delta \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 10,6 - 1,96 \cdot \frac{0,7}{\sqrt{30}} \\ \beta = 10,6 + 1,96 \cdot \frac{0,7}{\sqrt{30}} \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha = 10,35 \\ \beta = 10,85 \end{cases}$

com 95% de confiança está afinado



b) $\sigma = 2\,Kg \rightarrow \bar{x} = 10,5 \quad n = 30$

I.C = ? para que $\alpha = \beta = 0,5 + \bar{x}$

$\Delta = 0,5$

Estadística TP F302 26/11/2014 20:23

Ficha N.º 7

2.

b) $\sigma = 2\,kg$

amostra:

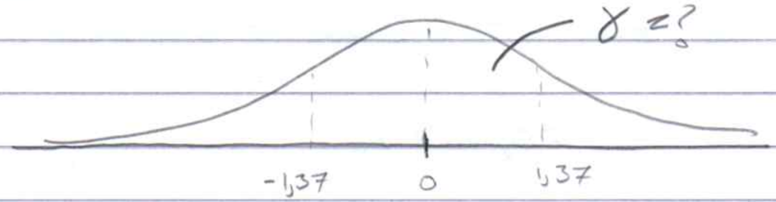
$n \geq 30$; $\bar{x} = 10{,}5\,kg$

$$\begin{cases} \alpha = \bar{x} - \Delta \\ \beta = \bar{x} + \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = 10{,}5 - \Delta \\ \beta = 10{,}5 + \Delta \end{cases}$$

$\alpha = 10$; $\beta = 11$ $\qquad \Delta = 0{,}5 \Rightarrow x\,\frac{2}{\sqrt{30}} = 0{,}5$

$$x = \frac{0{,}5 \cdot \sqrt{30}}{2} = 1{,}37$$

$I.C_\gamma(\mu) = [10, 11]$ $\qquad \gamma = ?$



$\gamma = \Phi(1{,}37) - \Phi(-1{,}37)$ tabela

$= 0{,}9147 - 0{,}0853$

$= 0{,}8294$

grau de confiança 82,94 %

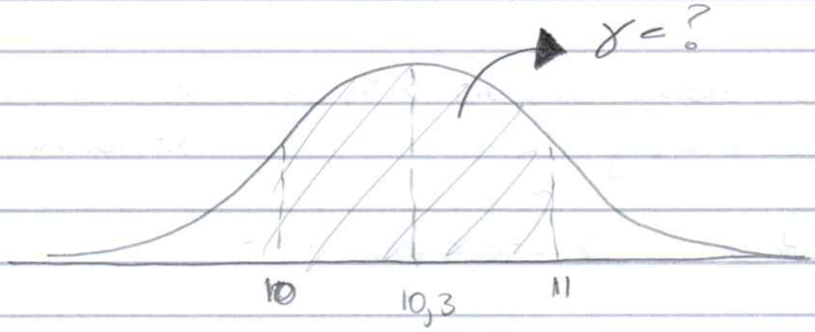
c) amostra $n = 30$ $\quad \bar{x} = 10{,}3\,kg$

$I.C_\gamma(\mu) = [10, 11]$ $\qquad \gamma = ?$

$$\begin{cases} \alpha = 10{,}3 - x_1 \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \beta = 10{,}3 + x_2 \frac{2}{\sqrt{30}} \end{cases} \qquad \begin{cases} 10{,}3 - \Delta_1 = 10 \\ 10{,}3 + \Delta_2 = 11 \end{cases}$$

$\Delta_1 = 0{,}3$

$\Delta_2 = 0{,}7$



$$\begin{cases} -\lambda_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{30}} = 0{,}3 \Rightarrow \lambda_1 = -0{,}82 \\ \lambda_2 \frac{2}{\sqrt{30}} = 0{,}7 \Rightarrow \lambda_2 = +1{,}92 \end{cases}$$

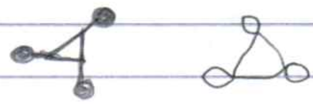
$$\gamma = \Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_1)$$

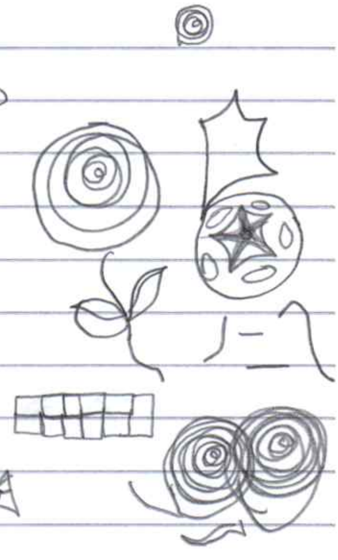
$$= 0{,}9726 - 0{,}2061 = 0{,}7665$$

$$76{,}65\ \%$$

Estatística TP F302 3/12/2014 19:10

Ficha 7





3)

X - "tempo médio para realização de uma prova de exame" em minutos

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sigma = 5$

$I.C_{95\%}(\mu) = ?$ $n = 15$ alunos

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{15} x_i = 120 + 120 + 122 + 125 + 126 \ldots$

$= 132,\cancel{1}$

$\bar{X}_{15} \rightarrow$ v.a média amostral, que representa o tempo médio de realização de uma prova de exame, em minutos numa amostra de 15 alunos

$\bar{X}_{15} = \frac{1}{15} \sum_{1}^{15} x_i$

$x_i \rightarrow$ tempo de realização de uma prova de exame pelo aluno i, $i = 1, \ldots, 15$

$x_i \sim N(\mu; 5^2)$

Pela aditividade da distribuição NORMAL, tem-se

$\bar{X}_{15} \sim N(\mu, \frac{5^2}{15})$

Pretende-se determinar intervalo de confiança para μ, a 95%

$[\alpha, \beta] = ?$

$P(\alpha \leq \mu \leq \beta) = 0{,}95 \Leftrightarrow P(-\lambda \leq Z \leq \lambda) = 0{,}95$

onde

$$Z = \frac{\bar{X}_{15} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{15}}} \sim N(0,1)$$

95%
$\downarrow$
λ $\quad s, n$
$\downarrow$
$\alpha \wedge \beta$

$P(-\lambda \leq Z \leq \lambda) = 0{,}95 \Leftrightarrow P(Z \leq \lambda) = 0{,}975$

tabela

$\Rightarrow \lambda = 1{,}96$

Os extremos do intervalo, são obtidos a partir de:

$$\begin{cases} \alpha = \bar{x} - \Delta \\ \beta = \bar{x} + \Delta \end{cases} \qquad \bar{x} = 132{,}1$$

$$\Delta = \lambda \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \Delta = 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{15}}$$

$$\begin{cases} \alpha = 132{,}1 - 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{15}} = 129{,}54 \\ \beta = 132{,}1 + 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{15}} = 134{,}6 \end{cases}$$

$$IC_{95\%}(\mu) = [129{,}54 ; 134{,}6]$$

4)

Estatística | TP F302 3/12/2014 19:30

4)

C_f - "concordância com o conteúdo de um determinado decreto lei" para feminino"

X - " . . . .

. . . para masculino" em 200"

$IC_{94\%} = ?$ $\rightarrow \lambda_{feminino}$ $\lambda_{masculino}$

p - "proporção de homens de toda a população que concorda com o decreto de lei"

$I.C_{94\%}(p) = ?$

94%

<u>AMOSTRA</u>

$n = 200$

$\hat{p} = \frac{75}{200} = 0{,}375$

— *v*

$\hat{P}_{200}$ → proporção amostral que representa a proporção de homens que concorda com o decreto de lei para uma amostra de 200 homens.

$\hat{P} = \frac{X}{200}$ $X \sim Bi(200, p)$ $p = P(S)$

S- "um homem concorda com o decreto lei"

$\hat{P}_{200} \sim N(p, \frac{pq}{200})$

Para o calculo da variância, e sendo $n = 200$ suficientemente grande, consideramos

$p \cong \hat{p} = 0{,}375$

$q = 1 - p = 0{,}685$

$\hat{p}_{200} \sim N\left(p, \frac{0{,}375 \cdot 0{,}625}{200}\right)$

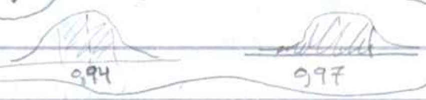
Pretende-se determinar um intervalo de confiança para p a 94%.

$[\alpha, \beta] = ?$

$P(\alpha \leq p \leq \beta) = 0{,}94 \Leftrightarrow P(-\lambda \leq Z \leq \lambda) = 0{,}94$

onde $Z = \dfrac{\hat{p}_{200} - p}{\sqrt{\frac{0{,}375 \times 0{,}625}{200}}} \sim N(0,1)$ $\quad \left(0{,}94 + \frac{0{,}6}{2}\right)$

How?



$P(-\lambda \leq Z \leq \lambda) = 0{,}94 \Leftrightarrow P(Z \leq \lambda) = 0{,}97 \Rightarrow \lambda = 1{,}88$

Os extremos são obtidos a partir de

$$\begin{cases} \alpha = \hat{p} - \Delta \\ \beta = \hat{p} + \Delta \end{cases} \qquad \hat{p} = 0{,}375$$

$$\Delta = 1{,}88 \times \sqrt{\frac{0{,}375 \times 0{,}625}{200}}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0{,}311 \\ \beta = 0{,}439 \end{cases}$$

$$IC_{94\%}(p) = [0{,}311 ; 0{,}439]$$

—//—

Estatística | TP F302 3/12/2014 20:00

5) X - "decisões a favor de uma dada medida camarária"

$n = 200$

a) $\hat{p}_{200}$ - proporção amostral que representa o numero de cidadãos estão contra a medida camarária para uma amostra de 200 cidadãos

$$\hat{p}_{200} = \frac{X}{200}$$ X - numero de cidadãos em 200 que estão contra a medida

$X \sim Bi\ (200, 0{,}45)$ $p = 0{,}45$
p - percentagem que estão contra a medida.

Pelo teorema do limite central
$$\hat{p}_{200} \sim N\left(0{,}45;\ \frac{0{,}45 \times 0{,}55}{200}\right)$$

$$P(\hat{p}_{200} > 0{,}5) = 1 - P(\hat{p}_{200} \leq 0{,}5)$$
$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{0{,}5 - 0{,}45}{\sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{200}}}\right)$$

Pela redução da variável $Z = \frac{\hat{p}_{200} - 0{,}45}{\sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{200}}} \sim N(0,1)$

$$= 1 - \Phi(1{,}42)$$
$$= 1 - 0{,}0778$$

b)

125 cidadãos contra a medida camarária.

$n = 200$

$p = \frac{125}{200}$ $I.C_{98\%}(\hat{p}) = ?$

verse TRUE
$$\boxed{\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{p \cdot q}{n}}$$

$P(\alpha \leq p \leq \beta) = 0{,}98$ $\boxed{s = n \cdot p \\ = 125}$

$P(Z \leq x) = 0{,}99$
$x^* =$

$X \sim Bi\ (200; p)$ Pelo teorema do limite central

$\hat{p}_{200} \sim N\left(p; \frac{pq}{200}\right)$

AMOSTRA

$n = 200$

$\hat{p} = \frac{125}{200} = 0{,}625$

$p \simeq \hat{p} = 0{,}625$ para cálculo da variância

$q \simeq 1 - \hat{p} = 0{,}375$

$\hat{p}_{200} \sim N\left(p, \frac{0{,}625 \cdot 0{,}375}{200}\right)$

Pretende-se determinar um I.C para p a 98%.

$[\alpha, \beta] = ?$ $\quad P(\alpha \leq p \leq \beta) = 0{,}98$

$P(-\lambda \leq Z < \lambda) = 0{,}98$

onde

$$Z = \frac{\hat{p}_{200} - p}{\sqrt{\frac{0{,}625 \times 0{,}375}{200}}} \sim N(0,1)$$

$P(-\lambda \leq Z \leq \lambda) = 0{,}98 \Rightarrow P(Z \leq \lambda) = 0{,}99$

$\lambda = 2{,}33$

Os extremos do intervalo

$$\begin{cases} \alpha = \hat{p} - \Delta \\ \beta = \hat{p} + \Delta \end{cases}$$

$\hat{p} = 0{,}625$

$\Delta = 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}625 \times 0{,}375}{200}}$

$$\begin{cases} \alpha = 0{,}625 - 2{,}33\sqrt{\frac{0{,}625 \times 0{,}375}{200}} \\ \beta = \text{id} \quad + \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0{,}545 \\ \beta = 0{,}705 \end{cases}$$