REVISÕES

DE

TEORIA DE PROBABILIDADES

Maria Hermínia Amorim Ferreira

1. Introdução

Não é possível determinar exactamente a origem do estudo das probabilidades, mas tudo leva a crer que em algumas civilizações antigas, estudiosos se dedicassem à analise da existência de “regularidades” em fenómenos imprevisíveis.

Embora os jogos de azar fossem já conhecidos dos Egípcios, 3500 anos a.C. , o início “oficial” do estudo das probabilidades foi no sec. XVII, com as tentativas de desenvolver uma teoria com base no estudo dos jogos de azar.

Cardano foi um dos primeiros a tentar descrever um método de cálculo das probabilidades. No seu livro “The book on games of chance” não só explica as leis das probabilidades, como analisa os jogos de azar e ensina a jogar e a detectar “batoteiros”

Em 1651 ou 1652, Chevalier de Méré (conhecido escritor e jogador da corte de Luis XIV) propôs a Pascal a resolução de problemas relacionados com os jogos que habitualmente praticava. Numa das “consultas” que De Méré fez a Pascal disse-lhe que suspeitava que a probabilidade de obter pelo menos um "6" em quarto lançamentos de um dado,

$$1-\left(\tfrac{5}{6}\right)^4 \approx 0.5177,$$

era ligeiramente superior à probabilidade de obter pelo menos um “ duplo 6” em 24 lançamentos de dois dados

$$1-\left(\tfrac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.4914.$$

Pascal resolveu o problema e provou De Méré estava correcto. De facto a observação de De Méré é verdadeira mesmo que os dois dados sejam lançados 25 vezes, uma vez que a probabilidade de obter pelo menos um “ duplo 6” é neste caso

$$1-\left(\tfrac{35}{36}\right)^{25} \approx 0.5055.$$

Ao deparar com algumas dificuldades na sua resolução dos problemas que De Méré lhe colocava Pascal procurou, por correspondência, a ajuda do seu colega Fermat. Para muitos, a correspondência entre estes dois matemáticos marca o início da Teoria das Probabilidades.

Depois de Pascal e Fermat a teoria das probabilidades desenvolveu-se rapidamente graças aos contributos de inúmeros matemáticos. Entre eles destacaram-se, Bernoulli (1654-1705), autor do magistral tratado “Ars conjectandi”, que demonstrou a “lei dos grandes números” e Laplace (1749 – 1827) autor do livro “Teoria analítica das probabilidades” a quem se ficou a dever a definição clássica de probabilidades, vulgarmente conhecida pelo nome de “Lei de Laplace”.

Depois de Laplace e até aos nossos dias a teoria das probabilidades continuou o seu desenvolvimento e tem hoje grande utilidade, em diferentes áreas da Ciência assim como no quotidiano permitindo-nos compreender melhor, informações dos campos económico, social, político ou desportivo.

Apesar de podermos considerar que os censos, para fins de alistamento militar e de colecta de impostos, realizados há mais de 4000 anos (como é o caso do censo do imperador Yao na China, em 2200AC) marcaram o início dos estudos estatísticos, mas estes estudos abrangiam apenas a vertente da Estatística Descritiva uma vez que se limitavam à exibição e síntese dos dados recolhidos (a) não envolvendo nenhum trabalho probabilístico, pois todos os objectos do universo envolvido (a população) eram observados ou medidos, .

A primeira pessoa a observar apenas uma pequena amostra e, a partir de uma análise probabilística, estender os resultados da amostra para o todo do universo ou população foi Adolphe Quételet. A partir desta iniciativa, rapidamente surgiu a ideia de dar, uma base mais rigorosa para o método científico, a partir de uma fundamentação probabilística para as etapas da colecta e a da análise indutiva de dados científicos. Essa concepção, hoje essencial no trabalho científico, só atingiu um nível prático no início do séc. XX deu origem à inferência estatística, que estuda técnicas que permitem quantificar probabilisticamente as incertezas envolvidas ao induzirmos, para um universo, observações feitas numa amostra do mesmo.

Os pais da Inferência Estatística são J. Neyman e Karl Pearson, os quais a criaram em vários artigos escritos a partir de 1930. Embora os estudos de Neyman e Pearson estivessem associados às questões de hereditariedade, os métodos e até as expressões que criaram, tais como "hipótese nula" e "nível de significância", fazem hoje parte da rotina diária de todo o estatístico e cientista.

O delineamento das experiências científicas trata das precauções que o cientista deve tomar, antes de iniciar suas observações ou medidas, de modo que os objectivos pretendidos sejam atingidos. Foi R. A. Fisher, ao trabalhar na selecção genética de plantas agrícolas, que desenvolveu grande quantidade de resultados básicos sobre delineamento de experiências e os divulgou, com grande sucesso, em dois livros históricos: *Statistical Methods for Research Workers* (1925) e *The Design of Experiments*, publicado em 1935.

2. Conceitos da Teoria das Probabilidades

A Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática que estuda os possíveis resultados de acontecimentos nos quais "intervém o acaso", isto é, estuda os **fenómenos aleatórios**, assim como, as suas semelhanças e distribuições.

Ao lançar um dado, não podemos prever qual o número que irá ocorrer, ou quando lançamos uma moeda não podemos prever se aparecerá cara ou coroa. Experiências, deste tipo, cujos resultados não podem ser previstos quando, em idênticas condições, são repetidas várias vezes são chamadas **experiências aleatórias**.

Ao conjunto de todos os resultados possíveis associados a uma experiência aleatória chama-se **espaço amostral** ou **espaço de resultados** e representa-se por Ω.

$$\Omega = \{w_1,..., w_n\}$$

Exemplo 1:

No lançamento de uma moeda, o espaço amostral é Ω ? {cara, coroa}

No lançamento de um dado, o espaço amostral é Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

No lançamento de duas moedas, uma após a outra Ω = {(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)}

Ao extrairmos uma bola de uma urna contendo bolas brancas, vermelhas e pretas. Ω = {B, V, P}

No lançamento de dois dados, um após o outro. Ω = {(1, 1), (1, 2), (1, 3) ... (5, 6), (6, 6)} (#? =36)

Todo o subconjunto de um espaço amostral, de uma experiência aleatória, é um **acontecimento**. Os acontecimentos constituídos por um só elemento do espaço de resultados são chamados **elementares** e os constituídos por mais do que um elemento, dizem-se **compostos**. Se um acontecimento inclui todos os elementos do espaço de resultados designam-se por **acontecimento certo** (Ω) e se não inclui nenhum elemento do espaço de resultados é um **acontecimento impossível** (Ø).

Exemplo 2:

Consideremos o lançamento dois dados, alguns dos acontecimentos possíveis são:

A ={ocorrência de soma 4} = {(1, 3), (2, 2), (3, 1)}

B ={ocorrência de resultados iguais nos dois lançamentos} = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5, (6, 6)}

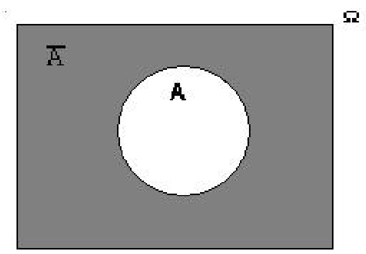
Exemplo 3:

De acordo com a experiência do exemplo 1, consideremos os acontecimentos:

A: obter um número par,	A ={2, 4,6}
B: obter um múltiplo de 3,	B={3, 6}
C: obter um múltiplo de 5,	C = {5}
D: obter um número inferior a 7,	D = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
E : obter o número 10	E = ∅
F : obter número ímpar,	F = {1, 3, 5}

A,B e F são acontecimentos compostos, C é um acontecimento elementar, D é o acontecimento certo e E o acontecimento impossível.

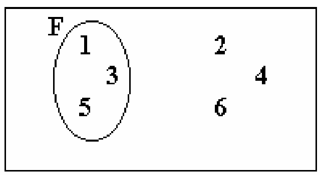
Dado um acontecimento A, o seu **complementar** (em Ω) é o conjunto cujos elementos são exactamente os elementos de Ω que não estão em A e designa-se por $\overline{A}\ ou\ A^c\ ou \sim A$.

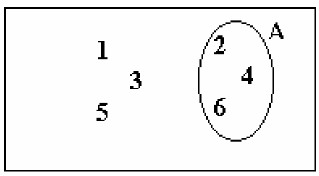


$$\overline{A} = \{\omega : \omega \notin A\}$$

Exemplo 4:

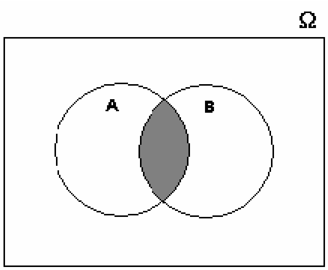
Suponhamos que pretendemos "não obter número par". É lógico que nos estamos a referir ao acontecimento F "obter número ímpar" F = {1,3, 5}





Diz-se que F é o acontecimento complementar de A e representa-se por $\overline{A}$

Dados dois conjuntos A e B, a **intersecção** de A com B, designada por **A** Ç **B**, é o conjunto



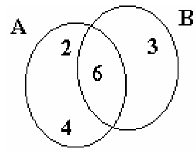
$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$$

cujos elementos são elementos de A e B simultaneamente.

Nota: Esta noção é generalizável a n subconjuntos : $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, com A_i subconjuntos de Ω ; $i = 1,\ldots n$

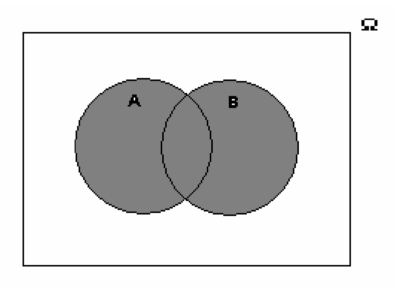
Exemplo 5:

E se pretendermos obter um número par que seja ao mesmo tempo múltiplo de 3?



$$A \cap B = \{6\}$$

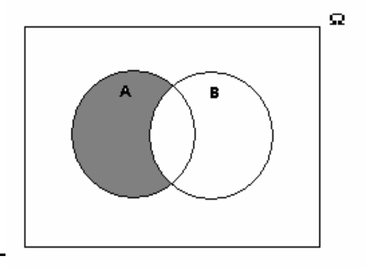
Dados dois conjuntos A e B, a **união (reunião)** de A com B, designada por **A** È **B**, é o conjunto cujos elementos são elementos de A, de B o u de ambos.



$$A \cup B = \{\omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$$

Nota: Esta noção é generalizável a n subconjuntos, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ com A_i subconjuntos de Ω ; $i = 1,\ldots n$.

Dados dois conjuntos A e B, a **diferença de B em A**, designada por **A \ B** ou **A - B**, é o conjunto cujos elementos são os elementos de A que não pertencem a B.



$$A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{w : w \in A \wedge w \notin B\}$$

Dois conjuntos A e B, dizem-se **disjuntos** ou **mutuamente exclusivos** se não têm elementos comuns, ou seja, se $A \cap B = \varnothing$

Para quaisquer subconjuntos A, B e C de Ω verificam-se as seguintes propriedades:

Propriedades	***União*** **-** $\bigcup$	***Intersecção*** **-** $\bigcap$
Comutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotência	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Complementar	$A \cup \overline{A} = \Omega$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
Elemento Neutro	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \Omega = A$
Elemento Absorvente	$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Leis de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Dado um espaço Ω , um *corpo de Borel* ou σ-corpo $\Im$ é uma classe (em geral não numerável) de subconjuntos de Ω, A_j , j=1, 2, ..., com as seguintes propriedades:

- $\Omega \in \Im$
- Se $A_j \in \Im$ então $\overline{A_j} \in \Im$
- Se $A_j \in \Im$, j=1, 2, ... então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Im$

As duas primeiras propriedades implicam $\emptyset = \overline{\Omega} \in \Im$

e, usando as leis de De Morgan, a segunda e terceira propriedades conduzem a

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j} \right)} \in \Im \ .$$

Um corpo de Borel é, assim, uma classe de conjuntos, incluindo o vazio e o espaço Ω, fechado sob todas as uniões e intersecções numeráveis dos seus conjuntos.

Axiomas de Probabilidade

Da necessidade de sistematização dos conceitos empregues na Teoria das Probabilidades e da construção de um Corpo teórico coerente surgem os três axiomas em que se baseiam todos os desenvolvimentos posteriores deste campo das ciências matemáticas.

Dado um acontecimento A_i do espaço amostral ? finito (com N elementos) ou infinito numerável com N=:? elementos, então podemos escrever $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$, e a quantidade $P(A_i)$, a probabilidade do acontecimento A_i, definida de modo que:

- $0 \leq P(A_i) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- Aditividade $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ onde A_1 e A_2 são mutuamente exclusivos

Generalização: Para um conjunto numerável de N conjuntos disjuntos A_1 e A_2,..., A_N

$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i \right) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$ para n=1, 2, ..., N onde A_1 e A_2,..., A_N são mutuamente exclusivos.

Teoria Empirista (Von Mises, Copeland, Wald)

Considerando o lançamento de uma moeda, sabe-se que se pode verificar a saída de Cara (C) ou coroa (c) e intuitivamente todos cremos que Cara e coroa têm a mesma probabilidade de aparecimento.

Repetindo a experiência várias vezes, a sucessão dos resultados dos lançamentos, qualquer que ela seja, será caracterizada pela irregularidade e imprevisibilidade.

A sucessão dos resultados dos lançamentos poderia ter, por exemplo, o seguinte aspecto: C c c C C C C c c C c C c c C C C c c C c c c c c C ....

Prolongando, tanto quanto possível, a sucessão dos lançamentos, repetindo o lançamento da moeda, por exemplo 10000 vezes, verifica-se a nossa crença - o número de caras saídas é muito semelhante ao de coroas - como podemos verificar na tabela ao lado.

n	n.º caras	Freq. relativa
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	1	0,25
5	2	0,4
6	3	0,5
7	3	0,428571
8	4	0,5
9	4	0,(5)
10	4	0,6
…		
1000	502	0,502
2000	1013	0,5065
3000	1510	0,50(3)
4000	2029	0,5725
5000	2533	0.50(6)
6000	3009	0,5015
7000	3516	0,502286
8000	4034	0,50425
9000	4538	0,504222
10000	5067	0,5067

Seja A um acontecimento qualquer. Repetindo n vezes a experiência que originou esse acontecimento e fazendo o quociente entre o número de vezes que o acontecimento A aparece e n, obtem-se a frequência relativa desse acontecimento, $f_r(A)$.

Teoria “clássica” de Laplace

A primeira definição que se conhece de probabilidade de um acontecimento foi enunciada por Pierre Simon Laplace (1749-1827).

Na extracção de cartas de um baralho, no lançamento de dados ou em todas as situações em que os acontecimentos elementares são equiprováveis a probabilidade de um acontecimento pode ser calculada, sem recurso à experimentação, aplicando a definição de Laplace. Para tal só necessitamos saber o número de casos possíveis e favoráveis ao acontecimento em estudo.

$$P(A) = \frac{n^o \, de \; casos \;\; favoráveis}{n^o \, de \; casos \;\; possíveis}$$

3. Probabilidade Condicionada

Em muitos casos a probabilidade de um acontecimento é determinada por informações adicionais, isto é, é condicionada pela realização de outro acontecimento. Nesse caso estamos perante uma **probabilidade condicionada**, que se representa por **A / B**.

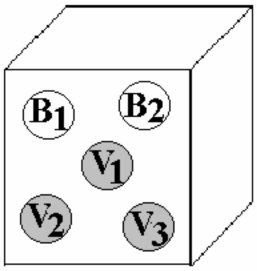
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Uma vez que $P(A/B)$ é uma probabilidade definida sobre ? , resulta que:

- $P(A/A) = 1$
- $P(A/\overline{A}) = 0$
- $B \subseteq A \Rightarrow P(A/B) = 1$
- $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$
- A e B independentes $\Rightarrow P(A/B) = P(A)$

Exemplo:

Consideremos uma caixa como a que é apresentada na figura, com 2 bolas brancas e 3 verdes. Definimos os seguintes acontecimentos:



B = sair bola branca na 1ª extracção
V = sair bola verde na 2ª extracção

Qual a probabilidade de sair uma bola verde na segunda extracção sabendo que na primeira extracção foi retirada uma bola branca, ou seja, $P(V/B)$?

Por definição: $P(V/B) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(B)}$

Recorrendo a todos os resultados possíveis nas duas extracções temos:

(B_1,B_2) (B_1,V_1) (B_1,V_2) (B_1,V_3) (B_2,B_1) (B_2,V_1) (B_2,V_2) (B_2,V_3) (V_1,B_1) (V_1,B_2) (V_1,V_2) (V_1,V_3) (V_2,B_1) (V_2,B_2) (V_2,V_1) (V_2,V_3) (V_3,B_1) (V_3,B_2) (V_3,V_1) (V_3,V_2)

Os casos favoráveis a $V \cap B$ são os pares em que sai bola branca na 1ª extracção e verde na 2ª extracção:

(B_1,V_1) (B_1,V_2) (B_1,V_3) (B_2,V_1) (B_2,V_2) (B_2,V_3) logo

$$P(V \cap B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Os casos favoráveis a B são os pares em que sai bola branca na 1ª extracção:

(B_1,B_2) (B_1,V_1) (B_1,V_2) (B_1,V_3) (B_2,B_1) (B_2,V_1) (B_2,V_2) (B_2,V_3) logo $P(B)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

Assim $P(V/B)=\frac{P(V\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$

Se a definição não tivesse sido usada teria sido mais rápido calcular a probabilidade pretendida:
Se sai uma bola branca na 1ª extracção, ficam na caixa 4 bolas (1 branca e 3 verdes) pelo que a probabilidade de na 2ª extracção sair bola verde será $^3/_4$.

4. Teorema das Probabilidades Compostas

Partindo da definição de probabilidade condicionada $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, vê-se facilmente que, com $P(B)\neq 0$ se tem: $\boldsymbol{P(B \cap A)=P(A/B).P(B)}$

5. Teorema das Probabilidades Totais

Consideremos um sistema completo de n acontecimentos B_1, B_2, B_3,..., B_n e A um acontecimento definido no mesmo espaço amostral. Suponhamos que o acontecimento A pode ocorrer simultaneamente com um dos acontecimentos B_1, B_2, B_3,..., B_n. O acontecimento A pode escrever-se então como:

$$A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\cdots\cup(A\cap B_n)$$

Como os acontecimentos B_1, B_2, B_3,..., B_n são incompatíveis, $A\cap B_1$, $A\cap B_2$, $\cdots$ e $A\cap B_n$ também são,

então $P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\cdots+P(A\cap B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A\cap B_i)$.

Aplicando o teorema das probabilidades compostas: $\boldsymbol{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A/B_1)\cdot P(B_i)}$

6. Fórmula de Bayes

A fórmula de Bayes é útil quando um acontecimento A pode ocorrer condicionado por vários acontecimentos B_1, B_2,..., B_n, dos quais conhecemos as probabilidades de ocorrência $P(B_1)$, $P(B_2)$,..., $P(B_n)$ e, além disso, dada a condição B_i (i=1,2,...,n) conhecemos também a probabilidade $P(A/B_i)$ e desejamos calcular a probabilidade de que um dos acontecimentos B_i ocorra se A ocorreu. A fórmula de Bayes quantifica as probabilidades para cada um destes acontecimentos, supondo que A ocorreu.

De acordo com a definição $P(B_i / A) = \dfrac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$, usando o teorema das probabilidades compostas e o teorema das probabilidades totais vem:

$$\boldsymbol{P(B_i / A) = \frac{P(A / B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A / B_i) \cdot P(B_i)}} \qquad \forall i = 1,\dots, n$$

que é a **fórmula de Bayes** para o cálculo da probabilidade condicionada

Exemplos

1. Duas fábricas produzem lâmpadas eléctricas. A primeira contribui para 70% da produção total e a segunda para 30%. Por outra parte, sabe-se que 83% das lâmpadas fornecidas pela primeira fábrica se ajusta às normas estabelecidas, enquanto que apenas 63% das produzidas pela segunda, se ajusta às ditas normas. Calcule a probabilidade de que uma lâmpada tenha sido produzida pela primeira fábrica, sabendo que essa lâmpada respeita as normas.

Consideremos os seguintes acontecimentos:

A_1: a lâmpada foi produzida pela primeira fábrica.
A_2: a lâmpada foi produzida pela segunda fábrica.
B : a lâmpada está de acordo com as normas.

A probabilidade que desejamos calcular é $P(A_1 / B)$ e sabemos que :

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} \qquad P(A_1 \cap B) = P(B / A_1)P(A_1) \qquad P(B) = \sum_{i=1}^{2} P(B / A_i)P(A_i) \qquad P(A_1 / B) = \frac{P(B / A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{2} P(B / A_i)P(A_i)}$$

Substituindo os valores das probabilidades obtemos $P(A_1 / B) = \dfrac{0.83 \times 0.7}{0.83 \times 0.7 + 0.63 \times 0.3} = \dfrac{0.58}{0.77} \cong 0.75$

2. Duas urnas contêm bolas verdes e brancas distribuídas da seguinte maneira:

Urna 1: 3 verdes e 2 brancas   Urna 2: 2 verdes e 3 brancas

Retira-se uma bola da urna 2 e introduz-se na urna 1. Se ao extrair uma bola da urna 1, esta for branca, qual é a probabilidade de que a bola transferida tenha sido branca também?

Para calcular a probabilidade pedida, definimos os acontecimentos:

B_2: a bola transferida da urna 2 para a urna 1 é branca.
V_2: a bola transferida da urna 2 para a urna 1 é verde.
B_1: a bola extraída da urna 1 é branca.

Como o que nos interessa calcular é a probabilidade de que a bola transferida da urna 2 para a urna 1 seja branca, se a bola extraída da urna 1 era branca, esta é a probabilidade $P(B_2/B_1)$ que de acordo com a definição de probabilidade condicional é

$$P(B_2 / B_1) = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)}$$

As hipóteses que estabelecemos são :
- a bola transferida da urna 2 para a urna 1 era branca (B_2)
- a bola transferida da urna 2 para a urna 1 era verde (V_2).

Extraindo uma bola da urna 1, as probabilidades das hipóteses anteriores são $P(B_2) = \frac{3}{5}$ e $P(V_2) = \frac{2}{5}$

Para calcular a probabilidade de que a bola extraída da urna 1 seja branca, há que considerar as probabilidades condicionais $P(B_1/B_2)$ e $P(B_1/V_2)$ já que transferir uma bola de uma cor ou outra, altera consequentemente a urna 1.

Calculemos então $P(B_1 / B_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B_1 / V_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e $P(B_1)=P(B_1/B_2)\,P(B_2) + P(B_1/R_2)\,P(R_2)$

Substituindo os valores correspondentes: $P(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10} + \frac{2}{15} = 0.40$ e $P(B_2 \cap B_1) = P(B_1 / B_2) P(B_2) = 0.3$

logo: $P(B_2 / B_1) = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$