1. a) $f(t) = \cos(4.t)$

Uma vez que:

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega.t)\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

facilmente se conclui que:

$$\mathcal{L}\left[\cos(4.t)\right] = \frac{s}{s^2 + 16}$$

1. b) $f(t) = 3.sen(2.t) - t.\cos(4.t)$

Dados os seguintes pares de Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[sen(\omega.t)\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega.t)\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

E as seguintes propriedades da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[A.f(t)\right] = A.F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\left[t.f(t)\right] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Podemos fazer:

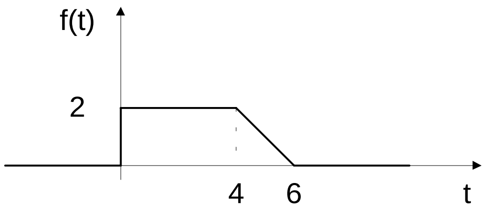
$$\mathcal{L}\left[3.sen(2.t) - t.\cos(4.t)\right] =$$

$$= 3.\ \mathcal{L}\left[sen(2.t)\right] - \ \mathcal{L}\left[t.\cos(4.t)\right] =$$

$$= 3.\frac{2}{s^2 + 2^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 + 4^2}\right) =$$

$$= \frac{6}{s^2 + 4} + \frac{-s^2 + 16}{\left(s^2 + 16\right)^2}$$

1. c)



O sinal f(t) pode ser escrito como:

$$f(t) = 2.u(t) - (t-4).u(t-4) + (t-6).u(t-6)$$

Dada a Transformada de Laplace do degrau unitário:

$$\mathcal{L}\left[u(t)\right] = \frac{1}{s}$$

e da rampa unitária:

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

E as seguintes propriedades da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[A.f(t)\right] = A.F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f(t-\alpha).u(t-\alpha)\right] = e^{-\alpha.s}.F(s)$$

Podemos fazer:

$$\mathcal{L}\left[2.u(t) - (t-4).u(t-4) + (t-6).u(t-6)\right] =$$

$$= 2.\ \mathcal{L}\left[u(t)\right] - \ \mathcal{L}\left[(t-4).u(t-4)\right] + \ \mathcal{L}\left[(t-6).u(t-6)\right] =$$

$$= 2.\frac{1}{s} - e^{-4.s}.\frac{1}{s^2} + e^{-6.s}.\frac{1}{s^2}$$

1. d) $f(t) = \cos(4.t + \frac{\pi}{3})$

Dado o seguinte par de Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[sen(\omega.t + \phi)\right] = \frac{s.sen(\phi) + \omega.\cos(\phi)}{s^2 + \omega^2}$$

E a seguinte propriedade da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = s.F(s) - f(0^+)$$

Podemos fazer:

$$\left[\cos(4.t + \frac{\pi}{3})\right] = \left[\frac{1}{4}.sen(4.t + \frac{\pi}{3})\right]'$$

Logo temos:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{4}.sen(4.t + \frac{\pi}{3})\right] = \frac{1}{4}.\frac{s.sen(\frac{\pi}{3}) + 4.\cos(\frac{\pi}{3})}{s^2 + 4^2}$$

o que implica que:

$$\mathcal{L}\left[\cos(4.t+\frac{\pi}{3})\right]=\frac{s}{4}.\frac{s.sen(\frac{\pi}{3})+4.\cos(\frac{\pi}{3})}{s^2+4^2}-\frac{1}{4}.sen(\frac{\pi}{3})$$

1. e) $f(t)=t^2.\cos(2.t)$

Dada a seguinte Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega.t)\right]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

E a seguinte propriedade da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[t^2.f(t)\right]=\frac{d^2F(s)}{ds^2}$$

Facilmente se conclui que:

$$\mathcal{L}\left[t^2.\cos(2.t)\right]=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right)=$$

$$=\frac{2.s^5-16.s^3-96.s}{(s^2+4)^2}$$

1. f) $f(t)=e^{-3t}.\cos(4.t+\frac{\pi}{3})$

Dada a seguinte Transformada de Laplace (determinada no exercício 1.d)):

$$\mathcal{L}\left[\cos(4.t+\frac{\pi}{3})\right]=\frac{s}{4}.\frac{s.sen(\frac{\pi}{3})+4.\cos(\frac{\pi}{3})}{s^2+4^2}-\frac{1}{4}.sen(\frac{\pi}{3})$$

E a seguinte propriedade da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha.t}.f(t)\right]=F(s+a)$$

Facilmente se conclui que:

$$\mathcal{L}\left[e^{-3.t}.\cos(4.t+\frac{\pi}{3})\right]=\frac{(s+3)}{4}.\frac{(s+3).sen(\frac{\pi}{3})+4.\cos(\frac{\pi}{3})}{(s+3)^2+4^2}-\frac{1}{4}.sen(\frac{\pi}{3})$$

1. g) $f(t)=e^{-3t}\int_0^t t.sen(2.t)dt$

Dada a seguinte Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[sen(\omega.t)\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

E as seguintes propriedades da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha.t}.f(t)\right]=F(s+a)$$

$$\mathcal{L}\left[\int f(t).dt\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{\left[\int f(t).dt\right]\Big|_{t=0}}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[t.f(t)\right]=-\frac{dF(s)}{ds}$$

Temos:

$$\mathcal{L}\left[e^{-3.t}.\int_0^t t.sen(2.t).dt\right]=$$

$$=\frac{-\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{(s+3)^2+4}\right)}{s+3}=$$

$$=\frac{4}{\left[(s+3)^2+4\right]^2}$$

2. a) $F(s)=\frac{s+1}{s^2}$

A equação anterior pode ser reescrita como:

$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}$$

Considerando os seguintes pares de Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[u(t)\right]=\frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[t\right]=\frac{1}{s^2}$$

E a seguinte propriedade da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[f_1(t)\pm f_2(t)\right]=F_1(s)\pm F_2(s)$$

Facilmente se conclui que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right]=u(t)+t$$

2. b) $F(s)=\frac{e^{-\tau s}}{s^2}$

Dada a Transformada de Laplace da rampa unitária:

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

E a seguinte propriedade da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[f(t-\alpha).u(t-\alpha)\right] = e^{-\alpha.s}.F(s)$$

Conclui-se que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\tau.s}}{s^2}\right] = (t-\tau).u(t-\tau)$$

2. c) $F(s) = \dfrac{10}{s(s+1)(s+10)}$

A função apresentada pode ser decomposta em termos simples, recorrendo ao método da decomposição em fracções parciais. Assim, temos:

$$F(s) = \frac{10}{s.(s+1).(s+10)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+10}$$

Sendo:

$$a = \left.\frac{10}{(s+1).(s+10)}\right|_{s=0} = 1$$

$$b = \left.\frac{10}{s.(s+10)}\right|_{s=-1} = -\frac{10}{9}$$

$$c = \left.\frac{10}{s.(s+1)}\right|_{s=-10} = \frac{1}{9}$$

Fica:

$$F(s) = \frac{10}{s.(s+1).(s+10)} = \frac{1}{s} - \frac{\frac{10}{9}}{s+1} + \frac{\frac{1}{9}}{s+10}$$

Considerando os seguintes pares de Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[u(t)\right] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha.t}\right] = \frac{1}{s+a}$$

E as seguintes propriedades da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[A.f(t)\right] = A.F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{\frac{10}{9}}{s+1} + \frac{\frac{1}{9}}{s+10}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{10}{9}}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{9}}{s+10}\right] =$$

$$= u(t) - \frac{10}{9}.e^{-t} + \frac{1}{9}.e^{-10.t}$$

2. d) $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+s+1)}$

A função apresentada pode ser decomposta em termos simples, recorrendo ao método da decomposição em fracções parciais. Assim, temos:

$$F(s) = \frac{1}{s.(s^2+s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b.s+c}{(s+0{,}5+j.0{,}866).(s+0{,}5-j.0{,}866)}$$

Sendo:

$$a = \left.\frac{1}{(s^2+s+1)}\right|_{s=0} = 1$$

$$b.s+c = \left.\frac{1}{s}\right|_{s=-0{,}5-j.0{,}866} = \begin{cases} b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

Fica:

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{-s-1}{(s+0{,}5+j.0{,}866).(s+0{,}5-j.0{,}866)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{(s+0{,}5+j.0{,}866).(s+0{,}5-j.0{,}866)} - \frac{1}{(s+0{,}5+j.0{,}866).(s+0{,}5-j.0{,}866)}$$

Considerando os seguintes pares de Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[u(t)\right] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{s}{s^2+2.\zeta.\omega_n.s+\omega_n^2}\right] = -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}.e^{-\zeta.\omega_n.t}.sen\left(\omega_n.\sqrt{1-\zeta^2}.t-\phi\right)$$

sendo: $\phi = arctg\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\omega_n}{s^2+2.\zeta.\omega_n.s+\omega_n^{\,2}}\right]=-\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}.e^{-\zeta.\omega_n.t}.sen\left(\omega_n.\sqrt{1-\zeta^2}.t\right)$$

E as seguintes propriedades da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[A.f(t)\right]=A.F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t)\pm f_2(t)\right]=F_1(s)\pm F_2(s)$$

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{(s+0{,}5+j.0{,}866).(s+0{,}5-j.0{,}866)}-\frac{1}{(s+0{,}5+j.0{,}866).(s+0{,}5-j.0{,}866)}\right]=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+0{,}5+j.0{,}866).(s+0{,}5-j.0{,}866)}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+0{,}5+j.0{,}866).(s+0{,}5-j.0{,}866)}\right]=$$

$$=u(t)-1{,}155.e^{-0{,}5.t}.sen\left(0{,}866.t+1{,}047\right)$$

2. e) $F(s)=\frac{1}{s^2}\left(1-2.e^{-s}+e^{-2.s}\right)$

Desenvolvendo a expressão anterior, ficamos com:

$$F(s)=\frac{1}{s^2}\left(1-2.e^{-s}+e^{-2.s}\right)=\frac{1}{s^2}-2.\frac{1}{s^2}.e^{-s}+\frac{1}{s^2}.e^{-2.s}$$

Dada a Transformada de Laplace da rampa unitária:

$$\mathcal{L}\left[t\right]=\frac{1}{s^2}$$

E as seguintes propriedades da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[A.f(t)\right]=A.F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t)\pm f_2(t)\right]=F_1(s)\pm F_2(s)$$

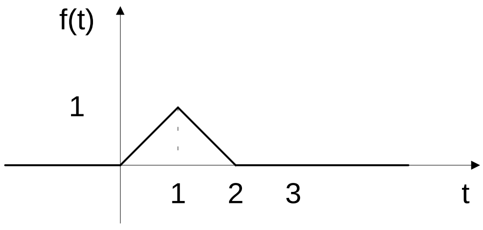
$$\mathcal{L}\left[f(t-\alpha).u(t-\alpha)\right]=e^{-\alpha.s}.F(s)$$

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-2.\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}.e^{-s}\right]+\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}.e^{-2.s}\right]=$$

$$= t.u(t) - 2.(t-1).u(t-1) + (t-2).u(t-2)$$

Esboçando a função f(t), obtém-se:



2. f) $F(s) = \dfrac{(s+3)}{(s+1)(s+2)^2}$

A função apresentada pode ser decomposta em termos simples, recorrendo ao método da decomposição em fracções parciais. Assim, temos:

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1).(s+2)^2} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2} + \frac{c}{(s+2)^2}$$

Sendo:

$$a = \left.\frac{s+3}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$b = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{s+3}{s+1}\right)\right|_{s=-2} = -2$$

$$c = \left.\frac{s+3}{s+1}\right|_{s=-2} = -1$$

Fica:

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1).(s+2)^2} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}$$

Considerando os seguintes pares de Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha.t}\right] = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\left[t.e^{-\alpha.t}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}$$

E as seguintes propriedades da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[A.f(t)\right] = A.F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] =$$

$$= 2.e^{-t} - 2.e^{-2.t} - t.e^{-2.t}$$

2. g) $F(s) = \dfrac{s^3 + 2s + 4}{(s^4 - 16)}$

A função apresentada pode ser decomposta em termos simples, recorrendo ao método da decomposição em fracções parciais. Assim, temos:

$$F(s) = \frac{s^3 + 2.s + 4}{(s-2).(s+2).(s+j.2).(s-j.2)} = \frac{a.s+b}{(s+j.2).(s-j.2)} + \frac{c}{s-2} + \frac{d}{s+2}$$

Sendo:

$$a.s + b = \left.\frac{s^3 + 2.s + 4}{(s-2).(s+2)}\right|_{s=+j.2} = \begin{cases} a = 0{,}25 \\ b = -0{,}5 \end{cases}$$

$$c = \left.\frac{s^3 + 2.s + 4}{(s+j.2).(s-j.2).(s+2)}\right|_{s=2} = 0{,}5$$

$$d = \left.\frac{s^3 + 2.s + 4}{(s+j.2).(s-j.2).(s-2)}\right|_{s=-2} = 0{,}25$$

Fica:

$$F(s) = \frac{0{,}25.s - 0{,}5}{(s+j.2).(s-j.2)} + \frac{0{,}5}{s-2} + \frac{0{,}25}{s+2} = \frac{0{,}25.s}{(s+j.2).(s-j.2)} - \frac{0{,}5}{(s+j.2).(s-j.2)} + \frac{0{,}5}{s-2} + \frac{0{,}25}{s+2}$$

Considerando os seguintes pares de Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[sen(\omega.t)\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega.t)\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha.t}\right] = \frac{1}{s+a}$$

E as seguintes propriedades da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[A.f(t)\right] = A.F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

Temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0{,}25.s}{(s+j.2).(s-j.2)} - \frac{0{,}5}{(s+j.2).(s-j.2)} + \frac{0{,}5}{s-2} + \frac{0{,}25}{s+2}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0{,}25.s}{(s+j.2).(s-j.2)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0{,}5}{(s+j.2).(s-j.2)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0{,}5}{s-2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0{,}25}{s+2}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0{,}25.s}{s^2+4}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0{,}5}{s^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0{,}5}{s-2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0{,}25}{s+2}\right] =$$

$$= 0{,}25.\cos(2.t) - 0{,}5.sen(2.t) + 0{,}5.e^{2.t} + 0{,}25.e^{-2.t}$$