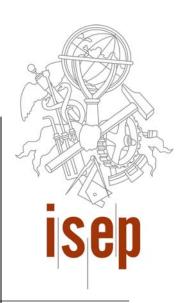
TESIS: Teoria dos Sistemas



Transformada de Laplace





- Transformada de Laplace
- Transformada inversa de Laplace
- 3. Propriedades da transformada de Laplace
- 4. Tabela de transformadas de Laplace
- 5. Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
- 6. Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes





- Transformada de Laplace
- Transformada inversa de Laplace
- 3. Propriedades da transformada de Laplace
- 4. Tabela de transformadas de Laplace
- Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
- Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes





- Transformada de Laplace
 - Definição: para uma função real de variável real f(t) tal que f(t) = 0 para t < 0 a transformada de Laplace de f(t) é uma função de variável complexa definida por

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^{-}}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

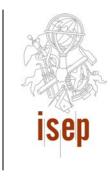


Exemplo

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{at}, & t \ge 0 \end{cases}$$

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^{-}}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$F(s) = \int_{0^{-}}^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a}$$



 Existe uma correspondência biunívoca entre f(t) e F(s), isto é

• se
$$f_1(t) \neq f_2(t) \Rightarrow F_1(s) \neq F_2(s)$$

• se
$$f_1(t) = f_2(t) \implies F_1(s) = F_2(s)$$





- 1. Transformada de Laplace
- 2. Transformada inversa de Laplace
- 3. Propriedades da transformada de Laplace
- 4. Tabela de transformadas de Laplace
- Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
- Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes



- Transformada inversa de Laplace
 - O cálculo de f(t) a partir de F(s) designa-se por transformada inversa de Laplace e pode ser obtido através do integral

$$f(t) = L^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s)e^{st}ds$$

para valores adequados de σ₁





- Transformada de Laplace
- 2. Transformada inversa de Laplace
- 3. Propriedades da transformada de Laplace
- 4. Tabela de transformadas de Laplace
- Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
- Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes



Propriedades da transformada de Laplace (I)

$$L[af(t)] = aF(s)$$

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

$$L_{\pm} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0^{\pm})$$

$$L_{\pm} \left[\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0^{\pm}) - \dot{f}(0^{\pm})$$

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = \frac{F(s)}{s}$$



Propriedades da transformada de Laplace (II)

$$L[f(t-\alpha)u(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}F(s), \ \alpha > 0$$

$$L[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$L[t^{2}f(t)] = \frac{d^{2}}{ds^{2}}F(s)$$

$$L\left[e^{-\alpha t}f\left(t\right)\right] = F\left(s + \alpha\right)$$



- Propriedades da transformada de Laplace (III)
 - teorema do valor inicial

$$f\left(0^{+}\right) = \lim_{t \to 0^{+}} f\left(t\right) = \lim_{s \to \infty} sF\left(s\right)$$

teorema do valor final

$$f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

teorema da convolução

$$w(t)*u(t) = \int_{0^{-}}^{t} w(t-t')u(t')dt' = L^{-1}[W(s)U(s)]$$





- Transformada de Laplace
- 2. Transformada inversa de Laplace
- 3. Propriedades da transformada de Laplace
- 4. Tabela de transformadas de Laplace
- Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
- Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes



Tabela de transformadas de Laplace (I)

f(t)	F(s)
Impulso unitário $\delta(t)$	1
Degrau unitário $u(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa unitária t	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at} (n=1, 2, 3,)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$



Tabela de transformadas de Laplace (II)

f(t)	F(s)
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{s\sin(\phi) + \omega\cos(\phi)}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\omega}e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{1}{\left[s+\left(a+j\omega\right)\right]\left[s+\left(a-j\omega\right)\right]}$





- Transformada de Laplace
- 2. Transformada inversa de Laplace
- 3. Propriedades da transformada de Laplace
- 4. Tabela de transformadas de Laplace
- 5. Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
- 6. Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes



 Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s(s+1)^2} \right] = L^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} \right] =$$

$$= 1 - \frac{te^{-t}}{1!} - e^{-t} = 1 - e^{-t} (t+1) \quad \text{para} \quad t \ge 0$$





- Transformada de Laplace
- 2. Transformada inversa de Laplace
- 3. Propriedades da transformada de Laplace
- 4. Tabela de transformadas de Laplace
- Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
- 6. Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes



 Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u$$

aplicando a transformada de Laplace, vem

$$a_{n} \left[s^{n}Y(s) - s^{n-1}y(0^{-}) - s^{n-2}y'(0^{-}) - \dots - sy^{(n-2)}(0^{-}) - y^{(n-1)}(0^{-}) \right] +$$

$$+ a_{n-1} \left[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0^{-}) - s^{n-3}y'(0^{-}) - \dots - sy^{(n-3)}(0^{-}) - y^{(n-2)}(0^{-}) \right] +$$

$$+ \dots + a_{0}Y(s) = b_{m} \left[s^{m}U(s) - s^{m-1}u(0^{-}) - s^{m-2}u'(0^{-}) - \dots - u^{(m-1)}(0^{-}) \right] + \dots + b_{0}U(s)$$



Logo

$$Y(s) = U(s) \frac{b_{m}s^{m} + b_{m-1}s^{m-1} + ... + sb_{1} + b_{0}}{a_{n}s^{n} + a_{n-1}s^{n-1} + ... + sa_{1} + a_{0}} + \frac{y(0^{-})(s^{n-1}a_{n} + s^{n-2}a_{n-1} + ... + a_{1}) + y(0^{-})(s^{n-2}a_{n} + s^{n-3}a_{n-1} + ... + a_{2}) + ...}{a_{n}s^{n} + ... + a_{1}s + a_{0}} + \frac{u(0^{-})(s^{m-1}b_{m} + s^{m-2}b_{m-1} + ... + b_{1}) - u(0^{-})(s^{m-2}b_{m} + s^{m-3}b_{m-1} + ... + b_{2})}{a_{n}s^{n} + ... + a_{1}s + a_{0}}$$



Define-se Função de Transferência como

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + sb_1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + sa_1 + a_0}$$

considerando as condições iniciais nulas



Exemplo

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u''(t) + 2u'(t) + 2u(t)$$

$$s^{2}Y(s) - sy(0^{-}) - y'(0^{-}) + 3sY(s) - 3y(0^{-}) + 2Y(s) =$$

$$= s^{2}U(s) - su(0^{-}) - u'(0^{-}) + 2sU(s) - 2u(0^{-}) + 2U(s)$$

$$Y(s) = \frac{s^{2} + 2s + 2}{s^{2} + 3s + 2}U(s) +$$

 $+\frac{sy(0^{-})+3y(0^{-})+y'(0^{-})-su(0^{-})-2u(0^{-})-u'(0^{-})}{s^{2}+3s+2}$



 Supondo condições iniciais nulas, obtém-se a função de transferência

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+2)}$$

• Se, por exemplo, $u(t) = \delta(t)$ vem

$$L \lceil \delta(t) \rceil = 1$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+2)} \cdot 1 = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

$$L^{-1}\left[Y(s)\right] = \delta(t) + e^{-t} - 2e^{-2t}$$