Departamento de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto

TESIS
Teoria dos Sistemas

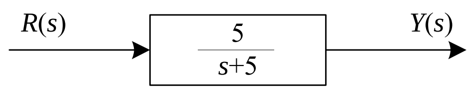
Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

–

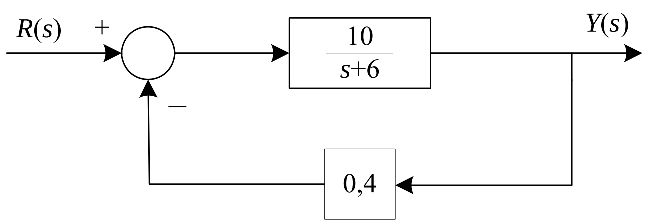
Exercícios Propostos e Soluções

1. Determine a resposta ao degrau unitário de cada um dos sistemas abaixo indicados. Caracterize a sua resposta transitória em termos do ganho DC (K), constante de tempo (τ), tempo de subida (t_r) e tempo de estabelecimento a 2 % (t_s). Esboce as respectivas respostas ao degrau unitário.

a)

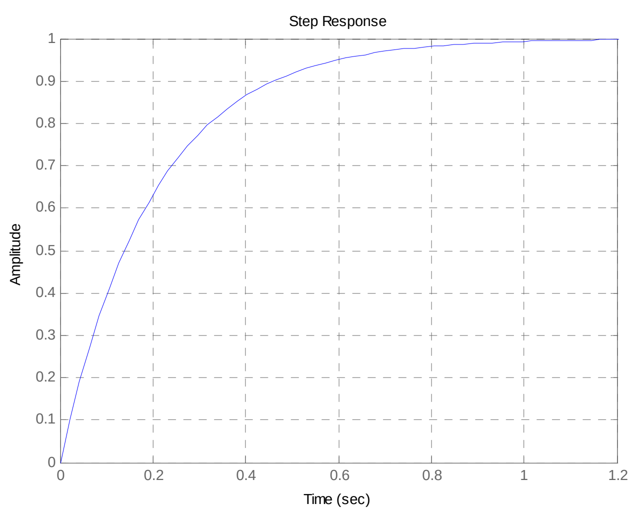


b)

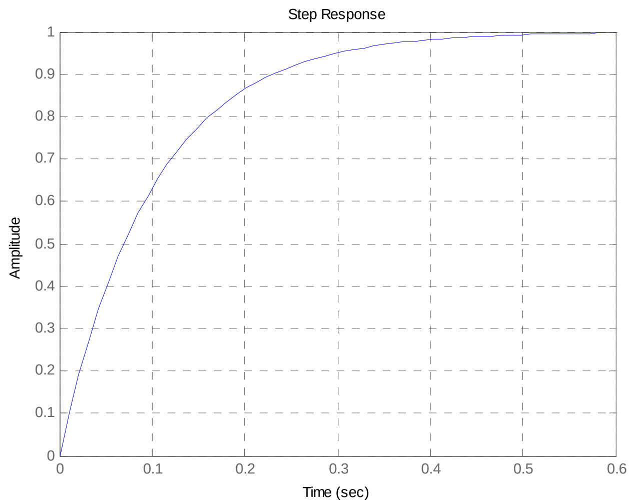


Solução:

a) $K = 1,\ \tau = \dfrac{1}{5},\ t_r = 0{,}439\ \text{s},\ t_s = 0{,}78\ \text{s}$



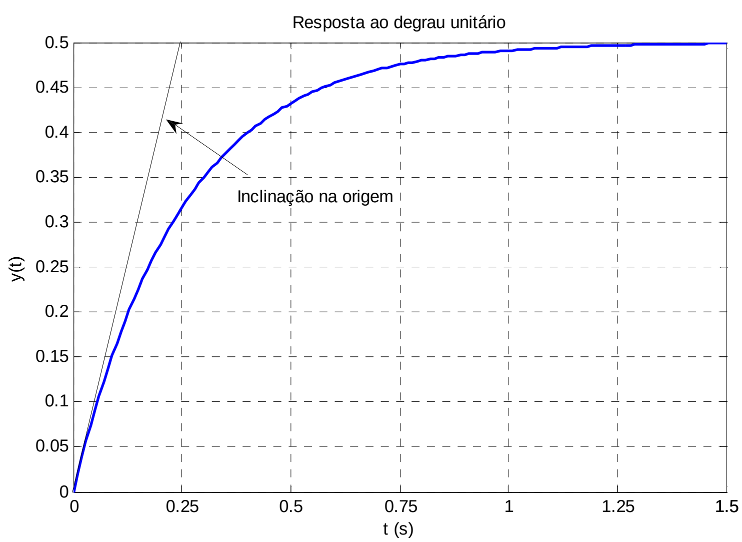
b) $K = 1,\ \tau = \dfrac{1}{10},\ t_r = 0{,}22\ \text{s},\ t_s = 0{,}39\ \text{s}$



2. Considere um sistema de primeira ordem dado por uma função de transferência da forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s+a}$$

A resposta deste sistema a uma entrada em degrau unitário está representada na figura seguinte. Determine os valores dos parâmetros (K, a) que caracterizam o sistema.



Solução: $K = 2$, $a = 4$

3. Para cada uma das funções de transferência abaixo apresentadas, localize os seus pólos e zeros, identificando o tipo de resposta para uma entrada em degrau unitário. Determine e esboce as respectivas respostas ao degrau unitário.

a) $G(s)=\dfrac{4}{(s+2)(s+4)}$

b) $G(s)=\dfrac{10(s+7)}{(s+10)(s+20)}$

c) $G(s)=\dfrac{30(s+2)}{s^2+17s+16}$

d) $G(s)=\dfrac{s+5}{(s+10)^2}$

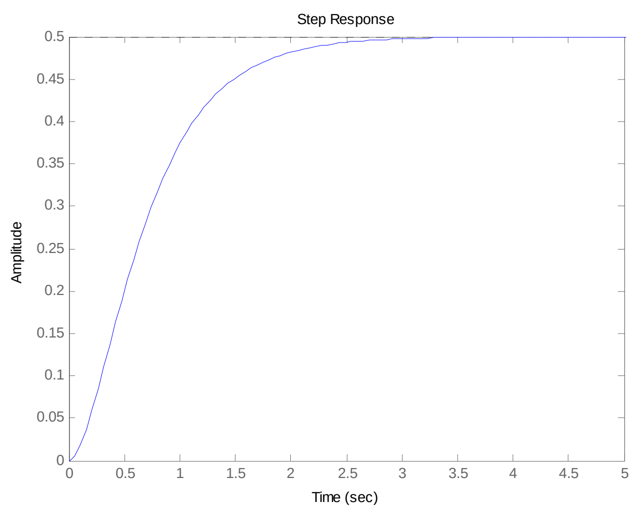
e) $G(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+2s+5}$

Solução:

a)

Não tem zeros, Pólos em $s=-2,-4$, resposta sobreamortecida $(\zeta > 1)$

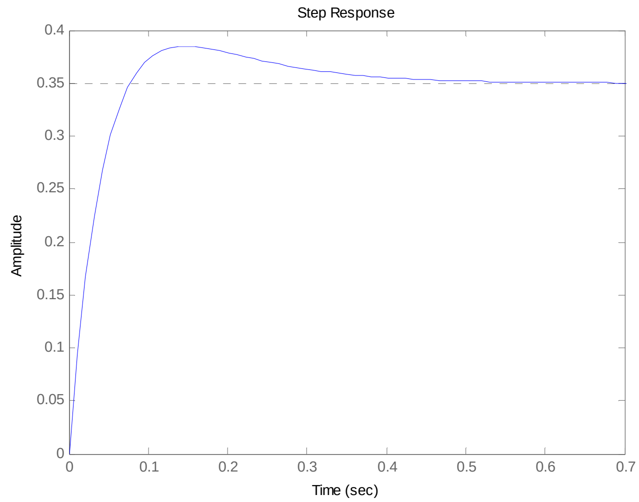
$$y(t)=\frac{1}{2}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-4t}, \qquad t\geq 0$$



b)

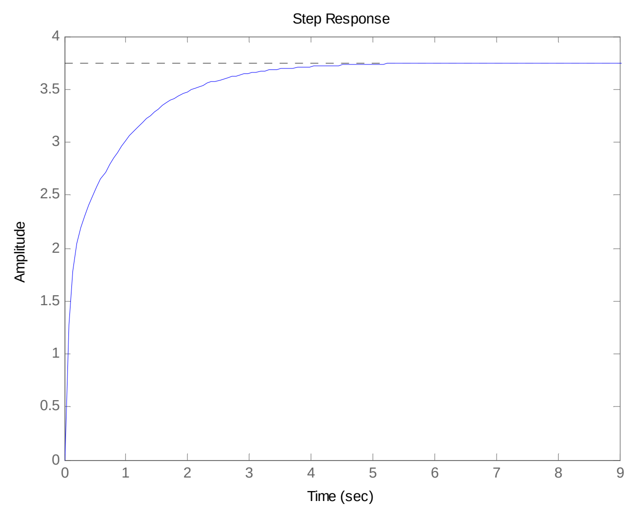
Zeros em $s=-7$, Pólos em $s=-10,-20$, resposta sobreamortecida $(\zeta > 1)$

$$y(t)=\frac{7}{20}-\frac{13}{20}e^{-20t}+\frac{3}{10}e^{-10t}, \qquad t\geq 0$$



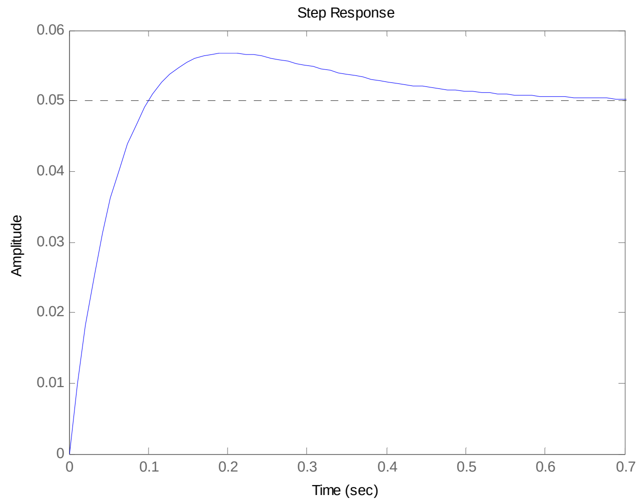
c)
Zeros em $s=-2$, Pólos em $s=-1,-16$, resposta sobreamortecida ($\zeta > 1$)

$$y(t)=\frac{15}{4}-\frac{7}{4}e^{-16t}-2e^{-t}, \quad t\geq 0$$



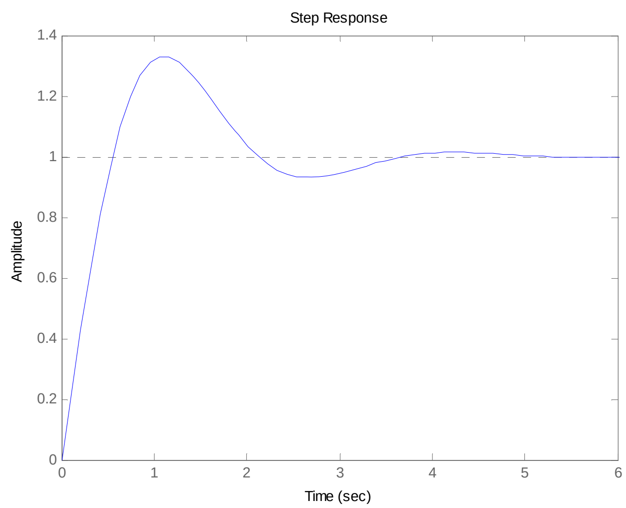
d)
Zeros em $s=-5$, Pólos em $s=-10,-10$, resposta criticamente amortecida ($\zeta = 1$)

$$y(t)=\frac{1}{20}-\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{20}\right)e^{-10t}, \qquad t\geq 0$$



e)
Zeros de $G(s)$: $s=-2{,}5$, Pólos de $G(s)$: $s=-1\pm j2$, resposta subamortecida ($0<\zeta<1$)

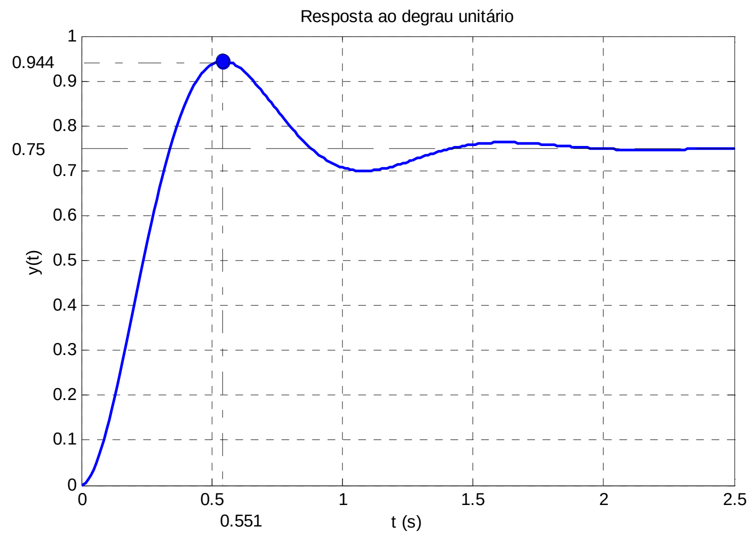
$$y(t)=1-e^{-t}\left[\cos(2t)-\frac{1}{2}\sin(2t)\right], \qquad t\geq 0$$



4. Considere um sistema de segunda ordem dado por uma função de transferência da forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

A resposta deste sistema a uma entrada em degrau unitário está representada na figura seguinte. Determine os valores dos parâmetros (K, ζ, ω_n) que caracterizam o sistema.



Solução: $K = 28{,}83$, $\zeta = 0{,}394$, $\omega_n = 6{,}2$ rad/s

5. Considere a seguinte forma canónica de um sistema de segunda ordem:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Para cada par de especificações abaixo indicadas, localize os pólos do sistema e indique a respectiva função de transferência $G(s)$.

a) $M_p = 30\,\%,\ t_s = 0{,}05\ \text{s}$

b) $M_p = 17\,\%,\ t_p = 0{,}5\ \text{s}$

c) $t_s = 7\ \text{s},\ t_p = 3\ \text{s}$

Solução:

a) $p_{1,2} = -80 \pm j208{,}7$

$$G(s) = \frac{49934}{s^2 + 160s + 49934}$$

b) $p_{1,2} = -3{,}54 \pm j6{,}28$

$$G(s) = \frac{52}{s^2 + 7{,}1s + 52}$$

c) $p_{1,2} = -0{,}57 \pm j1{,}05$

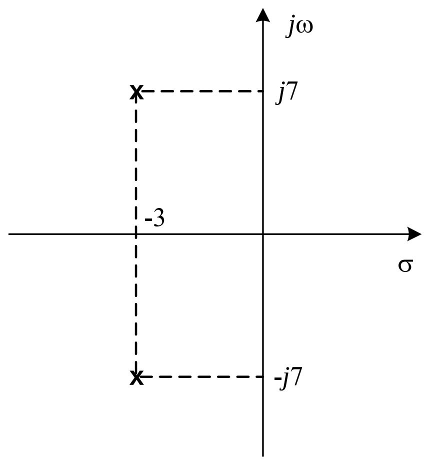
$$G(s) = \frac{1{,}423}{s^2 + 1{,}143s + 1{,}423}$$

6. Obtenha os valores de ζ, ω_n, t_s, t_p, t_r e da sobreelongação máxima percentual (M_p) para cada um dos sistemas de segunda ordem (forma canónica) abaixo apresentados, quando sujeitos a uma entrada em degrau unitário.

a) $G(s) = \dfrac{120}{s^2 + 12s + 120}$

b) $G(s) = \dfrac{1000}{s^2 + 20s + 1000}$

c)



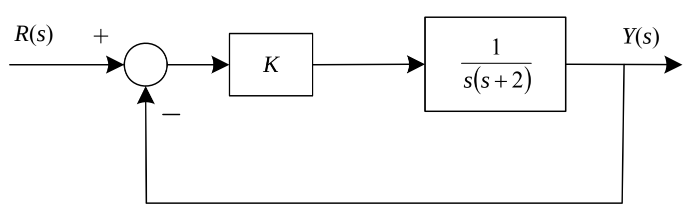
Solução:

a) $\zeta = 0{,}548$, $\omega_n = 10{,}95$ rad/s, $t_s = 0{,}666$ s, $t_p = 0{,}343$ s, $t_r = 0{,}2348$ s, $M_p = 12{,}77\,\%$

b) $\zeta = 0{,}316$, $\omega_n = 31{,}62$ rad/s, $t_s = 0{,}4$ s, $t_p = 0{,}105$ s, $t_r = 0{,}063$ s, $M_p = 35{,}12\,\%$

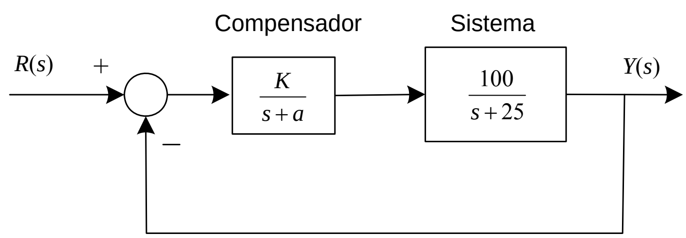
c) $\zeta = 0{,}394$, $\omega_n = 7{,}616$ rad/s, $t_s = 1{,}333$ s, $t_p = 0{,}449$ s, $t_r = 0{,}2823$ s, $M_p = 26\,\%$

7. Para o sistema de realimentação unitária apresentado na figura seguinte, determine o ganho K (do controlador proporcional) de forma que a saída $y(t)$ tenha uma sobreelongação máxima de $M_p \leq 10\,\%$ em resposta a uma entrada em degrau unitário.



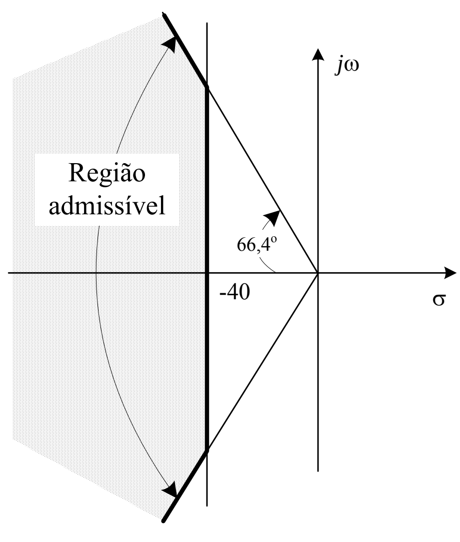
Solução: $K = 2{,}86$

8. Considere o sistema de realimentação unitária apresentado na figura seguinte. Pretende-se obter o ganho K e a localização do pólo do compensador de forma que a resposta em malha fechada do sistema a uma entrada em degrau unitário possua uma sobreelongação máxima de $M_p \leq 25\,\%$ e um tempo de estabelecimento de $t_s \leq 0{,}1\,\text{s}$.



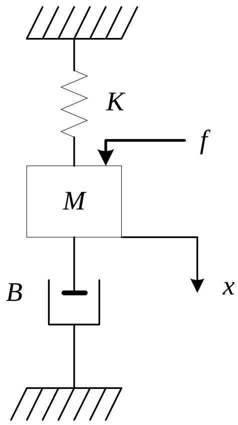
a) Esboce a região do plano-*s* onde ambas as especificações são satisfeitas.
b) Determine os valores de (K, a) do sistema de forma que as especificações sejam cumpridas.

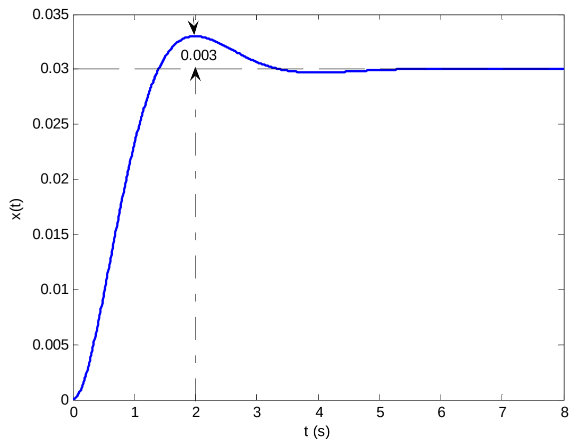
Solução:
a)



b) $K = 86{,}25$, $a = 55$

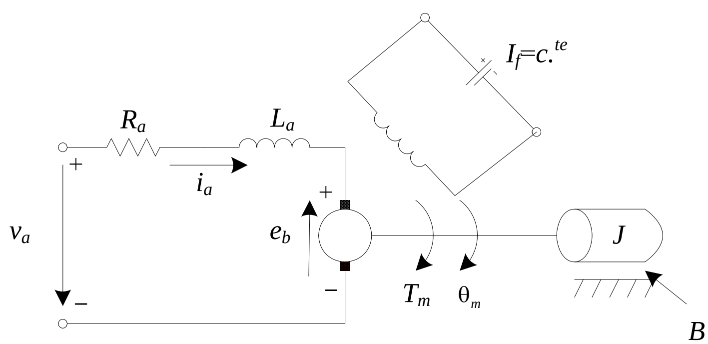
9. Considere o sistema mecânico de translação representado na figura seguinte. Ao sistema é aplicado um degrau de força com amplitude de $f = 10$ N. A variação do deslocamento $x(t)$ da saída está ilustrado no gráfico da direita. Determine os valores dos parâmetros M, B e K do sistema.





Solução:
$M = 87{,}66$ kg, $B = 201{,}71$ N s/m, $K = 333{,}33$ N/m

10. Considere o motor DC controlado pela armadura representado na figura seguinte. Considere que a inductância L_a é desprezável. Isto é normalmente possível pois a resposta do circuito eléctrico é muito mais rápida que a do movimento do rótor, o que se traduz numa alteração (quase) instantânea da corrente quando é aplicada uma tensão ao circuito.



Assuma os seguintes valores para os parâmetros:

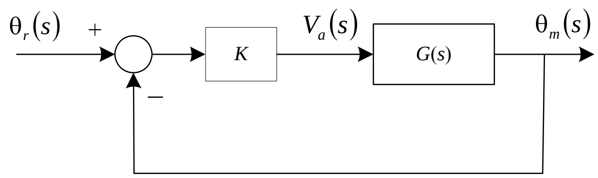
$$J = 0{,}01\ \text{kg m}^2$$
$$B = 0{,}001\ \text{N m s/rad}$$
$$K_e = 0{,}02\ \text{V s/rad}$$
$$K_t = 1\ \text{N m/A}$$
$$R_a = 10\ \Omega$$

a) Determine a função de transferência entre a tensão aplicada v_a e a velocidade do motor $\omega_m = \dot{\theta}_m$.

b) Calcule a velocidade em regime permanente do motor após a aplicação de uma tensão de $v_a = 10\,\text{V}$.

c) Determine a função de transferência $G(s)$ entre a tensão aplicada v_a e a posição angular do veio θ_m.

d) Suponha que é adicionado ao sistema uma realimentação da posição angular, tal como se ilustra na figura abaixo, em que K é o ganho de realimentação. Encontre a função de transferência do agora sistema servo de posição que relaciona θ_r e θ_m.



e) Qual é o valor máximo de K que se pode utilizar para se obter uma sobreelongação máxima de $M_p \leq 20\,\%$?

f) Quais são os valores de K para os quais se obtém um tempo de subida $t_r < 4\,\text{s}$?

g) Utilize o MATLAB para obter a resposta ao degrau do sistema servo de posição para os valores do ganho de K = 0,01, 0,02 e 0,04. Calcule a sobreelongação máxima M_p e o tempo de subida t_r para cada um dos casos referidos. Verifique se os gráficos estão consistentes com os valores calculados nas alíneas e) e f).

Solução:

a) $\dfrac{\omega_m(s)}{V_a(s)} = \dfrac{10}{s+0{,}3}$

b) $\omega_m(\infty) = 333{,}3\ \text{rad/s}$

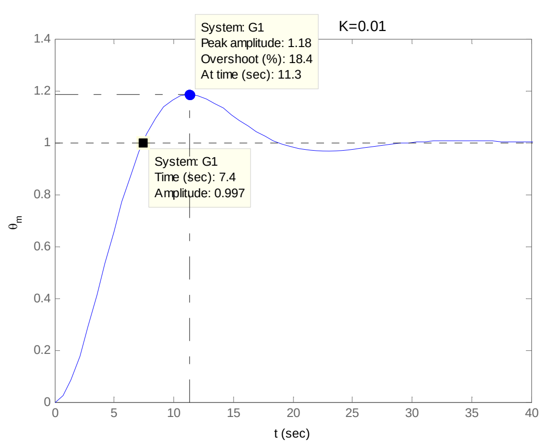
c) $G(s) = \dfrac{\theta_m(s)}{V_a(s)} = \dfrac{10}{s(s+0{,}3)}$

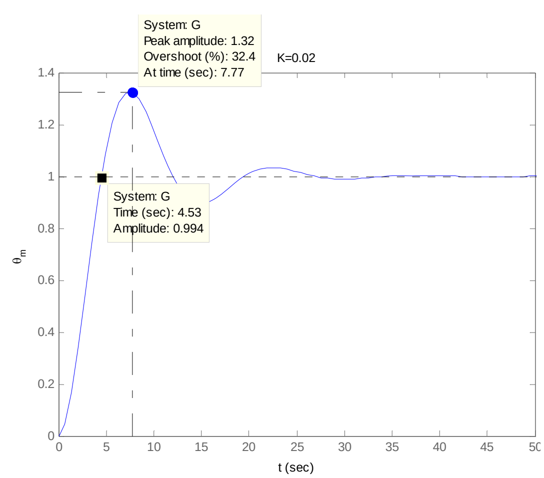
d) $\dfrac{\theta_m(s)}{\theta_r(s)} = \dfrac{10K}{s^2+0{,}3s+10K}$

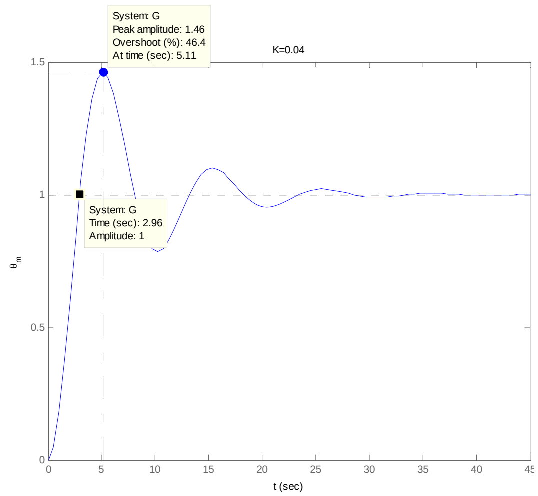
e) $K \leq 0{,}01$

f) $K > 0{,}03$

g)







11. Considere um sistema de realimentação unitária com a seguinte função de transferência em malha aberta:

$$G(s) = \frac{s+2}{s(s+4)}$$

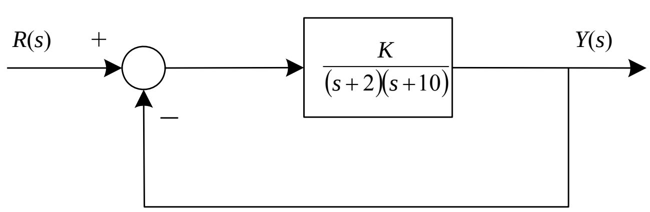
Determine o sistema Tipo, as constantes de erro de posição, velocidade e aceleração (K_p, K_v, K_a) e o erro em regime permanente (e_{ss}) do sistema para as entradas em degrau, rampa e parábola unitárias.

Solução:
Sistema Tipo 1

$K_p = \infty$, $K_v = \frac{1}{2}$, $K_a = 0$

$e_{ss}(\text{degrau}) = 0$, $e_{ss}(\text{rampa}) = 2$, $e_{ss}(\text{parábola}) = \infty$

12. Considere o sistema de realimentação unitária representado na figura seguinte. Determine o valor de K de forma que o sistema apresente um erro em regime permanente de 10 %.



Solução: $K = 180$

13. Um sistema de realimentação unitária possui uma função de transferência no ramo directo dada por :

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

a) Determine os valores de (K, a) que originam um erro em regime permanente de 1 % e uma sobreelongação máxima de 10 %.

b) Utilize o MATLAB para obter as respostas ao degrau e rampa unitárias para os valores de (K, a) obtidos em a). Verifique se os gráficos estão consistentes com as especificações pretendidas em a).

Solução:

c) $K = 13971$, $a = 139{,}7$

d)