Departamento de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto

TESIS
Teoria dos Sistemas

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

–

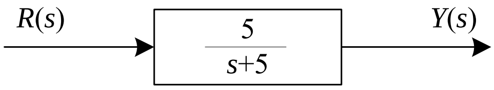
Resolução dos Exercícios Propostos

Ramiro Barbosa
(rsb@isep.ipp.pt)

Abril de 2007

1. Determine a resposta ao degrau unitário de cada um dos sistemas abaixo indicados. Caracterize a sua resposta transitória em termos do ganho DC (K), constante de tempo (τ), tempo de subida (t_r) e tempo de estabelecimento a 2 % (t_s). Esboce as respectivas respostas ao degrau unitário.

a)



A função de transferência entre $R(s)$ e $Y(s)$ é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{5}{s+5}$$

A sua resposta ao degrau unitário é:

$$R(s)=\frac{1}{s} \;\Rightarrow\; Y(s)=\frac{5}{s(s+5)}$$

Reescreve-se $Y(s)$ como:

$$Y(s)=\frac{5}{s(s+5)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+5}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace a $Y(s)$, vem a seguinte expressão para a resposta ao degrau unitário:

$$y(t)=1-e^{-5t}\,,\; t\geq 0$$

Da expressão anterior de $y(t)$ é possivel obter as especificações desejadas de K, τ, t_r e t_s. Assim, o ganho DC (K) é obtido por:

$$K=\lim_{s\to 0}\frac{Y(s)}{R(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{5}{s+5}=1$$

A constante de tempo (τ) é obtida quando a resposta $y(t)$ atinge 63,2 % do seu valor final, para o instante de tempo $t = \tau$. Assim,

$$y(t)\big|_{t=\tau}=0{,}632 \;\Rightarrow\; 1-e^{-5\tau}=0{,}632 \;\Rightarrow\; \tau=0{,}2$$

A constante de tempo (τ) pode ser calculada directamente a partir do valor do pólo da função de transferência de primeira ordem. Assim, para $a = 5$ vem que $\tau = \frac{1}{a} = \frac{1}{5}$.

O tempo de subida (t_r) é o tempo necessário para a resposta $y(t)$ ir dos 10 % até aos 90 % do seu valor final. Logo,

$$y(t_1) = 0{,}1 \;\Rightarrow\; 1 - e^{-5t_1} = 0{,}1 \;\Rightarrow\; t_1 = 0{,}021 \text{ s}$$

$$y(t_2) = 0{,}9 \;\Rightarrow\; 1 - e^{-5t_2} = 0{,}9 \;\Rightarrow\; t_2 = 0{,}46 \text{ s}$$

Assim, o tempo de subida (t_r) é dado por:

$$t_r = t_2 - t_1 = 0{,}46 - 0{,}021 = 0{,}439 \text{ s}$$

O tempo de estabelecimento (t_s) é o tempo necessário para a resposta atingir e permanecer em torno de uma faixa de 2 % do seu valor final. Assim,

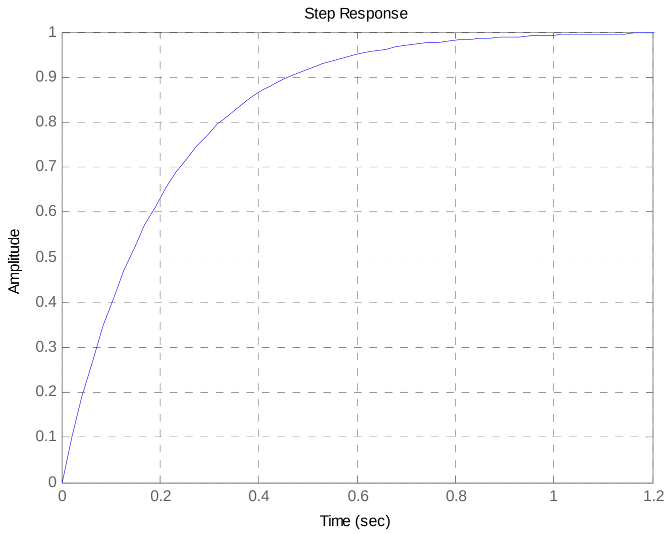
$$\left| y(t_s) - 1 \right| = 0{,}02 \;\Rightarrow\; e^{-5t_s} = 0{,}02 \;\Rightarrow\; t_s = 0{,}78 \text{ s}$$

O tempo de estabelecimento (t_s) é normalmente dado em termos da constante de tempo (τ). Para um critério de 2 %, é calculado pela fórmula $t_s = 4\tau = 4 \times 0{,}2 = 0{,}8$ s.

Código MATLAB para obtenção da resposta ao degrau unitário

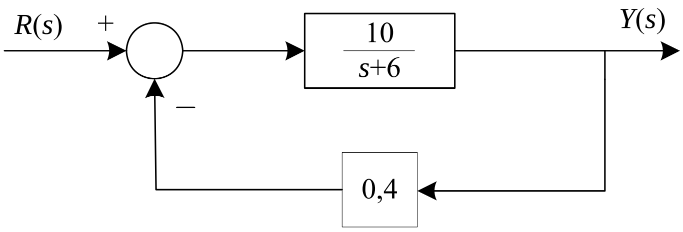
```
>> num=5;
>> den=[1 5];
>> G=tf(num,den)

Transfer function:
  5
-----
s + 5

>> step(G)
>> grid
```

O gráfico de $y(t)$ da resposta ao degrau unitário, obtido através do código MATLAB atrás descrito, está ilustrado na figura abaixo apresentada.



A partir do gráfico, constata-se que os valores obtidos para as especificações pretendidas são consistentes com os valores calculados analiticamente.

b)



A função de transferência entre $R(s)$ e $Y(s)$ é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s+10}$$

A sua resposta ao degrau unitário é:

$$R(s) = \frac{1}{s} \;\Rightarrow\; Y(s) = \frac{10}{s(s+10)}$$

Reescreve-se $Y(s)$ como:

$$Y(s) = \frac{10}{s(s+10)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+10}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace a $Y(s)$, vem a seguinte expressão para a resposta ao degrau unitário:

$$y(t) = 1 - e^{-10t}, \qquad t \geq 0$$

Da expressão anterior de $y(t)$ é possivel obter as especificações desejadas de K, τ, t_r e t_s. Assim, o ganho DC (K) é obtido por:

$$K = \lim_{s \to 0} \frac{Y(s)}{R(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{10}{s+10} = 1$$

A constante de tempo (τ) é obtida quando a resposta $y(t)$ atinge 63,2 % do seu valor final, para o instante de tempo $t = \tau$, ou seja:

$$y(t)\big|_{t=\tau} = 0{,}632 \;\Rightarrow\; 1 - e^{-10\tau} = 0{,}632 \;\Rightarrow\; \tau = 0{,}1$$

A constante de tempo (τ) pode ser calculada directamente a partir do valor do pólo da função de transferência de primeira ordem. Assim, para $a = 10$ vem que $\tau = \frac{1}{a} = \frac{1}{10}$.

O tempo de subida (t_r) é o tempo necessário para a resposta $y(t)$ ir dos 10 % até aos 90 % do seu valor final. Logo,

$$y(t_1) = 0{,}1 \;\Rightarrow\; 1 - e^{-10t_1} = 0{,}1 \;\Rightarrow\; t_1 = 0{,}011 \text{ s}$$

$$y(t_2) = 0{,}9 \;\Rightarrow\; 1 - e^{-10t_2} = 0{,}9 \;\Rightarrow\; t_2 = 0{,}23 \text{ s}$$

Assim, o tempo de subida (t_r) é dado por:

$$t_r = t_2 - t_1 = 0{,}23 - 0{,}011 = 0{,}22 \text{ s}$$

O tempo de estabelecimento (t_s) é o tempo necessário para a resposta atingir e permanecer em torno de uma faixa de 2 % do seu valor final. Logo,

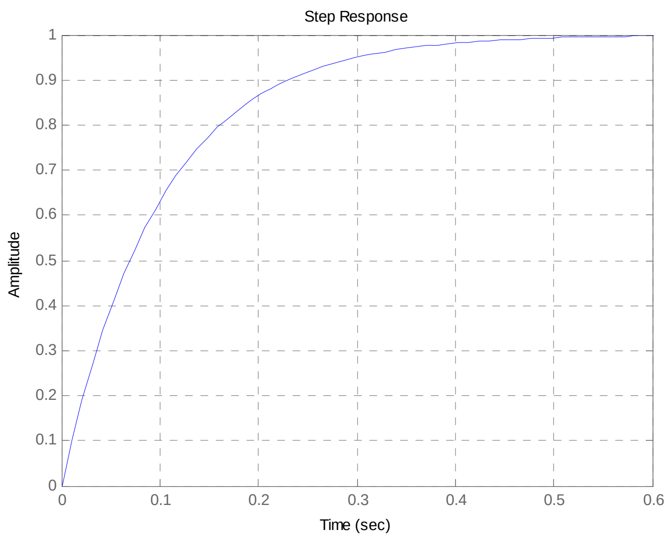
$$|y(t_s) - 1| = 0{,}02 \;\Rightarrow\; e^{-10t_s} = 0{,}02 \;\Rightarrow\; t_s = 0{,}39 \text{ s}$$

O tempo de estabelecimento (t_s) é normalmente dado em termos da constante de tempo (τ). Para um critério de 2 %, é calculado pela fórmula $t_s = 4\tau = 4 \times 0{,}1 = 0{,}4$ s.

Código MATLAB para obtenção da resposta ao degrau unitário

```
>> num=10;
>> den=[1 10];
>> G=tf(num,den)

Transfer function:
  10
------
s + 10

>> step(G)
>> grid
```

O gráfico de $y(t)$ da resposta ao degrau unitário, obtido através do código MATLAB atrás descrito, está ilustrado na figura abaixo apresentada.

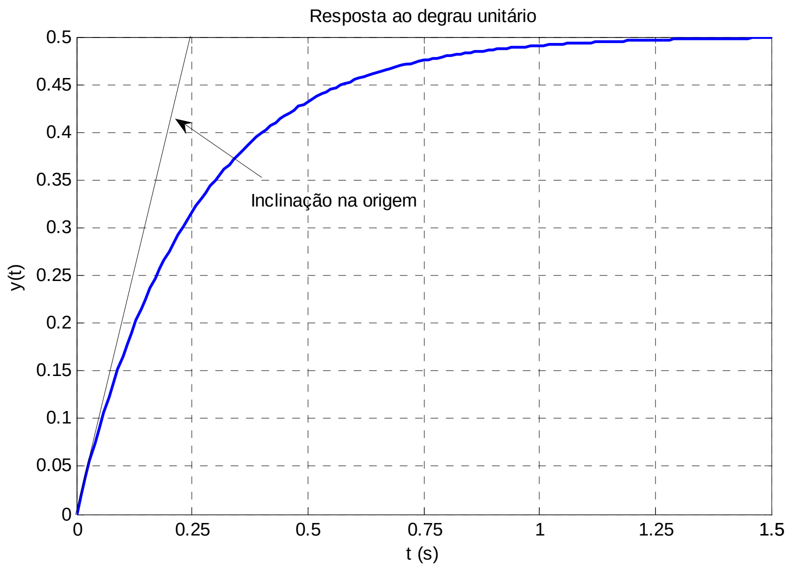


A partir do gráfico, constata-se que os valores obtidos para as especificações pretendidas são consistentes com os valores calculados analiticamente.

2. Considere um sistema de primeira ordem dado por uma função de transferência da forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s+a}$$

A resposta deste sistema a uma entrada em degrau unitário está representada na figura seguinte. Determine os valores dos parâmetros (K, a) que caracterizam o sistema.



Do gráfico da resposta $y(t)$ retira-se a constante de tempo τ, a qual toma o valor:

$$\tau = 0{,}25 = \frac{1}{4}$$

Dado que $\tau = \frac{1}{a}$, em a é o pólo do sistema de primeira ordem, vem que $a = \frac{1}{\tau} = 4$.

O valor de K é determinado observando que a curva da resposta $y(t)$ tende para o valor final de 0,5. Assim, aplicando o Teorema do Valor Final à função de transferência $Y(s)/R(s)$ do sistema, obtém-se:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s+a} = \frac{K}{a} = 0{,}5 \;\Rightarrow\; K = 0{,}5a$$

Substituindo o valor de a já calculado, vem que $K = 2$.

Logo, a função de transferência para o sistema de primeira ordem toma a seguinte expressão:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2}{s+4}$$

3. Para cada uma das funções de transferência abaixo apresentadas, localize os seus pólos e zeros, identificando o tipo de resposta para uma entrada em degrau unitário. Determine e esboce as respectivas respostas ao degrau unitário.

a) $G(s) = \dfrac{4}{(s+2)(s+4)}$

Não tem zeros.
Pólos de $G(s)$: $s = -2, -4$.

<u>Tipo de resposta</u>: a função $G(s)$ apresenta dois pólos reais e distinctos. Portanto, o sistema possui uma resposta sobreamortecida ($\zeta > 1$). A resposta aumenta monoticamente até atingir o valor final, sem nunca o ultrapassar.

Considerando como entrada $R(s)$ e saída $Y(s)$, a função de transferência $G(s)$ é reescrita como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4}{(s+2)(s+4)}$$

A resposta ao degrau unitário é dada por:

$$R(s) = \frac{1}{s} \;\Rightarrow\; Y(s) = \frac{4}{s(s+2)(s+4)}$$

Código MATLAB para cálculo da transformada inversa de Laplace de $Y(s)$

```
>> syms s
>> Y=4/(s*(s+2)*(s+4));
>> y=ilaplace(Y)

y =

1/2-exp(-2*t)+1/2*exp(-4*t)
```

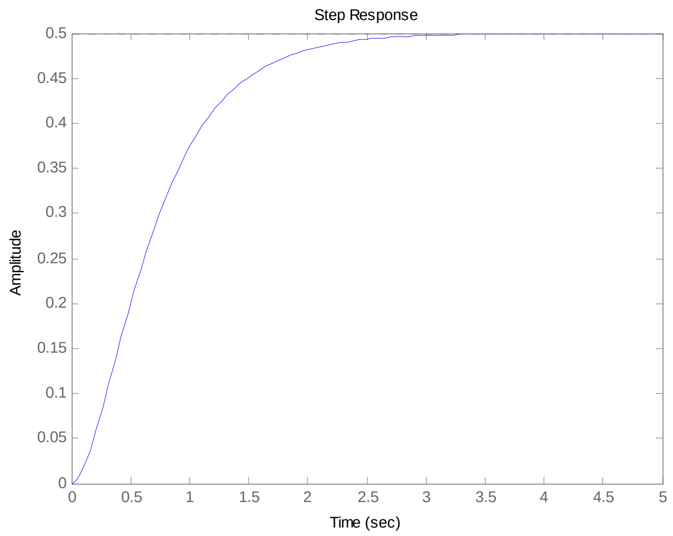
Logo, a expressão da resposta ao degrau unitário é da forma:

$$y(t) = \frac{1}{2} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t}, \qquad t \geq 0$$

Código MATLAB para obtenção da resposta ao degrau unitário

```
>> num=4;
>> den=conv([1 2],[1 4]);
>> G=tf(num,den)

Transfer function:
     4
-------------
s^2 + 6 s + 8

>> step(G)
```

O gráfico de $y(t)$, obtido através do código MATLAB atrás descrito, está ilustrado na figura abaixo apresentada.



Como esperado, a resposta ao degrau unitário aumenta monoticamente até ao seu valor final, sem nunca o ultrapassar.

b) $G(s)=\dfrac{10(s+7)}{(s+10)(s+20)}$

Zeros de $G(s)$: $s=-7$.
Pólos de $G(s)$: $s=-10,-20$.

Tipo de resposta: a função $G(s)$ apresenta dois pólos reais e distinctos. Portanto, o sistema possui uma resposta sobreamortecida ($\zeta > 1$). Dado que $G(s)$ tem um zero, é de prever que a resposta possua uma sobreelongação (?).

Considerando como entrada $R(s)$ e saída $Y(s)$, a função de transferência $G(s)$ é reescrita como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{10(s+7)}{(s+10)(s+20)}$$

A resposta ao degrau unitário é dada por:

$$R(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow Y(s)=\frac{10(s+7)}{s(s+10)(s+20)}$$

Código MATLAB para cálculo da transformada inversa de Laplace de $Y(s)$

```
>> syms s
>> Y=10*(s+7)/(s*(s+10)*(s+20));
>> y=ilaplace(Y)

y =

-13/20*exp(-20*t)+7/20+3/10*exp(-10*t)
```

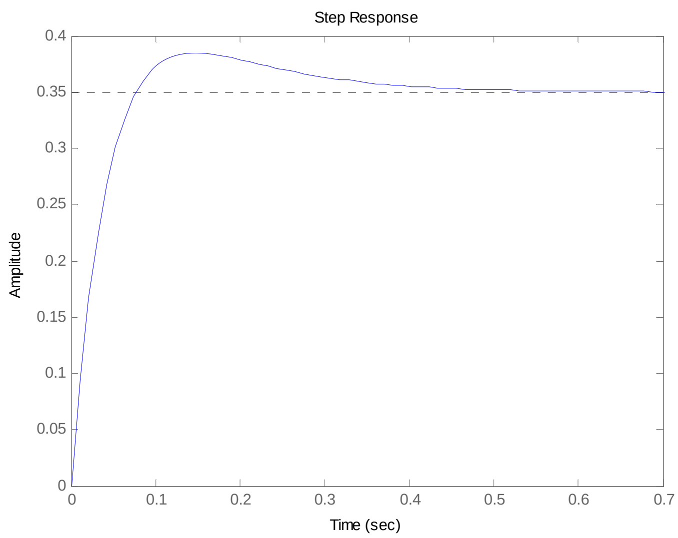
Logo, a expressão da resposta ao degrau unitário é da forma:

$$y(t) = \frac{7}{20} - \frac{13}{20}e^{-20t} + \frac{3}{10}e^{-10t}, \qquad t \geq 0$$

Código MATLAB para obtenção da resposta ao degrau unitário

```
>> num=10*[1 7];
>> den=conv([1 10],[1 20]);
>> G=tf(num,den)

Transfer function:
   10 s + 70
----------------
s^2 + 30 s + 200

>> step(G)
```

O gráfico de $y(t)$, obtido através do código MATLAB atrás descrito, está ilustrado na figura abaixo apresentada.



Como esperado, a resposta ao degrau unitário apresenta uma sobreelongação, a qual decai monoticamente até ao valor final, devido ao zero ($s = -7$) do sistema.

c) $G(s) = \dfrac{30(s+2)}{s^2 + 17s + 16}$

Zeros de $G(s)$: $s = -2$.
Factorizando o denominador de $G(s)$, obtém-se:

$$s^2 + 17s + 16 = 0 \;\Rightarrow\; s = -1, -16$$

Pólos de $G(s)$: $s = -1, -16$.

Código MATLAB para obtenção dos pólos de $G(s)$

```
>> den=[1 17 16];
>> p=roots(den)

p =

   -16
    -1
```

Tipo de resposta: a função $G(s)$ apresenta dois pólos reais e distinctos. Portanto, o sistema possui uma resposta sobreamortecida ($\zeta > 1$). Dado que $G(s)$ tem um zero, é de prever que a resposta possua uma sobreelongação (?).

Considerando como entrada $R(s)$ e saída $Y(s)$, a função de transferência $G(s)$ é reescrita como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{30(s+2)}{(s+1)(s+16)}$$

A resposta ao degrau unitário é dada por:

$$R(s) = \frac{1}{s} \;\Rightarrow\; Y(s) = \frac{30(s+2)}{s(s+1)(s+16)}$$

Código MATLAB para cálculo da transformada inversa de Laplace de $Y(s)$

```
>> syms s
>> Y=30*(s+2)/(s*(s+1)*(s+16));
>> y=ilaplace(Y)

y =

15/4-7/4*exp(-16*t)-2*exp(-t)
```

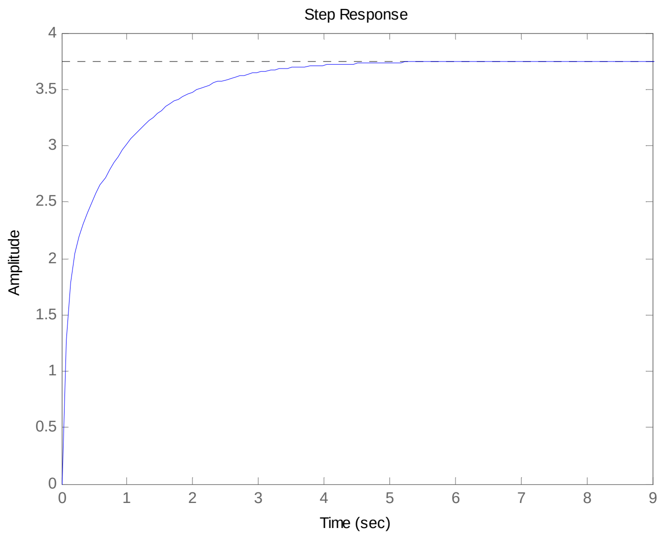
Logo, a expressão da resposta ao degrau unitário é da forma:

$$y(t) = \frac{15}{4} - \frac{7}{4}e^{-16t} - 2e^{-t}, \qquad t \geq 0$$

Código MATLAB para obtenção da resposta ao degrau unitário

```
>> num=30*[1 2];
>> den=[1 17 16];
>> G=tf(num,den)

Transfer function:
  30 s + 60
---------------
s^2 + 17 s + 16

>> step(G)
```

O gráfico de $y(t)$, obtido através do código MATLAB atrás descrito, está ilustrado na figura abaixo apresentada.



Como se pode ver através do gráfico, a resposta ao degrau unitário não ultrapassa o valor final, apesar da função conter um zero ($s = -2$).

d) $G(s) = \dfrac{s+5}{(s+10)^2}$

Zeros de $G(s)$: $s = -5$.
Pólos de $G(s)$: $s = -10, -10$.

<u>Tipo de resposta</u>: a função $G(s)$ apresenta dois pólos reais e iguais (um pólo duplo). Portanto, o sistema possui uma resposta criticamente amortecida ($\zeta = 1$). Dado que $G(s)$ tem um zero, é de prever que a resposta possua uma sobreelongação (?).

Considerando como entrada $R(s)$ e saída $Y(s)$, a função de transferência $G(s)$ é reescrita como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+5}{(s+10)^2}$$

A resposta ao degrau unitário é dada por:

$$R(s) = \frac{1}{s} \;\Rightarrow\; Y(s) = \frac{s+5}{s(s+10)^2}$$

Código MATLAB para cálculo da transformada inversa de Laplace de $Y(s)$

```
>> syms s
>> Y=(s+5)/(s*(s+10)*(s+10));
>> y=ilaplace(Y)

y =

1/20+(1/2*t-1/20)*exp(-10*t)
```

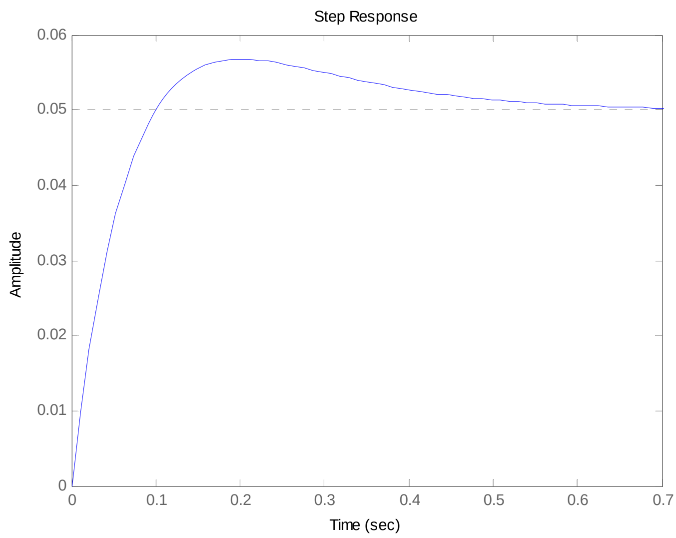
Logo, a expressão da resposta ao degrau unitário é da forma:

$$y(t) = \frac{1}{20} - \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{20}\right)e^{-10t}, \qquad t \geq 0$$

Código MATLAB para obtenção da resposta ao degrau unitário

```
>> num=[1 5];
>> den=conv([1 10],[1 10]);
>> G=tf(num,den)

Transfer function:
    s + 5
----------------
s^2 + 20 s + 100

>> step(G)
```

O gráfico de $y(t)$, obtido através do código MATLAB atrás descrito, está ilustrado na figura abaixo apresentada.



Como esperado, a resposta ao degrau unitário apresenta uma sobreelongação, a qual decai monoticamente até ao valor final, devido ao zero ($s = -5$) do sistema.

e) $G(s) = \dfrac{2s + 5}{s^2 + 2s + 5}$

Zeros de $G(s)$: $s = -2{,}5$.
Factorizando o denominador de $G(s)$, obtém-se:

$$s^2 + 2s + 5 = 0 \;\Rightarrow\; s = -1 \pm j2 .$$

Pólos de $G(s)$: $s = -1 \pm j2$.

Código MATLAB para obtenção dos pólos de $G(s)$

```
>> den=[1 2 5];
>> p=roots(den)

p =

  -1.0000 + 2.0000i
  -1.0000 - 2.0000i
```

Tipo de resposta: a função $G(s)$ apresenta dois pólos complexos conjugados. Portanto, o sistema possui uma resposta subamortecida ($0 < \zeta < 1$). Dado que o zero ($s = -2{,}5$) de $G(s)$ não é desprezável face aos pólos dominantes, a resposta deve possuir uma sobreelongação superior à que teria se não tivesse o zero.

Considerando como entrada $R(s)$ e saída $Y(s)$, a função de transferência $G(s)$ é reescrita como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s+5}{s^2+2s+5}$$

A resposta ao degrau unitário é dada por:

$$R(s) = \frac{1}{s} \;\Rightarrow\; Y(s) = \frac{2s+5}{s\left(s^2+2s+5\right)}$$

Código MATLAB para cálculo da transformada inversa de Laplace de $Y(s)$

```
>> syms s
>> Y=(2*s+5)/(s*(s^2+2*s+5));
>> y=ilaplace(Y)

y =

-exp(-t)*cos(2*t)+1/2*exp(-t)*sin(2*t)+1
```

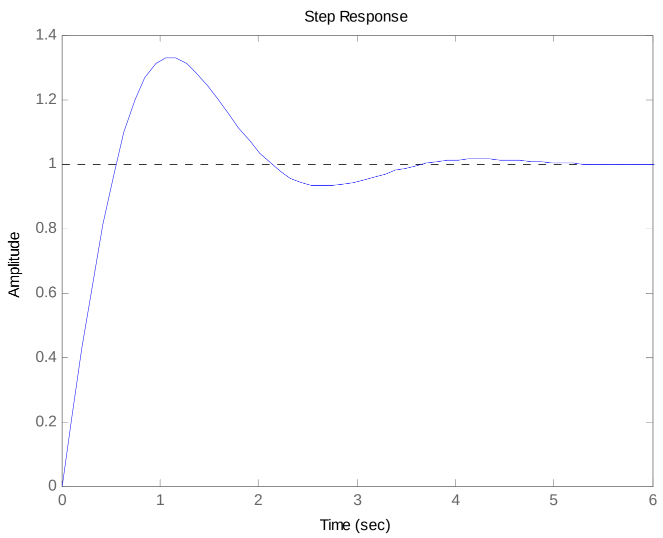
Logo, a expressão da resposta ao degrau unitário é da forma:

$$y(t) = 1 - e^{-t}\left[\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t)\right], \qquad t \geq 0$$

Código MATLAB para obtenção da resposta ao degrau unitário

```
>> num=[2 5];
>> den=[1 2 5];
>> G=tf(num,den)

Transfer function:
  2 s + 5
-------------
s^2 + 2 s + 5

>> step(G)
```

O gráfico de $y(t)$, obtido através do código MATLAB atrás descrito, está ilustrado na figura abaixo apresentada.

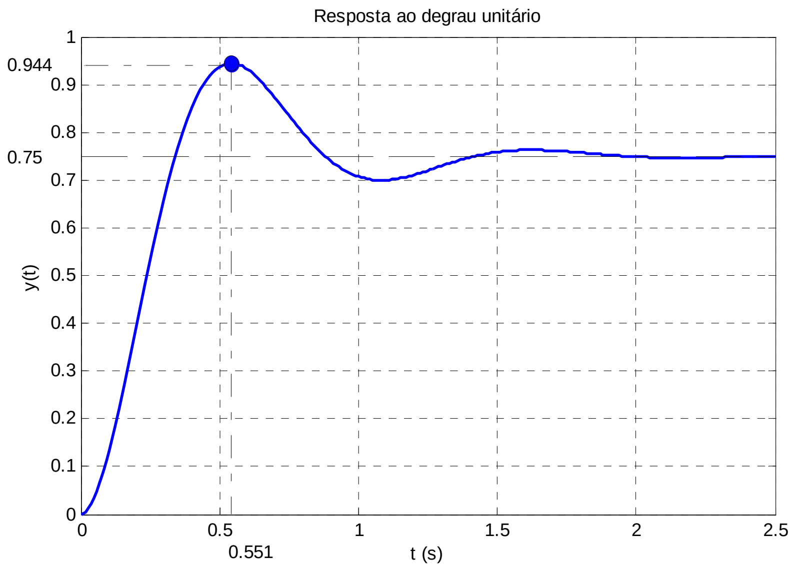


Como esperado, a resposta ao degrau unitário apresenta uma oscilação amortecida em torno do seu valor final, a qual é superior à obtida pelo sistema de segunda ordem na sua forma canónica, devido ao zero ($s = -2{,}5$) do sistema.

4. Considere um sistema de segunda ordem dado por uma função de transferência da forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

A resposta deste sistema a uma entrada em degrau unitário está representada na figura seguinte. Determine os valores dos parâmetros (K, ζ, ω_n) que caracterizam o sistema.



Do gráfico da resposta $y(t)$ retiram-se os seguintes parâmetros:

$t_p = 0{,}0551\,\text{s}$ – tempo de pico
$y(t_p) = 0{,}944$ – valor máximo da resposta
$y(\infty) = 0{,}75$ – valor final da resposta

A sobreelongação máxima M_p da resposta é:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} = \frac{0{,}944 - 0{,}75}{0{,}75} = 0{,}26 \Rightarrow M_p = 26\ \%$$

Da especificação de $M_p = 26$ % vem:

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow 0{,}26 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = 0{,}394$$

Da especificação de $t_p = 0{,}0551$ s, temos que:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow 0{,}0551 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0{,}394^2}} \Rightarrow \omega_n = 6{,}2\ \text{rad/s}$$

O valor de K é determinado a partir do valor final da resposta, $y(\infty)$. Assim, aplicando o Teorema do Valor Final à forma canónica da função de transferência $Y(s)/R(s)$ do sistema, obtém-se:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K}{\omega_n^2} = 0{,}75 \Rightarrow K = 0{,}75\omega_n^2$$

Substituindo o valor de ω_n atrás calculado, vem que $K = 28{,}83$.

5. Considere a seguinte forma canónica de um sistema de segunda ordem:

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Para cada par de especificações abaixo indicadas, localize os pólos do sistema e indique a respectiva função de transferência $G(s)$.

a) $M_p = 30\,\%,\ t_s = 0{,}05\,\text{s}$

Da especificação de M_p vem:

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow 0{,}3 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = 0{,}358$$

Da especificação de t_s, temos que:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \ \Rightarrow\ 0{,}05 = \frac{4}{0{,}358\omega_n} \ \Rightarrow\ \omega_n = 223{,}46\ \text{rad/s}$$

Assim, os pólos complexos conjugados da função de transferência $G(s)$ de segunda ordem são dados por:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -80 \pm j208{,}7$$

A função de transferência $G(s)$ toma a seguinte forma:

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{49934}{s^2+160s+49934}$$

b) $M_p = 17\,\%,\ t_p = 0{,}5\,\text{s}$

Da especificação de M_p vem:

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow 0{,}17 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = 0{,}491$$

Da especificação de t_p, temos que:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow\ 0{,}5 = \frac{4}{\omega_n\sqrt{1-0{,}491^2}} \ \Rightarrow\ \omega_n = 7{,}21\ \text{rad/s}$$

Assim, os pólos complexos conjugados da função de transferência $G(s)$ de segunda ordem são dados por:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -3{,}54 \pm j6{,}28$$

A função de transferência $G(s)$ toma a seguinte forma:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{52}{s^2 + 7{,}1s + 52}$$

c) $t_s = 7$ s, $t_p = 3$ s

Das especificações de t_s e t_p vem o seguinte sistema de equações em função dos valores desejados de (ζ, ω_n):

$$\begin{cases} t_s = \dfrac{4}{\zeta\omega_n} \\ t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = \dfrac{4}{\zeta\omega_n} \\ 3 = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \zeta = 0{,}479 \\ \omega_n = 1{,}193 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Assim, os pólos complexos conjugados da função de transferência $G(s)$ de segunda ordem são dados por:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -0{,}57 \pm j1{,}05$$

A função de transferência $G(s)$ toma a seguinte forma:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1{,}423}{s^2 + 1{,}143s + 1{,}423}$$

6. Obtenha os valores de ζ, ω_n, t_s, t_p, t_r e da sobreelongação máxima percentual (M_p) para cada um dos sistemas de segunda ordem (forma canónica) abaixo apresentados, quando sujeitos a uma entrada em degrau unitário.

a) $G(s) = \dfrac{120}{s^2 + 12s + 120}$ (i)

A forma canónica de um sistema de segunda ordem é:

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2} \quad \text{(ii)}$$

Comparando o denominador das duas funções de transferência, (i) e (ii), retiram-se os seguintes valores de (ζ, ω_n):

$$\begin{cases} 12 = 2\zeta\omega_n \\ 120 = \omega_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \zeta = 0{,}548 \\ \omega_n = 10{,}95 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Os valores de t_s, t_p, t_r e de M_p são dados respectivamente por:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0{,}666 \text{ s}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}343 \text{ s}$$

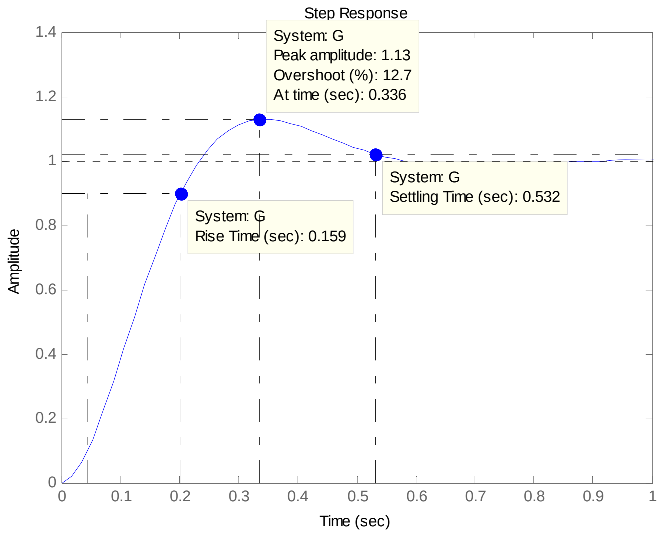
$$t_r = \frac{\pi-\cos^{-1}(\zeta)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}2348 \text{ s}$$

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}1277 = 12{,}77 \text{ \%}$$

Código MATLAB para obtenção da resposta ao degrau unitário

```
num=120;
den=[1 12 120];
G=tf(num,den)
step(G)
```

O gráfico da resposta ao degrau unitário, obtido através do código MATLAB atrás descrito, está ilustrado na figura abaixo apresentada.



A partir do gráfico, verifica-se que os valores das especificações calculadas analiticamente são consistentes com os valores obtidos da curva de resposta ao degrau unitário.

Nota 1:

Para retirar as especificações temporais do gráfico, faça o seguinte:

i. Clique com o botão direito do rato sobre a figura e escolha a opção "Characteristics";
ii. Das opções que lhe surgem, seleccione a pretendida: "Peak response", "Settling Time", "Rise Time" ou "Steady State";
iii. Repita o passo ii) até obter todas as especificações desejadas.

Nota 2: A expressão para o cálculo do *tempo de subida* t_r usa um critério de tempo compreendido entre 0–100 % do valor final, enquanto o valor obtido a partir do método anterior (Nota 1) utiliza um critério de 10–90 % do valor final.

b) $G(s) = \dfrac{1000}{s^2 + 20s + 1000}$ (i)

A forma canónica de um sistema de segunda ordem é:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{(ii)}$$

Comparando o denominador das duas funções de transferência, (i) e (ii), retiram-se os seguintes valores de (ζ, ω_n):

$$\begin{cases} 20 = 2\zeta\omega_n \\ 1000 = \omega_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \zeta = 0{,}316 \\ \omega_n = 31{,}62 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Os valores de t_s, t_p, t_r e de M_p são dados respectivamente por:

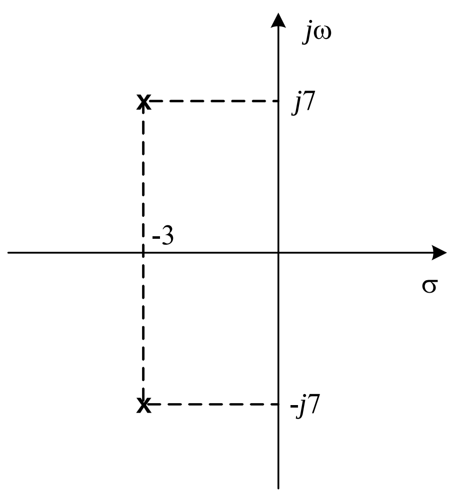
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0{,}4 \text{ s}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}105 \text{ s}$$

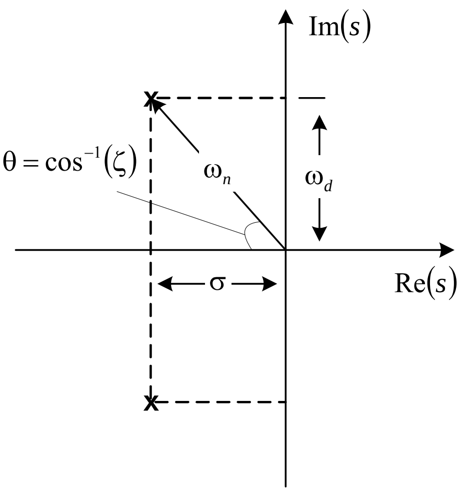
$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}(\zeta)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}063 \text{ s}$$

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}3512 = 35{,}12 \text{ \%}$$

c)



Da representação dos pólos no plano-s de um sistema de segunda ordem na forma canónica estabelecem-se as seguintes relações, conforme mostra o gráfico a seguir apresentado.



Comparando esta representação com a figura atrás fornecida, obtêm-se os seguintes parâmetros:

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\sigma}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{7}{3}\right) = 1{,}1659 \;\; \Rightarrow \;\; \zeta = \cos(\theta) = 0{,}394$$

$$\omega_n = \sqrt{\omega_d^2 + \sigma^2} = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7{,}616 \text{ rad/s}$$

Os valores de t_s, t_p, t_r e de M_p são dados respectivamente por:

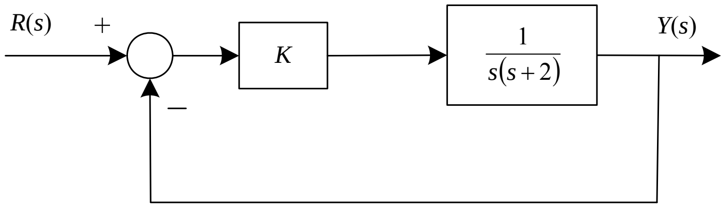
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 1{,}333 \text{ s}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}449 \text{ s}$$

$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}(\zeta)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}2823 \text{ s}$$

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}2601 = 26 \text{ \%}$$

7. Para o sistema de realimentação unitária apresentado na figura seguinte, determine o ganho K (do controlador proporcional) de forma que a saída $y(t)$ tenha uma sobreelongação máxima de $M_p \leq 10$ % em resposta a uma entrada em degrau unitário.



A função de transferência em malha fechada do sistema é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 2s + K} \quad \text{(i)}$$

Da especificação de M_p = 10 % vem:

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow 0{,}1 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = 0{,}591$$

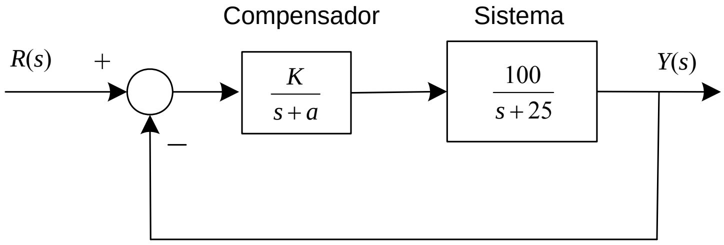
Comparando (i) com a forma canónica de um sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

obtêm-se as seguintes relações:

$$\begin{cases} 2 = 2\zeta\omega_n \\ K = \omega_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = 1{,}692 \text{ rad/s} \\ - \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} - \\ K = 2{,}86 \end{cases}$$

8. Considere o sistema de realimentação unitária apresentado na figura seguinte. Pretende-se obter o ganho K e a localização do pólo do compensador de forma que a resposta em malha fechada do sistema a uma entrada em degrau unitário possua uma sobreelongação máxima de $M_p \leq 25\,\%$ e um tempo de estabelecimento de $t_s \leq 0{,}1$ s.



a) Esboce a região do plano-s onde ambas as especificações são satisfeitas.

Da especificação de M_p = 25 % vem:

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow 0{,}25 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = 0{,}4$$

Assim, dado que $M_p \leq 0{,}25 \Rightarrow \zeta \geq 0{,}4$, ou seja:

$$\theta = \cos^{-1}(\zeta) \leq 66{,}4^{\circ} \quad \text{(i)}$$

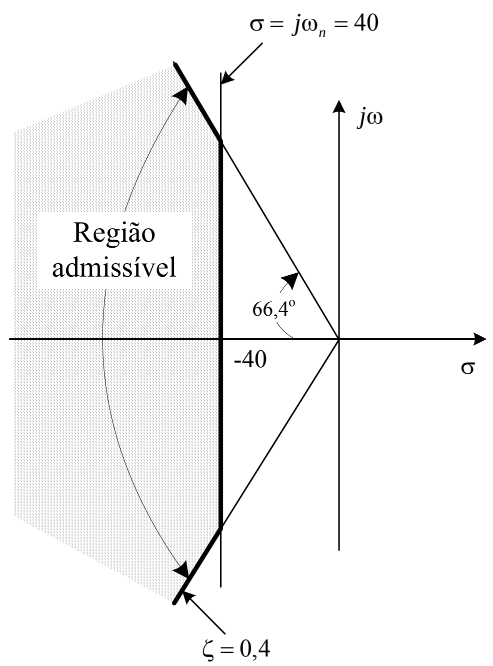
Da especificação de t_s = 0,1 s temos que:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow \ \sigma = \zeta\omega_n = \frac{4}{t_s} = 40$$

Logo,

$$t_s \leq 0{,}1 \Rightarrow \sigma \geq 40 \quad \text{(ii)}$$

A região do plano-*s* onde ambas as especificações, (i) e (ii), são satisfeitas, está ilustrada no gráfico abaixo apresentado.



b) Determine os valores de (*K*, *a*) do sistema de forma que as especificações sejam cumpridas.

A função de transferência em malha fechada do sistema é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100K}{s^2 + (25 + a)s + 25a + 100K} \quad \text{(i)}$$

Da especificação de M_p = 25 % vem:

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow 0{,}25 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = 0{,}4$$

Da especificação de t_s = 0,1 s temos que:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow\ 0{,}1 = \frac{4}{0{,}4\omega_n}\ \Rightarrow\ \omega_n = 100 \text{ rad/s}$$

Comparando (i) com a forma canónica de um sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

obtêm-se as seguintes relações:

$$\begin{cases} 25 + a = 2\zeta\omega_n \\ 25a + 100K = \omega_n^2 \end{cases}$$

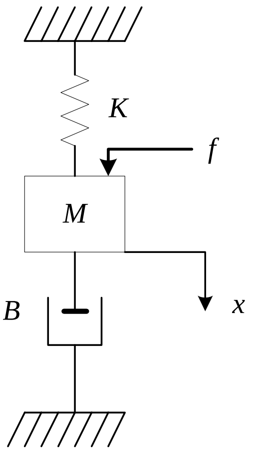
Da primeira relação retira-se o valor do pólo do compensador, dado por:

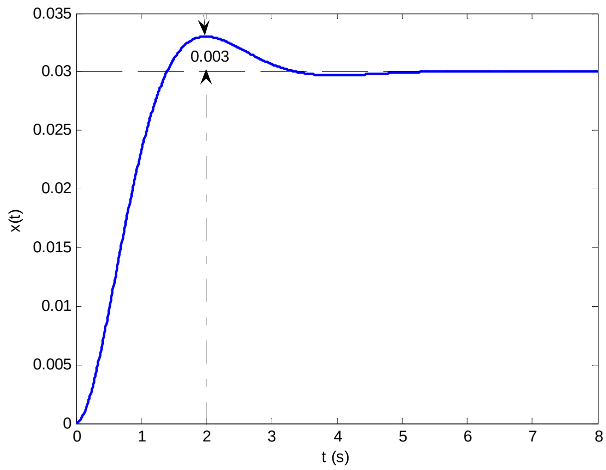
$$25 + a = 2\zeta\omega_n \ \Rightarrow\ a = 2\zeta\omega_n - 25 = 55$$

O valor do ganho K do compensador é obtido da segunda relação como:

$$25a + 100K = \omega_n^2 \ \Rightarrow\ K = \frac{\omega_n^2 - 25a}{100} = 86{,}25$$

9. Considere o sistema mecânico de translacção representado na figura seguinte. Ao sistema é aplicado um degrau de força com amplitude de f = 10 N. A variação do deslocamento $x(t)$ da saída está ilustrado no gráfico da direita. Determine os valores dos parâmetros M, B e K do sistema.





A função de transferência do sistema mecânico de translacção é dada por:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} = \frac{1/M}{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}} \quad \text{(i)}$$

Para uma entrada de f = 10 N, $F(s) = \frac{10}{s}$. Logo,

$$X(s) = \frac{10/M}{s\left(s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}\right)}$$

Aplicando o Teorema do Valor Final à função anterior, chega-se ao valor final do deslocamento $x(t)$, $x(\infty)$. Este é dado por:

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s) = \lim_{s \to 0} \frac{10/M}{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}} = \frac{10}{K}$$

Retirando do gráfico o valor final de $x(\infty) = 0{,}03$, vem:

$$\frac{10}{K} = 0{,}03 \;\Rightarrow\; K = 333{,}33 \text{ N/m}$$

Do gráfico de $x(t)$ retira-se uma sobreelongação máxima de:

$$M_p = \frac{x(t_p) - x(\infty)}{x(\infty)} = \frac{0{,}003}{0{,}03} = 0{,}1 \;\Rightarrow M_p = 10\ \%$$

Da especificação de M_p vem:

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow 0{,}1 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = 0{,}591$$

Do gráfico retira-se o tempo de pico $t_p = 2$ s. Da especificação de t_p, temos que:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow 2 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0{,}591^2}} \Rightarrow \omega_n = 1{,}95 \text{ rad/s}$$

Comparando (i) com a forma canónica de um sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

obtêm-se as seguintes relações:

$$\begin{cases} \dfrac{B}{M} = 2\zeta\omega_n \\ \dfrac{K}{M} = \omega_n^2 \end{cases} \quad \text{(ii)}$$

Da segunda relação de (ii) vem:

$$\frac{K}{M} = \omega_n^2 \Rightarrow M = \frac{K}{\omega_n^2} = 87{,}66 \ \text{ kg}$$

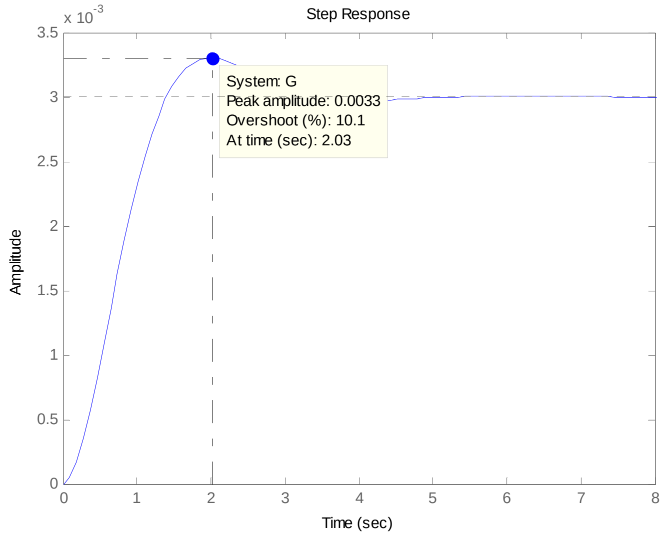
O valor de B é obtido da primeira relação de (ii) como:

$$\frac{B}{M} = 2\zeta\omega_n \Rightarrow B = 2\zeta\omega_n M = 201{,}71 \ \text{ N s/m}$$

Código MATLAB para obtenção da resposta ao degrau unitário

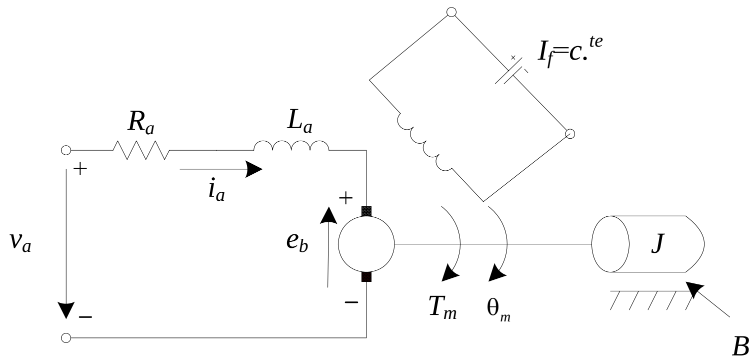
```
K=333.33;
M=87.66;
B=201.71;

num=1;
den=[M B K];
G=tf(num,den)
step(G)
```

O gráfico de $x(t)$, obtido através do código MATLAB atrás descrito, está ilustrado na figura abaixo apresentada.



Conforme se pode verificar através do gráfico, as especificações desejadas são cumpridas.

10. Considere o motor DC controlado pela armadura representado na figura seguinte. Considere que a inductância L_a é desprezável. Isto é normalmente possível pois a resposta do circuito eléctrico é muito mais rápida que a do movimento do rotor, o que se traduz numa alteração (quase) instantânea da corrente quando é aplicada uma tensão ao circuito.



Assuma os seguintes valores para os parâmetros:

$$J = 0{,}01 \text{ kg m}^2$$
$$B = 0{,}001 \text{ N m s}$$
$$K_e = 0{,}02 \text{ V s}$$
$$K_t = 1 \text{ N m/A}$$
$$R_a = 10\,\Omega$$

a) Determine a função de transferência entre a tensão aplicada v_a e a velocidade do motor $\omega_m = \dot{\theta}_m$.

As equações dinâmicas que descrevem o sistema já foram estabelecidas no Capítulo sobre "Modelação de Sistemas", pelo que não serão aqui repetidas. De acordo com as condições do problema, a dinâmica do motor DC pode ser combinada através da seguinte equação diferencial:

$$J_m \dot{\omega}_m + \left(B + \frac{K_t K_e}{R_a} \right) \omega_m = \frac{K_t}{R_a} v_a$$

Aplicando a transformada de Laplace vem:

$$J_m \omega_m(s) s + \left(B + \frac{K_t K_e}{R_a} \right) \omega_m(s) = \frac{K_t}{R_a} V_a(s)$$

Assim, a função de transferência entre $V_a(s)$ e $\omega_m(s)$ é dada pela expressão:

$$\frac{\omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\dfrac{K_t}{R_a J_m}}{s + \dfrac{B}{J_m} + \dfrac{K_t K_e}{R_a J_m}}$$

Substituindo os valores dos parâmetros do sistema, temos que:

$$\frac{\omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{10}{s + 0{,}3} \quad \text{(i)}$$

b) Calcule a velocidade em regime permanente do motor após a aplicação de uma tensão de $v_a = 10\,\text{V}$.

Para uma entrada de $v_a = 10\,\text{V}$, $V_a(s) = \dfrac{10}{s}$. Logo,

$$\omega_m(s) = \frac{100}{s(s + 0{,}3)}$$

Aplicando o Teorema do Valor Final, chega-se ao seguinte valor para a velocidade em regime permanente:

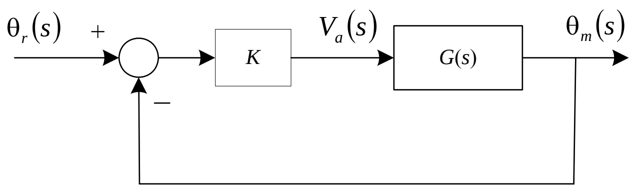
$$\omega_m(\infty) = \lim_{s \to 0} s\omega_m(s) = \lim_{s \to 0} \frac{100}{s + 0{,}3} = 333{,}3\ \text{rad/s}$$

c) Determine a função de transferência $G(s)$ entre a tensão aplicada v_a e a posição angular do veio θ_m.

Sabendo que $\omega_m(s) = s\theta(s)$, e substituindo em (i), vem:

$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{10}{s(s+0{,}3)}$$

d) Suponha que é adicionado ao sistema uma realimentação da posição angular, tal como se ilustra na figura abaixo, em que K é o ganho de realimentação. Encontre a função de transferência do agora sistema servo de posição que relaciona θ_r e θ_m.



A função de transferência entre $\theta_r(s)$ e $\theta_m(s)$ é dada por:

$$\frac{\theta_m(s)}{\theta_r(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

Substituindo a função $G(s)$, determinada na alínea c), na expressão anterior, temos que:

$$\frac{\theta_m(s)}{\theta_r(s)} = \frac{10K}{s^2+0{,}3s+10K} \quad \text{(ii)}$$

e) Qual é o valor máximo de K que se pode utilizar para se obter uma sobreelongação máxima de $M_p \leq 20\,\%$?

Da especificação de $M_p = 20\ \%$ vem:

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow 0.2 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = 0{,}456$$

A forma canónica de um sistema de segunda ordem é:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \quad \text{(iii)}$$

Comparando as funções de transferência (ii) e (iii), e substituindo o valor de $\zeta = 0{,}456$, retiram-se as seguintes equações e valores para (K, ω_n):

$$\begin{cases} 10K = \omega_n^2 \\ 0{,}3 = 2\zeta\omega_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = 0{,}329 \text{ rad/s} \\ K = 0{,}01 \end{cases}$$

Como $M_p \leq 20\,\% \Rightarrow K \leq 0{,}01$.

f) Quais são os valores de K para os quais se obtém um tempo de subida $t_r < 4$ s?

Da especificação de $t_r < 4$ s vem a equação:

$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}(\zeta)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \omega_n > \frac{\pi - \cos^{-1}(\zeta)}{4\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Mantendo a especificação de $M_p = 20\,\%$ da alínea e), ou seja, um valor de $\zeta = 0{,}456$, obtém-se $\omega_n > 0{,}5743$ rad/s. Da relação $10K = \omega_n^2$ (retirada de (ii)) vem que $K > 0{,}03$.

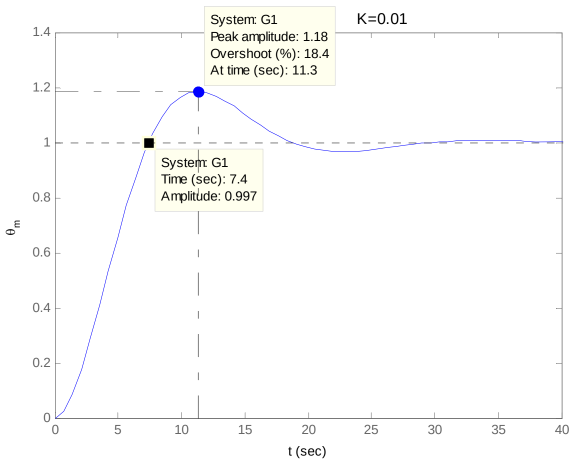
g) Utilize o MATLAB para obter a resposta ao degrau do sistema servo de posição para os valores do ganho de K = 0,01, 0,02 e 0,04. Calcule a sobreelongação máxima M_p e o tempo de subida t_r para cada um dos casos referidos. Verifique se os gráficos estão consistentes com os valores calculados nas alíneas e) e f).

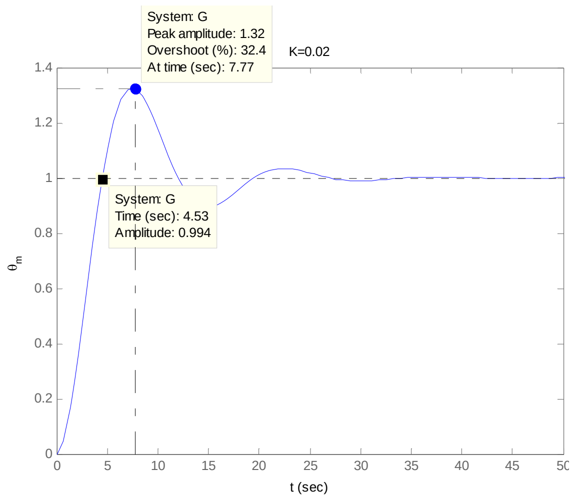
Código MATLAB para obtenção das respostas ao degrau unitário

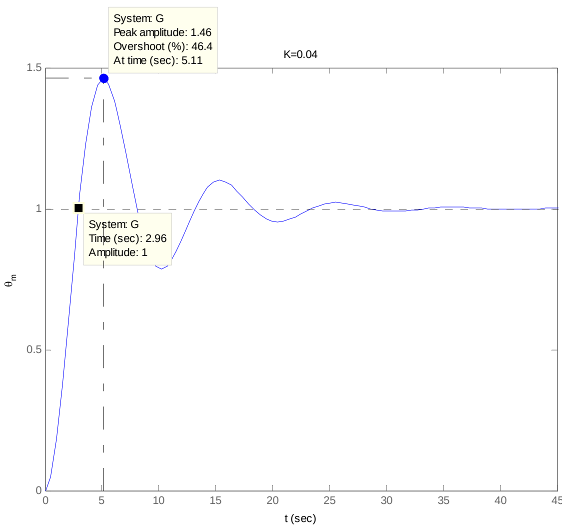
```
% Respostas ao degrau unitário
% K=0.01
K=0.01;
G=tf(10*K,[1 0.3 10*K])
figure
step(G)
title('K=0.01')
xlabel('t')
ylabel('\theta_m')

% K=0.02
K=0.02;
G=tf(10*K,[1 0.3 10*K])
figure
step(G)
title('K=0.02')
xlabel('t')
```

```
ylabel('\theta_m')

% K=0.04
K=0.04;
G=tf(10*K,[1 0.3 10*K])
figure
step(G)
title('K=0.04')
xlabel('t')
ylabel('\theta_m')
```

Os gráficos das respostas ao degrau unitário, obtidos através do código MATLAB atrás descrito, estão ilustrados nas figuras abaixo apresentadas.







Analisando as figuras anteriores, verifica-se que os resultados obtidos estão consistentes com os valores calculados nas alíneas e) e f). Isto é, para $K < 0{,}01$ a sobreelengação máxima é inferior a 20% e para $K > 0{,}03$ o tempo de subida é inferior a 4 s.

11. Considere um sistema de realimentação unitária com a seguinte função de transferência em malha aberta:

$$G(s) = \frac{s+2}{s(s+4)}$$

Determine o sistema Tipo, as constantes de erro de posição, velocidade e aceleração (K_p, K_v, K_a) e o erro em regime permanente (e_{ss}) do sistema para as entradas em degrau, rampa e parábola unitárias.

Sistema é do Tipo 1, pois possui um único pólo na origem.

As constantes de erro de posição, velocidade e aceleração (K_p, K_v, K_a) são dadas respectivamente por:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+2}{s(s+4)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+2}{s+4} = \frac{1}{2}$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2\,G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(s+2)}{s+4} = 0$$

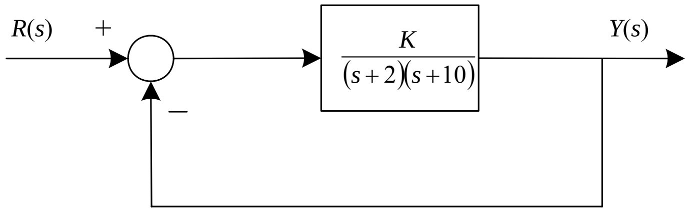
Os correspondentes erros em regime permanente para as entradas em degrau, rampa e parábola unitárias tomam os seguintes valores:

$$e_{ss}(\text{degrau}) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

$$e_{ss}(\text{rampa}) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$e_{ss}(\text{parábola}) = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

12. Considere o sistema de realimentação unitária representado na figura seguinte. Determine o valor de K de forma que o sistema apresente um erro em regime permanente de 10 %.



O sistema é do Tipo 0. Assim, o erro em regime permanente refere-se a uma entrada em degrau unitário. Logo, a constante de erro de posição é determinada como:

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{Y(s)}{R(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{K}{(s+2)(s+10)} = \frac{K}{20}$$

Do erro erro em regime permanente $e_{ss} = 0{,}1$ vem:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{20}{20+K} = 0{,}1$$

Da equação anterior retira-se o valor de $K = 180$.

13. Um sistema de realimentação unitária possui uma função de transferência no ramo directo dada por :

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

a) Determine os valores de (K, a) que originam um erro em regime permanente de 1 % e uma sobreelongação máxima de 10 %.

A função de transferência em malha fechada do sistema (em que $R(s)$ é a entrada e $Y(s)$ a saída) é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^2 + as + K}$$

Da equação anterior retiram-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} K = \omega_n^2 \\ a = 2\zeta\omega_n \end{cases} \quad \text{(i)}$$

Da especificação de M_p = 10 % vem:

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow 0.1 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = 0{,}591 \quad \text{(ii)}$$

O sistema é do Tipo 1. Assim, o erro em regime permanente refere-se a uma entrada em rampa unitária. Logo, a constante de erro de velocidade é determinada como:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s+a} = \frac{K}{a}$$

O correspondente erro em regime permanente e_{ss} é dado por:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{a}{K} = 0{,}01 \Rightarrow a = 0{,}01K \quad \text{(iii)}$$

Rearranjando as equações (i), (ii) e (iii), chega-se ao seguinte sistema de equações em função dos valores de (K, a):

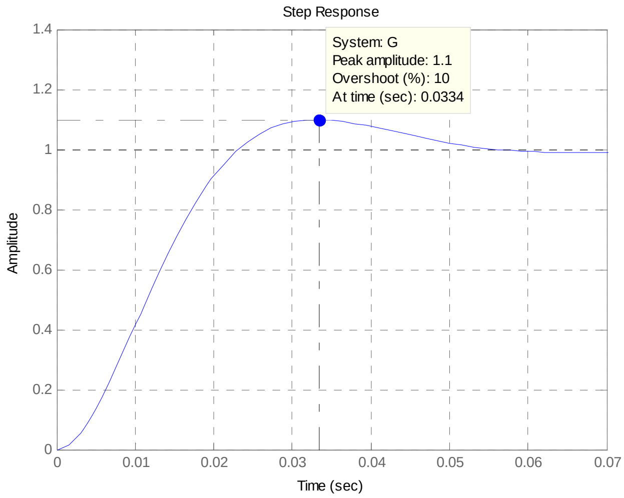
$$\begin{cases} a = 0{,}01K \\ 2\times 0{,}591\times\sqrt{K} = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 13971 \\ a = 139{,}7 \end{cases}$$

b) Utilize o MATLAB para obter as respostas ao degrau e rampa unitárias para os valores de (K, a) obtidos em a). Verifique se os gráficos estão consistentes com as especificações pretendidas em a).

Código MATLAB para obtenção da resposta ao degrau unitário

```
>> K=13971;
>> a=139.7;
>> G=tf(K,[1 a K])

Transfer function:
       13971
---------------------
s^2 + 139.7 s + 13971

>> step(G)
>> grid
```

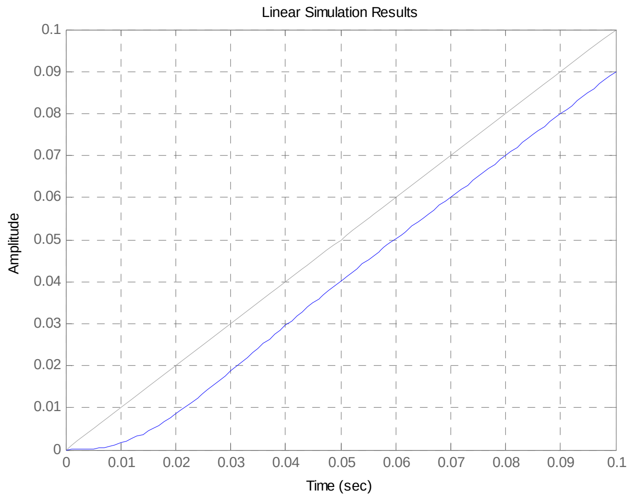
O gráfico da resposta ao degrau unitário, obtido através do código MATLAB atrás descrito, está ilustrado na figura abaixo apresentada.



Código MATLAB para obtenção da resposta à rampa unitária

```
>> K=13971;
>> a=139.7;
>> G=tf(K,[1 a K])

Transfer function:
       13971
---------------------
s^2 + 139.7 s + 13971

>> t=0:0.001:0.1;
>> r=t;
>> lsim(G,r,t)
>> grid
```

O gráfico da resposta à rampa unitária, obtido através do código MATLAB atrás descrito, está ilustrado na figura abaixo apresentada.



Os gráficos anteriores mostram que as especificações desejadas são cumpridas.