

TESIS: **Teoria dos Sistemas**



Controladores PID

Controladores PID

1. Formas de controlo de sistemas realimentados
 1. controlo proporcional
 2. controlo proporcional e integral
 1. saturação por efeito da acção integral
 3. acção diferencial
2. Sintonia do controlador
 1. métodos em malha aberta
 2. métodos em malha fechada
3. Controlo em cascata e por “Feedforward”
 1. controlo em cascata
 2. controlo por “Feedforward”

Controladores PID

1. Formas de controlo de sistemas realimentados
 1. controlo proporcional
 2. controlo proporcional e integral
 1. saturação por efeito da acção integral
 3. acção diferencial
2. Sintonia do controlador
 1. métodos em malha aberta
 2. métodos em malha fechada
3. Controlo em cascata e por “Feedforward”
 1. controlo em cascata
 2. controlo por “Feedforward”

Controladores PID



- Formas de controlo de sistemas realimentados
 - existem três acções básicas de controlo
 - acção proporcional
 - acção integral
 - acção diferencial ou derivativa

Controladores PID

- Formas de controlo de sistemas realimentados
 - estas três acções de controlo, quando juntas, levam ao controlador **PID**, de acordo com a expressão

$$\begin{array}{c} e(t) \rightarrow \boxed{\text{PID}} \rightarrow m(t) \end{array} \quad m(t) = K \left(\textcolor{red}{e} + \frac{1}{T_i} \int_0^t \textcolor{green}{e(t')} dt' + T_d \frac{d\textcolor{blue}{e}}{dt} \right)$$

onde K , T_i , T_d são parâmetros a ajustar

- nota: $e = r - c$, se $r = \text{constante}$, vem

$$m(t) = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t') dt' - T_d \frac{dc}{dt} \right)$$

Controladores PID

1. Formas de controlo de sistemas realimentados
 1. controlo proporcional
 2. controlo proporcional e integral
 1. saturação por efeito da acção integral
 3. acção diferencial
2. Sintonia do controlador
 1. métodos em malha aberta
 2. métodos em malha fechada
3. Controlo em cascata e por “Feedforward”
 1. controlo em cascata
 2. controlo por “Feedforward”

Controladores PID

- Controlo proporcional

$$m(t) = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t') dt' + T_d \frac{de}{dt} \right)$$

- se $T_d = 0$ e $T_i = \infty$ tem-se um controlador proporcional

$$m(t) = Ke(t)$$

Controladores PID

- Controlo proporcional
 - viu-se anteriormente que este tipo de controlador é incapaz de eliminar e_{ss} de sistemas tipo zero, para uma referência em degrau, $R(s) = 1/s$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K}$$

- para diminuir e_{ss} é necessário aumentar K
 - em geral, esta estratégia origina um aumento do tempo de estabelecimento e, eventualmente, a instabilidade

Controladores PID

1. Formas de controlo de sistemas realimentados
 1. controlo proporcional
 2. controlo proporcional e integral
 1. saturação por efeito da acção integral
 3. acção diferencial
2. Sintonia do controlador
 1. métodos em malha aberta
 2. métodos em malha fechada
3. Controlo em cascata e por “Feedforward”
 1. controlo em cascata
 2. controlo por “Feedforward”

Controladores PID

- Controlo proporcional e integral

$$m(t) = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t') dt' + T_d \frac{de}{dt} \right)$$

- se $T_d = 0$ tem-se um controlador PI

$$m(t) = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t') dt' \right)$$

Controladores PID

- Controlo proporcional e integral
 - acção integral produz uma função de transferência com um pólo na origem
 - erro em regime permanente, ao degrau de entrada, é nulo desde que o sistema seja estável

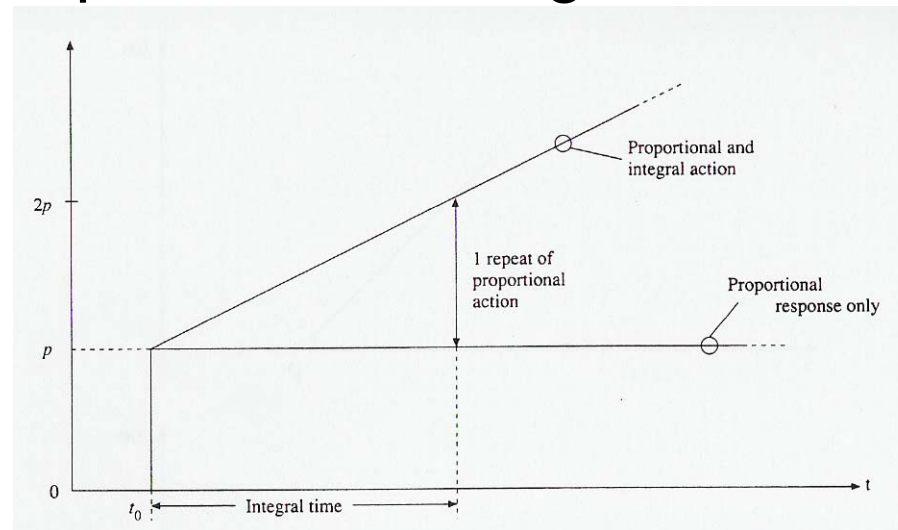
$$m(t) = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t') dt' \right)$$

Controladores PID

- Controlo proporcional e integral
 - parâmetro T_i (tempo integral) quantifica a razão de variação da saída do controlador PI quando a entrada é um degrau
 - tempo necessário para que a contribuição da parte integral seja igual à contribuição da parte proporcional

Controladores PID

- Controlo proporcional e integral



- muitos fabricantes exprimem T_i nas unidades min/repetições ou repetições/min
- tipicamente
 - $0,02 \text{ repetições/min} \leq T_i \leq 50 \text{ repetições/min}$

Controladores PID

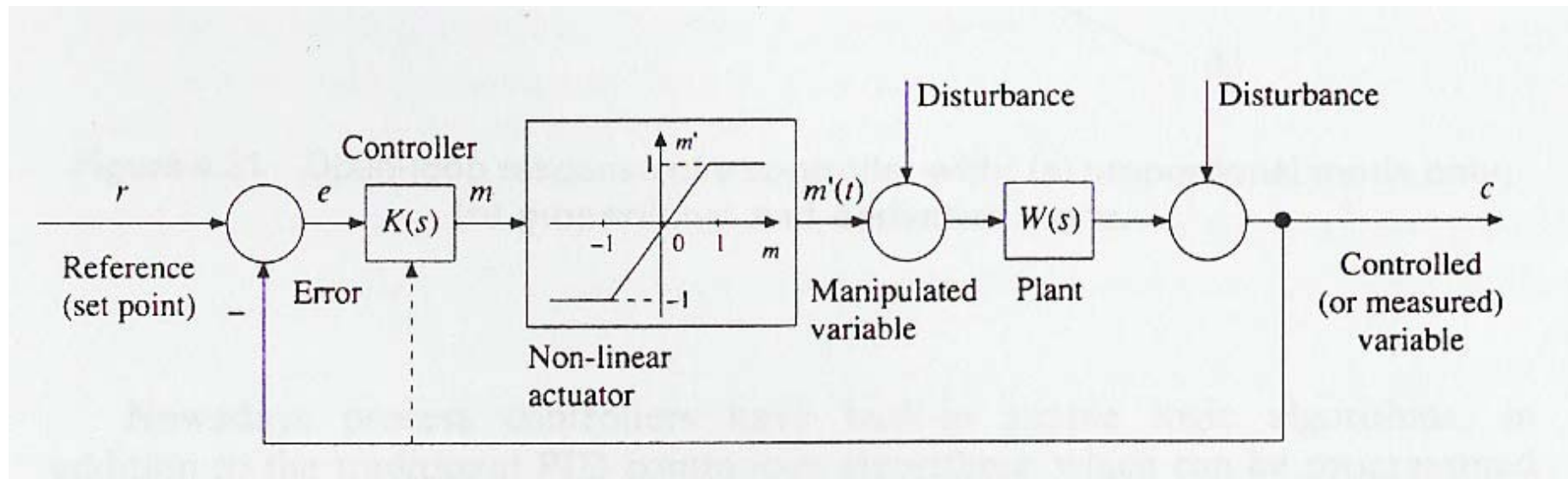
1. Formas de controlo de sistemas realimentados
 1. controlo proporcional
 2. controlo proporcional e integral
 1. saturação por efeito da acção integral
 3. acção diferencial
2. Sintonia do controlador
 1. métodos em malha aberta
 2. métodos em malha fechada
3. Controlo em cascata e por “Feedforward”
 1. controlo em cascata
 2. controlo por “Feedforward”

Controladores PID

- Saturação por efeito da acção integral
 - os actuadores têm um intervalo limitado de funcionamento linear e a maioria exhibe uma característica entrada-saída não-linear do tipo “saturação”
 - assim, quando o controlador produz valores de saída elevados, a adopção de modelos lineares pode conduzir a conclusões erradas
 - este fenómeno é particularmente importante quando ocorrem variações significativas da referência ou da carga (perturbações)
 - em ambos os casos, existe um erro $e(t)$ elevado que pode conduzir à saturação do actuador

Controladores PID

- Saturação por efeito da acção integral



Controladores PID

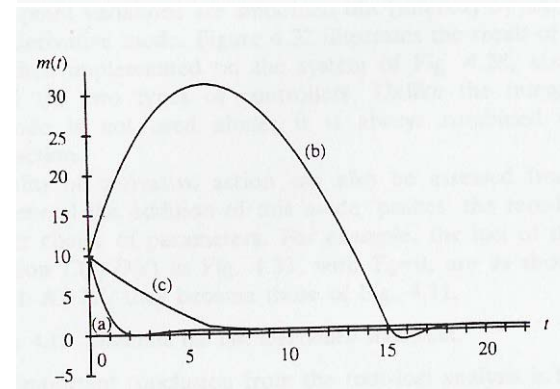
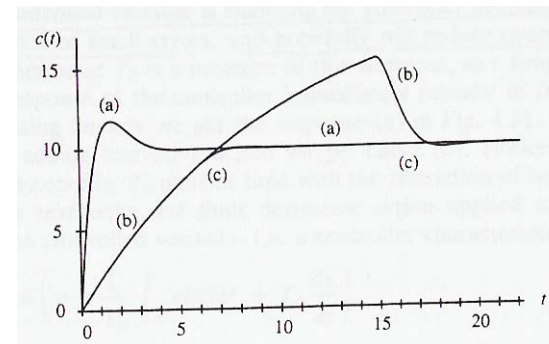
- Saturação por efeito da acção integral
 - no caso de ocorrer saturação, a variável de saída $c(t)$ demora mais tempo a atingir o valor desejado
 - a acção integral tem mais tempo para integrar o erro e aumenta até um valor elevado (*integral windup*) até que o erro muda de sinal e, então, começa a decrescer
 - devido ao elevado valor atingido, a saída do controlador demora mais tempo a mudar de sinal e, consequentemente, até isso se verificar a variável de saída $c(t)$ continua a crescer
 - como consequência ocorre uma sobreelongação elevada

Controladores PID

- Saturação por efeito da acção integral
 - resposta do sistema para um degrau de entrada $r(t)$ com amplitude 10

$$K(s) = 1 + \frac{1}{s}$$

$$W(s) = \frac{2}{s + 0,1}$$



Controladores PID



- Saturação por efeito da acção integral
 - se o controlador parar a integração quando ocorre a saturação (*batch switch*), o desempenho vem melhorado

Controladores PID

1. Formas de controlo de sistemas realimentados
 1. controlo proporcional
 2. controlo proporcional e integral
 1. saturação por efeito da acção integral
 3. acção diferencial
2. Sintonia do controlador
 1. métodos em malha aberta
 2. métodos em malha fechada
3. Controlo em cascata e por “Feedforward”
 1. controlo em cascata
 2. controlo por “Feedforward”

Controladores PID

- Acção diferencial
 - quando $T_d \neq 0$ e $T_i \neq \infty$ obtém-se um controlador PID

$$m(t) = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t') dt' + T_d \frac{de}{dt} \right)$$

Controladores PID

- Acção diferencial
 - inclusão da parcela $T_d \cdot dc/dt$ (ou $T_d \cdot de/dt$) ultrapassa as limitações das acções P e I
 - requerem, respectivamente, um erro elevado e um intervalo de tempo elevado, para produzir uma saída com valor apreciável
 - acção D responde à razão de variação da variável, possibilitando uma reacção mais rápida do controlador, mesmo para erros pequenos
 - parâmetro T_d é uma medida da capacidade de reacção

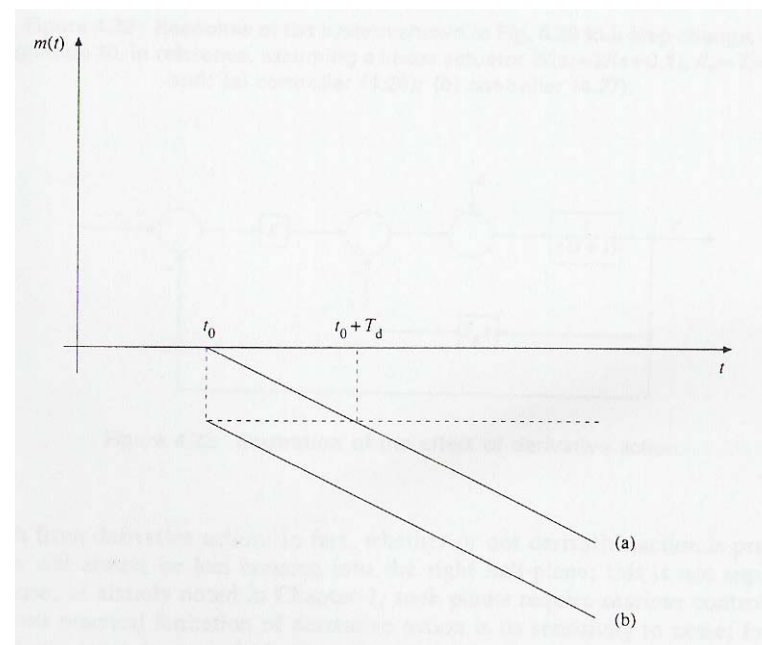
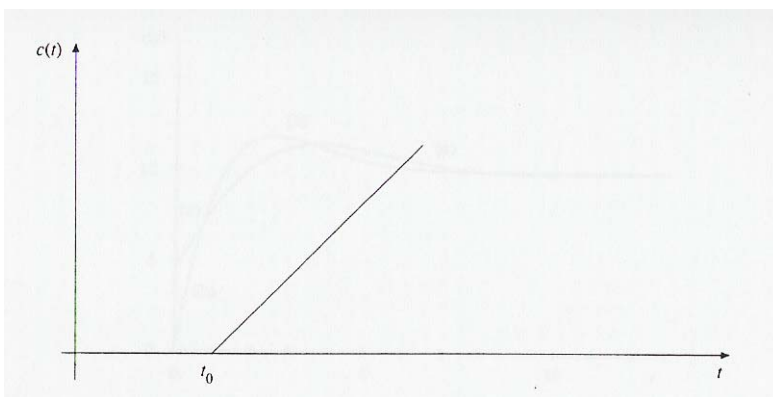
Controladores PID



- Acção diferencial
 - por exemplo, considerando $r = 0$ e $c(t)$ a variar linearmente, as acções P e PD dão origem aos gráficos seguintes

Controladores PID

- Acção diferencial



$$\left. \begin{aligned} r &= 0, & e &= r - c \\ m(t) &= K \left(e + T_d \frac{de}{dt} \right) \end{aligned} \right\} m(t) = -K \left(c + T_d \frac{dc}{dt} \right)$$

Controladores PID

- Acção diferencial
 - note-se que para $t \geq t_0$ a resposta da acção PD fica “avançada” de T_d unidades de tempo face à resposta da acção P
 - acção D pode ser implementada como $T_d \cdot de/dt$ ou como $-T_d \cdot dc/dt$
 - a adopção da variável de saída c evita que a saída do controlador “dê um salto” sempre que ocorre um degrau de variação na entrada
 - para sistemas com pólos/zeros no semi-plano esquerdo a acção D tende a estabilizar o sistema

Controladores PID

1. Formas de controlo de sistemas realimentados
 1. controlo proporcional
 2. controlo proporcional e integral
 1. saturação por efeito da acção integral
 3. acção diferencial
2. Sintonia do controlador
 1. métodos em malha aberta
 2. métodos em malha fechada
3. Controlo em cascata e por “Feedforward”
 1. controlo em cascata
 2. controlo por “Feedforward”

Controladores PID

- Sintonia do controlador
 - como seleccionar os valores para K , T_i e T_d , de forma a obter um desempenho satisfatório no controlo do sistema
 - para calcular os parâmetros é necessário um modelo matemático do sistema
 - identificação do sistema pode ser complexa e trabalhosa
 - problema simplificado se nos restringirmos a uma classe de modelos de ordem baixa

Controladores PID

- Sintonia do controlador
 - experiência demonstrou que os dois modelos seguintes são adequados para a maioria dos processos industriais

$$W_1(s) = \frac{K_p e^{-sT}}{s\tau + 1}$$

$$W_2(s) = \frac{K'_p e^{-sT}}{s}$$

Controladores PID

- Sintonia do controlador
 - uma técnica de sintonia consiste nas fases
 - um teste para estimar os parâmetros do modelo
 - um conjunto de fórmulas que relacionem os parâmetros do controlador (K , T_i , T_d) com o modelo
 - de forma a obter uma resposta com as características desejadas
 - técnicas de sintonia podem ser classificadas em
 - métodos de malha aberta
 - e métodos em malha fechada

Controladores PID

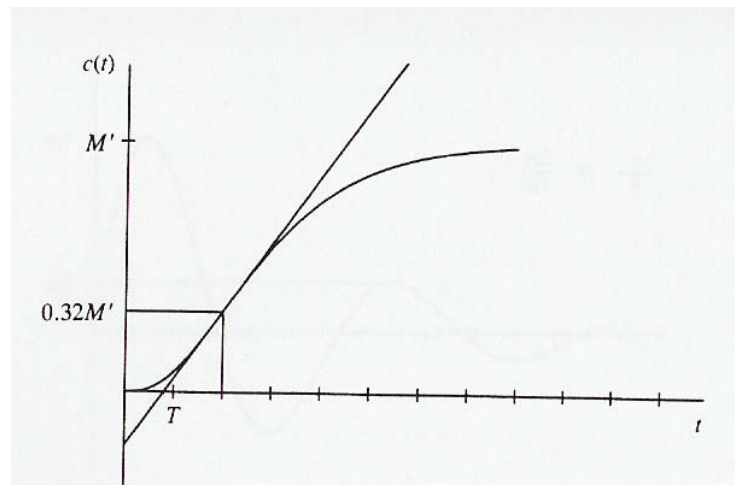
1. Formas de controlo de sistemas realimentados
 1. controlo proporcional
 2. controlo proporcional e integral
 1. saturação por efeito da acção integral
 3. acção diferencial
2. Sintonia do controlador
 1. métodos em malha aberta
 2. métodos em malha fechada
3. Controlo em cascata e por “Feedforward”
 1. controlo em cascata
 2. controlo por “Feedforward”

Controladores PID

- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Aberta
 - parâmetros $\{K_p, T, \tau\}$ ou $\{K'p, T\}$ estimados a partir da resposta $c(t)$ do sistema a uma entrada em degrau com amplitude M

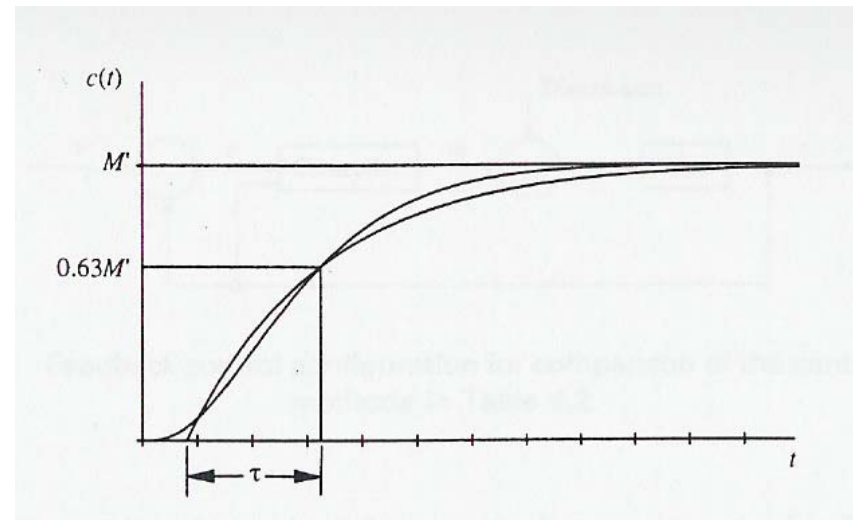
Controladores PID

- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Aberta
 - $W_1(s)$
 - $K_p = M'/M$
 - T obtém-se a partir do ponto de intersecção da recta tangente no ponto de declive máximo



Controladores PID

- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Aberta
 - $W_1(s)$
 - resposta de $Kp/(\tau s+1)$ a um degrau aplicado em $t = 0$, atinge 63,2% do valor final para $t = \tau$ então $\tau = t' - T$ onde $c(t') = 0,632M'$

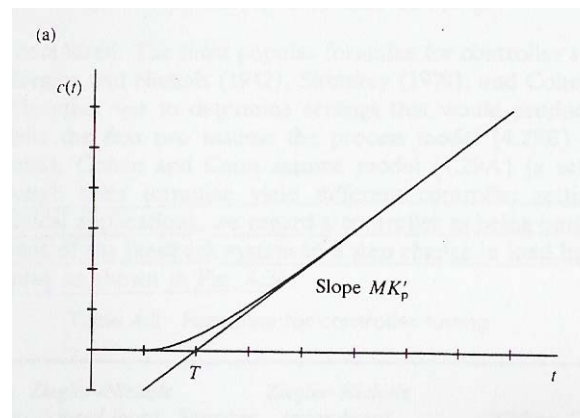


Controladores PID

- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Aberta

- $W_2(s)$

- resposta em regime permanente, a um degrau de entrada de amplitude M , apresenta um declive MK'_p
- ponto de intersecção da recta dá o valor de T



Controladores PID

1. Formas de controlo de sistemas realimentados
 1. controlo proporcional
 2. controlo proporcional e integral
 1. saturação por efeito da acção integral
 3. acção diferencial
2. Sintonia do controlador
 1. métodos em malha aberta
 2. métodos em malha fechada
3. Controlo em cascata e por “Feedforward”
 1. controlo em cascata
 2. controlo por “Feedforward”

Controladores PID

- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Fechada
 - com o anel de realimentação fechado e com as acções I e D anuladas (i.e., $T_d = 0$, $1/T_i = 0$) o ganho K é aumentado gradualmente até que a variável de saída oscile com amplitude constante
 - neste caso, tem-se o ganho final, K_u (*ultimate gain*) e o período final, P_u (*ultimate period*) de oscilação

Controladores PID

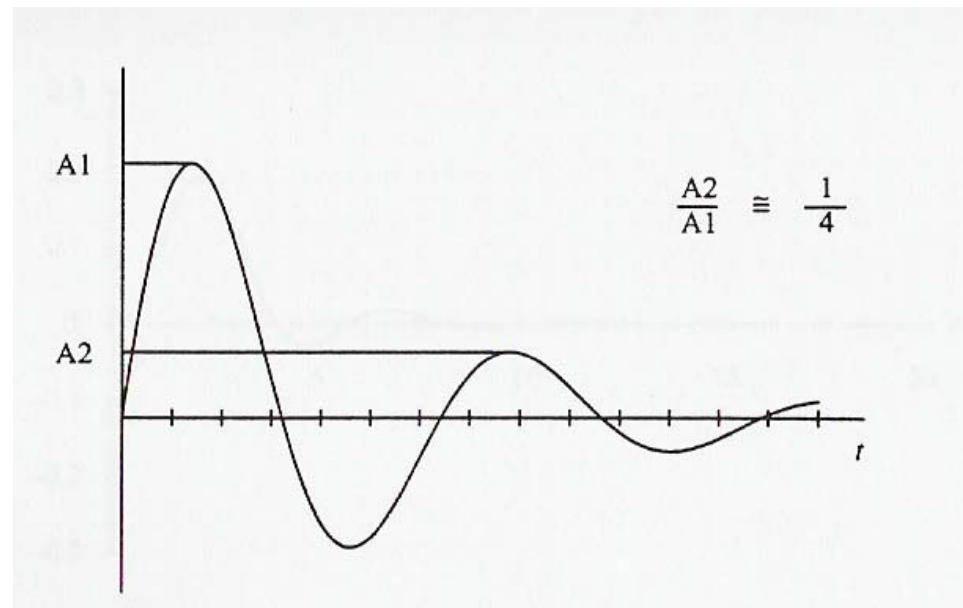
- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Fechada
 - este método é simples de aplicar mas muitos sistemas não toleram as oscilações, o que condiciona a sua aplicação
 - é também **importante** verificar que **não haja saturação** de um elemento do sistema, sob pena dos resultados não terem significado

Controladores PID

- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Fechada
 - fórmulas para o ajuste dos parâmetros do controlador dependem da resposta desejada para um degrau na carga ou um degrau na referência
 - fórmulas mais populares
 - as de Ziegler e Nichols, Shinskey, Cohen e Coon
 - o seu objectivo é determinar o conjunto de parâmetros que produzem uma razão de decaimento de um quarto

Controladores PID

- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Fechada



Controladores PID

- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Fechada
 - dois primeiros métodos (Ziegler e Nichols, Shinskey) consideram o modelo do sistema $W_2(s)$, enquanto o terceiro (Cohen e Coon) considera o modelo $W_1(s)$
 - em geral estas fórmulas originam valores distintos para os parâmetros $\{K, T_i, T_d\}$ e não produzem exactamente a resposta desejada
 - valores obtidos são uma primeira estimativa para um processo de ajuste com várias iterações

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador

Controller Setting		Ziegler-Nichols (closed-loop)	Shinskey	Ziegler-Nichols (open-loop)	Cohen-Coon
P	K	$0.5 K_u$	$0.5 K_u$	$\frac{1}{T R_r}$	$\frac{\tau}{TK_p} \left(1 + 0.33 \frac{T}{\tau} \right)$
PI	K	$0.45 K_u$	$0.5 K_u$	$\frac{0.9}{T R_r}$	$\frac{\tau}{TK_p} \left(0.9 + 0.082 \frac{T}{\tau} \right)$
	T_i	$0.833 P_u$	$0.43 P_u$	$3.33 T$	$T \left(\frac{3.33 + 0.3T/\tau}{1 + 2.2T/\tau} \right)$
PID	K	$0.6 K_u$	$0.5 K_u$	$\frac{1.2}{T R_r}$	$\frac{\tau}{TK_p} \left(1.35 + 0.27 \frac{T}{\tau} \right)$
	T_i	$0.5 P_u$	$0.34 P_u$	$2 T$	$T \left(\frac{2.5 + 0.5T/\tau}{1 + 0.6T/\tau} \right)$
	T_d	$0.125 P_u$	$0.08 P_u$	$0.5 T$	$T \left(\frac{0.37}{1 + 0.2T/\tau} \right)$

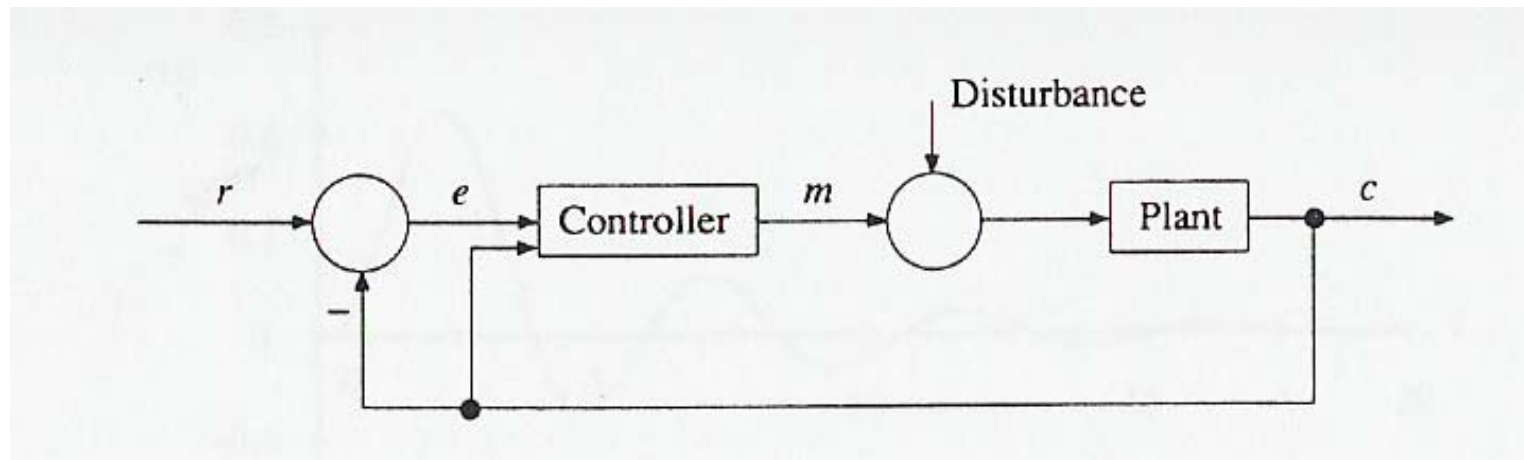
$$R_r = K'_p$$

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - verifica-se que
 - introdução da acção I traduz-se por uma diminuição do ganho K para compensar o efeito destabilizador
 - introdução da acção D traduz-se pelo reforço das acções P e I
 - acção D tem um efeito adverso na resposta transitória de sistemas com um tempo de atraso predominante, isto é, onde a razão τ/T é elevada
 - somente o método de Cohen e Coon avalia esta razão pelo que apresenta melhor desempenho

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - de seguida são analisados três exemplos que ilustram a aplicação das fórmulas
 - considera-se a resposta $c(t)$ em resposta a uma perturbação $P(s)$ em degrau unitário



Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador

- exemplo 1

- este exemplo mostra a influência de uma aproximação de primeira ordem a um sistema de ordem mais elevada

- sistema

$$G_P(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

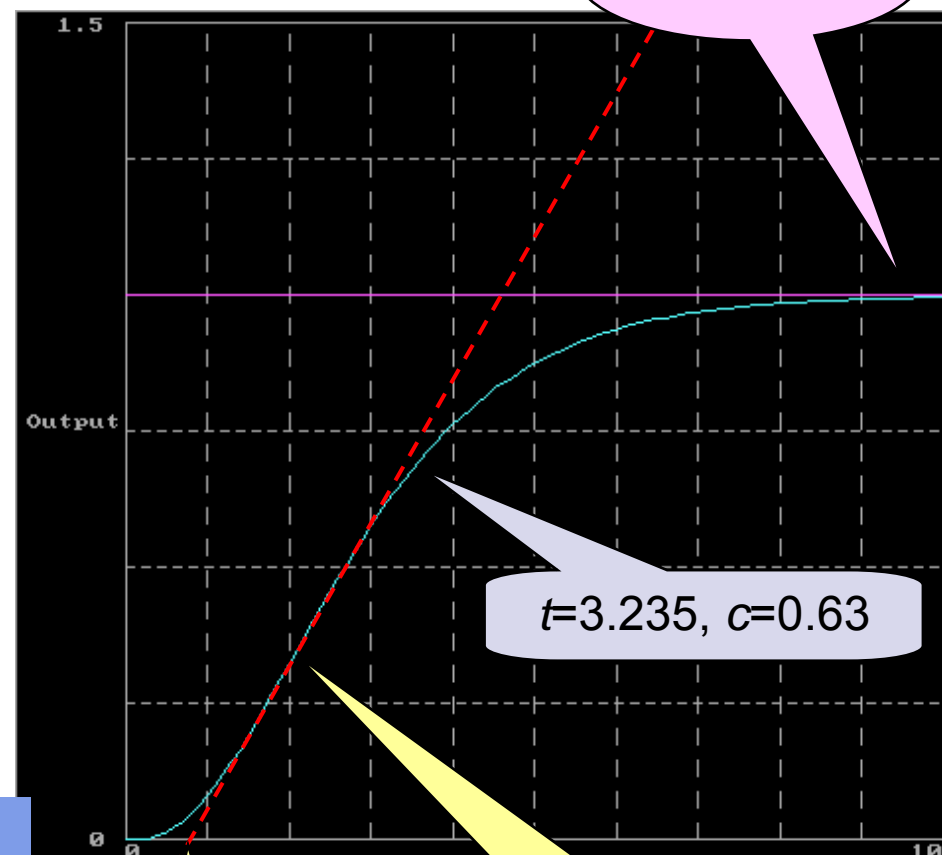


Controladores PID

- Sintonia do Controlador
 - Resposta ao degrau unitário ($M=1$) com sistema em **malha aberta**
 - *Recta com máxima inclinação em $t=2$, com declive=0.271 e com intersecção em $t=0.806$*
 - Resposta $c=0.63$ para $t=3.235$

Modelo W1

$K_p=1$, $T=0.806$,
 $\text{tau}=3.235-0.806=2.45$



$t=0.806$

declive=0.271
para $t=2$

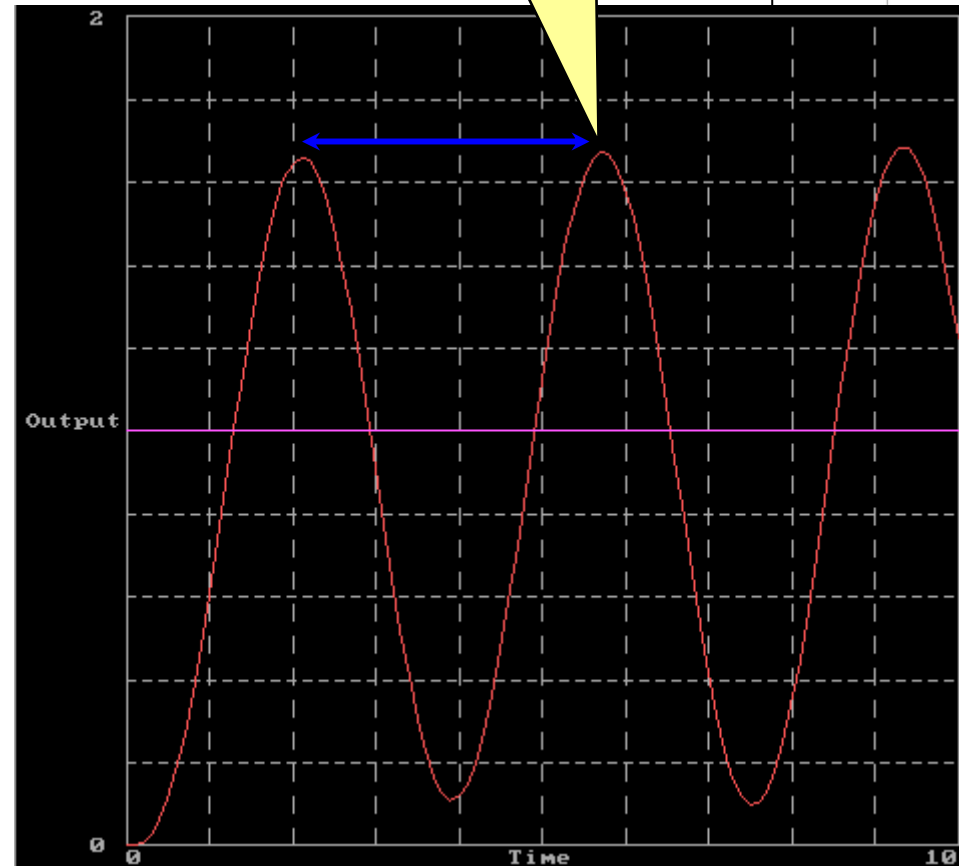
Controladores PID

- Sintonia do Controlador
 - Resposta ao degrau unitário ($M=1$) com sistema em malha fechada

Modelo W2

$$K'_p = R_r = 1, T = 0.806$$

$$K_u = 8, P_u = 3.626$$



Controladores PID

- Sintonia do Controlador

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ku	Pu	T	Rr	τ	Kp	
2	8	3.626	0.806	0.271	2.45	1	
3							
4	Controlador	Parametro	ZN-mf	S	ZN-ma	CC	
5	P	K	4.000	4.000	4.578	3.370	
6	PI	K	3.600	4.000	4.120	2.818	
7		Ti	3.020	1.559	2.684	1.603	
8	PID	K	4.800	4.000	5.494	4.374	
9		Ti	1.813	1.233	1.612	1.794	
10		Td	0.453	0.290	0.403	0.280	
11							
12							

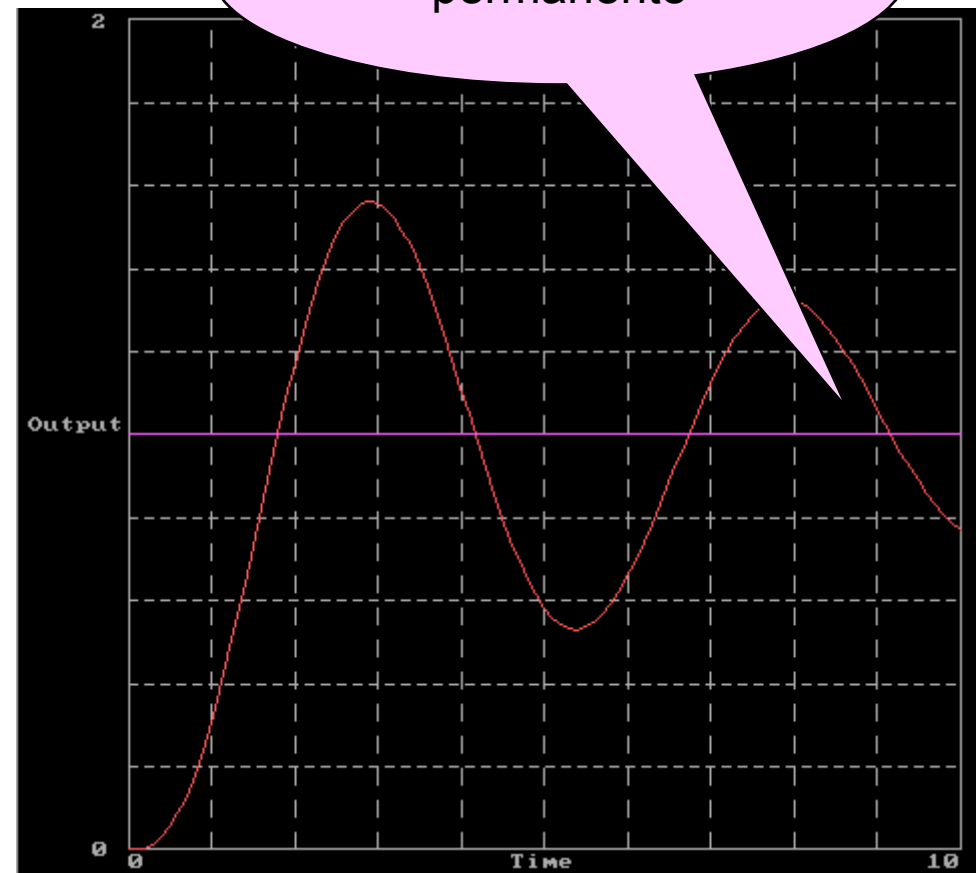
Controladores PID

- Sintonia Ziegler-Nichols (open-loop)
 - $K_p=4$
 - $G_c(s)=4$



Controladores PID

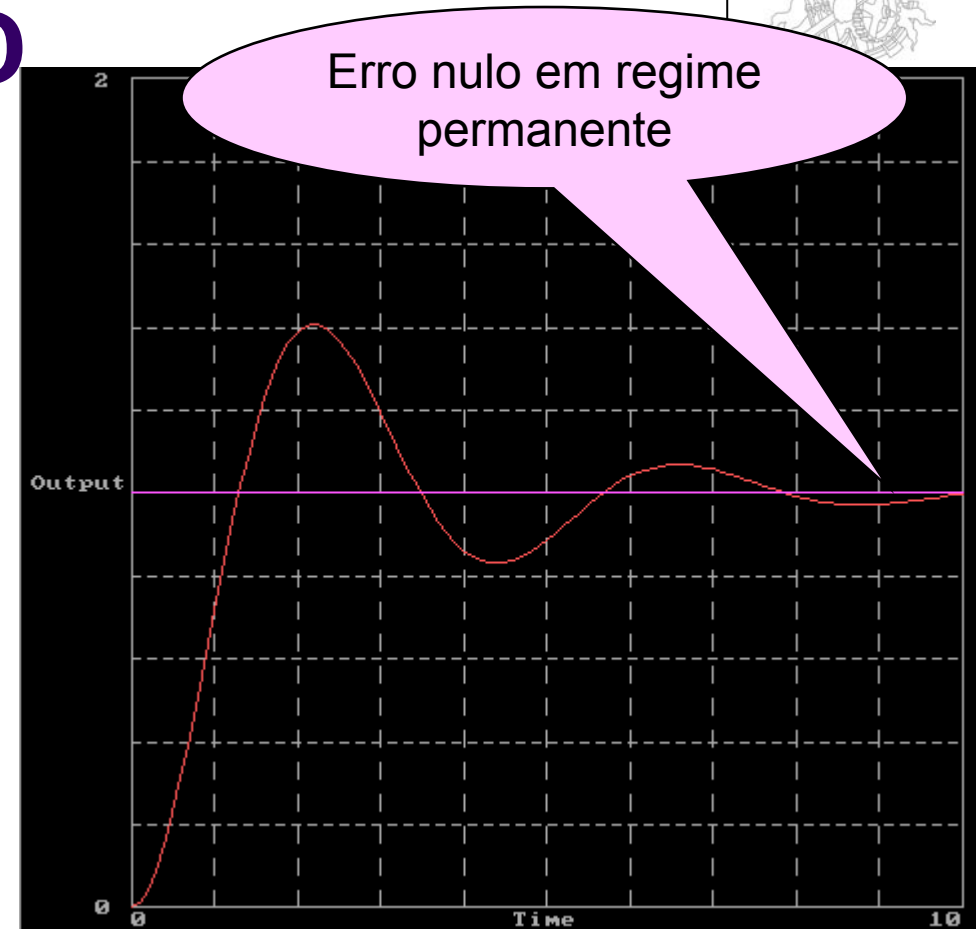
- Sintonia Ziegler-Nichols (open-loop)
 - $K_p=3.6$
 - $T_i=3.02$
 - $G_c(s)=(3.6s+1.19)/s$

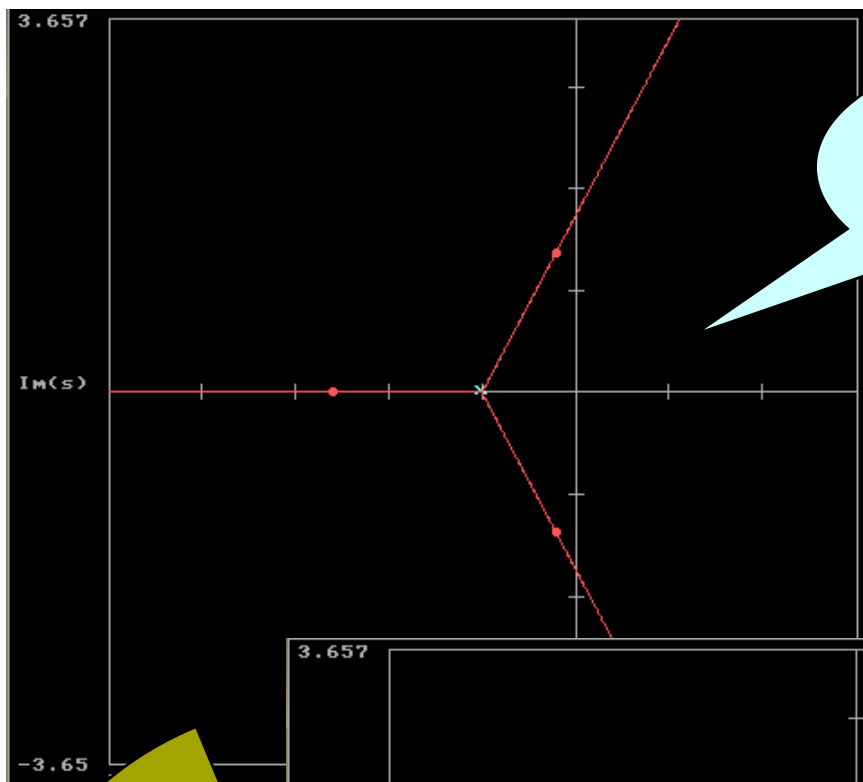




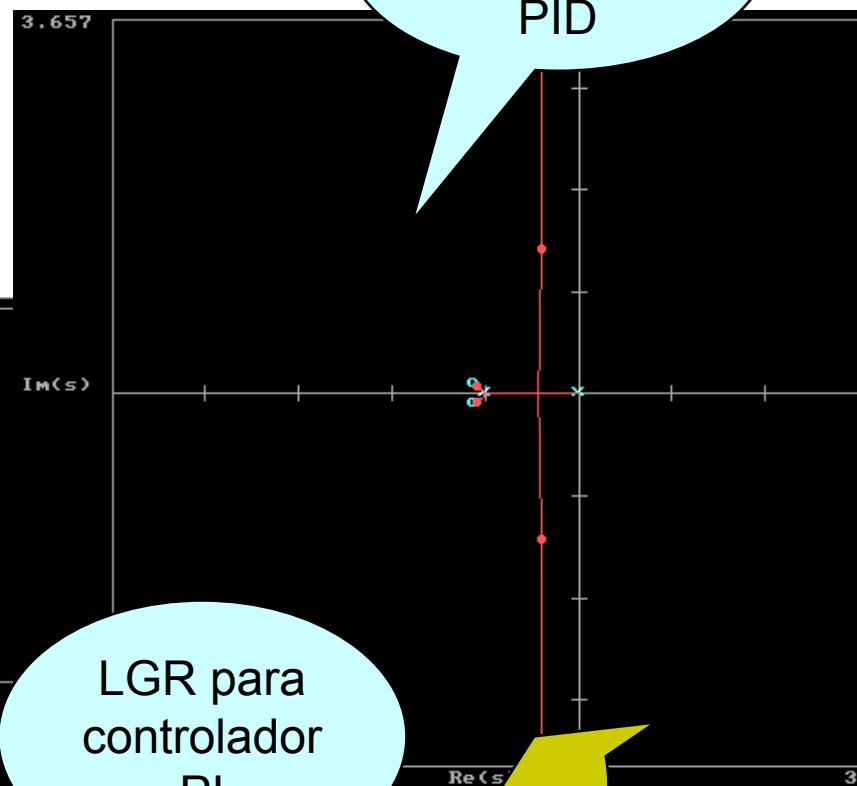
Controladores PID

- Sintonia Ziegler-Nichols (open-loop)
 - $K_p=4.8$
 - $T_i=1.8$
 - $T_d=0.453$
- $G_c(s)=(2.67+4.8s+2.17s^2)/s$

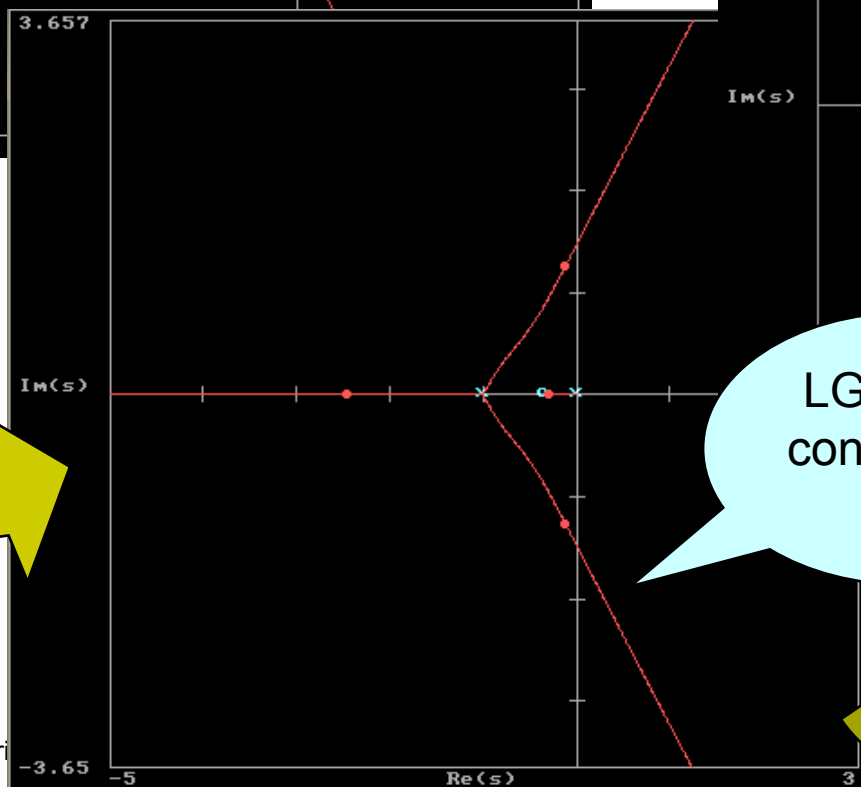




LGR para
controlador
P



LGR para
controlador
PID



LGR para
controlador
PI

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - exemplo 1
 - as figuras seguintes mostram as respostas dos controladores PID sintonizados pelos quatro métodos
 - verifica-se que o método ZN(MF) é o melhor devido à contribuição da acção D e à ausência de um tempo de atraso

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - nos dois exemplos seguintes compara-se a eficiência dos métodos em função de T/τ para um dado P_u
 - em ambos os casos considera-se um sistema com função de transferência

$$G_P(s) = \frac{e^{-sT}}{s\tau + 1}$$

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - exemplo 2
 - sistema

$$G_P(s) = \frac{e^{-0,88s}}{0,183s + 1}$$

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - exemplo 2
 - os parâmetros para o controlador vêm

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - exemplo 2
 - nos gráficos seguintes constata-se a má resposta para o controlador PID ajustado pelo método ZN(MA)

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - exemplo 2

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - exemplo 2
 - nos três exemplos, este é o caso mais difícil de controlar devido ao elevado valor de τ

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - exemplo 3
 - sistema

$$G_P(s) = \frac{e^{-0,542s}}{6s + 1}$$

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - exemplo 2
 - os parâmetros para o controlador vêm

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - exemplo 2
 - neste caso o método S(MF) é o que apresenta pior desempenho

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - exemplo 2

Controladores PID

- Fórmulas para a Sintonia do Controlador
 - exemplo 2

Controladores PID

1. Formas de controlo de sistemas realimentados
 1. controlo proporcional
 2. controlo proporcional e integral
 1. saturação por efeito da acção integral
 3. acção diferencial
2. Sintonia do controlador
 1. métodos em malha aberta
 2. métodos em malha fechada
3. Controlo em cascata e por “Feedforward”
 1. controlo em cascata
 2. controlo por “Feedforward”

Controladores PID

- Controlo em Cascata e por “Feedforward”
 - nos sistemas de controlo realimentados apresentados até ao momento a variável manipulada é somente função do desvio (erro) da variável de saída
 - este tipo de estratégia pode tratar todos os tipos de perturbações mas a acção correctiva só pode iniciar-se depois dos seus efeitos aparecerem na variável controlada
 - isto leva a desempenhos fracos para perturbações elevadas e com uma frequência elevada face à constante de tempo dominante ou ao tempo de atraso do sistema

Controladores PID

- Controlo em Cascata e por “Feedforward”
 - muitas vezes é possível medir a perturbação directamente ou através dos seus efeitos num ponto intermédio do sistema
 - assim, através dessa informação é possível tornar a variável controlada menos sensível à perturbação

Controladores PID

1. Formas de controlo de sistemas realimentados
 1. controlo proporcional
 2. controlo proporcional e integral
 1. saturação por efeito da acção integral
 3. acção diferencial
2. Sintonia do controlador
 1. métodos em malha aberta
 2. métodos em malha fechada
3. Controlo em cascata e por “Feedforward”
 1. controlo em cascata
 2. controlo por “Feedforward”

Controladores PID

- Controlo em Cascata
 - considere-se que o sistema tem uma variável intermédia mensurável (c_2)

Controladores PID

- Controlo em Cascata
 - um modo de acelerar a recuperação relativamente a uma perturbação d_2 é usar a informação de c_2 para iniciar uma acção correctiva

Controladores PID

- Controlo em Cascata
 - uma possibilidade consiste na estrutura de controlo em cascata (*cascade controller*) onde um controlador secundário (G_{sc}) inicia uma acção correctiva antes da perturbação (d_2) atingir a saída c_1
 - esta estratégia é particularmente eficiente quando G_{p2} é um bloco predominante de um sistema com constante de tempo fixa, pois a influência de d_2 em c_2 (e, consequentemente, em c_1) é muito atenuada por um aumento do ganho no controlador secundário G_{sc}

Controladores PID

1. Formas de controlo de sistemas realimentados
 1. controlo proporcional
 2. controlo proporcional e integral
 1. saturação por efeito da acção integral
 3. acção diferencial
2. Sintonia do controlador
 1. métodos em malha aberta
 2. métodos em malha fechada
3. Controlo em cascata e por “Feedforward”
 1. controlo em cascata
 2. controlo por “Feedforward”

Controladores PID

- Controlo por “Feedforward”
 - muitas vezes as perturbações podem ser medidas antes de entrarem no sistema
 - assim, pode-se conceber uma estratégia que prepara o sistema para o “impacto” da perturbação, variando directamente a variável manipulada em função das perturbações
 - esta estratégia designa-se de controlo por “feedforward”

Controladores PID

- Controlo por “Feedforward”



Controladores PID

- Controlo por “Feedforward”
 - para uma perturbação na carga d a acção correctiva gerada pelo controlador de “feedforward” (G_F) pode cancelar o efeito na saída c se

$$G_F = -\frac{G_L}{G_V G_P}$$

- a dificuldade em aplicar esta estratégia consiste em ela exigir o conhecimento de G_V , G_P , G_L que raramente são conhecidos “à priori”