3. a) $y''(t)+5y'(t)+4y(t)=u(t)$, com y(0) = 0, y'(0) = 0 e u(t) = 2.e^{-2t}

Considerando o seguinte par de Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha.t}\right]=\frac{1}{s+a}$$

E as seguintes propriedades da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[A.f(t)\right]=A.F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t)\pm f_2(t)\right]=F_1(s)\pm F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(f(t)\right)\right]=s.F(s)-f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(f(t)\right)\right]=s^2.F(s)-s.f(0)-f'(0)$$

Obtém-se:

$$\mathcal{L}[y''(t)+5y'(t)+4y(t)=u(t)]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2.Y(s)-s.y(0)-y'(0)+5\left[s.Y(s)-y(0)\right]+4.Y(s)=\frac{2}{s+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s)=\frac{2}{(s+1).(s+2).(s+4)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s)=\frac{a}{s+1}+\frac{b}{s+2}+\frac{c}{s+4}$$

Sendo:

$$a=\left.\frac{2}{(s+2).(s+4)}\right|_{s=-1}=\frac{2}{3}$$

$$b=\left.\frac{2}{(s+1).(s+4)}\right|_{s=-2}=-1$$

$$c=\left.\frac{2}{(s+1).(s+2)}\right|_{s=-4}=\frac{1}{3}$$

Pelo que se obtém:

$$Y(s)=\frac{\frac{2}{3}}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{\frac{1}{3}}{s+4}$$

Determinando a Transformada Inversa de Laplace de Y(s), obtém-se y(t):

$$y(t) = \frac{2}{3}.e^{-t} - e^{-2.t} + \frac{1}{3}.e^{-4.t}$$

3. b) $y''(t) + y(t) = t$, com y(0) = 1, y'(0) = –1

Dados os seguintes pares de Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\left[sen(\omega.t)\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega.t)\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

E as seguintes propriedades da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[A.f(t)\right] = A.F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(f(t)\right)\right] = s^2.F(s) - s.f(0) - f'(0)$$

Obtém-se:

$$\mathcal{L}[y''(t) + y(t) = t] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2.Y(s) - s.y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2.(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c.s+d}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$$

Sendo:

$$a = \left.\frac{1}{s^2+1}\right|_{s=0} = 1$$

$$b = \left.\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right]\right|_{s=0} = 0$$

$$c.s + d = \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=-j} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = -1 \end{cases}$$

Pelo que se obtém:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}$$

Determinando a Transformada Inversa de Laplace de Y(s), obtém-se y(t):

$$y(t) = t + \cos(t) - 2.sen(t)$$

3. c) $y''(t) + 2y'(t) = e^t$, com condições iniciais nulas

Considerando os seguintes pares de Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[u(t)\right] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha.t}\right] = \frac{1}{s+a}$$

E as seguintes propriedades da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[A.f(t)\right] = A.F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(f(t)\right)\right] = s.F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(f(t)\right)\right] = s^2.F(s) - s.f(0) - f'(0)$$

Obtém-se:

$$\mathcal{L}[y''(t) + 2y'(t) = e^t] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2.Y(s) - s.y(0) - y'(0) + 2.\left[s.Y(s) - y(0)\right] = \frac{1}{s-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s.(s+2).(s-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+2} + \frac{c}{s-1}$$

Sendo:

$$a = \left. \frac{1}{(s+2).(s-1)} \right|_{s=0} = -\frac{1}{2}$$

$$b = \left. \frac{1}{s.(s-1)} \right|_{s=-2} = \frac{1}{6}$$

$$c = \left. \frac{1}{s.(s+2)} \right|_{s=1} = \frac{1}{3}$$

Pelo que se obtém:

$$Y(s) = -\frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{6}}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{s-1}$$

Determinando a Transformada Inversa de Laplace de Y(s), obtém-se y(t):

$$y(t) = -\frac{1}{2}.u(t) + \frac{1}{6}.e^{-2.t} + \frac{1}{3}.e^{t}$$

3. d) $y''(t) + y'(t) = sen(t)$, com y(0) = α, y'(0) = β

Dados os seguintes pares de Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[u(t)\right] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha.t}\right] = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\left[sen(\omega.t)\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega.t)\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{a}.\left(1-e^{-\alpha.t}\right)\right] = \frac{1}{s.(s+a)}$$

E as seguintes propriedades da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[A.f(t)\right] = A.F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(f(t)\right)\right] = s.F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\right] = s^2.F(s) - s.f(0) - f'(0)$$

Obtém-se:

$$\mathcal{L}[y''(t) + y'(t) = sen(t)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2.Y(s) - s.y(0) - y'(0) + s.Y(s) - y(0) = \frac{1}{s^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (s^2+s).Y(s) - (s+1).\alpha - \beta = \frac{1}{s^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s.(s+1).(s^2+1)} + \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s.(s+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c.s+d}{(s-j).(s+j)} + \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s.(s+1)}$$

Sendo:

$$a = \left.\frac{1}{(s+1).(s^2+1)}\right|_{s=0} = 1$$

$$b = \left.\frac{1}{s.(s^2+1)}\right|_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$c.s+d\big|_{s=-j} = \left.\frac{1}{s.(s+1)}\right|_{s=-j} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\dfrac{1}{2} \\ d = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Pelo que se obtém:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s+1} - \frac{\frac{1}{2}.s}{s^2+1} - \frac{\frac{1}{2}}{s^2+1} + \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s.(s+1)}$$

Determinando a Transformada Inversa de Laplace de Y(s), obtém-se y(t):

$$y(t) = u(t) - \frac{1}{2}.e^{-t} - \frac{1}{2}.\cos(t) - \frac{1}{2}.sen(t) + \alpha.u(t) + \beta.(1-e^{-t})$$

3. e) $y'(t) + 3y(t) + 2\int_0^t y(t)dt = 1$, sendo y(0) = 1

Considerando os seguintes pares de Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha.t}\right] = \frac{1}{s+a}$$

E as seguintes propriedades da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[A.f(t)\right] = A.F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(f(t)\right)\right] = s.F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t).dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Obtém-se:

$$\mathcal{L}[y'(t) + 3y(t) + 2\int_0^t y(t)dt = 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s.Y(s) - y(0) + 3.Y(s) + 2.\frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s+1}{s^2 + 3.s + 2} \Leftrightarrow$$

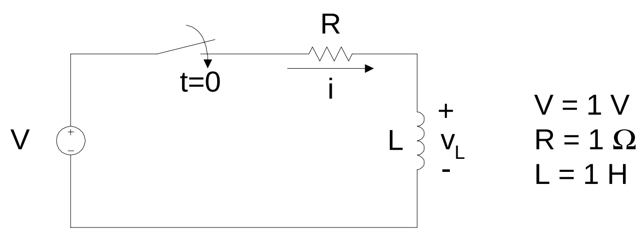
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s+1}{(s+1).(s+2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

Determinando a Transformada Inversa de Laplace de Y(s), obtém-se y(t):

$$y(t) = e^{-2.t}$$

4. a)



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$v(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt}$$
e
$$v_L(t) = L.\frac{di(t)}{dt}$$

Aplicando a Transformada de Laplace a ambas as equações anteriores, obtém-se:

$$V(s) = R.I(s) + s.L.I(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow I(s) = \frac{V(s)}{R + s.L}$$
e
$$V_L(s) = s.L.I(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow V_L(s) = s.L.\frac{V(s)}{R + s.L}$$

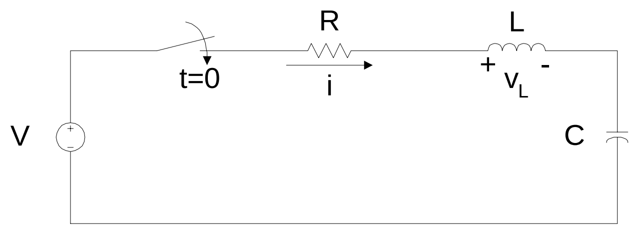
e considerando R = 1Ω, L = 1H e V = 1V, ficamos com:

$$I(s) = \frac{1}{1+s}.\frac{1}{s}$$
e
$$V_L(s) = \frac{1}{1+s}$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace a cada uma das equações anteriores ficamos com as expressões temporais de i(t) e v_L(t), como se apresenta de seguida:

$$i(t) = 1 - e^{-t}$$
$$v_L(t) = e^{-t}$$

4. b)



V = 32 V
R = 0,96 Ω
L = 0,8 H
C = 1,25 μF

As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$v(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}.\int i(t).dt$$
e
$$v_L(t) = L.\frac{di(t)}{dt}$$

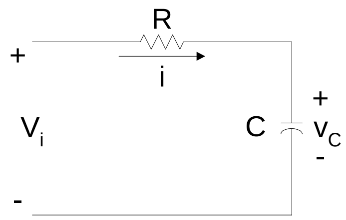
Aplicando a Transformada de Laplace a ambas as equações anteriores, e substituindo nestas os valores dos componentes do circuito, obtém-se:

$$V(s) = R.I(s) + s.L.I(s) + \frac{1}{s.C}.I(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow I(s) = \frac{40}{s^2 + 1{,}2.s + 1\times10^{-6}}$$
$$e$$
$$V_L(s) = s.L.I(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow V_L(s) = 32.\frac{s}{s^2 + 1{,}2.s + 1\times10^{-6}}$$

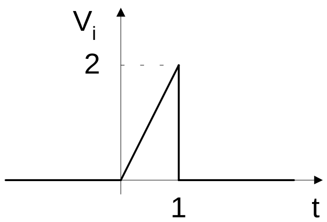
Aplicando a Transformada Inversa de Laplace a cada uma das equações anteriores ficamos com as expressões temporais de i(t) e v_L(t), como se apresenta de seguida:

$$i(t) = 0{,}04.e^{-0{,}6.t}.sen(1000.t)$$
$$v_L(t) = -32.e^{-0{,}6.t}.sen(1000.t - 1{,}57)$$

4. c)



em que



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$v_i(t) = R.i(t) + \frac{1}{C}.\int i(t).dt$$
$$e$$
$$v_C(t) = \frac{1}{C}.\int i(t).dt$$

Aplicando a Transformada de Laplace a ambas as equações anteriores, obtém-se:

$$V_i(s) = R.I(s) + \frac{1}{s.C}.I(s)$$
$$e$$
$$V_C(s) = \frac{1}{s.C}.I(s)$$

Por sua vez, o sinal de entrada vi(t), pode ser descrito por:

$$v_i(t) = 2.t.u(t) - 2.(t-1).u(t-1) - 2.u(t-1)$$

Sendo a sua Transformada de Laplace a seguinte:

$$V_i(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^2}.e^{-s} - \frac{2}{s}.e^{-s}$$

Igualando as duas equações em $V_i(s)$, obtém-se:

$$I(s) = 2.C.\frac{1}{s.(s.R.C+1)}.(1 - e^{-s} - s.e^{-s})$$

e

$$V_C(s) = 2.\frac{1}{s^2.(s.R.C+1)}.(1 - e^{-s} - s.e^{-s})$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace a cada uma das equações anteriores ficamos com as expressões temporais de i(t) e v_L(t), como se apresenta de seguida:

$$i(t) = 0{,}045.e^{-0{,}6.t}.sen(1000.t)$$
$$v_L(t) = -32.e^{-0{,}6.t}.sen(1000.t - 1{,}57)$$