TESIS:
Teoria dos Sistemas

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

1. Análise em malha aberta
2. Representação gráfica da resposta em frequência
    1. Diagramas polares
    2. Diagramas de Bode
3. Análise em malha fechada
    1. Estabilidade relativa
        1. Margem de ganho
        2. Margem de fase

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

1. Análise em malha aberta
2. Representação gráfica da resposta em frequência
    1. Diagramas polares
    2. Diagramas de Bode
3. Análise em malha fechada
    1. Estabilidade relativa
        1. Margem de ganho
        2. Margem de fase

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - considere-se um sistema linear estável com função de transferência $G(s)$, com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$
  - se $u(t) = \text{sen}(\omega t),\ t \geq 0$, vem

$$L\left[\text{sen}\left(\omega t\right)\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y\left(s\right) = \left[\frac{a}{s - j\omega} + \frac{\bar{a}}{s + j\omega}\right] + \left[\frac{b_1}{s - p_1} + \ldots + \frac{b_n}{s - p_n}\right] \quad *$$

  - onde $p_1, \ldots, p_n$, são os pólos de $G(s)$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - supondo (sem perda de generalidade) que os pólos são simples, a resposta nos tempos vem

$$y(t) = ae^{j\omega t} + \overline{a}e^{-j\omega t} + b_1 e^{p_1 t} + \ldots + b_n e^{p_n t}$$

  - se o sistema é estável, a resposta em regime permanente é

$$y_{ss}(t) = ae^{j\omega t} + \overline{a}e^{-j\omega t}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - para calcular a e $\bar{a}$ sabe-se que

$$* \quad Y(s) = \left[\frac{a}{s-j\omega} + \frac{\bar{a}}{s+j\omega}\right] + \left[\frac{b_1}{s-p_1} + \ldots + \frac{b_n}{s-p_n}\right]$$

$$(s+j\omega)Y(s) = \left[a\frac{(s+j\omega)}{s-j\omega} + \bar{a}\right] + \left[b_1\frac{(s+j\omega)}{s-p_1} + \ldots + b_n\frac{(s+j\omega)}{s-p_n}\right]$$

$$\lim_{s\to -j\omega}(s+j\omega)Y(s) = \bar{a}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - por outro lado

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

  - logo

$$\bar{a} = \lim_{s \to -j\omega}\left[G(s)\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}(s + j\omega)\right] =$$

$$= \lim_{s \to -j\omega}\left[G(s)\frac{\omega}{s - j\omega}\right] = -\frac{1}{2j}G(-j\omega)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - identicamente $a = \frac{1}{2j} G(j\omega)$
  - exprimindo G na forma polar vem

$$G(j\omega) = \left|G(j\omega)\right| e^{j\varphi}$$

$$G(-j\omega) = \left|G(j\omega)\right| e^{-j\varphi}$$

$$y_{ss}(t) = a e^{j\omega t} + \overline{a} e^{-j\omega t}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta

$$G(j\omega) = \left|G(j\omega)\right| e^{j\varphi}$$

$$G(-j\omega) = \left|G(j\omega)\right| e^{-j\varphi}$$

$$y_{ss}(t) = ae^{j\omega t} + \overline{a}e^{-j\omega t} =$$

$$= \frac{1}{2j} G(j\omega) e^{j\omega t} - \frac{1}{2j} G(-j\omega) e^{-j\omega t} =$$

$$= \frac{1}{2j} \left|G(j\omega)\right| \left[e^{j\varphi} e^{j\omega t} - e^{-j\varphi} e^{-j\omega t} \right] =$$

$$= \left|G(j\omega)\right| \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - em conclusão
    - para um sistema linear estável com função de transferência $G(s)$ e para um sinal de entrada $u(t) = \mathrm{sen}(\omega t),\ t \geq 0$, a saída converge para

$$y(t) = \left|G(j\omega)\right| \mathrm{sen}\left[\omega t + \arg G(j\omega)\right]$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - exemplo
    - considere o sistema com função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

    - e entrada $u(t) = \mathrm{sen}(2t)$

$$G(j2) = \frac{1}{j2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-j1,11}$$

$$y_{ss}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathrm{sen}(2t - 1,11)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - exemplo
    - alternativamente

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{2}{s^2+2^2} = \frac{2/5}{s+1} + \frac{2/5-(2/5)s}{s^2+2^2}$$

    - como

$$L\left[\operatorname{sen}(\omega t+\phi)\right] = \frac{s\operatorname{sen}(\phi)+\omega\cos(\phi)}{s^2+\omega^2}$$

    - vem

$$y(t) = 0,4e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}(2t-1,11)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - em regime permanente
    - a razão entre as amplitudes das sinusóides de saída e de entrada é o ganho a essa frequência
    - por outro lado, a diferença de fase entre a saída e a entrada é a fase a essa frequência
  - estes valores podem obter-se graficamente

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

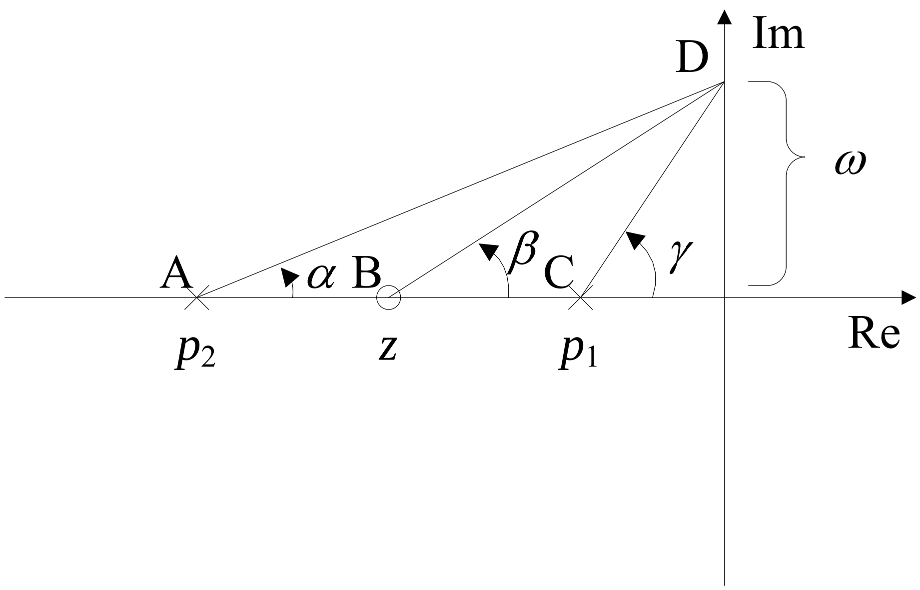
Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - por exemplo, para

$$G(s) = \frac{s+z}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{CD}} \cdot \overline{\mathrm{AD}}}$$

$$\arg[G(j\omega)] = \beta - \gamma - \alpha$$



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

1. Análise em malha aberta
2. Representação gráfica da resposta em frequência
    1. Diagramas polares
    2. Diagramas de Bode
3. Análise em malha fechada
    1. Estabilidade relativa
        1. Margem de ganho
        2. Margem de fase

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Representação gráfica da resposta em frequência
  - como $G(j\omega)$ é uma função complexa de uma variável real, pode ser representada
    - no plano complexo, com ω como parâmetro
      - Diagrama Polar
    - separadamente para a amplitude e para a fase em função de ω
      - Diagramas de Bode, no caso de se adoptarem escalas logarítmicas

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

1. Análise em malha aberta
2. Representação gráfica da resposta em frequência
   1. Diagramas polares
   2. Diagramas de Bode
3. Análise em malha fechada
   1. Estabilidade relativa
      1. Margem de ganho
      2. Margem de fase

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagrama Polar
  - representação gráfica de $G(j\omega)$, $\omega \in [0,+\infty[$
  - por exemplo, se $G(j\omega) = \dfrac{p}{p + j\omega}$

$$G(j\omega) = \frac{p}{\sqrt{p^2+\omega^2}} \arg\left[-\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{p}\right)\right]$$

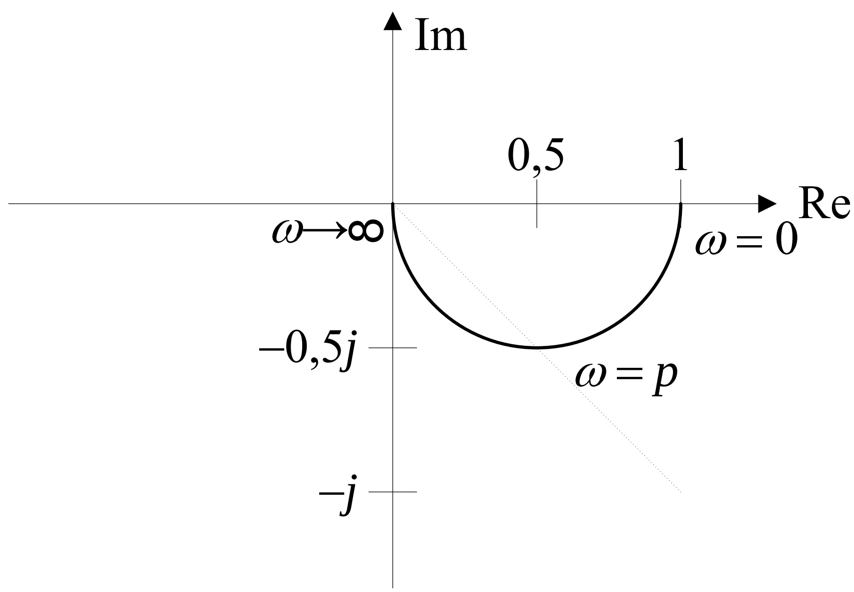
$$G(j\omega) = \frac{p(p - j\omega)}{p^2+\omega^2} = \frac{p^2}{p^2+\omega^2} - j\frac{\omega p}{p^2+\omega^2}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagrama Polar

$$G(j\omega) = \frac{p(p - j\omega)}{p^2 + \omega^2} = \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} - j\frac{\omega p}{p^2 + \omega^2}$$



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

1. Análise em malha aberta
2. Representação gráfica da resposta em frequência
    1. Diagramas polares
    2. Diagramas de Bode
3. Análise em malha fechada
    1. Estabilidade relativa
        1. Margem de ganho
        2. Margem de fase

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - dois gráficos separados para representar $G(j\omega)$
    - amplitude ($|G(j\omega)|$) *versus* frequência
    - fase ($\arg(G(j\omega))$) *versus* frequência
    - adopta-se uma escala logarítmica para ω

  - para a amplitude de $G(j\omega)$ usam-se decibeis (dB) que se calculam através de

$$20.\log_{10}|G(j\omega)|$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - por vezes o diagrama de Bode das amplitudes é expresso em dB/oitava
  - ω_2 está uma oitava acima de ω_1 se $\omega_2 = 2\omega_1$, logo

$$\pm s \text{ dB/decada} = \pm 0,3s \text{ dB/oitava}$$

    - pois $\log_{10}(2\omega_1) - \log_{10}(\omega_1) = \log_{10}2 = 0{,}3$
    - em particular ± 20 dB/déc = ± 6 dB/oitava

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - considere-se

$$G(s)=\frac{K(s+z_1)\ldots(s+z_m)}{s^r(s+p_1)\ldots(s+p_n)}e^{-sT}$$

$$G(s)=K_B\frac{(1+s/z_1)\ldots(1+s/z_m)}{s^r(1+s/p_1)\ldots(1+s/p_n)}e^{-sT}$$

$$K_B=K\frac{z_1.z_2\ldots z_m}{p_1.p_2\ldots p_n}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - quando G(s) tem um par de pólos complexos conjugados $p_1 = p$ e $p_2 = \overline{p}$ é conveniente colocar na forma

$$\frac{1}{(1+j\omega/p)(1+j\omega/\overline{p})} = \frac{1}{1+2\zeta\left(j\omega/\omega_n\right)+\left(j\omega/\omega_n\right)^2}$$

  - onde

$$p,\overline{p} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - gráficos de Bode de uma função de transferência podem ser obtidos através da adição dos gráficos das parcelas
    - K_B
    - $(1+j\omega/z)^{\pm 1}$
    - $(j\omega)^{\pm r}$
    - $\dfrac{1}{1+2\zeta\left(j\omega/\omega_n\right)+\left(j\omega/\omega_n\right)^2}$
    - $e^{-j\omega T}$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - então, $\log|G(j\omega)|$ é a soma das parcelas
    - $\log|K_B|$
    - $\log|1+j\omega/z_i| \qquad i = 1, 2, ..., m$
    - $-\log|1+j\omega/p_i| \qquad i = 1, 2, ..., n$
    - $-\log|(j\omega)^r| = -r.\log|(j\omega)| = -r.\log(\omega)$
    - $\log|e^{-j\omega T}| = 1$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - por outro lado, para $\arg[G(j\omega)]$ vem

$$\arg\left[G\left(j\omega\right)\right]=\sum_{i=1}^{m}\arg\left(1+j\omega/z_i\right)-r\frac{\pi}{2}-\sum_{i=1}^{n}\arg\left(1+j\omega/p_i\right)-\omega T$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - K_B
    - diagrama de Bode das amplitudes – recta horizontal com valor $20.\log_{10}|K_B|$
    - diagrama de Bode das fases – recta horizontal com valor
      - 0° se $K_B > 0$
      - -180° se $K_B < 0$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $(j\omega)^{\pm r}$
    - diagrama de Bode das amplitudes – recta com declive ± $20.r$ dB/déc, pois

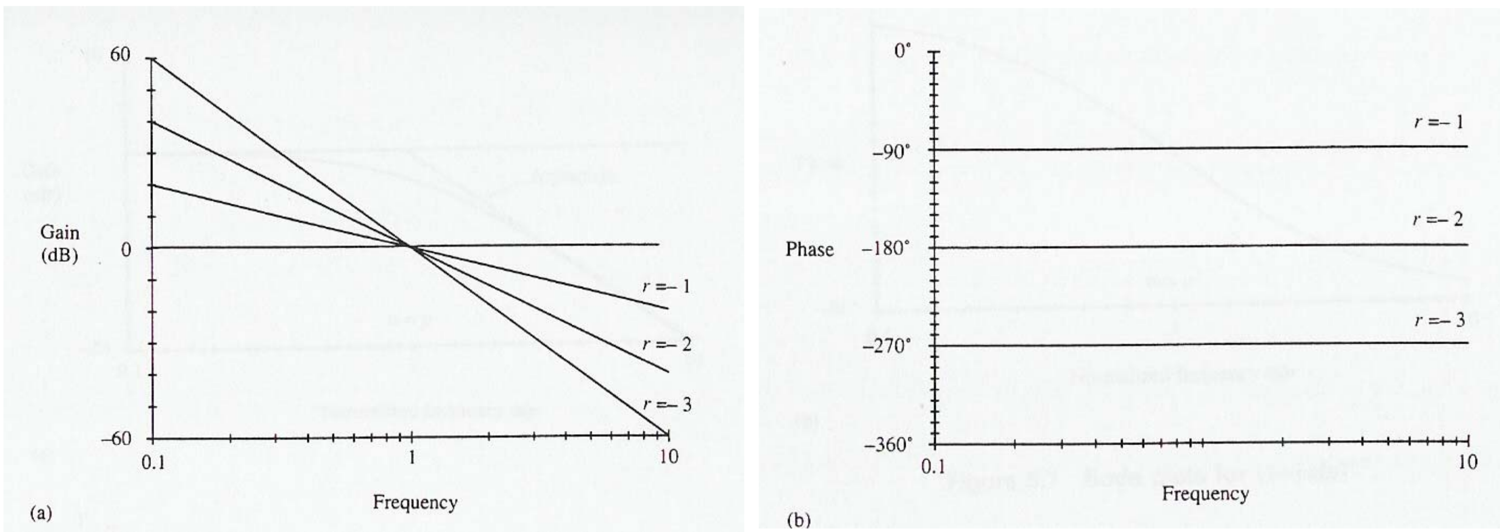
$$20\log_{10}\left|j10\omega\right|^{\pm r}\ \text{dB} = \pm r\left(20\log_{10}\omega\ \text{dB} + 20\ \text{dB}\right)$$

    - diagrama de Bode das fases – recta horizontal com valor ± $r.90^{\circ}$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $(j\omega)^{\pm r}$
    - diagramas de Bode de $(j\omega)^{-r}$, para $r = 1, 2, 3$



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $(1+j\omega/z)^{\pm 1}$
    - vamos agora analisar os gráficos de $\dfrac{1}{(1+j\omega/p)}$
    - temos

$$\frac{1}{(1+j\omega/p)} \approx 1 \quad , \quad \omega \ll p$$

$$\frac{1}{(1+j\omega/p)} \approx \frac{p}{j\omega} \quad , \quad \omega \gg p$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $(1+j\omega/z)^{\pm 1}$
    - conclui-se que o gráfico de Bode das amplitudes pode ser aproximado por duas rectas
      - recta 0 dB, para $\omega \ll p$
      - recta -20 dB/déc, para $\omega \gg p$

    - as duas rectas intersectam-se em 0 dB, para $\omega = p$
    - estas rectas designam-se por assimptotas, respectivamente às baixas e às altas frequências

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

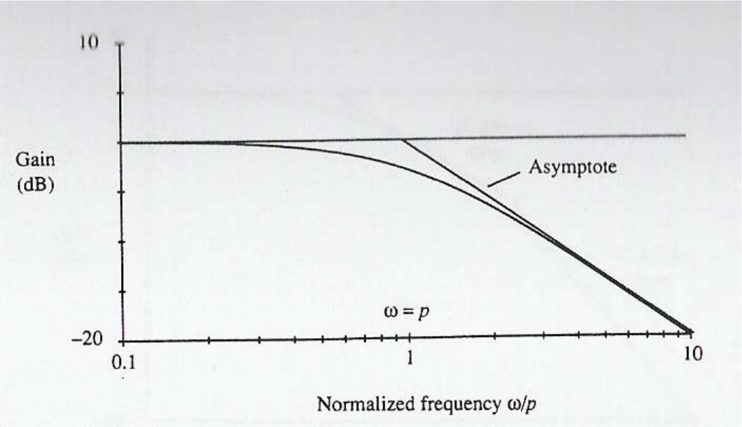
- Diagramas de Bode
  - $(1+j\omega/z)^{\pm 1}$
    - conclui-se que o gráfico de Bode das fases pode ser aproximado por
      - recta 0^{o}, para ω □ p
      - recta -90^{o} , para ω □ p

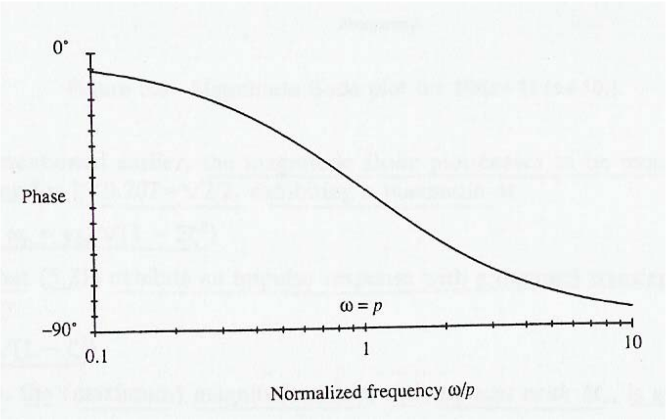
    - para $\omega = p$, $(1+j\omega/p)^{-1} = (1+j1)^{-1} = 1/\sqrt{2}\ \arg(-45^{o})$
    - logo $|G| = -3\ \text{dB}$, $\arg(G) = -45^{o}$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $(1+j\omega/z)^{\pm 1}$
    - diagramas de Bode de $(1+j\omega/p)^{-1}$

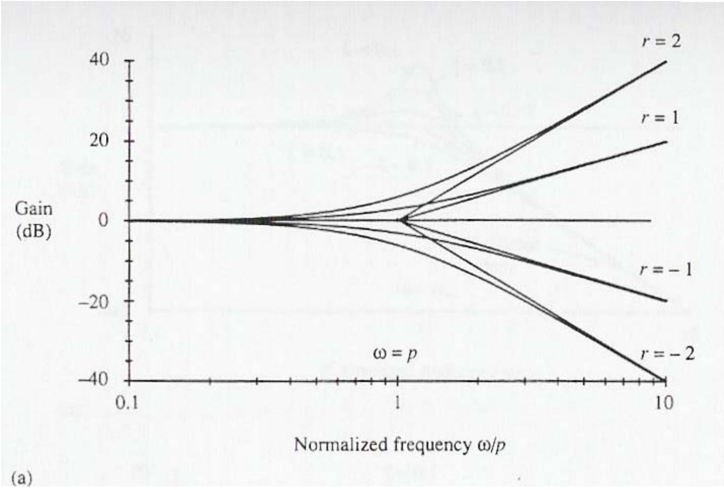


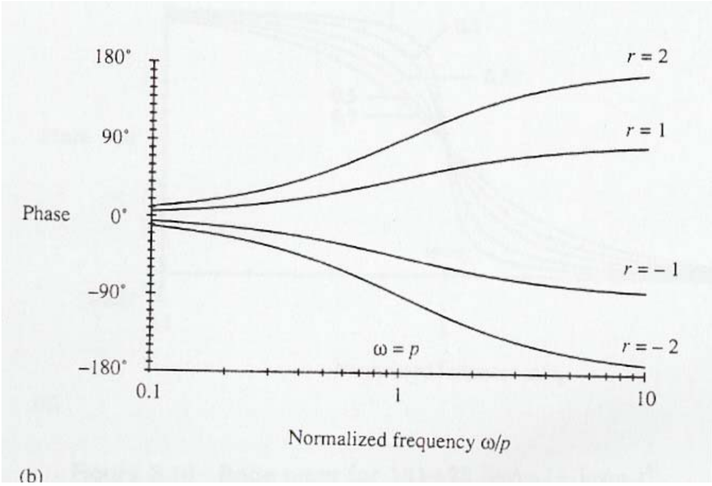


jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $(1+j\omega/z)^{\pm 1}$
    - diagramas de Bode de $(1+j\omega/z)^r$, para $r = \pm 1, \pm 2$





jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $$\frac{1}{1+2\zeta\left(j\omega/\omega_n\right)+\left(j\omega/\omega_n\right)^2}$$
    - considere-se agora um sistema de segunda ordem com um par de pólos complexos conjugados, $0 < \zeta \leq 1$
      - $G\left(j\omega\right) \approx 1 , \quad \omega \to 0$ (*i.e.*, 0 dB, 0º)
      - $G\left(j\omega\right) \approx -\left(\dfrac{\omega_n}{\omega}\right)^2 , \quad \omega \gg \omega_n$ (*i.e.*, –40 dB/déc, –180º)
    - esta recta intersecta os 0 dB para $\omega = \omega_n$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

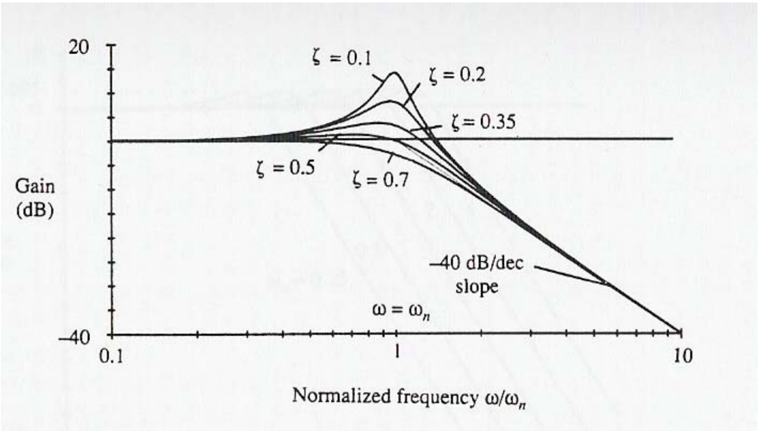
Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

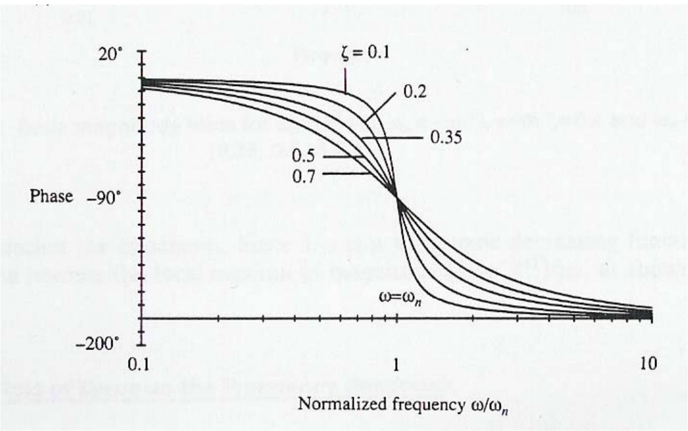
- Diagramas de Bode
  - $$\frac{1}{1+2\zeta\left(j\omega/\omega_n\right)+\left(j\omega/\omega_n\right)^2}$$
    - para $\zeta \geq 0{,}707$ o gráfico de Bode das amplitudes decresce monotonamente
    - para $0 < \zeta < 0{,}707$ ocorre um pico (ressonância)
      - $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$
      - $M_r = \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ (pico de ressonância)
    - obviamente, $M_r = 1$ para $\zeta = \sqrt{2}/2 = 0{,}707$ e $M_r \to \infty$ quando $\zeta \to 0$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $$\frac{1}{1+2\zeta\left(j\omega/\omega_n\right)+\left(j\omega/\omega_n\right)^2}$$
    - diagramas de Bode





jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

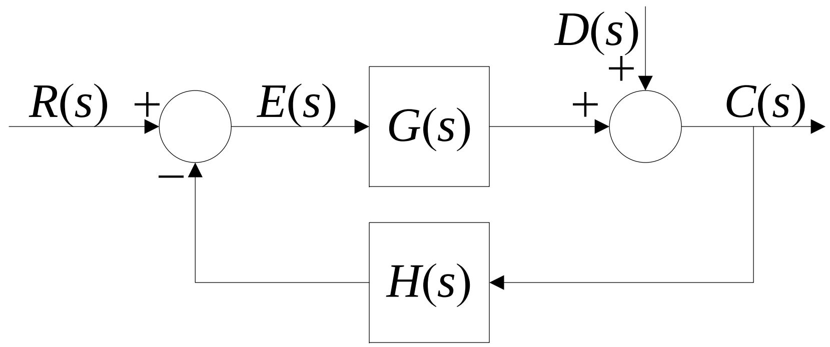
Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

1. Análise em malha aberta
2. Representação gráfica da resposta em frequência
    1. Diagramas polares
    2. Diagramas de Bode
3. Análise em malha fechada
    1. Estabilidade relativa
        1. Margem de ganho
        2. Margem de fase

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - nesta secção estuda-se a estabilidade do sistema seguinte a partir da resposta em frequência de $G(s)H(s)$



  - interessa saber se o sistema é ou não estável e também se está longe (ou perto) da instabilidade

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

1. Análise em malha aberta
2. Representação gráfica da resposta em frequência
    1. Diagramas polares
    2. Diagramas de Bode
3. Análise em malha fechada
    1. Estabilidade relativa
        1. Margem de ganho
        2. Margem de fase

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa
    - distância do traçado de $G(j\omega)H(j\omega)$ relativamente ao ponto $-1 + j0$ é a amplitude de $|1 + G(j\omega)H(j\omega)|$
    - quanto mais perto estiver $G(j\omega)H(j\omega)$ do ponto $-1 + j0$ mais oscilatória será a resposta do sistema em malha fechada
    - esta “distância” é usualmente medida através da Margem de Ganho e da Margem de Fase

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

1. Análise em malha aberta
2. Representação gráfica da resposta em frequência
    1. Diagramas polares
    2. Diagramas de Bode
3. Análise em malha fechada
    1. Estabilidade relativa
        1. Margem de ganho
        2. Margem de fase

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa
    - Margem de Ganho (MG) indica quanto se pode aumentar o ganho até conduzir o sistema ao limite da estabilidade
    - por outras palavras, o ganho de $G(j\omega)H(j\omega)$ deve ser unitário quando a fase é de -180°

$$\arg\left[GH\left(j\omega_{\pi}\right)\right] = -\pi \Rightarrow MG = \frac{1}{\left|GH\left(j\omega_{\pi}\right)\right|}$$

$$\text{ou} \qquad MG_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}\frac{1}{\left|GH\left(j\omega_{\pi}\right)\right|}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

1. Análise em malha aberta
2. Representação gráfica da resposta em frequência
   1. Diagramas polares
   2. Diagramas de Bode
3. Análise em malha fechada
   1. Estabilidade relativa
      1. Margem de ganho
      2. Margem de fase

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa
    - Margem de Fase (MF) indica quanto se pode aumentar a fase até conduzir o sistema ao limite da estabilidade
    - fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ deve ser -180° quando o módulo é unitário

$$\left|GH\left(j\omega_1\right)\right| = 1 \Rightarrow MF = 180^{\circ} + \arg\left[GH\left(j\omega_1\right)\right]$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

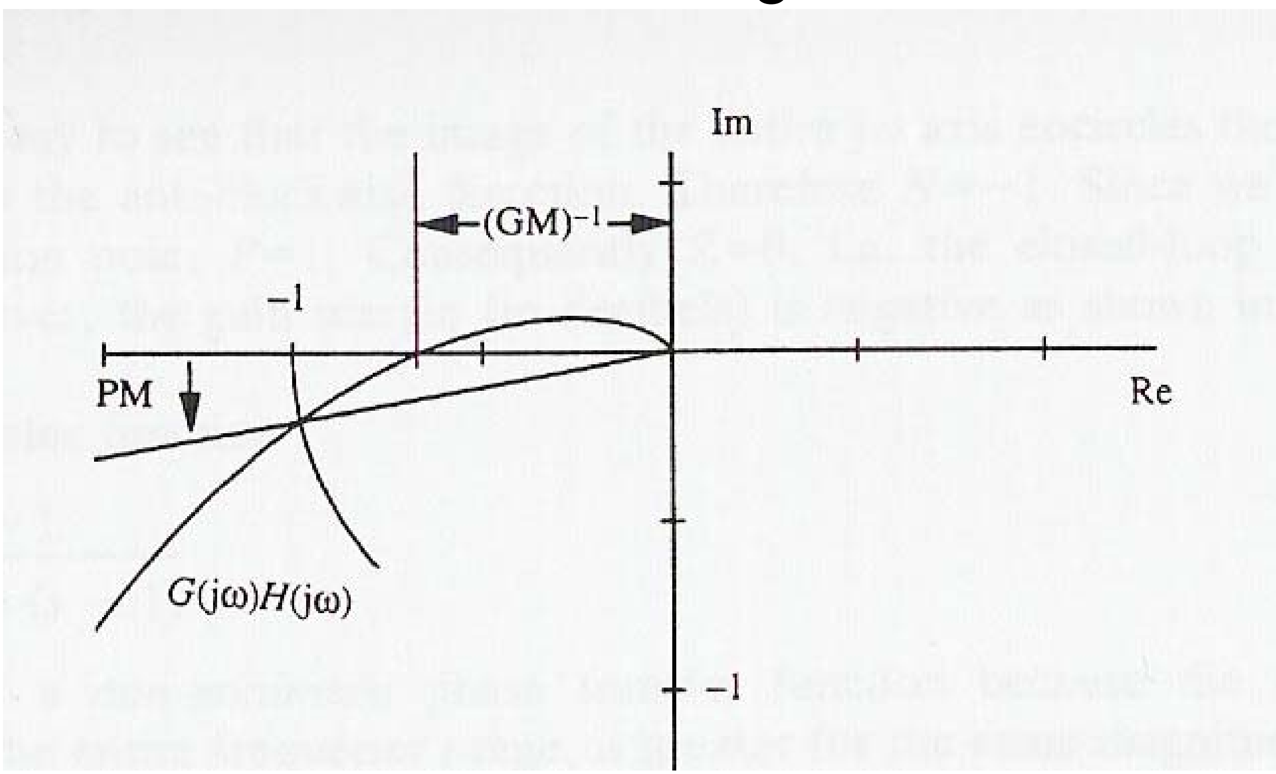
Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa
    - Margem de Ganho (MG) e Margem de Fase (MF) podem ser calculadas quer pelo diagrama Polar, quer pelos gráficos de Bode

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

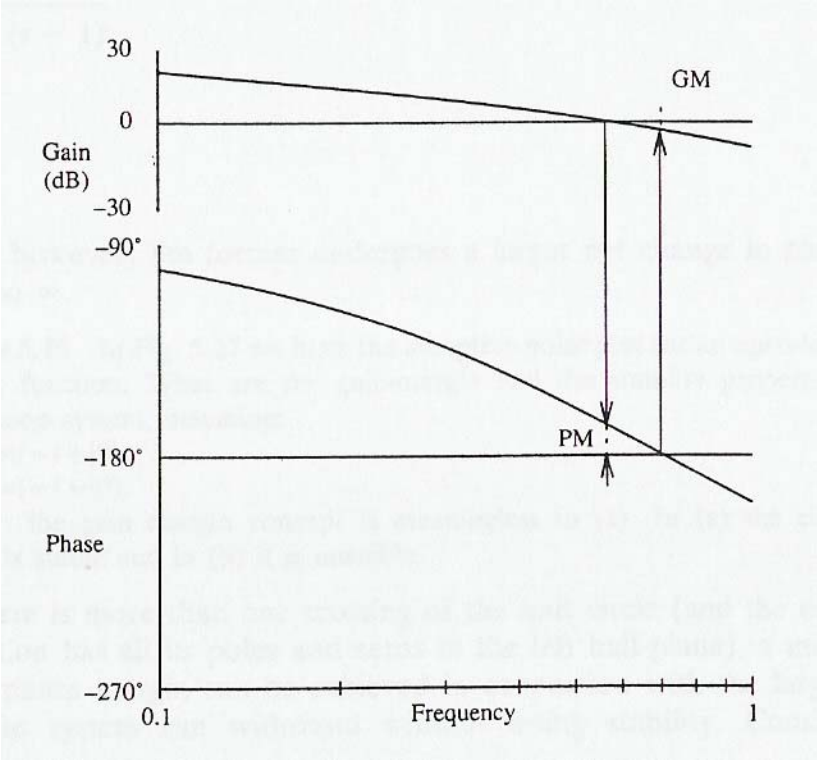
- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa – Diagramas Polares



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa – Gráficos de Bode



Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa
    - um sistema estável deve ter uma $MG_{\mathrm{dB}} > 0$ (em decibeis) e uma $MF > 0$
    - quando a amplitude e a fase de $GH(j\omega)$ variam monotonamente com ω, as noções de MG e de MF são bem definidas e podem ser usadas como medidas de estabilidade
    - contudo, há casos que apresentam ambiguidade

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt