Departamento de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto

TESIS
Teoria dos Sistemas

Revisões da Transformada de Laplace e suas Aplicações

–

Resolução dos Exercícios Propostos

1. Calcule a transformada de Laplace $F(s)=L\{f(t)\}$ dos seguintes sinais $f(t)$, usando a definição:

a) $f(t)=u(t-2)$

$$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty} u(t-2)e^{-st}dt=\int_{2}^{+\infty} e^{-st}dt=\int_{2}^{+\infty} e^{-st}dt=-\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_2^{+\infty}$$
$$=\frac{e^{-2s}}{s}, \qquad \Re e\{s\}>0$$

Logo,

$$F(s)=\frac{e^{-2s}}{s}, \quad \Re e\{s\}>0$$

Código MATLAB para cálculo da transformada de Laplace de $f(t)$

```
>> syms t
>> f=heaviside(t-2);
>> F=laplace(f)

F =

exp(-2*s)/s
```

b) $f(t)=e^{-at}$

$$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt=\int_{0^-}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt=\int_{0^-}^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt=-\frac{1}{s+a}\left[e^{-(s+a)t}\right]_{0^-}^{+\infty}$$
$$=\frac{1}{s+a}, \qquad \Re e\{s\}>-a$$

Logo,

$$F(s)=\frac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\}>-a$$

Código MATLAB para cálculo da transformada de Laplace de $f(t)$

```
>> syms t a
>> f=exp(-a*t);
>> F=laplace(f)

F =

1/(s+a)
```

c) $f(t)=\sin(t)$

Sabendo que

$$\sin(x)=\frac{1}{2j}\left(e^{jx}-e^{-jx}\right)$$

vem:

$$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty}\sin(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{+\infty}\frac{1}{2j}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)e^{-st}dt=\frac{1}{2j}\int_{0^-}^{+\infty}e^{-(s-j)t}dt-\frac{1}{2j}\int_{0^-}^{+\infty}e^{-(s+j)t}dt$$

$$=-\frac{1}{2j}\frac{1}{(s-j)}\left[e^{-(s-j)t}\right]_{0^-}^{+\infty}+\frac{1}{(s+j)}\left[e^{-(s+j)t}\right]_{0^-}^{+\infty}=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{(s-j)}-\frac{1}{(s+j)}\right)$$

$$=\frac{1}{s^2+1},\qquad \Re e\{s\}>0$$

Logo,

$$F(s)=\frac{1}{s^2+1},\ \Re e\{s\}>0$$

Código MATLAB para cálculo da transformada de Laplace de $f(t)$

```
>> syms t
>> f=sin(t);
>> F=laplace(f)

F =

1/(s^2+1)
```

d) $f(t)=e^{-5t}u(t-1)$

$$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty}e^{-5t}u(t-1)e^{-st}dt=\int_{1}^{+\infty}e^{-5t}e^{-st}dt=\int_{1}^{+\infty}e^{-(s+5)t}dt=-\frac{1}{s+5}\left[e^{-(s+5)t}\right]_{1}^{+\infty}$$

$$=-\frac{1}{s+5}\left[e^{-(s+5)\infty}-e^{-(s+5)}\right]=\frac{e^{-(s+5)}}{s+5},\qquad \Re e\{s\}>-5$$

Logo,

$$F(s)=\frac{e^{-(s+5)}}{s+5},\ \Re e\{s\}>-5$$

Código MATLAB para cálculo da transformada de Laplace de $f(t)$

```
>> syms t
>> f=exp(-5*t)*heaviside(t-1);
>> F=laplace(f)

F =

exp(-s-5)/(s+5)
```

2. Usando os pares de transformadas da Tabela A e as propriedades listadas na Tabela B, calcule a transformada de Laplace $F(s)=L\{f(t)\}$ das seguintes funções $f(t)$:

a) $f(t)=\cos(4t)$

Código MATLAB para cálculo da transformada de Laplace de $f(t)$

```
>> syms t
>> f=cos(4*t);
>> F=laplace(f)

F =

s/(s^2+16)
```

Logo,

$$F(s)=\frac{s}{s^2+16}$$

b) $f(t)=3\sin(2t)-t\cos(4t)$

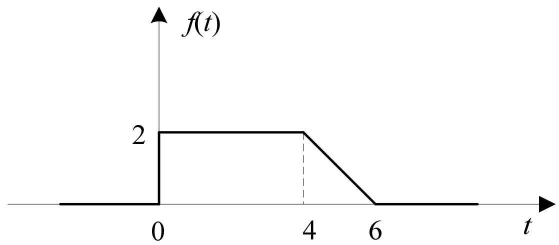
Código MATLAB para cálculo da transformada de Laplace de $f(t)$

```
>> syms t
>> f=3*sin(2*t)-t*cos(4*t);
>> F=laplace(f)

F =

6/(s^2+4)-1/(s^2+16)^2*(-16+s^2)
```

Logo,

$$F(s)=\frac{6}{s^2+4}-\frac{s^2-16}{\left(s^2+16\right)^2}$$

c)

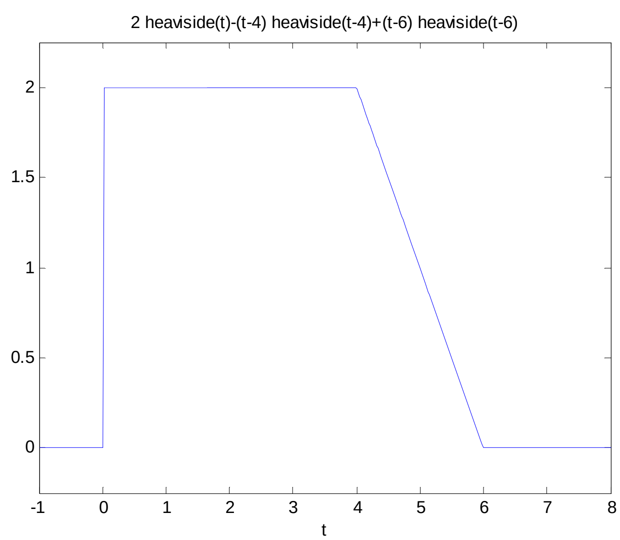


Sugestão: Decomponha $f(t)$ como a soma de três funções envolvendo o atraso de três degraus unitários: $u(t)$, $u(t-4)$ e $u(t-6)$.

A função $f(t)$ pode ser descrita como:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2[u(t)-u(t-4)]-(t-6)[u(t-4)-u(t-6)] \\ &= 2u(t)-(t-4)u(t-4)+(t-6)u(t-6) \end{aligned}$$

O gráfico de $f(t)$, obtido através do MATLAB, está ilustrado na figura abaixo.



Código MATLAB para visualização da função $f(t)$

```
>> syms t
>> vi=2*heaviside(t)-(t-4)*heaviside(t-4)+(t-6)*heaviside(t-6);
>> ezplot(vi,[-1 8])
```

Sabendo que

$$u(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s}$$

$$tu(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^2}$$

e usando a propriedade

$$f(t-\alpha)u(t-\alpha) \overset{L}{\leftrightarrow} e^{-\alpha s}F(s)$$

vem a seguinte expressão para $F(s)$:

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}e^{-4s} + \frac{1}{s^2}e^{-6s}$$

d) $f(t) = \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$

Usando a realção matemática

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

a função $f(t)$ pode ser reescrita como:

$$f(t) = \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(4t) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(4t)$$

A transformada de Laplace de $f(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} F(s) = L\{f(t)\} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)L\{\cos(4t)\} - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)L\{\sin(4t)\} \\ &= \frac{1}{2}L\{\cos(4t)\} - \frac{\sqrt{3}}{2}L\{\sin(4t)\} \end{aligned}$$

Usando os pares de transformadas da Tabela A vem:

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+16} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{s^2+16} = \frac{1/2s - 2\sqrt{3}}{s^2+16}$$

Código MATLAB para cálculo da transformada de Laplace de $f(t)$

```
>> syms t
>> f=cos(4*t+pi/3);
>> F=laplace(f)

F =

1/32*s/(1/16*s^2+1)-1/8*3^(1/2)/(1/16*s^2+1)
```

e) $f(t) = t^2 \cos(2t)$

Usando os pares de transformadas da Tabela A e as propriedades da Tabela B vem:

$$a(t) = \cos(2t) \overset{L}{\leftrightarrow} A(s) = \frac{s}{s^2+4}$$
$$b(t) = ta(t) \overset{L}{\leftrightarrow} B(s) = -\frac{dA(s)}{ds} = \frac{s^2-4}{\left(s^2+4\right)^2}$$
$$f(t) = tb(t) \overset{L}{\leftrightarrow} F(s) = -\frac{dB(s)}{ds}$$

Logo,

$$F(s) = \frac{2s\left(s^2-12\right)}{\left(s^2+4\right)^3}$$

Código MATLAB para cálculo da transformada de Laplace de $f(t)$

```
>> syms t
>> f=t^2*cos(2*t);
>> F=laplace(f)

F =

2/(s^2+4)^3*(s^3-12*s)
```

f) $f(t) = e^{-3t} \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$

Usando a propriedade

$$e^{-at} f(t) \overset{L}{\leftrightarrow} F(s+a)$$

e a transformada $F(s)$ obtida na alinea d), temos que:

$$F(s) = \frac{1/2(s+3) - 2\sqrt{3}}{(s+3)^2 + 16} = \frac{1/2s + \left(3/2 - 2\sqrt{3}\right)}{s^2 + 6s + 25}$$

g) $f(t) = e^{-3t} \int_0^t t \sin(2t) dt$

Usando os pares de transformadas da Tabela A e as propriedades da Tabela B vem:

$$a(t)=\sin(2t) \overset{L}{\leftrightarrow} A(s)=\frac{2}{s^2+4}$$
$$b(t)=ta(t) \overset{L}{\leftrightarrow} B(s)=-\frac{dA(s)}{ds}=\frac{4s}{\left(s^2+4\right)^2}$$
$$c(t)=\int_0^t b(t)dt \overset{L}{\leftrightarrow} C(s)=\frac{B(s)}{s}=\frac{4}{\left(s^2+4\right)^2}$$
$$f(t)=e^{-3t}c(t) \overset{L}{\leftrightarrow} F(s)=C(s+3)$$

Logo,

$$F(s)=\frac{4}{\left((s+3)^2+4\right)^2}$$

3. Calcule a transformada inversa de Laplace $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ das seguintes transformadas $F(s)$:

a) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2}$

Reescrevendo $F(s)$ como

$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}$$

vem a seguinte expressão para $f(t)$:

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

Usando os pares de transformadas da Tabela A, temos que:

$$f(t)=1+t\,, \qquad t\geq 0$$

Código MATLAB para cálculo da transformada inversa de Laplace de $F(s)$

```
>> syms s
>> F=(s+1)/s^2;
>> f=ilaplace(F)

f =

1+t
```

b) $F(s)=\dfrac{s^2-3}{s+2}$

Para $F(s)$ ser uma função própria (grau do numerador menor que o grau do denominador) esta é expandida da seguinte forma (através da divisão longa):

$$X(s)=\frac{s^2-3}{s+2}=-2+s+\frac{1}{s+2}$$

Código MATLAB para expansão em fraccões parciais de $X(s)$

```
>> num=[1 0 -3];
>> den=[1 2];
>> [r,p,k]=residue(num,den)

r =

     1

p =

    -2

k =

     1    -2
```

Usando os pares de transformadas da Tabela A e as propriedades da Tabela B vem:

$$\delta(t) \overset{L}{\leftrightarrow} 1$$
$$\frac{d}{dt}\delta(t) \overset{L}{\leftrightarrow} s$$
$$e^{-2t} \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+2}$$

Assim, obtém-se:

$$f(t)=-2\delta(t)+\frac{d}{dt}\delta(t)+e^{-2t}, \quad t>0^-$$

c) $F(s)=\dfrac{e^{-\tau s}}{s^2}$

Sabendo que

$$tu(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^2}$$

e usando a propriedade

$$f(t-\alpha)u(t-\alpha) \overset{L}{\leftrightarrow} e^{-\alpha s}F(s)$$

vem a seguinte expressão para $f(t)$:

$$f(t)=(t-\tau)u(t-\tau)$$

d) $F(s)=\dfrac{10}{s(s+1)(s+10)}$

Código MATLAB para cálculo da transformada inversa de Laplace de $F(s)$

```
>> syms s
>> F=10/(s*(s+1)*(s+10));
>> f=ilaplace(F)

f =

-10/9*exp(-t)+1+1/9*exp(-10*t)
```

Logo,

$$f(t)=1-\frac{10}{9}e^{-t}+\frac{1}{9}e^{-10t}, \qquad t\geq 0$$

e) $F(s)=\dfrac{2s^2+10s+11}{s^2+5s+6}$

Para $F(s)$ ser uma função própria (grau do numerador menor que o grau do denominador) esta é expandida da seguinte forma (através da divisão longa):

$$X(s)=\frac{2s^2+10s+11}{s^2+5s+6}=2-\frac{1}{s^2+5s+6}=2-X_1(s)$$

Código MATLAB para determinação dos pólos de $X_1(s)$

```
>> roots([1 5 6])

ans =

-3.0000
-2.0000
```

Pólos de $X_1(s)$: $s^2+5s+6=0 \Rightarrow s=-2$ e $s=-3$ (pólos reais simples).

Aplicando o método de expansão em fraccões parciais a $X_1(s)$, temos que:

$$X_1(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}=\frac{1}{(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}$$

$$A=\left[(s+2)X_1(s)\right]_{s=-2}=\left[\frac{1}{s+3}\right]_{s=-2}=1$$
$$B=\left[(s+3)X_1(s)\right]_{s=-3}=\left[\frac{1}{s+2}\right]_{s=-3}=-1$$

Então,

$$X_1(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

Logo,

$$X(s)=2-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

Código MATLAB para expansão em fraccões parciais de $X(s)$

```
>> num=[2 10 11];
>> den=[1 5 6];
>> [r,p,k]=residue(num,den)

r =

    1.0000
   -1.0000

p =

   -3.0000
   -2.0000

k =

     2
```

Usando os pares de transformadas da Tabela A vem:

$$\delta(t) \overset{L}{\leftrightarrow} 1$$

$$e^{-at} \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a}$$

Assim, obtém-se:

$$f(t) = 2\delta(t) - e^{-2t} + e^{-3t}, \qquad t > 0^-$$

f) $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+s+1)}$

Código MATLAB para cálculo da transformada inversa de Laplace de $F(s)$

```
>> syms s
>> F=1/(s*(s^2+s+1));
>> f=ilaplace(F)

f =

-exp(-1/2*t)*cos(1/2*3^(1/2)*t)-1/3*3^(1/2)*exp(-1/2*t)*sin(1/2*3^(1/2)*t)+1

>> f=vpa(f,3)

f =

-1.*exp(-.500*t)*cos(.865*t)-.576*exp(-.500*t)*sin(.865*t)+1.
```

Logo,

$$f(t) = 1 - e^{-0,5t}\left[\cos(0,865t) + 0,576\sin(0,865t)\right]$$

Usando a relação matemática

$$A\cos(x) + B\sin(x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(x - \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)\right)$$

vem a seguinte expressão (alternativa) para $f(t)$:

$$f(t) = 1 - 1{,}154e^{-0,5t}\cos(0,865t - 0,523), \qquad t \geq 0$$

g) $F(s) = \dfrac{1}{s^2}\left(1 - 2.e^{-s} + e^{-2.s}\right)$ e esboce o gráfico da função $f(t)$

A expressão de $F(s)$ pode ser reescrita como:

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s^2}e^{-2s}$$

Sabendo que

$$tu(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^2}$$

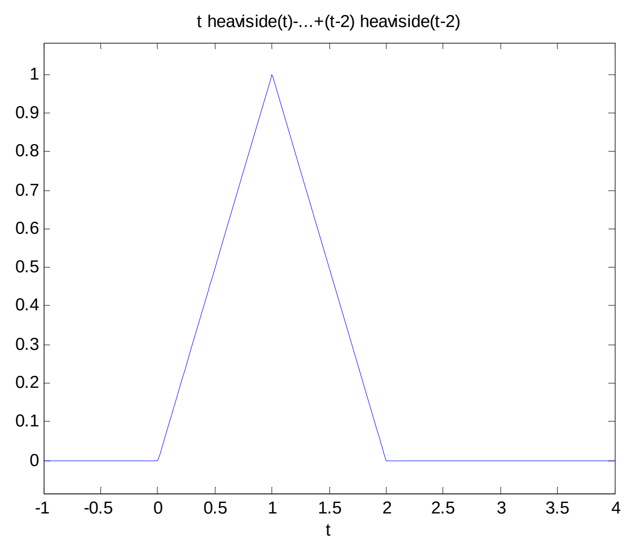
e usando a propriedade

$$f(t-\alpha)u(t-\alpha) \overset{L}{\leftrightarrow} e^{-\alpha s}F(s)$$

vem a seguinte a expressão para $f(t)$:

$$f(t)=tu(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)$$

O gráfico de $f(t)$, obtido através do MATLAB, está ilustrado na figura abaixo.



Código MATLAB para visualização da função $f(t)$

```
>> syms t
>> f=t*heaviside(t)-2*(t-1)*heaviside(t-1)+(t-2)*heaviside(t-2);
>> ezplot(f,[-1 4])
```

h) $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$

A função $F(s)$ pode ser reescrita como:

$$F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{s+3}{s^3+5s^2+8s+4}$$

Aplicando o método de expansão em fraccões parciais a $F(s)$, temos que:

$$F(s)=\frac{s+3}{s^3+5s^2+8s+4}=-\frac{2}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{2}{s+1}$$

Código MATLAB para expansão em fraccões parciais de $F(s)$

```
>> num=[1 3];
>> den=[1 5 8 4];
>> [r,p,k]=residue(num,den)

r =

   -2.0000
   -1.0000
    2.0000


p =

   -2.0000
   -2.0000
   -1.0000


k =

     []
```

Usando os pares de transformadas da Tabela A e as propriedades da Tabela B vem:

$$e^{-at} \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a}$$
$$te^{-at} \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{(s+a)^2}$$

Assim, obtém-se:

$$f(t)=2e^{-t}-(2+t)e^{-2t}, \qquad t\geq 0$$

i) $F(s)=\dfrac{s^3+2s+4}{\left(s^4-16\right)}$

Aplicando o método de expansão em fraccões parciais a $F(s)$, temos que:

$$F(s)=\frac{s^3+2s+4}{\left(s^4-16\right)}=\frac{0{,}25}{s+2}+\frac{0{,}5}{s-2}+\frac{0{,}125+j0{,}125}{s-2j}+\frac{0{,}125-j0{,}125}{s+2j}$$

Código MATLAB para expansão em fraccões parciais de $F(s)$

```
>> num=[1 0 2 4];
>> den=[1 0 0 0 -16];
>> [r,p,k]=residue(num,den)

r =

   0.2500
   0.5000
   0.1250 + 0.1250i
   0.1250 - 0.1250i

p =

  -2.0000
   2.0000
   0.0000 + 2.0000i
   0.0000 - 2.0000i

k =

     []
```

Combinando os dois últimos termos da expressão de $F(s)$, temos que:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{0{,}25}{s+2}+\frac{0{,}5}{s-2}+\frac{0{,}25s-0{,}5}{s^2+4} \\ &= \frac{0{,}25}{s+2}+\frac{0{,}5}{s-2}+0{,}25\frac{s}{s^2+4}-0{,}25\frac{2}{s^2+4} \end{aligned}$$

Usando os pares de transformadas da Tabela A vem:

$$e^{-at} \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a}$$

$$\cos(2t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{s}{s^2+4}$$
$$\sin(2t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{2}{s^2+4}$$

Assim, obtém-se:

$$f(t) = 0{,}25e^{-2t} + 0{,}5e^{2t} + 0{,}25\cos(2t) - 0{,}25\sin(2t), \quad t \geq 0$$

4. Resolva as seguintes equações diferenciais para as entradas e condições iniciais especificadas:

a) $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = x(t)$, $\quad y(0) = y'(0) = 0$, $x(t) = 2e^{-2t}$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação, temos que:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 5[sY(s) - y(0)] + 4Y(s) = X(s)$$

Substituindo as condições iniciais vem:

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = X(s)$$
$$\left(s^2 + 5s + 4\right)Y(s) = X(s)$$

Resolvendo para $Y(s)$, temos que:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+5s+4}X(s)$$

Sabendo que

$$X(s) = L\{x(t)\} = L\{2e^{-2t}\} = \frac{2}{s+2}$$

a expressão final de $Y(s)$ é:

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)\left(s^2+5s+4\right)}$$

Código MATLAB para determinação dos pólos de $Y(s)$

```
>> roots(conv([1 2],[1 5 4]))

ans =

  -4.0000
  -2.0000
  -1.0000
```

Pólos de $Y(s)$: $s=-1$, $s=-2$ e $s=-4$ (pólos reais simples).

Aplicando o método de expansão em fracções parciais, temos que:

$$Y(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+4)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+4}$$

em que

$$A=\left[sY(s)\right]_{s=-1}=\left[\frac{2}{(s+2)(s+4)}\right]_{s=-1}=\frac{2}{3}$$

$$A=\left[sY(s)\right]_{s=-2}=\left[\frac{2}{(s+1)(s+4)}\right]_{s=-2}=-1$$

$$C=\left[sY(s)\right]_{s=-4}=\left[\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-4}=\frac{1}{3}$$

Então,

$$Y(s)=\frac{2}{3}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+4}$$

Código MATLAB para expansão em fracções parciais de $Y(s)$

```
>> num=2;
>> den=conv([1 2],[1 5 4]);
>> [r,p,k]=residue(num,den)

r =

    0.3333
   -1.0000
    0.6667

p =

   -4.0000
   -2.0000
   -1.0000

k =

     []
```

Usando o par de transformada

$$e^{-at} \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a}$$

a expressão final de $y(t)$ é:

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-4t}, \qquad t \geq 0$$

b) $y''(t) + y(t) = x(t)$, $\qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ x(t) = t$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação, temos que:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = X(s)$$

Substituindo as condições iniciais vem:

$$s^2Y(s) - s + 1 + Y(s) = X(s)$$
$$s^2Y(s) + Y(s) = X(s) + s - 1$$
$$\left(s^2+1\right)Y(s) = X(s) + s - 1$$

Resolvendo para $Y(s)$, temos que:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}X(s) + \frac{s-1}{s^2+1}$$

Sabendo que

$$X(s) = L\{x(t)\} = L\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

a expressão final de $Y(s)$ é:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)} + \frac{s-1}{s^2+1}$$

Reescrevendo $Y(s)$ como

$$Y(s) = \frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} = Y_1(s) + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$$

e expandindo $Y_1(s)$ em fracções parciais vem:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{j0{,}5}{s-j} - \frac{j0{,}5}{s+j} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$$

Código MATLAB para expansão em fraccões parciais de $Y_1(s)$

```
>> num=1;
>> den=[1 0 1 0 0];
>> [r,p,k]=residue(num,den)

r =

        0 + 0.5000i
        0 - 0.5000i
        0
   1.0000

p =

        0 + 1.0000i
        0 - 1.0000i
        0
        0

k =

     []
```

Combinando o segundo e terceiro termos de $Y(s)$, temos que:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}$$

Usando os pares de transformadas da Tabela A vem:

$$t \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^2}$$

$$\cos(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{s}{s^2+1}$$

$$\sin(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^2+1}$$

Assim, obtém-se:

$$y(t) = t + \cos(t) - 2\sin(t), \qquad t \geq 0$$

c) $y''(t)+2y'(t)=e^{t}$, $y(0)=y'(0)=0$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação, temos que:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2[sY(s)-y(0)]=\frac{1}{s-1}$$

Substituindo as condições iniciais vem:

$$s^2Y(s)+2sY(s)=\frac{1}{s-1}$$
$$(s^2+2s)Y(s)=\frac{1}{s-1}$$

Resolvendo para $Y(s)$, obtém-se:

$$Y(s)=\frac{1}{s(s+2)(s-1)}$$

Aplicando o método de expansão em fraccões parciais vem:

$$Y(s)=\frac{1}{s(s+2)(s-1)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{6}\frac{1}{s+2}+\frac{1}{3}\frac{1}{s-1}$$

Código MATLAB para expansão em fraccões parciais de $Y(s)$

```
>> num=1;
>> den=conv(conv([1 0],[1 2]),[1 -1]);
>> [r,p,k]=residue(num,den)

r =

    0.1667
    0.3333
   -0.5000

p =

    -2
     1
     0

k =

     []
```

Usando os pares de transformadas da Tabela A vem:

$$u(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s}$$
$$e^{-at} \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a}$$

Assim, a expressão final de $y(t)$ é:

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}, \qquad t \geq 0$$

d) $y''(t) + y'(t) = \sin(t)$, $\qquad y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação, temos que:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) = \frac{1}{s^2+1}$$

Substituindo as condições iniciais vem:

$$s^2Y(s) - \alpha s - \beta + sY(s) - \alpha = \frac{1}{s^2+1}$$
$$s^2Y(s) + sY(s) = \frac{1}{s^2+1} + \alpha(s+1) + \beta$$
$$\left(s^2+s\right)Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \alpha(s+1) + \beta$$

Resolvendo para $Y(s)$, temos que:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)\left(s^2+1\right)} + \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s(s+1)} = Y_1(s) + \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s(s+1)}$$

Aplicando o método de expansão em fraccões parciais a $Y_1(s)$ vem:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s(s+1)\left(s^2+1\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

em que

$$A = \left[sY_1(s)\right]_{s=0} = \left[\frac{1}{(s+1)\left(s^2+1\right)}\right]_{s=0} = 1$$

$$B = \left[(s+1)Y_1(s)\right]_{s=-1} = \left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\left[Cs + D\right]_{s=-j} = \left[\frac{1}{s(s+1)}\right]_{s=-j} \Rightarrow D - jC = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} C = -\dfrac{1}{2} \\ D = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Então,

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} + \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s(s+1)}$$

Usando os pares de transformadas da Tabela A vem:

$$u(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s}$$

$$e^{-t} \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+1}$$

$$\cos(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{s}{s^2+1}$$

$$\sin(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^2+1}$$

$$1 - e^{-t} \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s(s+1)}$$

Assim, obtém-se:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t) + \alpha + \beta\left(1 - e^{-t}\right), \quad t \geq 0$$

A figura seguinte mostra a sessão do MATLAB para a determinação da solução $y(t)$ da equação diferencial 4a), a qual corresponde à transformada inversa da transformada de $Y(s)$ calculada anteriormente. Note a utilização dos comandos de MATLAB `pretty` e `simplify`.

Exemplo de uma sessão do MATLAB de resolução do problema 4d)

```
>> syms s alfa beta
>> Y=1/(s*(s+1)*(s^2+1))+alfa/s+beta/(s*(s+1))

Y =

1/s/(s+1)/(s^2+1)+alfa/s+beta/s/(s+1)


>> pretty(Y)

                              1              alfa      beta
                     ------------------ + ---- + ---------
                                   2          s      s (s + 1)
                     s (s + 1) (s  + 1)
>> Y=simplify(Y)

Y =

(1+alfa*s^3+alfa*s+alfa*s^2+alfa+beta*s^2+beta)/s/(s+1)/(s^2+1)


>> pretty(Y)

                       3                  2                 2
            1 + alfa s  + alfa s + alfa s  + alfa + beta s  + beta
            ------------------------------------------------------
                                            2
                               s (s + 1) (s  + 1)
>> y=ilaplace(Y)

y =

1+beta+alfa+(-beta-1/2)*exp(-t)-1/2*cos(t)-1/2*sin(t)


>> pretty(y)

       1 + beta + alfa + (-beta - 1/2) exp(-t) - 1/2 cos(t) - 1/2 sin(t)
```

e) $y'(t)+3y(t)+2\int_0^t y(t)dt=1$, $\quad y(0)=1$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação, temos que:

$$sY(s)-y(0)+3Y(s)+2\frac{1}{s}Y(s)=\frac{1}{s}$$

Substituindo as condições iniciais vem:

$$sY(s)-1+3Y(s)+2\frac{1}{s}Y(s)=\frac{1}{s}$$
$$\left(s+3+2\frac{1}{s}\right)Y(s)=\frac{1}{s}+1$$

$$\left(\frac{s^2+3s+2}{s}\right)Y(s)=\frac{s+1}{s}$$

Resolvendo para $Y(s)$, temos que:

$$Y(s)=\frac{s+1}{s^2+3s+2}$$

Código MATLAB para determinação dos zeros/pólos de $Y(s)$

```
>> num=[1 1];
>> den=[1 3 2];
>> [z,p,K]=tf2zp(num,den)

z =

   -1

p =

   -2
   -1

K =

    1
```

Zeros de $Y(s)$: $s=-1$. Pólos de $Y(s)$: $s=-1$ e $s=-2$ (pólos reais simples). Ganho $K=1$.

Então, a função $Y(s)$ pode ser expressa como:

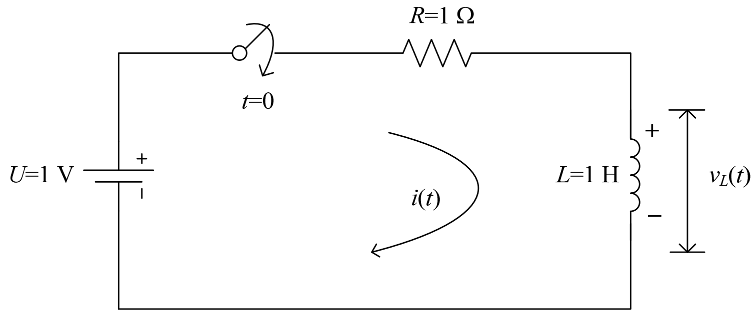
$$Y(s)=\frac{s+1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+2}$$

Calculando a transformada inversa de Laplace de $Y(s)$ vem:

$$y(t)=e^{-2t}\,,\qquad t\geq 0$$

5. Analise os circuitos apresentados a seguir. Considere que os sistemas se encontram em repouso no instante em que o interruptor é fechado, para $t=0$. Determine a corrente $i(t)$ e a tensão aos terminais da inductância, $v_L(t)$, para $t\geq 0$.

a)



A equação diferencial que modela o circuito é dada por (com $v_i(t) = Uu(t)$):

$$v_i(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Aplicando a transformada de Laplace vem:

$$V_i(s) = RI(s) + L\left(sI(s) - i\left(0^-\right)\right)$$

Sendo $i\left(0^-\right) = 0$, temos que:

$$V_i(s) = RI(s) + LsI(s) = (R + Ls)I(s)$$

Resolvendo para $I(s)$ vem:

$$I(s) = \frac{V_i(s)}{R + Ls}$$

Substituindo os valores de *R*, *L* e $V_i(s) = L\{v_i(t)\} = \dfrac{U}{s} = \dfrac{1}{s}$, temos que:

$$I(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Calculando a transformada inversa de Laplace de $I(s)$, obtém-se:

$$i(t) = 1 - e^{-t}, \qquad t \geq 0$$

A tensão aos terminais da inductância, $v_L(t)$, é dada por:

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

A transformada de Laplace de $v_L(t)$ é:

$$V_L(s) = LsI(s)$$

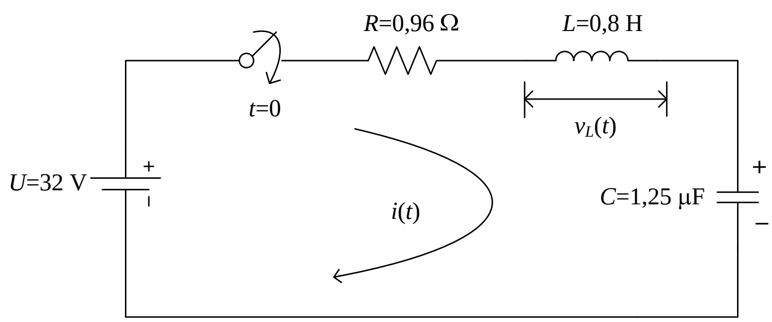
Substituindo os valores de L e de $I(s)$ vem:

$$V_L(s) = \frac{1}{s+1}$$

Calculando a transformada inversa de Laplace de $V_L(s)$, obtém-se:

$$v_L(t) = e^{-t}, \qquad t \geq 0$$

b)



A equação diferencial que modela o circuito é dada por (com $v_i(t) = Uu(t)$):

$$v_i(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\tau)d\tau$$

Aplicando a transformada de Laplace vem:

$$V_i(s) = RI(s) + L\left(sI(s) - i\left(0^-\right)\right) + \frac{1}{Cs}I(s)$$

Sendo $i\left(0^-\right) = 0$, temos que:

$$V_i(s) = RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = \left(R + Ls + \frac{1}{Cs}\right)I(s)$$

Resolvendo para $I(s)$ vem:

$$I(s) = \frac{V_i(s)}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{L}\frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}V_i(s)$$

Substituindo os valores de R, L, C e $V_i(s) = L\{v_i(t)\} = \frac{U}{s} = \frac{32}{s}$, temos que:

$$I(s)=\frac{40}{s^2+1{,}2s+1\times10^6}$$

Código MATLAB para cálculo da transformada inversa de Laplace de $I(s)$

```
>> syms s
>> I=40/(s^2+1.2*s+1e6);
>> it=ilaplace(I)

it =

200/24999991*24999991^(1/2)*exp(-3/5*t)*sin(1/5*24999991^(1/2)*t)

>> it=vpa(it,3)

it =

.400e-1*exp(-.600*t)*sin(.100e4*t)
```

Então, a expressão de $i(t)$ é :

$$i(t)=0{,}04e^{-0{,}6t}\sin(1000t),\qquad t\geq 0$$

A tensão aos terminais da inductância, $v_L(t)$, é dada por:

$$v_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$

A transformada de Laplace de $v_L(t)$ é:

$$V_L(s)=LsI(s)$$

Substituindo os valores de L e de $I(s)$ vem:

$$V_L(s)=\frac{32s}{s^2+1{,}2s+1\times10^6}$$

Código MATLAB para cálculo da transformada inversa de Laplace de $V_L(s)$

```
>> syms s
```

```
>> VL=(32*s)/(s^2+1.2*s+1e6);
>> vl=ilaplace(VL)

vl =

32*exp(-3/5*t)*cos(1/5*24999991^(1/2)*t)-96/24999991*24999991^(1/2)*exp(-3/5*t)*sin(1/5*24999991^(1/2)*t)

>> vl=vpa(vl,3)

vl =

32.*exp(-.600*t)*cos(.100e4*t)-.192e-1*exp(-.600*t)*sin(.100e4*t)
```

Então, a expressão de $v_L(t)$ é :

$$v_L(t) = e^{-0,6t}\left[32\cos(1000t) - 0,0192\sin(1000t)\right]$$

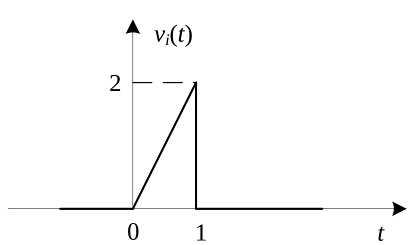
Usando a relação matemática

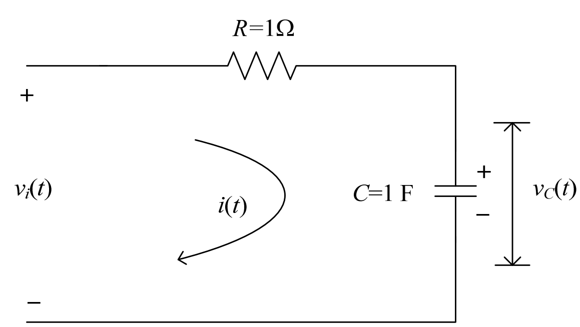
$$A\cos(x) + B\sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\left(x - \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)\right)$$

vem a seguinte expressão (alternativa) para $v_l(t)$:

$$v_L(t) = 32e^{-0,6t}\cos(1000t - 1,57), \qquad t \ge 0$$

6. Considere o circuito RC representado na figura seguinte. Assuma que o condensador C se encontra inicialmente descarregado. Determine a corrente $i(t)$ e a tensão aos terminais do condensador, $v_C(t)$, quando à entrada é aplicado o sinal $v_i(t)$.





A equação diferencial que modela o circuito é dada por:

$$v_i(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\tau)d\tau$$

Aplicando a transformada de Laplace vem:

$$V_i(s) = RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = \left(R + \frac{1}{Cs}\right)I(s)$$

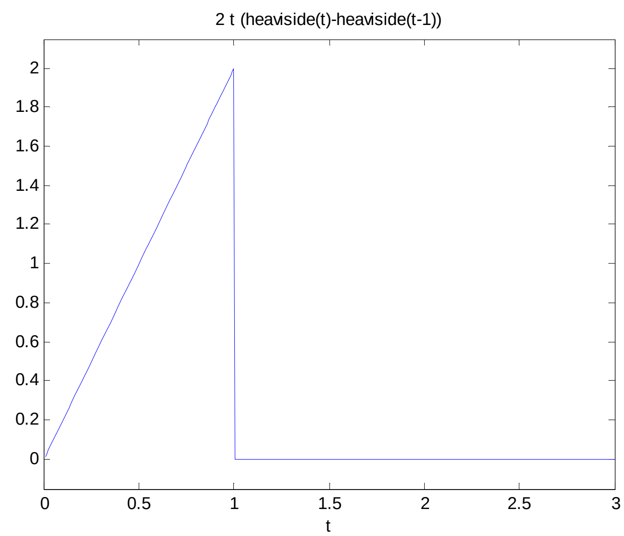
Resolvendo para $I(s)$, temos que:

$$I(s) = \frac{V_i(s)}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{R}\frac{s}{s + \frac{1}{RC}}V_i(s)$$

Do gráfico da entrada $v_i(t)$ retira-se a seguinte expressão:

$$v_i(t) = 2t[u(t) - u(t-1)]$$

O gráfico de $v_i(t)$, obtido através do MATLAB, está ilustrado na figura abaixo.



Código MATLAB para visualização e cálculo da transformada de Laplace de $v_i(t)$

```
>> syms t
>> vi=2*t*(heaviside(t)-heaviside(t-1));
>> ezplot(vi,[0 3])
>> Vi=laplace(vi)

Vi =

2/s^2-2*exp(-s)/s-2*exp(-s)/s^2
```

Então, a expressão de $V_i(s)$ é:

$$V_i(s)=\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s^2}e^{-s}-\frac{2}{s}e^{-s}$$

Substituindo $V_i(s)$ na expressão de $I(s)$ vem:

$$I(s)=\frac{2}{R}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}-e^{-s}\right)$$

Substituindo os valores de *R* e *C*, temos que:

$$I(s)=\frac{2}{s+1}\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}-e^{-s}\right)$$

Reescrevendo $I(s)$ como

$$I(s)=\frac{2}{s(s+1)}-\frac{2}{s(s+1)}e^{-s}-\frac{2}{s+1}e^{-s}=I_1(s)-I_1(s)e^{-s}-I_2(s)e^{-s}$$

e aplicando o método de expansão em fracções parciais a $I_1(s)$ vem:

$$I_1(s)=\frac{2}{s(s+1)}=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+1}$$

Código MATLAB para expansão em fraccões parciais de $I_1(s)$

```
>> num=2;
```

```
>> den=[1 1 0];
>> [r,p,k]=residue(num,den)

r =

    -2
     2

p =

    -1
     0

k =

     []
```

Calculando a transformada inversa de Laplace de $I_1(s)$ e $I_2(s)$ vem:

$$i_1(t) = 2u(t) - 2e^{-t}u(t)$$
$$i_2(t) = 2e^{-t}u(t)$$

Usando a propriedade

$$f(t-\alpha)u(t-\alpha) \overset{L}{\leftrightarrow} e^{-\alpha s}F(s)$$

vem a seguinte expressão para $i(t)$:

$$\begin{aligned} i(t) &= 2u(t) - 2e^{-t}u(t) - 2u(t-1) + 2e^{-(t-1)}u(t-1) - 2e^{-(t-1)}u(t-1) \\ &= \left(2 - 2e^{-t}\right)u(t) + \left(-2 + 2e^{-(t-1)} - 2e^{-(t-1)}\right)u(t-1) \end{aligned}$$

A tensão aos terminais do condensador, $v_C(t)$, é dada por:

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

A transformada de Laplace de $v_C(t)$ é:

$$V_C(s) = \frac{1}{Cs}I(s)$$

Substituindo os valores de C e de $I(s)$ vem:

$$V_C(s)=\frac{2}{s(s+1)}\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}-e^{-s}\right)$$

Reescrevendo $V_C(s)$ como

$$V_C(s)=\frac{2}{s^2(s+1)}-\frac{2}{s^2(s+1)}e^{-s}-\frac{2}{s(s+1)}e^{-s}=V_1(s)-V_1(s)e^{-s}-V_2(s)e^{-s}$$

e aplicando o método de expansão em fracções parciais a $V_1(s)$ vem:

$$V_1(s)=\frac{2}{s^2(s+1)}=-\frac{2}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s+1}$$

Código MATLAB para expansão em fraccões parciais de $V_1(s)$

```
>> num=2;
>> den=[1 1 0 0];
>> [r,p,k]=residue(num,den)

r =

     2
    -2
     2


p =

    -1
     0
     0


k =

     []
```

Calculando a transformada inversa de Laplace de $V_1(s)$ e $V_2(s)$ vem:

$$v_1(t)=-2u(t)+2tu(t)+2e^{-t}u(t)$$
$$v_2(t)=2u(t)-2e^{-t}u(t)$$

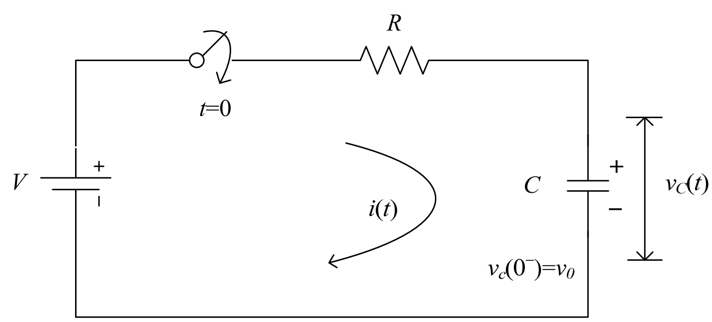
Usando a propriedade

$$f(t-\alpha)u(t-\alpha) \overset{L}{\leftrightarrow} e^{-\alpha s}F(s)$$

vem a seguinte expressão para $v_C(t)$:

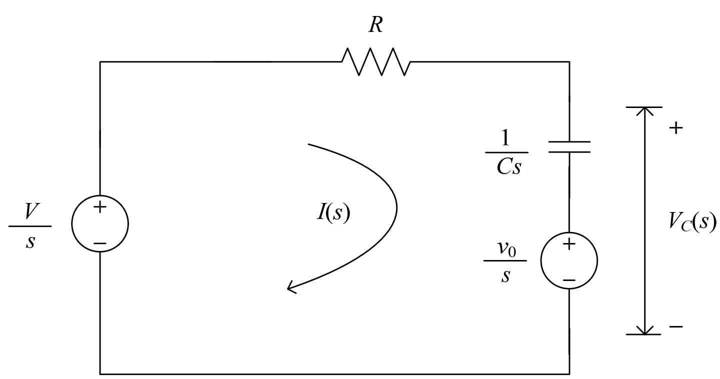
$$v_C(t) = \left(-2 + 2t + 2e^{-t}\right)u(t) - 2(t-1)u(t-1)$$

7. Considere o circuito RC representado na figura seguinte. O interruptor é fechado no instante $t = 0$. Assuma que o condensador C se encontra inicialmente carregado com uma tensão $v(0^-) = v_0$.



a) Determine a corrente $i(t)$.

O circuito equivalente de Laplace é dado por:



Do circuito anterior retira-se a seguinte equação das malhas:

$$\left(R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) + \frac{v_0}{s} = \frac{V}{s}$$

Resolvendo para $I(s)$, obtém-se:

$$\left(R+\frac{1}{Cs}\right)I(s)=\frac{V-v_0}{s}$$

$$I(s)=\frac{V-v_0}{s}\frac{1}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{V-v_0}{R}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$

Calculando a transformada inversa de Laplace de $I(s)$ vem:

$$i(t)=\frac{V-v_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}, \qquad t\geq 0$$

b) Determine a tensão aos terminais do condensador, $v_C(t)$.

Do circuito equivalente de Laplace vem:

$$V_C(s)=\frac{1}{Cs}I(s)+\frac{v_0}{s}$$

Substituindo $I(s)$ obtido na alínea a) nas equação anterior, obtém-se:

$$V_C(s)=\frac{V-v_0}{RC}\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)}+\frac{v_0}{s}$$

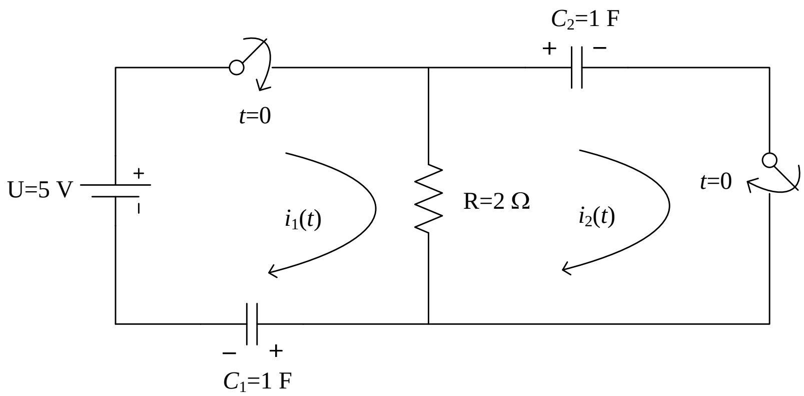
$$=(V-v_0)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)+\frac{v_0}{s}$$

$$=V\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)+\frac{v_0}{s+\frac{1}{RC}}$$

Calculando a transformada inversa de Laplace de $V_C(s)$ vem:

$$v_C(t)=V\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)+v_0e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t\geq 0$$

8. Considere o circuito representado na figura seguinte. Os dois interruptores são fechados ao mesmo tempo no instante $t = 0$. As tensões nos condensadores C_1 e C_2, antes de os interruptores serem fechados, são de 1 V e de 2 V, respectivamente.

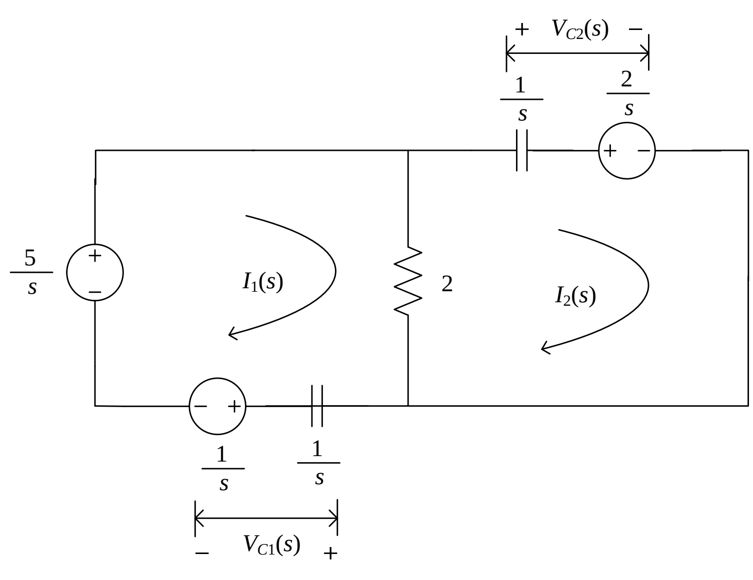


a) Determine as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

Das condições iniciais, temos que:

$$v_{C_1}\left(0^-\right) = 1 \text{ V} \ \text{ e } \ v_{C_2}\left(0^-\right) = 2 \text{ V}$$

O circuito equivalente de Laplace é dado por:



Do circuito anterior retira-se as seguintes equações das malhas:

$$\left(2 + \frac{1}{s}\right) I_1(s) - 2 I_2(s) = \frac{4}{s}$$

$$-2I_1(s)+\left(2+\frac{1}{s}\right)I_2(s)=-\frac{2}{s}$$

Resolvendo para $I_1(s)$ e $I_2(s)$, obtém-se (através da regra de Cramer):

$$I_1(s)=\frac{\begin{vmatrix}\frac{4}{s} & -2\\ -\frac{2}{s} & 2+\frac{1}{s}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2+\frac{1}{s} & -2\\ -2 & 2+\frac{1}{s}\end{vmatrix}}=\frac{s+1}{s+\frac{1}{4}}=\frac{s+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{s+\frac{1}{4}}=1+\frac{3}{4}\frac{1}{s+\frac{1}{4}}$$

$$I_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}2+\frac{1}{s} & \frac{4}{s}\\ -2 & -\frac{2}{s}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2+\frac{1}{s} & -2\\ -2 & 2+\frac{1}{s}\end{vmatrix}}=\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{4}}=\frac{s+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{s+\frac{1}{4}}=1-\frac{3}{4}\frac{1}{s+\frac{1}{4}}$$

Calculando a transformada inversa de Laplace de $I_1(s)$ e $I_2(s)$ vem:

$$i_1(t)=\delta(t)+\frac{3}{4}e^{-\frac{t}{4}},\qquad t>0^-$$

$$i_2(t)=\delta(t)-\frac{3}{4}e^{-\frac{t}{4}},\qquad t>0^-$$

Programa MATLAB para resolução do problema 8a)

```
syms s

A=[2+1/s -2;    -2 2+1/s];      % A
A1=[4/s -2;     -2/s 2+1/s];    % A1
A2=[2+1/s 4/s;  -2 -2/s];       % A2

% Regra de Cramer
I1=det(A1)/det(A)               % I1(s)
I2=det(A2)/det(A)               % I2(s)

i1=ilaplace(I1)               % i1(t)
i2=ilaplace(I2)               % i2(t)

I1 =
```

```
4*(s+1)/(4*s+1)

I2 =

2*(2*s-1)/(4*s+1)

 i1 =

dirac(t)+3/4*exp(-1/4*t)

 i2 =

dirac(t)-3/4*exp(-1/4*t)
```

b) Determine as tensões aos terminais dos condensadores para $t = 0^+$, $v_{C_1}(0^+)$ e $v_{C_2}(0^+)$.

Do circuito equivalente de Laplace vem:

$$V_{C_1}(s) = \frac{1}{s} I_1(s) + \frac{1}{s}$$
$$V_{C2}(s) = \frac{1}{s} I_2(s) + \frac{2}{s}$$

Substituindo $I_1(s)$ e $I_2(s)$ da alínea a) nas equações anteriores, obtém-se:

$$V_{C_1}(s) = \frac{1}{s} \frac{s+1}{s+\frac{1}{4}} + \frac{1}{s}$$

$$V_{C2}(s) = \frac{1}{s} \frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{4}} + \frac{2}{s}$$

Aplicando o teorema do valor inicial às expressões anteriores de $V_{C_1}(s)$ $V_{C2}(s)$, temos que:

$$v_{C_1}(0^+) = \lim_{s\to\infty} sV_{C_1}(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s+1}{s+\frac{1}{4}} + 1 = 1 + 1 = 2 \text{ V}$$

$$v_{C_2}\left(0^+\right)=\lim_{s\to\infty} sV_{C_2}\left(s\right)=\lim_{s\to\infty}\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{4}}+2=1+2=3\text{ V}$$

Alguns comandos de MATLAB úteis:

`help comando` – ajuda da função *`comando`*

`simple(F)` – encontra a expressão simbólica mais simples de *`F`*
`simplify(F)` – simplifica a expressão simbólica *`F`*
`pretty(F)` – mostra a expressão simbólica *`F`* de uma forma visual mais adequada

Tabela A: **Pares de Transformada de Laplace**[*]

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso unitário $\delta(t)$	1
2	Degrau unitário $u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	Rampa unitária t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at} \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
12	$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
13	$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
14	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}\left(be^{-bt}-ae^{-at}\right)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}\left(be^{-at}-ae^{-bt}\right)\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
18	$\frac{1}{a^2}\left(1-e^{-at}-ate^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$

[*] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Fourth Edition, Prentice-Hall, 2002.

(cont.)

19	$\frac{1}{a^2}\left(at-1+e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
21	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t\right) \quad (0<\xi<1)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t-\phi\right)$ $\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$ $\left(0<\xi<1, \quad 0<\phi<\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
24	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t+\phi\right)$ $\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$ $\left(0<\xi<1, \quad 0<\phi<\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\omega_n^2}{s\left(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2\right)}$
25	$1-\cos(\omega t)$	$\frac{\omega^2}{s\left(s^2+\omega^2\right)}$
26	$\omega t-\sin(\omega t)$	$\frac{\omega^3}{s^2\left(s^2+\omega^2\right)}$
27	$\sin(\omega t)-\omega t\cos(\omega t)$	$\frac{2\omega^3}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega}t\sin(\omega t)$	$\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
29	$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left[\cos(\omega_1 t)-\cos(\omega_2 t)\right] \quad \left(\omega_1^2\neq\omega_2^2\right)$	$\frac{s}{\left(s^2+\omega_1^2\right)\left(s^2+\omega_2^2\right)}$
31	$\frac{1}{2\omega}\left[\sin(\omega t)+\omega t\cos(\omega t)\right]$	$\frac{s^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$

Tabela B: **Propriedades da Transformada de Laplace**[†]

1	$L[Af(t)] = AF(s)$
2	$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$L_{\pm}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0^{\pm})$
4	$L_{\pm}\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = s^2 F(s) - sf(0^{\pm}) - \dot{f}(0^{\pm})$
5	$L_{\pm}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0^{\pm})$ onde $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)$
6	$L_{\pm}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int f(t)dt\right]_{t=0^{\pm}}$
7	$L_{\pm}\left[\int \ldots \int f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s^{n-k+1}}\left[\int \ldots \int f(t)(dt)^k\right]_{t=0^{\pm}}$
8	$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
9	$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{s \to 0} F(s)$ se $\int_0^{\infty} f(t)dt$ existe
10	$L\left[e^{-\alpha t} f(t)\right] = F(s+\alpha)$
11	$L[f(t-\alpha)u(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}F(s), \quad \alpha > 0$
12	$L[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
13	$L\left[t^2 f(t)\right] = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$
14	$L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$
15	$L\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^{\infty} F(s)ds$ se $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} f(t)$ existe
16	$L\left[f\left(\frac{1}{a}\right)\right] = aF(as)$
17	$L\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$
18	$L[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)dp$

[†] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Fourth Edition, Prentice-Hall, 2002.