Departamento de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto

TESIS
Teoria dos Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

–

Resolução dos Exercícios Propostos

Isabel Jesus
(isj@isep.ipp.pt)

Março de 2007

1. Utilizando o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, determine o número de raízes que se encontram no semi-plano direito e a localização de quaisquer raízes sobre o eixo $j\omega$ dos seguintes polinómios:

a) $s^2 + 4s + 1$

Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, obtemos:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & \\ 0 & 1 & \end{array}$$

Uma vez que não há mudanças de sinal na primeira coluna, o polinómio não tem raízes com parte real positiva.

Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
p = [1  4  1]
roots(p)
        ans =   –3.7321
                –0.2679
```

b) $s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$

Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, obtemos:

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & \\ 4 & \frac{10}{4} & 0 & 4 & \\ 3 & 2 & -\frac{24}{10} & & \\ 2 & 3 & 4 & & \\ 1 & -\frac{152}{30} & & & \\ 0 & 4 & & & \end{array}$$

Uma vez que há duas mudanças de sinal na primeira coluna, o polinómio tem duas raízes com parte real positiva.

Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
p = [1  4  3  2  1  4  4]
roots(p)
        ans =   –3.2644
                 0.6797 + 0.7488i
                 0.6797 – 0.7488i
                –0.6046 + 0.9935i
                –0.6046 – 0.9935i
                –0.8858
```

c) $s^3 + 4s^2 + 8s + 16$

Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, obtemos:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 16 \\ 1 & 4 & \\ 0 & 16 & \end{array}$$

Uma vez que não há mudanças de sinal na primeira coluna, o polinómio não tem raízes com parte real positiva.

Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
p = [1  4  8  16]
roots(p)
        ans =   –3.0874
                –0.4563 + 2.2303i
                –0.4563 – 2.2303i
```

d) $s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 2$

Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, obtemos:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & \\ 2 & 0 \approx \varepsilon > 0 & 2 & \\ 1 & 3 - \dfrac{2}{\varepsilon} < 0 & & \\ 0 & 2 & & \end{array}$$

Durante a aplicação do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, a este polinómio, verificou-se o caso especial 1:

❖ Se um termo da primeira coluna é zero e os restantes são não nulos, então o zero deve ser substituído por um número positivo pequeno ($\varepsilon > 0$) e os restantes valores calculados de seguida.

Uma vez que há duas mudanças de sinal na primeira coluna, o polinómio tem duas raízes com parte real positiva.

Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
p = [1  1  3  3  2]
roots(p)
        ans =    0.1304 + 1.5891i
                 0.1304 – 1.5891i
                –0.6304 + 0.6240i
                –0.6304 – 0.6240i
```

e) $s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 2$

Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, obtemos:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & \\ 2 & 5 & 2 & \\ 1 & \frac{12}{5} & & \\ 0 & 2 & & \end{array}$$

Uma vez que não há mudanças de sinal na primeira coluna, o polinómio não tem raízes com parte real positiva.

f) $s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12$

Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, obtemos:

5	1	11	28
4	5	23	12
3	$\frac{32}{5}$	$\frac{128}{5}$	
2	3	12	
1	$0 \approx \varepsilon > 0$		
0	12		

Durante a aplicação do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, a este polinómio, verificou-se o caso especial 1:

- Se um termo da primeira coluna é zero e os restantes são não nulos, então o zero deve ser substituído por um número positivo pequeno ($\varepsilon > 0$) e os restantes valores calculados de seguida.

Uma vez que o sinal do coeficiente acima de ε é idêntico ao do coeficiente abaixo, o polinómio tem um par de raízes imaginárias (duas raízes sobre o eixo $j\omega$).

Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
p = [1  5  11  23  28  12]
roots(p)
        ans =   –3.0000
                –0.0000 + 2.0000i
                –0.0000 – 2.0000i
                –1.0000 + 0.0000i
                –1.0000 – 0.0000i
```

2. Analise a estabilidade dos seguintes polinómios:

a) $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$

Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, obtemos:

4	1	3	5
3	2	4	
2	1	5	
1	-6		
0	5		

Uma vez que há duas mudanças de sinal na primeira coluna, o polinómio tem duas raízes com parte real positiva, logo este polinómio é instável.

b) $s^3 + s^2 + 2s + 2$

Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, obtemos:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 \approx \varepsilon > 0 & \\ 0 & 2 & \end{array}$$

Durante a aplicação do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, a este polinómio, verificou-se o caso especial 1:

- ❖ Se um termo da primeira coluna é zero e os restantes são não nulos, então o zero deve ser substituído por um número positivo pequeno ($\varepsilon > 0$) e os restantes valores calculados de seguida.

Uma vez que o sinal do coeficiente acima de ε é idêntico ao do coeficiente abaixo, o polinómio tem um par de raízes imaginárias (duas raízes sobre o eixo $j\omega$), logo este polinómio encontra-se no limite da estabilidade.

Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
p = [1  1  2  2]
roots(p)
        ans =     0.0000 + 1.4142i
                  0.0000 − 1.4142i
                 −1.0000
```

c) $s^3 + 2s^2 - 4s + 10$

Neste caso não se verifica a condição suficiente para a aplicação do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz: como há um coeficiente do polinómio que é negativo, logo este polinómio apresenta raízes com parte real positiva, sendo portanto instável.

Para confirmar este facto, podemos aplicar o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, e temos:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 10 \\ 1 & -9 & \\ 0 & 10 & \end{array}$$

Uma vez que há duas mudanças de sinal na primeira coluna, o polinómio tem duas raízes com parte real positiva, logo este polinómio é instável, como tínhamos visto.

d) $s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 12s + 12$

Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, obtemos:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & 12 & \\ 2 & 0 \approx \varepsilon > 0 & 12 & \\ 1 & 12 - \dfrac{36}{\varepsilon} < 0 & & \\ 0 & 12 & & \end{array}$$

Durante a aplicação do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, a este polinómio, verificou-se o caso especial 1:

- ❖ Se um termo da primeira coluna é zero e os restantes são não nulos, então o zero deve ser substituído por um número positivo pequeno ($\varepsilon > 0$) e os restantes valores calculados de seguida.

Uma vez que há duas mudanças de sinal na primeira coluna, o polinómio tem duas raízes com parte real positiva, logo este polinómio é instável.

Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
p = [1  3  4  12  12]
roots(p)
        ans =     0.3915 + 1.9154i
                  0.3915 − 1.9154i
                 −2.5532
                 −1.2297
```

e) $s^4 + 6s^2 + 25$

Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, obtemos:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 6 & 25 \\ 3 & 0 & 0 & \\ 2 & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & \end{array}$$

Durante a aplicação do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, a este polinómio, verificou-se o caso especial 2:

- Se todos os coeficientes de uma linha forem zero isso indica que existem raízes de igual amplitude mas de sinal oposto;

De acordo com a afirmação anterior já podemos concluir que o polinómio vai ser instável, uma vez que vai ter raízes de igual amplitude mas de sinal oposto. No entanto podemos confirmar o que acaba de ser dito:

Neste caso, o cálculo pode prosseguir através de um polinómio auxiliar formado com os coeficientes da linha anterior. A linha de zeros é substituída pelos coeficientes da derivada desse polinómio.

Assim, vamos considerar o polinómio auxiliar formado com os coeficientes da linha anterior ao da linha dos zeros:

$$P(s) = s^4 + 6s^2 + 25$$

O polinómio cujos coeficientes são a derivada do polinómio anterior é o seguinte:

$$P'(s) = 4s^3 + 12s$$

Podemos agora continuar a aplicação do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ficando com:

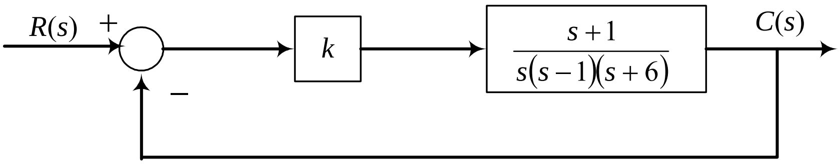
$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 6 & 25 \\ 3 & 4 & 12 & \\ 2 & 3 & 25 & \\ 1 & -\dfrac{64}{3} & & \\ 0 & 25 & & \end{array}$$

Uma vez que há duas mudanças de sinal na primeira coluna, o polinómio tem duas raízes com parte real positiva, logo este polinómio é instável.

Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
p = [4  0  6  0  25]
roots(p)
        ans =   –0.9354 + 1.2748i
                –0.9354 – 1.2748i
                 0.9354 + 1.2748i
                 0.9354 – 1.2748i
```

3. Considere o sistema de realimentação unitária apresentado na figura seguinte. As propriedades da estabilidade do sistema são função do ganho proporcional *k*. Determine a gama de valores de *k* para os quais o sistema permanece estável.



A função de transferência em malha fechada deste sistema é dada por:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+6)+k(s+1)}$$

Para este sistema ser estável, o denominador da função de transferência em malha fechada deve ter todas as suas raízes no semi-plano esquerdo, logo com parte real negativa. Uma vez que o polinómio do denominador da função de transferência em malha fechada é:

$$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + (k-6)s + k$$

podemos aplicar o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz e verificar qual é a gama de valores de *k* para os quais o sistema permanece estável:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k-6 \\ 2 & 5 & k \\ 1 & \dfrac{4k-30}{5} & \\ 0 & k & \end{array}$$

Para o sistema ter todas as raízes com parte real negativa não pode haver trocas de sinal nos coeficientes dos termos da primeira coluna, ou seja, têm que ser todos positivos. Logo, temos que ter:

$$\begin{cases} \dfrac{4k-30}{5} > 0 \\ k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 7{,}5 \\ k > 0 \end{cases}$$

Do exposto conclui-se que para o sistema permanecer estável devemos ter: $k > 7{,}5$.

4. Considere um sistema com a seguinte equação característica:

$$s^3 + 3ks^2 + (k+2)s + 4 = 0$$

Determine os valores de *k* para os quais o sistema é estável.

A equação característica de um dado sistema é o denominador da sua função de transferência em malha fechada. Para o sistema ser estável, todas as raízes da equação característica devem ter parte real negativa. Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, temos:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k+2 \\ 2 & 3k & 4 \\ 1 & \dfrac{3k(k+2)-4}{3k} & \\ 0 & 4 & \end{array}$$

Para o sistema ter todas as raízes com parte real negativa não pode haver trocas de sinal nos coeficientes dos termos da primeira coluna, ou seja, têm que ser todos positivos. Logo, tem que se verificar:

$$\begin{cases} 3k(k+2)-4>0 \\ 3k>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>0{,}5275 \\ k>0 \end{cases}$$

Do exposto conclui-se que para o sistema permanecer estável devemos ter: $k > 0{,}5275$.

5. Para o sistema de realimentação negativa unitária, com função de transferência no ramo directo igual a:

$$G(s) = \frac{k}{s(s^2 + 2s + 17)}$$

a) Determine os valores de *k* para os quais o sistema é estável.

A função de transferência em malha fechada deste sistema é dada por:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^3 + 2s^2 + 17s + k}$$

Para este sistema ser estável, o denominador da função de transferência em malha fechada deve ter todas as suas raízes no semi-plano esquerdo, logo com parte real negativa. Uma vez que o polinómio do denominador da função de transferência em malha fechada é:

$$\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + 17s + k$$

podemos aplicar o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz e verificar qual é a gama de valores de *k* para os quais o sistema permanece estável:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & \dfrac{34-k}{2} & \\ 0 & k & \end{array}$$

Para o sistema ter todas as raízes com parte real negativa não pode haver trocas de sinal nos coeficientes dos termos da primeira coluna, ou seja, têm que ser todos positivos. Logo, temos que ter:

$$\begin{cases} \dfrac{34-k}{2} > 0 \\ k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 34 \\ k > 0 \end{cases}$$

Do exposto conclui-se que para o sistema permanecer estável devemos ter: $0 < k < 34$.

b) Determine o valor do ganho para o qual o sistema tem pólos sobre o eixo $j\omega$.

Para o sistema ter os pólos sobre o eixo $j\omega$, um dos termos da primeira coluna deve ser zero e o sinal do coeficiente acima do zero deve ser igual ao do coeficiente abaixo. Assim, deve-se verificar a seguinte condição:

$$\begin{cases} \dfrac{34-k}{2} = 0 \\ k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 34 \\ k > 0 \end{cases}$$

Do exposto conclui-se que para o sistema permanecer estável devemos ter: $k = 34$.

6. Considere um sistema com a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s^3 + 6s^2 + 8s + 15}$$

Verifique se o sistema é estável.

Para este sistema ser estável, o denominador da função de transferência em malha fechada deve ter todas as suas raízes no semi-plano esquerdo, logo com parte real negativa. Uma vez que o polinómio do denominador da função de transferência em malha fechada é:

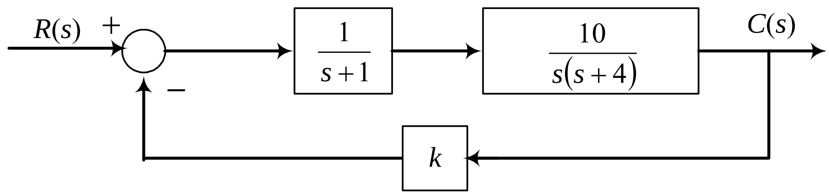
$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + 8s + 15$$

podemos aplicar o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz e verificar se este sistema é estável:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 15 \\ 1 & \frac{33}{6} & \\ 0 & 15 & \end{array}$$

Uma vez que não há mudanças de sinal na primeira coluna, o polinómio não tem raízes com parte real positiva, logo este sistema é estável.

7. Para o sistema realimentado com o seguinte diagrama de blocos:



Determine os valores de k para os quais o sistema é estável.

A função de transferência em malha fechada deste sistema é dada por:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 4s + 10k}$$

Para este sistema ser estável, o denominador da função de transferência em malha fechada deve ter todas as suas raízes no semi-plano esquerdo, logo com parte real negativa. Uma vez que o polinómio do denominador da função de transferência em malha fechada é:

$$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 4s + 10k$$

podemos aplicar o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz e verificar qual é a gama de valores de k para os quais o sistema permanece estável:

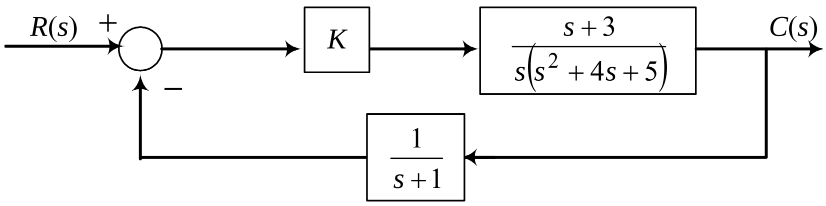
$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 10k \\ 1 & 4-2k & \\ 0 & 10k & \end{array}$$

Para o sistema ter todas as raízes com parte real negativa não pode haver trocas de sinal nos coeficientes dos termos da primeira coluna, ou seja, têm que ser todos positivos. Logo, temos que ter:

$$\begin{cases} 4-2k>0 \\ 10k>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k<2 \\ k>0 \end{cases}$$

Do exposto conclui-se que para o sistema permanecer estável devemos ter: $0 < k < 2$.

8. Para o sistema realimentado com o seguinte diagrama de blocos:



Determine os valores de K para os quais o sistema é estável.

A função de transferência em malha fechada deste sistema é dada por:

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K(s+1)(s+3)}{s^4+5s^3+9s^2+(5+K)s+3K}$$

Para este sistema ser estável, o denominador da função de transferência em malha fechada deve ter todas as suas raízes no semi-plano esquerdo, logo com parte real negativa. Uma vez que o polinómio do denominador da função de transferência em malha fechada é:

$$\Delta(s)=s^4+5s^3+9s^2+(5+K)s+3K$$

podemos aplicar o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz e verificar qual é a gama de valores de K para os quais o sistema permanece estável:

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 9 & 3K \\
3 & 5 & 5+K & \\
2 & 8-\dfrac{K}{5} & 3K & \\
1 & \dfrac{-K^2-40K+200}{40-K} & & \\
0 & 3K & &
\end{array}$$

Para o sistema ter todas as raízes com parte real negativa não pode haver trocas de sinal nos coeficientes dos termos da primeira coluna, ou seja, têm que ser todos positivos. Logo, temos que ter:

$$\begin{cases} 8-\dfrac{K}{5}>0 \\ \dfrac{-K^2-40K+200}{40-K}>0 \\ 3K>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K<40 \\ -44{,}5<K<4{,}5 \\ K>0 \end{cases}$$

Do exposto conclui-se que para o sistema permanecer estável devemos ter: $0 < K < 4{,}5$.

9. Considere os seguintes sistemas de realimentação unitária com as seguintes funções de transferência em malha aberta. Usando o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz verifique se os sistemas em malha fechada são estáveis.

a) $G(s) = k\dfrac{2(s+4)}{s^2(s+1)}$

A função de transferência em malha fechada deste sistema é dada por:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2k(s+4)}{s^3+s^2+2ks+8k}$$

Para este sistema ser estável, o denominador da função de transferência em malha fechada deve ter todas as suas raízes no semi-plano esquerdo, logo com parte real negativa. Uma vez que o polinómio do denominador da função de transferência em malha fechada é:

$$\Delta(s) = s^3+s^2+2ks+8k$$

podemos aplicar o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz e verificar qual é a gama de valores de *k* para os quais o sistema permanece estável:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2k \\ 2 & 1 & 8k \\ 1 & -6k & \\ 0 & 8k & \end{array}$$

Para o sistema ter todas as raízes com parte real negativa não pode haver trocas de sinal nos coeficientes dos termos da primeira coluna, ou seja, têm que ser todos positivos. Logo, temos que ter:

$$\begin{cases} -6k > 0 \\ 8k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

Uma vez que o sistema de equações anterior não tem solução, conclui-se que este sistema é instável.

b) $G(s) = k\dfrac{4(s^3 + 2s^2 + s + 1)}{s^2(s^3 + 2s^2 - s - 1)}$

A função de transferência em malha fechada deste sistema é dada por:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4k(s^3 + 2s^2 + s + 1)}{s^5 + 2s^4 + (4k-1)s^3 + (8k-1)s^2 + 4ks + 4k}$$

Para este sistema ser estável, o denominador da função de transferência em malha fechada deve ter todas as suas raízes no semi-plano esquerdo, logo com parte real negativa. Uma vez que o polinómio do denominador da função de transferência em malha fechada é:

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + (4k-1)s^3 + (8k-1)s^2 + 4ks + 4k$$

podemos aplicar o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz e verificar qual é a gama de valores de *k* para os quais o sistema permanece estável:

$$\begin{array}{c|ccc} 5 & 1 & 4k-1 & 4k \\ 4 & 2 & 8k-1 & 4k \\ 3 & -\frac{1}{2} & & \\ 2 & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & \end{array}$$

Uma vez que existe pelo menos uma troca de sinal nos coeficientes dos termos da primeira coluna, conclui-se que este sistema é instável.

10. Determine o número de raízes que se encontram no semi-plano direito das seguintes equações:

a) $s^4 + 8s^3 + 32s^2 + 80s + 100 = 0$

Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, obtemos:

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 32 & 100 \\
3 & 8 & 80 & \\
2 & 22 & 100 & \\
1 & \frac{960}{22} & & \\
0 & 100 & &
\end{array}$$

Uma vez que não há mudanças de sinal na primeira coluna, o polinómio não tem raízes no semi-plano direito (com parte real positiva).

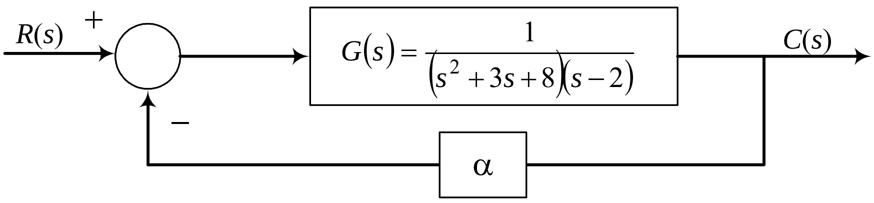
b) $s^3 + s^2 + 20s + 78 = 0$

Aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, obtemos:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 20 \\
2 & 1 & 78 \\
1 & -58 & \\
0 & 78 &
\end{array}$$

Uma vez que há duas mudanças de sinal na primeira coluna, o polinómio tem duas raízes no semi-plano direito (com parte real positiva).

11. Calcule o valor de α para o qual o sistema é estável



A função de transferência do sistema é dado por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s^2 + 3s + 8)(s - 2) + \alpha}$$

pelo que a equação característica $\Delta(s)$ é:

$$\Delta(s) = (s^2 + 3s + 8)(s - 2) + \alpha$$

e o correspondente polinómio já ordenado (expoente decrescente de s) é:

$$\Delta(s) = s^3 - 2s^2 + 3s^2 - 6s + 8s - 16 + \alpha$$

$$= s^3 + s^2 + 2s + (\alpha - 16) = 0$$

então, para que todos os coeficientes do polinómio sejam positivos e não nulos $\alpha > 16$.

Para se verificar esta afirmação vamos aplicar o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz.

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha - 16 \\ 1 & 18 - \alpha & \\ 0 & \alpha - 16 & \end{array}$$

Para que o sistema seja estável:

$\alpha - 16 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 16 \;\wedge\; 18 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 18$ então o sistema é estável no intervalo $16 < \alpha < 18$.

12. Considere o sistema cuja função de transferência é dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+4}{s^7 + 6s^6 + 11s^5 + 6s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 44s + 24}$$

verifique a estabilidade do sistema.

$$\Delta(s) = s^7 + 6s^6 + 11s^5 + 6s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 44s + 24$$

$$\begin{array}{c|cccc} 7 & 1 & 11 & 4 & 44 \\ 6 & 6 & 6 & 24 & 24 \\ 5 & 10 & 0 & 40 & \\ 4 & 6 & 0 & 24 & \\ 3 & 0 & 0 & & \\ 2 & & & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

Durante a aplicação do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, a este polinómio, verificou-se o caso especial 2:

- Se todos os coeficientes de uma linha forem zero isso indica que existem raízes de igual amplitude mas de sinal oposto;

De acordo com a afirmação anterior já podemos concluir que o polinómio vai ser instável, uma vez que vai ter raízes de igual amplitude mas de sinal oposto. No entanto podemos confirmar o que acaba de ser dito.

Neste caso, o cálculo pode prosseguir através de um polinómio auxiliar formado com os coeficientes da linha anterior. A linha de zeros é substituída pelos coeficientes da derivada desse polinómio.

Assim, vamos considerar o polinómio auxiliar formado com os coeficientes da linha anterior ao da linha dos zeros:

$$P(s) = 6s^4 + 24$$

O polinómio cujos coeficientes são a derivada do polinómio anterior é o seguinte:

$$P'(s) = 24s^3$$

Podemos agora continuar a aplicação do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ficando com:

$$\begin{array}{c|cccc}
7 & 1 & 11 & 4 & 44 \\
6 & 6 & 6 & 24 & 24 \\
5 & 10 & 0 & 40 & \\
4 & 6 & 0 & 24 & \\
3 & 24 & 0 & & \\
2 & 0 \approx \varepsilon > 0 & 24 & & \\
1 & \varepsilon_2 & & & \\
0 & & & &
\end{array}$$

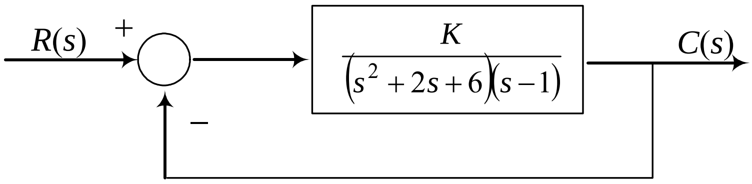
$$\varepsilon_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 24 & 0 \\ \varepsilon & 24 \end{vmatrix}}{\varepsilon} = -\frac{24^2}{\varepsilon} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{24^2}{\varepsilon} = -\infty$$

verifica-se uma mudança de sinal, logo o sistema é instável.

Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
p = [1  6  11  6  4  24  44 24]
roots(p)
        ans =   −3.0000
                  1.0000 + 1.0000i
                  1.0000 − 1.0000i
                −2.0000
                −1.0000 + 1.0000i
                −1.0000 − 1.0000i
                −1.0000
```

13. Considere o seguinte diagrama de blocos:



Calcule o valor de K para o qual o sistema é estável.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{\left(s^2+2s+6\right)(s-1)+K}$$

$$\Delta(s) = \left(s^2+2s+6\right)(s-1)+K = s^3 - s^2 + 2s^2 - 2s + 6s - 6 + K =$$
$$= s^3 + s^2 + 4s + (-6+K) = 0$$

se $K > 6 \Rightarrow$ todos os coeficientes são positivos e não nulos, então aplicando o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz podemos verificar esta afirmação.

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & K-6 \\ 1 & 10-K & \\ 0 & K-6 & \end{array}$$

Para que o sistema seja estável:

$$\begin{cases} 10-K>0 \\ K-6>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K<10 \\ K>6 \end{cases} \Rightarrow 6 < K < 10$$