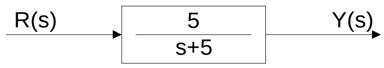
1. a)



A função de transferência deste sistema é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s+5}$$

Pelo que a resposta ao degrau unitário (R(s)=1/s) é dada por:

$$Y(s) = \frac{5}{s+5}.R(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{5}{s(s+5)}$$

Determinando a Transformada Inversa de Laplace de Y(s), conclui-se que a resposta deste sistema a uma entrada em degrau unitário é da forma:

$$y(t) = 1 - e^{-5.t}$$

Da equação anterior conclui-se que quando $t \to +\infty, y(t) \to 1$. Assim, temos:

Ganho DC (K):

K=1

Constante de tempo (τ):

τ=1/5

Tempo de subida (t_r) - tempo necessário para a resposta passar dos 10% a 90% do valor final:

$$y(t) = 1 - e^{-5.t} = 0{,}1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-5.t} = 0{,}9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t_{10} = 0{,}021 seg.$$

e

$$y(t) = 1 - e^{-5.t} = 0{,}9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-5.t} = 0{,}1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t_{90} = 0{,}46 seg.$$

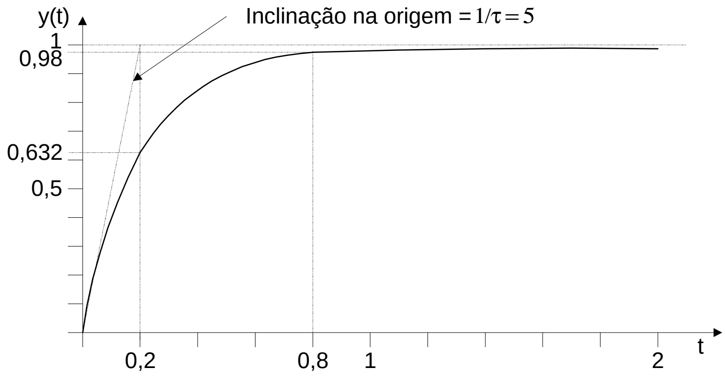
Logo:

$$t_r = t_{90} - t_{10} = 0{,}46 - 0{,}021 = 0{,}439\, seg.$$

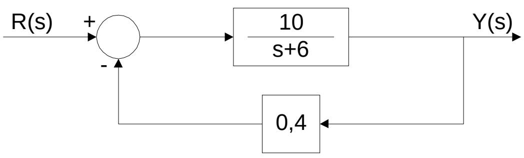
Tempo de estabelecimento a 2% (t_s):

$t_s = 4.\ \tau = 4.1/5 = 0{,}8$ seg.

Esboço da resposta ao degrau unitário:



1. b)



A função de transferência deste sistema é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s+10}$$

Pelo que a resposta ao degrau unitário (R(s)=1/s) é dada por:

$$Y(s) = \frac{10}{s+10}.R(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{10}{s(s+10)}$$

Determinando a Transformada Inversa de Laplace de Y(s), conclui-se que a resposta deste sistema a uma entrada em degrau unitário é da forma:

$$y(t) = 1 - e^{-10.t}$$

Da equação anterior conclui-se que quando $t \to +\infty, y(t) \to 1$. Assim, temos:

Ganho DC (K):

K=1

Constante de tempo (τ):

τ=1/10

Tempo de subida (t_r) - tempo necessário para a resposta passar dos 10% a 90% do valor final:

$$y(t) = 1 - e^{-10.t} = 0{,}1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-10.t} = 0{,}9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t_{10} = 0{,}0105 \ seg.$$

e

$$y(t) = 1 - e^{-10.t} = 0{,}9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-10.t} = 0{,}1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t_r = 0{,}23 \ seg.$$

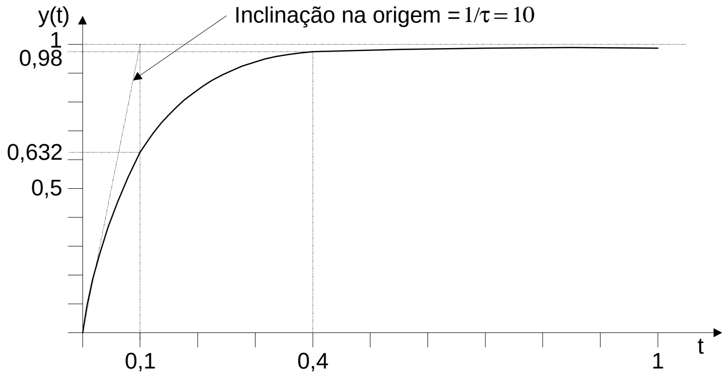
Logo:

$$t_r = t_{90} - t_{10} = 0{,}23 - 0{,}0105 = 0{,}22 \ seg.$$

Tempo de estabelecimento a 2% (t_s):

$t_s = 4.\ \tau = 4.1/10 = 0{,}4$ seg.

Esboço da resposta ao degrau unitário:



2. a) $G(s) = \dfrac{10(s+7)}{(s+10)(s+20)}$

Os pólos da função de transferência são:
$p_1 = -10$
$p_2 = -20$

e os zeros são:
$z_1 = -7$

Tipo de resposta:
Uma vez que a função de transferência deste sistema apresenta dois pólos reais e distintos a resposta vai ser sobreamortecida ($\zeta > 1$).

A função de transferência deste sistema (G(s)) é, genericamente, dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10(s+7)}{(s+10)(s+20)}$$

Pelo que a resposta ao degrau unitário (R(s)=1/s) é dada por:

$$Y(s) = \frac{10(s+7)}{(s+10)(s+20)}.R(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{10(s+7)}{s(s+10)(s+20)}$$

Determinando a Transformada Inversa de Laplace de Y(s), conclui-se que a resposta deste sistema a uma entrada em degrau unitário é da forma:

$$y(t) = 0{,}35 + 0{,}3.e^{-10.t} - 0{,}65.e^{-20.t}$$

2. b) $G(s) = \frac{4}{(s+2)(s+4)}$

Os pólos da função de transferência são:
$p_1 = -2$
$p_2 = -4$

e esta função de transferência não tem zeros.

Tipo de resposta:
Uma vez que a função de transferência deste sistema apresenta dois pólos reais e distintos a resposta vai ser sobreamortecida ($\zeta > 1$).

A função de transferência deste sistema (G(s)) é, genericamente, dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4}{(s+2)(s+4)}$$

Pelo que a resposta ao degrau unitário (R(s)=1/s) é dada por:

$$Y(s) = \frac{4}{(s+2)(s+4)}.R(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{4}{s(s+2)(s+4)}$$

Determinando a Transformada Inversa de Laplace de Y(s), conclui-se que a resposta deste sistema a uma entrada em degrau unitário é da forma:

$$y(t) = 0{,}5 - e^{-2.t} + 0{,}5.e^{-4.t}$$

2. c) $G(s) = \frac{30(s+2)}{s^2 + 17s + 16}$

Determinando as raízes do polinómio do denominador, conclui-se que os pólos da função de transferência são:
$p_1 = -1$
$p_2 = -16$

e os zeros são:
$z_1 = -2$

Tipo de resposta:
Uma vez que a função de transferência deste sistema apresenta dois pólos reais e distintos a resposta vai ser sobreamortecida ($\zeta > 1$).

A função de transferência deste sistema (G(s)) é, genericamente, dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{30(s+2)}{(s+1)(s+16)}$$

Pelo que a resposta ao degrau unitário (R(s)=1/s) é dada por:

$$Y(s) = \frac{30(s+2)}{(s+1)(s+16)}.R(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{30(s+2)}{s(s+1)(s+16)}$$

Determinando a Transformada Inversa de Laplace de Y(s), conclui-se que a resposta deste sistema a uma entrada em degrau unitário é da forma:

$$y(t) = 3{,}75 - 2.e^{-t} - 1{,}75.e^{-16.t}$$

2. d) $G(s) = \dfrac{(s+5)}{(s+10)^2}$

Os pólos da função de transferência são:
$p_1 = p_2 = -10$ (pólo duplo)

e os zeros são:
$z_1 = -5$

Tipo de resposta:
Uma vez que a função de transferência deste sistema apresenta dois pólos reais e coincidentes a resposta vai ser criticamente amortecida ($\zeta = 1$).

A função de transferência deste sistema (G(s)) é, genericamente, dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+5}{(s+10)^2}$$

Pelo que a resposta ao degrau unitário (R(s)=1/s) é dada por:

$$Y(s) = \frac{s+5}{(s+10)^2}.R(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s+5}{s(s+10)^2}$$

Determinando a Transformada Inversa de Laplace de Y(s), conclui-se que a resposta deste sistema a uma entrada em degrau unitário é da forma:

$$y(t) = 0{,}05 - 0{,}05.e^{-10.t} + 0{,}5.t.e^{-10.t}$$

3.

A forma canónica de um sistema de 2ª ordem é a seguinte:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2.\zeta.\omega_n.s + \omega_n{}^2}$$

sendo os pólos desta função de transferência genericamente dados por:

$$p_{1,2} = -\zeta.\omega_n \pm j.\omega_n.\sqrt{1-\zeta^2}$$

O tempo de estabelecimento a 2% (t_s) é dado por:

$$t_s = \frac{4}{\zeta.\omega_n}$$

E o *Overshoot* percentual máximo é dado por:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta.\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Para a situação de *Overshoot* percentual máximo de 30% e tempo de estabelecimento de 0,05 s, temos:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta.\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0{,}3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \zeta = 0{,}357$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta.\omega_n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}05 = \frac{4}{0{,}357.\omega_n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega_n = 224{,}1 rad/s$$

A partir dos valores determinados para ζ e ω_n, podemos agora determinar a localização dos pólos da função de transferência pretendida para o sistema:

$$p_{1,2} = -\zeta.\omega_n \pm j.\omega_n.\sqrt{1-\zeta^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p_{1,2} = -80 \pm j209{,}3$$

Conclui-se que a Função de Transferência G(s) em malha fechada, para a situação de *Overshoot* percentual máximo de 30% e Tempo de estabelecimento de 0,05 seg., é:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2.\zeta.\omega_n.s + \omega_n^{\ 2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow G(s) = \frac{50221}{s^2 + 160.s + 50221}$$

4. a) $G(s) = \dfrac{120}{s^2 + 12s + 120}$

Sendo a forma canónica da função de transferência de um sistema de 2ª ordem:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2.\zeta.\omega_n.s + \omega_n^{\ 2}}$$

Temos:

$$\omega_n^{\ 2} = 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega_n = 10{,}95 rad/s$$

e

$$2.\zeta.\omega_n = 12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \zeta = 0{,}548$$

O tempo de estabelecimento é dado por:

$$t_s = \frac{4}{\zeta.\omega_n} = \frac{4}{0{,}548 \times 10{,}95} = 0{,}666 seg.$$

O tempo de pico é dado por:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n.\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{10{,}95.\sqrt{1-0{,}548^2}} = 0{,}343 seg.$$

O tempo de subida é aproximadamente dado por:

$$t_r = \frac{e^{\frac{\theta}{tg\theta}}}{\omega_n}$$

sendo:

$$\theta = \arccos\zeta = \arccos(0{,}548) = 0{,}99rad$$

pelo que temos:

$$t_r = \frac{e^{\frac{\theta}{tg\theta}}}{\omega_n} = \frac{e^{\frac{0{,}99}{1{,}526}}}{10{,}95} = 0{,}175seg.$$

Por último, o *Overshoot* percentual é dado por:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta.\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{0{,}548.\pi}{\sqrt{1-0{,}548^2}}} = 12{,}75\%$$

4. b) $G(s) = \dfrac{1000}{s^2 + 20s + 1000}$

Sendo a forma canónica da função de transferência de um sistema de 2ª ordem:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2.\zeta.\omega_n.s + \omega_n{}^2}$$

Temos:

$$\omega_n{}^2 = 1000 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega_n = 31{,}62rad/s$$

e

$$2.\zeta.\omega_n = 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \zeta = 0{,}316$$

O tempo de estabelecimento é dado por:

$$t_s = \frac{4}{\zeta.\omega_n} = \frac{4}{0{,}316 \times 31{,}62} = 0{,}4seg.$$

O tempo de pico é dado por:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n.\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{31{,}62.\sqrt{1-0{,}316^2}} = 0{,}1seg.$$

O tempo de subida é aproximadamente dado por:

$$t_r = \frac{e^{\frac{\theta}{tg\theta}}}{\omega_n}$$

sendo:

$$\theta = \arccos\zeta = \arccos(0{,}316) = 1{,}25 rad$$

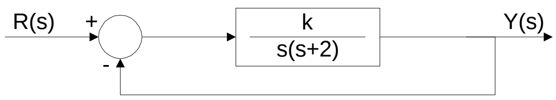
pelo que temos:

$$t_r = \frac{e^{\frac{\theta}{tg\theta}}}{\omega_n} = \frac{e^{\frac{1{,}25}{3}}}{31{,}62} = 0{,}048 seg.$$

Por último, o *Overshoot* percentual é dado por:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta.\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{0{,}316.\pi}{\sqrt{1-0{,}316^2}}} = 35{,}12\%$$

5.



A função de transferência em malha fechada deste sistema é dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + 2.s + k}$$

Pelo que:

$$\omega_n^{\ 2} = k \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega_n = \sqrt{k} rad / s$$

e

$$2.\zeta.\omega_n = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \zeta = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Uma vez que pretendemos obter um *Overshoot* percentual máximo de 10%, temos:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta.\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0{,}1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \zeta^2 = 0{,}349$$

Logo:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{k}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{\zeta^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k = 2{,}866$$

6.

$$G(s) = \frac{(s+2)}{s(s+4)}$$

Constante de erro de posição (K_p):

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{(s+2)}{s.(s+4)} = \infty$$

Constante de erro de velocidade (K_v):

$$K_v = \lim_{s \to 0} s.G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{(s+2)}{(s+4)} = \frac{1}{2}$$

Constante de erro de aceleração (K_a):

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2.G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s^2.(s+2)}{s.(s+4)} = 0$$

Erro em regime permanente (e_{ss}):

a) Entrada em degrau unitário (R(s) = 1/s):

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

b) Entrada em rampa unitária (R(s) = $1/s^2$):

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

c) Entrada em parábola unitária (R(s) = $1/s^3$):

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$