

### **Nota Introdutória**

Estes apontamentos serviram de orientação das aulas teóricas de TSIST-SEE (curso diurno) no ano lectivo de 2004-2005 (excluindo o capítulo de Análise no Domínio das Frequências). São fornecidas com o objectivo de auxiliar o aluno a estruturar a matéria da disciplina assim como de constituir um mapa para o estudo a partir de outras fontes. Não deve ser visto como um substituto para os livros recomendados nem como contendo todos os pormenores focados nas aulas.

Ao longo das aulas, foram detectadas algumas “gralhas” que foram sendo corrigidas, o que não garante que o texto esteja 100% livre de erros pelo que se apela ao leitor para fazer uso do seu espírito crítico e reportar eventuais passagens menos claras.

### **Bibliografia**

J.L. Martins de Carvalho, Dynamical Systems and Automatic Control, Prentice Hall

J. DiStefano, A. Stubberud e I. Williams, Feedback and Control Systems, Schaum McGraw-Hill

Modern Control Engineering, Katsuhiko Ogata, Prentice Hall.

Linear Control Systems Analysis and Design: Conventional and Modern, J. D’Azzo e C. Houpis, McGraw-Hill

R. Dorf, R. Bishop, "Modern control systems", Addison-Wesley

G. Franklin, J. Powell, A. Naeini, "Feedback control of dynamic Systems", Addison-Wesley

### **Objectivos**

Esta disciplina tem por objectivo dotar o aluno de um conjunto de conhecimentos que lhe permitam analisar sistemas dinâmicos (contínuos, SISO, lineares e invariantes no tempo) e desenvolver controladores à luz da teoria dos sistemas clássica.

### **Programa**

Modelização de sistemas dinâmicos.

Construção e manipulação de diagramas de blocos.

Análise de sistemas em malha aberta no domínio dos tempos

- Regime permanente/Ganho DC.
- Decomposição de FT em fracções parciais. Conceito de ordem do sistema e de pólo(s) dominante(s).
- Análise de sistemas de 1ª ordem.
- Análise de sistemas de 2ª ordem.
- Influência dos zeros da função de transferência na resposta.
- Critério de Estabilidade.

Análise de sistemas realimentados no domínio dos tempos

- Método do lugar de raízes.
- Modos de controlo típicos.

Análise de sistemas no domínio das frequências.

- Gráficos de Bode.
- Margem de ganho e fase.
- Breves noções de diagramas de Nyquist.

### **Objectivos “informais”**

No final da disciplina o aluno deverá ser capaz de:

- Representar sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais na forma de um diagrama de blocos.
- Obter a função de transferência de sistemas dinâmicos.
- Compreender o conceito de função de transferência e estabelecer uma relação entre esta e a resposta temporal do sistema. Conceito de pólo e sua representação no pólo complexo.
- Aplicar o teorema do valor final para calcular o valor em Regime permanente de um dado sistema.
- Analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos.
- Perceber a necessidade e implicações da utilização da realimentação.
- Aplicar as acções de controlo adequadas a cada situação.
- Aplicar o método do lugar de raízes na análise e afinação de sistemas de controlo.
- Interpretar diagramas de Bode.

## Motivação da Teoria dos sistemas.

Exemplo: Tapete rolante.

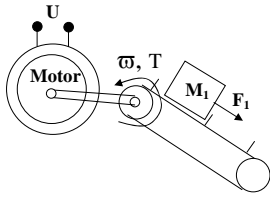


Figura 1

**Objetivo:** Manutenção de velocidade angular  $\omega_{ref}$  constante.

Solução 1: Aplicar tensão  $U_1$  constante ao motor.

Problemas: Calcular tensão  $U_1$  de forma a obter  $\omega_{ref}$ . Necessário estabelecer relação entre tensão aplicada e a velocidade do tapete rolante.

Equações do sistema em regime permanente (\* isto será visto em detalhe mais à frente)

$$T = K \cdot (U_1 - K\omega) / R_a \quad (*)$$

$$T = r \cdot F_1 \quad (\text{Física!}) \quad \Leftrightarrow U_1 = R_a \cdot r \cdot F_1 / K + K \cdot \omega_{ref}$$

## Mudança de cenário:

Mantendo o mesmo valor de tensão aplicada ao motor, aumentar a carga no tapete. Qual o resultado? (Não se preocupem com os cálculos, para já...)

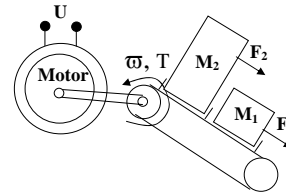


Figura 2

$$\omega = (K \cdot U_1 - R_a \cdot r \cdot (F_1 + F_2)) / K^2 \Leftrightarrow \omega = \omega_{ref} - R_a \cdot r \cdot F_2 / K^2$$

Assume-se que a carga no tapete é uma variável cujo valor não depende da “vontade” do utilizador do sistema. Pode até ser desconhecida para este. Este tipo de variáveis denominam-se por **perturbações** do sistema.

Solução: Mudar o valor da tensão para cada mudança da carga do tapete? Pesar cada objecto que é colocado no tapete?

Problemas: Não parece prático...

Solução 3: sistema de controlo automático de velocidade.

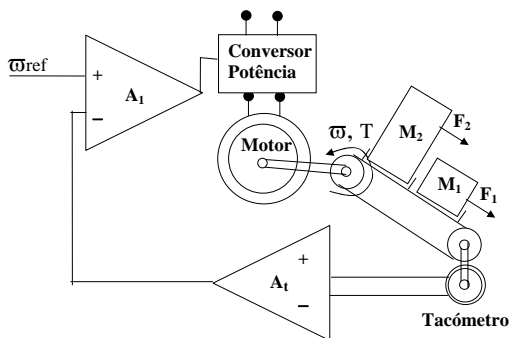


Figura 3

Esta configuração é denominada por **malha fechada**. Trata-se de um **sistema realimentado** (“**feedback system**”).

O bloco A1 representa um amplificador, sendo A1 a constante de ganho.

$$\text{Equação simplificada do tacómetro: } V_t = K_t \cdot \omega$$

Equações do restante sistema:

$$U = A_1 \cdot (\omega_{ref} - A_t \cdot V_t), \quad (A_t \text{ é escolhido de forma a termos } A_t \cdot K_t = 1)$$

$$\omega = (K \cdot U - R_a \cdot r \cdot F) / K^2 \quad (\text{já usada acima})$$

$$\Rightarrow \omega = (K \cdot A_1 \cdot (\omega_{ref} - \omega) - R_a \cdot r \cdot F) / K^2 \Leftrightarrow$$

$$\omega = A_1 \cdot \omega_{ref} / (K + A_1) - R_a \cdot r \cdot F / (K \cdot (K + A_1))$$

Observações: à medida que aumentamos A1,  $\omega$  aproxima-se de  $\omega_{ref}$ . No limite, se tivéssemos um ganho infinito (calcular  $\lim_{A1 \rightarrow \infty} \omega$ ), o valor da velocidade seria totalmente independente do valor da carga (F). Ou seja, a realimentação tornou o sistema menos sensível a **perturbações**, além de permitir a regulação automática da variável de saída para o valor desejado.

Outras observação: compare o efeito da variação de um dos parâmetros do sistema (o raio da roda devido a desgaste, ou a resistência do motor devido a aquecimento) para ambas os cenários apresentados anteriormente (malha aberta/malha fechada).

**Problema** com a formulação matemática usada nos exemplos anteriores: não descreve o funcionamento do sistema durante os “instantes iniciais” da aplicação do sinal de entrada. Assume que o sistema funciona em **regime permanente**, ou seja, que todas as variáveis do sistema já **estabilizaram** no seu valor final.

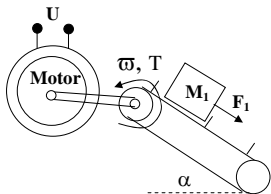
Questões em aberto: quanto tempo demora o sistema a atingir a a velocidade desejada? O sistema acelera suavemente ou aos “soluços”, com oscilações?

Conhecimento intuitivo: todos sabemos que após a aplicação da tensão, o motor demora algum tempo a atingir a velocidade “final” (velocidade em regime permanente). A esse tempo chama-se *tempo de estabelecimento*.

Definição mais “formal”: o *tempo de estabelecimento* é o tempo que o sistema leva, após uma variação do sinal de entrada, a estabilizar dentro de uma margem de 2% do valor final da saída do sistema (no exemplo acima a variável de saída é a velocidade).

O período que compreende o instante da variação do sinal de entrada e o tempo de estabelecimento (aproximadamente) é denominado por *regime transitório*.

O nosso exemplo representa um *sistema dinâmico*. Informalmente, trata-se de um sistema cuja saída (a velocidade) depende não só da variável da entrada (a tensão aplicada no motor) mas, também do valor actual das variáveis que descrevem o estado do sistema (velocidade do motor e intensidade da corrente no motor).



Voltando ao nosso exemplo inicial, as equações diferenciais que descrevem este sistema (figura 1) são:

$$u(t) = R_a i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K \omega(t)$$

$$K i(t) = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + T_L \quad (T_L = m_L \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot r)$$

(m é a massa do tapete,  $m_L$  é a massa a transportar)

A correspondente representação no domínio de Laplace (assumindo  $T_L=0$ ):

$$(sL + R_a) \cdot I(s) = -K \cdot \Omega(s) + U(s)$$

$$K \cdot (-K \cdot \Omega(s) + U(s)) / (sL + R_a) = m \cdot r^2 \cdot s \cdot \Omega(s)$$

$$\Omega(s) = \frac{\frac{K}{L \cdot m \cdot r^2}}{s^2 + \frac{R_a}{L} \cdot s + \frac{K^2}{L \cdot m \cdot r^2}} \cdot U(s)$$

A descrição completa do funcionamento do sistema dinâmico, incluindo quer o *regime transitório* quer o *regime permanente*, é feita através das *equações diferenciais*. Mas – calma – não precisamos de resolver as equações para podermos “exercer” teoria dos sistemas. Para isso foi “inventada” a *Transformada de Laplace*<sup>1</sup>.

Na prática faz-se a transformação das equações diferenciais para o domínio de Laplace para evitar o cálculo (trabalhoso!) das equações diferenciais. No domínio de Laplace, as derivadas e integrações do domínio dos tempos convertem-se em simples operações algébricas:

$$L(df(t)/dt) = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$L(df(t)/dt) = s \cdot F(s) - f(0)$$

Em geral estaremos apenas interessados na *resposta forçada* do sistema, pelo que serão assumidas condições iniciais nulas, i.e.,  $f(0) = 0$ .

$$L(\int f(t) dt) = F(s)/s$$

<sup>1</sup> The use of differential equations in analyzing the motion of dynamical systems was established by J.L. Lagrange (1736-1813) and W.R. Hamilton (1805-1865)

$$\Omega(s) = G(s) \cdot U(s), \quad \text{com } G(s) \text{ dado por:}$$

$$G(s) = \frac{\frac{K}{L \cdot m \cdot r^2}}{s^2 + \frac{R_a}{L} \cdot s + \frac{K^2}{L \cdot m \cdot r^2}} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

A função  $G(s)$  é denominada *função de Transferência*. A função de transferência (FT) descreve a relação entre o sinal aplicado à entrada do sistema e o sinal obtido à sua saída, desde  $t=0$  até  $t \rightarrow \infty$  (regime transitório + regime permanente).

A equação  $D(s)=0$  denomina-se por equação característica do sistema e o conjunto das suas soluções denomina-se por *pólos* do sistema.

As raízes de  $N(s)$  denominam-se por *zeros* do sistema.

Para obter a expressão da saída do sistema no domínio dos tempos (**Resposta temporal**), aplica-se a *transformada inversa de Laplace*. No exemplo acima, teríamos:

$$\varpi(t) = L^{-1}(G(s).U(s)) \quad \text{Não esquecer de considerar a entrada } U(s) !$$

Geralmente é necessário transformar a expressão numa soma de fracções parciais e então consultar a tabela de transformadas para cada um dos termos.

No entanto, é possível obter facilmente um esboço do sinal de saída sem ser necessário recorrer à transformada inversa de Laplace (isto será visto mais à frente), o que já será suficiente na maior parte dos casos.

## Diagramas de Blocos

É frequentemente útil dispor de uma representação gráfica do sistema em estudo. Os diagramas de blocos baseiam-se no conceito de função de transferência para representar o funcionamento do sistema. Representam graficamente as operações aritméticas encontradas nas equações que descrevem os vários elementos do sistema.

### Bloco Função de Transferência

$$U(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow X(s) = G(s).U(s)$$

### Soma

$$U(s) \rightarrow \text{Círculo com } + \text{ e } - \rightarrow X(s) = U(s) - V(s)$$

### Multiplicação

$$U(s) \rightarrow \boxed{G_1(s)} \rightarrow \boxed{G_2(s)} \rightarrow X(s) = G_2(s).G_1(s).U(s) = G_1(s).G_2(s).U(s)$$

### Forma canónica de um sistema realimentado (fazer a dedução!):

$$U(s) \rightarrow \text{Círculo com } + \text{ e } - \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow \text{Caminho directo} \rightarrow X(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} U(s)$$

Malha de realimentação

**Exemplo:** Consideremos novamente o exemplo da Figura 3. Para aumentar o detalhe do modelo, considera-se a existência de atrito viscoso B a opor-se ao movimento rectilíneo do tapete.

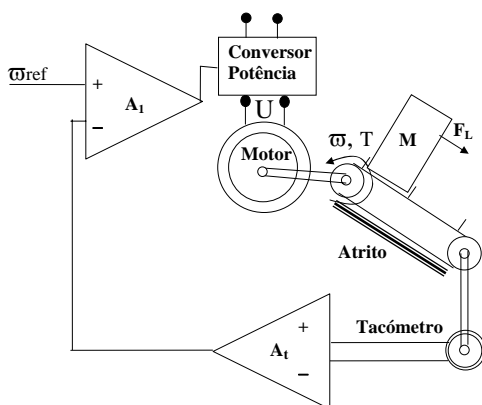


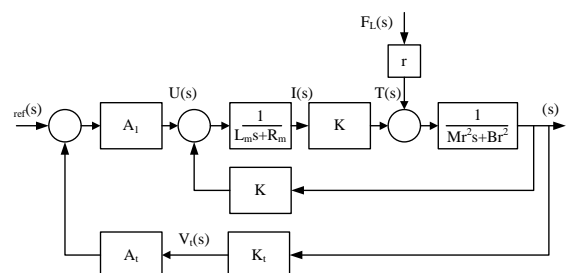
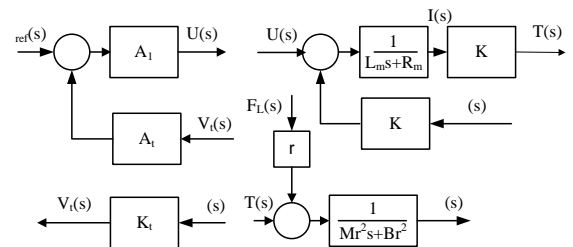
Figura 4

As equações que descrevem este sistema são:

$$\begin{aligned} U(s) &= A_1 \cdot (\Omega_{ref}(s) - A_t \cdot V_t(s)) \\ U(s) &= R_m \cdot I(s) + L_m \cdot s \cdot I(s) + K \cdot \Omega(s) \\ T(s) &= K \cdot I(s) \\ T(s) &= M \cdot r^2 \cdot s \cdot \Omega(s) + B \cdot r^2 \cdot \Omega(s) + r \cdot F_L(s) \\ V_t(s) &= K_t \cdot \Omega(s) \end{aligned}$$

Resolver cada uma das equações anteriores em ordem a uma das incógnitas.

$$\begin{aligned} U(s) &= A_1 \cdot (\Omega_{ref}(s) - A_t \cdot V_t(s)) && \text{(Controlador)} \\ I(s) &= (U(s) - K \cdot \Omega(s)) / (L_m \cdot s + R_m) && \text{(Motor)} \\ T(s) &= K \cdot I(s) && \text{(Motor)} \\ \Omega(s) &= (T(s) - r \cdot F_L(s)) / (M \cdot r^2 \cdot s + B \cdot r^2) && \text{(Tapete)} \\ V_t(s) &= K_t \cdot \Omega(s) && \text{(Sensor)} \end{aligned}$$

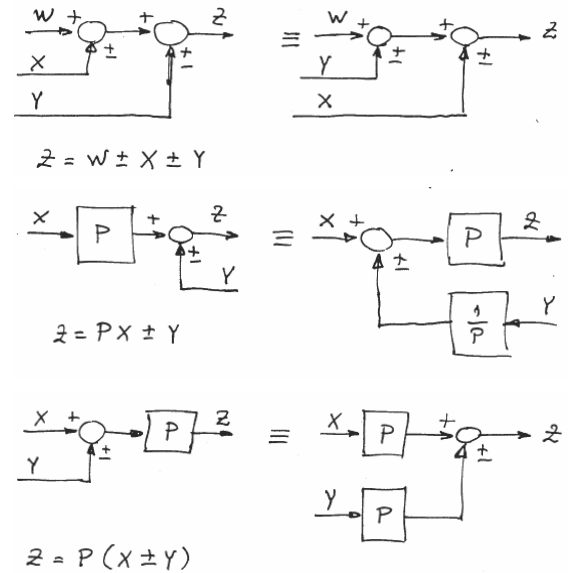
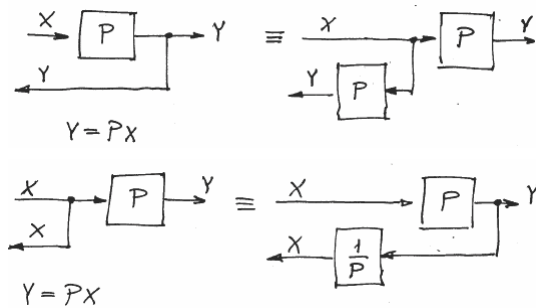


## Simplificação de Diagramas de Blocos

É possível obter a função de transferência de um dado sistema a partir do seu diagrama de blocos. O procedimento consiste em simplificar o Diagrama de blocos até o termos na sua forma mais elementar, ou seja, o bloco FT.

A **Regra de Mason** permite simplificar qualquer Diagrama de Blocos. Mas, em certas situações, poderá ser mais rápido aplicar manipulações elementares ao Diagrama de Blocos.

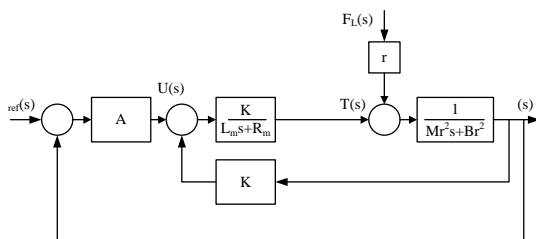
Exemplos de manipulação de diagramas de blocos:



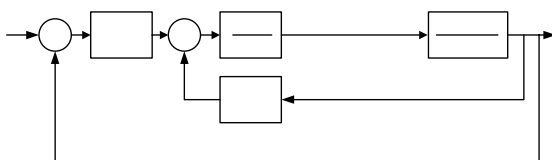
## Sobreposição de vários sinais de entrada

Para simplificar diagramas de blocos com múltiplas entradas aplica-se o teorema da sobreposição.

Considere o exemplo do controlo de velocidade de um tapete. Podemos considerar duas entradas para este sistema: a velocidade de referência e uma força  $F$  que modeliza pequenas variações da carga do tapete.



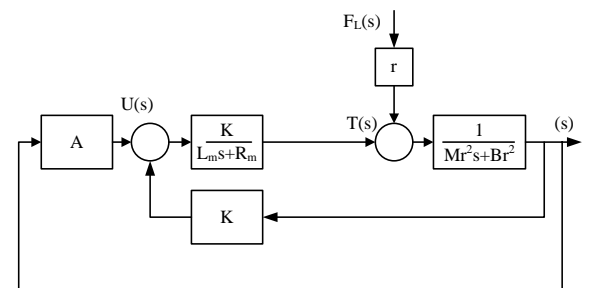
Fazendo  $F_L=0$  obtém-se o seguinte diagrama de blocos:



Fazendo  $G_1=K/(L_ms+R_m)$  e  $G_2=1/(Mr^2s+Br^2)$ , a função de transferência  $\Omega/\Omega_{ref}$  vem:

$$\frac{\Omega}{\Omega_{ref}} = \frac{AG_1G_2}{1 + AG_1G_2 + KG_1G_2}$$

Fazendo  $\Omega_{ref}=0$  obtém-se o seguinte diagrama de blocos:



A função de transferência  $\Omega/F_L$  vem:

$$\frac{\Omega}{F_L} = - \frac{rG_2}{1 + AG_1G_2 + KG_1G_2}$$

ou seja:

$$\Omega = \frac{AG_1G_2}{1 + AG_1G_2 + KG_1G_2} \Omega_{ref} - \frac{rG_2}{1 + AG_1G_2 + KG_1G_2} F_L$$

$$\Omega = \frac{G_2(AG_1\Omega_{ref} - rG_2F_L)}{1 + AG_1G_2 + KG_1G_2}$$

Será coincidência o facto de os denominadores de ambas as Funções de Transferência,  $\Omega/\Omega_{ref}$  e  $\Omega/F_L$ , serem idênticos?

## Resposta Temporal em Malha Aberta

Conhecendo a função de transferência de um dado sistema estamos agora interessados em saber como é que este se comporta para uma dada entrada, ou seja, qual o valor que a saída toma ao longo do tempo.

Para um sistema que estabilize num valor constante é possível calcular esse valor final, o valor em regime permanente (*steady state*) da variável de saída, através do teorema do valor final:

$$y_{ss} = \lim y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

Em geral as entradas típicas de um sistema podem ser modelizadas pelas funções impulso, degrau e rampa.

Para SLITs, a resposta temporal para qualquer uma destas entradas pode ser obtida por derivação ou integração de uma das outras. Por este motivo, tipicamente faz-se a análise dos sistemas considerando uma entrada em degrau unitário.

Para um entrada em degrau unitário,  $Y(s)$  é dado por  $Y(s)=G(s).1/s$  pelo que

$$y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

Quando se faz a expansão em fracções simples, em geral obtemos uma soma de fracções contendo *um pólo real* ou um *par de pólos complexos* (em alguns casos poderão ter multiplicidade superior a 1). A resposta temporal é então obtida a partir do somatório das transformadas inversas de Laplace de cada um desses termos.

Além disso, verifica-se que em certas situações, para efeitos de esboço da resposta temporal, será possível aproximar a função de transferência por uma contendo apenas um pólo real ou um par de pólos complexos.

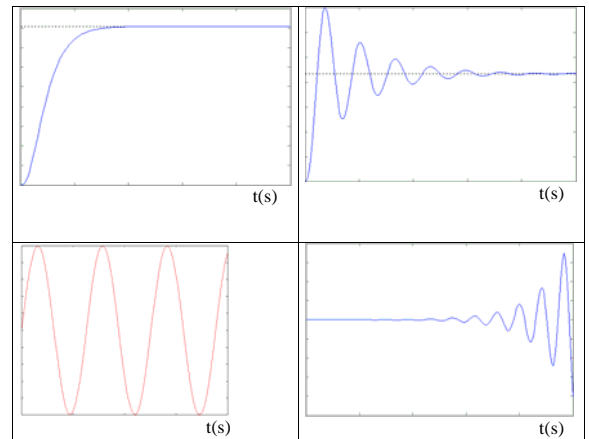
Por esse motivo, vamos então analisar cada um desses casos particulares, nomeadamente os *sistemas de 1ª ordem* estáveis (com um pólo real negativo) e *sistemas de 2ª ordem* sub-amortecidos (com um par de pólos complexo com parte real negativa).

Conceito de **ordem** do sistema. Um sistema de n-ésima ordem corresponde a um sistema descrito por uma equação diferencial cuja derivada de maior ordem da variável de saída é de n-ésima ordem. *Nota “filosófica”*: é possível ter dois sistemas de ordem diferente cujas funções de transferência são idênticas. Inversamente, uma função de transferência pode corresponder a infinitos diferentes sistemas físicos. Porquê?

No entanto, como já foi dito, estamos interessados em saber o que acontece antes de ser atingido o valor em regime permanente.

Consideram-se os seguintes casos típicos de resposta temporal:

- Sistemas sobre-amortecidos: sem componente oscilatória.
- Sistemas sub-amortecidos: com componente oscilatória amortecida (componente oscilatória vs overshoot)
- Sistemas puramente oscilatórios (oscilador harmónico).  
Limiar de estabilidade
- Sistemas instáveis.



## Resposta Temporal de sistemas com um pólo (real e negativo).

$$Y(s)/U(s) = K/(s+p)$$

Tempo de estabelecimento.:  $T_s = 4/p$

Ganho em regime permanente:  $G_{DC} = K/P$

Este tipo de sistemas tem inerentemente uma resposta do tipo sobre-amortecido (sem componente oscilatória).

## Resposta Temporal de sistemas com um par de pólos (complexos conjugados).

Exemplo: Circuito RLC.  $i'' + a.i' + b.i = K.v \Rightarrow I/V = K/(s^2 + a.s + b)$

Considere-se a seguinte FT, parametrizada por  $\omega_n$  e  $\zeta$ .

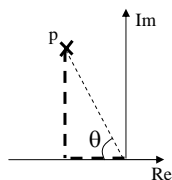
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = K \frac{\omega_n}{s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2}$$

$\omega_n$  denomina-se por frequência natural do sistema. Para  $\zeta=0$ , a saída do sistema é uma sinusóide com frequência angular  $\omega_n$ . Para  $\zeta=1$  temos um pólo real duplo. Para  $\zeta>1$  temos dois pólos reais.

Para  $0<\zeta<1$ , temos um sistema sub-amortecido, cuja resposta temporal a uma entrada em degrau unitário é dada pela seguinte expressão:

$$y(t) = K \left( 1 - \frac{e^{\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + a \cos(\zeta)) \right)$$

e os pólos do sistema,  $p$  e  $p^*$ , são dados por:  $p = -\zeta\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$



$\text{tg}(\theta) = |\text{Im}(p)|/|\text{Re}(p)|$ , o que leva a

$$\text{OS} = \exp(-\pi/\text{tg}(\theta))$$

Ou seja, o *overshoot* está directamente relacionado com o ângulo  $\theta$ .

A partir da transformada inversa de Laplace é também possível observar que a frequência da oscilação é dada pela parte imaginária do pólo.

A resposta temporal pode ser mais facilmente descrita pelas seguintes características.

**Ganho em regime permanente:** pelo teorema do valor final facilmente se verifica que é  $K$ .

**Tempo de estabelecimento:**  $t_s = 4/|\text{Re}(p)|$

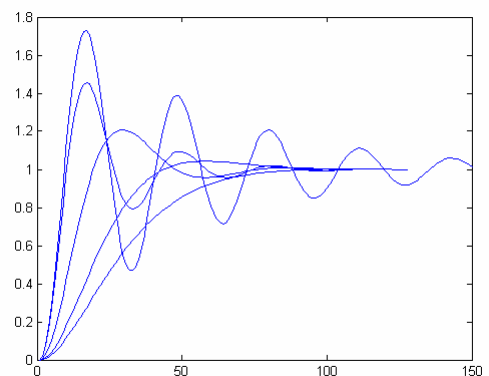
**Overshoot:**  $\text{OS} = (V_p - V_{ss})/V_{ss} = \exp(-\pi \cdot |\text{Re}(p)|/|\text{Im}(p)|)$

**Tempo de pico:**  $t_p = \pi/|\text{Im}(p)|$

A partir das expressões acima é possível fazer algumas observações de carácter qualitativo.

*Relação entre tempo de estabelecimento e valor do pólo.* Para sistemas estáveis, quanto maior for o módulo da parte real menor será o tempo de estabelecimento, ou seja, mais rapidamente o sistema estabilizará dentro da faixa de tolerância (2% é a tolerância habitualmente usada).

O *overshoot* depende da relação entre a parte real e a parte imaginária. Considerando um triângulo rectângulo tendo como catetos os módulos da parte real e parte imaginária dos pólos. Quanto maior for o ângulo  $\theta$  entre a hipotenusa (frequência natural, módulo do pólo) e o cateto correspondente à parte real, maior será o *overshoot*:



Wd constante, diferentes valores de sigma

(código Matlab)

```
Sigma=-0.1
>>ilaplace(1.01/((s^2+0.2*s+1.01)*s))
ans = -exp(-1/10*t)*cos(t)-1/10*exp(-1/10*t)*sin(t)+1
Sigma=-0.25
>>ilaplace(1.063/((s^2+0.5*s+1.063)*s))
ans = 1-exp(-0.25*t)*cos(t)-0.25*exp(-0.25*t)*sin(t)
>>a=-0.1+i,sys=zpk([],a conj(a)),norm(a^2),plot(step(sys))
```

## Aproximação de Funções de Transferência para efeitos de traçado da resposta temporal.

Exemplo ilustrativo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{a}{(s+1)(s+a)}$$

Para uma entrada em degrau unitário:

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{a}{s(s+1)(s+a)} = \frac{1}{s} - \frac{a}{a-1} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{s+a}$$

A relação entre os coeficientes dos termos associados aos dois pólos do sistema é dada pelo valor de  $a$ . Ou seja, exemplificando, para um valor de  $a=10$  o pólo  $-1$  vai ter uma influência na resposta do sistema 10 vezes superior à do pólo  $-a$ .

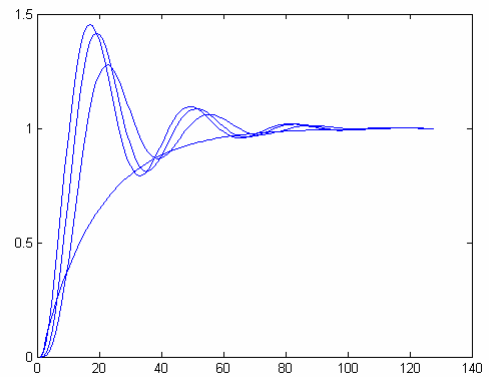
O pólo (ou pólos) com menor parte real denomina-se **pólo dominante**.

Visto de outra perspectiva, os pólos com parte real mais baixa são aqueles cujo efeito leva mais tempo a dissipar-se (observar o comportamento do termo exponencial).

Em termos aproximados, os pólos cujo módulo da parte real seja pelo menos 4 vezes superior à do pólo dominante podem ser desprezados, tendo o cuidado de manter o mesmo valor em regime permanente. Exemplo:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+10)(s+100)} \approx \frac{1}{(s+1)(10)(100)}$$

O gráfico abaixo mostra a resposta temporal de um sistema de 3ª ordem, com 2 pólos complexos e 1 real, para diferentes valores das partes reais destes pólos. Nos casos extremos, temos, por um lado, um sistema com características de 1ª ordem ou, por outro lado, com características de 2ª ordem sub-amortecido.



(código Matlab para a figura anterior)

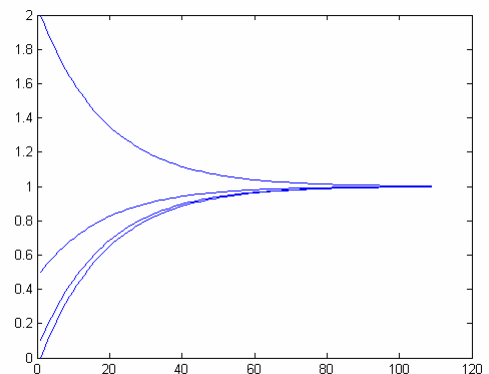
```
>>a=-0.25+i,sys=zpk([],a conj(a) -1],norm(a)^2),plot(step(sys))
Zero/pole/gain:
1.0625
-----
(s+1) (s^2 + 0.5s + 1.063)
>>a=-0.25+i,sys=zpk([],a conj(a) -2.5],norm(a)^2*2.5),plot(step(sys))
Zero/pole/gain:
2.6563
-----
(s+2.5) (s^2 + 0.5s + 1.063)
>>a=-0.25+i,sys=zpk([],a conj(a)],norm(a)^2),plot(step(sys))
Zero/pole/gain:
1.0625
-----
(s^2 + 0.5s + 1.063)
```

## Influência de zeros na resposta temporal

### Sistemas com um pólo real

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s+p)}$$

Maior influência do zero (alteração da resposta típica do sistema de 1ª ordem) para pólos “mais rápidos”. A figura abaixo apresenta respostas para valores crescentes do módulo do pólo, mantendo o zero em  $-1$ .



(código Matlab)

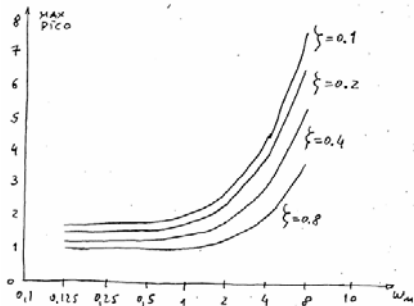
```
>> syms p s
>> ilaplace(p*(s+1)/((s+p)*s))
ans = 1+(p-1)*exp(-p*t)
>> p=0.1,plot(step(zpk(-1,-p,p)))
```



## Sistemas com dois pólos complexos e um zero:

Uma vez mais, considere-se um zero em -1 e avalie-se o comportamento do sistema de acordo com a posição dos pólos relativamente a -1.

$$\frac{\omega_n(1+s)}{s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2}$$



Num sistema sem zeros as linhas seriam rectas horizontais (valor de pico apenas dependente do coeficiente de amortecimento).

Maior influência do zero para pólos “mais rápidos”.

Tempo de pico aproximadamente constante.

*Condição necessária de estabilidade*<sup>2</sup> – para que todos os pólos tenham parte real negativa, todos os coeficientes de  $D(s)$  deverão ter o mesmo sinal. Isto significa que se algum dos coeficientes de  $D(s)$ <sup>3</sup> não for positivo então existirá pelo menos um pólo com parte real não negativa, ou seja, o sistema não será estável.

No exemplo anterior, observava-se então facilmente que  $k$  teria que ser obrigatoriamente superior a -1.

Outro exemplo:

$$D(s)=(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)=s^3-(p_1+p_2+p_3)s^2+(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3)s-p_1p_2p_3$$

Por exemplo, se o coeficiente  $a_2=-(p_1+p_2+p_3)$  for negativo isso significa que (ou seja, só aconteceria se) pelo menos um dos pólos  $p_1, p_2, p_3$  é positivo.

No entanto,  $D(s)$  poderá ter todos os seus coeficientes positivos e mesmo assim o sistema ser instável. Exemplo:

$$D(s)=(s+3)(s-1+3j)(s-1-3j)=s^3+s^2+4s+30.$$

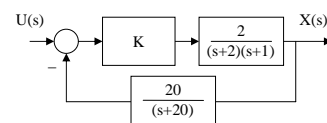
<sup>2</sup> condição suficiente para sistemas de 1ª e 2ª ordem  
<sup>3</sup>  $D(s)$  na forma canónica

## Estabilidade

Um sistema define-se como estável se qualquer entrada limitada produzir uma saída também limitada.

Pela análise das transformadas de Laplace verifica-se que um sistema é estável (pela definição acima) se e só se todos os pólos da sua função de transferência tiverem parte real negativa. Basta haver um pólo com parte real positiva para que o sistema seja instável. Se tiver pólos no eixo imaginário (e todos os restantes tiverem parte real negativa) o sistema é marginalmente estável.

É útil analisar a estabilidade do sistema a partir da estrutura **polinómio característico**  $D(s)$  uma vez que por vezes poderá não ser fácil ou sequer possível calcular as suas raízes. Por exemplo:



$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{2K(s+20)}{s^3 + 23s^2 + 62s + (40 + 40k)}$$

$$D(s) = s^3 + 23s^2 + 62s + (40 + 40k)$$

Como verificar se (ou em que situações) o sistema é estável?

Ou seja, o critério anterior NÃO é suficiente. Mesmo que a condição se verifique é preciso usar outras formas de verificar se o sistema tem todos os pólos com parte real negativa. Uma forma de fazer isso é através do critério de Routh.

O **critério de Routh** (por vezes denominado Routh-Hurwitz) é um critério algébrico que nos permite verificar se um dado polinómio tem raízes com parte real não negativa.

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

n	$a_n$	$a_{n-2}$	...
n-1	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	...
n-2	$b_1$	$b_2$	...
n-3	$c_1$	$c_2$	...
...	...		
0	...		

$$b_1 = (a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3})/a_{n-1} \quad b_2 = (a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5})/a_{n-1} \quad \text{etc.}$$

$$c_1 = (b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2)/b_1 \quad c_2 = (b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3)/b_1 \quad \text{etc.}$$

O critério de estabilidade de Routh diz-nos que se os coeficientes da primeira coluna não forem nulos, então o número de mudanças de sinal é igual ao número de raízes de  $D(s)$  com parte real positiva. Ou seja, se houver alguma troca de sinal ou algum elemento nulo conclui-se que o sistema não é estável.

## Análise e projecto de sistemas de controlo realimentados (malha fechada)

Objectivos de análise e especificações de projecto

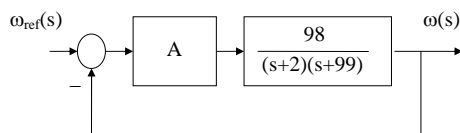
- Estabilidade do sistema (margens de estabilidade, robustez).
- Desempenho em regime transitório (velocidade de resposta, overshoot).
- Desempenho em regime permanente (precisão do sistema).

### Método do lugar de raízes

Já sabemos que a resposta temporal está directamente relacionada com a posição dos pólos no plano complexo. Daí ser interessante analisar o comportamento com base no posicionamento dos pólos.

O Lugar de Raízes (LR) é a representação gráfica dos pólos do sistema em função do valor de um parâmetro ou elemento variável do sistema.

*Revisão:* Em termos matemáticos, os pólos são as raízes do denominador da FT. Ou seja, deve-se igualar o denominador  $D(s)$  da FT a zero, obtendo-se assim a equação característica. A equação  $D(s)=0$  (*equação característica*) é então a equação que nos dá os pólos do sistema.



Calcule e represente os pólos deste sistema para diferentes valores de A.

$$\frac{\omega(s)}{\omega_{ref}(s)} = \frac{98A}{s^2 + 101s + 198 + 98A}$$

$$D(s) = s^2 + 101s + 198 + 98A = 0$$

ou alternativamente, uma vez que o sistema está na forma canónica:

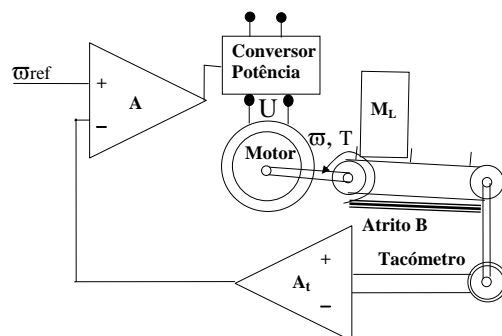
$$1 + 98A / [(s+2)(s+99)] = 0 \Leftrightarrow (s+2)(s+99) + 98A = 0 \Leftrightarrow s^2 + 101s + 198 + 98A = 0 \Leftrightarrow s = -50.5 \pm \sqrt{(101^2 - 4(198 + 98A))}$$

A	Pólos
0	-2, -99
10	-13, -88
20	-31, -70
24	-50.5, -50.5
30	-50.5 ± j24
40	-50.5 ± j40

Que valor escolher para A? Depende dos requisitos do sistema...

Para sistemas representáveis na forma canónica do sistema controlo realimentado (um caminho directo multiplicado pelo parâmetro a ajustar – K, R, A, etc - e uma malha de realimentação) a equação característica corresponde a fazer  $1 + KGH = 0$ .

Exemplo: voltemos ao exemplo do controlo de velocidade de rotação de um tapete.



Considere-se  $M_L = 100\text{Kg}$ ,  $B = 100\text{Kg/s}$ ,  $K = 1$ ,  $r = 0.1\text{m}$ ,  $R_a = 1.02\Omega$  e  $L = 10.2\text{mH}$ . O diagrama de blocos fica então:

Na prática, geralmente não é possível encontrar a expressão para a solução da equação característica. Não é também desejável calcular numericamente os pólos do sistema para todos os valores possíveis do parâmetro a afinar (o ganho A no exemplo). Por esse motivo enumera-se um conjunto de regras com base nas quais é possível obter um esboço do lugar de raízes para  $K > 0$ .

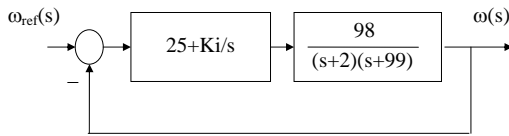
As regras de construção do LR ditam que a equação característica deverá estar na seguinte forma

$$K \frac{N_1(s)}{D_1(s)} = -1 \Leftrightarrow K \frac{\prod_{i=1}^n (s - z_i)}{\prod_{i=1}^d (s - p_i)} = -1, d \geq n$$

Trata-se de uma manipulação algébrica que nos indica mais facilmente quais serão os pólos para  $K=0$  (raízes de  $D_1(s)$ ) e  $K=\infty$  (raízes de  $N_1(s)$ ).

Quando temos o sistema já na forma canónica ( $KGH$  em malha aberta), a equação característica fica simplesmente  $KG(s)H(s) = -1$ .  $N_1(s)$  será o produto dos termos dos zeros ( $s - z_i$ ) da malha aberta e  $D_1(s)$  será o produto dos termos dos pólos ( $s - p_i$ ) da malha aberta.

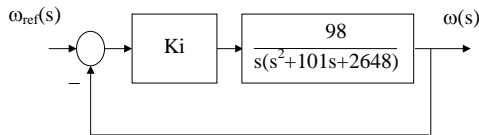
Exemplo: neste caso o sistema não está na forma canónica de sistema de controlo.



$$\frac{\omega(s)}{\omega_{ref}(s)} = \frac{98(25s + Ki)}{s^3 + 101s^2 + 2648s + 98K}$$

$$s^3 + 101s^2 + 2648s + 98K = 0 \Leftrightarrow Ki \frac{98}{s(s^2 + 101s + 2648)} = -1$$

Para efeitos de esboço de LR, o sistema anterior pode ser visto como equivalente a um sistema na forma canónica cujos pólos em malha aberta são dados por  $s(s^2+101s+2648)=0$ :



Regra 5 – os pontos do eixo real que pertencem ao LR são aqueles que ficam à esquerda de um número ímpar de raízes de N1(s) e D1(s).

Regra 6 –os pontos onde o LR sai ou entra no eixo real designam-se por **pontos de quebra**. São pontos onde K, visto como função de s, atinge, respectivamente um máximo ou um mínimo.

Para se obter a função K(s) resolve-se a eq. característica em ordem a K:

$$\{\text{pontos de quebra}\} \in \{s \in \mathbb{R} : dK(s)/ds=0\}$$

Observação: como se pode concluir da definição acima, nem todos os extremos de K(s) (soluções de  $dK(s)/ds=0$ ) correspondem a pontos de quebra.

Regra 6.1: entre dois pólos unidos pela marcação no eixo real existe sempre pelo menos um ponto de quebra.

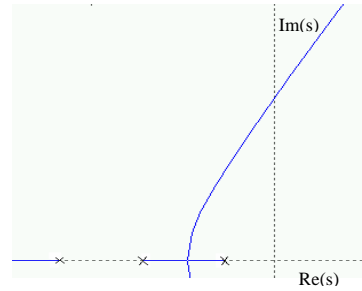
Regra 7 – o ângulo da tangente ao LR em raízes complexas simples  $s_0$  de N1(s) ou de D1(s) é dada por:

$$180^\circ - \angle(s-s_0)^{-1}G(s)H(s) \quad (\text{caso } s_0 \text{ seja raíz de N1(s)})$$

$$180^\circ + \angle(s-s_0)G(s)H(s) \quad (\text{caso } s_0 \text{ seja raíz de D1(s)})$$

Observação: útil para calcular pontos de partida de pólos complexos e de chegada a zeros complexos.

Exemplo de um lugar de raízes:



### Regras do traçado do lugar de raízes:

Regras 1+2+3 - O lugar de raízes é constituído por ramos. Estes ramos são curvas contínuas que começam ( $K=0$ ) nas raízes de D1(s) e terminam ( $K \rightarrow \infty$ ) ou nas raízes de N1(s) ou em infinito (generalizado ao domínio complexo).

Prova: (ver o exemplo)

Analise-se a eq. característica para um ponto genérico do LR

$$N(s_0)/D(s_0) = -1/K$$

Para se ter K pequeno é necessário que  $s_0$  esteja próximo de um dos pólos. Para valores pequenos de  $1/K$  é necessário que  $s_0$  esteja próximo de um zero ou que seja muito elevado.

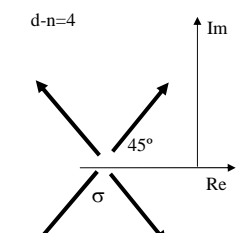
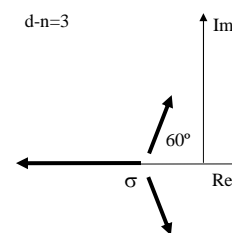
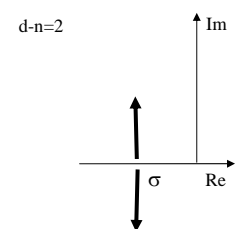
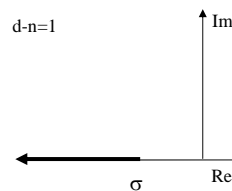
Regra 4 – O LR é simétrico relativamente ao eixo real.

Prova: O polinómio característico tem coeficientes reais. As raízes complexas de polinómios com coeficientes reais ocorrem sempre em pares conjugados.

Regra 8 – Para valores elevados de s, d-n ramos do LR são assíntotas rectas que fazem ângulos com o eixo real de  $(2L+1)180^\circ/(d-n)$ ,  $L=0, \dots, d-n-1$ , e que intersectam o eixo real no ponto

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^d p_i - \sum_{i=1}^n z_i}{d-n}$$

denominado *centróide*.



Para obter um esboço aproximado do lugar de raízes, não é necessário calcular o valor exacto dos pontos de quebra e de intersecção com o eixo imaginário. Os primeiros passos a tomar deverão ser:

- 1 – Marcar pólos e zeros de  $KG(s)H(s)$ .
- 2 – Fazer marcação sobre o eixo real (regra 5). Começar na raiz (pólo ou zero da FT) mais à direita e continuar a marcar sempre que o número de raízes à direita do ponto actual seja ímpar.
- 3 – Calcular o centróide e marcar as assíntotas com os ângulos adequados. (Regra 8)

Observação: sabemos que o LR é simétrico em relação ao eixo real (regra 4) pelo que basta desenhar a parte do semi-plano superior (para valores positivos da parte imaginária).

- 5 – Completar os ramos que faltam (regras 6.1 e 3)

Todos os ramos partem de pólos e terminam num zero ou aproximam-se de uma assíntota (tendem para infinito).

Entre dois pólos unidos pela marcação no eixo real existe sempre pelo menos um ponto de quebra.

Para aumentar o detalhe do esboço pode-se agora calcular os valores exactos dos pontos de quebra (regra 6) e de intersecção com o eixo imaginário (regra 9).

## Dimensionamento e afinação de sistemas com base no lugar de raízes

O método de projecto baseia-se no facto de que um pólo para pertencer ao LR deverá ser solução da equação característica.

- 1 - Determinar quais são os pólos que garantem as especificações desejadas.

- 2- Verificar se esses pólos pertencem ao LR

2.1 – Em caso afirmativo, verificar se são pólos dominantes.

2.2 – Em caso negativo de 2 ou 2.1, teremos que “modificar” o LR através da utilização de outro tipo de acções de controlo (o que corresponde a adicionar pólos ou zeros ao sistema).

- 3 – Calcular o valor do parâmetro do sistema de tal modo que os pólos desejados sejam os pólos do sistema final.

Exemplo: Obter um sistema cujo tempo de estabelecimento seja aproximadamente  $t_s$ :

Para ser possível obter um dado tempo de estabelecimento é necessário que a parte real do pólo dominante  $p_d$  (pólo mais próximo do eixo imaginário) verifique a equação  $t_s = 4/|\text{Re}(p_d)|$  (cf. com a fórmula dos sistemas de 1ª e 2ª ordem).

Regra 9 – A intersecção do LR com o eixo imaginário dá-nos os pontos de limiar de estabilidade pelo que estes e o valor correspondente do parâmetro podem ser calculados das seguintes maneiras:

- a) aplicar critério de Routh-Hurwitz (R-H) e calcular raízes da eq. característica usando o  $K$  calculado no critério de R-H. (procedimento com mais passos, mas passos mais simples)
- b) resolver a eq. característica em ordem a  $w$  fazendo a substituição  $s=jw$ .

## Margens de estabilidade

*Margem de ganho* - valor máximo pelo qual se pode multiplicar o valor actual do parâmetro em análise sem que o sistema se torne instabilidade.

*Margem de ganho* =

$$(\text{valor de } K \text{ do limiar de estabilidade})/(\text{valor nominal de } K)$$

*Margem de fase* – é o valor de desfasamento ou atraso puro ( $e^{-sT}$ )<sup>4</sup> que pode surgir no anel de controlo sem que o sistema se torne instável.

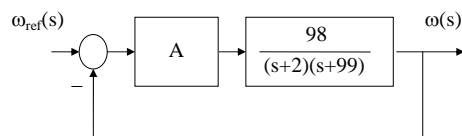
$$\text{Margem de fase} = (180^\circ + \angle GH(jw)), |GH(jw)|=1$$

<sup>4</sup> a fase é dada por  $wT$

## Adição de pólos e zeros ao LR

A adição de pólos “puxa” o LR no sentido do semi-plano direito (diminuição das margens de estabilidade). A adição de zeros tem o efeito contrário (considera-se ainda o caso  $n < d$ ). Este facto é por vezes usado no dimensionamento de controladores.

Exemplo:



Pretende-se escolher um valor para  $A$  de tal forma que o tempo de estabelecimento do sistema seja de 50ms.

Pode ser visto que tal não é possível. Seria necessário “puxar” o LR mais para a esquerda. Para este caso, a solução poderia ser obtida de uma forma praticamente geométrica:

Cancele-se o pólo em -99 com um zero.

Escolher o valor do pólo de tal forma que as assíntotas fiquem centradas em -4/0.05.

Calcular o valor de  $A$  a partir da equação característica.

A este tipo de procedimento chama-se compensação em avanço.

## Compensação em avanço

Consiste em adicionar ao sistema um dispositivo cuja FT seja da seguinte forma:  $G_c(s) = K_c(s - z_c)/(s - p_c)$ , sendo  $z_c$  e  $p_c$  reais negativos e  $|z_c| < |p_c|$ . A incorporação é feita de forma que  $G_c(s)$  apareça em série no caminho directo do anel de realimentação do sistema.

Estes dispositivos não alteram dramaticamente o aspecto do LR.. Tendem apenas a “deslocá-lo” ligeiramente de forma a incorporar os pólos que garantem a especificação desejada. Daí o nome compensador.

Relação com fórmula do centróide: considere o sistema com FT malha aberta  $GH(s)$ . Se adicionarmos o compensador, a FT passa a ser  $G_cGH(s)$ . O centróide do respectivo lugar de raízes (em função de  $K_c$ ) é dado por:

$$\sigma = \frac{((\sum_{i=1}^d p_i) + p_c) - ((\sum_{i=1}^n z_i) - z_c)}{d - n} = \frac{\sum_{i=1}^d p_i - \sum_{i=1}^n z_i}{d - n} + \frac{p_c - z_c}{d - n}$$

como  $p_c < z_c \Leftrightarrow p_c - z_c < 0$ , assim se verifica que o LR é deslocado para a esquerda com a adição do compensador em avanço.

Sistema com compensador em avanço implementado com ampops.

Possíveis questões:

- Como saber onde colocar o zero e o pólo do compensador em avanço?

Não esquecer o efeito dos zeros! (dependente da posição dos pólos dominantes)

- E se o LR for mais complexo?

Procedimento geral para o dimensionamento do compensador em avanço:

Passo 1 - O zero do compensador é escolhido de forma a anular o pólo estável mais lento ou (se resultar num zero mais próximo da origem) a ter um módulo aproximadamente ao do pólo dominante desejado.

Passo 2 -  $K_c$  e  $p_c$  são calculados de forma a que o pólo dominante desejado verifique a nova equação característica (afectada pela FT do compensador).

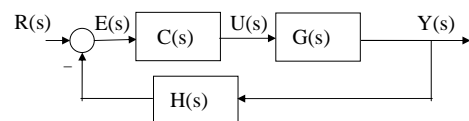
Será sempre possível obter a especificação desejada usando um compensador em avanço?

O compensador em avanço é essencialmente usado para modificar o regime transitório. Outro compensador facilmente implementável é o compensador em atraso, usado para melhorar o desempenho em regime permanente:

$$G_c(s) = K_c(s - z_c)/(s - p_c), \quad z_c \text{ e } p_c \text{ reais negativos e } |z_c| > |p_c|$$

## Acções de controlo elementares

Assume-se a configuração típica do sistema de controlo realimentado (forma canónica), onde  $C(s)$  representa a função de transferência do controlador:



### Controlo on-off

Exemplo: termóstato

O sistema alterna apenas entre dois valores possíveis de actuação.

Simples (barato) mas pouco preciso. A saída do sistema só estabilizaria no valor desejado se a velocidade de comutação do elemento controlador fosse infinita.

Elementos mecânicos - compromisso entre precisão e desgaste dos elementos.

Elementos eléctricos - compromisso entre precisão e ruído gerado.

(limites físicos/disponibilidade tecnológica/preço)

Os sistemas de controlo on-off não estão livres do problema da instabilidade.

Em termos matemáticos, a análise de sistemas de controlo deste tipo torna-se mais complicada devido ao carácter não linear do controlador.

As acções de controlo descritas de seguida requerem a existência de um elemento actuador que possa fornecer diferentes níveis de actuação (encarecimento do sistema). Deverá ter-se também em atenção que um sistema real tem limites de funcionamento! Numa dada situação um ganho infinito pode dar resultados teóricos muito interessantes, mas simplesmente não é realizável. Deverá analisar-se o comportamento temporal das variáveis do sistema de forma a detectar-se eventuais situações de saturação.

### Acção integrativa

$$C(s) = K_i/s$$

O valor do erro é integrado ao longo do tempo. Quando o erro se torna nulo o valor acumulado (“memorizado”) é usado para actuar sobre o sistema. O raciocínio é que o valor acumulado tende para o valor necessário para manter o valor da saída igual ao da entrada.

Conceito de *tipo* de sistema. Um sistema com  $n$  integradores no anel de realimentação diz-se de *tipo*  $n$ .

Quanto maior for o tipo do sistema maior poderá ser a complexidade do sinal de entrada para o qual se consegue um seguimento com erro nulo em regime permanente (desde que o sistema seja estável...)

Constantes de erro (posição/velocidade/aceleração)

### Acção proporcional

$$C(s) = K_p$$

Ganho constante. A actuação é directamente proporcional ao erro do sistema (simplesmente amplifica-se/atenua-se o sinal de erro).

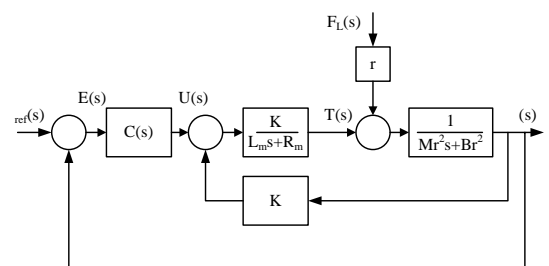
Quanto maior for o ganho, menor é a sensibilidade do sistema a variações nos seus elementos e menor o erro em regime permanente.

No entanto, para ganhos elevados o sistema pode aproximar-se de situações de saturação, baixar o tempo de resposta, ter overshoot elevado ou até tornar-se instável.

O efeito da acção proporcional baseia-se na premissa de que existe erro (se não houver erro, não existirá actuação). Se quisermos ter erro nulo em regime permanente, esta acção, em geral, não é suficiente.

*Exemplo:* um sistema de tipo 1 garante erro em regime permanente nulo para uma entrada em degrau. Para uma entrada em rampa, o sistema terá que ser do tipo 2 para esse erro ser nulo.

*Exemplo:* Consideremos novamente o exemplo do controlo de velocidade do tapete:



Já tinha sido mostrado inicialmente que para  $C(s) = A$  o erro em regime permanente só se anula quando  $A \rightarrow \infty$ . Se adicionarmos um integrador, ou seja,  $C(s) = 1/s$ , pode ser facilmente verificado que a saída converge para o valor desejado. Mais ainda, a saída converge para o valor desejado independentemente do valor de  $F_L$  (insensibilidade à perturbação).

No entanto, transformamos um sistema de 2ª ordem, que seria sempre estável, num de 3ª ordem, que poderá tornar-se instável caso ocorram variações de parâmetros do sistema.

Na prática, adiciona-se o menor número possível de integradores, uma vez que adicionar integradores equivale a adicionar pólos na origem, o que por sua vez equivale a deslocar o LR na direcção da instabilidade.

Quando se adiciona um integrador ao sistema, em geral é necessário baixar o ganho do caminho directo, de forma a compensar esse efeito.

Problema do “Integral wind-up”. Necessário adicionar alguma “lógica discreta” para contornar este fenómeno. Uma vez mais, um exemplo de fenómeno não-linear, de análise matemática mais complicada.

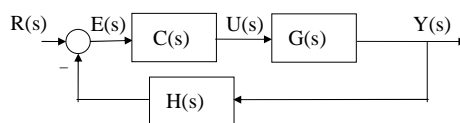
### Acção derivativa

$$C(s) = K_d s$$

Esta acção é usada essencialmente para diminuir o nível de oscilação do sistema e permitir aumentar o ganho global do anel de realimentação. Em geral, esta acção não é usada isoladamente.

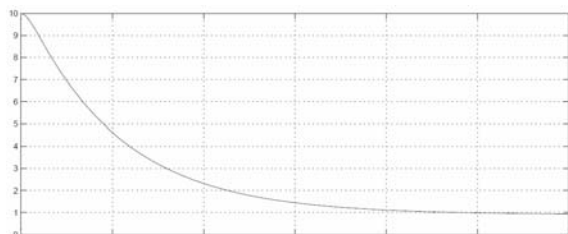
O efeito desta acção aumenta com a frequência do sinal de entrada: problema da amplificação do ruído de alta frequência. Muitas vezes é usada juntamente com um filtro passa-baixo com uma frequência de corte suficientemente alta de forma a não afectar muito o posicionamento dos pólos dominantes (análogo a um controlador em avanço).

Exemplo: Considere o sistema modelizado pelo diagrama de blocos seguinte.

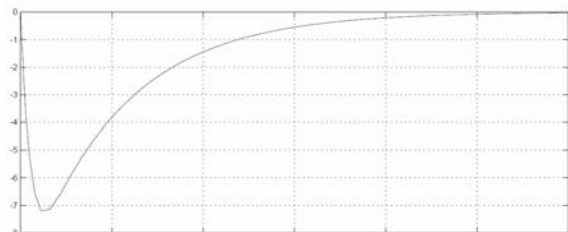


$$C(s) = K_d s + K_p, K_p = 10, K_d = 10, H(s) = 1, G(s) = 1/(s+1)^2$$

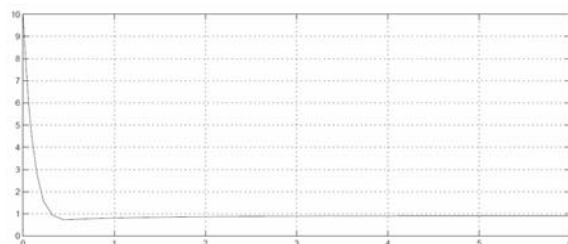
O comportamento do controlador em resposta a uma entrada em degrau unitário é estudado nos gráficos seguintes.



Acção proporcional



Acção derivativa



Efeito combinado das duas acções

### Controlador PID

É um dispositivo que oferece a combinação das acções de controlo proporcional, integrativa e derivativa. Permite o ajuste individual do efeito de cada uma das 3 acções no sinal de saída do controlador (ganhos ajustáveis). Alguns desses controladores calculam automaticamente o valor dos ganhos de acordo com as especificações do utilizador (self-tuning).

Existem várias implementações do controlador PID de forma a resolver aspectos de ordem prática (evitar o integral “wind-up”, condicionamento da acção derivativa), assim como diferentes formalizações matemáticas, mas a sua equação fundamental pode ser apresentada da seguinte forma:

$$u_{PID}(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t') dt' + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$U_{PID}(s) = \left( K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) E(s)$$

$K_i$  é por vezes é denominado por  $1/T_i$  e  $K_d$  por  $T_d$

No entanto, para melhor compreender o efeito do controlador PID convém observar que a sua função de transferência pode ser formulada da seguinte maneira:

$$C_{PID}(s) = \frac{U_{PID}(s)}{E(s)} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s},$$

(dois zéros e um pólo na origem)

E as suas versões “reduzidas”:

$$C_{PI}(s) = \frac{K_p s + K_i}{s}$$

$$C_{PD}(s) = K_d s + K_p$$

De que forma é que cada uma destas versões do controlador afectam o LR?

A escolha dos parâmetros do controlador PID pode ser feita de forma a colocar os zeros da sua FT na posição mais adequada a “moldar” o LR (cancelando pólos lentos ou próximo da posição desejada para o pólo dominante, por exemplo). de acordo com as especificações desejadas.

Alternativamente, existem métodos heurísticos (Ziegler-Nichols, Cohen-Coon) que fornecem valores que, em geral, produzem uma resposta “razoável” mas que pode não ser exactamente a desejada.

Os métodos heurísticos, como o de Ziegler-Nichols, constituem uma primeira tentativa para afinação dos parâmetros (o critério subjacente é produzir uma razão de decaimento de 1/4 embora não seja sequer garantido que isso aconteça).

Os valores obtidos por qualquer um destes métodos podem ser posteriormente afinados experimentalmente. É por esse motivo que é útil conhecer o efeito e limitações de cada uma das acções de controlo básicas.

A título de exemplo, observa-se nas tabelas de afinação de parâmetros dos métodos heurísticos que, ao adicionar a acção derivativa, o valor de Kp pode ser (é) aumentado (mas apenas ligeiramente!); esta combinação leva, na maior parte dos casos, à obtenção de um tempo de estabelecimento mais reduzido.