TESIS:
Teoria dos Sistemas

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

1. Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

2. Casos especiais

3. Exemplos

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

1. Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

2. Casos especiais

3. Exemplos

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Um sistema define-se como estável quando uma entrada limitada produz uma saída limitada

- Uma função de transferência $W(s) = N(s) / D(s)$ é estável se, e somente se, todas as raízes do denominador $D(s)$ (pólos de $W(s)$) tiverem parte real negativa

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Critério de Routh-Hurwitz
  - critério algébrico que mostra se um dado polinómio tem raízes com parte real negativa ou positiva
  - mas não indica os valores das raízes

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Seja

$$
\begin{aligned}
D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 = \\
&= (s-r_1)(s-r_2)\ldots(s-r_n) = \\
&= s^n - (r_1 + r_2 + \ldots + r_n)s^{n-1} + \\
&\quad + (r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_2r_3 + r_2r_4 + \ldots)s^{n-2} - \\
&\quad - (r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots + r_2r_3r_4 + r_2r_3r_5 + \ldots)s^{n-3} + \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + (-1)^n r_1r_2r_3\ldots r_n
\end{aligned}
$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

$$
\begin{aligned}
D(s) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 = \\
&= (s-r_1)(s-r_2)\ldots(s-r_n) = \\
&= s^n - (r_1 + r_2 + \ldots + r_n)s^{n-1} + \\
&\quad + (r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_2r_3 + r_2r_4 + \ldots)s^{n-2} - \\
&\quad - (r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots + r_2r_3r_4 + r_2r_3r_5 + \ldots)s^{n-3} + \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + (-1)^n r_1r_2r_3\ldots r_n
\end{aligned}
$$

- Se algumas raízes de $D(s)$ forem complexas, ocorrem em pares conjugados pois a_0, a_1, a_2, $a_{n-1} \in \mathbb{R}$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

$$
\begin{aligned}
D(s) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 = \\
&= (s-r_1)(s-r_2)\ldots(s-r_n) = \\
&= s^n - (r_1 + r_2 + \ldots + r_n)s^{n-1} + \\
&\quad + (r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_2r_3 + r_2r_4 + \ldots)s^{n-2} - \\
&\quad - (r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots + r_2r_3r_4 + r_2r_3r_5 + \ldots)s^{n-3} + \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + (-1)^n r_1r_2r_3\ldots r_n
\end{aligned}
$$

- Se todas as raízes de $D(s)$ tiverem parte real negativa então todos os coeficientes de $D(s)$ são positivos

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

$$
\begin{aligned}
D(s) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 = \\
&= (s-r_1)(s-r_2)\ldots(s-r_n) = \\
&= s^n - (r_1 + r_2 + \ldots + r_n)s^{n-1} + \\
&\quad + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_2 r_3 + r_2 r_4 + \ldots)s^{n-2} - \\
&\quad - (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_2 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_5 + \ldots)s^{n-3} + \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + (-1)^n r_1 r_2 r_3 \ldots r_n
\end{aligned}
$$

- Por exemplo, $s^3 + 0s^2 + 3s + 1$ tem pelo menos uma raiz com parte real não negativa pois o coeficiente de s^2 é 0

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Condição necessária (mas não suficiente) para um polinómio ter todas as raízes com parte real negativa
  - todos os coeficientes de $D(s)$ têm que ser positivos
  - se algum dos coeficientes de $D(s)$ for zero ou negativo, então o polinómio tem raízes com parte real positiva

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Para um polinómio que satisfaça a condição necessária anterior, aplica-se o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + a_{n-3}s^{n-3} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|}
n \\
n-1 \\
n-2 \\
n-3 \\
\vdots \\
0
\end{array}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Para um polinómio que satisfaça a condição necessária anterior, aplica-se o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & & & & \\
n-3 & & & & \\
\vdots & & & & \\
0 & & & &
\end{array}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

$$
\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\
n-3 & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\
\vdots & \cdots & & & \\
0 & h_{n-1} & & &
\end{array}
$$

$$
b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}
$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

$$
\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\
n-3 & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\
\vdots & \cdots & & & \\
0 & h_{n-1} & & &
\end{array}
$$

$$
b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}
$$

$$
b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}
$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

$$
\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\
n-3 & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\
\vdots & \cdots & & & \\
0 & h_{n-1} & & &
\end{array}
$$

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

$$
\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\
n-3 & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\
\vdots & \cdots & & & \\
0 & h_{n-1} & & &
\end{array}
$$

- Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz
  - se os coeficientes da primeira coluna não forem nulos, então o número de mudanças de sinal é igual ao número de raízes de $D(s)$ com parte real positiva

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Exemplo $D(s) = s^3 + s^2 + 2s + 20$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Exemplo $D(s) = s^3 + s^2 + 2s + 20$

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 20 \\
1 & -18 & 0 \\
0 & 20 &
\end{array}
$$

- há duas trocas de sinal na primeira coluna
  - polinómio tem duas raízes com parte real positiva
  - raízes –2,814; 0,907 ± j 2,507

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

1. Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz
2. Casos especiais
3. Exemplos

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Casos especiais (I)
  - se um termo da primeira coluna é zero e os restantes termos dessa linha são não-nulos
  - zero deve ser substituído por um número positivo pequeno $\varepsilon > 0$ e os restantes valores calculados de seguida

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Casos especiais (II)
  - exemplo 1 $D(s) = s^3 + 3s^2 + s + 3$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Casos especiais (II)
  - exemplo 1 $D(s) = s^3 + 3s^2 + s + 3$

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 1 \\
2 & 3 & 3 \\
1 & 0 \approx \varepsilon & \\
0 & 3 &
\end{array}
$$

  - sinal do coeficiente acima de ε é idêntico ao do coeficiente abaixo
    - polinómio tem um par de raízes imaginárias
    - raízes –3; $\pm j$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Casos especiais (III)
  - exemplo 2 $D(s) = s^3 - 3s + 2$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Casos especiais (III)
  - exemplo 2 $D(s) = s^3 - 3s + 2$

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & -3 \\
2 & 0 \approx \varepsilon & 2 \\
1 & -3 - 2/\varepsilon & \\
0 & 2 &
\end{array}
$$

  - há duas trocas de sinal na primeira coluna
    - polinómio tem duas raízes com parte real positiva
    - raízes 1 (dupla); –2

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Casos especiais (IV)
  - se todos os coeficientes de uma linha forem zero isso indica que existem raízes de igual amplitude mas de sinal oposto
  - nesse caso, o cálculo pode prosseguir através de um polinómio auxiliar formado com os coeficientes da linha anterior
  - então, a linha de zeros é substituída pelos coeficientes da derivada desse polinómio

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Casos especiais (V)
  - exemplo $D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Casos especiais (VI)
  - exemplo $D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50$

$$\begin{array}{c|ccc} 5 & 1 & 24 & -25 \\ 4 & 2 & 48 & -50 \\ 3 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \end{array}$$

polinómio auxiliar

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

$$P'(s) = 8s^3 + 96s$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Casos especiais (VII)

$$
\begin{array}{c|ccc}
5 & 1 & 24 & -25 \\
4 & 2 & 48 & -50 \\
3 & 8 & 96 & \\
2 & 24 & -50 & \\
1 & 112{,}7 & 0 & \\
0 & -50 & &
\end{array}
$$

- há uma troca de sinal na primeira coluna
  - polinómio tem uma raiz com parte real positiva
  - raízes ± 1; $\pm\, j\, 5$; -2

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Critério de Routh-Hurwitz
  - útil no cálculo de intervalos de variações admissíveis para certos parâmetros

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

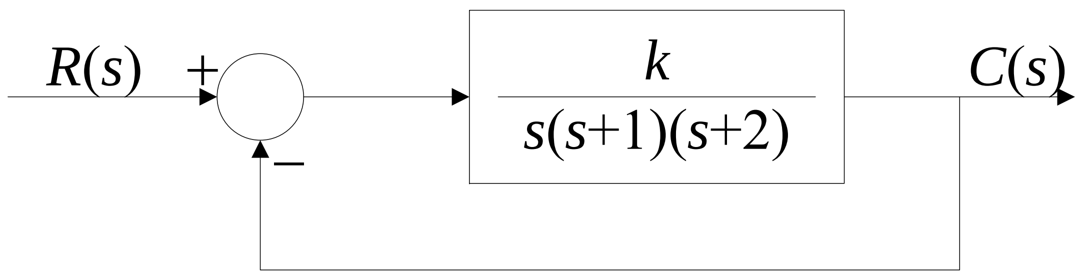
Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

1. Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz
2. Casos especiais
3. Exemplos

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Exemplo 1
  - dado o sistema



  - calcular o intervalo de valores de k para os quais o sistema permanece estável

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- determinar a Função de Transferência em Malha Fechada

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 2s + k}$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & (6-k)/3 & 0 \\ 0 & k & \end{array}$$

- para não ocorrerem trocas de sinais $0 < k < 6$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Exemplo 2 (I)
  - considere a equação característica

$$s^4 + ks^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

  - determinar os valores de k para os quais o sistema é estável

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Exemplo 2 (II)
  - resolução

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 1 & 1 \\
3 & k & 1 & 0 \\
2 & \dfrac{k-1}{k} & 1 & 0 \\
1 & 1-\dfrac{k^2}{k-1} & 0 & \\
0 & 1 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{cases}
k > 0 \\
\dfrac{k-1}{k} > 0 \\
1-\dfrac{k^2}{k-1} > 0
\end{cases}
$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Exemplo 2 (III)
  - para o sistema ser estável é necessário que

$$
\begin{cases}
k > 0 \\
\dfrac{k-1}{k} > 0 \\
1 - \dfrac{k^2}{k-1} > 0
\end{cases}
\qquad
\begin{array}{c|ccccccc}
k & -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\
\hline
k & & - & 0 & + & | & + & \\
\dfrac{k-1}{k} & & + & \infty & - & 0 & + & \\
1 - \dfrac{k^2}{k-1} & & + & | & + & \infty & - &
\end{array}
$$

  - as três condições nunca se verificam simultaneamente, pelo que o sistema nunca é estável

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt