Departamento de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto

TESIS

Teoria dos Sistemas

Lugar Geométrico de Raízes

–

Exercícios Propostos e Soluções

1. Esboce o Lugar Geométrico de Raízes Directo dos sistemas representados pelas seguintes Funções de Transferência:

a) $GH(s) = \dfrac{k}{s(s+1)(s+2)}$

b) $GH(s) = k\dfrac{3s}{(s+2)(s^2+6s+18)}$

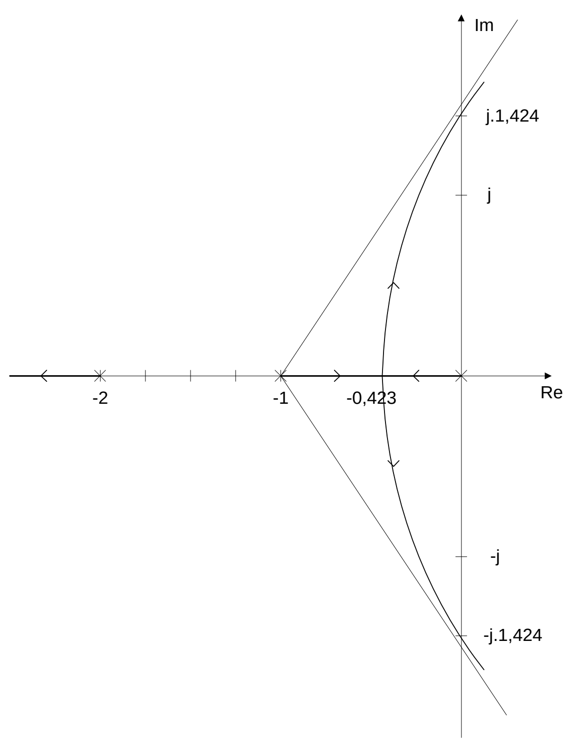
c) $GH(s) = k\dfrac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$

d) $GH(s) = k\dfrac{(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2}$

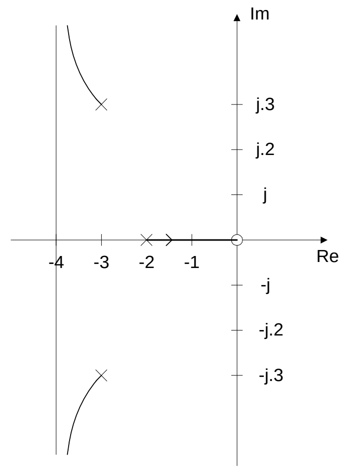
e) $GH(s) = \dfrac{k}{s(s^2+2s+5)}$

Solução:

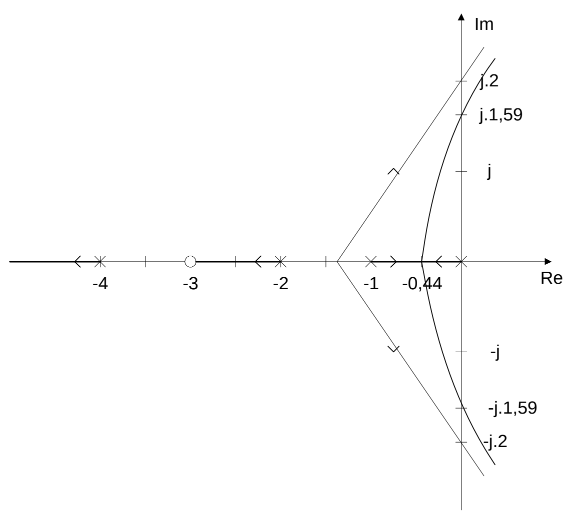
a)



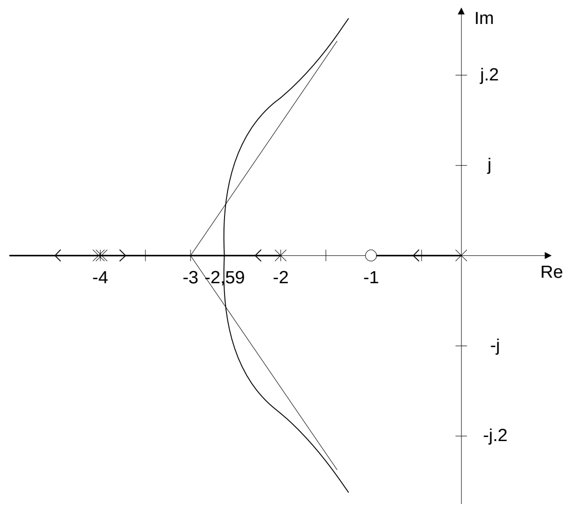
b)



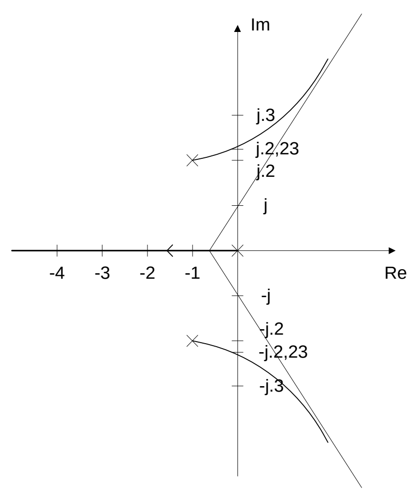
c)



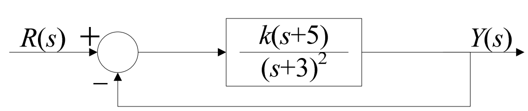
d)



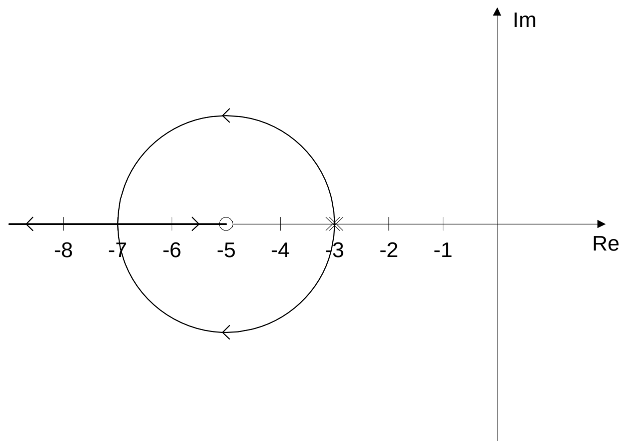
e)



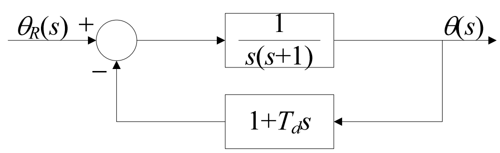
2. Esboce o Lugar Geométrico de Raízes Directo para o sistema que apresenta o seguinte diagrama de blocos:



Solução:



3. Um sistema de controlo de posição apresenta o seguinte diagrama de blocos equivalente:

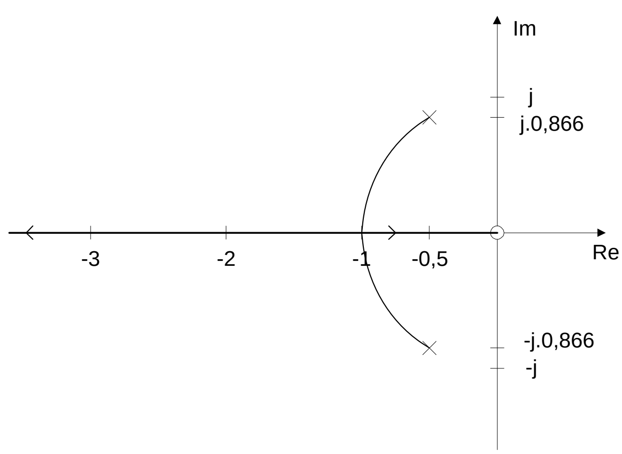


a) Esboce o Lugar Geométrico de Raízes Directo para este sistema, considerado em função de T_d.

b) Para que valores do ganho de realimentação de velocidade (T_d) o sistema apresenta uma saída não oscilatória?

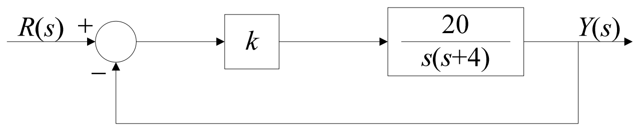
Solução:

a)



b) Para valores de T_d maiores que 1, o sistema não apresenta oscilação à sua saída.

4. Dado o sistema da figura seguinte:



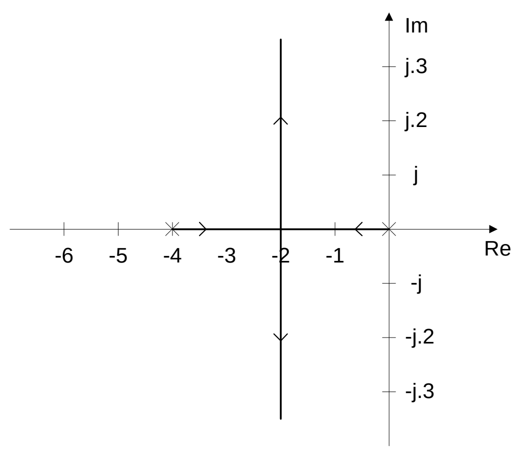
a) Esboce o seu Lugar Geométrico de Raízes Directo.

b) Para que valores do ganho *k*, o sistema não apresenta oscilação à sua saída?

c) Existe algum valor do ganho *k* para o qual o sistema apresente o seguinte par de pólos em malha fechada: $s_{1,2} = -3 \pm j3$?

Solução:

a)



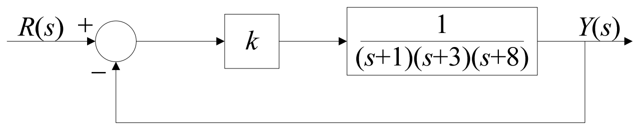
b) Para valores de *k*, tais que: $0{,}2 \geq k > 0$ o sistema não apresenta oscilação à sua saída.

c) Poder-se-ia resolver a equação característica do sistema:

$$1 + GH(s)\big|_{s=-3\pm j.3} = 0$$

e ver se havia algum valor de *k* que permitisse cumprir as especificações.
Alternativamente, olhando para o L.G.R. conclui-se que os pólos do sistema ou são reais ou, no caso de serem imaginários, têm parte real igual a – 2, logo não se consegue ter os pólos – 3 ± *j*3.

5. Considere o sistema da figura seguinte:

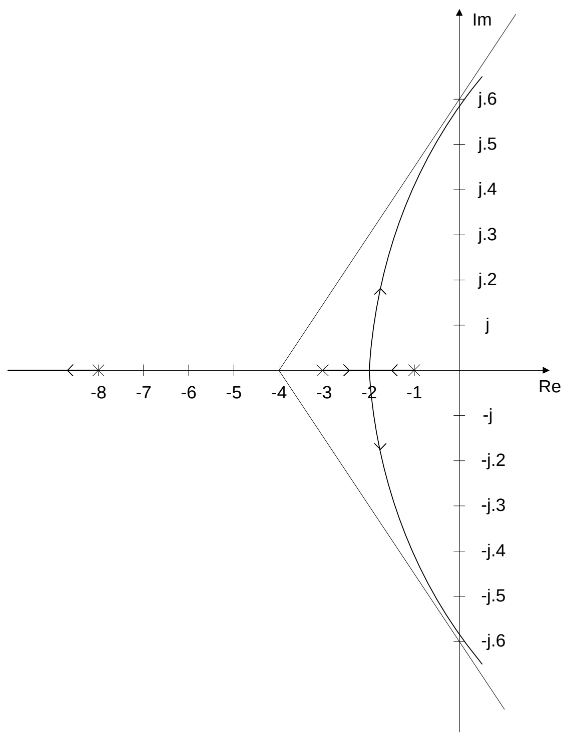


a) Esboce o seu Lugar Geométrico de Raízes Directo.

b) Indique os valores de k para os quais o sistema é estável.

Solução:

a)

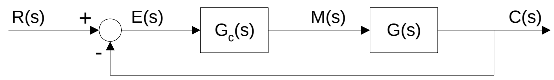


b) O sistema torna-se instável quando passa a ter pólos no semi-plano direito. Isso acontece para $k > 396$. Para o sistema ser estável é necessário que: $0 < k < 396$.

6. Uma máquina de controlo numérico apresenta a seguinte Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

As especificações de desempenho exigem que, na configuração de "*feedback*" unitário da figura seguinte, o sistema apresente um "*Overshoot*" percentual máximo inferior a 2,5 % e um tempo de estabelecimento inferior a 1 seg.



a) Mostre que esta especificação não pode ser alcançada recorrendo a um controlador de acção unicamente proporcional.

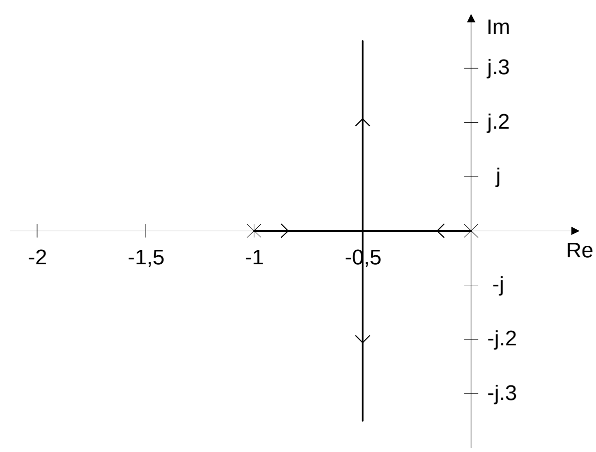
b) Indique o intervalo de valores do ganho proporcional para os quais o sistema apresenta uma saída não oscilatória?

Solução:

a) Para o sistema apresentar as especificações de desempenho pretendidas, necessita que os seus pólos tenham os seguintes valores:

$$p_{1,2} = -\zeta.\omega_n \pm j.\omega_n.\sqrt{\zeta^2 - 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p_{1,2} = -4 \pm j.3{,}42$$

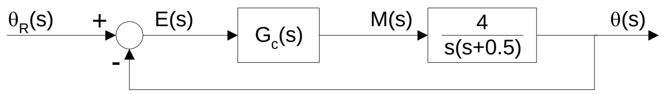
O L.G.R. deste sistema é o seguinte:



Analisando o L.G.R. do sistema verifica-se que com um controlador de acção unicamente proporcional não se conseguem cumprir as especificações de desempenho pretendidas, uma vez que $-4 \pm j.3{,}42$ nunca são pólos do sistema, independentemente do valor de *k*.

b) Para valores de k, tais que: $0{,}25 \geq k > 0$ o sistema não apresenta oscilação à sua saída.

7. Um sistema de controlo de posição angular pode ser representado pelo seguinte diagrama de blocos:



Pretende-se que este sistema apresente as seguintes especificações de desempenho:

- "*Overshoot*" percentual máximo inferior a 16,32 %;
- tempo de estabelecimento inferior a 1,6 seg.

a) Mostre que estas especificações não podem ser alcançadas recorrendo a um controlador de acção unicamente proporcional.

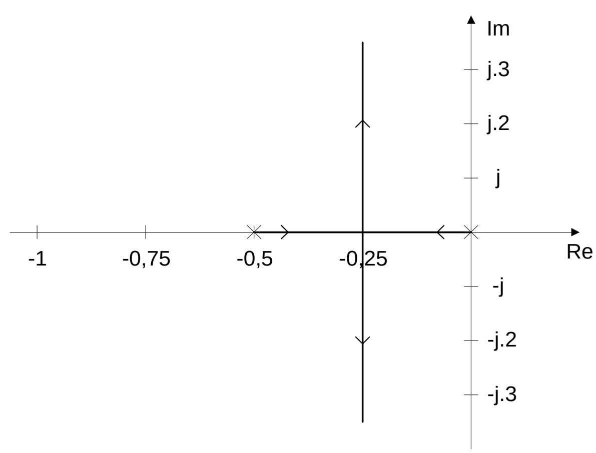
b) Indique o intervalo de valores do ganho proporcional para os quais o sistema apresenta uma saída não oscilatória?

Solução:

a) Para o sistema apresentar as especificações de desempenho pretendidas, necessita que os seus pólos tenham os seguintes valores:

$$p_{1,2} = -\zeta.\omega_n \pm j.\omega_n.\sqrt{\zeta^2 - 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p_{1,2} = -2{,}5 \pm j.4{,}33$$

O L.G.R. deste sistema é:



Analisando o L.G.R. do sistema verifica-se que com um controlador de acção unicamente proporcional não se conseguem cumprir as especificações de desempenho pretendidas, uma vez que $-2{,}5 \pm j.4{,}33$ nunca são pólos do sistema, independentemente do valor de k.

b) Para valores de k, tais que: $0{,}015625 \geq k > 0$ o sistema não apresenta oscilação à sua saída.