Departamento de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto

**TESIS**
Teoria dos Sistemas

# Revisões da Transformada de Laplace e suas Aplicações

–

Exercícios Propostos e Soluções

**Ano Lectivo**: 2007/2008

**1.** Calcule a transformada de Laplace $F(s)=L\{f(t)\}$ dos seguintes sinais $f(t)$, usando a definição:

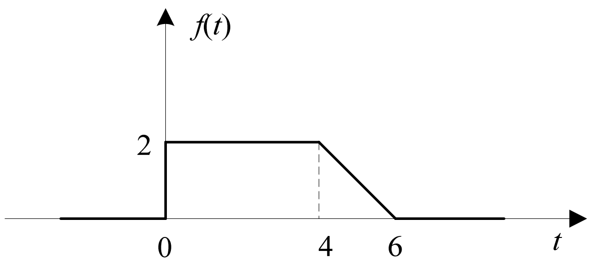
a) $f(t)=u(t-2)$
b) $f(t)=e^{-at}$
c) $f(t)=\sin(t)$
d) $f(t)=e^{-5t}u(t-1)$

**Solução:**

a) $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s}, \quad \Re e\{s\}>0$
b) $F(s)=\dfrac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\}>-a$
c) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+1}, \quad \Re e\{s\}>0$
d) $F(s)=\dfrac{e^{-(s+5)}}{s+5}, \quad \Re e\{s\}>-5$

**2.** Usando os pares de transformadas da Tabela A e as propriedades listadas na Tabela B, calcule a transformada de Laplace $F(s)=L\{f(t)\}$ das seguintes funções $f(t)$:

a) $f(t)=\cos(4t)$
b) $f(t)=3\sin(2t)-t\cos(4t)$
c)




**Sugestão**: Decomponha $f(t)$ como a soma de três funções envolvendo o atraso de três degraus unitários: $u(t)$, $u(t-4)$ e $u(t-6)$.

d) $f(t)=\cos\left(4t+\dfrac{\pi}{3}\right)$
e) $f(t)=t^2\cos(2t)$
f) $f(t)=e^{-3t}\cos\left(4t+\dfrac{\pi}{3}\right)$
g) $f(t)=e^{-3t}\int_0^t t\sin(2t)dt$

**Solução:**

a) $F(s)=\dfrac{s}{s^2+16}$

b) $F(s)=\dfrac{6}{s^2+4}-\dfrac{s^2-16}{\left(s^2+16\right)^2}$

c) $F(s)=\dfrac{2}{s}-\dfrac{1}{s^2}e^{-4s}+\dfrac{1}{s^2}e^{-6s}$

d) $F(s)=\dfrac{1/2s-2\sqrt{3}}{s^2+16}$

e) $F(s)=\dfrac{2s\left(s^2-12\right)}{\left(s^2+4\right)^3}$

f) $F(s)=\dfrac{1/2s+\left(3/2-2\sqrt{3}\right)}{s^2+6s+25}$

g) $F(s)=\dfrac{4}{\left((s+3)^2+4\right)^2}$

**3.** Calcule a transformada inversa de Laplace $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ das seguintes transformadas $F(s)$:

a) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2}$

b) $F(s)=\dfrac{s^2-3}{s+2}$

c) $F(s)=\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2}$

d) $F(s)=\dfrac{10}{s(s+1)(s+10)}$

e) $F(s)=\dfrac{2s^2+10s+11}{s^2+5s+6}$

f) $F(s)=\dfrac{1}{s\left(s^2+s+1\right)}$

g) $F(s)=\dfrac{1}{s^2}\left(1-2.e^{-s}+e^{-2.s}\right)$ e esboce o gráfico da função $f(t)$

h) $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$

i) $F(s)=\dfrac{s^3+2s+4}{\left(s^4-16\right)}$

**Solução:**

a) $f(t)=1+t$, $t\geq 0$

b) $f(t)=-2\delta(t)+\dfrac{d}{dt}\delta(t)+e^{-2t}$, $t>0^-$

c) $f(t)=(t-\tau)u(t-\tau)$

d) $f(t)=1-\dfrac{10}{9}e^{-t}+\dfrac{1}{9}e^{-10t}$, $t\geq 0$

e) $f(t)=2\delta(t)-e^{-2t}+e^{-3t}$, $t>0^-$

f) $f(t)=1-1{,}154e^{-0{,}5t}\cos(0{,}865t-0{,}523)$, $t\geq 0$

g) $f(t)=tu(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)$, $t\geq 0$

h) $f(t)=2e^{-t}-(2+t)e^{-2t}$, $t\geq 0$

i) $f(t)=0{,}25e^{-2t}+0{,}5e^{2t}+0{,}25\cos(2t)-0{,}25\sin(2t)$, $t\geq 0$

**4.** Resolva as seguintes equações diferenciais para as entradas e condições iniciais especificadas:

a) $y''(t)+5y'(t)+4y(t)=x(t)$, $y(0)=y'(0)=0$, $x(t)=2e^{-2t}$

b) $y''(t)+y(t)=x(t)$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$, $x(t)=t$

c) $y''(t)+2y'(t)=e^{t}$, $y(0)=y'(0)=0$

d) $y''(t)+y'(t)=\sin(t)$, $y(0)=\alpha$, $y'(0)=\beta$

e) $y'(t)+3y(t)+2\int_0^t y(t)dt=1$, $y(0)=1$

**Solução:**

a) $y(t)=\dfrac{2}{3}e^{-t}-e^{-2t}+\dfrac{1}{3}e^{-4t}$, $t\geq 0$

b) $y(t)=t+\cos(t)-2\sin(t)$, $t\geq 0$

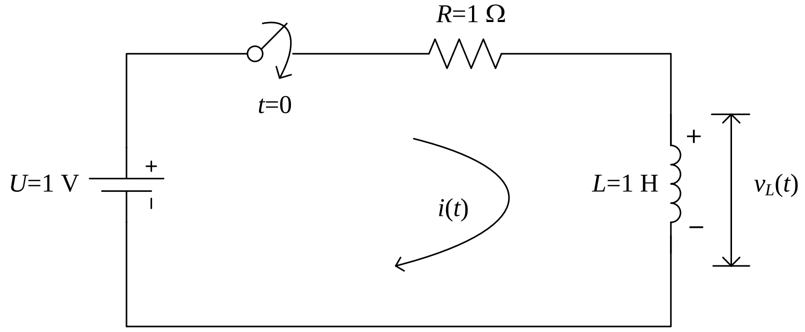
c) $y(t)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}e^{-2t}+\dfrac{1}{3}e^{t}$, $t\geq 0$

d) $y(t)=1-\dfrac{1}{2}e^{-t}-\dfrac{1}{2}\cos(t)-\dfrac{1}{2}\sin(t)+\alpha+\beta(1-e^{-t})$, $t\geq 0$

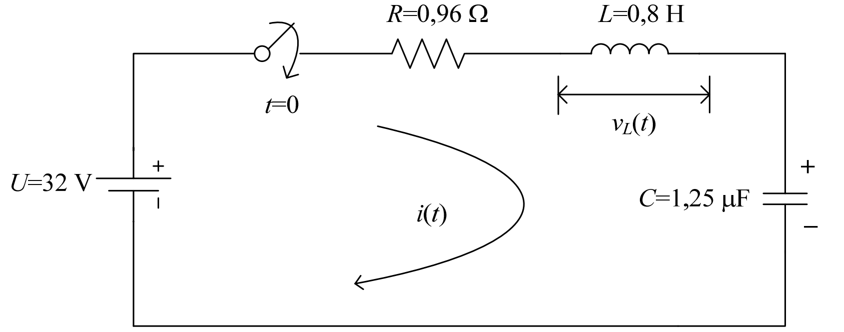
e) $y(t)=e^{-2t}$, $t\geq 0$

**5.** Analise os circuitos apresentados a seguir. Considere que os sistemas se encontram em repouso no instante em que o interruptor é fechado, para $t=0$. Determine a corrente $i(t)$ e a tensão aos terminais da inductância, $v_L(t)$, para $t\geq 0$.

a)




b)

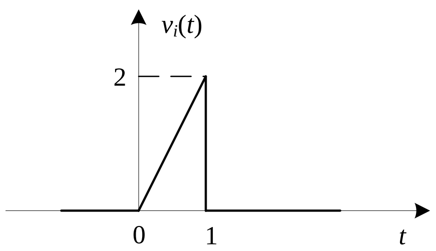


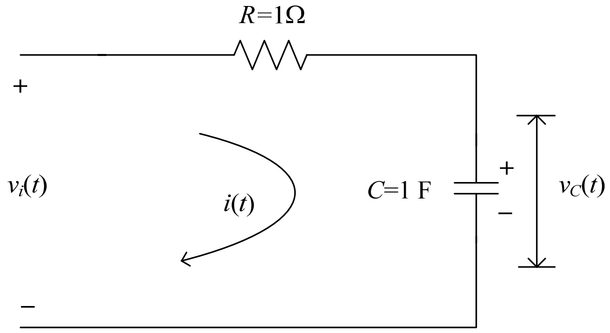

**Solução:**

a) $i(t)=1-e^{-t}$, $v_L(t)=e^{-t}$, $t \geq 0$

b) $i(t)=0,04e^{-0,6t}\sin(1000t)$, $v_L(t)=-32e^{-0,6t}\cos(1000t-1,57)$, $t \geq 0$

**6.** Considere o circuito RC representado na figura seguinte. Assuma que o condensador $C$ se encontra inicialmente descarregado. Determine a corrente $i(t)$ e a tensão aos terminais do condensador, $v_C(t)$, quando à entrada é aplicado o sinal $v_i(t)$.



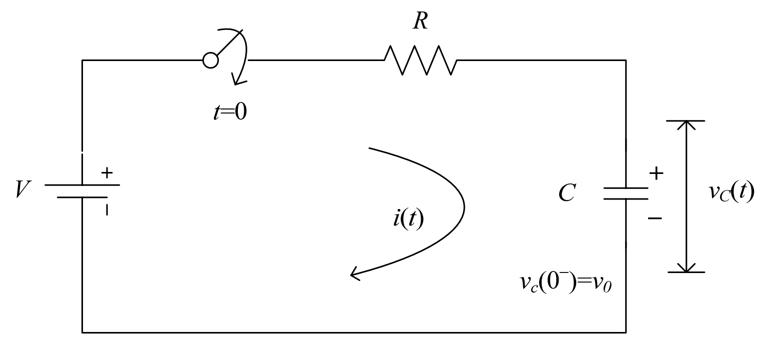




**Solução:**

$$i(t)=\left(2-2e^{-t}\right)u(t)+\left(-2+2e^{-(t-1)}-2e^{-(t-1)}\right)u(t-1)$$

$$v_C(t)=\left(-2+2t+2e^{-t}\right)u(t)-2(t-1)u(t-1)$$

**7.** Considere o circuito RC representado na figura seguinte. O interruptor é fechado no instante $t = 0$. Assuma que o condensador $C$ se encontra inicialmente carregado com uma tensão $v(0^-) = v_0$.



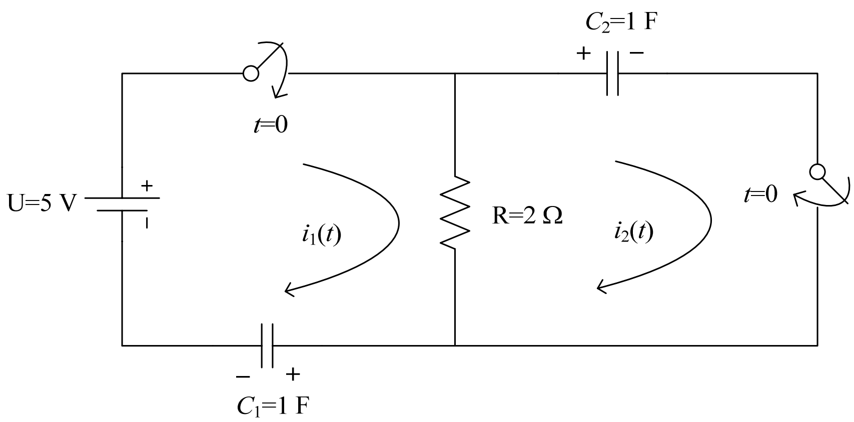

a) Determine a corrente $i(t)$.
b) Determine a tensão aos terminais do condensador, $v_C(t)$.

**Solução:**

a) $i(t) = \dfrac{V - v_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \qquad t \geq 0$

b) $v_C(t) = V\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + v_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$

**8.** Considere o circuito representado na figura seguinte. Os dois interruptores são fechados ao mesmo tempo no instante $t = 0$. As tensões nos condensadores $C_1$ e $C_2$, antes de os interruptore serem fechados, são de 1 V e de 2 V, respectivamente.




a) Determine as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$.
b) Determine as tensões aos terminais dos condensadores para $t = 0^+$, $v_{C_1}(0^+)$ e $v_{C_2}(0^+)$.

**Solução:**

a) $i_1(t)=\delta(t)+\frac{3}{4}e^{-\frac{t}{4}}$, $i_2(t)=\delta(t)-\frac{3}{4}e^{-\frac{t}{4}}$, $t>0^-$

b) $v_{C_1}\left(0^+\right)=2\text{ V}$, $v_{C_2}\left(0^+\right)=3\text{ V}$

Tabela A: **Pares de Transformada de Laplace**[*]

| | $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|---|
| 1 | Impulso unitário $\delta(t)$ | $1$ |
| 2 | Degrau unitário $u(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| 3 | Rampa unitária $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| 4 | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$ | $\frac{1}{s^n}$ |
| 5 | $t^n \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| 6 | $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| 7 | $te^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| 8 | $\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at} \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$ | $\frac{1}{(s+a)^n}$ |
| 9 | $t^n e^{-at} \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$ | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ |
| 10 | $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| 11 | $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| 12 | $\sinh(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$ |
| 13 | $\cosh(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2-\omega^2}$ |
| 14 | $\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$ | $\frac{1}{s(s+a)}$ |
| 15 | $\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$ | $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ |
| 16 | $\frac{1}{b-a}\left(be^{-bt}-ae^{-at}\right)$ | $\frac{s}{(s+a)(s+b)}$ |
| 17 | $\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{b-a}\left(be^{-at}-ae^{-bt}\right)\right]$ | $\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$ |
| 18 | $\frac{1}{a^2}\left(1-e^{-at}-ate^{-at}\right)$ | $\frac{1}{s(s+a)^2}$ |

[*] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Fourth Edition, Prentice-Hall, 2002.

(cont.)

| | | |
|---|---|---|
| 19 | $\frac{1}{a^2}\left(at-1+e^{-at}\right)$ | $\frac{1}{s^2(s+a)}$ |
| 20 | $e^{-at}\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| 21 | $e^{-at}\cos(\omega t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| 22 | $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t\right) \quad (0<\xi<1)$ | $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ |
| 23 | $-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t-\phi\right)$ <br> $\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$ <br> $\left(0<\xi<1, \quad 0<\phi<\frac{\pi}{2}\right)$ | $\frac{s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ |
| 24 | $1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t+\phi\right)$ <br> $\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$ <br> $\left(0<\xi<1, \quad 0<\phi<\frac{\pi}{2}\right)$ | $\frac{\omega_n^2}{s\left(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2\right)}$ |
| 25 | $1-\cos(\omega t)$ | $\frac{\omega^2}{s\left(s^2+\omega^2\right)}$ |
| 26 | $\omega t-\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega^3}{s^2\left(s^2+\omega^2\right)}$ |
| 27 | $\sin(\omega t)-\omega t\cos(\omega t)$ | $\frac{2\omega^3}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$ |
| 28 | $\frac{1}{2\omega}t\sin(\omega t)$ | $\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$ |
| 29 | $t\cos(\omega t)$ | $\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$ |
| 30 | $\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left[\cos(\omega_1 t)-\cos(\omega_2 t)\right] \quad \left(\omega_1^2\neq\omega_2^2\right)$ | $\frac{s}{\left(s^2+\omega_1^2\right)\left(s^2+\omega_2^2\right)}$ |
| 31 | $\frac{1}{2\omega}\left[\sin(\omega t)+\omega t\cos(\omega t)\right]$ | $\frac{s^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$ |

Tabela B: **Propriedades da Transformada de Laplace**[†]

| | |
|---|---|
| 1 | $L[Af(t)] = AF(s)$ |
| 2 | $L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$ |
| 3 | $L_{\pm}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0^{\pm})$ |
| 4 | $L_{\pm}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0^{\pm}) - \dot{f}(0^{\pm})$ |
| 5 | $L_{\pm}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0^{\pm})$ <br> onde $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t)$ |
| 6 | $L_{\pm}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int f(t)dt\right]_{t=0^{\pm}}$ |
| 7 | $L_{\pm}\left[\int\ldots\int f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s^{n-k+1}}\left[\int\ldots\int f(t)(dt)^k\right]_{t=0^{\pm}}$ |
| 8 | $L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$ |
| 9 | $\int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{s\to 0} F(s)$ se $\int_0^{\infty} f(t)dt$ existe |
| 10 | $L\left[e^{-\alpha t}f(t)\right] = F(s+\alpha)$ |
| 11 | $L[f(t-\alpha)u(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}F(s), \quad \alpha > 0$ |
| 12 | $L[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$ |
| 13 | $L\left[t^2 f(t)\right] = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$ |
| 14 | $L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s), \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ |
| 15 | $L\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^{\infty} F(s)ds$ se $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}f(t)$ existe |
| 16 | $L\left[f\left(\frac{1}{a}\right)\right] = aF(as)$ |
| 17 | $L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$ |
| 18 | $L[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)dp$ |

[†] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Fourth Edition, Prentice-Hall, 2002.