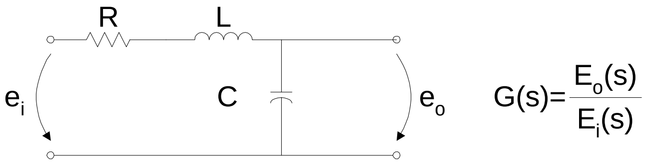
1. a)



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$e_i(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}.\int i(t).dt$$

e

$$e_o(t) = \frac{1}{C}.\int i(t).dt$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$E_i(s) = R.I(s) + s.L.I(s) + \frac{1}{s.C}.I(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_i(s) = \left[R + s.L + \frac{1}{s.C}\right].I(s)$$

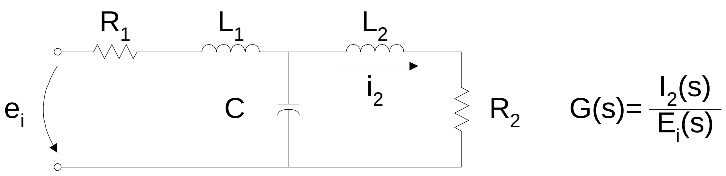
e

$$E_o(s) = \frac{1}{s.C}.I(s)$$

Dividindo $E_o(s)$ por $E_i(s)$, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T. = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{s^2.L.C + s.R.C + 1}$$

1. b)



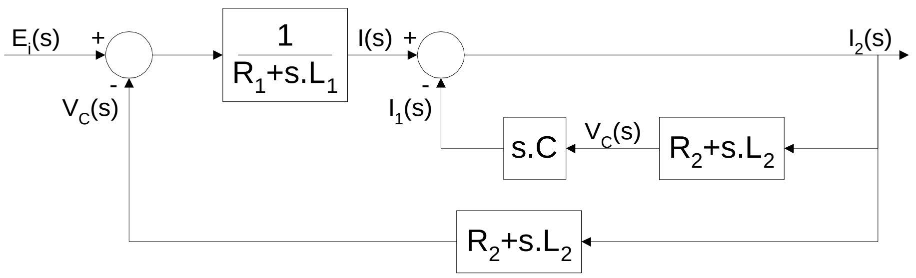
As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$e_i(t) = R_1.i(t) + L_1.\frac{di(t)}{dt} + v_c(t)$$
$$v_c(t) = \frac{1}{C}.\int i_1(t).dt$$
$$v_c(t) = L_2.\frac{di_2(t)}{dt} + R_2.i_2(t)$$
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$E_i(s) = R_1.I(s) + s.L_1.I(s) + V_c(s)$$
$$V_c(s) = \frac{1}{s.C}.I_1(s)$$
$$V_c(s) = s.L_2.I_2(s) + R_2.I_2(s)$$
$$I(s) = I_1(s) + I_2(s)$$

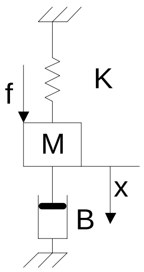
A partir das equações anteriores é possível construir o seguinte diagrama de blocos deste sistema:



Simplificando o diagrama de blocos anterior, obtém-se a função de transferência do sistema, apresentada abaixo:

$$F.T. = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{s^3.L_1.L_2.C + s^2.(R_1.L_2.C + L_1.R_2.C) + s.(L_1 + L_2 + R_1.R_2.C) + R_1 + R_2}$$

2. a)



$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$$

Uma vez que:

$$\sum F = M.a = M.\frac{d^2x}{dt^2}$$

A equação dinâmica que descreve o funcionamento deste sistema é a seguinte:

$$f(t) - K.x(t) - B.\frac{dx(t)}{dt} = M.\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

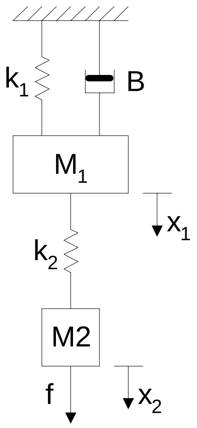
Aplicando a Transformada de Laplace a esta equação, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$F(s) - K.X(s) - s.B.X(s) = s^2.M.X(s)$$

Simplificando a equação anterior, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T. = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2.M + s.B + K}$$

2. b)



$$G(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)}$$

As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\sum F = M_1.\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -K_1.x_1(t) - B_1.\frac{dx_1(t)}{dt} - K_2.(x_1(t) - x_2(t)) = M_1.\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}$$

e

$$\sum F = M_2.\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(t) - K_2.(x_2(t) - x_1(t)) = M_2.\frac{d^2x_2(t)}{dt^2}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$- K_1 . X_1(s) - s.B_1 . X_1(s) - K_2 .\left[X_1(s) - X_2(s) \right] = s^2 . M_1 . X_1(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X_2(s) = \frac{s^2 . M_1 + s.B_1 + K_1 + K_2}{K_2}$$

e

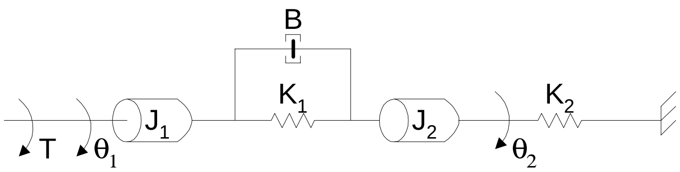
$$F(s) - K_2 .\left[X_2(s) - X_1(s) \right] = s^2 . M_2 . X_2(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(s) = \left[s^2 . M_2 + K_2 \right] . X_2(s) - K_2 . X_1(s)$$

Substituindo o valor de $X_2(s)$ obtido na primeira equação, na segunda equação, e simplificando o resultado obtido, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T. = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{K_2}{s^4 . M_1 . M_2 + s^3 . B_1 . M_2 + s^2 .(K_1 . M_2 + M_2 . K_2 + M_1 . K_2) + s.(B_1 . K_2) + K_1 . K_2}$$

3. a)



$$G(s) = \frac{\theta_2(s)}{T(s)}$$

Uma vez que:

$$\sum T = J.\alpha = J.\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\sum T = J_1 . \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T(t) - K_1 .\left[\theta_1(t) - \theta_2(t) \right] - B.\left[\frac{d\theta_1(t)}{dt} - \frac{d\theta_2(t)}{dt} \right] = J_1 . \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2}$$

e

$$\sum T = J_2 . \frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -K_1 .\left[\theta_2(t) - \theta_1(t) \right] - B.\left[\frac{d\theta_2(t)}{dt} - \frac{d\theta_1(t)}{dt} \right] - K_2 .\theta_2(t) = J_2 . \frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2}$$

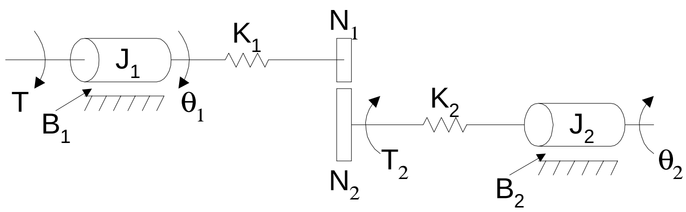
Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$T(s) - K_1.[\theta_1(s) - \theta_2(s)] - s.B.[\theta_1(s) - \theta_2(s)] = s^2.J_1.\theta_1(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow T(s) = [s^2.J_1 + s.B + K_1].\theta_1(s) - [s.B + K_1].\theta_2(s)$$
$$e$$
$$-K_1.[\theta_2(s) - \theta_1(s)] - s.B.[\theta_2(s) - \theta_1(s)] - K_2.\theta_2(s) = s^2.J_2.\theta_2(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \theta_1(s) = \frac{s^2.J_2 + s.B + K_1 + K_2}{s.B + K_1}.\theta_2(s)$$

Substituindo o valor de $\theta_1(s)$ obtido na segunda equação, na primeira equação, e simplificando o resultado obtido, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T. = \frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{s.B + K_1}{s^4.J_1.J_2 + s^3.(J_1.B + J_2.B) + s^2.(J_1.K_1 + J_1.K_2 + J_2.K_1) + s.(B.K_2) + K_1.K_2}$$

3. b)



$$G_1(s) = \frac{\theta_1(s)}{T(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{\theta_2(s)}{T(s)}$$

As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$T(t) - B_1.\frac{d\theta_1(t)}{dt} - K_1.[\theta_1(t) - \theta_{12}(t)] = J_1.\frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2}$$
$$-n.K_1.[\theta_{12}(t) - \theta_1(t)] - K_2.[\theta_{21}(t) - \theta_2(t)] = 0$$
$$-K_2.[\theta_2(t) - \theta_{21}(t)] - B_2.\frac{d\theta_2(t)}{dt} = J_2.\frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2}$$
$$\theta_{12}(t) = \theta_{21}(t).n$$
$$T_2(t) = T_{12}(t).n$$
$$e$$
$$n = \frac{N_2}{N_1}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$T(s) - s..B_1.\theta_1(s) - K_1.[\theta_1(s) - \theta_{12}(s)] = s^2.J_1.\theta_1(s)$$
$$n.K_1.[\theta_{12}(s) - \theta_1(s)] + K_2.[\theta_{21}(s) - \theta_2(s)] = 0$$
$$-K_2.[\theta_2(s) - \theta_{21}(s)] - s.B_2.\theta_2(s) = s^2.J_2.\theta_2(s)$$
$$\theta_{12}(s) = \theta_{21}(s).n$$
$$T_2(s) = T_{12}(s).n$$

Substituindo $\theta_{12}(s) = \theta_{21}(s).n$, na segunda equação, obtém-se:

$$\theta_{21} = \frac{n.K_1.\theta_1 + K_2.\theta_2}{n^2.K_1 + K_2}$$

e substituindo este valor na primeira e terceira equações, ficamos com:

$$T(s) = \left[s^2.J_1 + s.B_1 + \frac{K_1.K_2}{n^2.K_1 + K_2}\right].\theta_1(s) - \frac{n.K_1.K_2}{n^2.K_1 + K_2}.\theta_2(s)$$
$$-\frac{n.K_1.K_2}{n^2.K_1 + K_2}.\theta_1(s) + \left[s^2.J_2 + s.B_2 + \frac{n^2.K_1.K_2}{n^2.K_1 + K_2}\right].\theta_2(s) = 0$$

Considerando:

$$T(s) = G_1(s).\theta_1(s) - G_2(s).\theta_2(s)$$
$$-G_3(s).\theta_1(s) + G_4(s).\theta_2(s) = 0$$

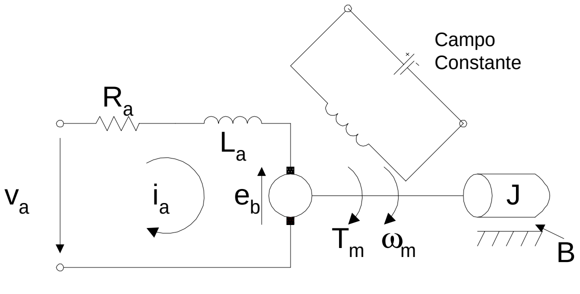
Temos:

$$F.T._1 = \frac{\theta_1(s)}{T(s)} = \frac{G_4(s)}{G_1(s).G_4(s) - G_2(s).G_3(s)}$$

e

$$F.T._2 = \frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{G_3(s)}{G_1(s).G_4(s) - G_2(s).G_3(s)}$$

4. a)



$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{V_a(s)}$$

As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$v_a(t) = R_a.i_a(t) + L_a.\frac{di_a(t)}{dt} + e_b(t)$$

$$e_b(t) = k_b.\omega_m = k_b.\frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

$$T_m(t) = J.\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B.\frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

$$T_m(t) = k_I.i_a(t)$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

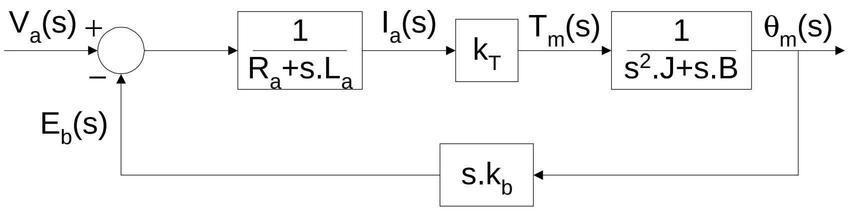
$$V_a(s) = R_a.I_a(s) + s.L_a.I_a(s) + E_b(s)$$

$$E_b(s) = s.k_b.\theta_m(s)$$

$$T_m(s) = s^2.J.\theta_m(s) + s.B.\theta_m(s)$$

$$T_m(s) = k_I.I_a(s)$$

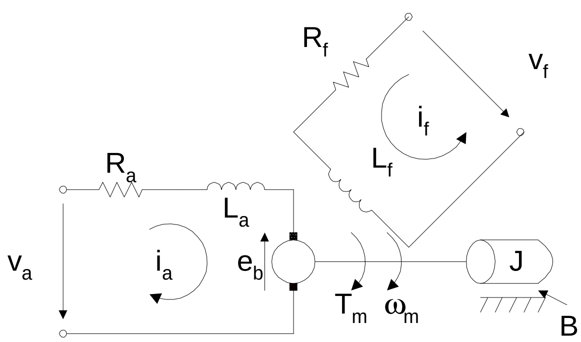
A partir das equações anteriores é possível construir o seguinte diagrama de blocos deste sistema:



Simplificando o diagrama de blocos anterior, obtém-se a função de transferência do sistema, apresentada abaixo:

$$F.T. = \frac{\theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{k_I}{(s.L_a + R_a).(s^2.J + s.B) + s.k_b.k_I}$$

4. b)



$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{V_f(s)}$$

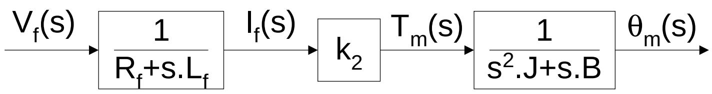
As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$v_f(t) = R_f . i_f(t) + L_f . \frac{di_f(t)}{dt}$$
$$T_m(t) = k_2 . i_f(t)$$
$$T_m(t) = J . \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B . \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$V_f(s) = R_f . I_f(s) + s . L_f . I_f(s)$$
$$T_m(s) = k_2 . I_f(s)$$
$$T_m(s) = s^2 . J . \theta_m(s) + s . B . \theta_m(s)$$

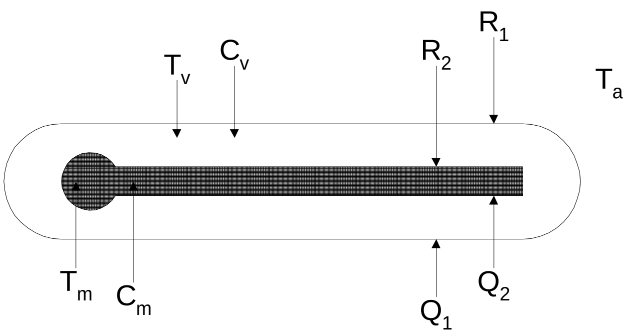
A partir das equações anteriores é possível construir o seguinte diagrama de blocos deste sistema:



Simplificando o diagrama de blocos anterior, obtém-se a função de transferência do sistema, apresentada abaixo:

$$F.T. = \frac{\theta_m(s)}{V_f(s)} = \frac{k_2}{(s . L_f + R_f).(s^2 . J + s . B)}$$

5. a)



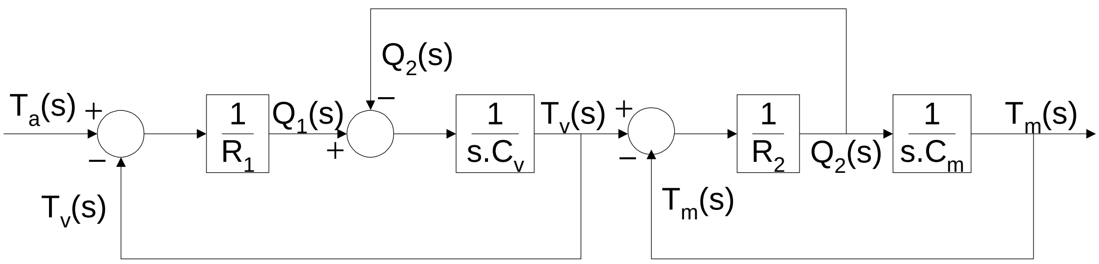
As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste sistema são as seguintes:

$$Q_1(t) - Q_2(t) = C_v . \frac{dT_v(t)}{dt}$$
$$Q_1(t) = \frac{T_a(t) - T_v(t)}{R_1}$$
$$Q_2(t) = C_m . \frac{dT_m(t)}{dt}$$
$$Q_2(t) = \frac{T_v(t) - T_m(t)}{R_2}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$Q_1(s) - Q_2(s) = s.C_v.T_v(s)$$
$$Q_1(s) = \frac{T_a(s) - T_v(s)}{R_1}$$
$$Q_2(s) = s.C_m.T_m(s)$$
$$Q_2(s) = \frac{T_v(s) - T_m(s)}{R_2}$$

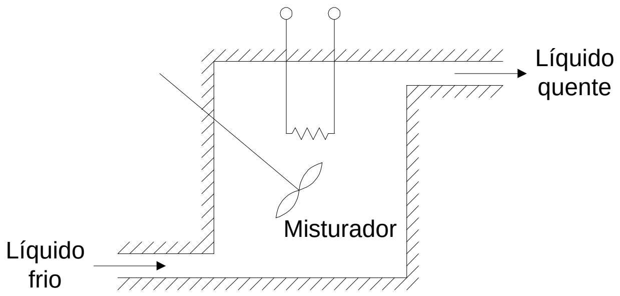
A partir das equações anteriores é possível construir o seguinte diagrama de blocos deste sistema:



Simplificando o diagrama de blocos anterior, obtém-se a função de transferência do sistema, apresentada abaixo:

$$F.T. = \frac{T_m(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{(1 + s.R_2.C_m).(1 + s.R_1.C_v) + s.R_1.C_m}$$

5. b)



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste sistema são as seguintes:

$$h_o = G.c.\theta$$

$$C = M.c$$

$$R = \frac{\theta}{h_o} = \frac{1}{G.c}$$

$$h_i - h_o = C.\frac{d\theta}{dt}$$

Sendo $R.h_o = \theta$, vem:

$$R.C.\frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = R.h_i(t)$$

Aplicando a Transformada de Laplace à equação anterior, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$s.R.C.\theta(s) + \theta(s) = R.H_i(s)$$

Simplificando a equação anterior, obtém-se a função de transferência do sistema:

$$F.T. = \frac{\theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{s.R.C + 1}$$