



Departamento de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto

TESIS

Teoria dos Sistemas

Revisões da Transformada de Laplace e suas Aplicações

—

Exercícios Propostos e Soluções

1. Calcule a transformada de Laplace $F(s) = L\{f(t)\}$ dos seguintes sinais $f(t)$, usando a definição:

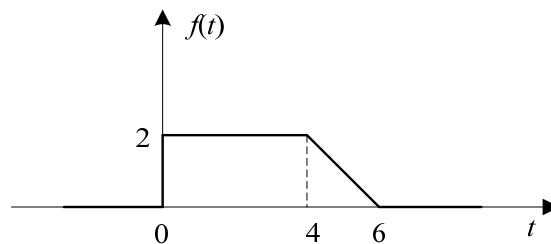
- a) $f(t) = u(t-2)$
- b) $f(t) = e^{-at}$
- c) $f(t) = \sin(t)$
- d) $f(t) = e^{-5t}u(t-1)$

Solução:

- a) $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s}, \quad \Re\{s\} > 0$
- b) $F(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \Re\{s\} > -a$
- c) $F(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \Re\{s\} > 0$
- d) $F(s) = \frac{e^{-(s+5)}}{s+5}, \quad \Re\{s\} > -5$

2. Usando os pares de transformadas da Tabela A e as propriedades listadas na Tabela B, calcule a transformada de Laplace $F(s) = L\{f(t)\}$ das seguintes funções $f(t)$:

- a) $f(t) = \cos(4t)$
- b) $f(t) = 3\sin(2t) - t\cos(4t)$
- c)



Sugestão: Decomponha $f(t)$ como a soma de três funções envolvendo o atraso de três degraus unitários: $u(t)$, $u(t-4)$ e $u(t-6)$.

- d) $f(t) = \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$
- e) $f(t) = t^2 \cos(2t)$
- f) $f(t) = e^{-3t} \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$
- g) $f(t) = e^{-3t} \int_0^t t \sin(2t) dt$

Solução:

- a) $F(s) = \frac{s}{s^2 + 16}$
- b) $F(s) = \frac{6}{s^2 + 4} - \frac{s^2 - 16}{(s^2 + 16)^2}$
- c) $F(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} e^{-4s} + \frac{1}{s^2} e^{-6s}$
- d) $F(s) = \frac{1/2s - 2\sqrt{3}}{s^2 + 16}$
- e) $F(s) = \frac{2s(s^2 - 12)}{(s^2 + 4)^3}$
- f) $F(s) = \frac{1/2s + (3/2 - 2\sqrt{3})}{s^2 + 6s + 25}$
- g) $F(s) = \frac{4}{((s+3)^2 + 4)^2}$

3. Calcule a transformada inversa de Laplace $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ das seguintes transformadas $F(s)$:

- a) $F(s) = \frac{s+1}{s^2}$
- b) $F(s) = \frac{s^2 - 3}{s+2}$
- c) $F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2}$
- d) $F(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$
- e) $F(s) = \frac{2s^2 + 10s + 11}{s^2 + 5s + 6}$
- f) $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)}$
- g) $F(s) = \frac{1}{s^2} (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$ e esboce o gráfico da função $f(t)$
- h) $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$
- i) $F(s) = \frac{s^3 + 2s + 4}{(s^4 - 16)}$

Solução:

- a) $f(t) = 1 + t, \quad t \geq 0$
 b) $f(t) = -2\delta(t) + \frac{d}{dt}\delta(t) + e^{-2t}, \quad t > 0^-$
 c) $f(t) = (t - \tau)u(t - \tau)$
 d) $f(t) = 1 - \frac{10}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{-10t}, \quad t \geq 0$
 e) $f(t) = 2\delta(t) - e^{-2t} + e^{-3t}, \quad t > 0^-$
 f) $f(t) = 1 - 1,154e^{-0,5t} \cos(0,865t - 0,523), \quad t \geq 0$
 g) $f(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2), \quad t \geq 0$
 h) $f(t) = 2e^{-t} - (2+t)e^{-2t}, \quad t \geq 0$
 i) $f(t) = 0,25e^{-2t} + 0,5e^{2t} + 0,25 \cos(2t) - 0,25 \sin(2t), \quad t \geq 0$

4. Resolva as seguintes equações diferenciais para as entradas e condições iniciais especificadas:

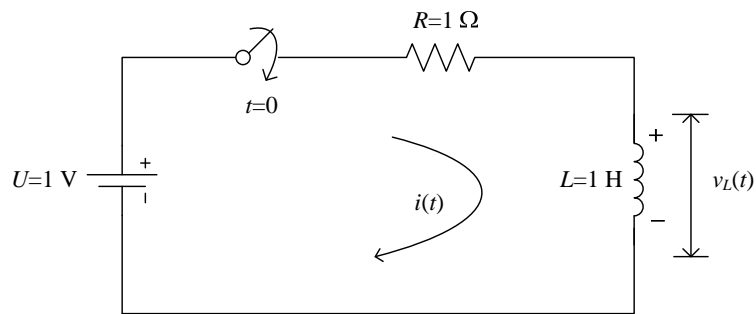
- a) $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = x(t), \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad x(t) = 2e^{-2t}$
 b) $y''(t) + y(t) = x(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad x(t) = t$
 c) $y''(t) + 2y'(t) = e^t, \quad y(0) = y'(0) = 0$
 d) $y''(t) + y'(t) = \sin(t), \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta$
 e) $y'(t) + 3y(t) + 2 \int_0^t y(t) dt = 1, \quad y(0) = 1$

Solução:

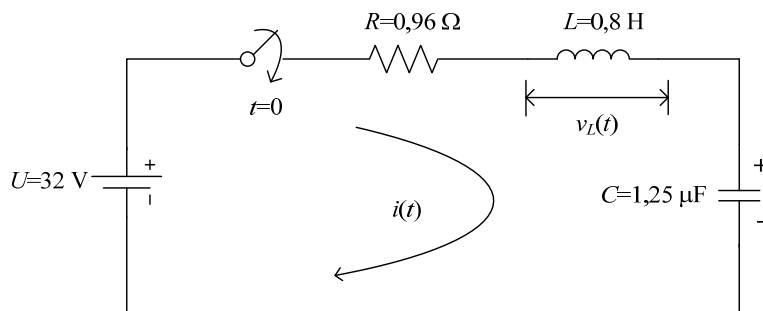
- a) $y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-4t}, \quad t \geq 0$
 b) $y(t) = t + \cos(t) - 2 \sin(t), \quad t \geq 0$
 c) $y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t, \quad t \geq 0$
 d) $y(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t) + \alpha + \beta(1 - e^{-t}), \quad t \geq 0$
 e) $y(t) = e^{-2t}, \quad t \geq 0$

5. Analise os circuitos apresentados a seguir. Considere que os sistemas se encontram em repouso no instante em que o interruptor é fechado, para $t = 0$. Determine a corrente $i(t)$ e a tensão aos terminais da indutância, $v_L(t)$, para $t \geq 0$.

a)



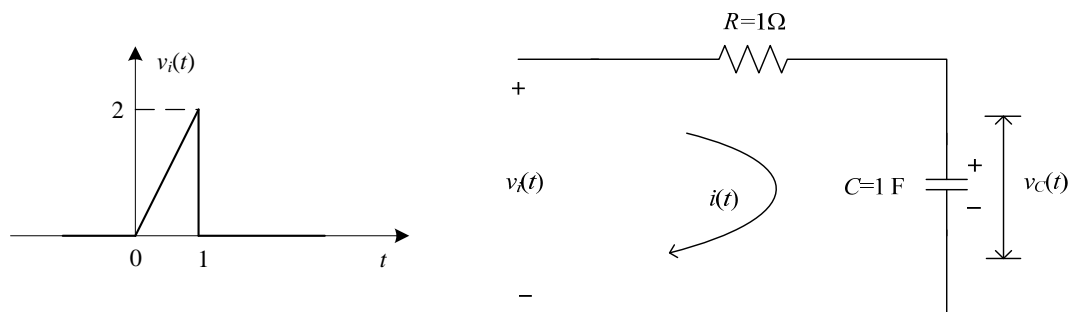
b)

**Solução:**

$$a) \quad i(t) = 1 - e^{-t}, \quad v_L(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0$$

$$b) \quad i(t) = 0,04e^{-0,6t} \sin(1000t), \quad v_L(t) = -32e^{-0,6t} \cos(1000t - 1,57), \quad t \geq 0$$

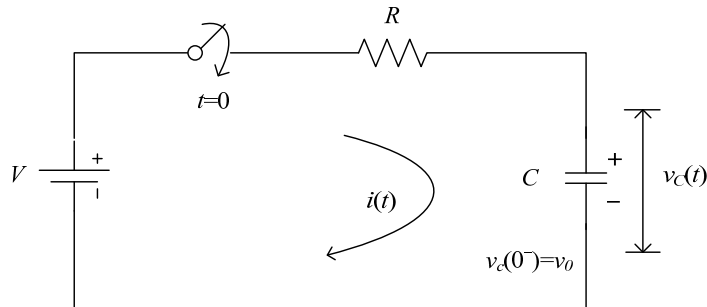
6. Considere o circuito RC representado na figura seguinte. Assuma que o condensador C se encontra inicialmente descarregado. Determine a corrente $i(t)$ e a tensão aos terminais do condensador, $v_C(t)$, quando à entrada é aplicado o sinal $v_i(t)$.

**Solução:**

$$i(t) = (2 - 2e^{-t})\mu(t) + (-2 + 2e^{-(t-1)} - 2e^{-(t-1)})\mu(t-1)$$

$$v_C(t) = (-2 + 2t + 2e^{-t})\mu(t) - 2(t-1)\mu(t-1)$$

7. Considere o circuito RC representado na figura seguinte. O interruptor é fechado no instante $t=0$. Assuma que o condensador C se encontra inicialmente carregado com uma tensão $v(0^-)=v_0$.

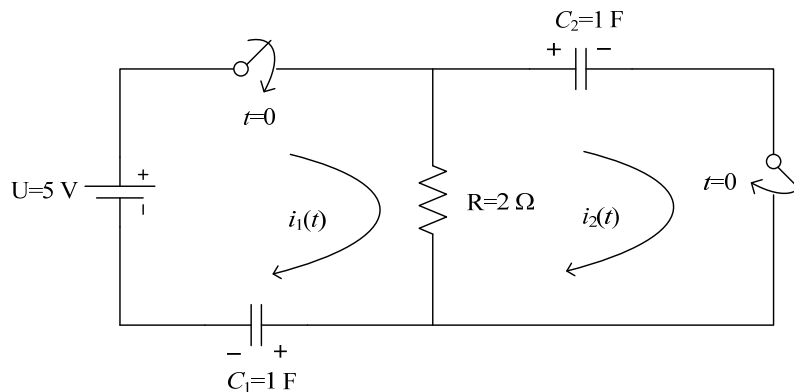


- Determine a corrente $i(t)$.
- Determine a tensão aos terminais do condensador, $v_C(t)$.

Solução:

- $i(t) = \frac{V - v_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$
- $v_C(t) = V \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) + v_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$

8. Considere o circuito representado na figura seguinte. Os dois interruptores são fechados ao mesmo tempo no instante $t=0$. As tensões nos condensadores C_1 e C_2 , antes de os interruptores serem fechados, são de 1 V e de 2 V, respectivamente.



- Determine as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$.
- Determine as tensões aos terminais dos condensadores para $t=0^+$, $v_{C_1}(0^+)$ e $v_{C_2}(0^+)$.

Solução:

$$\text{a) } i_1(t) = \delta(t) + \frac{3}{4}e^{-\frac{t}{4}}, \quad i_2(t) = \delta(t) - \frac{3}{4}e^{-\frac{t}{4}}, \quad t > 0^-$$

$$\text{b) } v_{c_1}(0^+) = 2 \text{ V}, \quad v_{c_2}(0^+) = 3 \text{ V}$$

Tabela A: Pares de Transformada de Laplace*

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso unitário $\delta(t)$	1
2	Degrau unitário $u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	Rampa unitária t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$

* K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Fourth Edition, Prentice-Hall, 2002.

(cont.)

19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) \quad (0 < \xi < 1)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$ $\left(0 < \xi < 1, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$ $\left(0 < \xi < 1, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$
25	$1 - \cos(\omega t)$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
26	$\omega t - \sin(\omega t)$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
27	$\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
29	$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \quad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
31	$\frac{1}{2\omega} [\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t)]$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

Tabela B: **Propriedades da Transformada de Laplace**[†]

1	$L[Af(t)] = AF(s)$
2	$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$L_{\pm} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0^{\pm})$
4	$L_{\pm} \left[\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0^{\pm}) - \dot{f}(0^{\pm})$
5	$L_{\pm} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0^{\pm})$ <p>onde $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)$</p>
6	$L_{\pm} \left[\int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \left[\int f(t) dt \right]_{t=0^{\pm}}$
7	$L_{\pm} \left[\int \dots \int f(t) (dt)^n \right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[\int \dots \int f(t) (dt)^k \right]_{t=0^{\pm}}$
8	$L \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s}$
9	$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$ se $\int_0^{\infty} f(t) dt$ existe
10	$L[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + \alpha)$
11	$L[f(t - \alpha)u(t - \alpha)] = e^{-\alpha s} F(s), \quad \alpha > 0$
12	$L[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
13	$L[t^2 f(t)] = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$
14	$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
15	$L \left[\frac{1}{t} f(t) \right] = \int_s^{\infty} F(s) ds$ se $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(t)$ existe
16	$L \left[f \left(\frac{1}{a} \right) \right] = aF(as)$
17	$L \left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \right] = F_1(s) F_2(s)$
18	$L[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)dp$

[†] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Fourth Edition, Prentice-Hall, 2002.