

TESIS: **Teoria dos Sistemas**



Álgebra dos Diagramas de Blocos

Álgebra dos Diagramas de Blocos



1. Terminologia básica
2. Blocos em cascata (em série)
3. Forma canónica de um sistema de controlo
4. Transformação de diagramas de blocos
5. Sobreposição de vários sinais de entrada (teorema da sobreposição)
6. Simplificação de diagramas de blocos
7. Regra de Mason
8. Diagramas de blocos e modelos matemáticos

Álgebra dos Diagramas de Blocos



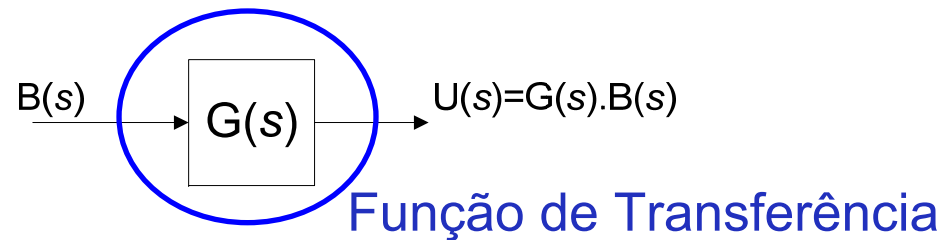
1. Terminologia básica
2. Blocos em cascata (em série)
3. Forma canónica de um sistema de controlo
4. Transformação de diagramas de blocos
5. Sobreposição de vários sinais de entrada (teorema da sobreposição)
6. Simplificação de diagramas de blocos
7. Regra de Mason
8. Diagramas de blocos e modelos matemáticos

Álgebra dos Diagramas de Blocos

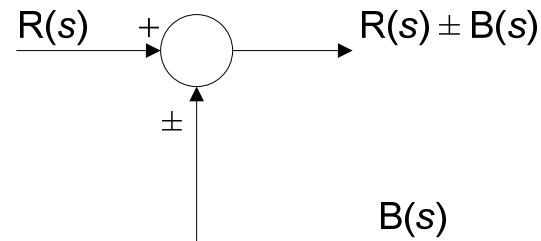


- Terminologia (I)

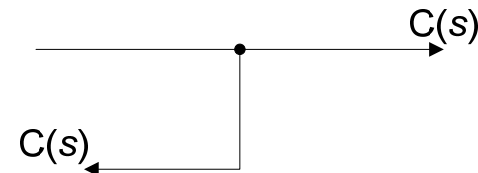
- bloco



- ponto de soma



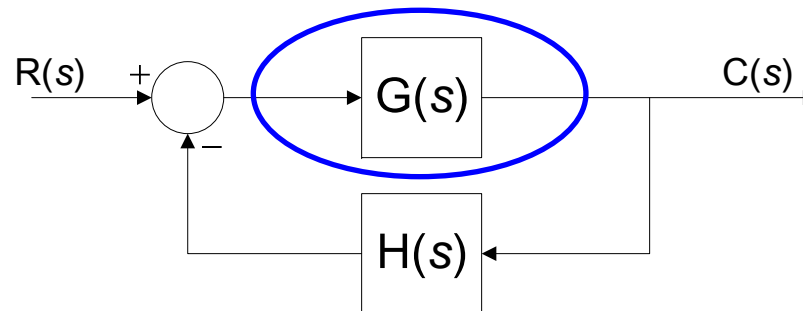
- ponto de saída



Álgebra dos Diagramas de Blocos

- Terminologia (II)

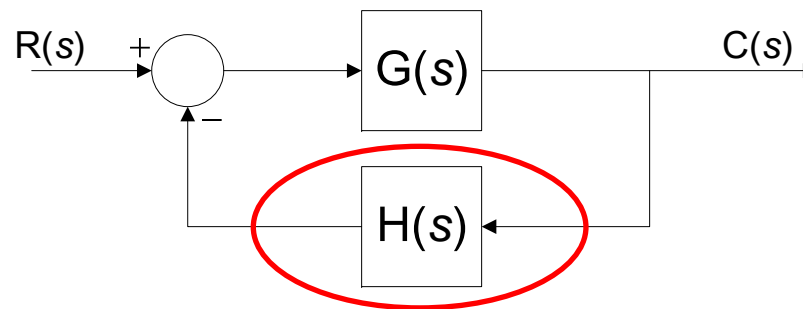
ramo directo / malha directa



Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Terminologia (III)



malha de realimentação (feedback)

Álgebra dos Diagramas de Blocos

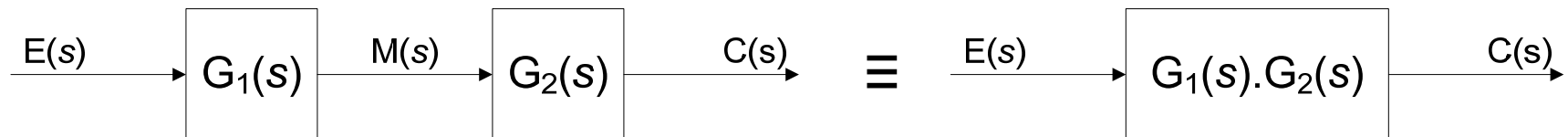


1. Terminologia básica
2. Blocos em cascata (em série)
3. Forma canónica de um sistema de controlo
4. Transformação de diagramas de blocos
5. Sobreposição de vários sinais de entrada (teorema da sobreposição)
6. Simplificação de diagramas de blocos
7. Regra de Mason
8. Diagramas de blocos e modelos matemáticos

Álgebra dos Diagramas de Blocos



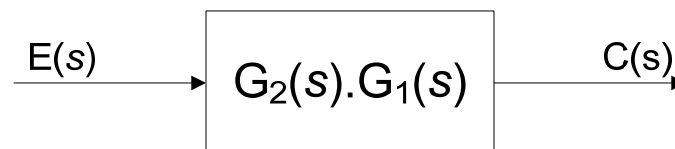
- Blocos em cascata (em série)



$$M(s) = G_1(s).E(s)$$

$$C(s) = G_2(s).M(s) \Rightarrow C(s) = G_1(s).G_2(s).E(s) = G_2(s).G_1(s).E(s)$$

- multiplicação de funções de transferência é comutativa



Álgebra dos Diagramas de Blocos

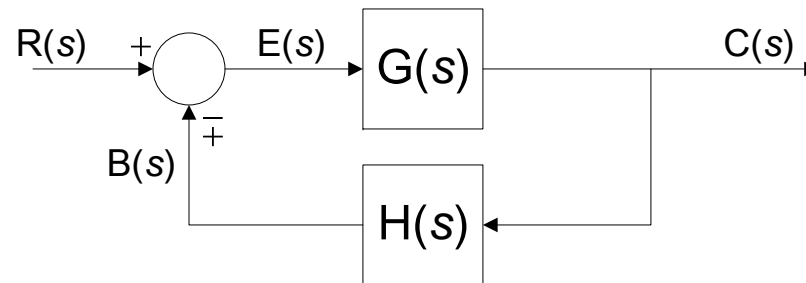


1. Terminologia básica
2. Blocos em cascata (em série)
3. Forma canónica de um sistema de controlo
4. Transformação de diagramas de blocos
5. Sobreposição de vários sinais de entrada (teorema da sobreposição)
6. Simplificação de diagramas de blocos
7. Regra de Mason
8. Diagramas de blocos e modelos matemáticos

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Forma canónica de um sistema de controlo (I)



$R(s)$ – sinal de referência

$C(s)$ – sinal de saída

$E(s)$ – sinal de erro

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Forma canónica de um sistema de controlo (II)

$$C(s) = G(s).E(s) \Leftrightarrow E(s) = \frac{C(s)}{G(s)}$$

$$E(s) = R(s) - H(s).C(s)$$

$$\frac{C(s)}{G(s)} = R(s) - H(s).C(s) \Leftrightarrow R(s) = \frac{C(s)}{G(s)} + H(s).C(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R(s) = \left[\frac{1}{G(s)} + H(s) \right].C(s) \Leftrightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s).H(s)}$$

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Forma canónica de um sistema de controlo (II)

$$C(s) = G(s).E(s) \Leftrightarrow E(s) = \frac{C(s)}{G(s)}$$

$$E(s) = R(s) - H(s).C(s)$$

$$\frac{C(s)}{G(s)} = R(s) - H(s).C(s) \Leftrightarrow R(s) = \frac{C(s)}{G(s)} + H(s).C(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R(s) = \left[\frac{1}{G(s)} + H(s) \right].C(s) \Leftrightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s).H(s)}$$

$$1 \pm G(s)H(s) = 0 \quad \equiv \quad \text{Equação característica}$$

Álgebra dos Diagramas de Blocos



1. Terminologia básica
2. Blocos em cascata (em série)
3. Forma canónica de um sistema de controlo
4. **Transformação de diagramas de blocos**
5. Sobreposição de vários sinais de entrada (teorema da sobreposição)
6. Simplificação de diagramas de blocos
7. Regra de Mason
8. Diagramas de blocos e modelos matemáticos

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Transformação de diagramas de blocos (I)



$$Y = (P_1.P_2).X$$

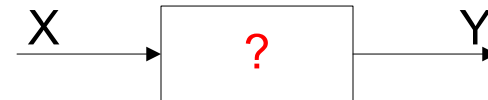
Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Transformação de diagramas de blocos (I)



$$Y = (P_1.P_2).X$$



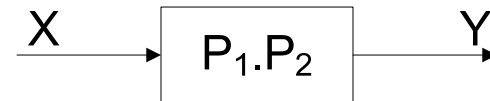
Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Transformação de diagramas de blocos (I)



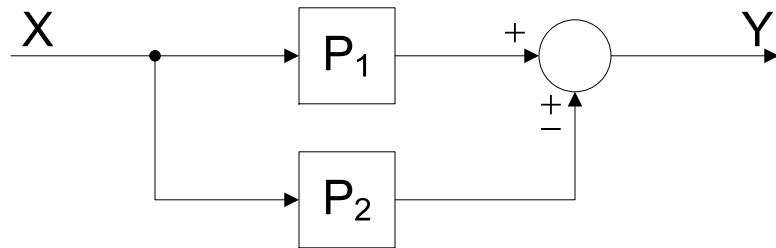
$$Y = (P_1.P_2).X$$



Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Transformação de diagramas de blocos (II)

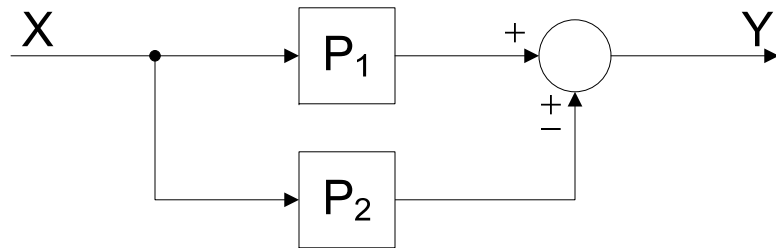


$$Y = (P_1 \pm P_2).X$$

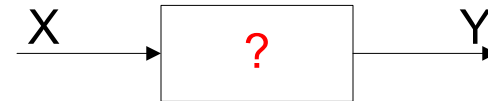
Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Transformação de diagramas de blocos (II)



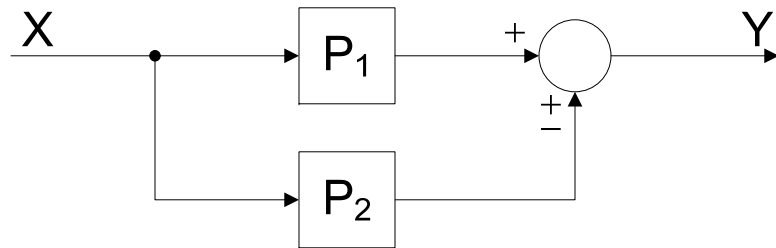
$$Y = (P_1 \pm P_2).X$$



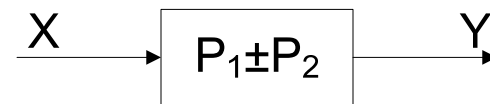
Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Transformação de diagramas de blocos (II)



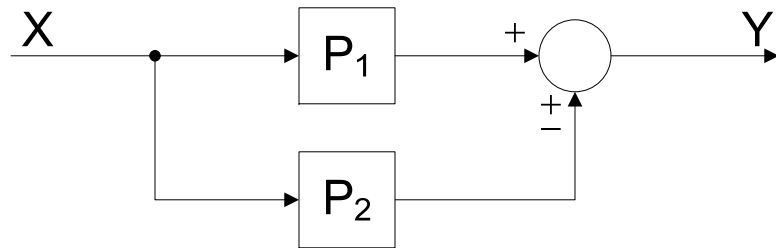
$$Y = (P_1 \pm P_2).X$$



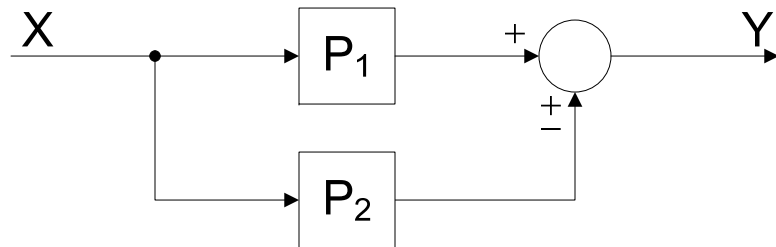
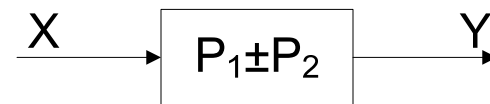
Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Transformação de diagramas de blocos (II)



$$Y = (P_1 \pm P_2).X$$

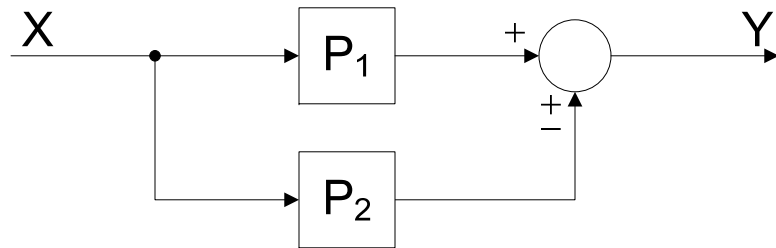


$$Y = (P_1 \pm P_2).X$$

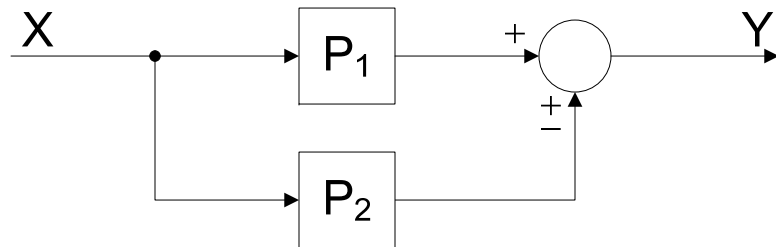
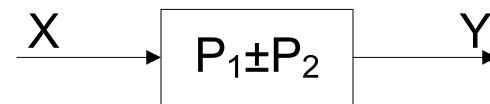
Álgebra dos Diagramas de Blocos



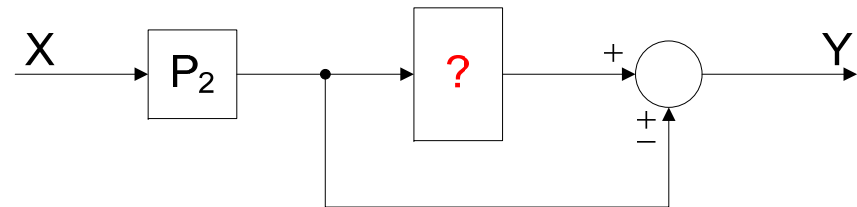
- Transformação de diagramas de blocos (II)



$$Y = (P_1 \pm P_2).X$$



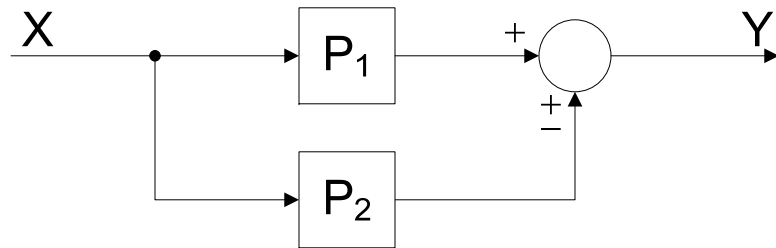
$$Y = (P_1 \pm P_2).X$$



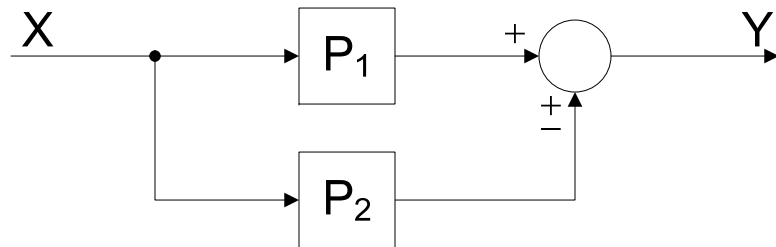
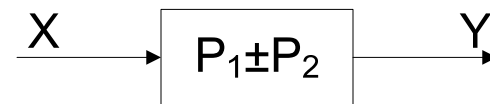
Álgebra dos Diagramas de Blocos



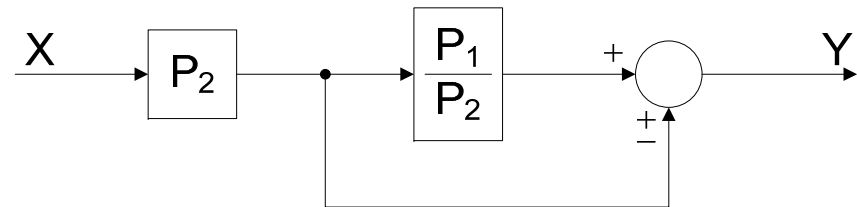
- Transformação de diagramas de blocos (II)



$$Y = (P_1 \pm P_2).X$$



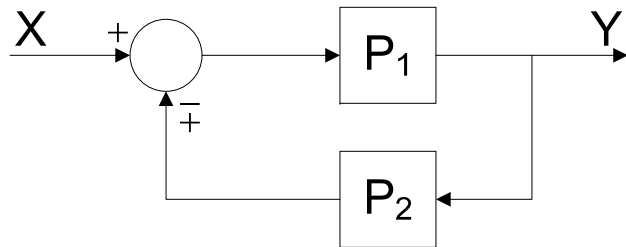
$$Y = (P_1 \pm P_2).X$$



Álgebra dos Diagramas de Blocos



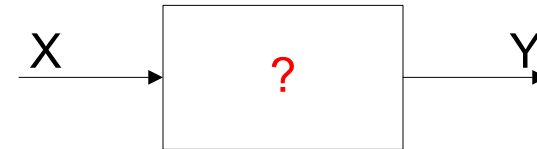
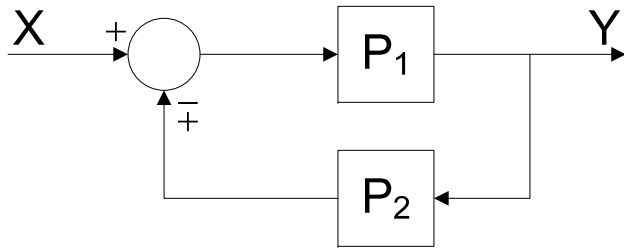
- Transformação de diagramas de blocos (III)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



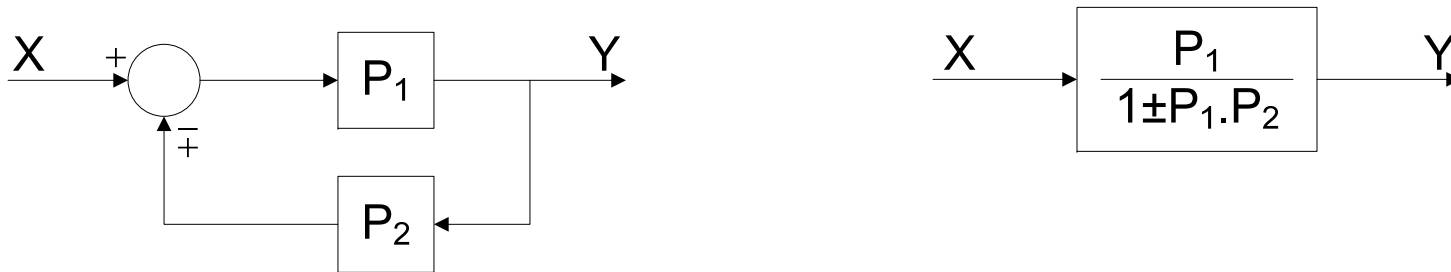
- Transformação de diagramas de blocos (III)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



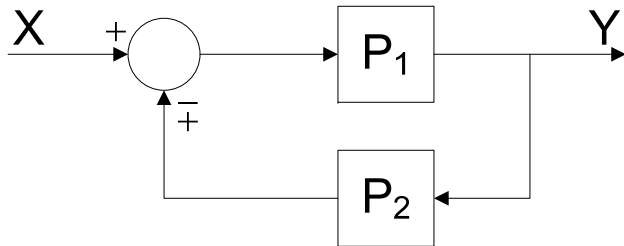
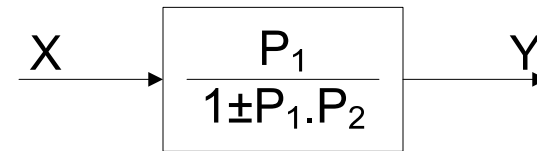
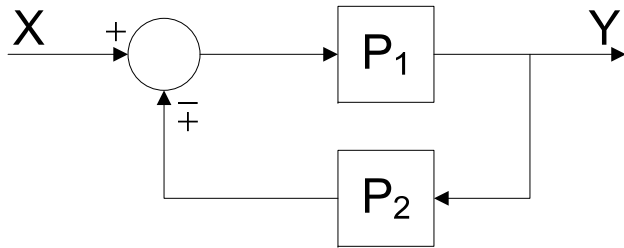
- Transformação de diagramas de blocos (III)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



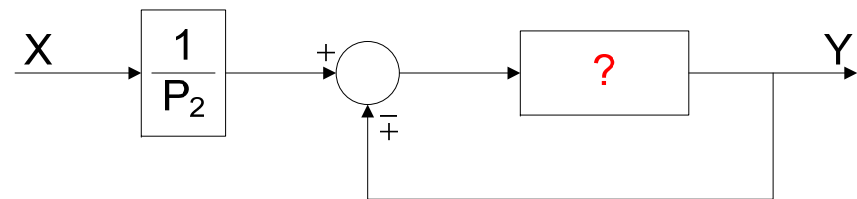
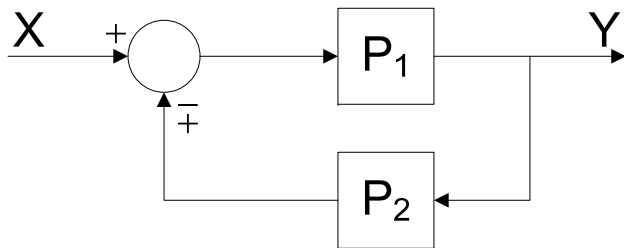
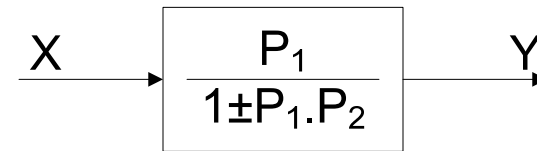
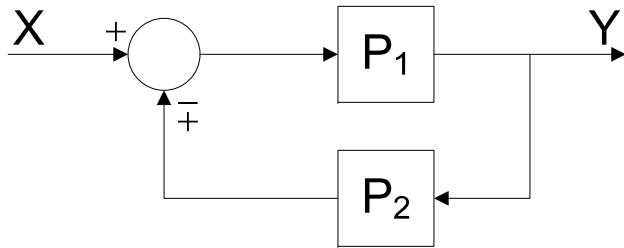
- Transformação de diagramas de blocos (III)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



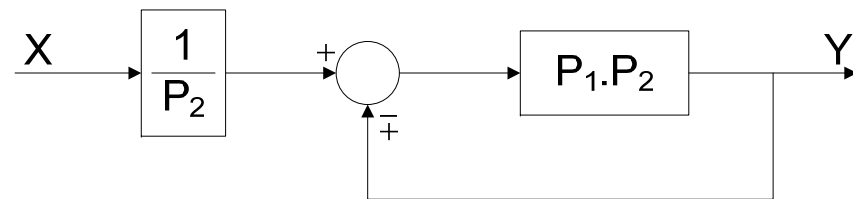
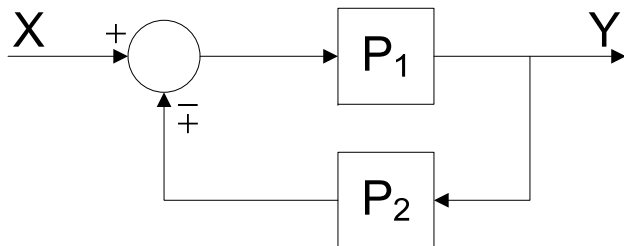
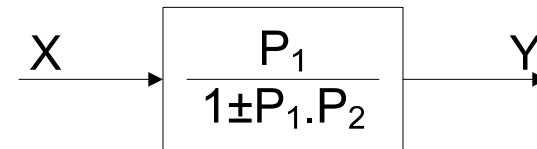
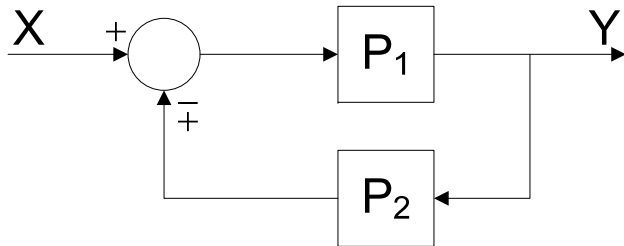
- Transformação de diagramas de blocos (III)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



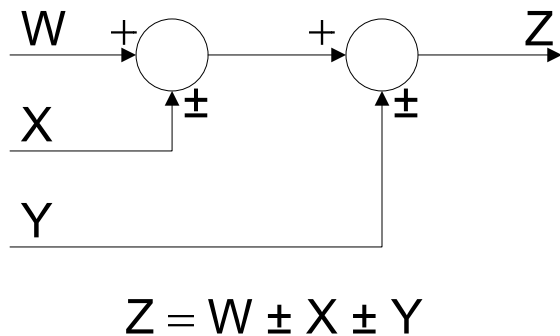
- Transformação de diagramas de blocos (III)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



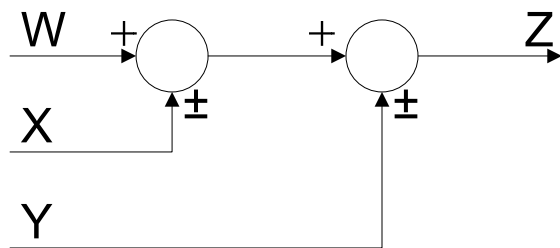
- Transformação de diagramas de blocos (IV)



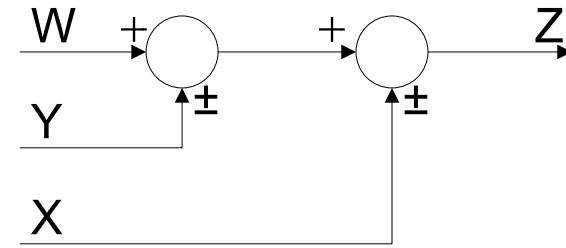
Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Transformação de diagramas de blocos (IV)



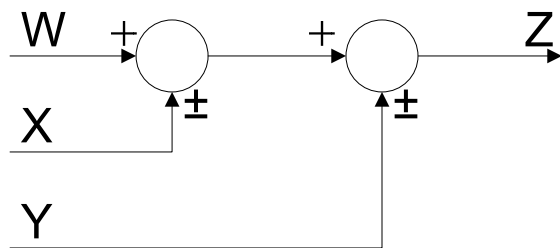
$$Z = W \pm X \pm Y$$



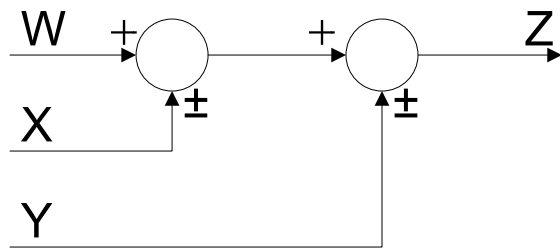
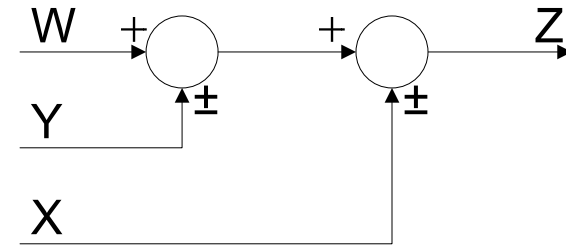
Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Transformação de diagramas de blocos (IV)



$$Z = W \pm X \pm Y$$

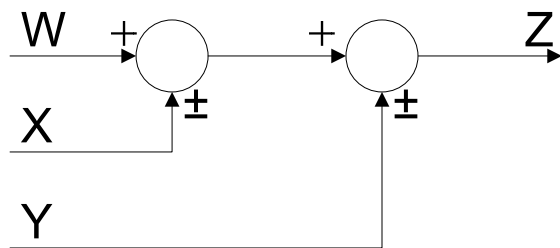


$$Z = W \pm X \pm Y$$

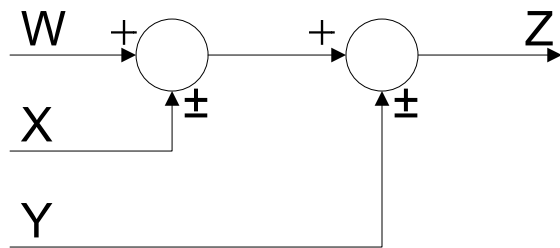
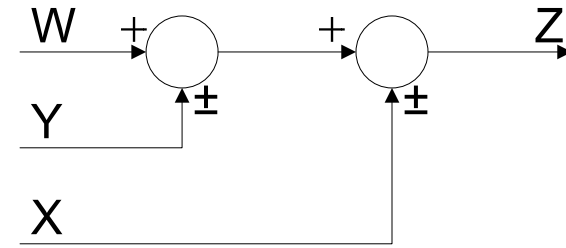
Álgebra dos Diagramas de Blocos



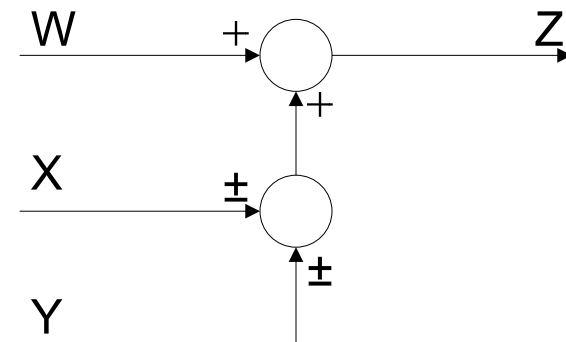
- Transformação de diagramas de blocos (IV)



$$Z = W \pm X \pm Y$$



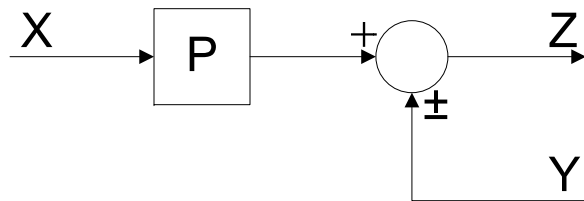
$$Z = W \pm X \pm Y$$



Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Transformação de diagramas de blocos (V)

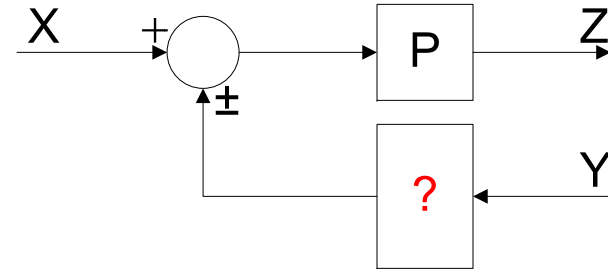
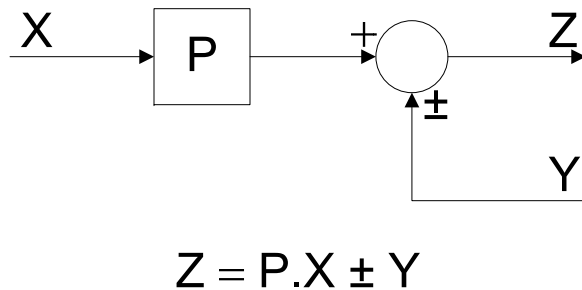


$$Z = P.X \pm Y$$

Álgebra dos Diagramas de Blocos



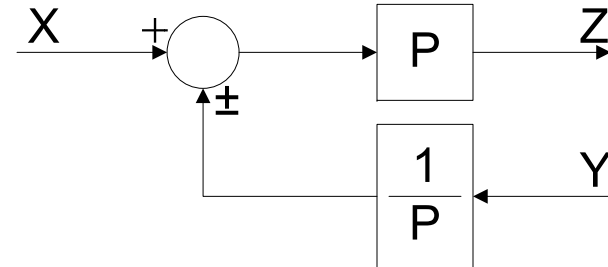
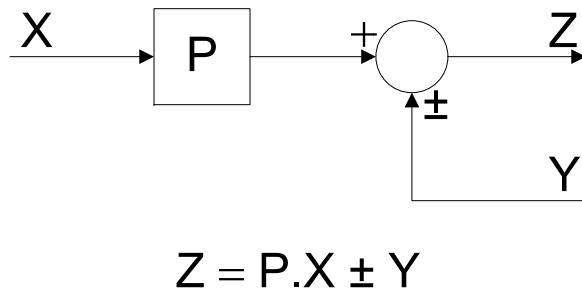
- Transformação de diagramas de blocos (V)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



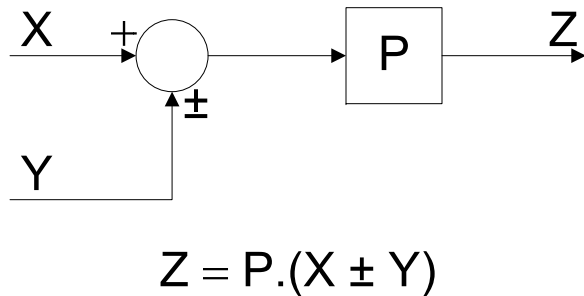
- Transformação de diagramas de blocos (V)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



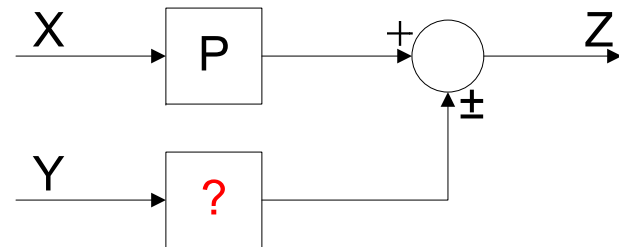
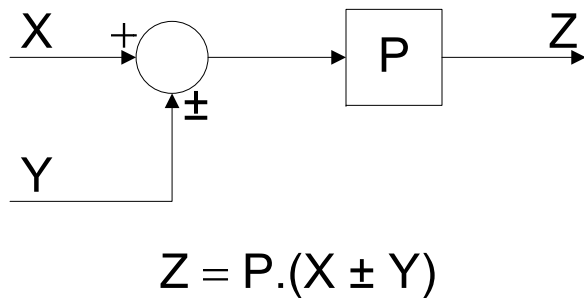
- Transformação de diagramas de blocos (VI)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



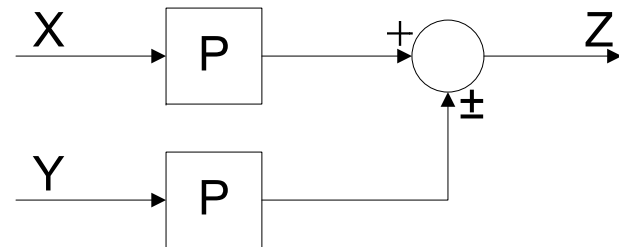
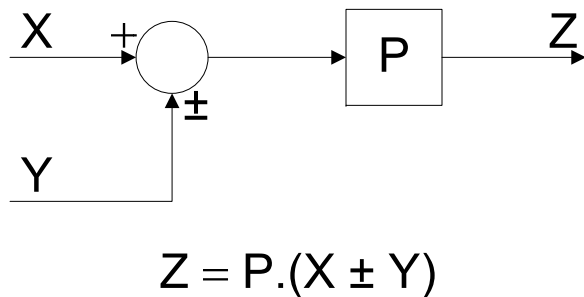
- Transformação de diagramas de blocos (VI)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



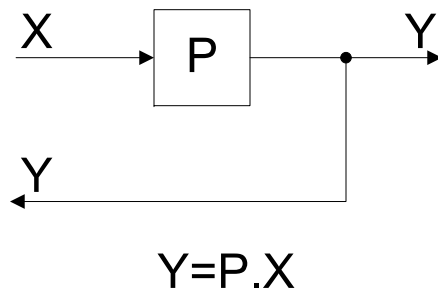
- Transformação de diagramas de blocos (VI)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



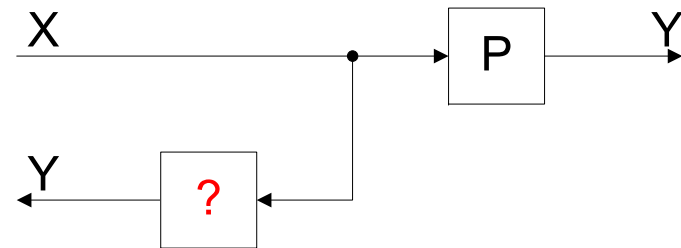
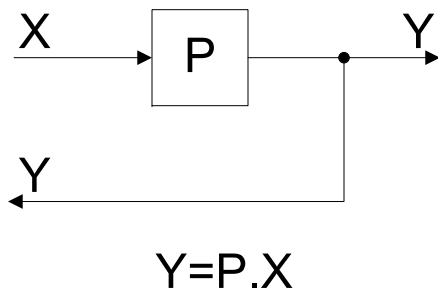
- Transformação de diagramas de blocos (VII)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



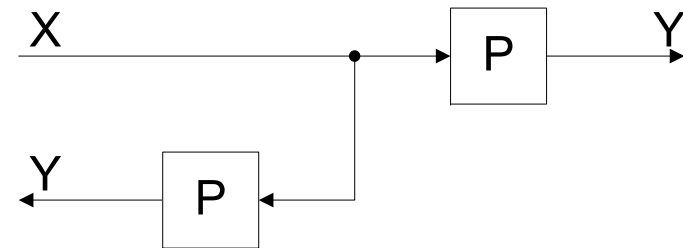
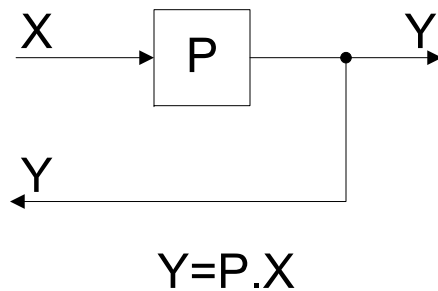
- Transformação de diagramas de blocos (VII)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



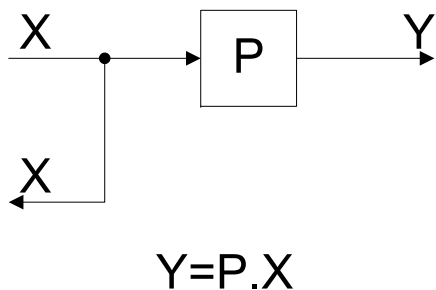
- Transformação de diagramas de blocos (VII)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



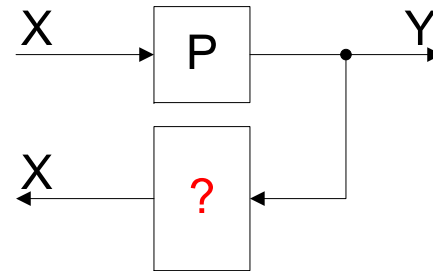
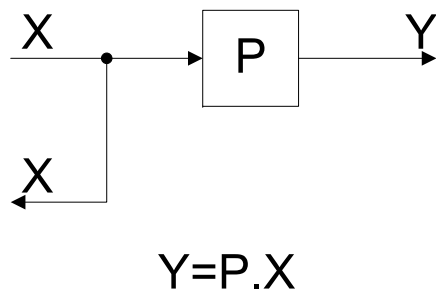
- Transformação de diagramas de blocos (VIII)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



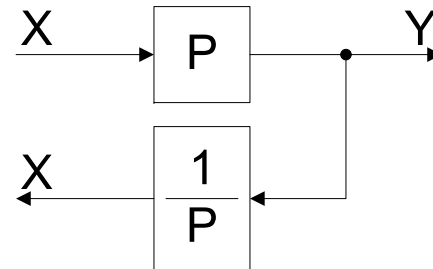
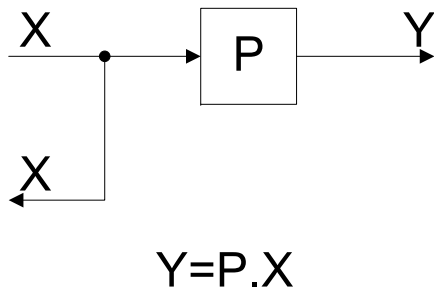
- Transformação de diagramas de blocos (VIII)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



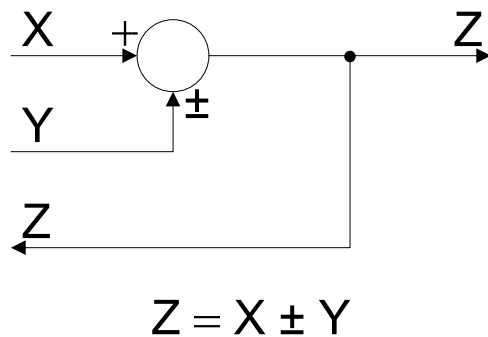
- Transformação de diagramas de blocos (VIII)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



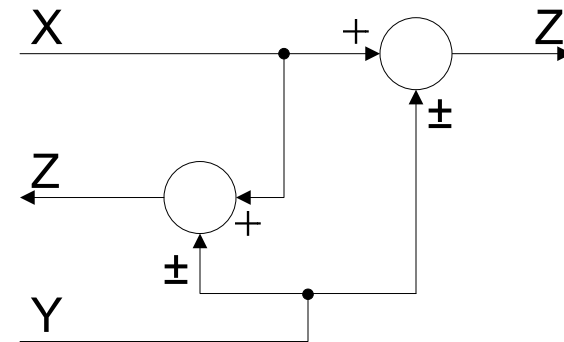
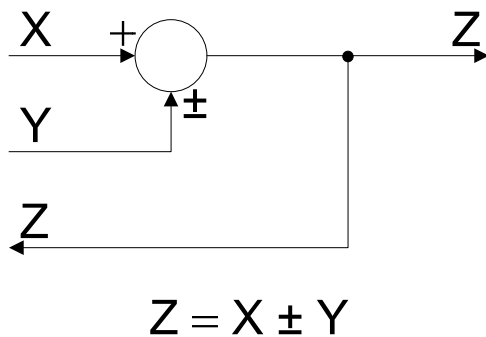
- Transformação de diagramas de blocos (IX)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



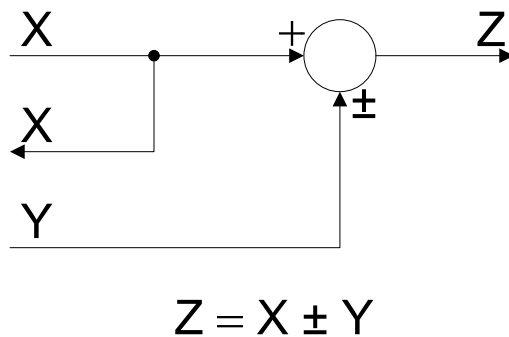
- Transformação de diagramas de blocos (IX)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



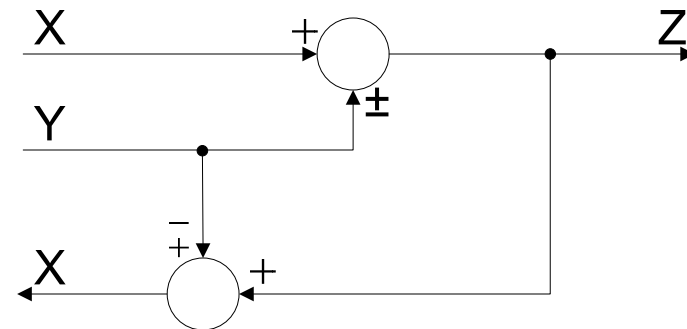
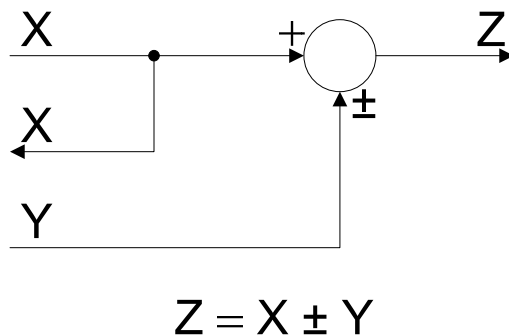
- Transformação de diagramas de blocos (X)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



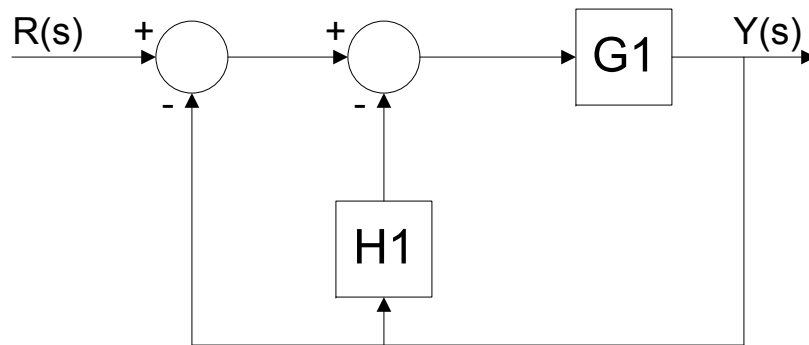
- Transformação de diagramas de blocos (X)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



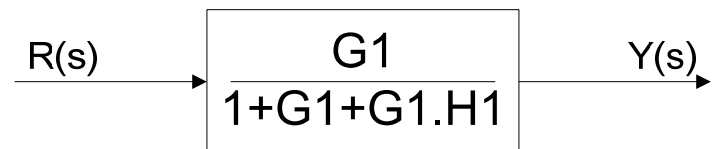
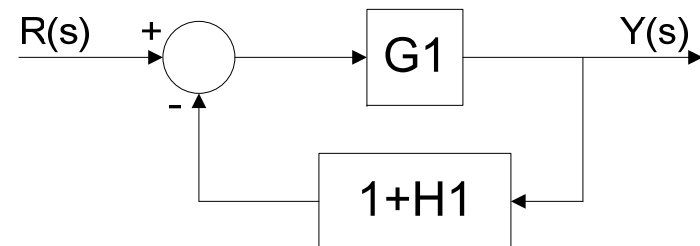
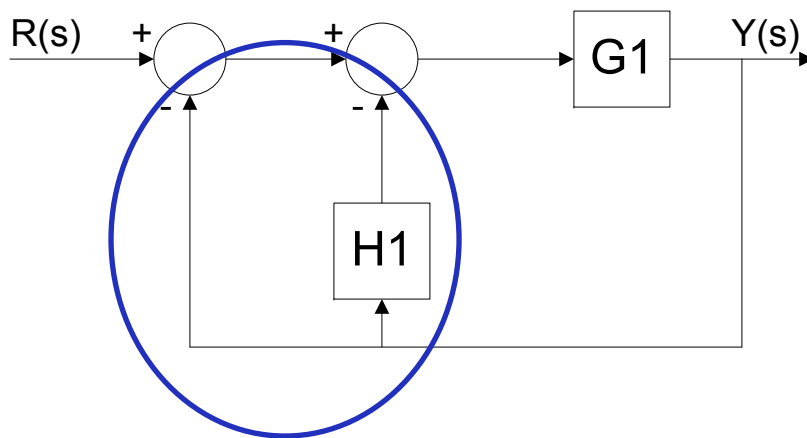
- Exemplo 1 (I)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Exemplo 1 (II)



Álgebra dos Diagramas de Blocos

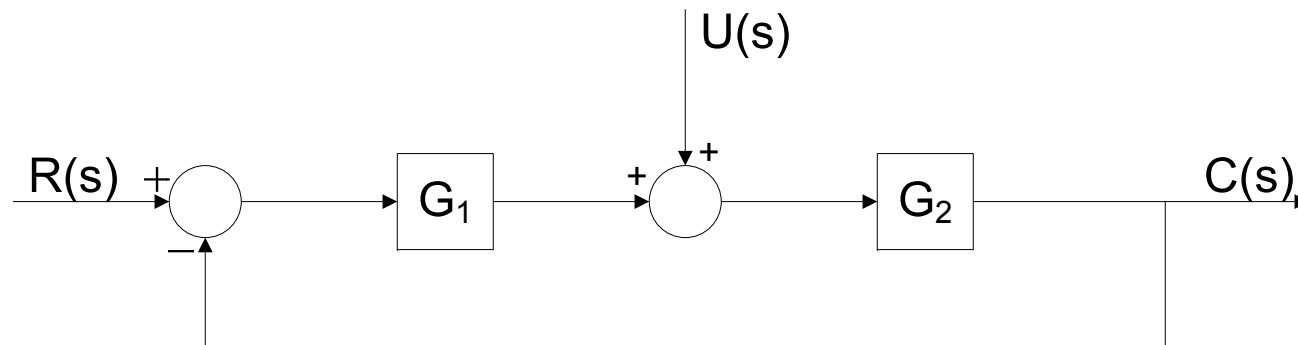


1. Terminologia básica
2. Blocos em cascata (em série)
3. Forma canónica de um sistema de controlo
4. Transformação de diagramas de blocos
5. Sobreposição de vários sinais de entrada (teorema da sobreposição)
6. Simplificação de diagramas de blocos
7. Regra de Mason
8. Diagramas de blocos e modelos matemáticos

Álgebra dos Diagramas de Blocos



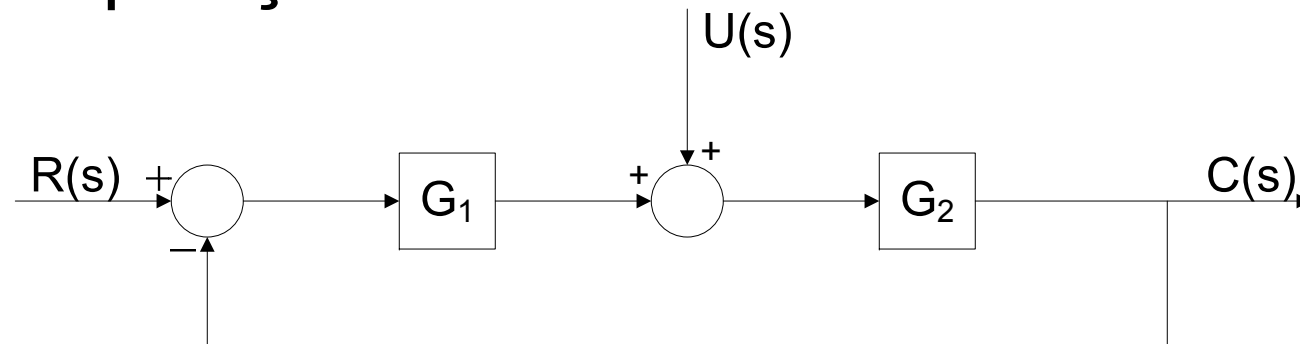
- Sobreposição de vários sinais de entrada (I)



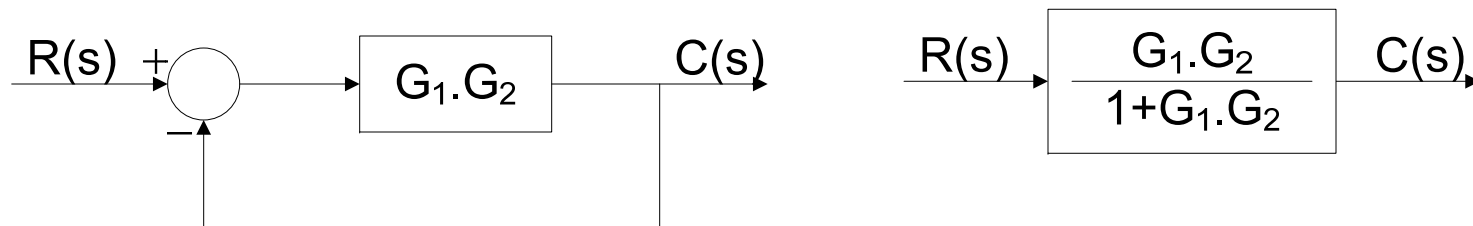
Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Sobreposição de vários sinais de entrada (II)



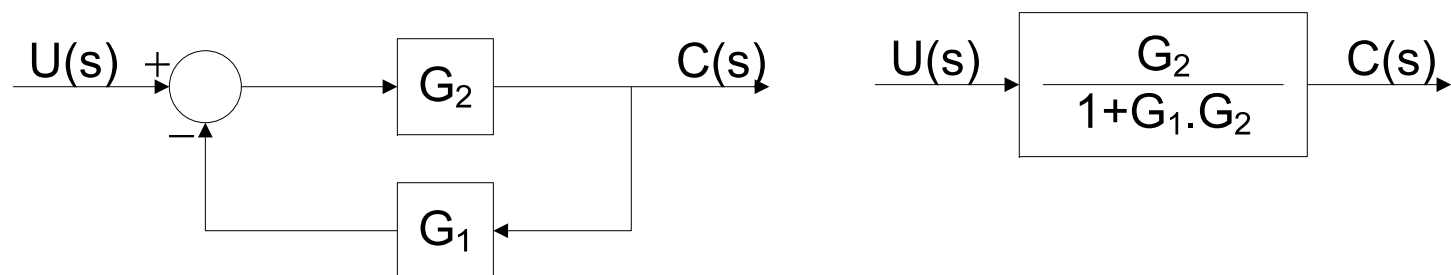
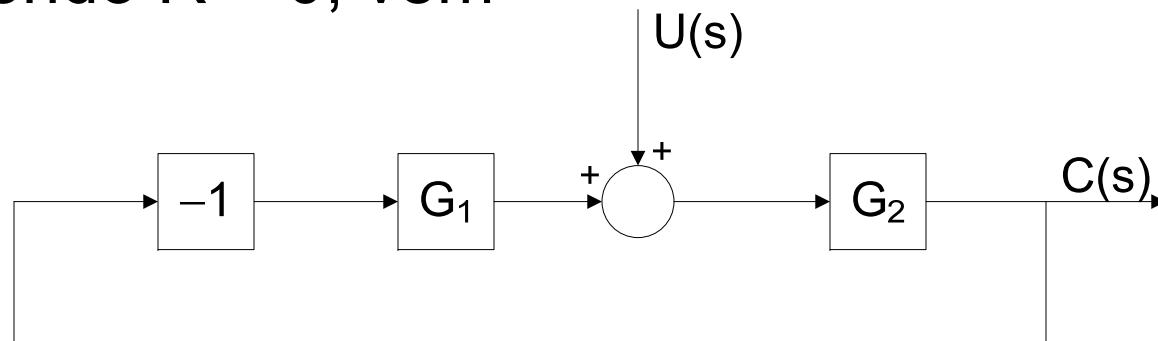
- fazendo $U = 0$, vem



Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Sobreposição de vários sinais de entrada (III)
 - fazendo $R = 0$, vem



Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Sobreposição de vários sinais de entrada (IV)

$$C(s) = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_1 \cdot G_2} \cdot R(s)$$

$$C(s) = \frac{G_2}{1 + G_1 \cdot G_2} \cdot U(s)$$

- logo

$$C(s) = \frac{G_2}{1 + G_1 \cdot G_2} \cdot (G_1 \cdot R(s) + U(s))$$

(Teorema da sobreposição)

Álgebra dos Diagramas de Blocos



1. Terminologia básica
2. Blocos em cascata (em série)
3. Forma canónica de um sistema de controlo
4. Transformação de diagramas de blocos
5. Sobreposição de vários sinais de entrada (teorema da sobreposição)
6. **Simplificação de diagramas de blocos**
7. Regra de Mason
8. Diagramas de blocos e modelos matemáticos

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- “Regras” para a simplificação de diagramas de blocos
 1. combinar todos os blocos em série (T1)
 2. combinar todos os blocos em paralelo (T2)
 3. eliminar as realimentações interiores (T3)
 4. deslocar os pontos de soma para a esquerda e os pontos de saída para a direita do anel exterior (T5)
 5. repetir os passos anteriores até encontrar a forma canónica (para cada entrada) (T8)

Álgebra dos Diagramas de Blocos

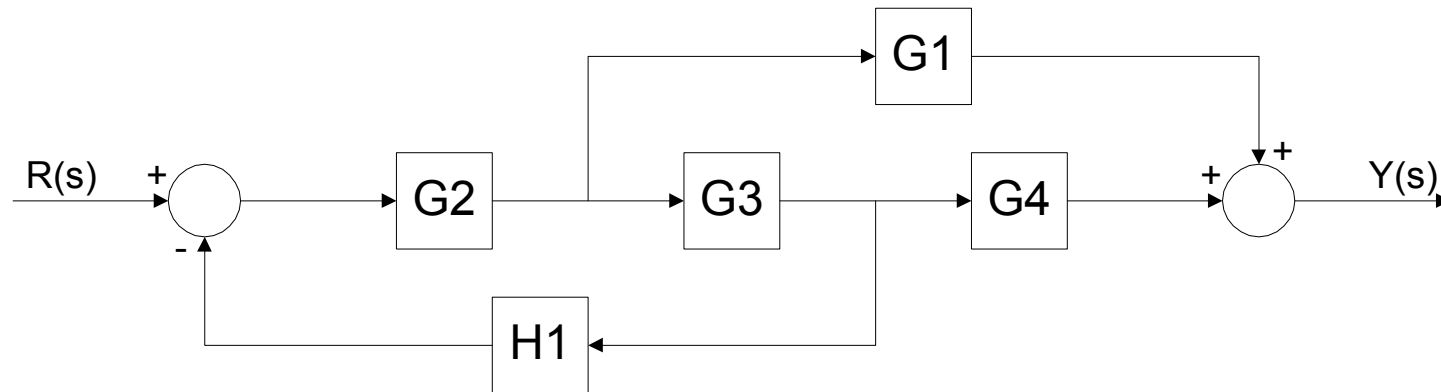


- Na simplificação dum diagrama de blocos há que ter em atenção os seguintes pontos
 1. produto das funções de transferência no sentido directo deve permanecer o mesmo
 2. produto das funções de transferência num anel deve permanecer o mesmo

Álgebra dos Diagramas de Blocos

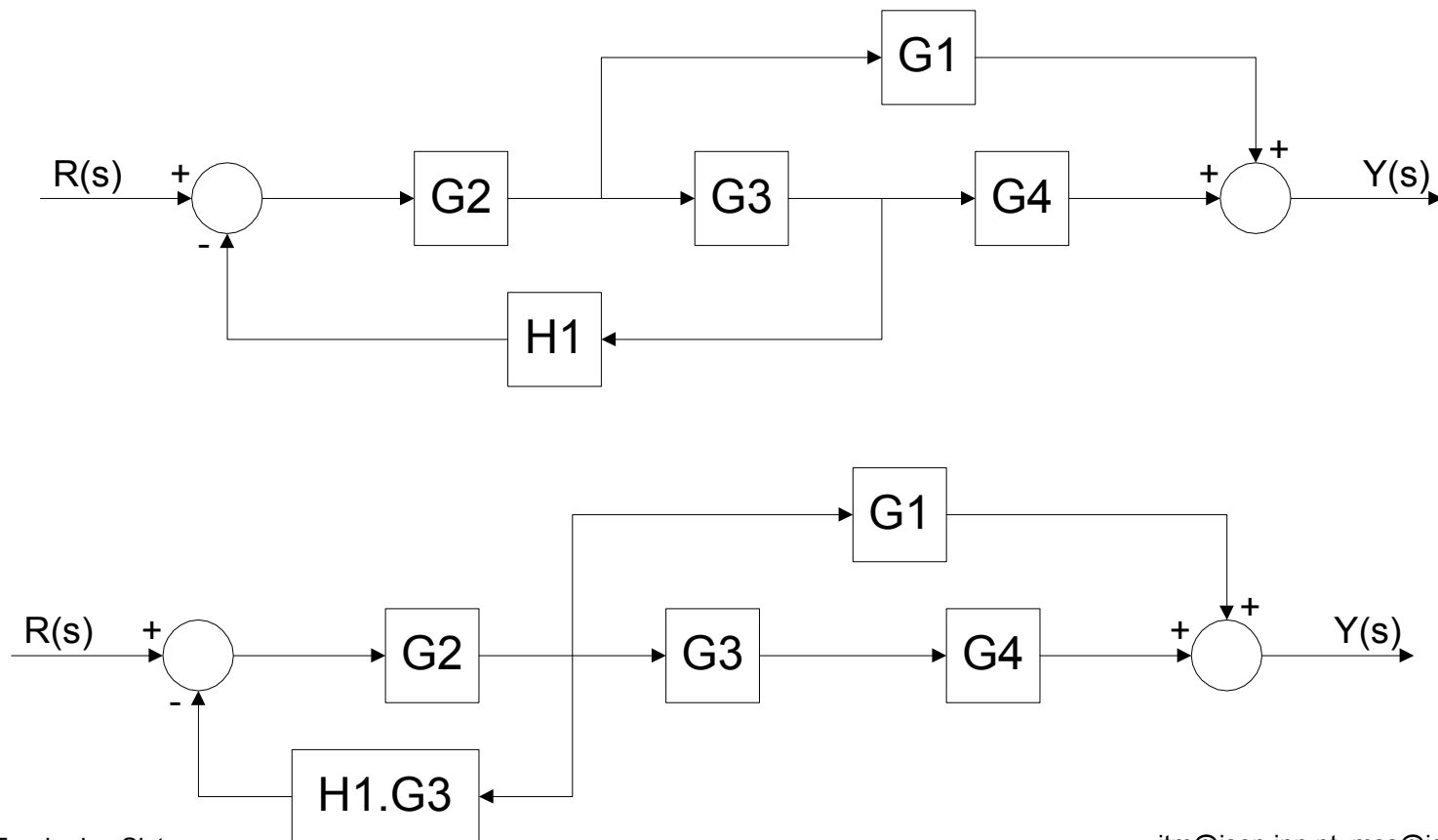


- Simplificação de diagramas de blocos (I)



Álgebra dos Diagramas de Blocos

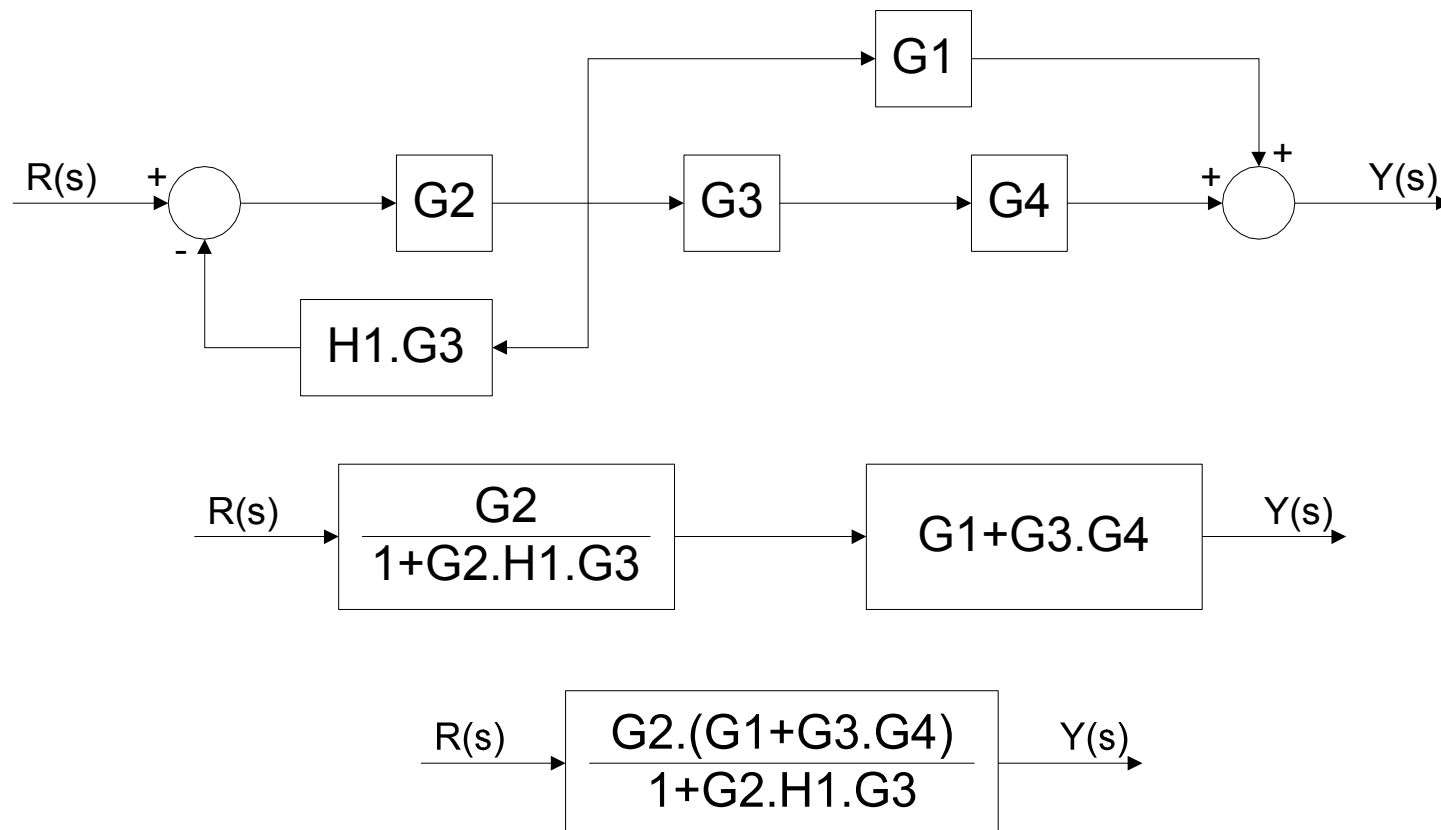
- Simplificação de diagramas de blocos (II)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



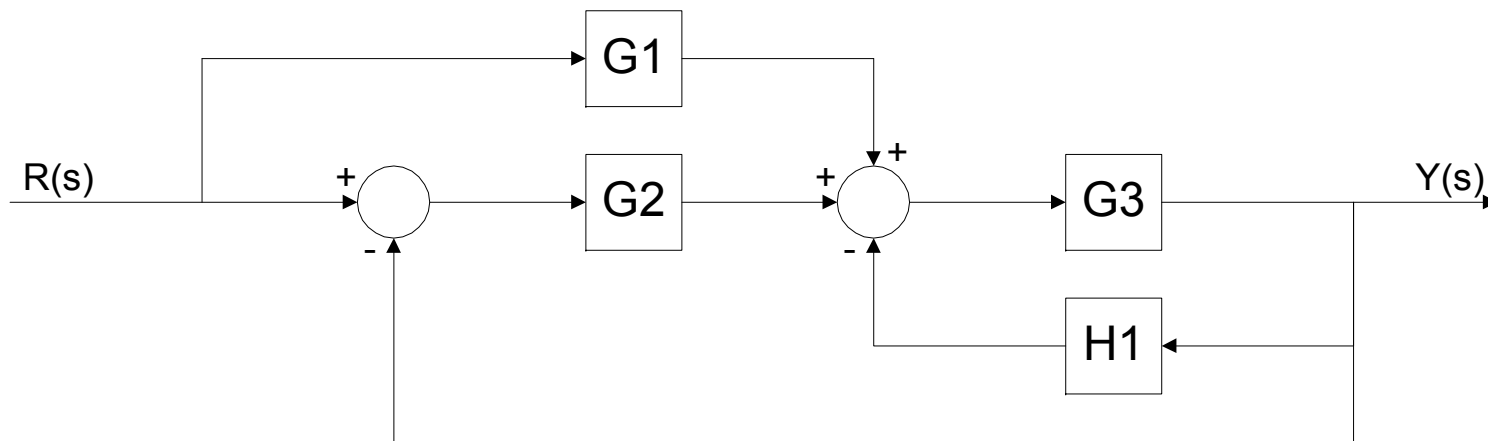
- Simplificação de diagramas de blocos (III)



Álgebra dos Diagramas de Blocos

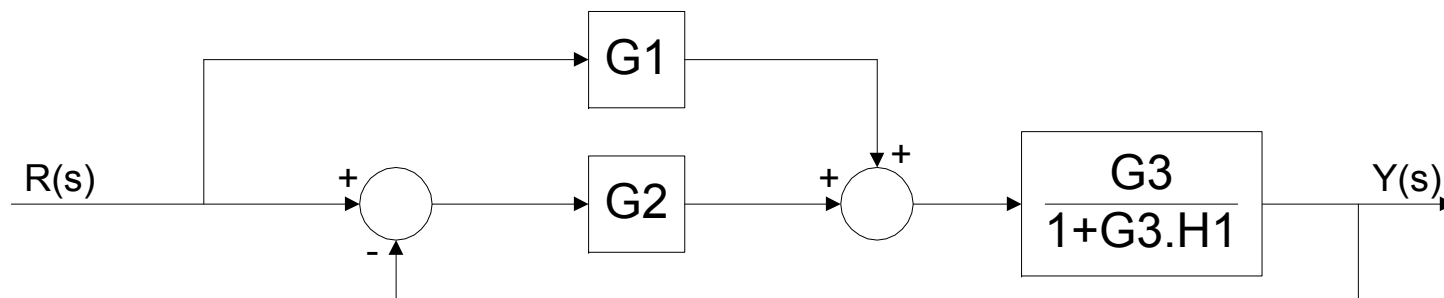
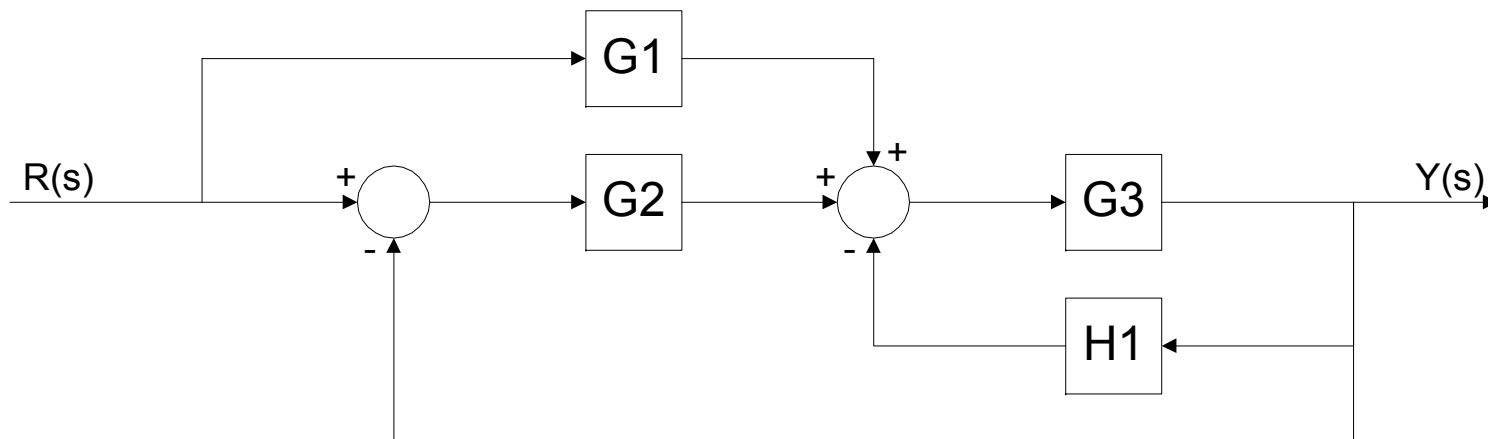


- Simplificação de diagramas de blocos (I)



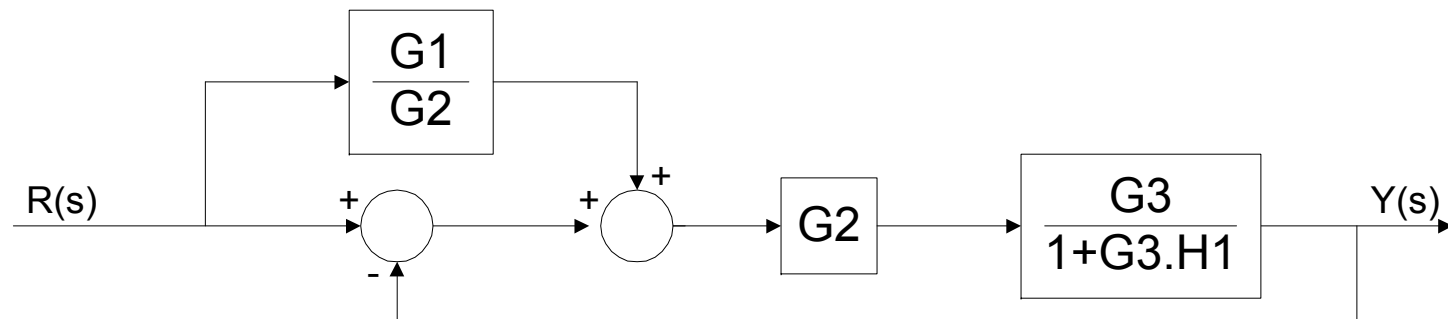
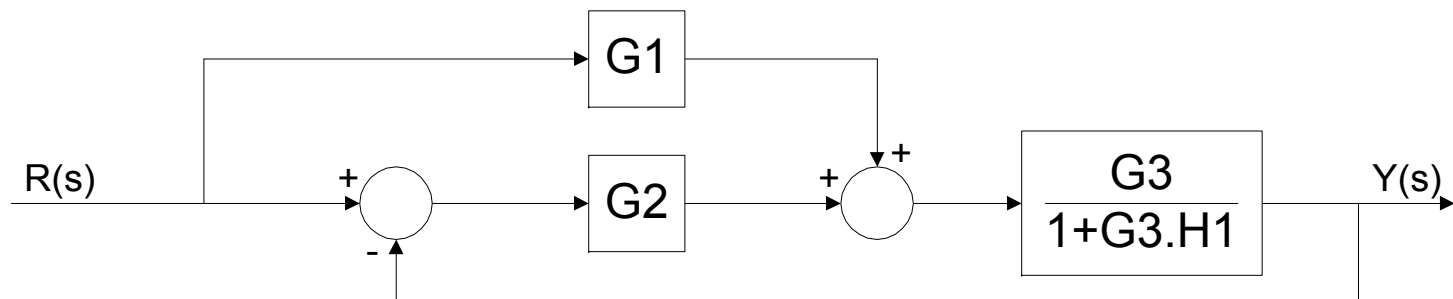
Álgebra dos Diagramas de Blocos

- Simplificação de diagramas de blocos (II)



Álgebra dos Diagramas de Blocos

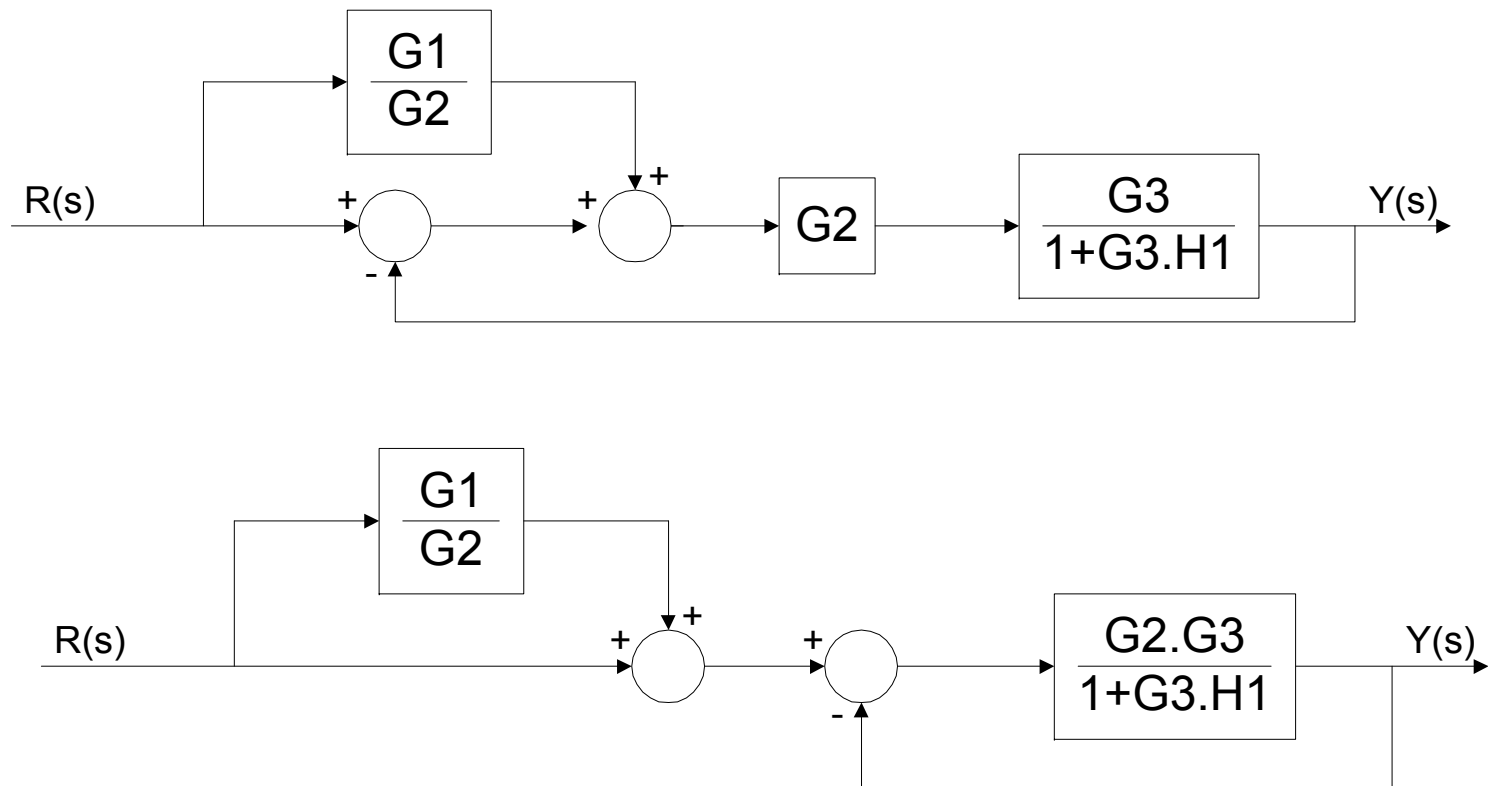
- Simplificação de diagramas de blocos (III)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



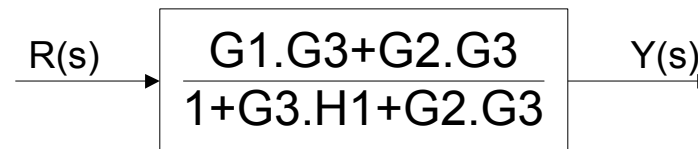
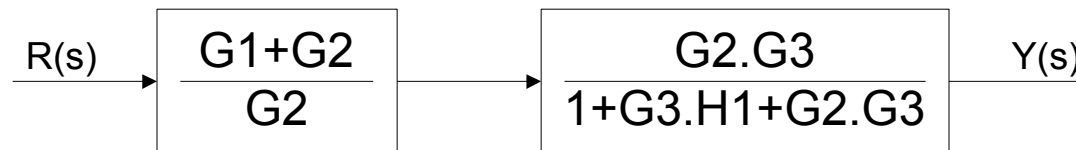
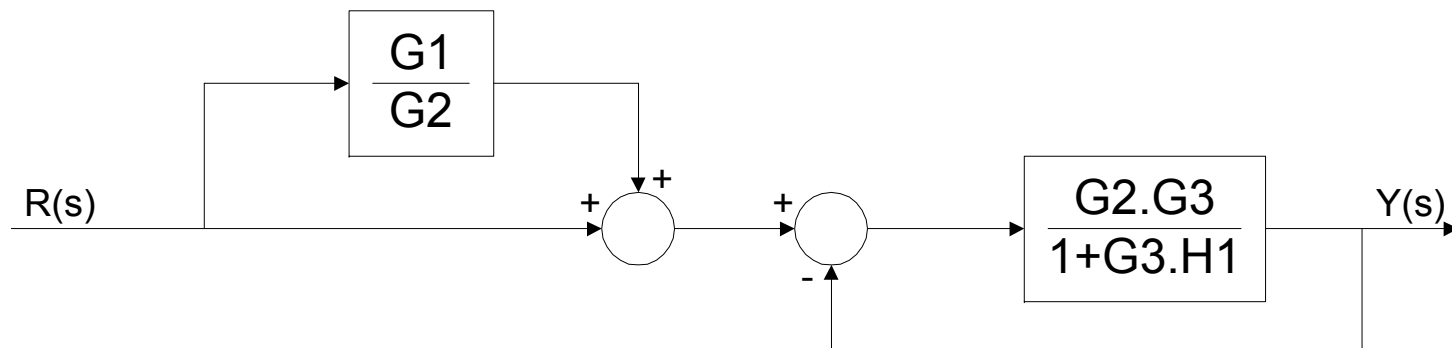
- Simplificação de diagramas de blocos (IV)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



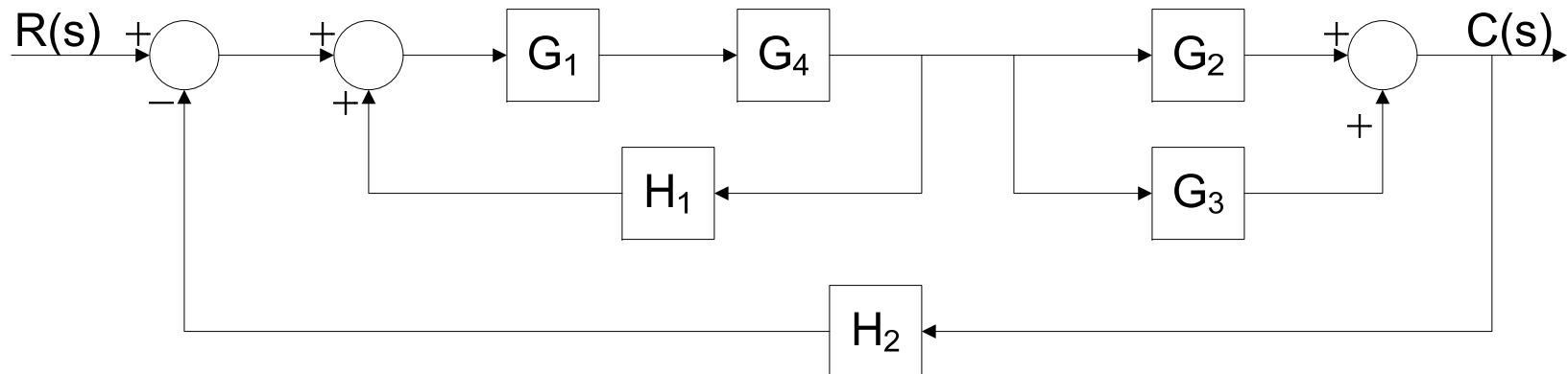
- Simplificação de diagramas de blocos (V)



Álgebra dos Diagramas de Blocos

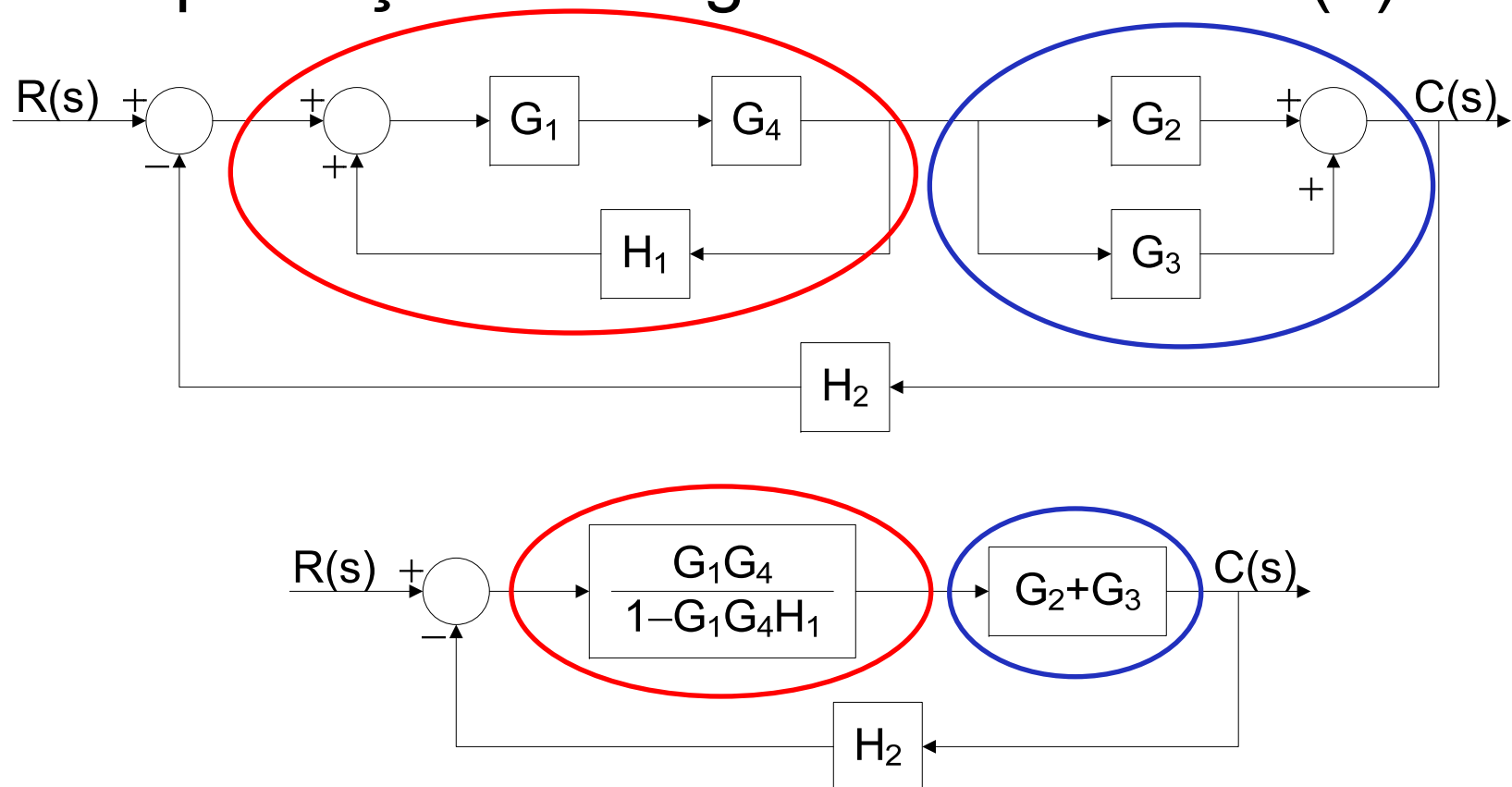


- Simplificação de diagramas de blocos (I)



Álgebra dos Diagramas de Blocos

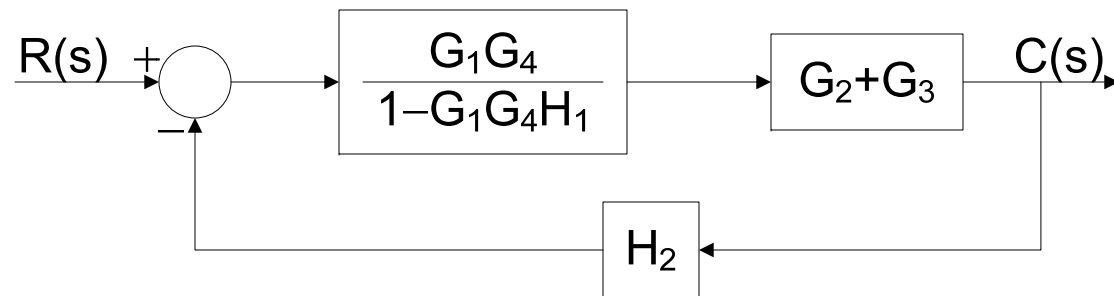
- Simplificação de diagramas de blocos (II)



Álgebra dos Diagramas de Blocos

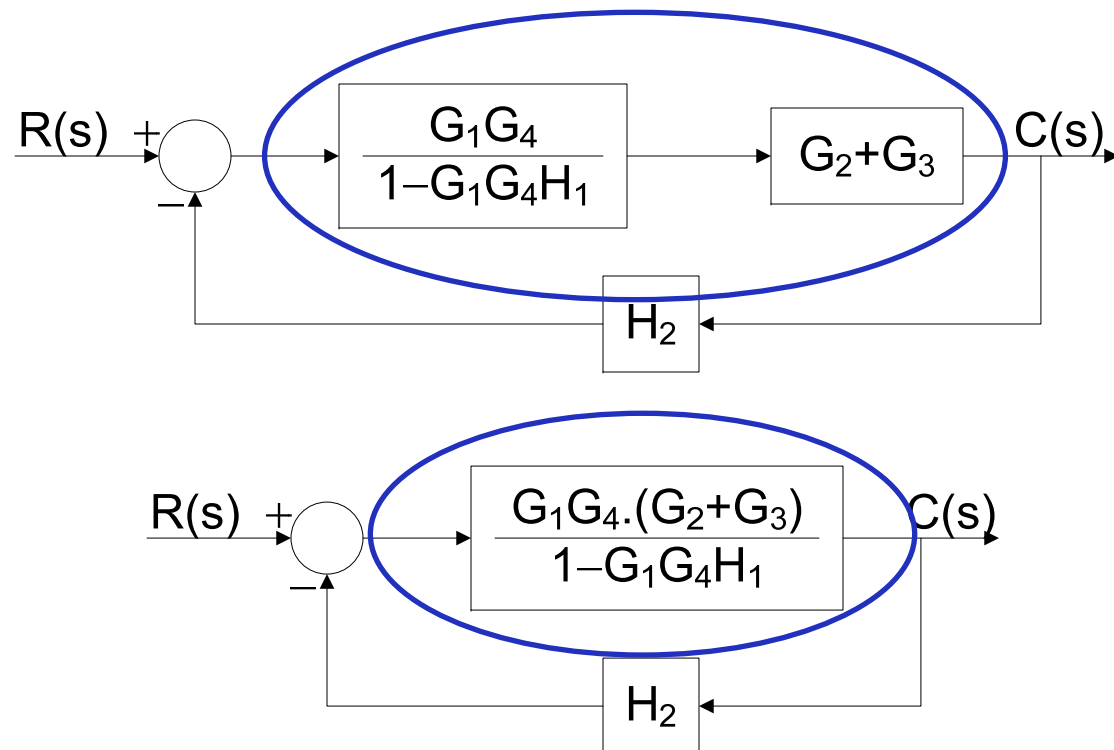


- Simplificação de diagramas de blocos (III)



Álgebra dos Diagramas de Blocos

- Simplificação de diagramas de blocos (IV)



Álgebra dos Diagramas de Blocos



1. Terminologia básica
2. Blocos em cascata (em série)
3. Forma canónica de um sistema de controlo
4. Transformação de diagramas de blocos
5. Sobreposição de vários sinais de entrada (teorema da sobreposição)
6. Simplificação de diagramas de blocos
7. **Regra de Mason**
8. Diagramas de blocos e modelos matemáticos

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Regra de Mason (I)
 - diagramas de blocos complexos – função de transferência pode ser calculada através da **fórmula de Mason**

$$T = \frac{\sum_i P_i \cdot \Delta_i}{\Delta}$$

P_i – ganho da malha directa i

P_{jk} – produto possível de ordem j de k ganhos de anéis que não se tocam

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Regra de Mason (II)

$$\Delta = 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_{jk} = 1 - \sum_j P_{j1} + \sum_j P_{j2} - \sum_j P_{j3} + \dots =$$

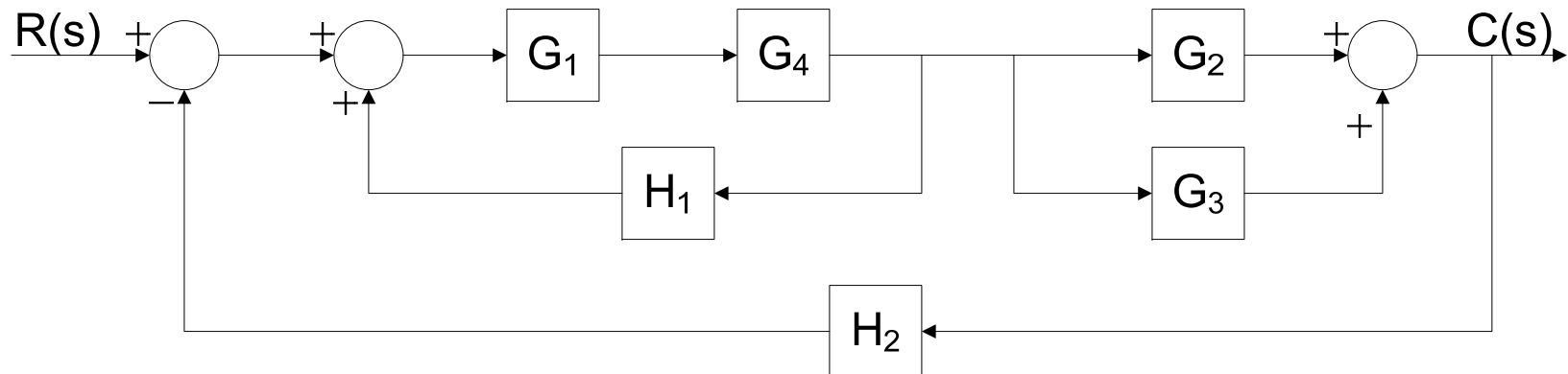
= 1 – (soma de todos os ganhos de anéis) +
+ (soma de todos os produtos de 2 anéis que não se tocam) –
– (soma de todos os produtos de 3 anéis que não se tocam) +
...

- $\Delta_i = \Delta$ calculado com todos os anéis que tocam em P_i eliminados
- dois anéis ou duas malhas “não se tocam” quando não têm nós em comum
- $\Delta = 0$ é a equação característica do sistema

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Exemplo (I)

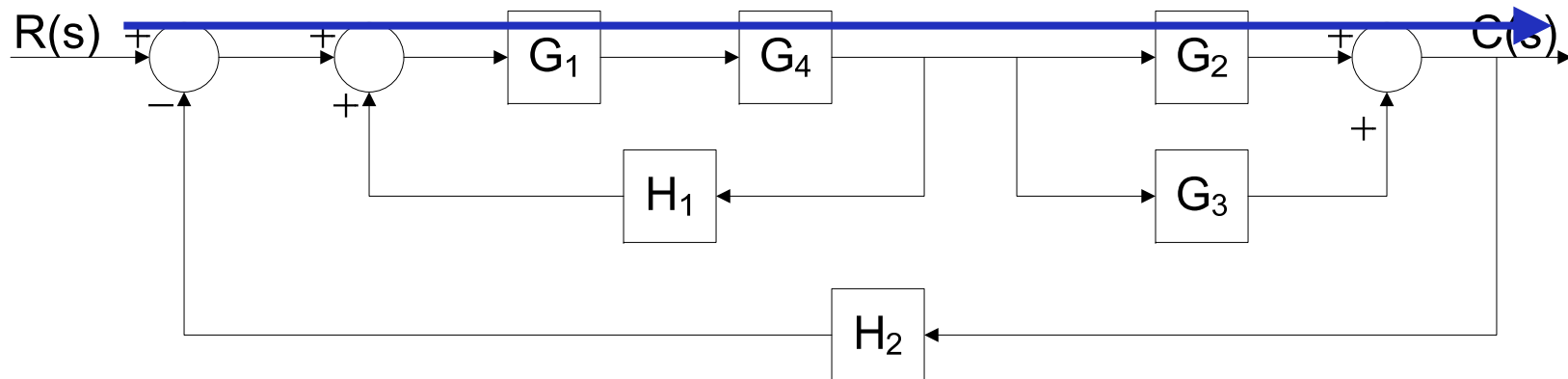


- existem dois caminhos directos

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Exemplo (II)



- existem dois caminhos directos com ganhos:

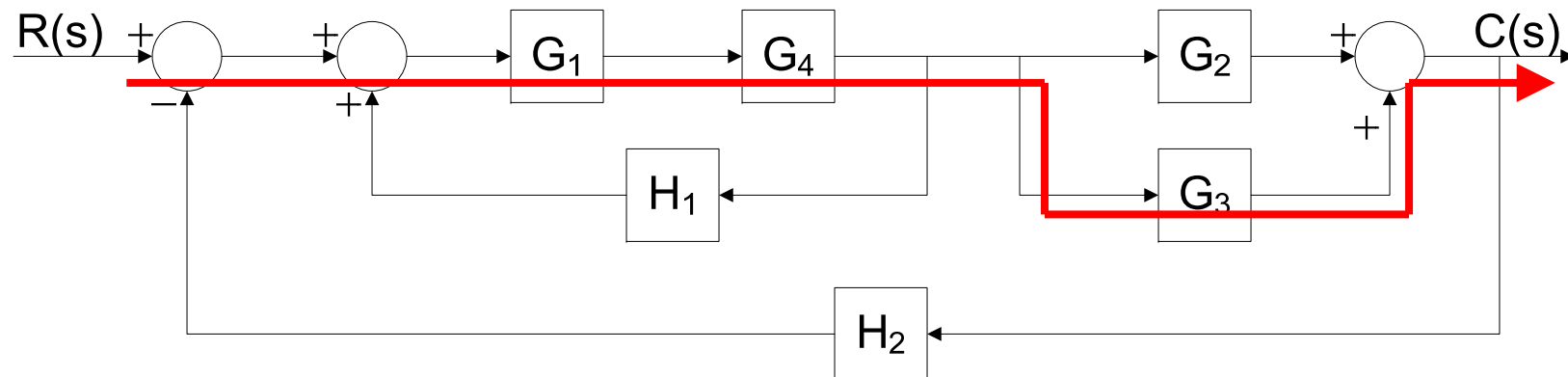
$$P_1 = G_1 G_2 G_4$$

$$T = \frac{\sum_i P_i \cdot \Delta_i}{\Delta}$$

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Exemplo (III)



- existem dois caminhos directos com ganhos:

$$P_1 = G_1 G_2 G_4$$

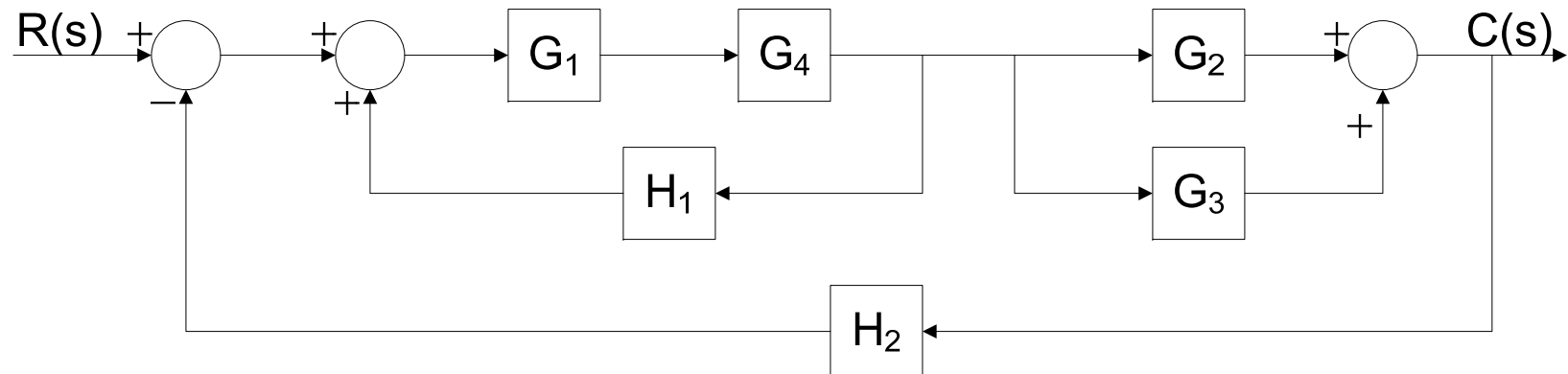
$$P_2 = G_1 G_3 G_4$$

$$T = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta}$$

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Exemplo (IV)

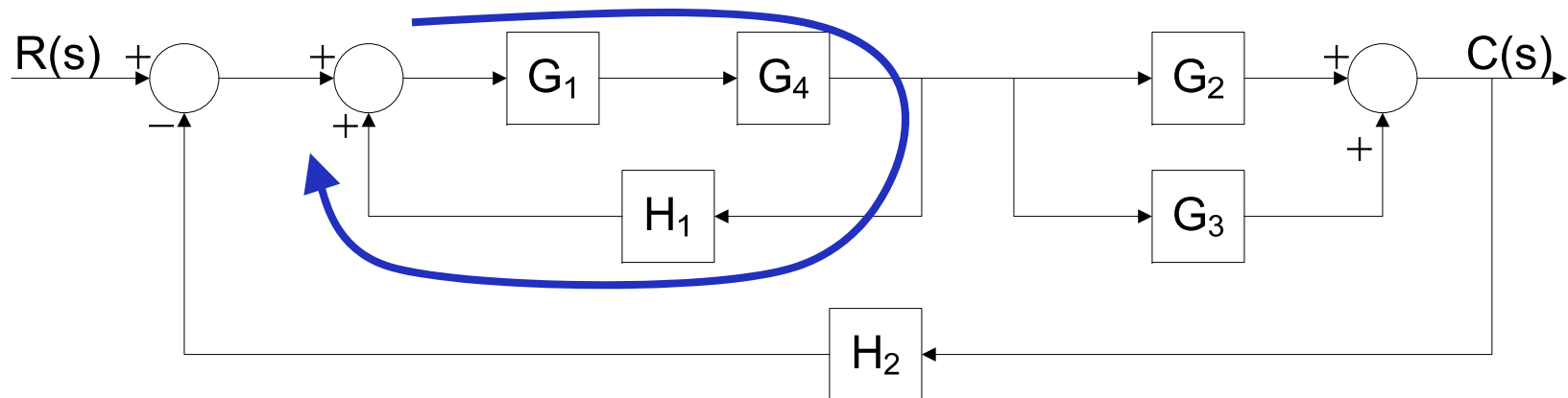


- existem três anéis

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Exemplo (V)



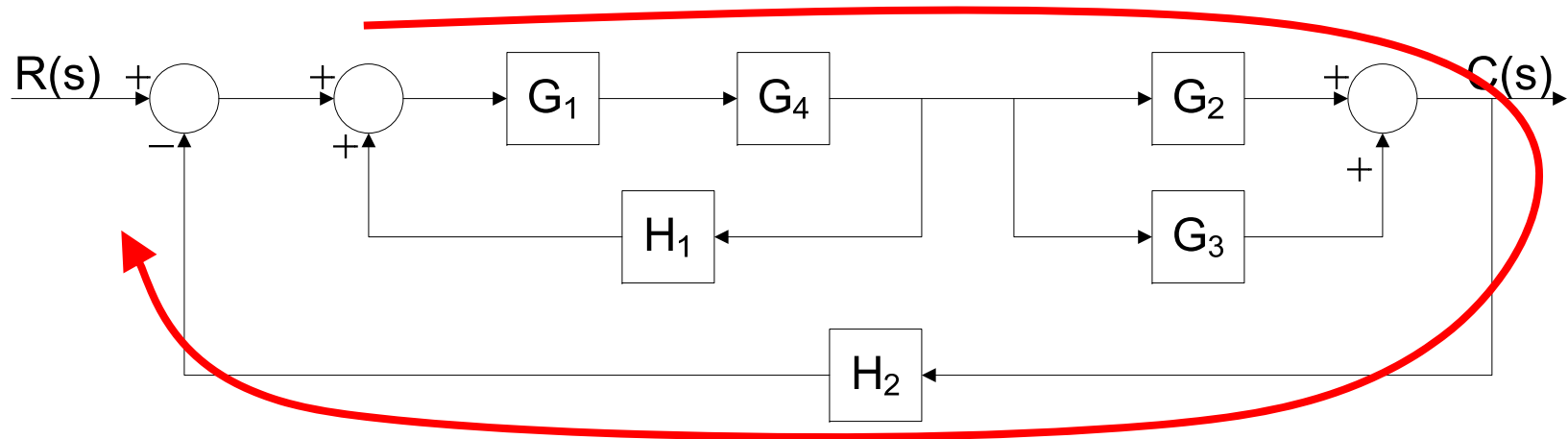
- existem três anéis:

$$P_{11} = G_1 G_4 H_1$$

$$T = \frac{\sum_i P_i \cdot \Delta_i}{\Delta}$$

Álgebra dos Diagramas de Blocos

• Exemplo (VI)



- existem três anéis:

$$P_{11} = G_1 G_4 H_1$$

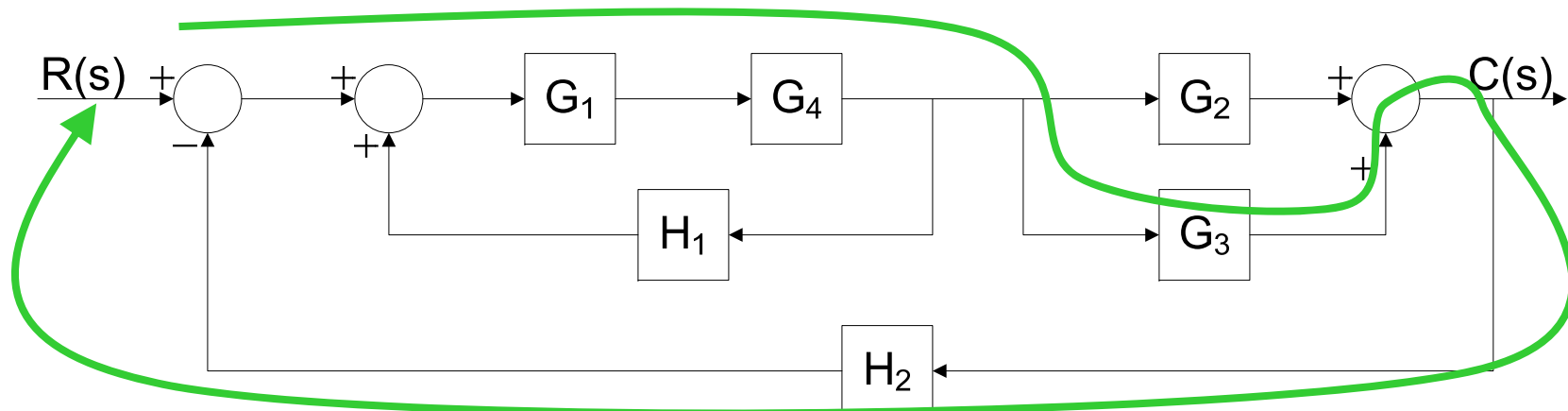
$$P_{21} = - G_1 G_2 G_4 H_2$$

$$T = \frac{\sum_i P_i \cdot \Delta_i}{\Delta}$$

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Exemplo (VII)



- existem três anéis:

$$P_{11} = G_1 G_4 H_1$$

$$P_{21} = -G_1 G_2 G_4 H_2$$

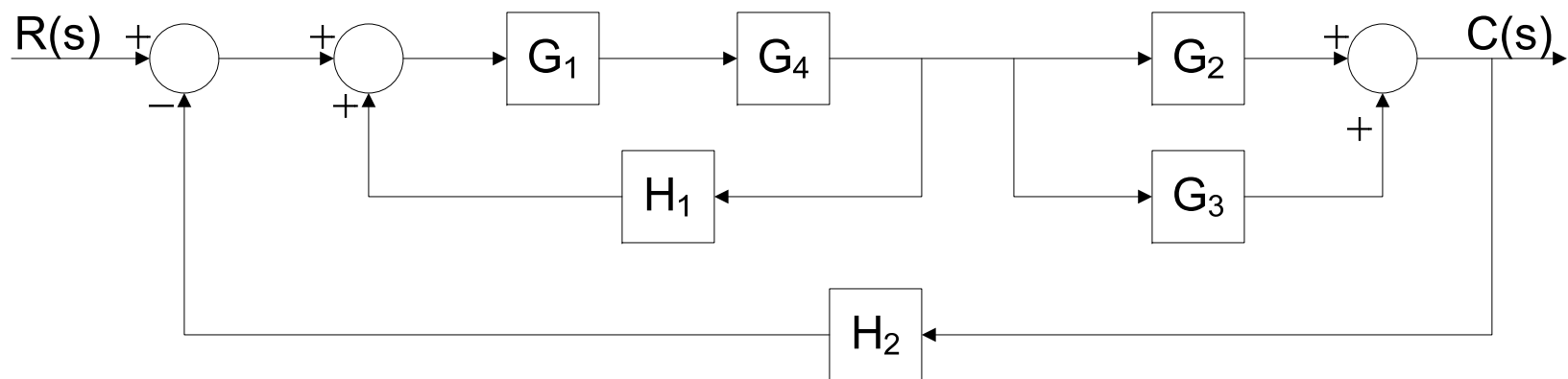
$$P_{31} = -G_1 G_3 G_4 H_2$$

$$T = \frac{\sum_i P_i \cdot \Delta_i}{\Delta}$$

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Exemplo (VIII)



- não existem quaisquer anéis que não toquem em P_1 e P_2 , pelo que:

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1$$

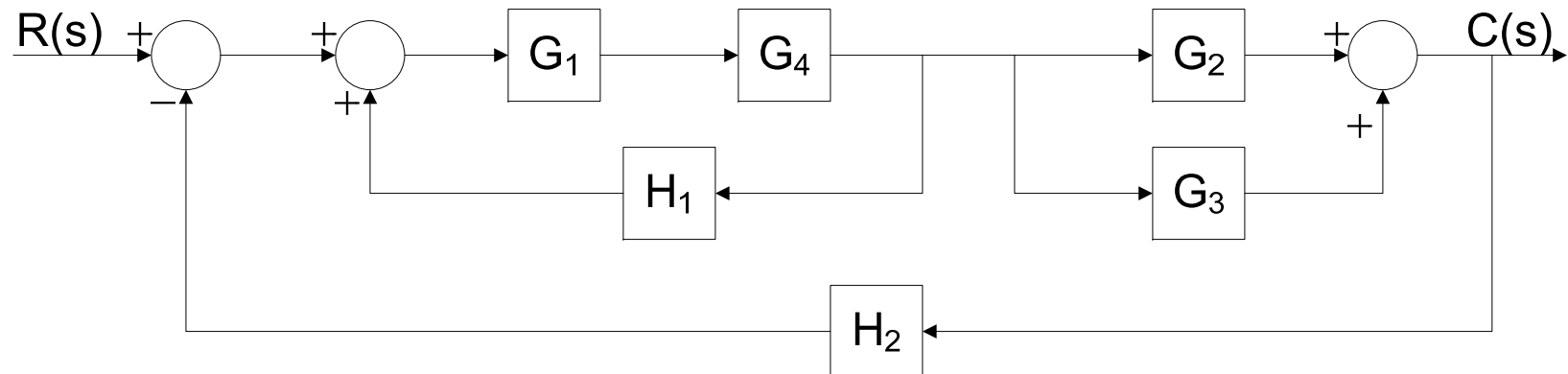
$$\Delta = 1 - G_1 G_4 H_1 + G_1 G_2 G_4 H_2 + G_1 G_3 G_4 H_2$$

$$T = \frac{\sum_i P_i \cdot \Delta_i}{\Delta}$$

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Exemplo (IX)



- logo:

$$T = \frac{C}{R} = \frac{P_1 \cdot \Delta_1 + P_2 \cdot \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 G_4 (G_2 + G_3)}{1 + G_1 G_4 [-H_1 + H_2 (G_2 + G_3)]}$$

Álgebra dos Diagramas de Blocos

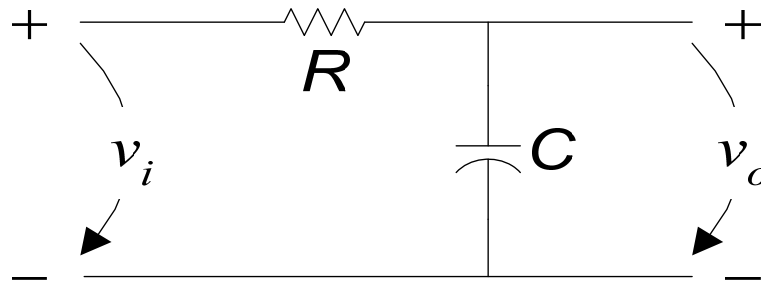


1. Terminologia básica
2. Blocos em cascata (em série)
3. Forma canónica de um sistema de controlo
4. Transformação de diagramas de blocos
5. Sobreposição de vários sinais de entrada (teorema da sobreposição)
6. Simplificação de diagramas de blocos
7. Regra de Mason
8. Diagramas de blocos e modelos matemáticos

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Diagramas de blocos e modelos matemáticos (I)
 - na representação por diagramas de blocos considera-se que não há efeito de carga



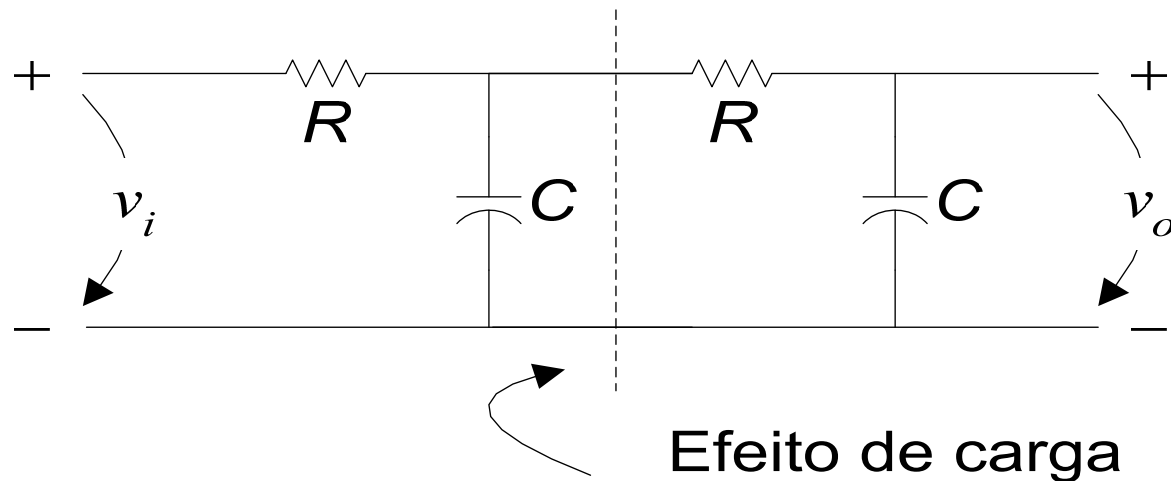
$$v_o = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} v_i$$

- fazendo $\omega_0 = 1/RC$ vem $v_o = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} v_i$

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Diagramas de blocos e modelos matemáticos (II)

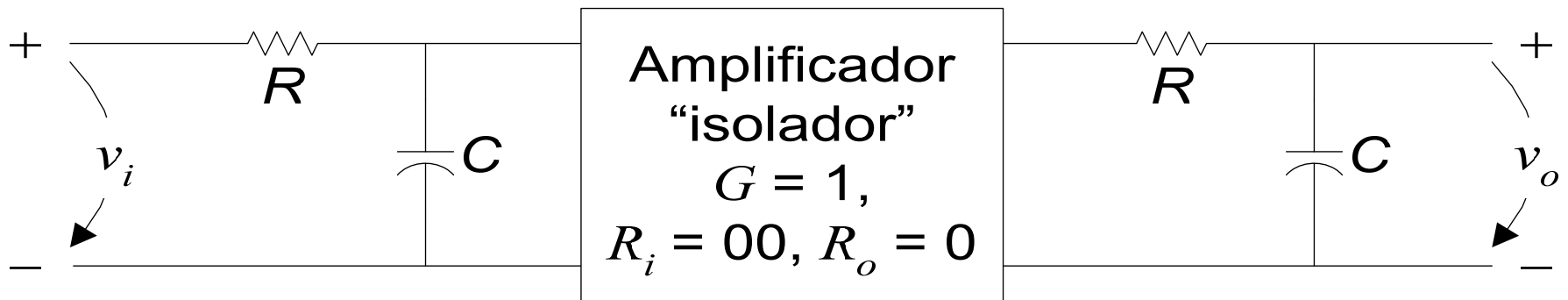


$$v_o = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 3\omega_0 s + \omega_0^2} v_i$$

Álgebra dos Diagramas de Blocos



- Diagramas de blocos e modelos matemáticos (III)



$$v_o = \left(\frac{\omega_0}{s + \omega_0} \right)^2 v_i$$

- não há efeito de carga entre os dois circuitos RC