1 a) $$\begin{cases} T - K_1\theta_1 - B_1\dot{\theta}_1 - K_2(\theta_1-\theta_2) - B_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2) = J_1\ddot{\theta}_1 \\ -K_2(\theta_2-\theta_1) - B_2(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1) - K_3\theta_2 - B_3\dot{\theta}_2 = J_2\ddot{\theta}_2 \end{cases}$$

PASSANDO PARA O DOMINIO DE LAPLACE

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} T(s) - K_1\theta_1(s) - sB_1\theta_1(s) - K_2[\theta_1(s)-\theta_2(s)] - sB_2[\theta_1(s)-\theta_2(s)] = \\ = s^2J_1\theta_1(s) \\ -K_2[\theta_2(s)-\theta_1(s)] - sB_2[\theta_2(s)-\theta_1(s)] - K_3\theta_2(s) - sB_3\theta_2(s) = \\ = s^2J_2\theta_2(s) \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} T(s) - (sB_1+sB_2+K_1+K_2)\theta_1(s) + (sB_2+K_2)\theta_2(s) = s^2J_1\theta_1(s) \\ -(sB_2+sB_3+K_2+K_3)\theta_2(s) + (sB_2+K_2)\theta_1(s) = s^2J_2\theta_2(s) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T(s) = [s^2J_1 + s(B_1+B_2)+K_1+K_2]\theta_1(s) - (sB_2+K_2)\theta_2(s) \\ (sB_2+K_2)\theta_1(s) = [s^2J_2 + s(B_2+B_3)+K_2+K_3]\theta_2(s) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{T(s)}{\theta_2(s)} = \frac{[s^2J_1+s(B_1+B_2)+K_1+K_2][s^2J_2+s(B_2+B_3)+K_2+K_3] - (sB_2+K_2)^2}{sB_2+K_2} \\ \theta_1(s) = \frac{s^2J_2+s(B_2+B_3)+K_2+K_3}{sB_2+K_2}\cdot\theta_2(s) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{sB_2+K_2}{[s^2J_1+s(B_1+B_2)+K_1+K_2][s^2J_2+s(B_2+B_3)+K_2+K_3] - (sB_2+K_2)^2}$$

Tel.: +351 21 953 31 20 - Fax: +351 21 953 31 29
e-mail: ds@dias-de-sousa.pt - www.dias-de-sousa.pt - GPS: N 38° 51' 29" - O 9° 04' 09"

2 a) $t_p = 1{,}5\,s$; $y(t_p) = 5$

$$M_p = \frac{V_p - V_{FINAL}}{V_{FINAL}} = \frac{5-4}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Leftrightarrow 0{,}25 = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1{,}39 = -\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow 1{,}92\,(1-\xi^2) = \xi^2\pi^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1{,}92 = (9{,}8696 + 1{,}92)\,\xi^2 \Leftrightarrow \xi = \sqrt{\frac{1{,}92}{11{,}79}} = 0{,}16$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow 1{,}5 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0{,}16^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_n = \frac{\pi}{1{,}5 \times 0{,}987} = 2{,}12 \text{ rad/s}$$

$$\text{Ganho} = \frac{V_{FINAL}}{V_{ENTRADA}} = 4$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = 4 \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{17{,}96}{s^2 + 0{,}678\,s + 17{,}96}$$

b) Zeros : Não tem

Pólos : $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\;\omega_n =$

$$= -0{,}339 \pm 2{,}09\,j$$

3a) REPRESENTAÇÃO DO LGR

1. $GH(s) = -1 \Leftrightarrow \frac{k}{s(s+1)(s+4)} = -1$

2. pólos : $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -4$ $\Big\}$ $d = 3$

ZEROS : NÃO HÁ $\}$ $m = 0$

- Nº RAMOS DO LGR = $d = 3$
- LGR COMEÇA NOS PÓLOS DA FTMA E TERMINA NO ∞

3. RAMOS NO EIXO REAL:

$[0, -1]$; $]-\infty, -4]$

4. Nº ASSIMPTOTAS $= d - m = 3$

$\measuredangle$ ASSIMPTOTAS c/ EIXO REAL $= \frac{(1+2k)\pi}{d-m}$, $k = 0, 1, 2$

$k = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6} = 60°$

$k = 1 \Rightarrow \pi = 180°$

$k = 2 \Rightarrow \frac{5\pi}{3} = -60°$

CENTRÓIDE:

$$\sigma_c = \frac{\Sigma p_i - \Sigma z_i}{d-m} = \frac{0-1-4}{3} = -\frac{5}{3} = -1,(6)$$

5. PONTO DE QUEBRA

$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{k}{s(s+1)(s+4)} = -1 \Leftrightarrow$

3 a) $\Leftrightarrow k = -s(s+1)(s+4) = -[s^3 + 4s^2 + s^2 + 4s] =$

$= -[s^3 + 5s^2 + 4s]$

$\frac{dk}{ds} = 0 \Leftrightarrow -3s^2 - 10s - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -2{,}\cancel{666} \\ s_2 = -0{,}465 \end{cases}$

b. INTERSECÇÃO C/ EIXO IMAGINÁRIO

$1 + GH(s)\Big|_{s=j\omega} = 0 \Leftrightarrow$

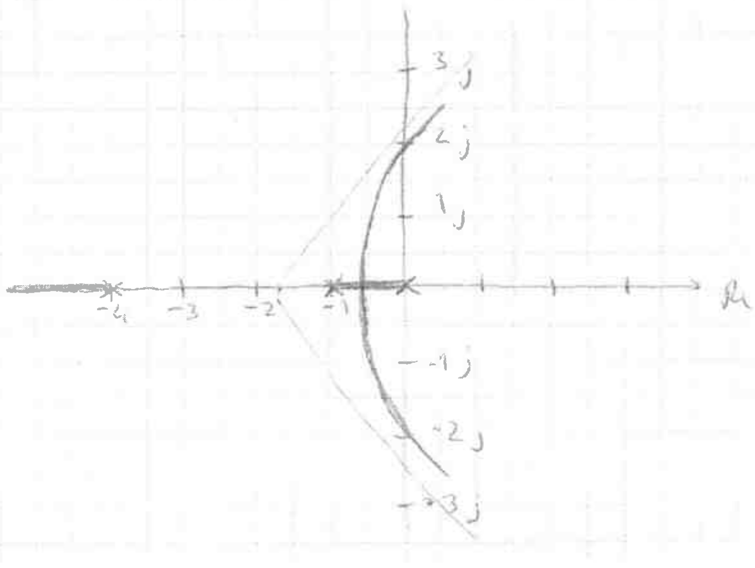
$\Leftrightarrow 1 + \frac{k}{s(s+1)(s+4)}\Big|_{s=j\omega} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s^3 + 5s^2 + 4s + k\Big|_{s=j\omega} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -j\omega^3 - 5\omega^2 + 4j\omega + k = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\omega - \omega^3 = 0 \\ k - 5\omega^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ k = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \omega = 2 \\ k = 20 \end{cases} \vee \begin{cases} \omega = -2 \\ k = 20 \end{cases}$

LGR DO SISTEMA



3 b) O SISTEMA É INSTÁVEL PARA VALORES DE $K > 20$

3 c) NÃO, PORQUE O LGR NÃO PASSA SOBRE ESSES PONTOS

4 a) $$G(s) = \frac{(s+0,1)}{(s+1)(s^2+10s+100)} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{0,1\left(\frac{j\omega}{0,1}+1\right)}{100\cdot(j\omega+1)\left(\frac{(j\omega)^2}{100}+j\frac{\omega}{10}+1\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(j\omega) = 0,001\cdot\frac{\left(j\frac{\omega}{0,1}+1\right)}{(j\omega+1)\left(\left(\frac{j\omega}{10}\right)^2+j\frac{\omega}{10}+1\right)}$$

GANHO = 0,001 $\Rightarrow$ GANHO dB = $20\log_{10}(0,001) = -60$

ZERO EM $\omega = 0,1$ rad/s

PÓLO SIMPLES EM $\omega = 1$ rad/s

PÓLO DUPLO EM $\omega_n = 10$ rad/s

SISTEMA DE 2ª ORDEM:

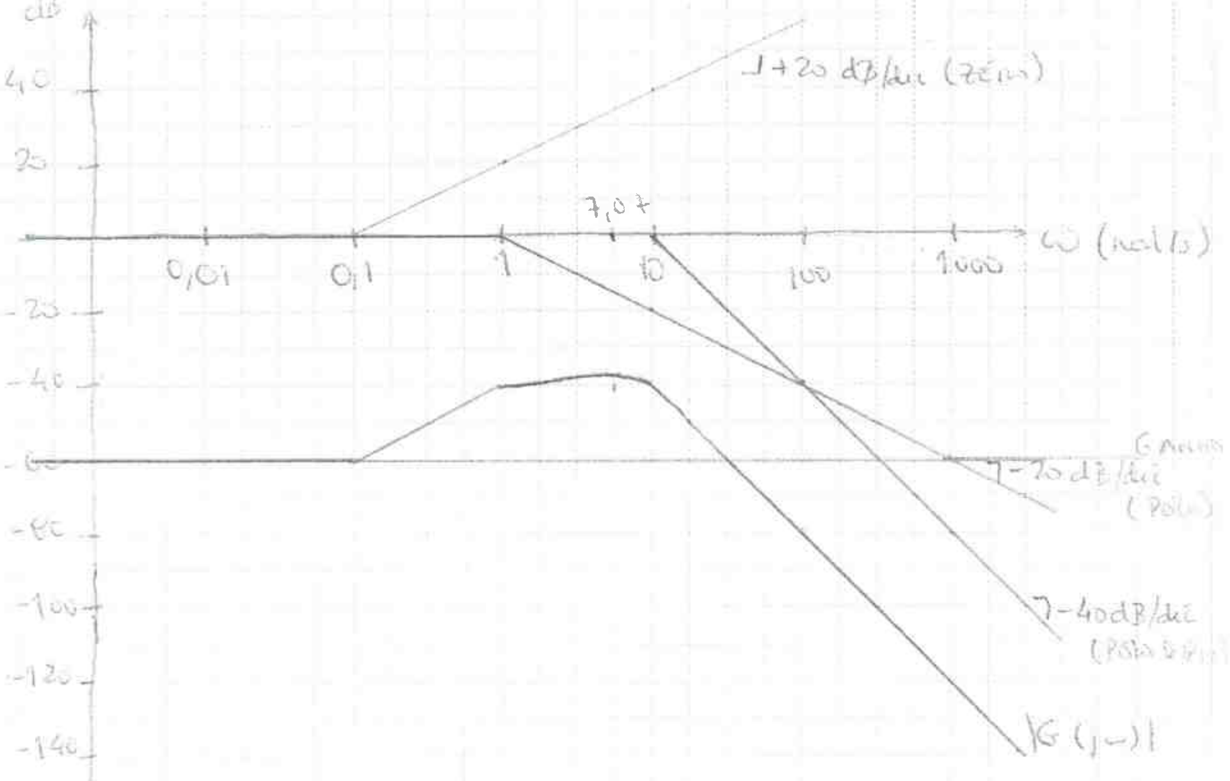
$$\begin{cases} \omega_n^2 = 100 \\ 2\xi\omega_n = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_n = 10 \\ \xi = 0,5 \end{cases} \Rightarrow \text{HÁ PICO DE RESSONÂNCIA}$$

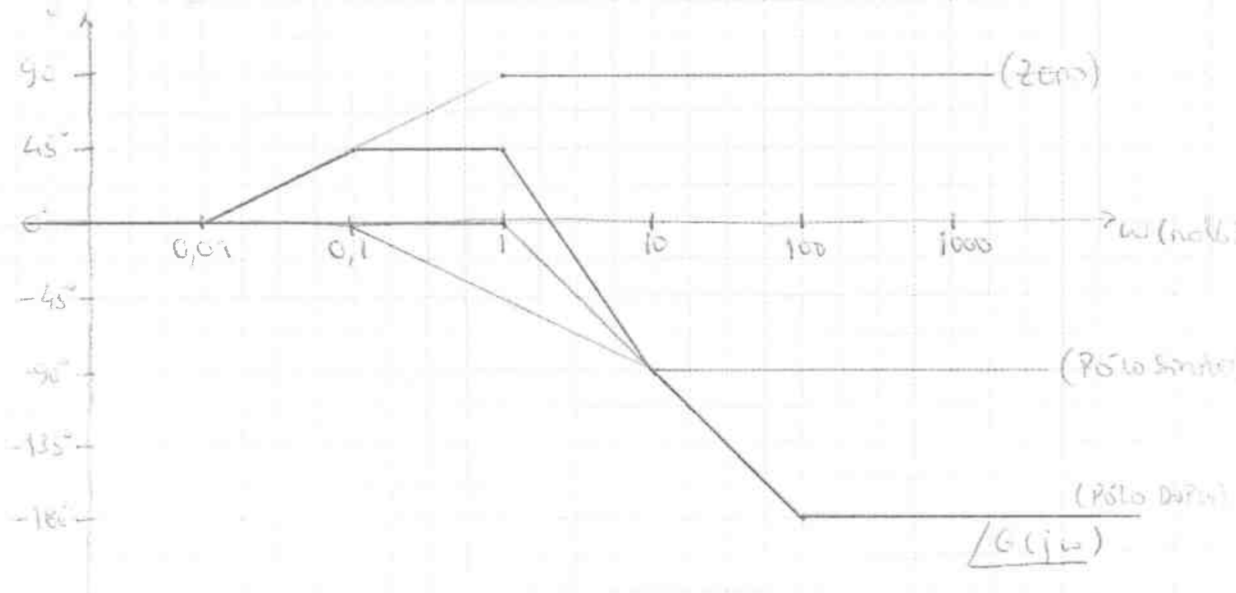
$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} = 10\cdot\sqrt{1-2\times0,5^2} = 7,07 \text{ rad/s}$$

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2\times0,5\times\sqrt{1-0,5^2}} = 1,155$$

TESTE - EXAME 2008 - JULHO 08

4 a) $M_r|_{dB} = 20 \log_{10} (1{,}155) = 1{,}25$ dB





4 b) Este sistema tem margem de ganho e de fase infinitas, logo é sempre estável.