TESIS: Teoria dos Sistemas

Modelação de Sistemas

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Modelação de Sistemas

1. Representação dos sistemas sob a forma de diagrama de blocos
2. Obtenção da função de transferência dos sistemas a partir do seu diagrama de blocos
3. Modelação de sistemas dinâmicos
   1. Sistemas eléctricos
   2. Sistemas electrónicos
   3. Sistemas mecânicos de translação
   4. Sistemas mecânicos de rotação
   5. Sistemas térmicos
   6. Sistemas de fluídos

Modelação de Sistemas

- Procedimentos para construir os diagramas de blocos e obter a função de transferência de um sistema
  1. escrever as equações que descrevem o comportamento dinâmico de cada componente
  2. determinar as transformadas de Laplace de cada uma das equações encontradas no ponto anterior, supondo nulas as condições iniciais
  3. representar cada equação no domínio de Laplace individualmente na forma de blocos
  4. montar os elementos individuais do diagrama de blocos, determinados no ponto anterior, num diagrama de blocos completo
  5. simplificar o diagrama de blocos, determinado no ponto anterior, e obter a função de transferência do sistema em consideração

Modelação de Sistemas

- Redução de diagramas de blocos
  - os blocos podem ser conectados em série unicamente se a saída de um bloco não é afectada pelo bloco seguinte
  - qualquer número de blocos em cascata, representando componentes sem efeito de carga, podem ser substituídos por um único bloco cuja função de transferência é o produto das funções de transferência individuais
  - à medida que o diagrama de blocos é simplificado, os novos blocos tornam-se mais complexos devido à geração de novos pólos e zeros

TESIS – Teoria dos Sistemas ISEP – Ano Lectivo 2007 / 2008 Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Modelação de Sistemas

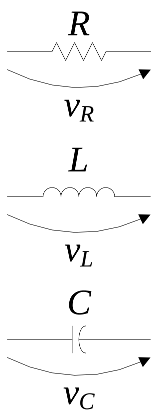
- Modelos de sistemas físicos
  - neste capítulo estuda-se a modelação de sistemas contínuos (no tempo) através de equações diferenciais lineares ordinárias da forma

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y = b_0 \frac{d^n u}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n u$$

onde $y(t)$ é a saída e $u(t)$ a entrada do sistema

Modelação de Sistemas

- Sistemas eléctricos



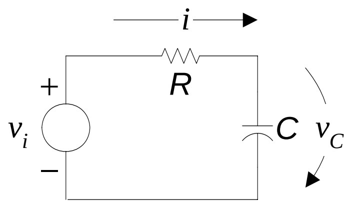
$$v_R(t) = Ri(t)$$

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

Modelação de Sistemas

- O circuito RC (I)
  - circuito *RC* é um dos exemplos mais simples de sistemas dinâmicos e muito útil para estabelecer comparações com outros sistemas



Modelação de Sistemas

- O circuito RC (II)
  - tensão no condensador vem

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt' + V_C(0)$$

onde $V_c(0)$ é a tensão do condensador no início da contagem dos tempos

  - pela Lei de Kirchoff das tensões

$$v_i(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt' \qquad \text{(supondo } V_c(0)=0\text{)}$$

TESIS – Teoria dos Sistemas ISEP – Ano Lectivo 2007 / 2008 Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Modelação de Sistemas

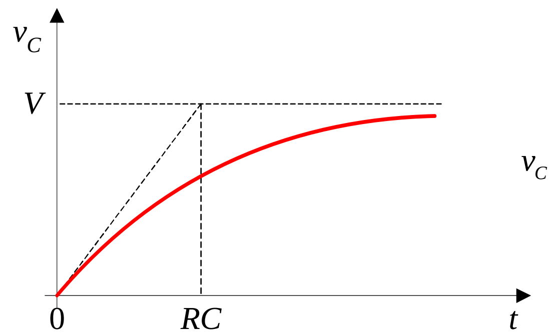
- O circuito RC (III)
  - usualmente prefere-se trabalhar com equações diferenciais
  - aplicando a Lei de Kirchoff das correntes, vem

$$\frac{v_i(t)-v_C(t)}{R}=C\frac{dv_C}{dt} \Leftrightarrow RC\frac{dv_C}{dt}+v_C(t)=v_i(t)$$

  - verifica-se que o circuito é modelado por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem

Modelação de Sistemas

- O circuito RC (IV)
  - para uma variação de v_i em degrau, no instante t=0, de amplitude V, resulta



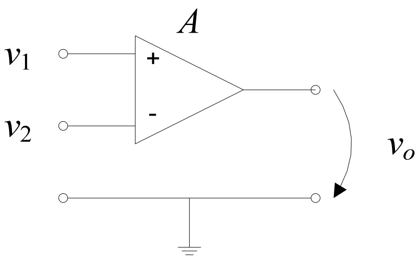
$$v_C(t)=V\left(1-e^{-t/RC}\right)$$

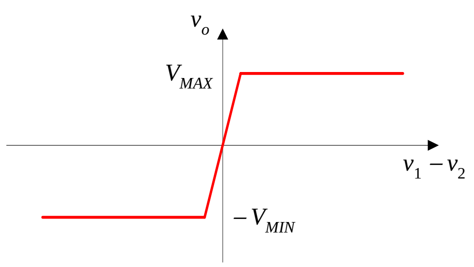
Modelação de Sistemas

- O circuito RC (V)
  - RC toma o nome de constante de tempo do circuito
  - quanto maior for o valor de R ou de C tanto mais lenta é a resposta $v_c(t)$
  - a resposta imediatamente a seguir à aplicação do degrau é aproximadamente linear com declive V/RC

Modelação de Sistemas

- Sistemas electrónicos





$$v_o(t) = A(v_1 - v_2)$$

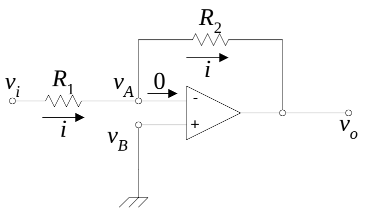
$$\text{declive} = \begin{cases} \text{ideal} = \infty \\ \text{real} \geq 10^5 \end{cases}$$

Modelação de Sistemas

- O amplificador operacional
  - um amplificador operacional ideal tem
    - ganho infinito
    - corrente nula nos terminais de entrada, isto é, impedância de entrada infinita
    - impedância de saída nula
  - estas características implicam que $v_1 = v_2$ e que o amplificador operacional tem a capacidade de fornecer / absorver qualquer corrente na saída sem variar a tensão v_o

Modelação de Sistemas

- Amplificador inversor



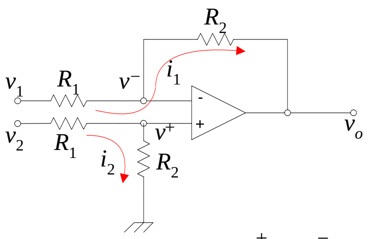
$$v_A = v_B = 0$$ (pois o ganho é infinito)

$$i = \frac{v_i - v_A}{R_1} = \frac{v_A - v_o}{R_2} \Leftrightarrow v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_i$$

  - neste circuito a impedância de entrada é R_1

Modelação de Sistemas

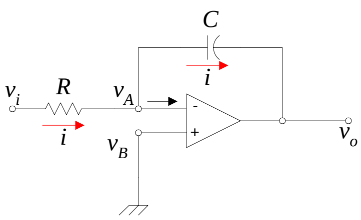
- Amplificador diferencial



$$\left.\begin{aligned} v^+ = v^- = v_2 \frac{R_2}{R_1+R_2} \\ i = \frac{1}{R_1}\left(v_1 - v^-\right) = \frac{1}{R_2}\left(v^- - v_o\right) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow v_o = \frac{R_2}{R_1}\left(v_2 - v_1\right)$$

Modelação de Sistemas

- Integrador



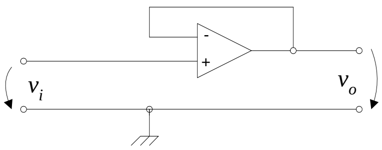
$$\frac{v_i - 0}{R} = C\frac{d}{dt}\left(0 - v_o\right)$$

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_i(t')\,dt' + V_o(0)$$

TESIS – Teoria dos Sistemas ISEP – Ano Lectivo 2007 / 2008 Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Modelação de Sistemas

- Seguidor de tensão

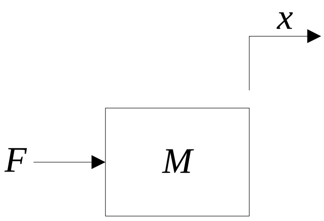


$$v_o = v_i$$

- Nota
  - nos circuitos anteriores a malha de realimentação está ligada ao terminal –
  - uma realimentação através do terminal + poderia conduzir à instabilidade

Modelação de Sistemas

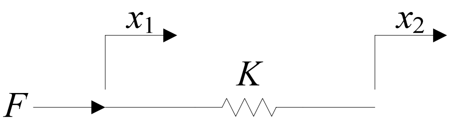
- Sistemas mecânicos de translação (I)
  - 2ª Lei de Newton $\sum F(t) = Ma(t)$
  - a massa produz uma força de reacção inercial proporcional à aceleração



$$F(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

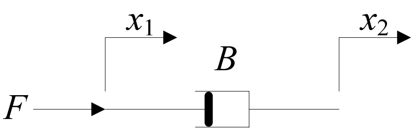
Modelação de Sistemas

- Sistemas mecânicos de translação (II)
  - a mola produz uma força de reacção proporcional à diferença de deslocamentos nos seus extremos



$$F(t) = -K\left[x_1(t) - x_2(t)\right]$$

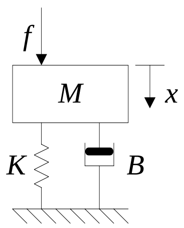
  - o amortecedor produz uma força de reacção proporcional à diferença de velocidades nos seus extremos



$$F(t) = -B\left[\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt}\right]$$

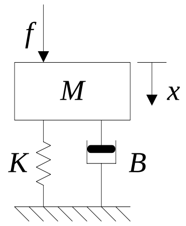
Modelação de Sistemas

- Sistema Mola-Massa-Atrito (I)
  - considere-se uma massa M interligada a uma mola (linear), com coeficiente de elasticidade K, e a um atrito (linear), com coeficiente de atrito viscoso B
  - seja f uma força aplicada externamente



Modelação de Sistemas

- Sistema Mola-Massa-Atrito (II)
  - considere-se uma massa M interligada a uma mola (linear), com coeficiente de elasticidade K, e a um atrito (linear), com coeficiente de atrito viscoso B
  - seja f uma força aplicada externamente

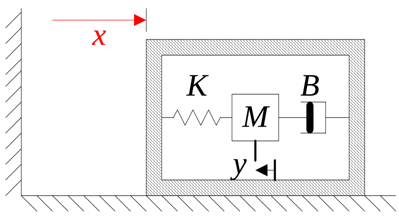


$$f - B\frac{dx}{dt} - Kx = M\frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f = M\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Kx$$

Modelação de Sistemas

- Acelerómetro mecânico (I)
  - considere o sistema seguinte



  - seja x o deslocamento da caixa relativamente ao referencial inercial e seja y o deslocamento da massa M relativamente à caixa do acelerómetro

Modelação de Sistemas

- Acelerómetro mecânico (II)
  - considere-se que para $y = 0$ o sistema está em descanso
  - equacionando as forças, vem

$$M\frac{d^2}{dt^2}(y-x) = -Ky - B\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{B}{M}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{K}{M}\right)y = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Modelação de Sistemas

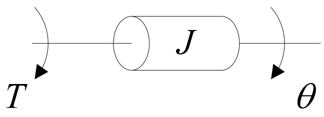
- Acelerómetro mecânico (III)
  - no caso da caixa ser submetida a uma aceleração constante, e após terem desaparecido os transitórios, vem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{M}{K}\right)\frac{d^2x}{dt^2}$$

  - assim, o deslocamento y é proporcional à aceleração sentida pela caixa (pelo acelerómetro)

Modelação de Sistemas

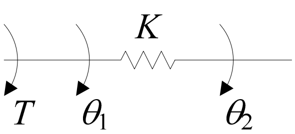
- Sistemas mecânicos de rotação (I)
  - 2ª Lei de Newton $\sum T(t) = J\alpha(t)$



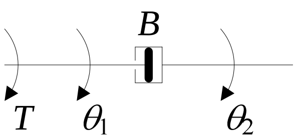
$$T(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

Modelação de Sistemas

- Sistemas mecânicos de rotação (II)



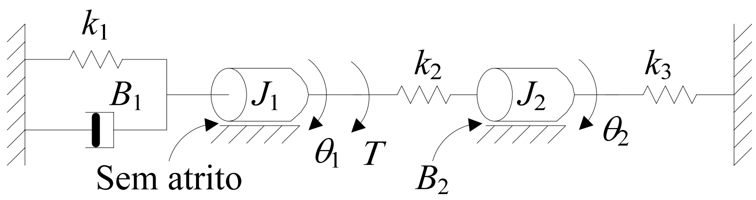
$$T(t) = -K\left[\theta_1(t) - \theta_2(t)\right]$$



$$T(t) = -B\left[\frac{d\theta_1(t)}{dt} - \frac{d\theta_2(t)}{dt}\right]$$

Modelação de Sistemas

- Exemplo de sistema mecânico de rotação (I)



  - equações dinâmicas que descrevem o comportamento do sistema
  - Função de Transferência $G(s) = \Theta_2(s)/T(s)$

Modelação de Sistemas

- Exemplo de sistema mecânico de rotação (II)
  - equações dinâmicas que descrevem o comportamento do sistema
    - aplicando a segunda lei de Newton ao sistema

$$\begin{cases} \sum T = J_1\alpha_1 & (\text{Inercia} \quad J_1) \\ \sum T = J_2\alpha_2 & (\text{Inercia} \quad J_2) \end{cases}$$

    - logo

$$\begin{cases} T - k_1\theta_1 - B_1\dot{\theta}_1 - k_2(\theta_1 - \theta_2) = J_1\ddot{\theta}_1 \\ -k_2(\theta_2 - \theta_1) - B_2\dot{\theta}_2 - k_3\theta_2 = J_2\ddot{\theta}_2 \end{cases}$$

Modelação de Sistemas

- Exemplo de sistema mecânico de rotação (III)
  - Função de Transferência $G(s)$ = $\Theta_2(s)/T(s)$
    - aplicando a transformada de Laplace ao sistema de equações obtido (condições iniciais nulas)

$$\begin{cases} \left(k_1+k_2+B_1s+J_1s^2\right)\Theta_1(s)-k_2\Theta_2(s)=T(s) \\ -k_2\Theta_1(s)+\left(k_2+k_3+B_2s+J_2s^2\right)\Theta_2(s)=0 \end{cases}$$

    - e simplificando

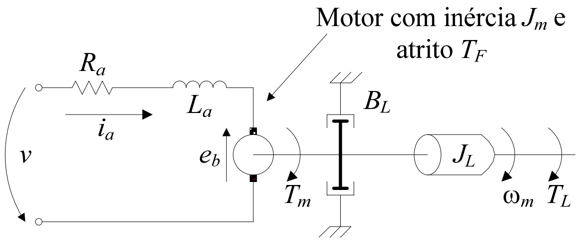
$$\frac{\Theta_2(s)}{T(s)}=\frac{k_2}{\left(k_1+k_2+B_1s+J_1s^2\right)\left(k_2+k_3+B_2s+J_2s^2\right)-k_2^2}$$

Modelação de Sistemas

- O motor DC de íman permanente (I)
  - vocacionado para aplicações em controlo devido às suas características
    - alto binário de aceleração
    - baixa inércia
    - característica linear de binário – velocidade
  - considere-se a ligação do motor a uma carga

Modelação de Sistemas

- O motor DC de íman permanente (II)



R_a, L_a – resistência e inductância do enrolamento da armadura
i_a – corrente no enrolamento da armadura
e_b – força contra-electromotriz gerada pelo motor
T_m, ω_m – binário gerado pelo motor e velocidade de rotação do motor
J_m – inércia do motor
T_F – binário de refrigeração
J_L, B_L – inércia e atrito viscoso da carga
T_L – binário de carga

Modelação de Sistemas

- O motor DC de íman permanente (III)

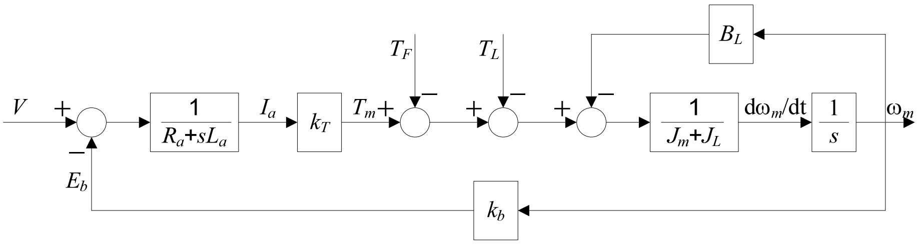
$$\left.\begin{aligned} v = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b \\ e_b = k_b \omega_m \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow v = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + k_b \omega_m$$

$$T_m = k_T i_a$$

$$T_m - T_F - B_L \omega_m - T_L = \left(J_m + J_L\right) \frac{d\omega_m}{dt}$$

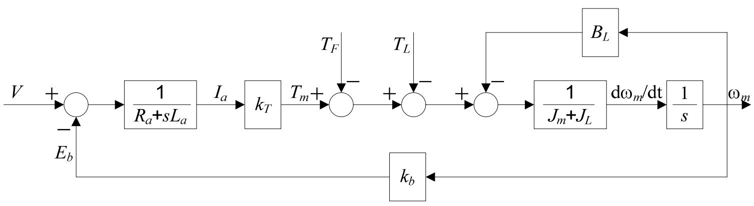
Modelação de Sistemas

- O motor DC de íman permanente (IV)
  - a partir destas equações pode estabelecer-se o diagrama de blocos seguinte



Modelação de Sistemas

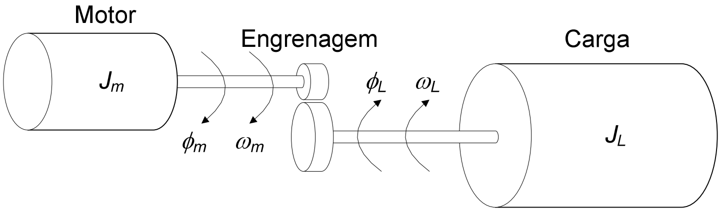
- O motor DC de íman permanente (V)



  - note-se que E_b diminui a sensibilidade da velocidade ω_m relativamente a variações da carga T_L
  - quando T_L aumenta, ω_m diminui, E_b diminui, pelo que I_a aumenta e T_m aumenta compensando, assim, o efeito da carga

Modelação de Sistemas

- Motores e cargas (I)
  - frequentemente a carga não está acoplada directamente ao veio do motor
  - conveniente calcular o sistema equivalente com a carga a ter o mesmo movimento angular que o motor



  - ϕ_m , ω_m – deslocamento / velocidade angular do motor
  - ϕ_L , ω_L – deslocamento / velocidade angular da carga

Modelação de Sistemas

- Motores e cargas (II)
  - $\omega_m = \dfrac{d\phi_m}{dt}, \quad \omega_L = \dfrac{d\phi_L}{dt}$ velocidades angulares
  - $N = \dfrac{\phi_m}{\phi_L} = \dfrac{\omega_m}{\omega_L}$ razão da engrenagem
  - inércia J_{LS} do sistema equivalente (sem engrenagem) deve ser tal que a energia cinética é a mesma nos dois sistemas

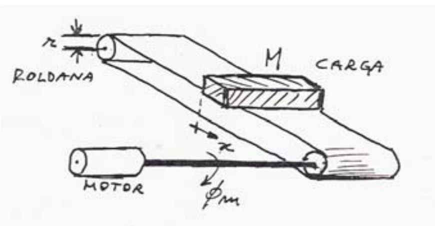
$$\frac{1}{2} J_{LS}\omega_m^{\ 2} = \frac{1}{2} J_L \omega_L^{\ 2} \Rightarrow J_{LS} = \frac{1}{N^2} J_L$$

Modelação de Sistemas

- Motores e cargas (III)
  - de um modo semelhante conclui-se que
  - $B_{LS} = \frac{1}{N^2} B_L$ (atrito na carga)
  - $k_{LS} = \frac{1}{N^2} k_L$ (mola na carga)
  - $T_{LS} = \frac{1}{N} T_L$ (binário na carga)

Modelação de Sistemas

- Motores e cargas (IV)
  - considere-se agora o caso de uma massa deslocada linearmente $x = \phi_m r$



TESIS – Teoria dos Sistemas ISEP – Ano Lectivo 2007 / 2008 Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Modelação de Sistemas

- Motores e cargas (V)
  - igualando as energias cinéticas

    $$\frac{1}{2} J_{LS} \omega_m^{\ 2} = \frac{1}{2} M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

  - resulta

    $$J_{LS} = r^2 M$$

  - de um modo semelhante conclui-se que para uma força F_L na carga vem

    $$T_{LS} = rF_L$$

Modelação de Sistemas

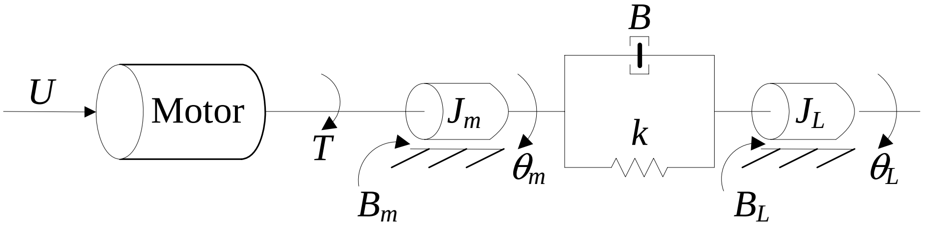
- Motores e cargas (VI)
  - durante os períodos transitórios muita da potência consumida deve-se ao momento de inércia
  - se o motor for sujeito a acelerações / desacelerações frequentes os enrolamentos da armadura podem aquecer significativamente
  - a energia dissipada pode ser minimizada através da escolha apropriada da razão da engrenagem, de tal forma que a inércia do motor seja aproximadamente igual à inércia da carga vista pelo motor (“inertia match”)

Modelação de Sistemas

- Motores e cargas (VII)
  - existem casos onde a dinâmica do motor pode ser desprezada (por exemplo, motores DC com realimentação de corrente)
  - nesse caso, pode considerar-se que o binário T é proporcional à tensão U, como, por exemplo, no "drive" de motores de robôs com elevado desempenho
  - todavia nas transmissões dos robôs podem existir modos torcionais pouco amortecidos que levantam graves problemas de controlo

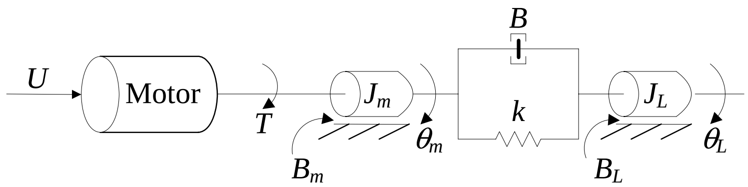
Modelação de Sistemas

- Motores e cargas (VIII)



Modelação de Sistemas

- Motores e cargas (IX)



$$
\begin{cases}
T = k_m U \\
T = J_m \dfrac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \dfrac{d\theta_m}{dt} + B\left[\dfrac{d\theta_m}{dt} - \dfrac{d\theta_L}{dt}\right] + k\left[\theta_m - \theta_L\right] \\
J_L \dfrac{d^2\theta_L}{dt^2} + B_L \dfrac{d\theta_L}{dt} + B\left[\dfrac{d\theta_L}{dt} - \dfrac{d\theta_m}{dt}\right] + k\left[\theta_L - \theta_m\right] = 0
\end{cases}
$$

Modelação de Sistemas

- Motores e cargas (X)
  - para o caso de uma transmissão ideal (isto é, sem atrito e sem flexibilidade) vem

$$
\begin{cases}
B = 0 \\
k \to \infty
\end{cases}
\Rightarrow \theta_m = \theta_L
$$

$$
T = \left(J_m + J_L\right)\frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \left(B_m + B_L\right)\frac{d\theta_m}{dt}
$$

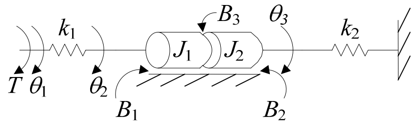
Modelação de Sistemas

- Sistemas análogos

Mecânico		Eléctrico	
Símbolo	Variável	Símbolo	Variável
f, T	Força / Binário	i	Corrente
v, ω	Velocidade	e, v	Tensão
M, J	Massa / Inércia	C	Capacidade
k	Coeficiente de elasticidade	$1/L$	Inverso da inductância
B	Coeficiente de atrito viscoso	$G = 1/R$	Condutância

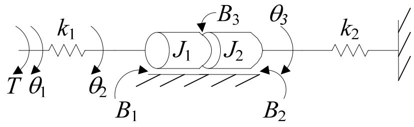
Modelação de Sistemas

- Exemplo de sistemas análogos (I)
  - sistema mecânico rotacional

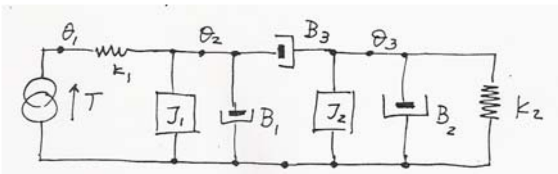


Modelação de Sistemas

- Exemplo de sistemas análogos (II)
  - sistema mecânico rotacional



  - circuito eléctrico correspondente



Modelação de Sistemas

- Exemplo de sistemas análogos (III)

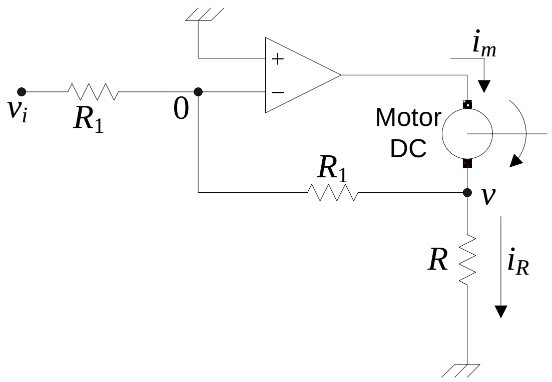
$$\begin{cases} T - k_1(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ -k_1(\theta_2 - \theta_1) - B_1\dot{\theta}_2 - B_3\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3\right) = J_1\ddot{\theta}_2 \\ -B_3\left(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2\right) - B_2\dot{\theta}_3 - k_2\theta_3 = J_2\ddot{\theta}_3 \end{cases}$$

Modelação de Sistemas

- Exemplo (I)
  - sistema de controlo de binário
    - nos motores DC de íman permanente, o binário do motor é proporcional à corrente do motor i_m
    - para manter o binário do motor constante, deve-se fornecer ao motor uma corrente constante
    - uma forma possível de assegurar isto é com o circuito seguinte, se
      - $v_i = -Ri_d$ (i_d – corrente desejada)
      - $R_1 \gg R$

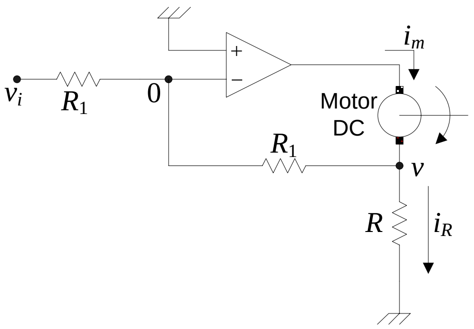
Modelação de Sistemas

- Exemplo (II)
  - sistema de controlo de binário



Modelação de Sistemas

- Exemplo (III)
  - sistema de controlo de binário



$$\left.\begin{cases} \dfrac{v_i}{R_1} = -\dfrac{v}{R_1} \Leftrightarrow v = -v_i \\ i_m - \dfrac{v}{R_1} = \dfrac{v}{R} \end{cases}\right\rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i_m = -v_i\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)$$

Modelação de Sistemas

- Exemplo (IV)
  - sistema de controlo de binário

$$\left.\begin{cases} \dfrac{v_i}{R_1} = -\dfrac{v}{R_1} \Leftrightarrow v = -v_i \\ i_m - \dfrac{v}{R_1} = \dfrac{v}{R} \end{cases}\right\rangle i_m = -v_i\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)$$

  - se $v_i = -Ri_d$ (i_d – corrente desejada)
    $R_1 \gg R$
  - vem $i_m = \left(1 + \dfrac{R}{R_1}\right) i_d \approx i_d$

TESIS – Teoria dos Sistemas ISEP – Ano Lectivo 2007 / 2008 Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Modelação de Sistemas

- Sistemas térmicos
  - fluxo de calor, q, é a quantidade de calor por unidade de tempo que passa de um material para outro

    $$q = \frac{\theta_1(t) - \theta_2(t)}{R}$$

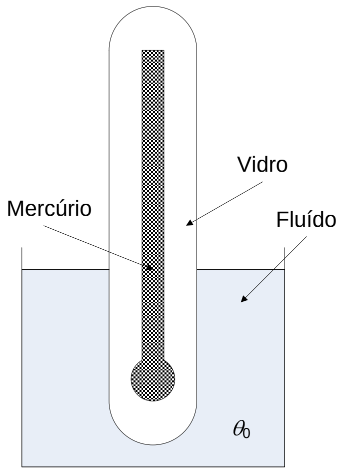
    θ_1, θ_2 são as temperaturas a que se encontram os materiais 1 e 2
    R é a resistência calorífica à passagem do calor
  - a variação de temperatura dos materiais leva ao aumento da quantidade de calor armazenada

    $$q = C\frac{d}{dt}\left[\theta_1(t) - \theta_2(t)\right]$$

    C é a capacidade térmica do material para onde se dirige o calor

Modelação de Sistemas

- Termómetro de mercúrio (I)
  - comportamento dinâmico de um termómetro também pode ser descrito por uma equação diferencial de primeira ordem
  - despreza-se a capacidade calorífica das paredes de vidro e considera-se que o mercúrio está a uma temperatura uniforme θ_m



Modelação de Sistemas

- Termómetro de mercúrio (II)
  - em $t = 0$ o termómetro é imerso no fluído à temperatura θ_0
  - fluxo de calor q (quantidade de calor por unidade de tempo que passa do fluído para o termómetro), vem

    $$q = \frac{\theta_0 - \theta_m(t)}{R}$$

    R é a resistência calorífica à passagem do calor
  - supõe-se que a quantidade de fluído é muito superior à quantidade de mercúrio e que, assim, θ_0 se mantém constante

Modelação de Sistemas

- Termómetro de mercúrio (III)
  - por outro lado, a variação da temperatura do mercúrio de $\theta_m(0)$ para $\theta_m(t)$ levou ao aumento da quantidade de calor armazenada

    $$C\left[\theta_m(t) - \theta_m(0)\right]$$

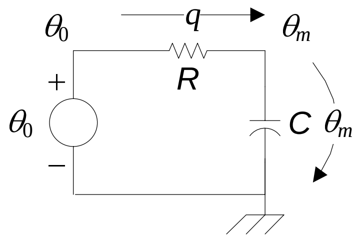
    C é a capacidade térmica do mercúrio
  - pelo princípio da conservação da quantidade de energia

    $$\frac{\theta_0 - \theta_m(t)}{R} = C\frac{d}{dt}\left[\theta_m(t) - \theta_m(0)\right] \Leftrightarrow$$

    $$\Leftrightarrow RC\frac{d\theta_m}{dt} + \theta_m = \theta_0$$

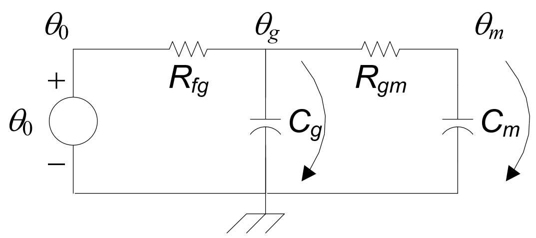
Modelação de Sistemas

- Termómetro de mercúrio (IV)
  - comparando esta equação com a do circuito RC verifica-se que RC é a constante de tempo do termómetro
  - analogia eléctrica deste sistema



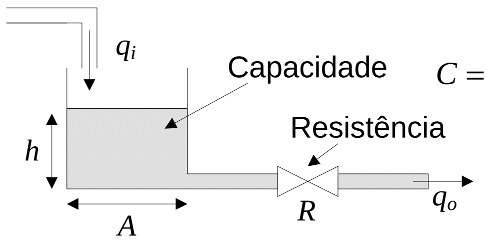
Modelação de Sistemas

- Termómetro de mercúrio (V)
  - descrição mais detalhada incluirá os efeitos da capacidade térmica das paredes de vidro



Modelação de Sistemas

- Sistemas de fluídos



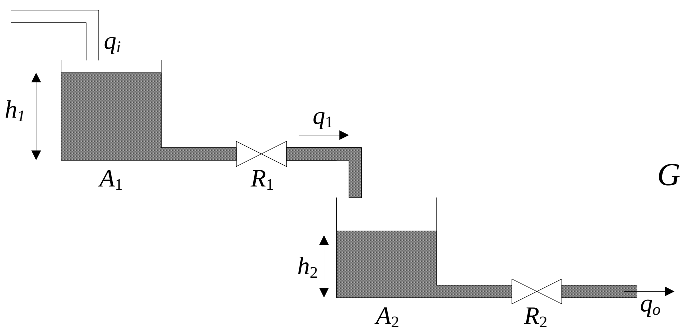
$$C = A\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

$$q_o = \frac{h}{R}$$

$$\begin{cases} q_i = q_o + A\dfrac{dh}{dt} \\ q_o = \dfrac{h}{R} \end{cases}$$

Modelação de Sistemas

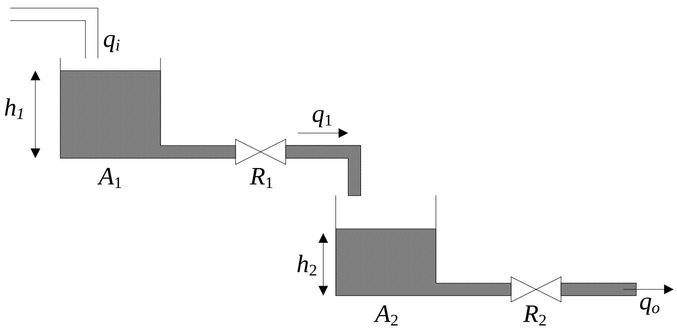
- Sistema de tanques independentes (I)



$$G(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)}$$

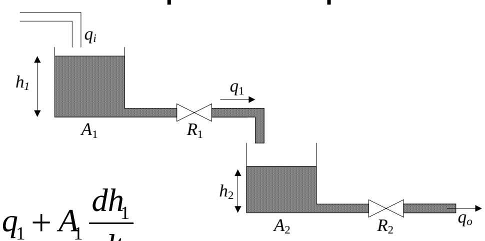
Modelação de Sistemas

- Sistema de tanques independentes (II)



Modelação de Sistemas

- Sistema de tanques independentes (III)



$$\begin{cases} q_i = q_1 + A_1 \dfrac{dh_1}{dt} \\ q_1 = \dfrac{h_1}{R_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = q_o + A_2 \dfrac{dh_2}{dt} \\ q_o = \dfrac{h_2}{R_2} \end{cases}$$

Modelação de Sistemas

- Sistema de tanques independentes (IV)

$$\begin{cases} q_i = q_1 + A_1 \dfrac{dh_1}{dt} \\ q_1 = \dfrac{h_1}{R_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = q_o + A_2 \dfrac{dh_2}{dt} \\ q_o = \dfrac{h_2}{R_2} \end{cases}$$

Modelação de Sistemas

- Sistema de tanques independentes (V)

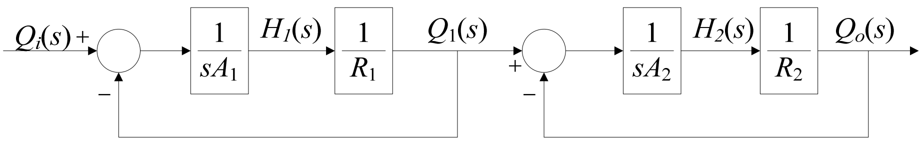
$$\begin{cases} q_i = q_1 + A_1 \dfrac{dh_1}{dt} \\ q_1 = \dfrac{h_1}{R_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_i(s) = Q_1(s) + sA_1H_1(s) \\ Q_1(s) = \dfrac{H_1(s)}{R_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = q_o + A_2 \dfrac{dh_2}{dt} \\ q_o = \dfrac{h_2}{R_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_1(s) = Q_o(s) + sA_2H_2(s) \\ Q_o(s) = \dfrac{H_2(s)}{R_2} \end{cases}$$

Modelação de Sistemas

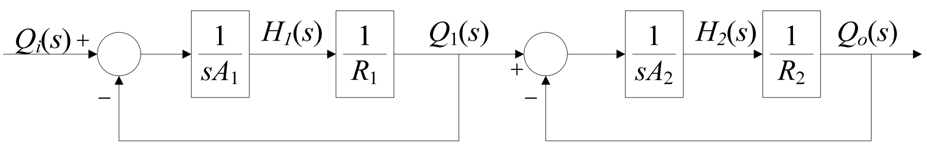
- Sistema de tanques independentes (VI)

$$\begin{cases} Q_i(s) = Q_1(s) + sA_1H_1(s) \\ Q_1(s) = \dfrac{H_1(s)}{R_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_1(s) = Q_o(s) + sA_2H_2(s) \\ Q_o(s) = \dfrac{H_2(s)}{R_2} \end{cases}$$



Modelação de Sistemas

- Sistema de tanques independentes (VII)



$$G(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{s^2 A_1 A_2 R_1 R_2 + s\left(A_1 R_1 + A_2 R_2\right) + 1}$$