TESIS:
Teoria dos Sistemas

Transformada de Laplace

Transformada de Laplace

1. Transformada de Laplace
2. Transformada inversa de Laplace
3. Propriedades da transformada de Laplace
4. Tabela de transformadas de Laplace
5. Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
6. Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

1. Transformada de Laplace
2. Transformada inversa de Laplace
3. Propriedades da transformada de Laplace
4. Tabela de transformadas de Laplace
5. Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
6. Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Transformada de Laplace
  - Definição: para uma função real de variável real $f(t)$ tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$ a transformada de Laplace de $f(t)$ é uma função de variável complexa definida por

$$L\left\{f\left(t\right)\right\} = F\left(s\right) = \int_{0^-}^{+\infty} f\left(t\right) e^{-st} dt$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Exemplo

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{at}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Existe uma correspondência biunívoca entre $f(t)$ e $F(s)$, isto é
  - se $f_1(t) \neq f_2(t) \;\Rightarrow\; F_1(s) \neq F_2(s)$
  - se $f_1(t) = f_2(t) \;\Rightarrow\; F_1(s) = F_2(s)$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

1. Transformada de Laplace
2. Transformada inversa de Laplace
3. Propriedades da transformada de Laplace
4. Tabela de transformadas de Laplace
5. Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
6. Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Transformada inversa de Laplace
  - O cálculo de $f(t)$ a partir de $F(s)$ designa-se por transformada inversa de Laplace e pode ser obtido através do integral

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s)e^{st}ds$$

para valores adequados de σ_1

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

1. Transformada de Laplace
2. Transformada inversa de Laplace
3. Propriedades da transformada de Laplace
4. Tabela de transformadas de Laplace
5. Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
6. Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Propriedades da transformada de Laplace (I)

$$L\left[af(t)\right] = aF(s)$$

$$L\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

$$L_{\pm}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f\left(0^{\pm}\right)$$

$$L_{\pm}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf\left(0^{\pm}\right) - \dot{f}\left(0^{\pm}\right)$$

$$L\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Propriedades da transformada de Laplace (II)

$$L\left[f\left(t-\alpha\right)u\left(t-\alpha\right)\right]=e^{-\alpha s}F\left(s\right),\ \ \alpha>0$$

$$L\left[tf\left(t\right)\right]=-\frac{dF\left(s\right)}{ds}$$

$$L\left[t^2 f\left(t\right)\right]=\frac{d^2}{ds^2}F\left(s\right)$$

$$L\left[e^{-\alpha t}f\left(t\right)\right]=F\left(s+\alpha\right)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Propriedades da transformada de Laplace (III)
  - teorema do valor inicial

$$f\left(0^+\right) = \lim_{t\to 0^+} f\left(t\right) = \lim_{s\to\infty} sF\left(s\right)$$

  - teorema do valor final

$$f\left(\infty\right) = \lim_{t\to\infty} f\left(t\right) = \lim_{s\to 0} sF\left(s\right)$$

  - teorema da convolução

$$w(t) * u(t) = \int_{0^-}^{t} w(t-t')u(t')\,dt' = L^{-1}\left[W\left(s\right)U\left(s\right)\right]$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

1. Transformada de Laplace
2. Transformada inversa de Laplace
3. Propriedades da transformada de Laplace
4. Tabela de transformadas de Laplace
5. Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
6. Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Tabela de transformadas de Laplace (I)

$f(t)$	$F(s)$
Impulso unitário $\delta(t)$	1
Degrau unitário $u(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa unitária t	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at} \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Tabela de transformadas de Laplace (II)

$f(t)$	$F(s)$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\phi)$	$\dfrac{s\sin(\phi)+\omega\cos(\phi)}{s^2+\omega^2}$
$\dfrac{1}{\omega}e^{-at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{1}{\left[s+(a+j\omega)\right]\left[s+(a-j\omega)\right]}$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

1. Transformada de Laplace
2. Transformada inversa de Laplace
3. Propriedades da transformada de Laplace
4. Tabela de transformadas de Laplace
5. Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
6. Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)}\right]=$$

$$=1-\frac{te^{-t}}{1!}-e^{-t}=1-e^{-t}(t+1)\quad \text{para}\quad t\geq 0$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

1. Transformada de Laplace
2. Transformada inversa de Laplace
3. Propriedades da transformada de Laplace
4. Tabela de transformadas de Laplace
5. Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
6. Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \ldots + b_0 u$$

aplicando a transformada de Laplace, vem

$$a_n\left[s^n Y(s) - s^{n-1} y\left(0^-\right) - s^{n-2} y'\left(0^-\right) - \ldots - s y^{(n-2)}\left(0^-\right) - y^{(n-1)}\left(0^-\right)\right] +$$
$$+ a_{n-1}\left[s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y\left(0^-\right) - s^{n-3} y'\left(0^-\right) - \ldots - s y^{(n-3)}\left(0^-\right) - y^{(n-2)}\left(0^-\right)\right] +$$
$$+ \ldots + a_0 Y(s) = b_m\left[s^m U(s) - s^{m-1} u\left(0^-\right) - s^{m-2} u'\left(0^-\right) - \ldots - u^{(m-1)}\left(0^-\right)\right] + \ldots + b_0 U(s)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Logo

resposta forçada

resposta livre

$$Y(s) = U(s)\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + sb_1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + sa_1 + a_0} +$$

$$+\frac{y(0^-)\left(s^{n-1}a_n + s^{n-2}a_{n-1} + \ldots + a_1\right) + y'(0^-)\left(s^{n-2}a_n + s^{n-3}a_{n-1} + \ldots + a_2\right) + \ldots}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} -$$

$$-\frac{u(0^-)\left(s^{m-1}b_m + s^{m-2}b_{m-1} + \ldots + b_1\right) - u'(0^-)\left(s^{m-2}b_m + s^{m-3}b_{m-1} + \ldots + b_2\right)}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Define-se Função de Transferência como

$$P(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+sb_1+b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+sa_1+a_0}$$

considerando as condições iniciais nulas

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Exemplo

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=u''(t)+2u'(t)+2u(t)$$

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+3sY(s)-3y(0^-)+2Y(s)=$$
$$=s^2U(s)-su(0^-)-u'(0^-)+2sU(s)-2u(0^-)+2U(s)$$

$$Y(s)=\frac{s^2+2s+2}{s^2+3s+2}U(s)+$$
$$+\frac{sy(0^-)+3y(0^-)+y'(0^-)-su(0^-)-2u(0^-)-u'(0^-)}{s^2+3s+2}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace

- Supondo condições iniciais nulas, obtém-se a função de transferência

$$P(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+2s+2}{s^2+3s+2}=\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}$$

- Se, por exemplo, $u(t)=\delta(t)$ vem

$$L[\delta(t)]=1$$

$$Y(s)=\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}\cdot 1=1+\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}$$

$$L^{-1}[Y(s)]=\delta(t)+e^{-t}-2e^{-2t}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt