TESIS:
Teoria dos Sistemas

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

1. Análise em malha aberta
2. Representação gráfica da resposta em frequência
   1. Diagramas polares
   2. Diagramas de Bode
3. Análise em malha fechada
   1. Estabilidade relativa
      1. Margem de ganho
      2. Margem de fase

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - considere-se um sistema linear estável com função de transferência $G(s)$, com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$
  - se $u(t) = \mathrm{sen}(\omega t)$, $t \geq 0$, vem

$$L\left[\mathrm{sen}\left(\omega t\right)\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y\left(s\right) = \left[\frac{a}{s - j\omega} + \frac{\bar{a}}{s + j\omega}\right] + \left[\frac{b_1}{s - p_1} + \ldots + \frac{b_n}{s - p_n}\right] \quad *$$

  - onde p_1, ..., p_n, são os pólos de $G(s)$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - supondo (sem perda de generalidade) que os pólos são simples, a resposta nos tempos vem

$$y\left(t\right) = ae^{j\omega t} + \bar{a}e^{-j\omega t} + b_1 e^{p_1 t} + \ldots + b_n e^{p_n t}$$

  - se o sistema é estável, a resposta em regime permanente é

$$y_{ss}\left(t\right) = ae^{j\omega t} + \bar{a}e^{-j\omega t}$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - para calcular a e $\overline{a}$ sabe-se que

$$* \quad Y(s)=\left[\frac{a}{s-j\omega}+\frac{\overline{a}}{s+j\omega}\right]+\left[\frac{b_1}{s-p_1}+\ldots+\frac{b_n}{s-p_n}\right]$$

$$(s+j\omega)Y(s)=\left[a\frac{(s+j\omega)}{s-j\omega}+\overline{a}\right]+\left[b_1\frac{(s+j\omega)}{s-p_1}+\ldots+b_n\frac{(s+j\omega)}{s-p_n}\right]$$

$$\lim_{s\to -j\omega}(s+j\omega)Y(s)=\overline{a}$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - por outro lado

$$Y(s)=G(s)U(s)=G(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

  - logo

$$\overline{a}=\lim_{s\to -j\omega}\left[G(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2}(s+j\omega)\right]=$$

$$=\lim_{s\to -j\omega}\left[G(s)\frac{\omega}{s-j\omega}\right]=-\frac{1}{2j}G(-j\omega)$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - identicamente $a = \frac{1}{2j} G(j\omega)$
  - exprimindo G na forma polar vem

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi}$$

$$G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\varphi}$$

$$y_{ss}(t) = a e^{j\omega t} + \bar{a} e^{-j\omega t}$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi}$$

$$G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\varphi}$$

$$y_{ss}(t) = a e^{j\omega t} + \bar{a} e^{-j\omega t} =$$

$$= \frac{1}{2j} G(j\omega) e^{j\omega t} - \frac{1}{2j} G(-j\omega) e^{-j\omega t} =$$

$$= \frac{1}{2j} |G(j\omega)| \left[e^{j\varphi} e^{j\omega t} - e^{-j\varphi} e^{-j\omega t} \right] =$$

$$= |G(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - em conclusão
    - para um sistema linear estável com função de transferência $G(s)$ e para um sinal de entrada $u(t) = \text{sen}(\omega t)$, $t \geq 0$, a saída converge para

$$y(t) = |G(j\omega)| \text{sen}[\omega t + \arg G(j\omega)]$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - exemplo
    - considere o sistema com função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

- e a entrada $u(t) = \text{sen}(2t)$

$$G(j2) = \frac{1}{j2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-j1,11}$$

$$y_{ss}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{sen}(2t - 1,11)$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - exemplo
  - alternativamente

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{2}{s^2+2^2} = \frac{2/5}{s+1} + \frac{2/5-(2/5)s}{s^2+2^2}$$

  - como

$$L\left[\operatorname{sen}(\omega t+\phi)\right] = \frac{s\operatorname{sen}(\phi)+\omega\cos(\phi)}{s^2+\omega^2}$$

  - vem

$$y(t) = 0,4e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}(2t-1,11)$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - em regime permanente, a razão entre as amplitudes das sinusóides de saída e de entrada é o ganho a essa frequência
  - por outro lado, a diferença de fase entre a saída e a entrada é a fase a essa frequência
  - estes valores podem obter-se graficamente

TESIS – Teoria dos Sistemas

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

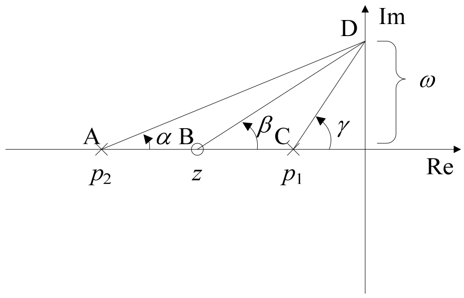
Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em malha aberta
  - por exemplo, para

$$G(s) = \frac{s+z}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{CD}} \cdot \overline{\mathrm{AD}}}$$

$$\arg[G(j\omega)] = \beta - \gamma - \alpha$$



Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Representação gráfica da resposta em frequência
  - como $G(j\omega)$ é uma função complexa de uma variável real, pode ser representada
    - no plano complexo, com ω como parâmetro
      - Diagrama Polar
    - separadamente para a amplitude e para a fase em função de ω
      - Diagramas de Bode, no caso de se adoptarem escalas logarítmicas

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagrama Polar
  - representação gráfica de $G(j\omega)$, $\omega \in [0, +\infty[$
  - por exemplo, se $G(j\omega) = \dfrac{p}{p + j\omega}$

$$G(j\omega) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + \omega^2}} \arg\left[-\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{p}\right)\right]$$

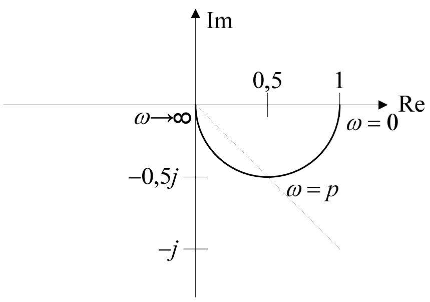
$$G(j\omega) = \frac{p(p - j\omega)}{p^2 + \omega^2} = \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} - j\frac{\omega p}{p^2 + \omega^2}$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagrama Polar

$$G(j\omega) = \frac{p(p - j\omega)}{p^2 + \omega^2} = \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} - j\frac{\omega p}{p^2 + \omega^2}$$



Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - dois gráficos separados para representar $G(j\omega)$
    - amplitude ($|G(j\omega)|$) *versus* frequência
    - fase ($\arg(G(j\omega))$) *versus* frequência
    - adopta-se uma escala logarítmica para ω
  - para a amplitude de $G(j\omega)$ usam-se decibeis (dB) que se calculam através de

    $$20.\log_{10}|G(j\omega)|$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - por vezes o diagrama de Bode das amplitudes é expresso em dB/oitava
  - ω_2 está uma oitava acima de ω_1 se $\omega_2 = 2\omega_1$, logo

    $$\pm s \text{ dB/decada} = \pm 0,3s \text{ dB/oitava}$$

    - pois $\log_{10}(2\omega_1) - \log_{10}(\omega_1) = \log_{10}2 = 0,3$
    - em particular ± 20 dB/déc $= \pm 6$ dB/oitava

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - considere-se

$$G(s)=\frac{K(s+z_1)\ldots(s+z_m)}{s^r(s+p_1)\ldots(s+p_n)}e^{-sT}$$

$$G(s)=K_B\frac{(1+s/z_1)\ldots(1+s/z_m)}{s^r(1+s/p_1)\ldots(1+s/p_n)}e^{-sT}$$

$$K_B=K\frac{z_1.z_2\ldots z_m}{p_1.p_2\ldots p_n}$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - quando G(s) tem um par de pólos complexos conjugados $p_1 = p$ e $p_2 = \overline{p}$ é conveniente colocar na forma

$$\frac{1}{(1+j\omega/p)(1+j\omega/\overline{p})}=\frac{1}{1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2}$$

  - onde

$$p,\overline{p}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - gráficos de Bode de uma função de transferência podem ser obtidos através da adição dos gráficos das parcelas
    - K_B
    - $(1+j\omega/z)^{\pm 1}$
    - $(j\omega)^{\pm r}$
    - $\dfrac{1}{1+2\zeta\left(j\omega/\omega_n\right)+\left(j\omega/\omega_n\right)^2}$
    - $e^{-j\omega T}$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - então, $\log|G(j\omega)|$ é a soma das parcelas
    - $\log|K_B|$
    - $\log|1+j\omega/z_i|$ $\quad i = 1, 2, ..., m$
    - $-\log|1+j\omega/p_i|$ $\quad i = 1, 2, ..., n$
    - $-\log|(j\omega)^r| = -r.\log|(j\omega)| = -r.\log(\omega)$
    - $\log|e^{-j\omega T}| = 1$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - por outro lado, para $\arg[G(j\omega)]$ vem

$$\arg\left[G\left(j\omega\right)\right]=\sum_{i=1}^{m}\arg\left(1+j\omega/z_i\right)-r\frac{\pi}{2}-\sum_{i=1}^{n}\arg\left(1+j\omega/p_i\right)-\omega T$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - K_B
    - diagrama de Bode das amplitudes – recta horizontal com valor $20.\log_{10}|K_B|$
    - diagrama de Bode das fases – recta horizontal com valor
      - 0° se $K_B > 0$
      - -180° se $K_B < 0$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

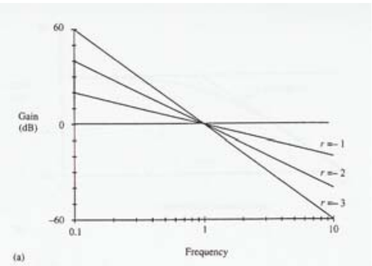
- Diagramas de Bode
  - $(j\omega)^{\pm r}$
    - diagrama de Bode das amplitudes – recta com declive $\pm\, 20.r$ dB/déc, pois

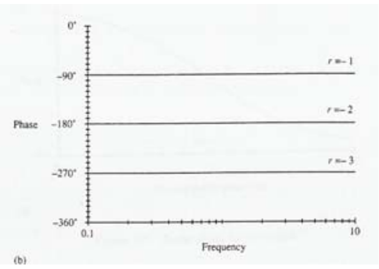
$$20\log_{10}\left|j10\omega\right|^{\pm r}\ \text{dB} = \pm r\left(20\log_{10}\omega\ \text{dB} + 20\ \text{dB}\right)$$

    - diagrama de Bode das fases – recta horizontal com valor $\pm\, r.90^{\circ}$

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $(j\omega)^{\pm r}$
    - diagramas de Bode de $(j\omega)^{-r}$, para $r = 1, 2, 3$





Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $(1+j\omega/z)^{\pm 1}$
    - vamos agora analisar os gráficos de $\dfrac{1}{(1+j\omega/p)}$
    - temos

$$\frac{1}{(1+j\omega/p)} \approx 1 \quad , \quad \omega \ll p$$

$$\frac{1}{(1+j\omega/p)} \approx \frac{p}{j\omega} \quad , \quad \omega \gg p$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $(1+j\omega/z)^{\pm 1}$
    - conclui-se que o gráfico de Bode das amplitudes pode ser aproximado por duas rectas
      - recta 0 dB, para $\omega \ll p$
      - recta -20 dB/déc, para $\omega \gg p$
    - as duas rectas intersectam-se em 0 dB, para $\omega = p$
    - estas rectas designam-se por assimptotas, respectivamente às baixas e às altas frequências

TESIS – Teoria dos Sistemas

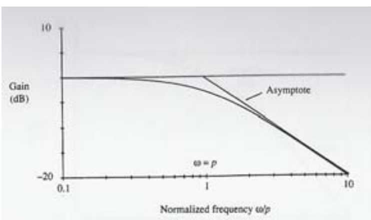
Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

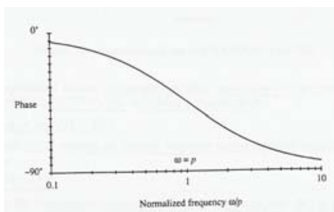
Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $(1+j\omega/z)^{\pm 1}$
    - conclui-se que o gráfico de Bode das fases pode ser aproximado por
      - recta 0°, para $\omega \ll p$
      - recta -90° , para $\omega \gg p$
    - para $\omega = p$, $(1+j\omega/p)^{-1} = (1+j1)^{-1} = 1/\sqrt{2}\ \arg(-45^\circ)$
    - logo $|G| = -3$ dB, $\arg(G) = -45^\circ$

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

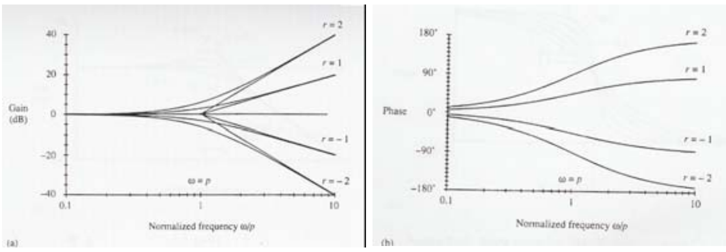
- Diagramas de Bode
  - $(1+j\omega/z)^{\pm 1}$
    - diagramas de Bode de $(1+j\omega/p)^{-1}$





Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $(1+j\omega/z)^{\pm 1}$
    - diagramas de Bode de $(1+j\omega/z)^r$, para $r = \pm 1, \pm 2$



Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $\dfrac{1}{1+2\zeta\left(j\omega/\omega_n\right)+\left(j\omega/\omega_n\right)^2}$
    - considere-se agora um sistema de segunda ordem com um par de pólos complexos conjugados, $0 < \zeta \leq 1$
      - $G(j\omega) \approx 1, \quad \omega \to 0$ (*i.e.*, 0 dB, 0º)
      - $G(j\omega) \approx -\left(\dfrac{\omega_n}{\omega}\right)^2, \quad \omega \gg \omega_n$ (*i.e.*, –40 dB/déc, –180º)
    - esta recta intersecta os 0 dB para $\omega = \omega_n$

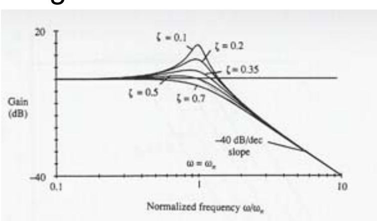
TESIS – Teoria dos Sistemas
Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

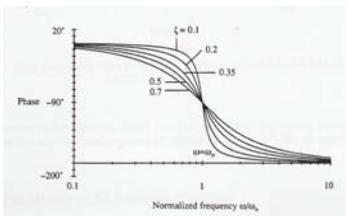
Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Diagramas de Bode
  - $\dfrac{1}{1+2\zeta\left(j\omega/\omega_n\right)+\left(j\omega/\omega_n\right)^2}$
    - para $\zeta \geq 0{,}707$ o gráfico de Bode das amplitudes decresce monotonamente
    - para $0 < \zeta < 0{,}707$ ocorre um pico (ressonância)
      - $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$
      - $M_r = \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ (pico de ressonância)
    - obviamente, $M_r = 1$ para $\zeta = \sqrt{2}/2 = 0{,}707$ e $M_r \to \infty$ quando $\zeta \to 0$

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

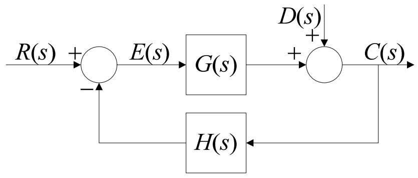
- Diagramas de Bode
  - $\dfrac{1}{1+2\zeta\left(j\omega/\omega_n\right)+\left(j\omega/\omega_n\right)^2}$
    - diagramas de Bode





Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - nesta secção estuda-se a estabilidade do sistema seguinte a partir da resposta em frequência de $G(s)H(s)$



  - interessa saber se o sistema é ou não estável e também se está longe (ou perto) da instabilidade

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa
    - distância do traçado de $G(j\omega)H(j\omega)$ relativamente ao ponto $-1 + j0$ é a amplitude de $|1 + G(j\omega)H(j\omega)|$
    - quanto mais perto estiver $G(j\omega)H(j\omega)$ do ponto $-1 + j0$ mais oscilatória será a resposta do sistema em malha fechada
    - esta "distância" é usualmente medida através da Margem de Ganho e da Margem de Fase

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa
    - Margem de Ganho (MG) indica quanto se pode aumentar o ganho até conduzir o sistema ao limite da estabilidade
    - por outras palavras, o ganho de $G(j\omega)H(j\omega)$ deve ser unitário quando a fase é de -180°

$$\arg\left[GH\left(j\omega_{\pi}\right)\right] = -\pi \Rightarrow MG = \frac{1}{\left|GH\left(j\omega_{\pi}\right)\right|}$$

$$\text{ou} \qquad MG_{\text{dB}} = 20\log_{10}\frac{1}{\left|GH\left(j\omega_{\pi}\right)\right|}$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa
    - Margem de Fase (MF) indica quanto se pode aumentar a fase até conduzir o sistema ao limite da estabilidade
    - fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ deve ser -180° quando o módulo é unitário

$$\left|GH\left(j\omega_{1}\right)\right| = 1 \Rightarrow MF = 180^{\circ} + \arg\left[GH\left(j\omega_{1}\right)\right]$$

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

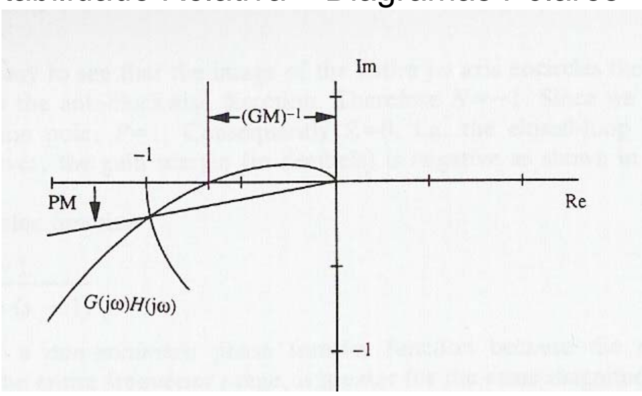
Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa
    - Margem de Ganho (MG) e Margem de Fase (MF) podem ser calculadas quer pelo diagrama Polar, quer pelos gráficos de Bode

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

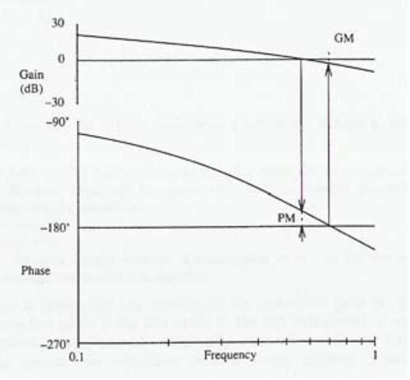
- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa – Diagramas Polares



Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa – Gráficos de Bode



Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

- Análise em Malha Fechada
  - Estabilidade Relativa
    - um sistema estável deve ter uma $MG_{\text{dB}} > 0$ (em decibeis) e uma $MF > 0$
    - quando a amplitude e a fase de $GH(j\omega)$ variam monotonamente com ω, as noções de MG e de MF são bem definidas e podem ser usadas como medidas de estabilidade
    - contudo, há casos que apresentam ambiguidade

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt