



Departamento de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto

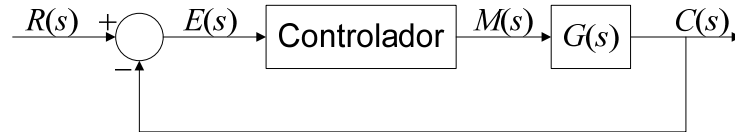
TESIS
Teoria dos Sistemas

Controladores PID

—

Resolução dos Exercícios Propostos

1. Considere o seguinte sistema de controlo:



No qual:

- O processo controlado é $G(s) = \frac{40}{10s^2 + 80s + 800}$

- O controlador é do tipo PID: $m(t) = 20 \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$

a) Admitindo que não existe acção integral ($1/T_i = 0$), calcular T_d de modo que o amortecimento do sistema realimentado seja unitário.

Podemos simplificar $G(s)$, ficando:

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 8s + 80},$$

Por sua vez, a Função de Transferência do controlador PID é:

$$M(s) = 20 \left[1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + s \cdot T_d \right] \cdot E(s)$$

e admitindo que não existe acção integral ($1/T_i = 0$), fica:

$$M(s) = 20[1 + s \cdot T_d] \cdot E(s)$$

A partir das expressões para a Função de Transferência do controlador PD e de $G(s)$, podemos determinar a Função de Transferência em Malha Fechada deste sistema ($C(s)/R(s)$):

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{80 \cdot s \cdot T_d + 80}{s^2 + (80 \cdot T_d + 8) \cdot s + 160}$$

Uma vez que se pretende que o amortecimento do sistema realimentado seja unitário, devemos fazer:

$$\begin{cases} 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = 80 \cdot T_d + 8 \\ \omega_n^2 = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_d = 0,216 \text{ s} \\ \omega_n = 12,65 \text{ rad / s} \end{cases}$$

b) Para o valor de T_d calculado, determinar o valor máximo de $1/T_i$ de modo a manter o sistema estável.

Considerando agora que o controlador dispõe de acção integrativa, e a partir das expressões para a Função de Transferência do controlador PID e de $G(s)$, podemos determinar a Função de Transferência em Malha Fechada do sistema ($C(s)/R(s)$), fazendo $T_d = 0,216 \text{ s}$ e $K_i = 1/T_i$:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{17,3 \cdot s^2 + 80 \cdot s + 80 \cdot K_i}{s^3 + 25,3 \cdot s^2 + 160 \cdot s + 80 \cdot K_i}$$

Aplicando o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz ao polinómio do denominador da Função de Transferência apresentada podemos determinar as condições em que o sistema anterior é estável:

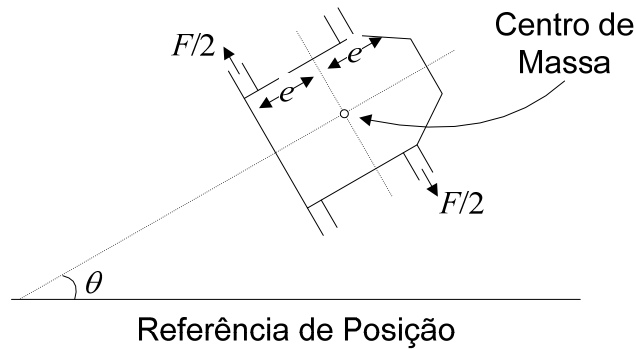
$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 160 \\ 2 & 25,3 & 80 \cdot K_i \\ 1 & 160 - \frac{80 \cdot K_i}{25,3} & \\ 0 & 80 \cdot K_i & \end{array}$$

Para o sistema ter todas as raízes com parte real negativa não pode haver trocas de sinal nos coeficientes dos termos da primeira coluna, ou seja, têm que ser todos positivos. Logo, temos que ter:

$$\begin{cases} 160 - \frac{80 \cdot K_i}{25,3} > 0 \\ 80 \cdot K_i > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_i < 50,6 \\ K_i > 0 \end{cases}$$

Do exposto conclui-se que para o sistema permanecer estável devemos ter: $0 < K_i < 50,6$, ou seja $T_i > 0,01976 \text{ s}$.

2. A figura seguinte é o esquema de um sistema de controlo de posição de um satélite:



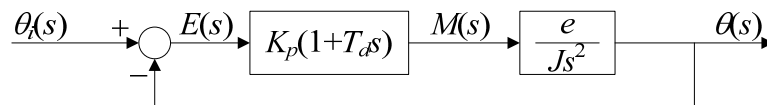
Sendo:

$2e$ - comprimento do satélite;

J - momento de inércia;

$F/2$ - força de reacção produzida por cada foguete

Supondo que o controlador é de tipo PD, o diagrama de blocos do sistema fica:



Determine o valor da constante de tempo T_d , de modo que $\zeta = 0,7$.

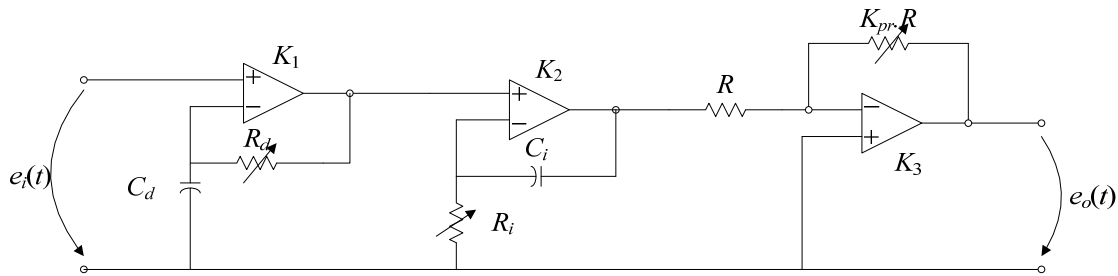
A Função de Transferência em Malha Fechada do sistema anterior é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_p \cdot T_d \cdot e}{J} \cdot s + \frac{K_p \cdot e}{J}}{s^2 + \frac{K_p \cdot T_d \cdot e}{J} \cdot s + \frac{K_p \cdot e}{J}}$$

Uma vez que se pretende que o amortecimento do sistema realimentado seja $\zeta = 0,7$, devemos fazer:

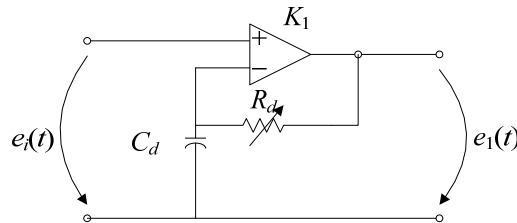
$$\begin{cases} 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = \frac{K_p \cdot T_d \cdot e}{J} \\ \omega_n^2 = \frac{K_p \cdot e}{J} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_d = 1,4 \cdot \sqrt{\frac{J}{K_p \cdot e}} \text{ s} \\ \omega_n = \sqrt{\frac{K_p \cdot e}{J}} \text{ rad/s} \end{cases}$$

3. Considere o controlador apresentado na figura seguinte:



a) Que tipo de acção de controlo produz o controlador indicado?

Acção de controlo do 1º Andar do controlador representado na figura anterior:

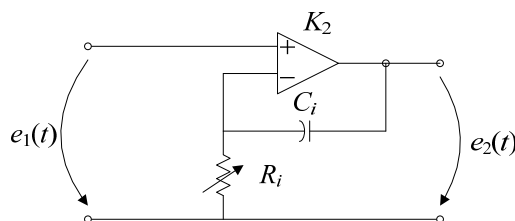


A Função de Transferência deste andar do controlador é dada por:

$$\frac{E_1(s)}{E_i(s)} = s \cdot C_d \cdot R_d + 1$$

o que implica uma acção de controlo derivativa.

Acção de controlo do 2º Andar:

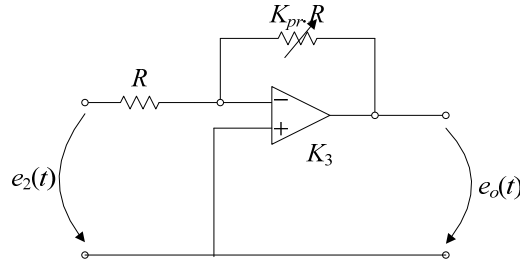


A Função de Transferência deste andar do controlador é dada por:

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = 1 + \frac{1}{s \cdot C_i \cdot R_i}$$

o que implica uma acção de controlo integral.

Acção de controlo do 3º Andar:



Por último, a Função de Transferência deste andar do controlador é dada por:

$$\frac{E_o(s)}{E_2(s)} = -K_p$$

o que implica uma acção de controlo proporcional.

A Função de Transferência global do circuito é dada por:

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E_1(s)}{E_i(s)} \cdot \frac{E_2(s)}{E_1(s)} \cdot \frac{E_o(s)}{E_2(s)} = -\frac{K_p}{s \cdot C_i \cdot R_i} - K_p \cdot s \cdot C_d \cdot R_d - \left(K_p + K_p \cdot \frac{C_d \cdot R_d}{C_i \cdot R_i} \right)$$

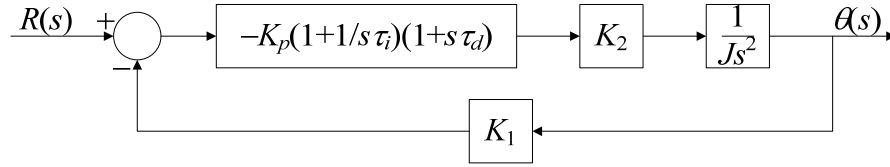
donde se conclui que a acção de controlo deste circuito é do tipo PID.

b) Em que condições poderia este controlador estabilizar o controlo de posição de uma massa de inércia ($T(s) = Js^2 \theta(s)$)?

A Função de Transferência da Inércia será:

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{J \cdot s^2}$$

O diagrama de blocos do sistema equivalente (considerando a existência de um conversor/amplificador entre o controlador e a inércia a controlar com ganho K_1 e de um transdutor na malha de realimentação com ganho K_2) é:



A Função de Transferência em Malha Fechada deste sistema é dada por (fazendo $K = K_1 \cdot K_2 \cdot K_p / J$):

$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{K/K_2 \cdot (s^2 \cdot \tau_i \cdot \tau_d + s \cdot (\tau_i + \tau_d) + 1)}{s^3 \cdot \tau_i + s^2 \cdot \tau_i \cdot \tau_d \cdot K + s \cdot (\tau_i + \tau_d) \cdot K + K}$$

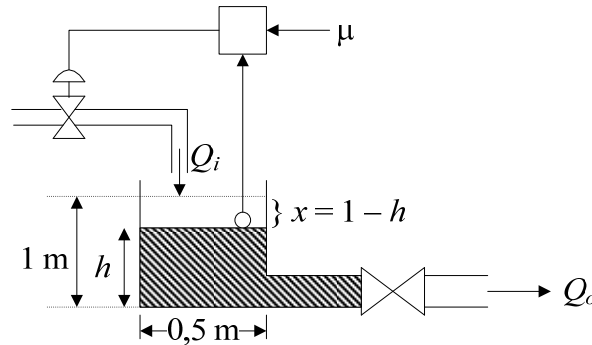
Para determinar as condições em que este sistema é estável, podemos aplicar o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz ao polinómio do denominador da F.T.M.F. obtida:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & & \tau_i & (\tau_i + \tau_d) \cdot K \\ 2 & & \tau_i \cdot \tau_d \cdot K & K \\ 1 & & \frac{K \cdot \tau_d \cdot \tau_i + K \cdot \tau_d^2 - 1}{\tau_d} & \\ 0 & & K & \end{array}$$

Para o sistema ser estável não pode haver trocas de sinal nos coeficientes dos termos da primeira coluna, ou seja, têm que ser todos positivos. Logo, temos que ter:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{K \cdot \tau_d \cdot \tau_i + K \cdot \tau_d^2 - 1}{\tau_d} > 0 \\ K > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} K > \frac{1}{\tau_d \cdot (\tau_d + \tau_i)} \\ -\frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K_p}{J} > 0 \end{array} \right.$$

4. Considere o seguinte sistema de controlo de nível de um tanque cilíndrico:



O caudal da entrada é comandado por um controlador através da relação:

$$Q_i(t) = 0,125 \left[x(t) + \int_0^t x(\tau) d\tau \right], \quad t \geq 0$$

sendo $x(t)$ o desnível em metros relativamente ao valor desejado de 1 m.

Considerar que a válvula de saída foi bruscamente aberta, em $t = 0$, estando o sistema em repouso ($h = 1$ m, $q_o = 0$ m³/s), originando um caudal de saída $q_o(t) = 0,01h(t)$ m³/s. Considere ainda que $q_i(t) - q_o(t) = A \cdot (dh(t)/dt)$.

Nestas condições determinar:

a) A expressão de $x(t)$ em função do tempo.

As equações dinâmicas que regem o comportamento do sistema descrito na figura anterior são as seguintes:

$$\begin{cases} q_i(t) = 0,125 \cdot \left[x(t) + \int_0^t x(\tau) d\tau \right] \\ q_o(t) = 0,01 \cdot h(t) \\ q_i(t) - q_o(t) = A \cdot \frac{dh(t)}{dt} \end{cases}$$

Passando as equações anteriores para o domínio de Laplace e fazendo $h(t) = 1 - x(t)$ e $A = 0,196$ m², vem:

$$\begin{cases} Q_i(s) = 0,125 \cdot \left[X(s) + \frac{X(s)}{s} \right] \\ Q_o(s) = \frac{0,01}{s} - 0,01 \cdot X(s) \\ Q_i(s) - Q_o(s) = -s \cdot 0,196 \cdot X(s) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações anterior em ordem a $X(s)$, obtém-se:

$$X(s) = \frac{0,051}{s^2 + 0,688 \cdot s + 0,637} = 0,08 \cdot \frac{0,637}{s^2 + 0,688 \cdot s + 0,637}$$

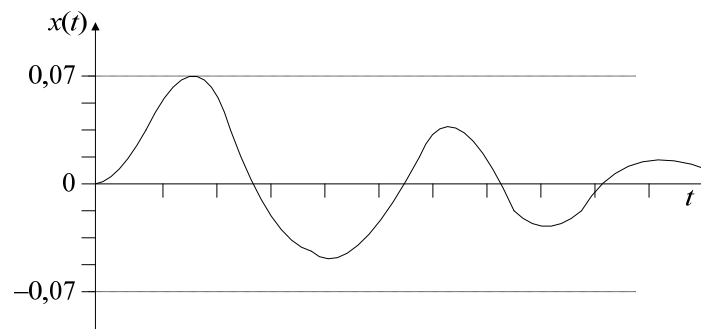
sendo esta a resposta de um sistema de 2ª ordem com:

$$\begin{cases} \zeta = 0,431 \\ \omega_n = 0,798 \text{ rad} / s \end{cases}$$

A expressão $x(t)$ é obtida aplicando a Transformada Inversa de Laplace a $X(s)$, ficando:

$$x(t) = 0,07 \cdot e^{-0,344t} \cdot \text{sen}(0,72 \cdot t)$$

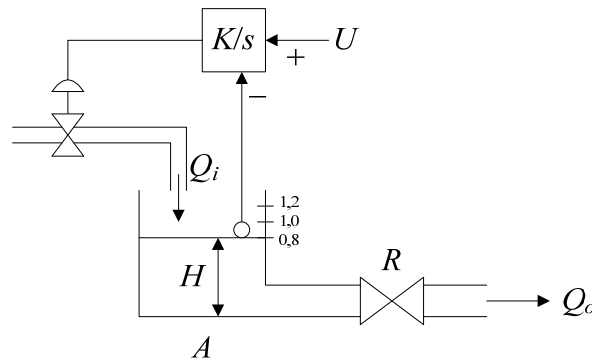
Graficamente, a resposta $x(t)$ vai ser da forma:



b) A altura do líquido no tanque, em regime estacionário. Justifique.

Em regime estacionário $x(t) \rightarrow 0$ m, logo $h(t) \rightarrow 1$ m

5. O sistema apresentado na figura seguinte viu a sua referência ser ajustada para o valor 1 m.



Considere que a acção do controlador (acção integral) é: $Q_i(s) = \frac{K}{s} [U(s) - H(s)]$ sendo

a Função de Transferência do tanque: $\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{s.A + 1/R}$.

Sendo:

$$A = 1 \text{ m}^2$$

$$K = 0,1$$

$$R = 9,88 \text{ s/m}^{-2}$$

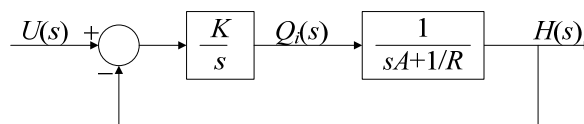
- a) Qual a frequência natural e qual o coeficiente de amortecimento do sistema?

As equações dinâmicas que regem o comportamento do sistema descrito são as seguintes:

$$Q_i(s) = \frac{k}{s} [U(s) - H(s)]$$

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{s.A + 1/R}$$

e o diagrama de blocos equivalente deste sistema é:



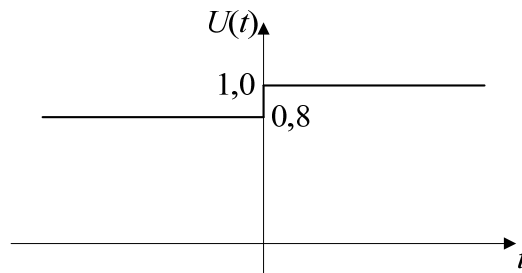
Sendo a Função de Transferência em Malha Fechada dada por:

$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K}{A}}{s^2 + \frac{1}{A \cdot R} \cdot s + \frac{K}{A}} = \frac{0,1}{s^2 + 0,1 \cdot s + 0,1}$$

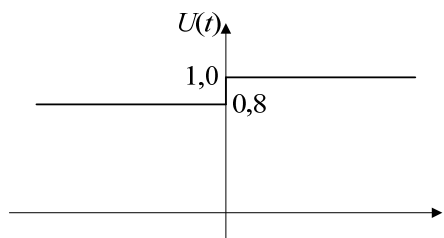
vem:

$$\begin{cases} \zeta = 0,16 \\ \omega_n = 0,316 \text{ rad/s} \end{cases}$$

b) Qual a sua resposta temporal ao seguinte sinal de entrada:



Supondo que se aplica à entrada do sistema o seguinte sinal:



e uma vez que o sistema que estamos a estudar é um sistema linear e invariante no tempo, podemos considerar a resposta a este sinal de entrada como sendo a soma da resposta a um sinal constante de amplitude 0,8 com a resposta a um degrau de Heaviside de amplitude 0,2:

$$U(t) = 0,8 + u(t)$$

sendo:

$$u(t) = 0,2, \quad t \geq 0 \Rightarrow U(s) = \frac{0,2}{s}$$

A entrada constante de valor 0,8 será responsável pelo regime estático inicial e a entrada em degrau de amplitude 0,2 será responsável pelo regime dinâmico que se vai sobrepor ao regime estático inicial.

Uma vez que a Função de Transferência deste sistema é:

$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K}{A}}{s^2 + \frac{1}{A \cdot R} \cdot s + \frac{K}{A}} = \frac{0,1}{s^2 + 0,1 \cdot s + 0,1}$$

a resposta será:

$$H(s) = \frac{0,1}{s^2 + 0,1 \cdot s + 0,1} \cdot U(s) = \frac{0,1}{s^2 + 0,1 \cdot s + 0,1} \cdot \frac{0,2}{s}$$

A expressão $h(t)$ é obtida aplicando a Transformada Inversa de Laplace a $H(s)$, ficando:

$$h(t) = 0,2 \cdot [1 - 1,01 \cdot e^{-0,05t} \cdot \text{sen}(0,312 \cdot t + 1,41)]$$

Os parâmetros que caracterizam a resposta temporal deste sistema à entrada $u(t)$, são os seguintes:

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} = 0,312 \text{ rad/s}$$

$$\tau = \frac{1}{\zeta \cdot \omega_n} = 20 \text{ s}$$

$$t_s = 4 \cdot \tau = 80 \text{ s}$$

$$t_r|_{0 \rightarrow 100\%} = \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}} = 5,55 \text{ s}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}} = 10 \text{ s}$$

$$h(t_p) = 0,2 \cdot \left[1 + e^{-\frac{\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \right] = 0,32 \text{ m}$$

da expressão de $h(t_p)$ conclui-se que o tanque transborda quando se atinge o pico da resposta ao degrau de entrada de amplitude 0,2.

- c) Reduzir o ganho para metade e voltar a calcular ζ , ω_n , t_r , t_s .

Reduzindo o ganho para metade, a Função de Transferência do sistema passa a ser:

$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{0,05}{s^2 + 0,1 \cdot s + 0,1}$$

pelo que passamos a ter:

$$\omega_n = 0,223 \text{ rad/s}$$

e

$$\zeta = 0,227$$

donde os parâmetros que caracterizam a resposta temporal deste sistema à entrada $u(t)$, passam a ser os seguintes:

$$t_r|_{0 \rightarrow 100\%} = \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}} = 8,33 \text{ s}$$

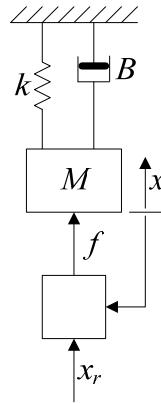
$$t_s = 4 \cdot \tau = 79 \text{ s}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}} = 14,5 \text{ s}$$

$$h(t_p) = 0,2 \cdot \left[1 + e^{-\frac{\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \right] = 0,296 \text{ m}$$

da expressão de $h(t_p)$ conclui-se que nesta situação o tanque já não transborda quando se atinge o pico da resposta ao degrau de entrada de amplitude 0,2.

6. O controlador (proporcional) do sistema de controlo de posição da figura apresentada abaixo fornece uma força $f = A(x_r - x)$.



Sendo:

$$M = 1 \text{ Kg}$$

$$A = 5$$

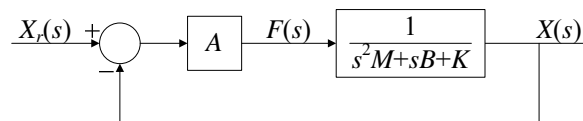
$$k = 2 \text{ Nm}^{-1}$$

- a) Desenhar o Lugar Geométrico de Raízes do sistema com B como parâmetro.

A equação dinâmica que rege o sub-sistema massa+mola+atrito é a seguinte:

$$f(t) - Kx(t) - B \frac{dx(t)}{dt} = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 M + sB + K}$$

Logo, o diagrama de blocos deste sistema é o seguinte:



sendo a Função de Transferência em Malha Fechada dada pela expressão:

$$\frac{X(s)}{X_r(s)} = \frac{A}{s^2 M + sB + K + A} = \frac{5}{s^2 + sB + 7}$$

1. Obter a equação característica do sistema na forma $GH(s) = -1$ com o parâmetro k em evidência:

Uma vez que o objectivo é esboçar o L.G.R. com B como parâmetro, temos que obter uma expressão do tipo:

$$BG(s)H(s) = -1$$

Rearranjando a F.T.M.F., obtém-se:

$$B \cdot \frac{s}{s^2 + 7} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: $z_1 = 0$

Pólos: $p_1 = -j.2,646$

$p_2 = +j.2,646$

Nº de zeros: $n = 1$

Nº de pólos: $d = 2$

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. $= d = 2$.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assíntotas é $d - n = 1$

Uma vez que só existe uma assíntota esta é coincidente com o eixo real.

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\begin{aligned} \frac{dB}{ds} = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d}{ds} \left[\frac{-\prod_{i=1}^d (s - p_i)}{\prod_{i=1}^n (s - z_i)} \right] = 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{ds} \left[-\frac{(s^2 + 7)}{s} \right] = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -s^2 + 7 = 0 &\Leftrightarrow s = \pm\sqrt{7} = \pm 2,646 \end{aligned}$$

Conclui-se que $s = 2,646$ é um ponto de entrada do L.G.R. no eixo real.

6. Os ângulos de partida do L.G.R. dos pólos complexos são dados por:

$$\begin{aligned}\phi &= 180^\circ - \left(\sum_{i=1}^{d-1} \arg(s - p_i) \right) + \left(\sum_{i=1}^n \arg(s - z_i) \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \phi &= 180^\circ - \left[\arg(s + j\sqrt{7}) - \arg(s) \right] \Big|_{s=j\sqrt{7}} \Leftrightarrow \phi = 180^\circ - \arg(2 \cdot j\sqrt{7}) + \arg(j\sqrt{7}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \phi &= 180^\circ - 90^\circ + 90^\circ \Leftrightarrow \phi = 180^\circ\end{aligned}$$

7. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

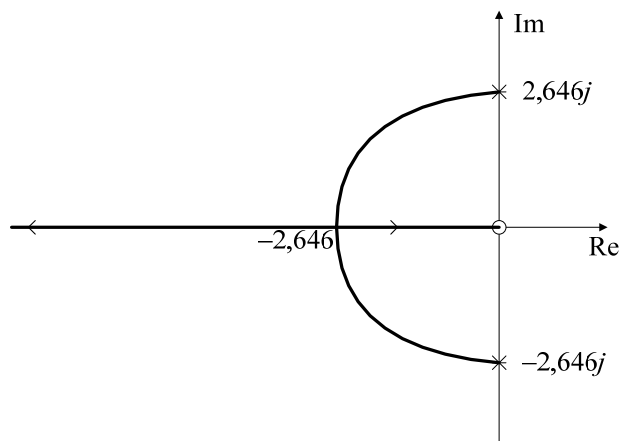
$$1 + GH(s) \Big|_{s=j\omega} = 0$$

resultando ω e k .

$$\begin{aligned}1 + B \cdot \frac{s}{s^2 + 7} \Big|_{s=j\omega} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow s^2 + B \cdot s + 7 \Big|_{s=j\omega} &= 0 \Leftrightarrow -\omega^2 + B \cdot j\omega + 7 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \omega = \pm\sqrt{7} \end{cases}\end{aligned}$$

Conclui-se que o L.G.R. deste sistema só intersecta o eixo imaginário nos pólos e zero da Função de Transferência em Malha Aberta.

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



b) Determinar B de modo que o sistema não oscile.

Para a saída deste sistema não apresentar oscilação, os pólos da Função de Transferência em Malha Fechada devem ser reais, o que sucede quando o L.G.R. se encontra sobre o eixo real. Fazendo:

$$s = -\sqrt{7} = -2,646$$

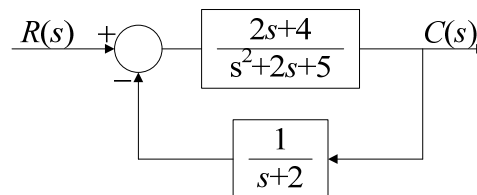
conclui-se que:

$$B = - \left. \frac{(s^2 + 7)}{s} \right|_{s=-\sqrt{7}} = 2 \cdot \sqrt{7}$$

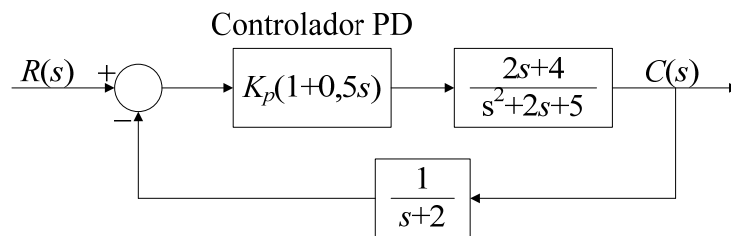
Logo, o sistema não apresenta oscilação à sua saída para:

$$B \geq 2\sqrt{7}$$

7. Considere o seguinte sistema em malha fechada.



a) Redesenhe o sistema incluindo um controlador PD, com a expressão $G_c = k_p(1+0,5s)$.



b) Recorrendo ao lugar de Raízes (directo) analise a estabilidade do sistema com o controlador.

1. Obter a equação característica do sistema na forma $GH(s) = -1$ com o parâmetro k em evidência:

Uma vez que o objectivo é esboçar o L.G.R. com K_p como parâmetro, temos que obter uma expressão do tipo:

$$K_p G(s)H(s) = -1$$

Rearranjando a F.T.M.F., obtém-se:

$$K_p \frac{(s+2)}{s^2+2s+5} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: $z_1 = -2$

Pólos: $p_{1,2} = -1 \pm j.2$

Nº de zeros: $n = 1$

Nº de pólos: $d = 2$

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = $d = 2$.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assíptotas é $d - n = 1$

Uma vez que só existe uma assíptota esta é coincidente com o eixo real.

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\begin{aligned} \frac{dK_p}{ds} = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d}{ds} \left[\frac{-\prod_{i=1}^d (s - p_i)}{\prod_{i=1}^n (s - z_i)} \right] = 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{ds} \left[-\frac{(s^2 + 2s + 5)}{s + 2} \right] = 0 \Leftrightarrow \\ s = -4,24 \wedge s = 0,24 \end{aligned}$$

Conclui-se que $s = -4,24$ é um ponto de entrada do L.G.R. no eixo real.

6. Os ângulos de partida do L.G.R. dos pólos complexos são dados por:

$$\phi = 180^\circ - \left(\sum_{i=1}^{d-1} \arg(s - p_i) \right) + \left(\sum_{i=1}^n \arg(s - z_i) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi = 180^\circ - [90 - \tan(2)] \Leftrightarrow \phi \approx 153^\circ$$

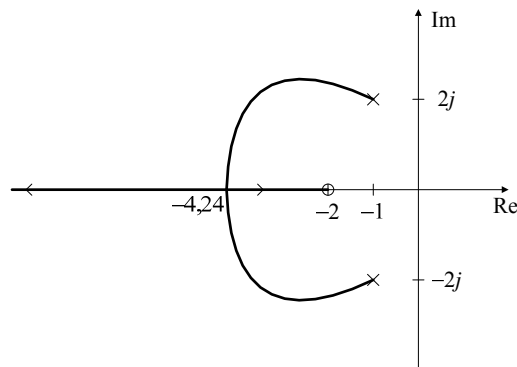
7. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s) \Big|_{s=j\omega} = 0$$

resultando ω e k .

Conclui-se que o L.G.R. deste sistema não intersecta o eixo imaginário.

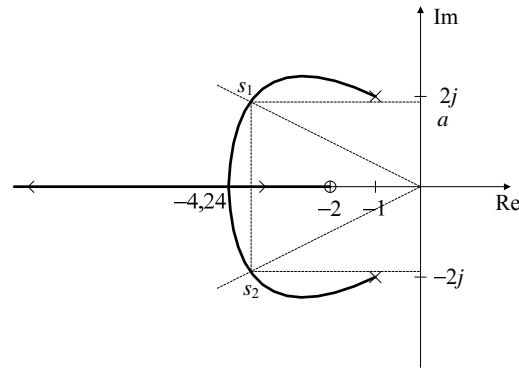
A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



A partir da representação do Lugar Geométrico de raízes, e uma vez que este nunca passa para o semi-plano direito, conclui-se que o sistema é estável para qualquer valor $K_p > 0$.

c) Que valor deveria ter a constante proporcional para que o sistema apresentasse um coeficiente de amortecimento de 0,866.

$$\zeta = 0,866 \Rightarrow \alpha = \arccos(\zeta) = 30^\circ \text{ (ver gráfico a tracejado)}$$



Para o sistema ter o valor de ζ pretendido, deve ter os pólos s_1 e s_2 . Atribuindo à parte imaginária de s_1 o valor a , fica:

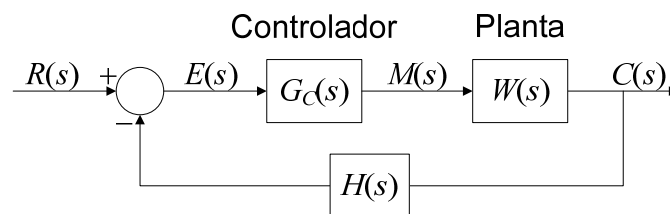
$$s_1 = -a/\tan(30^\circ) + ja = -1,73a + ja$$

Substituindo s_1 na equação característica, fica:

$$K_p \frac{(-1,73a + ja + 2)}{(-1,73a + ja)^2 + 2(-1,73a + ja) + 5} = -1$$

Resolvendo esta equação, vem $K_p = 5,46$.

8. Considere o seguinte sistema de controlo de temperatura de um forno cuja planta é do género $W(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ e o controlador é do tipo $m(t) = 2 \cdot K \cdot e(t) + K \cdot \frac{de(t)}{dt}$.



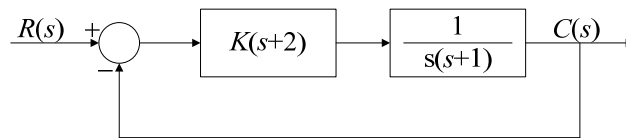
- a) Que tipo de controlador está implementado no controlo do sistema?

Controlador PD.

b) Esboce o lugar geométrico das raízes deste sistema, em função da variação de K e considerando que tem realimentação unitária. Defina as zonas de comportamentos típicos, em função de K .

$$M(s) = 2KE(s) + sKE(s) \Leftrightarrow \frac{M(s)}{E(s)} = K(s+2)$$

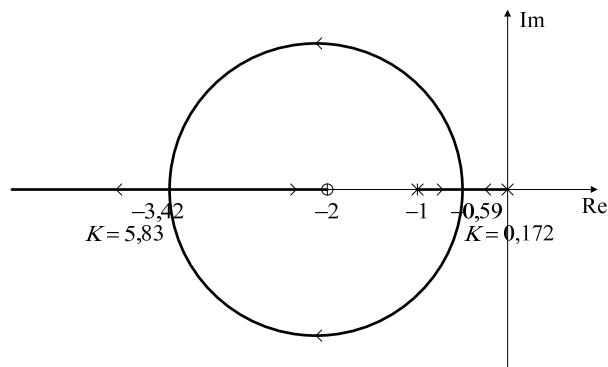
O diagrama de blocos deste sistema fica:



Partindo do diagrama de blocos, obtém-se a seguinte equação característica do sistema:

$$K \frac{(s+2)}{s(s+1)} = -1$$

Esboçando o Lugar Geométrico de Raízes para este sistema, por exemplo recorrendo ao MATLAB, obtém-se:



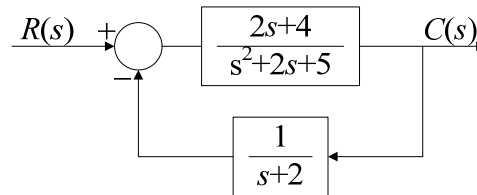
Analisando o LGR, tira-se que:

Para $0 < K < 0,172$ e $K > 5,83 \rightarrow \zeta > 1$, logo o sistema não oscila (sobreamortecido)

Para $K = 0,172$ e $K = 5,83 \rightarrow \zeta = 1$, logo o sistema não oscila (criticamente amortecido)

Para $0,172 < K < 5,83 \rightarrow 0 < \zeta < 1$, logo o sistema oscila (subamortecido)

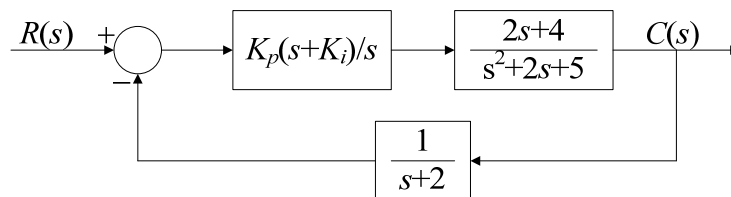
9. Considere o seguinte sistema em malha fechada.



a) Redesenhe o sistema incluindo um controlador PI: $m(t) = K_p [e(t) + K_i \int e(t) dt]$.

$$M(s) = K_p \left(1 + \frac{K_i}{s} \right) E(s) \Leftrightarrow \frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left(\frac{s + K_i}{s} \right)$$

O diagrama de blocos deste sistema fica:



b) Quais são as alterações que este controlador introduz no comportamento do sistema.

O controlador é do tipo PI, pelo que introduz mais um pólo. O sistema passa a ser de terceira ordem.

c) Analise a estabilidade do sistema com o controlador.

A função de transferência em malha fechada deste sistema vem:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p (s + K_i) (2s + 4)}{s^3 + 2s^2 + s(5 + 2K_p) + 2K_p K_i}$$

Recorrendo ao Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, vem:

$$\begin{array}{c|cc}
 3 & 1 & (5 + 2K_p) \\
 2 & 2 & (2K_p K_i) \\
 1 & 5 + K_p(2 - K_i) & 0 \\
 0 & 2K_p K_i &
 \end{array}$$

Verifica-se que para o sistema ser estável têm que se verificar simultaneamente as seguintes condições: $K_p K_i > 0$ e $K_p(2 - K_i) > -5$.

