



Departamento de Engenharia Electrotécnica  
Instituto Superior de Engenharia do Porto

**TESIS**  
Teoria dos Sistemas

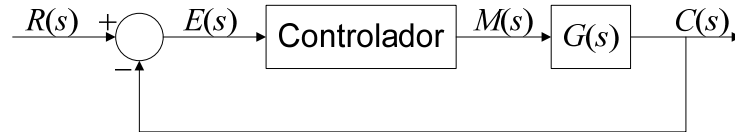
**Controladores PID**

—

Exercícios Propostos e Soluções



1. Considere o seguinte sistema de controlo:



No qual:

- O processo controlado é  $G(s) = \frac{40}{10s^2 + 80s + 800}$

- O controlador é do tipo PID:  $m(t) = 20 \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$

a) Admitindo que não existe acção integral ( $1/T_i = 0$ ), calcular  $T_d$  de modo que o amortecimento do sistema realimentado seja unitário.

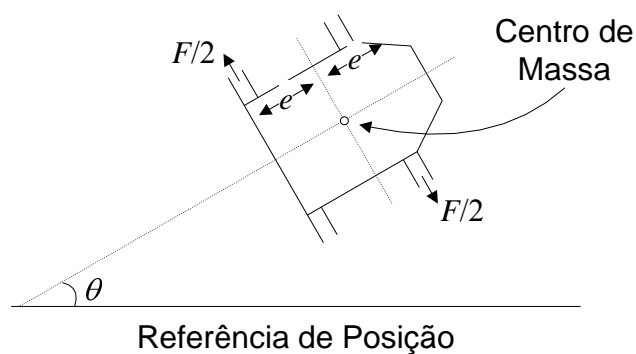
b) Para o valor de  $T_d$  calculado, determinar o valor máximo de  $1/T_i$  de modo a manter o sistema estável.

**Solução:**

a)  $T_d = 0,216$  s

b)  $K_i < 50,6$

2. A figura seguinte é o esquema de um sistema de controlo de posição de um satélite:



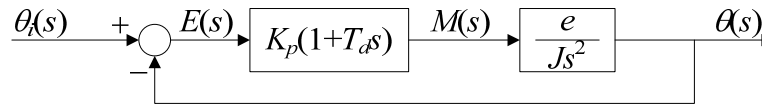
Sendo:

$2e$  - comprimento do satélite;

$J$  - momento de inércia;

$F/2$  - força de reacção produzida por cada foguete

Supondo que o controlador é de tipo PD, o diagrama de blocos do sistema fica:

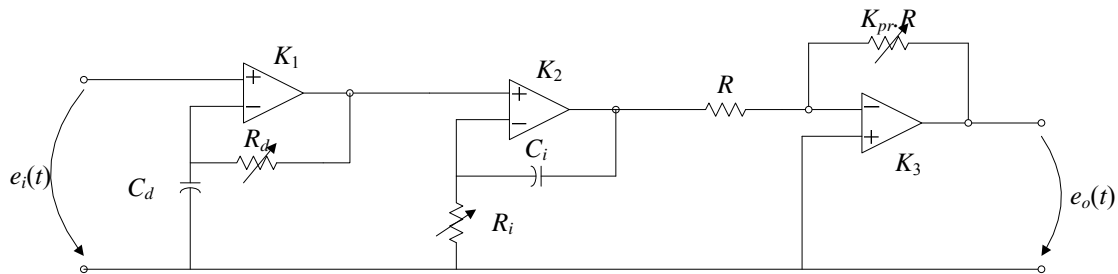


Determine o valor da constante de tempo  $T_d$ , de modo que  $\zeta = 0,7$ .

**Solução:**

$$\begin{cases} 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = \frac{K_p \cdot T_d \cdot e}{J} \\ \omega_n^2 = \frac{K_p \cdot e}{J} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_d = 1,4 \cdot \sqrt{\frac{J}{K_p \cdot e}} \text{ s} \\ \omega_n = \sqrt{\frac{K_p \cdot e}{J}} \text{ rad/s} \end{cases}$$

3. Considere o controlador apresentado na figura seguinte:



a) Que tipo de acção de controlo produz o controlador indicado?

b) Em que condições poderia este controlador estabilizar o controlo de posição de uma massa de inércia ( $T(s) = Js^2 \theta(s)$ )?

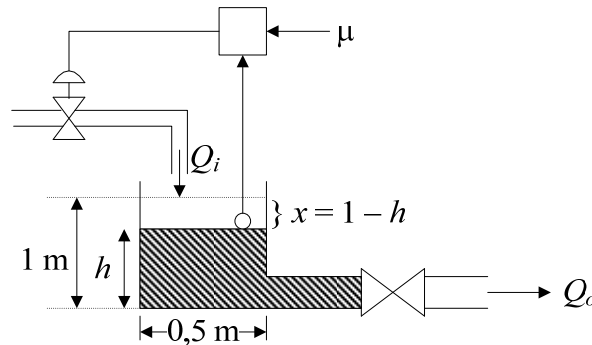
**Solução:**

a)

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E_1(s)}{E_i(s)} \cdot \frac{E_2(s)}{E_1(s)} \cdot \frac{E_o(s)}{E_2(s)} = -\frac{K_p}{s \cdot C_i \cdot R_i} - K_p \cdot s \cdot C_d \cdot R_d - \left( K_p + K_p \cdot \frac{C_d \cdot R_d}{C_i \cdot R_i} \right)$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{K \cdot \tau_d \cdot \tau_i + K \cdot \tau_d^2 - 1}{\tau_d} > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K > \frac{1}{\tau_d \cdot (\tau_d + \tau_i)} \\ -\frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K_p}{J} > 0 \end{cases}$$

4. Considere o seguinte sistema de controlo de nível de um tanque cilíndrico:



O caudal da entrada é comandado por um controlador através da relação:

$$Q_i(t) = 0,125 \left[ x(t) + \int_0^t x(\tau) d\tau \right], \quad t \geq 0$$

sendo  $x(t)$  o desnível em metros relativamente ao valor desejado de 1 m.

Considerar que a válvula de saída foi bruscamente aberta, em  $t = 0$ , estando o sistema em repouso ( $h = 1$  m,  $q_o = 0$  m<sup>3</sup>/s), originando um caudal de saída  $q_o(t) = 0,01h(t)$  m<sup>3</sup>/s. Considere ainda que  $q_i(t) - q_o(t) = A \cdot (dh(t)/dt)$ .

Nestas condições determinar:

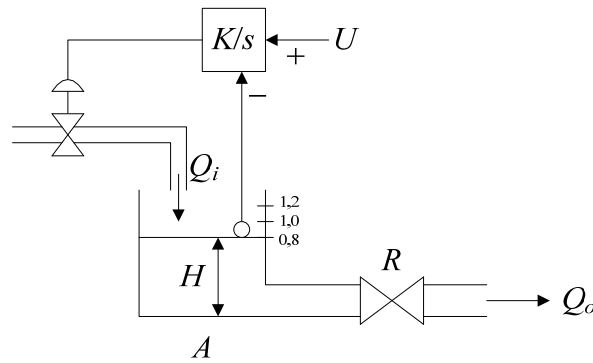
- A expressão de  $x(t)$  em função do tempo.
- A altura do líquido no tanque, em regime estacionário. Justifique.

**Solução:**

$$\text{a) } x(t) = 0,07 \cdot e^{-0,344t} \cdot \sin(0,72 \cdot t)$$

$$\text{b) } \text{Em regime estacionário } x(t) \rightarrow 0 \text{ m, logo } h(t) \rightarrow 1 \text{ m}$$

5. O sistema apresentado na figura seguinte viu a sua referência ser ajustada para o valor 1 m.



Considere que a acção do controlador (acção integral) é:  $Q_i(s) = \frac{K}{s} [U(s) - H(s)]$  sendo

a Função de Transferência do tanque:  $\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{s.A + 1/R}$ .

Sendo:

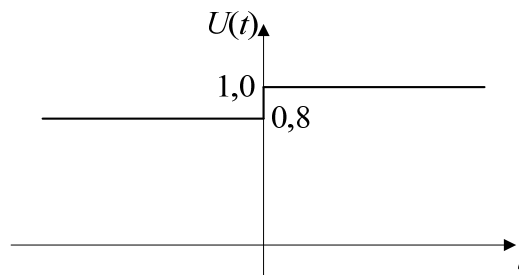
$$A = 1 \text{ m}^2$$

$$K = 0,1$$

$$R = 9,88 \text{ s/m}^{-2}$$

a) Qual a frequência natural e qual o coeficiente de amortecimento do sistema?

b) Qual a sua resposta temporal ao seguinte sinal de entrada:



c) Reduzir o ganho para metade e voltar a calcular  $\zeta$ ,  $\omega_n$ ,  $t_r$ ,  $t_s$ .

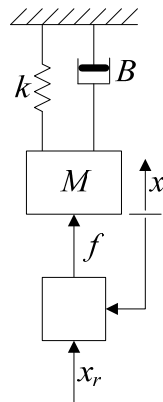
**Solução:**

a) 
$$\begin{cases} \zeta = 0,16 \\ \omega_n = 0,316 \text{ rad / s} \end{cases}$$

b)  $t_p = 10 \text{ s}; t_s = 80 \text{ s}; h_{\max}(t_p) = 0,32 \text{ m}$

c)  $\omega_n = 0,223 \text{ rad/s}; \zeta = 0,227$

6. O controlador (proporcional) do sistema de controlo de posição da figura apresentada abaixo fornece uma força  $f = A(x_r - x)$ .



Sendo:

$$M = 1 \text{ Kg}$$

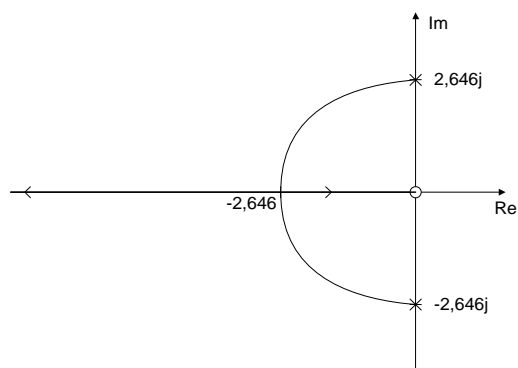
$$A = 5$$

$$k = 2 \text{ Nm}^{-1}$$

- Desenhar o Lugar Geométrico de Raízes do sistema com  $B$  como parâmetro.
- Determinar  $B$  de modo que o sistema não oscile.

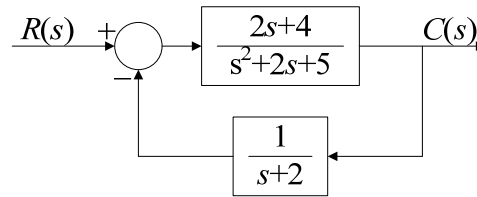
**Solução:**

a)



b)  $B \geq 2\sqrt{7}$

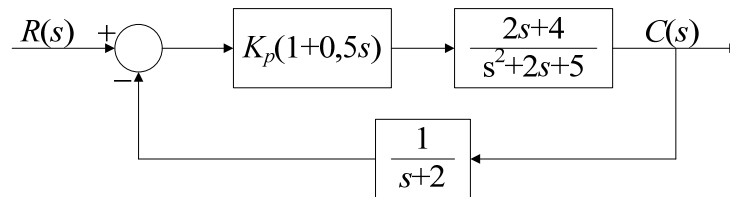
7. Considere o seguinte sistema em malha fechada.



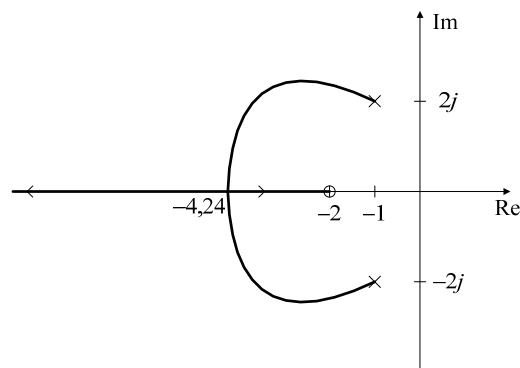
- a) Redesenhe o sistema incluindo um controlador PD, com a expressão  $G_c = k_p(1+0,5s)$ .
- b) Recorrendo ao lugar de Raízes (directo) analise a estabilidade do sistema com o controlador.
- c) Que valor deveria ter a constante proporcional para que o sistema apresentasse um amortecimento de 0,866.

**Solução:**

a)



b)

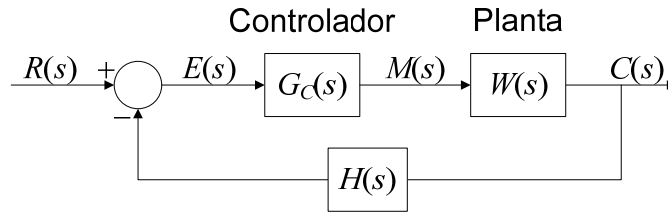


O sistema é estável para  $K_p > 0$

c)  $K_p = 5,46$

8. Considere o seguinte sistema de controlo de temperatura de um forno cuja planta é do género  $W(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  e o controlador é do tipo  $m(t) = 2 \cdot K \cdot e(t) + K \cdot \frac{de(t)}{dt}$ .



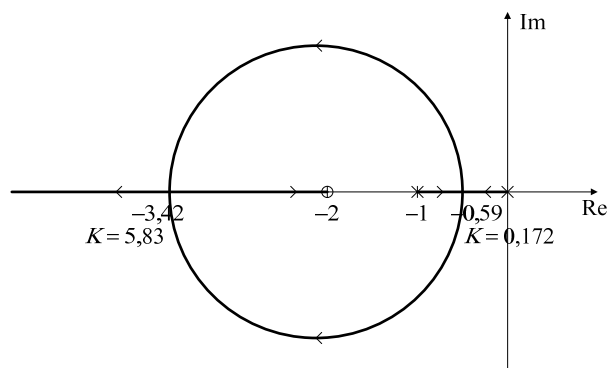


- a) Que tipo de controlador está implementado no controlo do sistema?
- b) Esboce o lugar geométrico das raízes deste sistema, em função da variação de  $K$  e considerando que tem realimentação unitária. Defina as zonas de comportamentos típicos, em função de  $K$ .

**Solução:**

a) Controlador PD

b)

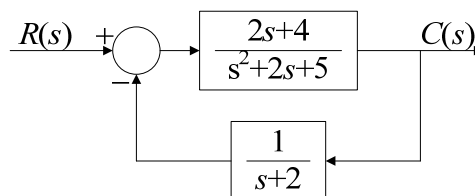


Para  $0 < K < 0,172$  e  $K > 5,83 \rightarrow \zeta > 1$ , logo o sistema não oscila (sobre-amortecido)

Para  $K = 0,172$  e  $K = 5,83 \rightarrow \zeta = 1$ , logo o sistema não oscila (criticamente amortecido)

Para  $0,172 < K < 5,83 \rightarrow 0 < \zeta < 1$ , logo o sistema oscila (sub-amortecido)

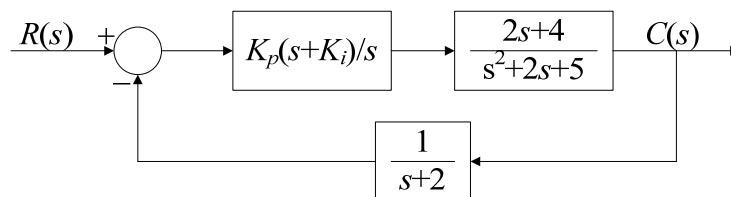
9. Considere o seguinte sistema em malha fechada.



- a) Redesenhe o sistema incluindo um controlador PI:  $m(t) = K_p [e(t) + K_i \int e(t) dt]$ .
- b) Quais são as alterações que este controlador introduz no comportamento do sistema.
- c) Analise a estabilidade do sistema com o controlador.

**Solução:**

a)



- b) O controlador é do tipo PI, pelo que introduz mais um pólo. O sistema passa a ser de terceira ordem.
- c) Recorrendo ao Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz verifica-se que para o sistema ser estável têm que se verificar simultaneamente as seguintes condições:  $K_p K_i > 0$  e  $K_p(2 - K_i) > -5$ .

