

TESIS: Teoria dos Sistemas



Controladores PID

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Controladores PID



1. Formas de controlo de sistemas realimentados
 1. controlo proporcional
 2. controlo proporcional e integral
 1. saturação por efeito da acção integral
 3. acção diferencial
2. Sintonia do controlador
 1. métodos em malha aberta
 2. métodos em malha fechada
3. Controlo em cascata e por “Feedforward”
 1. controlo em cascata
 2. controlo por “Feedforward”

Controladores PID



- Formas de controlo de sistemas realimentados
 - existem três acções básicas de controlo
 - acção proporcional
 - acção integral
 - acção diferencial ou derivativa

Controladores PID



- Formas de controlo de sistemas realimentados
 - estas três acções de controlo, quando juntas, levam ao controlador PID, de acordo com a expressão

$$e(t) \rightarrow \boxed{\text{PID}} \rightarrow m(t) \quad m(t) = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t') dt' + T_d \frac{de}{dt} \right)$$

onde K , T_i , T_d são parâmetros a ajustar

- nota: $e = r - c$, se $r = \text{constante}$, vem

$$m(t) = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t') dt' - T_d \frac{dc}{dt} \right)$$

Controladores PID



- Controlo proporcional

$$m(t) = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t') dt' + T_d \frac{de}{dt} \right)$$

- se $T_d = 0$ e $T_i = \infty$ tem-se um controlador proporcional

$$m(t) = Ke(t)$$

Controladores PID



- Controlo proporcional

- viu-se anteriormente que este tipo de controlador é incapaz de eliminar e_{ss} de sistemas tipo zero, para uma referência em degrau, $R(s) = 1/s$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K}$$

- para diminuir e_{ss} é necessário aumentar K
 - em geral, esta estratégia origina um aumento do tempo de estabelecimento e, eventualmente, a instabilidade

Controladores PID



- Controlo proporcional e integral

$$m(t) = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t') dt' + T_d \frac{de}{dt} \right)$$

- se $T_d = 0$ tem-se um controlador PI

$$m(t) = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t') dt' \right)$$

Controladores PID



- Controlo proporcional e integral
 - acção integral produz uma função de transferência com um pólo na origem
 - erro em regime permanente, ao degrau de entrada, é nulo desde que o sistema seja estável

$$m(t) = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t') dt' \right)$$

Controladores PID



- Controlo proporcional e integral
 - parâmetro T_i (tempo integral) quantifica a razão de variação da saída do controlador PI quando a entrada é um degrau
 - tempo necessário para que a contribuição da parte integral seja igual à contribuição da parte proporcional

TESIS – Teoria dos Sistemas

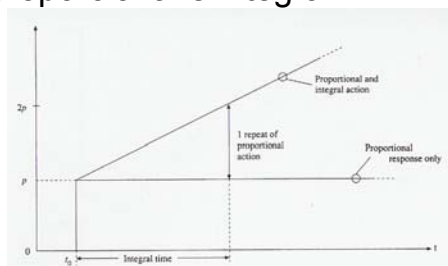
ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Controladores PID



- Controlo proporcional e integral



- muitos fabricantes exprimem T_i em unidades min/repetições ou repetições/min
- tipicamente
 - $0,02 \text{ repetições/min} \leq T_i \leq 50 \text{ repetições/min}$

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Controladores PID

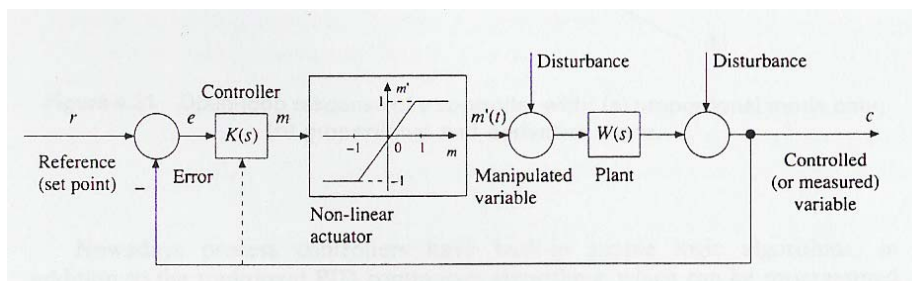


- Saturação por efeito da acção integral
 - os actuadores têm um intervalo limitado de funcionamento linear e a maioria exhibe uma característica entrada-saída não-linear do tipo “saturação”
 - assim, quando o controlador produz valores de saída elevados, a adopção de modelos lineares pode conduzir a conclusões erradas
 - este fenómeno é particularmente importante quando ocorrem variações significativas da referência ou da carga (perturbações)
 - em ambos os casos, existe um erro $e(t)$ elevado que pode conduzir à saturação do actuador

Controladores PID



- Saturação por efeito da acção integral



Controladores PID



- Saturação por efeito da acção integral
 - no caso de ocorrer saturação, a variável de saída $c(t)$ demora mais tempo a atingir o valor desejado
 - a acção integral tem mais tempo para integrar o erro e aumenta até um valor elevado (*integral windup*) até que o erro muda de sinal e, então, começa a decrescer
 - devido ao elevado valor atingido, a saída do controlador demora mais tempo a mudar de sinal e, conseqüentemente, até isso se verificar a variável de saída $c(t)$ continua a crescer
 - como consequência ocorre uma sobreelongação elevada

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

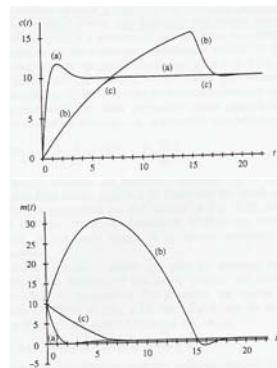
Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Controladores PID



- Saturação por efeito da acção integral
 - resposta do sistema para um degrau de entrada $r(t)$ com amplitude 10

$$K(s) = 1 + \frac{1}{s}$$
$$W(s) = \frac{2}{s + 0,1}$$



TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Controladores PID



- Saturação por efeito da acção integral
 - se o controlador parar a integração quando ocorre a saturação (*batch switch*), o desempenho vem melhorado

Controladores PID



- Acção diferencial
 - quando $T_d \neq 0$ e $T_i \neq \infty$ obtém-se um controlador PID

$$m(t) = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t') dt' + T_d \frac{de}{dt} \right)$$

Controladores PID



- Acção diferencial
 - inclusão da parcela $T_d \cdot dc/dt$ (ou $T_d \cdot de/dt$) ultrapassa as limitações das acções P e I
 - requerem, respectivamente, um erro elevado e um intervalo de tempo elevado, para produzir uma saída com valor apreciável
 - acção D responde à razão de variação da variável, possibilitando uma reacção mais rápida do controlador, mesmo para erros pequenos
 - parâmetro T_d é uma medida da capacidade de reacção

Controladores PID

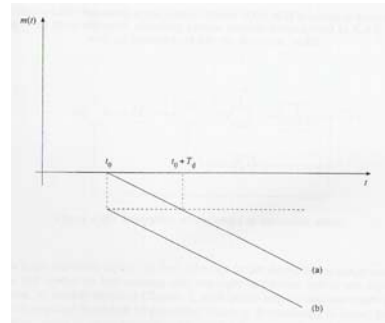


- Acção diferencial
 - por exemplo, considerando $r = 0$ e $c(t)$ a variar linearmente, as acções P e PD dão origem aos gráficos seguintes

Controladores PID



• Acção diferencial



$$\left. \begin{aligned} r &= 0, \quad e = r - c \\ m(t) &= K \left(e + T_d \frac{de}{dt} \right) \end{aligned} \right\} m(t) = -K \left(c + T_d \frac{dc}{dt} \right)$$

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Controladores PID



• Acção diferencial

- note-se que para $t \geq t_0$ a resposta da acção PD fica “avançada” de T_d unidades de tempo face à resposta da acção P
- acção D pode ser implementada como $T_d \cdot de/dt$ ou como $-T_d \cdot dc/dt$
- a adopção da variável de saída c evita que a saída do controlador “dê um salto” sempre que ocorre um degrau de variação na entrada
- para sistemas com pólos/zeros no semi-plano esquerdo a acção D tende a estabilizar o sistema

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Controladores PID



- Sintonia do controlador
 - coloca-se agora a questão de seleccionar os valores mais apropriados para K , T_i e T_d , de forma a obter um desempenho satisfatório no controlo do sistema
 - para calcular os parâmetros é necessário um modelo matemático do sistema
 - identificação do sistema pode ser complexa e trabalhosa
 - problema simplificado se nos restringirmos a uma classe de modelos de ordem baixa

Controladores PID



- Sintonia do controlador
 - experiência demonstrou que os dois modelos seguintes são adequados para a maioria dos processos industriais

$$W_1(s) = \frac{K_p e^{-sT}}{s\tau + 1}$$

$$W_2(s) = \frac{K'_p e^{-sT}}{s}$$

Controladores PID



- Sintonia do controlador
 - uma técnica de sintonia consiste nas seguintes fases
 - um teste para estimar os parâmetros do modelo
 - um conjunto de fórmulas que relacionem os parâmetros do controlador (K , T_i , T_d) com o modelo, de forma a obter uma resposta com as características desejadas
 - técnicas de sintonia podem ser classificadas em métodos de malha aberta e métodos em malha fechada

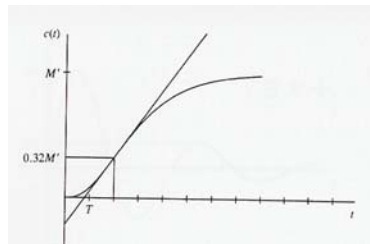
Controladores PID



- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Aberta
 - parâmetros $\{K_p, T, \tau\}$ ou $\{K'_p, T\}$ estimados a partir da resposta $c(t)$ do sistema a uma entrada em degrau com amplitude M

Controladores PID

- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Aberta
 - $W_1(s)$
 - $Kp = M'/M$
 - T obtém-se a partir do ponto de intersecção da recta tangente no ponto de declive máximo



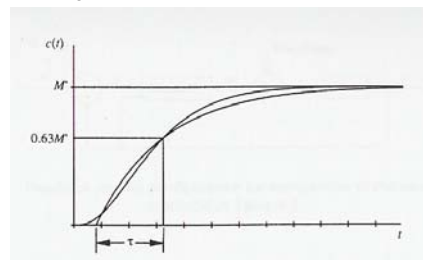
TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Controladores PID

- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Aberta
 - $W_1(s)$
 - resposta de $Kp/(Ts+1)$ a um degrau aplicado em $t = 0$, atinge 63,2% do valor final para $t = \tau$ então $\tau = t' - T$ onde $c(t') = 0,632M'$



TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

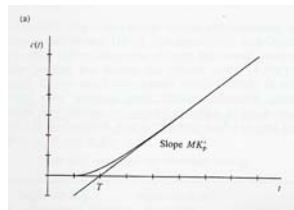
Controladores PID



- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Aberta

- $W_2(s)$

- resposta em regime permanente, a um degrau de entrada de amplitude M , apresenta um declive MK_p
- ponto de intersecção da recta dá o valor de T



TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Controladores PID



- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Fechada

- com o anel de realimentação fechado e com as acções I e D anuladas (i.e., $T_d = 0$, $1/T_i = 0$) o ganho K é aumentado gradualmente até que a variável de saída oscile com amplitude constante
- neste caso, tem-se o ganho final, K_u (*ultimate gain*) e o período final, P_u (*ultimate period*) de oscilação

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Controladores PID



- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Fechada
 - este método é simples de aplicar mas muitos sistemas não toleram as oscilações, o que condiciona a sua aplicação
 - é também importante verificar que não haja saturação de um elemento do sistema, sob pena dos resultados não terem significado

Controladores PID

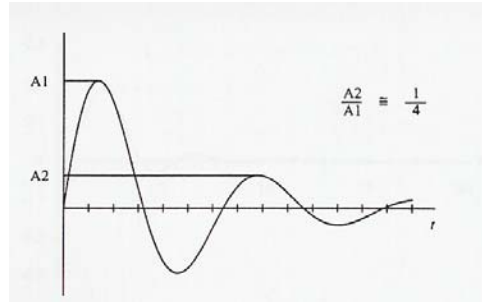


- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Fechada
 - as fórmulas para o ajuste dos parâmetros do controlador dependem da resposta desejada para um degrau na carga ou um degrau na referência
 - as fórmulas mais populares são as de Ziegler e Nichols, Shinskey, Cohen e Coon e o seu objectivo é determinar o conjunto de parâmetros que produzem uma razão de decaimento de um quarto

Controladores PID



- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Fechada



TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Controladores PID



- Sintonia do Controlador – Métodos em Malha Fechada
 - dois primeiros métodos consideram o modelo do sistema $W_2(s)$, enquanto o terceiro considera o modelo $W_1(s)$
 - em geral estas fórmulas originam valores distintos para os parâmetros $\{K, T_i, T_d\}$ e não produzem exactamente a resposta desejada
 - valores obtidos são uma primeira estimativa para um processo de ajuste com várias iterações

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Controladores PID



• Fórmulas para a Sintonia do Controlador

Controller	Setting	Ziegler-Nichols (closed-loop)		Ziegler-Nichols (open-loop)	Cohen-Coon
		Shinskey			
P	K	$0.5 K_u$	$0.5 K_u$	$\frac{1}{T R_t}$	$\frac{\tau}{TK_p} \left(1 + 0.33 \frac{T}{\tau} \right)$
PI	K	$0.45 K_u$	$0.5 K_u$	$\frac{0.9}{T R_t}$	$\frac{\tau}{TK_p} \left(0.9 + 0.082 \frac{T}{\tau} \right)$
	T_i	$0.833 P_u$	$0.43 P_u$	$3.33 T$	$T \left(\frac{3.33 + 0.37T/\tau}{1 + 2.2T/\tau} \right)$
PID	K	$0.6 K_u$	$0.5 K_u$	$\frac{1.2}{T R_t}$	$\frac{\tau}{TK_p} \left(1.35 + 0.27 \frac{T}{\tau} \right)$
	T_i	$0.5 P_u$	$0.34 P_u$	$2 T$	$T \left(\frac{2.5 + 0.57T/\tau}{1 + 0.67T/\tau} \right)$
	T_d	$0.125 P_u$	$0.08 P_u$	$0.5 T$	$T \left(\frac{0.37}{1 + 0.27T/\tau} \right)$

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Controladores PID



• Fórmulas para a Sintonia do Controlador

- verifica-se que
 - introdução da acção I traduz-se por uma diminuição do ganho K para compensar o efeito destabilizador
 - introdução da acção D traduz-se pelo reforço das acções P e I
- acção D tem um efeito adverso na resposta transitória de sistemas com um tempo de atraso predominante, isto é, onde a razão τ/T é elevada
- somente o método de Cohen e Coon avalia esta razão pelo que apresenta melhor desempenho

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt