



Departamento de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto

TESIS

Teoria dos Sistemas

Lugar Geométrico de Raízes

–

Exercícios Propostos e Soluções

Ano Lectivo: 2007/2008

1. Esboce o Lugar Geométrico de Raízes Directo dos sistemas representados pelas seguintes Funções de Transferência:

a) $GH(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$

b) $GH(s) = k \frac{3s}{(s+2)(s^2+6s+18)}$

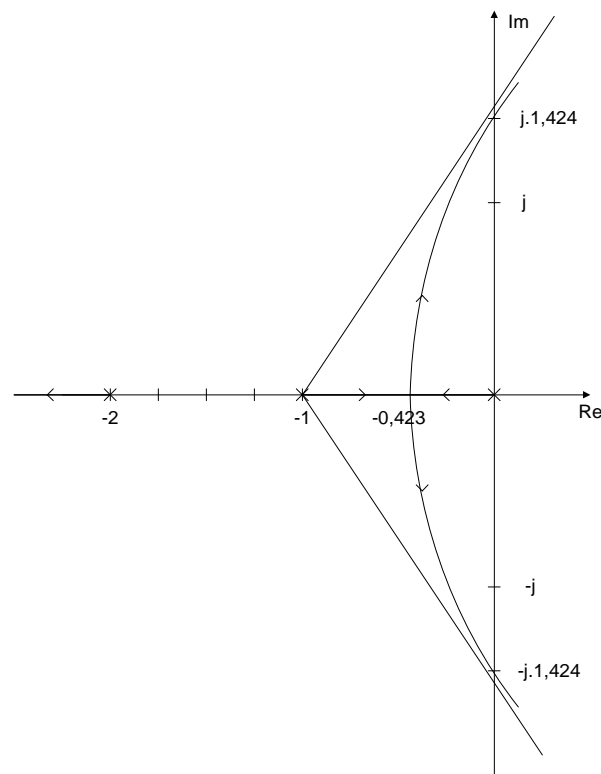
c) $GH(s) = k \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$

d) $GH(s) = k \frac{(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2}$

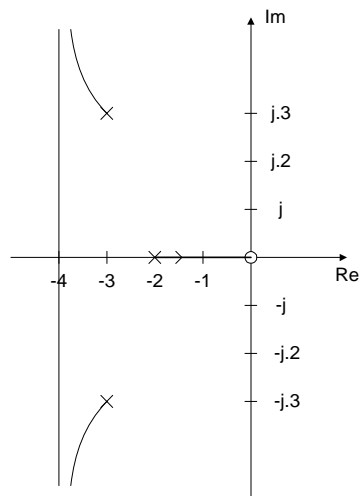
e) $GH(s) = \frac{k}{s(s^2+2s+5)}$

Solução:

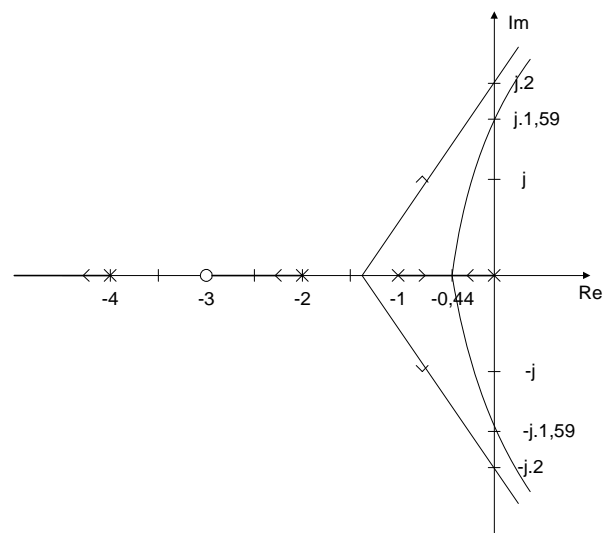
a)



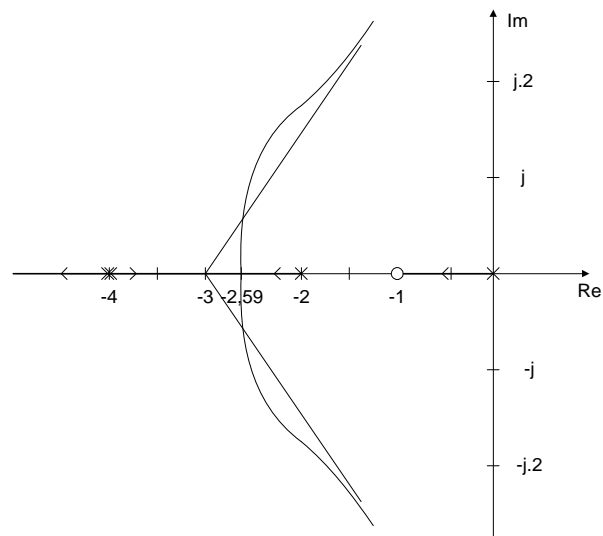
b)



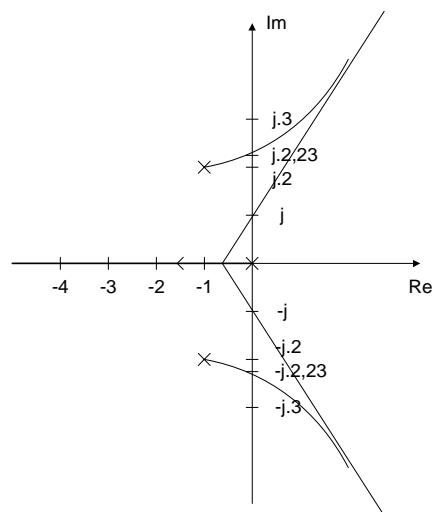
c)



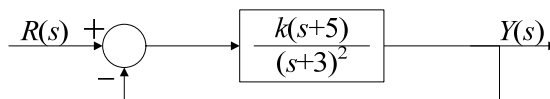
d)



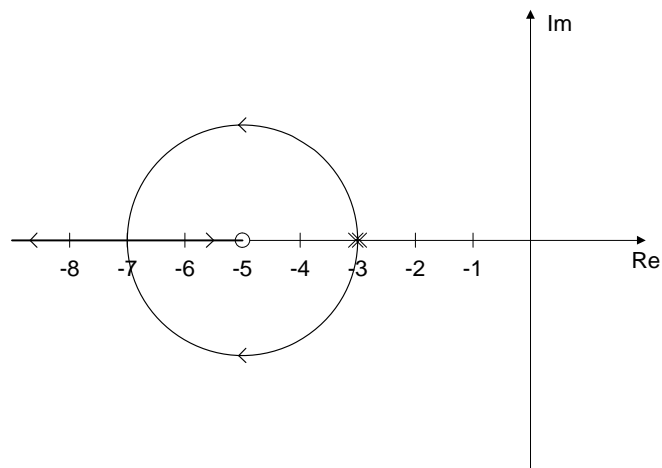
e)



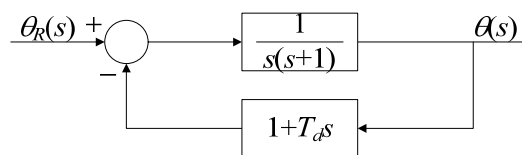
2. Esboce o Lugar Geométrico de Raízes Directo para o sistema que apresenta o seguinte diagrama de blocos:



Solução:



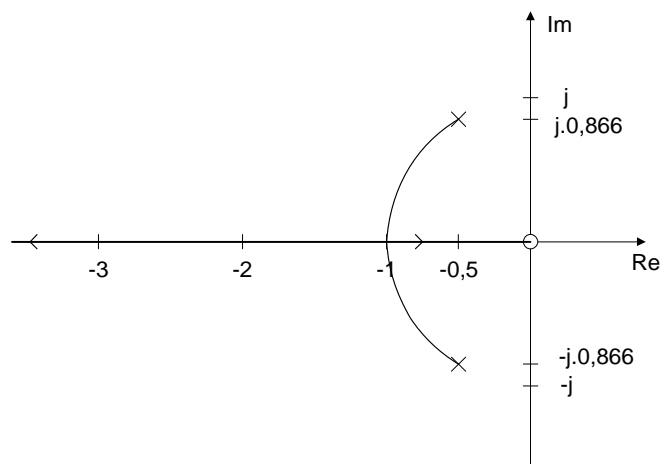
3. Um sistema de controlo de posição apresenta o seguinte diagrama de blocos equivalente:



- Esboce o Lugar Geométrico de Raízes Directo para este sistema, considerado em função de T_d .
- Para que valores do ganho de realimentação de velocidade (T_d) o sistema apresenta uma saída não oscilatória?

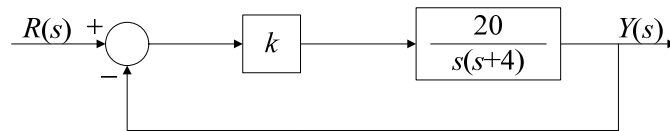
Solução:

a)



b) Para valores de T_d maiores que 1, o sistema não apresenta oscilação à sua saída.

4. Dado o sistema da figura seguinte:



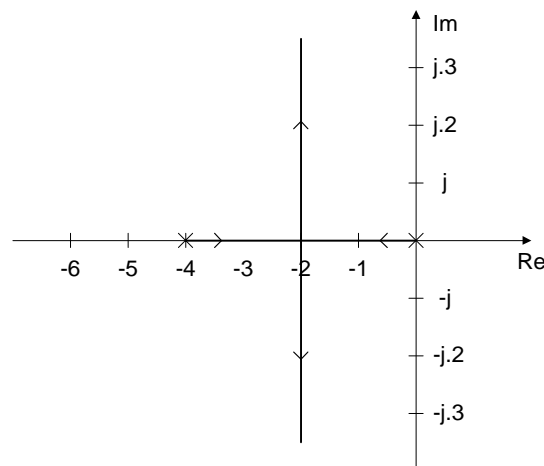
a) Esboce o seu Lugar Geométrico de Raízes Directo.

b) Para que valores do ganho k , o sistema não apresenta oscilação à sua saída?

c) Existe algum valor do ganho k para o qual o sistema apresente o seguinte par de pólos em malha fechada: $s_{1,2} = -3 \pm j3$?

Solução:

a)



b) Para valores de k , tais que: $0,2 \geq k > 0$ o sistema não apresenta oscilação à sua saída.

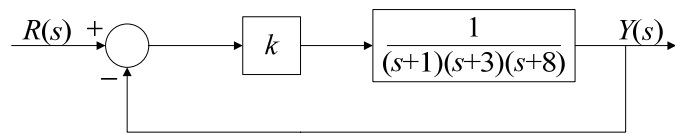
c) Poder-se-ia resolver a equação característica do sistema:

$$1 + GH(s) \Big|_{s=-3 \pm j.3} = 0$$

e ver se havia algum valor de k que permitisse cumprir as especificações.

Alternativamente, olhando para o L.G.R. conclui-se que os pólos do sistema ou são reais ou, no caso de serem imaginários, têm parte real igual a -2 , logo não se consegue ter os pólos $-3 \pm j3$.

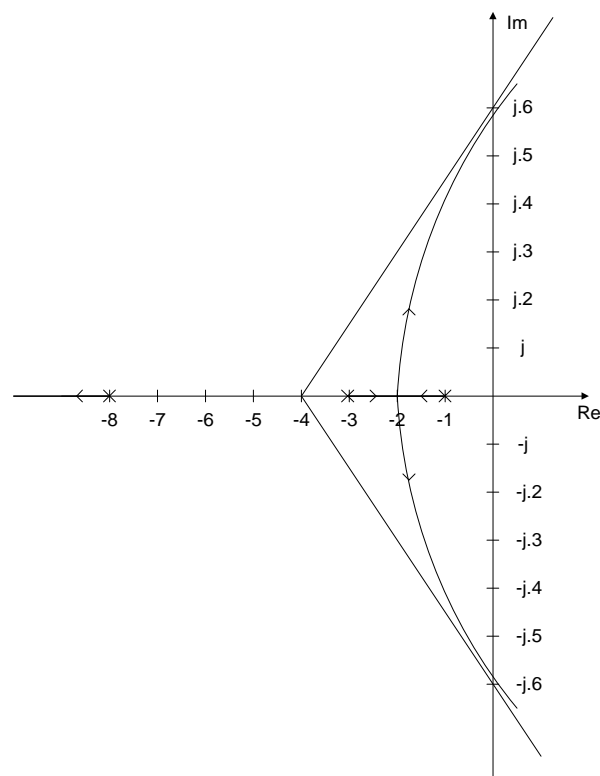
5. Considere o sistema da figura seguinte:



- Esboce o seu Lugar Geométrico de Raízes Directo.
- Indique os valores de k para os quais o sistema é estável.

Solução:

a)

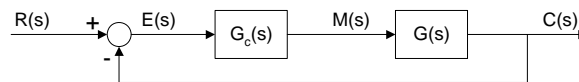


- O sistema torna-se instável quando passa a ter pólos no semi-plano direito. Isso acontece para $k > 396$. Para o sistema ser estável é necessário que: $0 < k < 396$.

6. Uma máquina de controlo numérico apresenta a seguinte Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

As especificações de desempenho exigem que, na configuração de "feedback" unitário da figura seguinte, o sistema apresente um "Overshoot" percentual máximo inferior a 2,5 % e um tempo de estabelecimento inferior a 1 seg.



- Mostre que esta especificação não pode ser alcançada recorrendo a um controlador de acção unicamente proporcional.
- Indique o intervalo de valores do ganho proporcional para os quais o sistema apresenta uma saída não oscilatória?

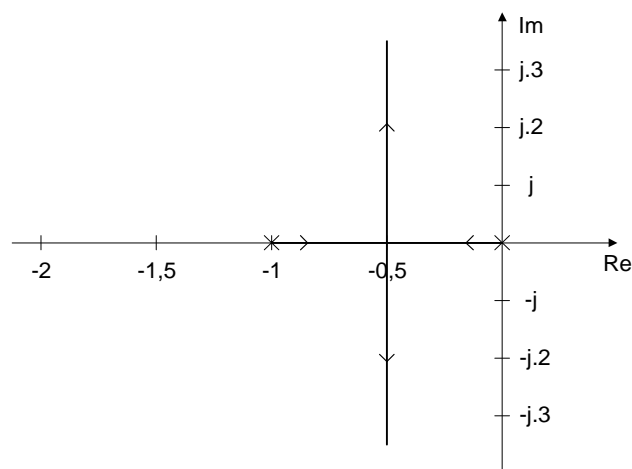
Solução:

- Para o sistema apresentar as especificações de desempenho pretendidas, necessita que os seus pólos tenham os seguintes valores:

$$p_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \pm j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_{1,2} = -4 \pm j.3,42$$

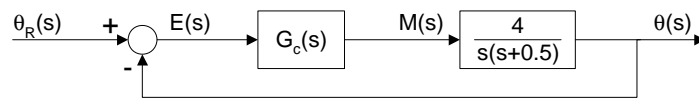
O L.G.R. deste sistema é o seguinte:



Analisando o L.G.R. do sistema verifica-se que com um controlador de acção unicamente proporcional não se conseguem cumprir as especificações de desempenho pretendidas, uma vez que $-4 \pm j.3,42$ nunca são pólos do sistema, independentemente do valor de k .

- Para valores de k , tais que: $0,25 \geq k > 0$ o sistema não apresenta oscilação à sua saída.

7. Um sistema de controlo de posição angular pode ser representado pelo seguinte diagrama de blocos:



Pretende-se que este sistema apresente as seguintes especificações de desempenho:

- "Overshoot" percentual máximo inferior a 16,32 %;
 - tempo de estabelecimento inferior a 1,6 seg.
- a) Mostre que estas especificações não podem ser alcançadas recorrendo a um controlador de acção unicamente proporcional.
- b) Indique o intervalo de valores do ganho proporcional para os quais o sistema apresenta uma saída não oscilatória?

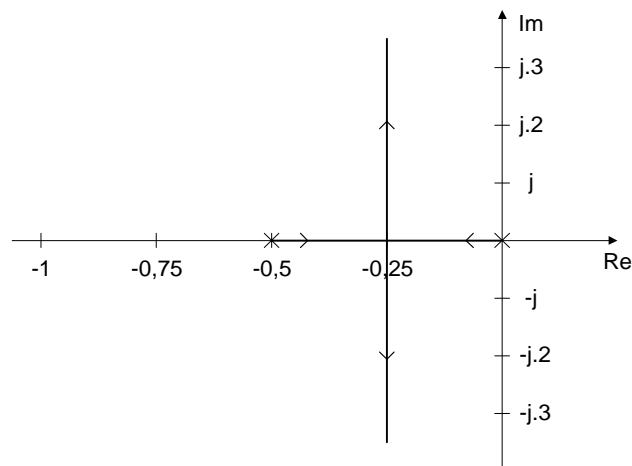
Solução:

- a) Para o sistema apresentar as especificações de desempenho pretendidas, necessita que os seus pólos tenham os seguintes valores:

$$p_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \pm j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_{1,2} = -2,5 \pm j \cdot 4,33$$

O L.G.R. deste sistema é:



Analisando o L.G.R. do sistema verifica-se que com um controlador de acção unicamente proporcional não se conseguem cumprir as especificações de desempenho pretendidas, uma vez que $-2,5 \pm j \cdot 4,33$ nunca são pólos do sistema, independentemente do valor de k .

- b) Para valores de k , tais que: $0,015625 \geq k > 0$ o sistema não apresenta oscilação à sua saída.