1.

1. a) $G(s) = \frac{1}{s}$

Uma vez que:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

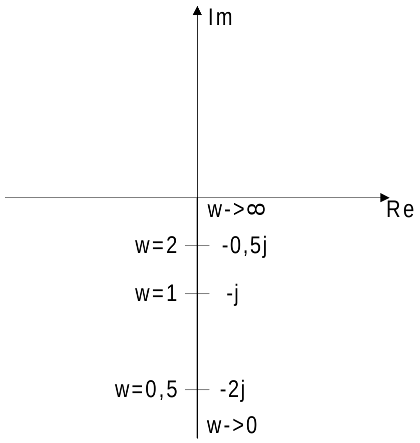
temos:

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{1}{\omega}$$

e:

$$\arg\left[G(j\omega)\right] = -90^{\circ}$$

Pelo que o gráfico polar de G(s) é o apresentado na figura seguinte:



1. b) $G(s) = \frac{1}{s.T + 1}$

Uma vez que:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega.T + 1}$$

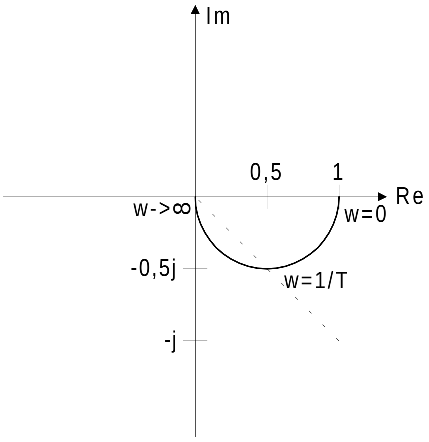
temos:

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2.T^2 + 1}}$$

e:

$$\arg\left[G(j\omega)\right] = -arctg(\omega.T)$$

Pelo que o gráfico polar de G(s) é o apresentado na figura seguinte:



1. c) $G(s) = \dfrac{1}{s.(s.T+1)}$

Uma vez que:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega.(j\omega.T+1)} = -\frac{T}{\omega^2.T^2+1} - j\frac{1}{\omega.(\omega^2.T^2+1)}$$

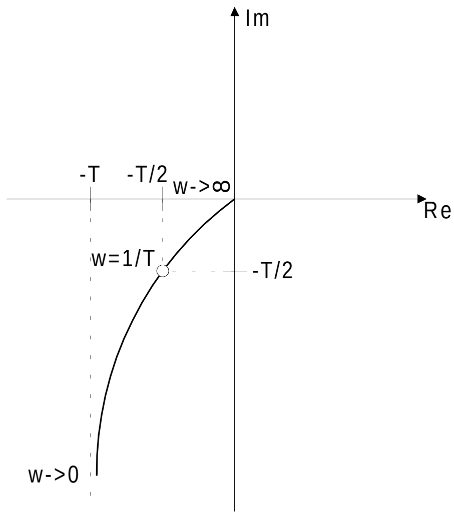
temos:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^4.T^2+\omega^2}}$$

e:

$$\arg[G(j\omega)] = -arctg\left(-\frac{1}{\omega.T}\right)$$

Pelo que o gráfico polar de G(s) é o apresentado na figura seguinte:



1. d) $G(s)=e^{-s.T}$

Uma vez que:

$$G(j\omega)=e^{-j.\omega.T}$$

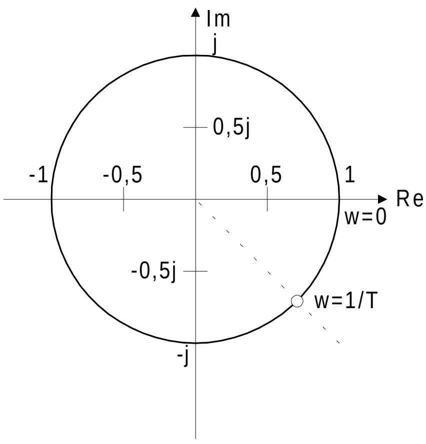
temos:

$$|G(j\omega)|=1$$

e:

$$\arg[G(j\omega)]=-\omega.T$$

Pelo que o gráfico polar de G(s) é o apresentado na figura seguinte:



1. e) $G(s)=\dfrac{e^{-s.L}}{s.T+1}$

Uma vez que:

$$G(j\omega)=\frac{e^{-j.\omega.L}}{j\omega.T+1}$$

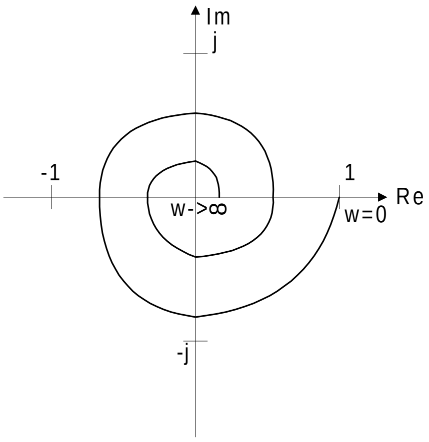
temos:

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\omega^2.T^2+1}}$$

e:

$$\arg[G(j\omega)]=-\omega.L-arctg(\omega.T)$$

Pelo que o gráfico polar de G(s) é o apresentado na figura seguinte:



2. a) $G(s)=\dfrac{5}{s+5}$

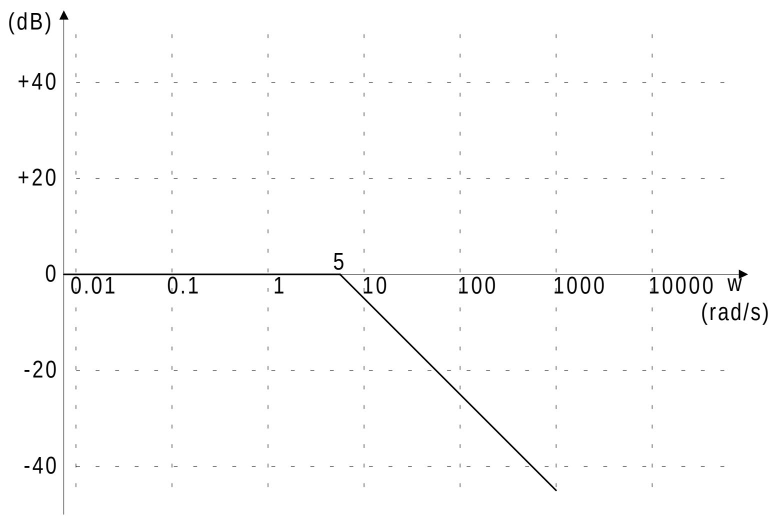
Esta função de transferência pode ser escrita na forma:

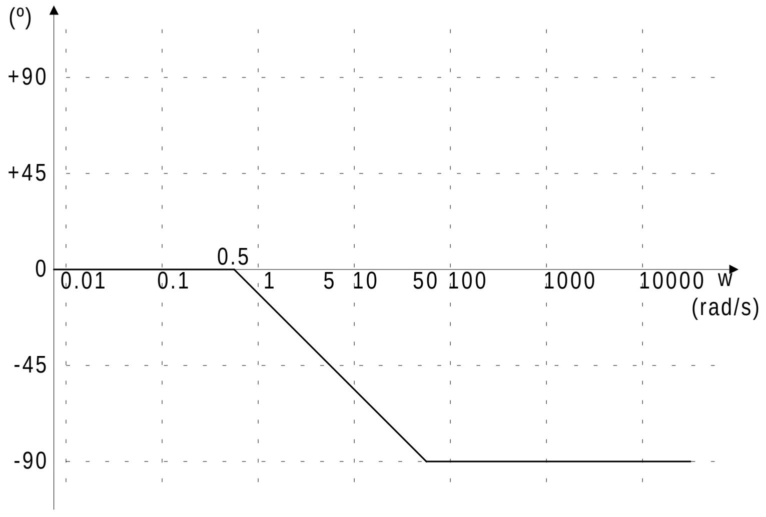
$$G(s)=\frac{1}{\frac{s}{5}+1}$$

Pelo que:

$$G(j\omega)=\frac{1}{\frac{j\omega}{5}+1}$$

Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, correspondentes a G(jω), são os seguintes:





2. b) $G(s) = \dfrac{100}{s.(s+10)}$

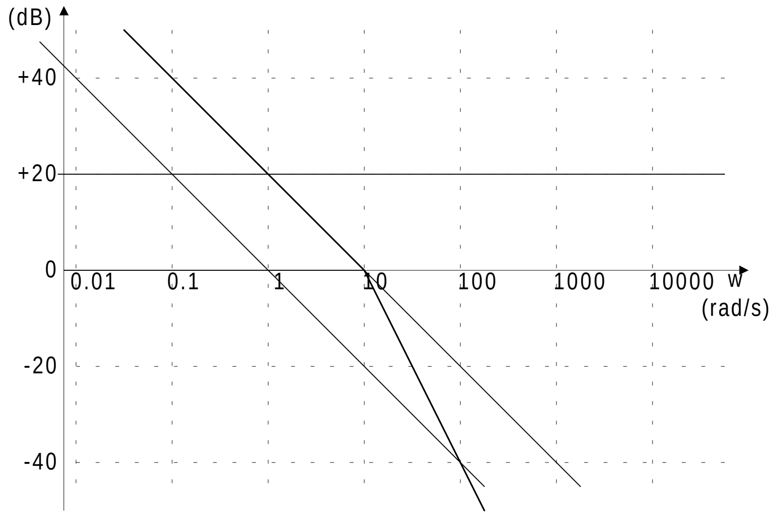
Esta função de transferência, que apresenta dois pólos, pode ser decomposta em factores básicos, ficando:

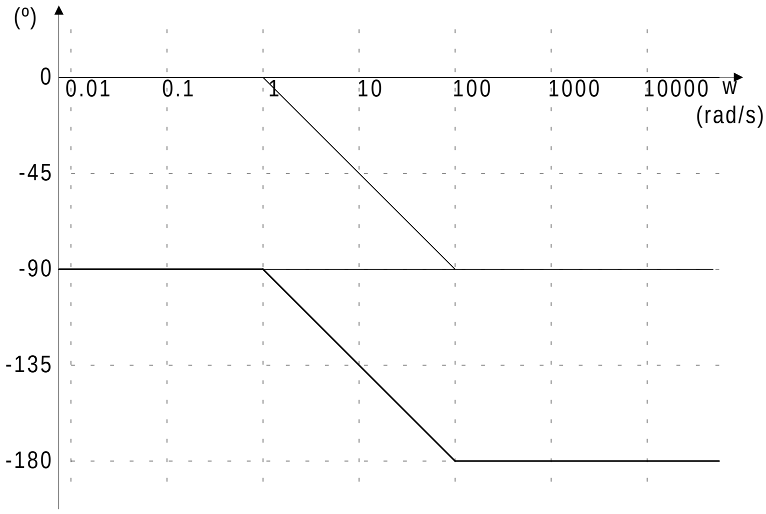
$$G(s) = 10 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\frac{s}{10}+1}$$

Pelo que:

$$G(j\omega) = 10 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{\frac{j\omega}{10}+1}$$

Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, correspondentes a G(jω), são os seguintes:





2. c) $G(s) = \dfrac{2000.(s+0,5)}{s.(s+10).(s+50)}$

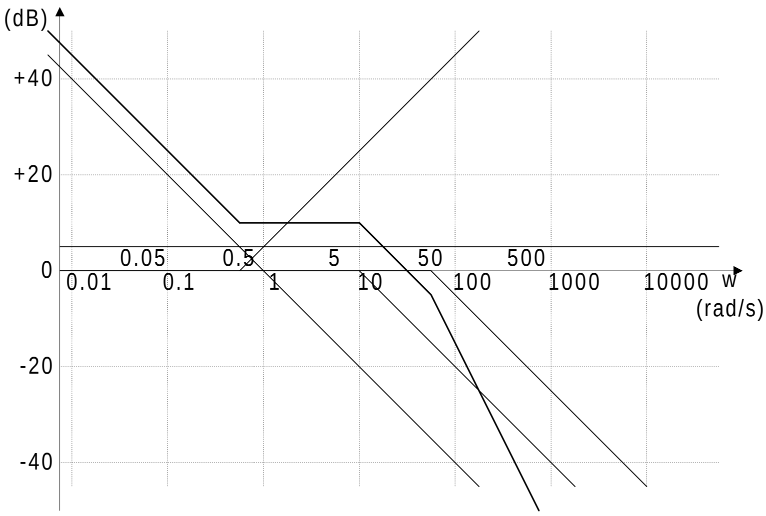
Esta função de transferência, que apresenta um zero e três pólos, pode ser decomposta em factores básicos, ficando:

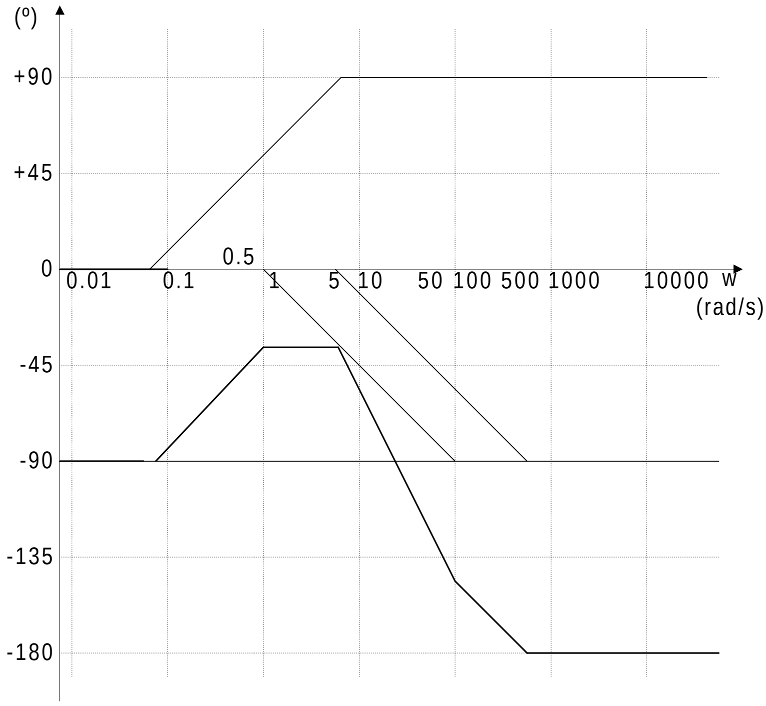
$$G(s) = \frac{2 \cdot \left(\dfrac{s}{0,5}+1\right)}{s \cdot \left(\dfrac{s}{10}+1\right) \cdot \left(\dfrac{s}{50}+1\right)} = 2 \cdot \left(\frac{s}{0,5}+1\right) \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\left(\dfrac{s}{10}+1\right)} \cdot \frac{1}{\left(\dfrac{s}{50}+1\right)}$$

Pelo que:

$$G(j\omega) = 2 \cdot \left(\frac{j\omega}{0,5}+1\right) \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{\dfrac{j\omega}{10}+1} \cdot \frac{1}{\dfrac{j\omega}{50}+1}$$

Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, correspondentes a G(jω), são os seguintes:





2. d) $G(s) = \dfrac{10}{s.(s^2 + 0.4.s + 4)}$

Esta função de transferência, que apresenta três pólos (dois deles complexos conjugados), pode ser decomposta em factores básicos, ficando:

$$G(s) = 2{,}5 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}1.s + \dfrac{s^2}{4}}$$

Pelo que:

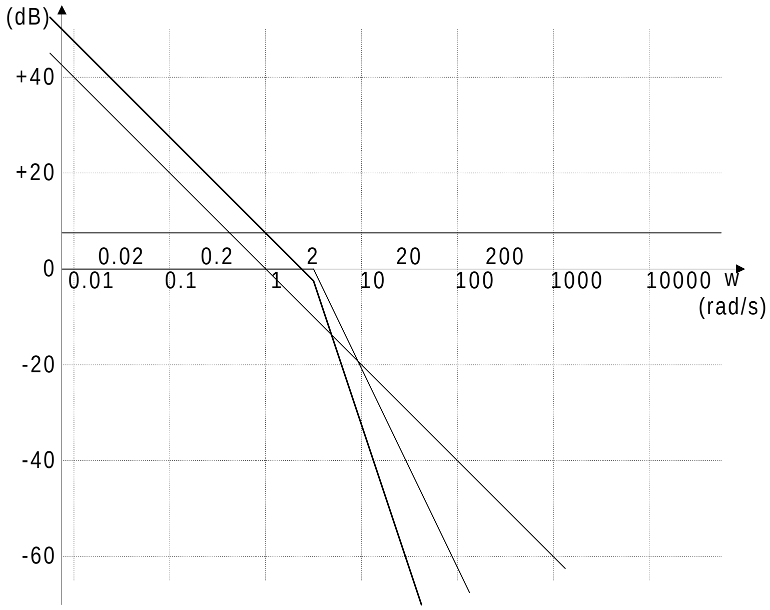
$$G(j\omega) = 2{,}5 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}1.j\omega + \left(\dfrac{j\omega}{2}\right)^2}$$

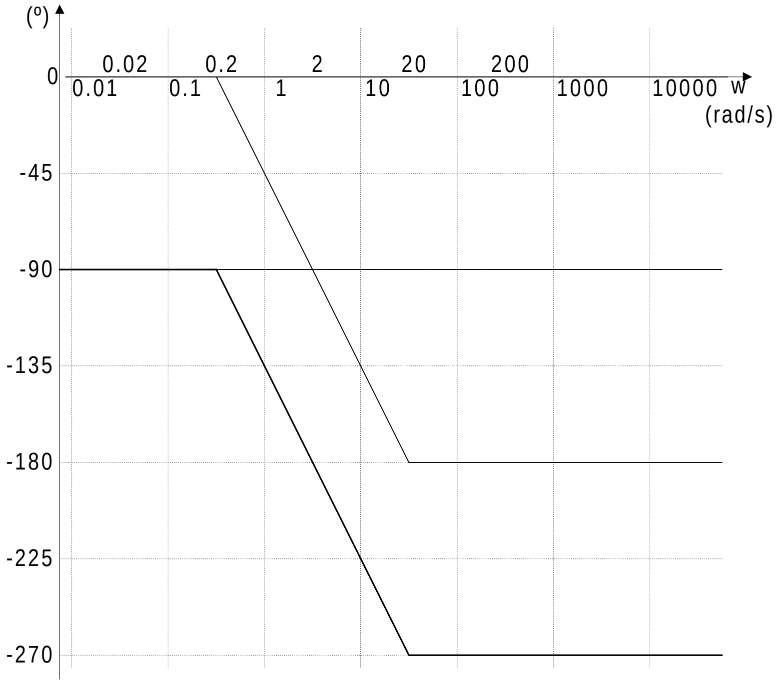
Uma vez que esta função de transferência apresenta um factor quadrático (e ζ<0,707), é necessário calcular o valor da frequência de ressonância e do correspondente pico:

$$\omega_r = \omega_n.\sqrt{1 - 2 \cdot \zeta^2} \Leftrightarrow \omega_r = 1{,}98 rad/s$$

$$M_r = \frac{1}{2.\zeta.\sqrt{1-\zeta^2}} \Leftrightarrow M_r = 5{,}025$$

Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, correspondentes a G(jω), são os seguintes:





2. e) $G(s) = \dfrac{50}{s^2.(s+5)}$

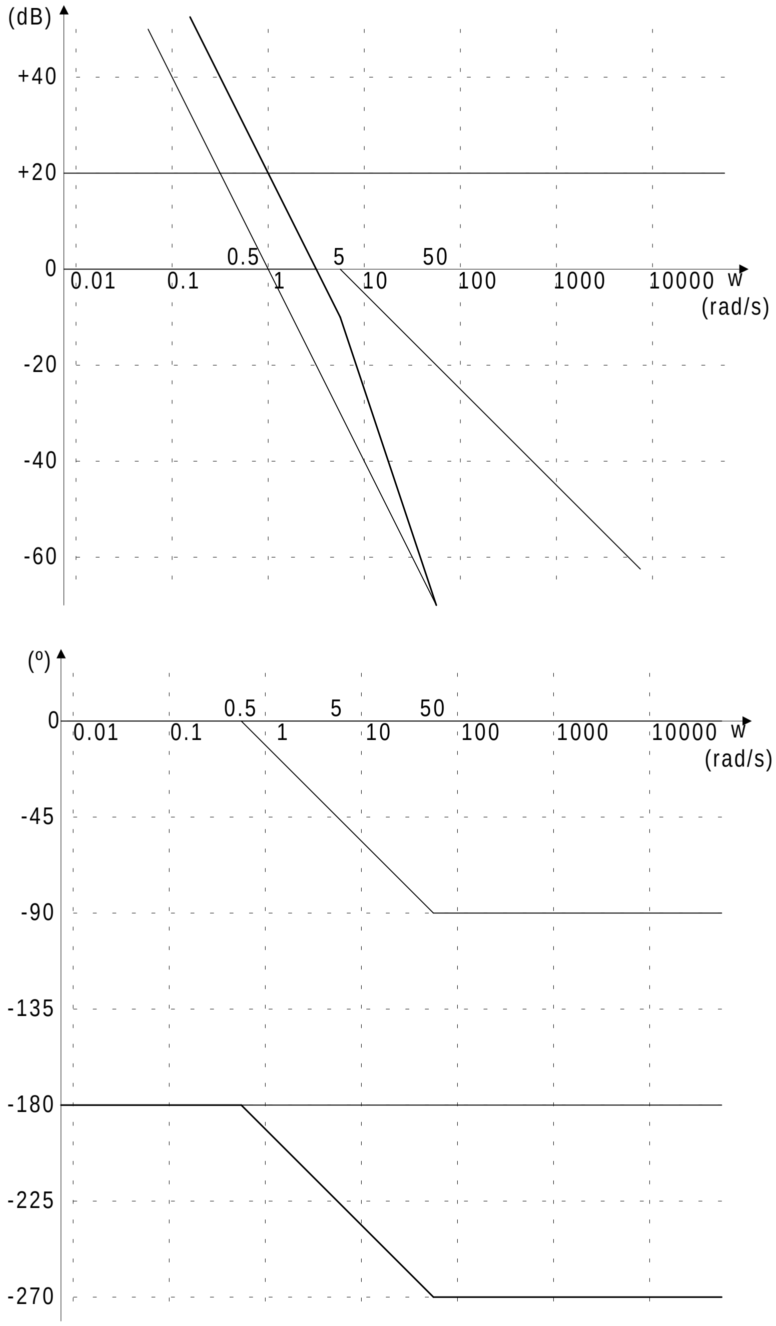
Esta função de transferência, que apresenta três pólos, pode ser decomposta nos seguintes factores factores básicos:

$$G(s) = \frac{10}{s.s.\left(\frac{s}{5}+1\right)} = 10 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\frac{s}{5}+1}$$

Pelo que:

$$G(j\omega) = 10 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{\frac{j\omega}{5}+1}$$

Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, correspondentes a G(jω), são os seguintes:



3.

3. a)

Do gráfico apresentado podemos ver que:

$20.\log[A(\omega_1)] = 0$ dB

e

20.log[A(ω_2)] = –20 dB

pelo que fazendo ω_2 = k. ω_1, temos:

20.log[A(k.ω_1)] = –20 dB $\Leftrightarrow$ k = 10

logo, conclui-se que:

ω_2 = 10. ω_1

Alternativamente, e a partir da interpretação do gráfico, podemos concluir que um declive de –6 dB/oitava, corresponde a um declive de –20 dB/déc. Logo, e uma vez que 20.log[A(ω_2)] = –20 dB, teríamos ω_2 = 10. ω_1.

3. b)

À frequência 2.ω_2 temos:

20.log[A(2.ω_2)] = –12 dB

pelo que:

A(2.ω_2) = 0,251

3. c)

O sistema possui 2 pólos e um zero; as frequências a que estes ocorrem são as seguintes:

- p_1 à frequência ω_1;
- p_2 à frequência ω_2;
- z_1 à frequência 2.ω_1;

Considerando os seguintes factores básicos para os pólos:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{p_i} + 1}$$

E para os zeros:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{z_i} + 1$$

Temos:

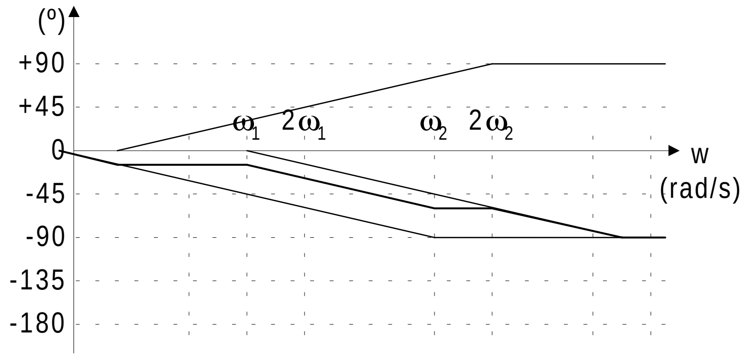
$$G(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{2.\omega_1} + 1\right).\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_1} + 1}.\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_2} + 1}$$

Logo:

$$G(s) = 5 \cdot \omega_1 \cdot \frac{s + 2.\omega_1}{(s + \omega_1) \cdot (s + \omega_2)}$$

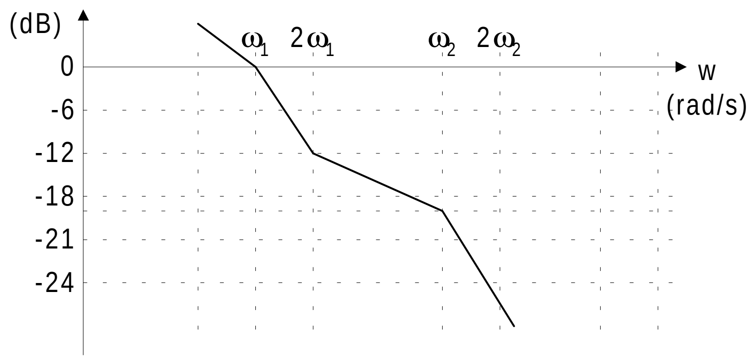
3. d)

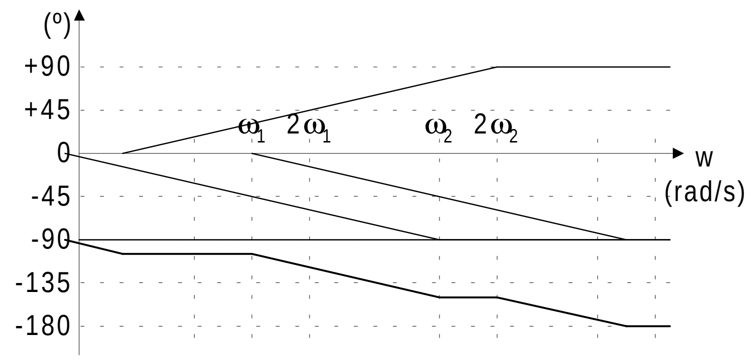
O traçado assimptótico de Bode, de fase, deste sistema, é o representado na figura seguinte:



3. e)

Acrescentar um pólo na origem a um sistema, equivale no traçado assimptótico de Bode das amplitudes a somar um declive de –20 dB/déc. e no traçado assimptótico de Bode das fases a subtrair 90º.
Para este sistema, temos então:





4.

4. a)

O sistema apresentado tem cinco pólos e um zero. As frequências a que ocorrem o zero e os pólos são as seguintes:

- $p_{1,2}$ à frequência 0 rad/s (pólo duplo na origem);
- p_3 à frequência 0,25 rad/s;
- p_4 à frequência 0,5 rad/s;
- p_5 à frequência 1 rad/s;
- z_1 à frequência 0,1 rad/s;

4. b)

Considerando os seguintes factores básicos para os pólos:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\dfrac{j\omega}{p_i} + 1}$$

E para os zeros:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{z_i} + 1$$

Temos:

$$G(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{0{,}1} + 1\right) \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{\dfrac{j\omega}{0{,}25} + 1} \cdot \frac{1}{\dfrac{j\omega}{0{,}5} + 1} \cdot \frac{1}{\dfrac{j\omega}{1} + 1}$$

Logo:

$$G(s) = \frac{1{,}25 \cdot (s + 0{,}1)}{s^2 \cdot (s + 0{,}25) \cdot (s + 0{,}5) \cdot (s + 1)}$$

5.

5. a)

Substituindo na expressão anterior os valores dos parâmetros, obtemos a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{4 \cdot \left(1 \times 10^{-6} \cdot s + 1\right)}{2 \times 10^{-3} \cdot s + 1}$$

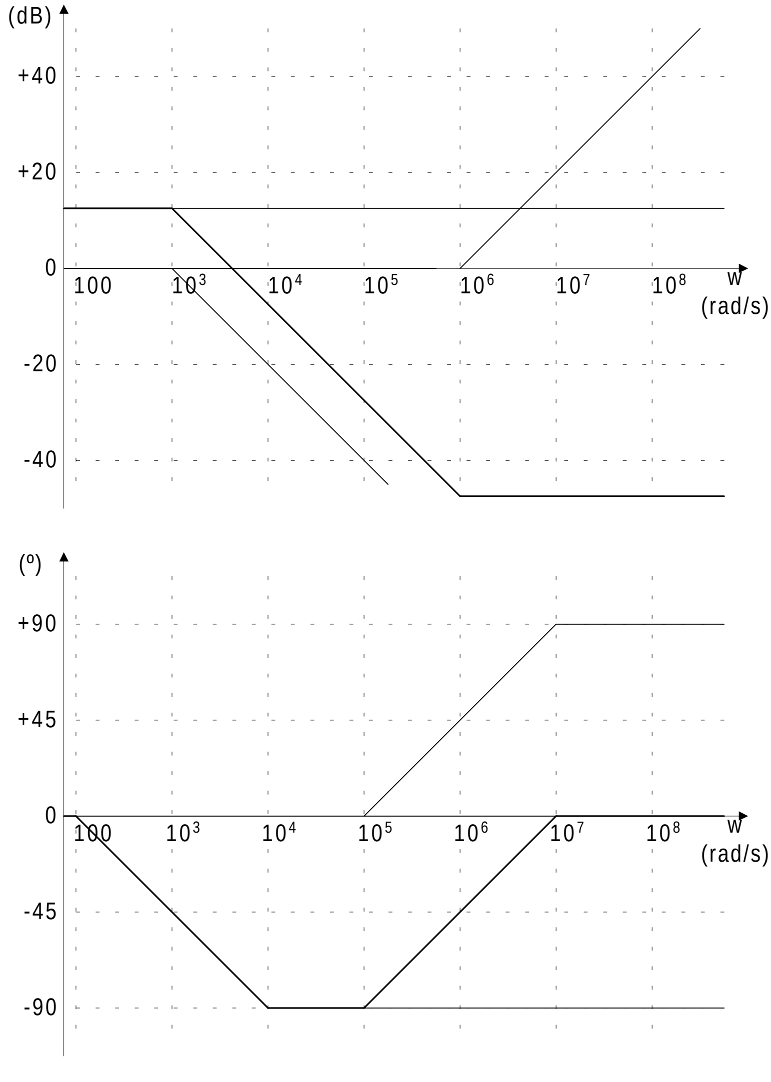
esta função de transferência pode ser reescrita como o seguinte produto de factores básicos:

$$G(j\omega)=4\cdot\left(\frac{j\omega}{1\times10^{6}}+1\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{j\omega}{2\times10^{3}}+1}$$

O sistema apresentado tem um pólo e um zero. As frequências a que ocorrem o zero e o pólo são as seguintes:

- p_1 à frequência 500 rad/s;
- z_1 à frequência $1\text{x}10^6$ rad/s;

Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, deste sistema, são os representados nas figuras seguintes:



6.

6. a)

Substituindo na expressão anterior os valores dos parâmetros, obtemos a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{0{,}05}{s \cdot (0{,}1 \cdot s + 2) \cdot (0{,}02 \cdot s + 0{,}02)}$$

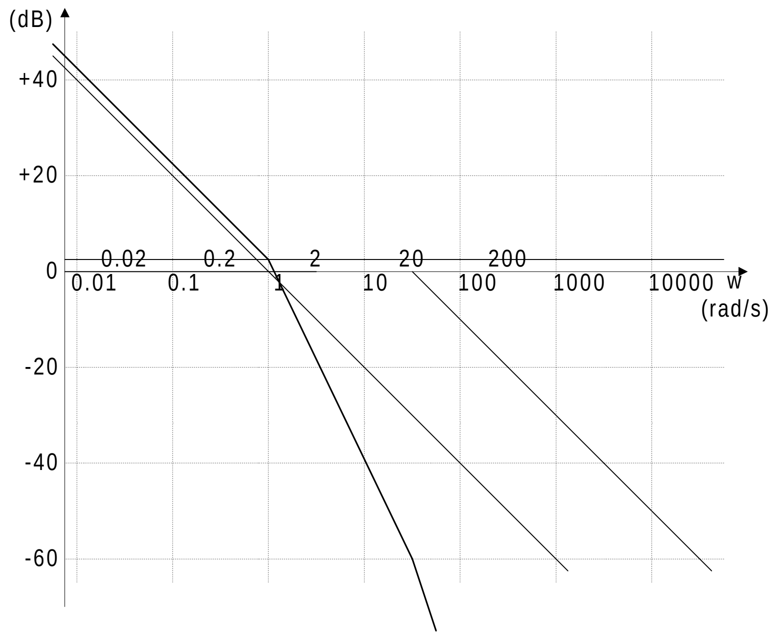
esta função de transferência pode ser reescrita como o seguinte produto de factores básicos:

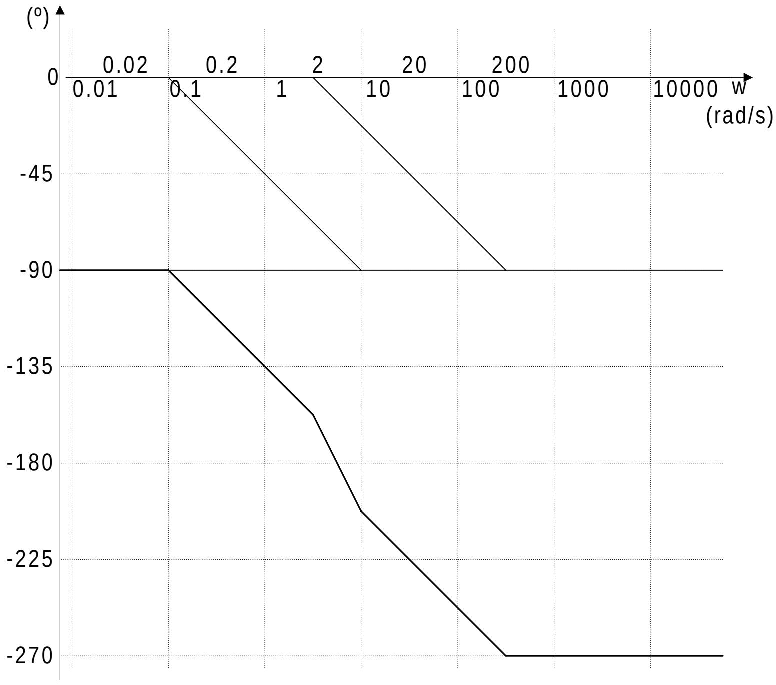
$$G(j\omega) = 1{,}25 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega + 1} \cdot \frac{1}{\frac{j\omega}{20} + 1}$$

O sistema apresentado tem três pólos. As frequências a que estes ocorrem são as seguintes:

- p_1 à frequência 0 rad/s (pólo na origem);
- p_2 à frequência 1 rad/s;
- p_3 à frequência 20 rad/s;

Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, deste sistema, são os representados nas figuras seguintes:





6. b)

Uma vez que:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{0{,}05}{s \cdot (0{,}1 \cdot s + 2) \cdot (0{,}02 \cdot s + 0{,}02)}$$

e a entrada para o sistema é sinusoidal:

$$e_f(t) = 24 \cdot sen(100 \cdot \pi \cdot t)$$

temos que:

$$\theta(t) = \left|G(j\omega)\right|\Big|_{\omega=100\cdot\pi} \cdot 24 \cdot sen\left\{100 \cdot \pi \cdot t - \arg\left[G(j\omega)\right]_{\omega=100\cdot\pi}\right\}$$

$$\theta(t) = 24 \times 8 \times 10^{-7} \cdot sen(100 \cdot \pi \cdot t - 1{,}5)$$