TESIS:
Teoria dos Sistemas

Método do Lugar Geométrico de Raízes

Método do Lugar Geométrico de Raízes

1. Introdução
2. O Método do Lugar Geométrico de Raízes
3. Construção do Lugar Geométrico de Raízes

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

1. Introdução
2. O Método do Lugar Geométrico de Raízes
3. Construção do Lugar Geométrico de Raízes

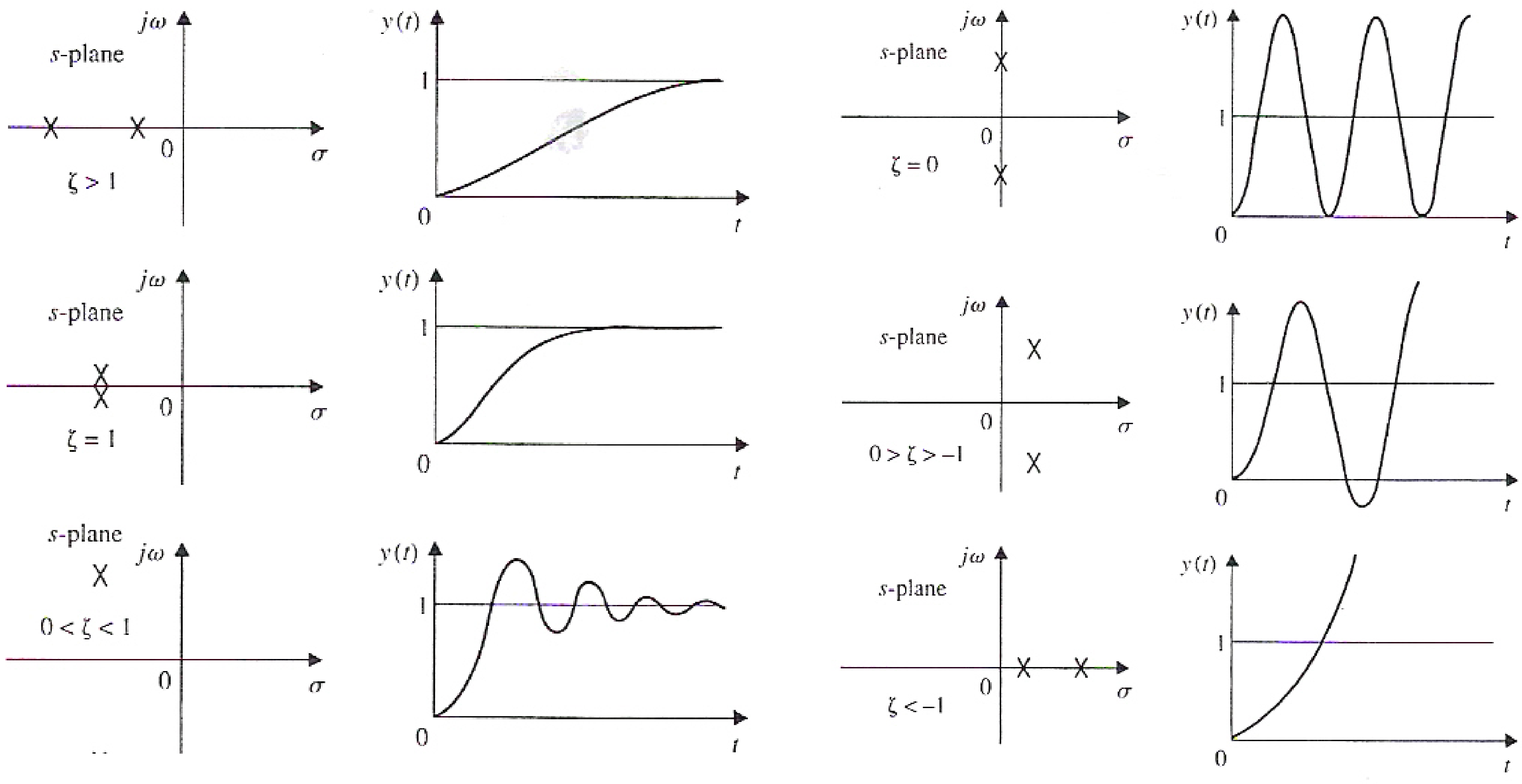
jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Localização dos pólos da função de transferência em Malha Fechada determina o tipo de resposta do sistema

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes



Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Critério de Routh-Hurwitz
  - critério algébrico que mostra se um dado polinómio tem raízes com parte real negativa (sistema estável) ou positiva (sistema instável)
  - não indica os valores das raízes

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

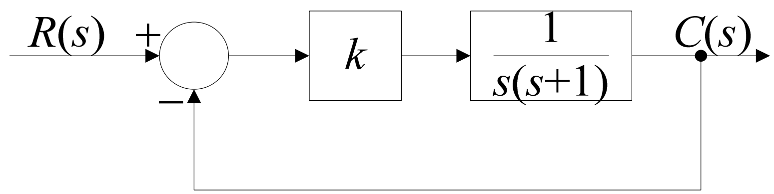
Método do Lugar Geométrico de Raízes

1. Introdução
2. O Método do Lugar Geométrico de Raízes
3. Construção do Lugar Geométrico de Raízes

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Lugar Geométrico de Raízes



- função de transferência em malha fechada

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + s + k}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

k	p_1	p_1
0		
0,1		
0,2		
0,25		
0,3		
0,4		
...		

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Lugar Geométrico de Raízes
  - para $0 \leq k \leq 0{,}25$ a função de transferência tem um par de pólos dados por

$$p_1, p_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4k}}{2}$$

  - para $k > 0{,}25$ os pólos são complexos conjugados da forma

$$p_1, p_2 = -0{,}5 \pm j\frac{\sqrt{4k-1}}{2}$$

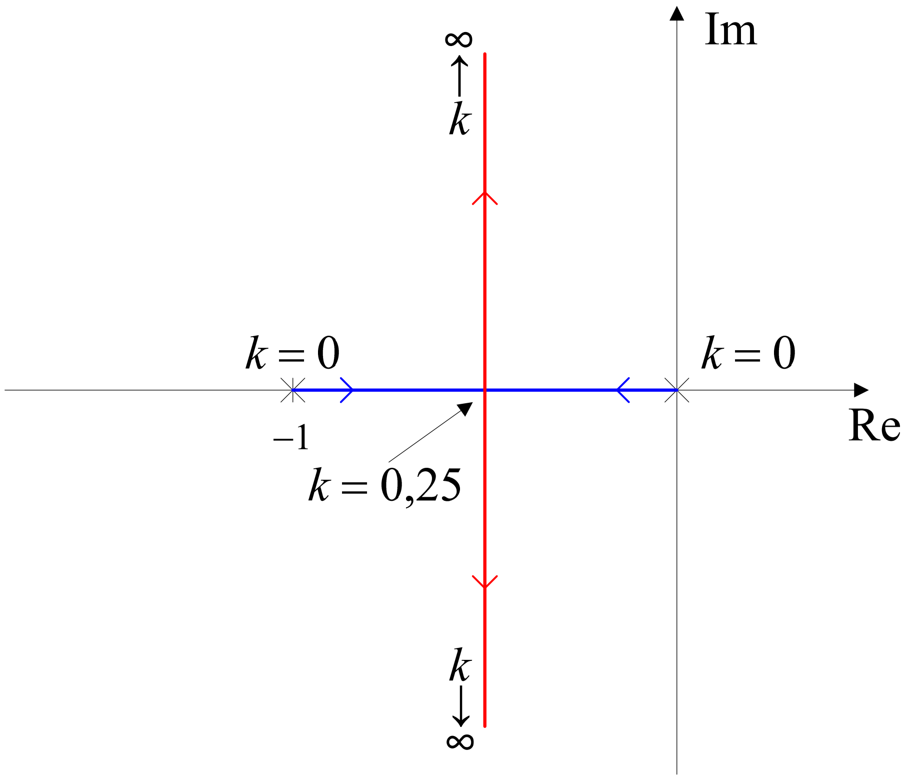
jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Lugar Geométrico de Raízes

$$p_1, p_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4k}}{2}$$

$$p_1, p_2 = -0,5 \pm j\frac{\sqrt{4k-1}}{2}$$



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Lugar Geométrico de Raízes (*root-locus*)
  - mostra não só os valores de k para os quais o sistema é estável, mas também permite prever o desempenho em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- O método do Lugar Geométrico de Raízes
  - conjunto de regras para esboçar o Lugar Geométrico dos pólos de $C(s)/R(s)$, para $k \in [0, +\infty[$
    - sem resolver a equação característica
    - a partir dos zeros e dos pólos da Função de Transferência em Malha Aberta

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

1. Introdução

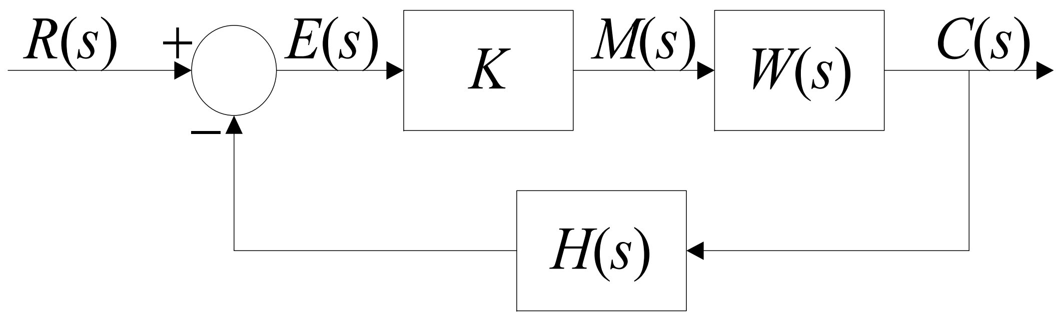
2. O Método do Lugar Geométrico de Raízes

3. Construção do Lugar Geométrico de Raízes

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - considere-se



  - função de transferência em malha fechada

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot W(s)}{1 + K \cdot W(s) \cdot H(s)}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - função de transferência em malha fechada

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot W(s)}{1 + K \cdot W(s) \cdot H(s)}$$

  - considere-se

$$W(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{d}(s - p_i)}, \quad d \geq n$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - função de transferência em malha fechada

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot W(s)}{1 + K \cdot W(s) \cdot H(s)}$$

  - equação característica

$$1 + K \cdot W(s) \cdot H(s) = 0 \Leftrightarrow D(s) + K \cdot N(s) = 0$$

    - tem d raízes
    - raízes variam continuamente com K

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 1: o número de ramos do Lugar Geométrico de Raízes é igual ao número de pólos da Função de Transferência em malha aberta

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 2: os ramos do Lugar Geométrico de Raízes são curvas contínuas

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - equação característica

$$1+K\cdot W(s)\cdot H(s)=0 \;\Leftrightarrow\; D(s)+K\cdot N(s)=0$$

  - das equações anteriores, para um ponto s_0 pertencente ao Lugar de Raízes

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}(s_0-z_i)}{\prod_{i=1}^{d}(s_0-p_i)}=-\frac{1}{K}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(s_0 - z_i\right)}{\prod_{i=1}^{d}\left(s_0 - p_i\right)} = -\frac{1}{K}$$

  - esta equação mostra que
    - para valores pequenos de K, s_0 está perto de p_i
    - para valores elevados de K, s_0 está perto de z_i ou $|s_0|$ é elevado
  - se se definir o início do Lugar de Raízes nos pontos onde $K = 0$, obtém-se a regra seguinte

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 3: o Lugar de Raízes começa nos pólos da função de transferência em malha aberta e termina ou nos zeros ou no infinito

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - pólos da função de transferência em malha fechada são raízes de um polinómio com coeficientes reais
    - ocorrem aos pares conjugados no caso de serem números complexos
  - isto leva à seguinte regra

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 4: o Lugar de Raízes é simétrico relativamente ao eixo real

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - a equação anterior

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}(s_0 - z_i)}{\prod_{i=1}^{d}(s_0 - p_i)} = -\frac{1}{K}$$

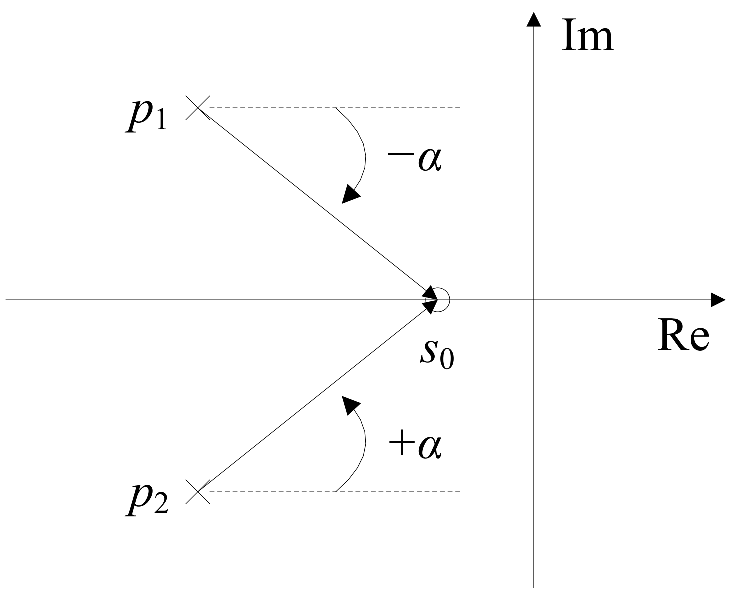
  - deve satisfazer a condição angular

$$\sum_{i=1}^{n} \arg(s_0 - z_i) - \sum_{i=1}^{d} \arg(s_0 - p_i) = (2l+1)180^{o}, \quad l = 0, \pm 1, \ldots$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

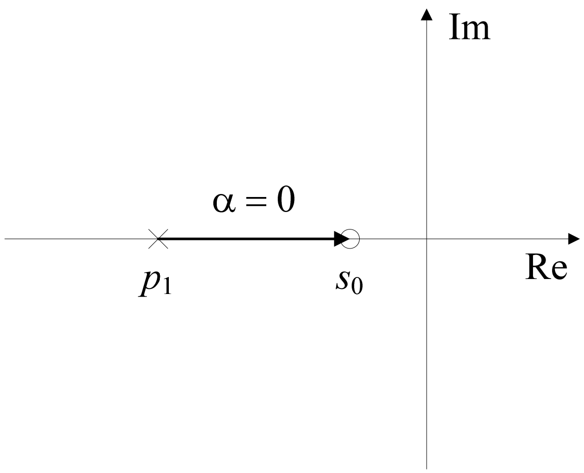
- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - se s_0 pertence ao eixo real então a contribuição angular de um par de pólos, ou de zeros, complexos conjugados é nula



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

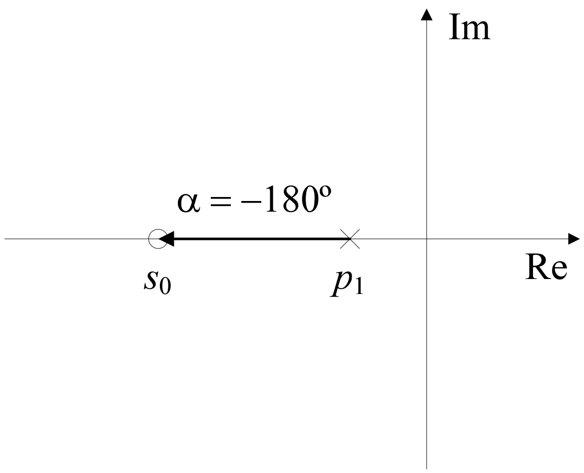
- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - se os pólos, ou zeros, se situam à esquerda de s_0 então a sua contribuição angular é nula



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - se os pólos (zeros) se situam à direita de s_0 então a sua contribuição angular é –180º (+180º)



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 5: um ponto s_0 no eixo real pertence ao Lugar de Raízes se, e somente se, o número de pólos e zeros da função de transferência em malha aberta (em cima do eixo real) que se situam à direita de s_0 for um número ímpar

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

    - regra 6: os pontos onde o Lugar de Raízes sai ou entra no eixo real, são pontos onde K, visto como função de $s \in \mathbb{R}$, atinge, respectivamente um máximo ou um mínimo (pontos de quebra)

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - exemplo 1

$$W(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)}, \quad K \in [0, +\infty[$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - regra 1: o número de ramos do Lugar Geométrico de Raízes é igual ao número de pólos da Função de Transferência em malha aberta

$$W(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)}, \quad K \in [0, +\infty[$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 2: os ramos do Lugar Geométrico de Raízes são curvas contínuas

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 3: o Lugar de Raízes começa nos pólos da função de transferência em malha aberta e termina ou nos zeros ou no infinito

$$W(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s(s+1)},\quad K\in[0,+\infty[$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - o LGR começa em

    $-1 + j0$ e

    $0 + j0$
  - e acaba em

    $-2 + j0$ e

    $-\infty + j0$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 4: o Lugar de Raízes é simétrico relativamente ao eixo real

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 5: um ponto s_0 no eixo real pertence ao Lugar de Raízes se, e somente se, o número de pólos e zeros da função de transferência em malha aberta (em cima do eixo real) que se situam à direita de s_0 for um número ímpar

$$W(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s(s+1)},\quad K\in[0,+\infty[$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - os segmentos sobre o eixo real

    $]-\infty, -2]$ e

    $[-1, 0]$

    pertencem ao LR

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 6: os pontos onde o Lugar de Raízes sai ou entra no eixo real, são pontos onde k, visto como função de $s \in \mathbb{R}$, atinge, respectivamente um máximo ou um mínimo (pontos de quebra)

$$W(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)}, \quad K \in [0, +\infty[$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - pontos de quebra

$$K = -\frac{s(s+1)}{(s+2)} \Rightarrow \frac{dK}{ds} = -\frac{s^2+4s+2}{(s+2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = -3,414 & \leftarrow \quad \text{ponto } b_1 \\ s = -0,586 & \leftarrow \quad \text{ponto } b_0 \end{cases}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - substituindo, vem

    ponto $b_1 \rightarrow K = 5{,}828$

    ponto $b_0 \rightarrow K = 0{,}172$

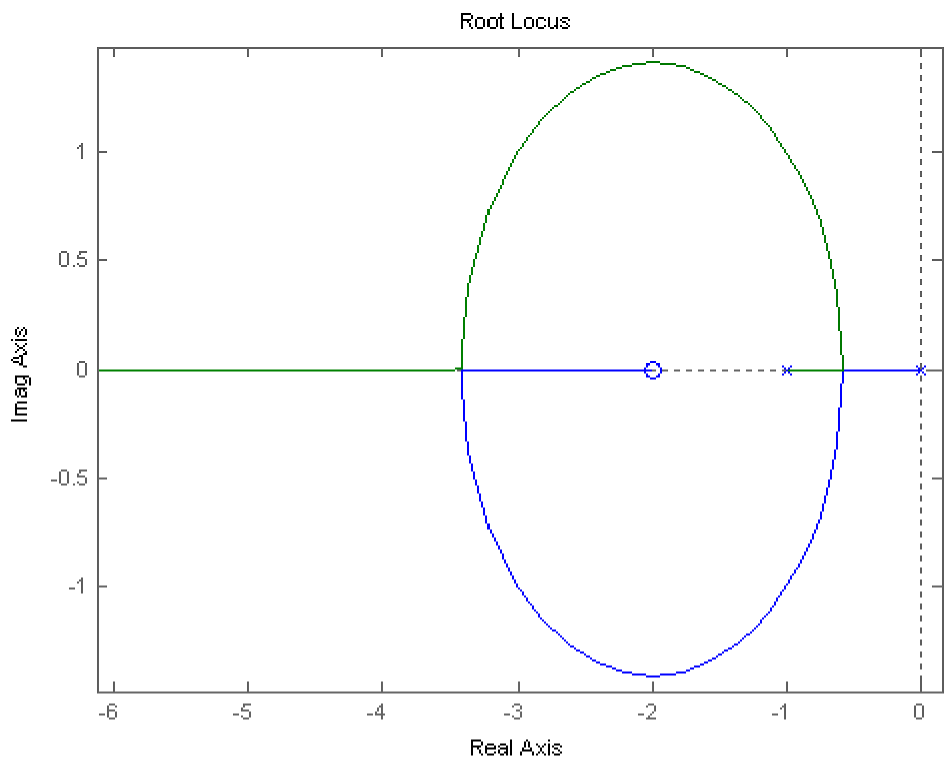
  - logo, a função de transferência em malha fechada tem raízes reais para

    $K \in [0;\, 0{,}172] \cup [5{,}828;\, +\infty[$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - equação

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}(s_0 - z_i)}{\prod_{i=1}^{d}(s_0 - p_i)} = -\frac{1}{K}$$

  - deve satisfazer a condição angular

$$\sum_{i=1}^{n}\arg(s_0 - z_i) - \sum_{i=1}^{d}\arg(s_0 - p_i) = (2l+1)180^{o}, \quad l = 0, \pm 1, \ldots$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - função de transferência tem pólos ou zeros complexos
    - importante conhecer a direcção segundo a qual o Lugar de Raízes
      - deixa o pólo complexo (ângulo de partida)
      - ou entra no zero complexo (ângulo de chegada)
  - por exemplo, considere-se

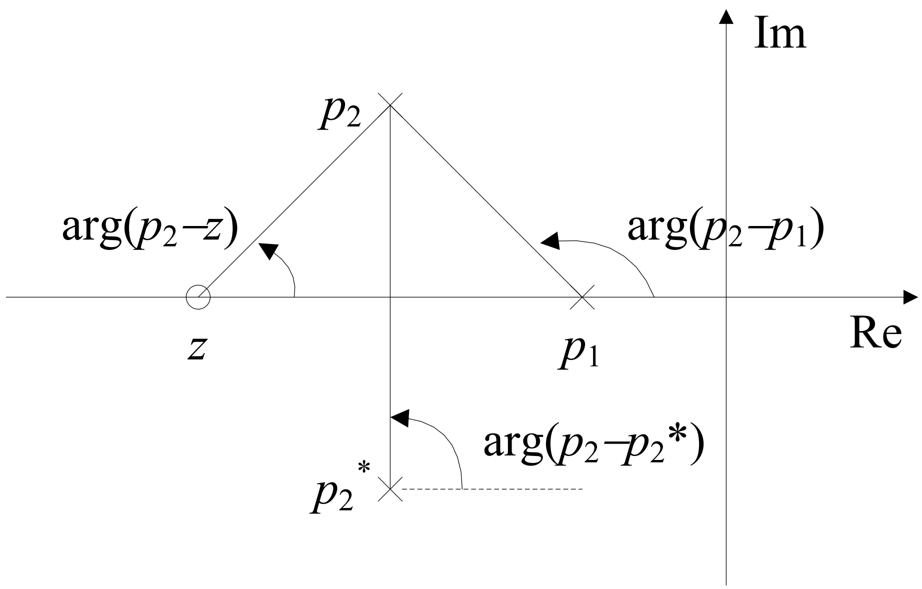
$$W(s)H(s) = \frac{K(s-z)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_2^*)}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - considere-se um ponto próximo de p_2
    - neste caso

$$s - z \approx p_2 - z; \quad s - p_1 \approx p_2 - p_1; \quad s - p_2^* \approx p_2 - p_2^*$$



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - considere-se um ponto próximo de p_2
    - neste caso

$$s - z \approx p_2 - z; \quad s - p_1 \approx p_2 - p_1; \quad s - p_2{}^* \approx p_2 - p_2{}^*$$

  - se s pertence ao Lugar de Raízes então será

$$\arg\left(s - p_2\right) \approx \left(2l + 1\right)180^{\circ} + \arg\left(p_2 - z\right) - \arg\left(p_2 - p_1\right) - \arg\left(p_2 - p_2^*\right)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - regra 7: se os eixos real e imaginário tiverem escalas idênticas, então o ângulo da tangente ao Lugar de Raízes no pólo (ou no zero) da função de transferência em malha aberta pode ser obtido somando (subtraindo) as contribuições angulares dos zeros (dos pólos) e subtraindo (somando) as contribuições angulares dos pólos (dos zeros) a 180º

$$\arg\left(s-p_2\right)\approx\left(2l+1\right)180^{\circ}+\arg\left(p_2-z\right)-\arg\left(p_2-p_1\right)-\arg\left(p_2-p_2^{*}\right)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - exemplo $W(s)H(s)=\dfrac{K}{(s-p)^m}, \quad m=1,2,3,4$
  - neste caso, regras já desenvolvidas são pouco úteis
  - seja $s-p=re^{j\theta}$
  - então $W(s)H(s)=\dfrac{K}{r^m}\arg(-m\theta)$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - para um ponto $s_0 = r_0 e^{j\theta_0}$ do Lugar de Raízes deverá ser satisfeita a condição angular

$$-m\theta_0 = (2l+1)180^{\circ}$$

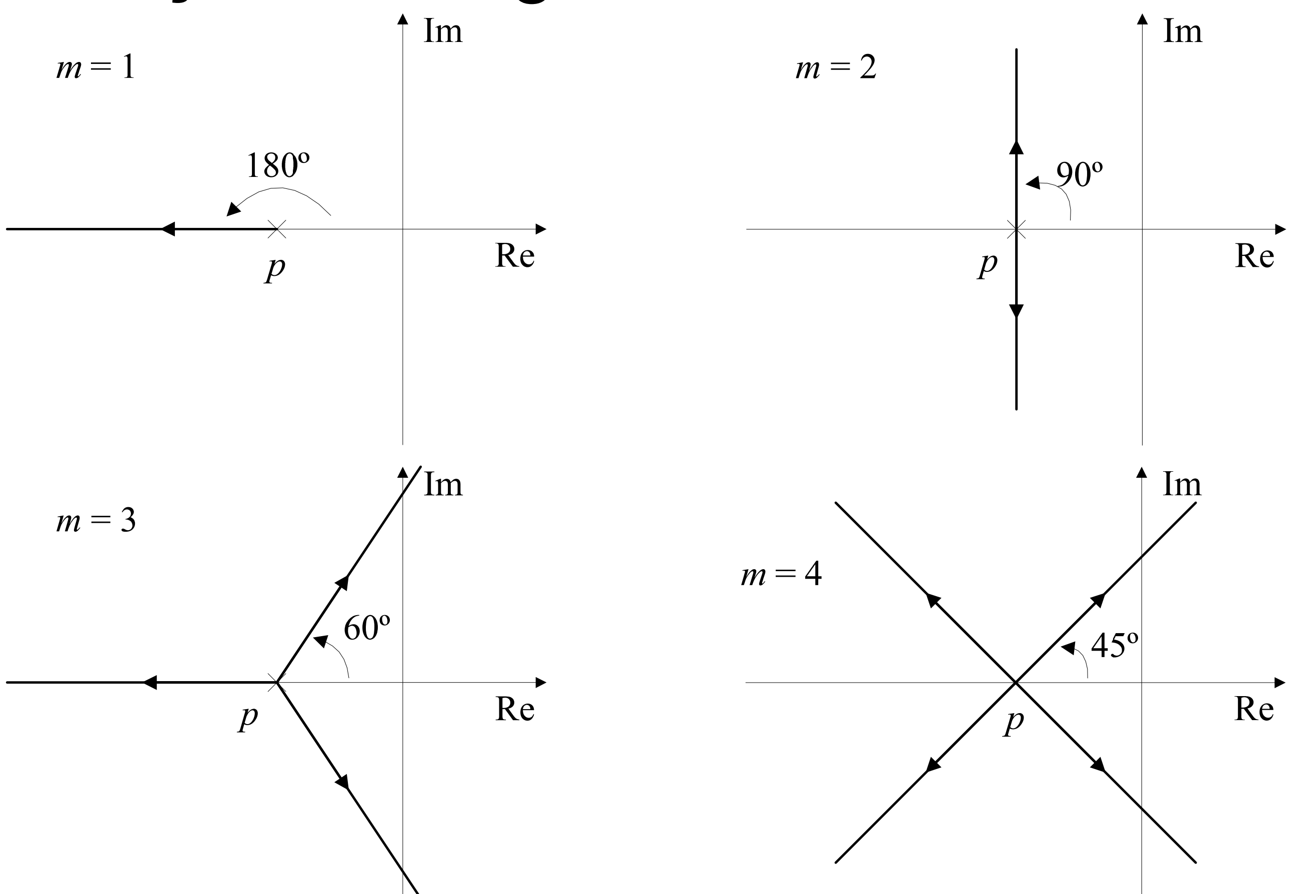
  - assim, o Lugar de Raízes consiste em rectas que passam pelo ponto p do eixo real e que fazem ângulos de

$$\frac{(2l+1)180^{\circ}}{m}, \quad l = 0, 1, 2, 3, \ldots (m-1)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - quando a função de transferência em malha aberta tem n zeros e $d > n$ pólos então $d - n$ ramos do Lugar de Raízes acabam no infinito

$$K \cdot W(s) \cdot H(s) = K \frac{s^n - \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \right) s^{n-1} + \ldots}{s^d - \left(\sum_{i=1}^{d} p_i \right) s^{d-1} + \ldots}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

$$K \cdot W(s) \cdot H(s) = K \frac{s^n - \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right) s^{n-1} + \dots}{s^d - \left(\sum_{i=1}^{d} p_i\right) s^{d-1} + \dots}$$

  - dividindo os dois polinómios pelo numerador, vem

$$K \cdot W(s) \cdot H(s) = K \frac{1}{s^{d-n} - \left(\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i\right) s^{d-n-1} + \dots}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

$$K \cdot W(s) \cdot H(s) = K \frac{1}{s^{d-n} - \left(\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i \right) s^{d-n-1} + \ldots}$$

  - sabendo que

$$(s-p)^{d-n} = s^{d-n} - (d-n)\, p s^{d-n-1} + \ldots$$

  - vem $\quad p = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{(d-n)}$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - regra 8: para valores elevados de s, $d-n$ ramos do Lugar de Raízes são assimptotas rectas que fazem ângulos com o eixo real de

$$\frac{(2l+1)180^{\circ}}{(d-n)}, \quad l = 0, 1, 2, 3, \ldots (d-n-1)$$

  - e que intersectam o eixo real no ponto (centróide)

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{(d-n)}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 9: quando o Lugar de Raízes cruza o eixo imaginário, os pontos de intersecção e o ganho nesses pontos podem ser determinados pelo critério de estabilidade de Routh-Hurwitz ou pela equação característica

    $$1 + GH(s)\Big|_{s=j.\omega} = 0$$

    resultando ω e K

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - exemplo 2

$$KW(s)H(s) = K\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 1: o número de ramos do Lugar Geométrico de Raízes é igual ao número de pólos da Função de Transferência em malha aberta

$$KW(s)H(s) = K\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - $d = 3$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 2: os ramos do Lugar Geométrico de Raízes são curvas contínuas

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 3: o Lugar de Raízes começa nos pólos da função de transferência em malha aberta e termina ou nos zeros ou no infinito

$$KW(s)H(s) = K\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - $d = 3$
  - $n = 0$

  - o LGR começa em

    $-2 + j0,$

    $-1 + j0$ e

    $0 + j0$
  - e acaba em

    $-\infty + j0,$

    $+\infty + j\infty$ e

    $+\infty - j\infty$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 4: o Lugar de Raízes é simétrico relativamente ao eixo real

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 5: um ponto s_0 no eixo real pertence ao Lugar de Raízes se, e somente se, o número de pólos e zeros da função de transferência em malha aberta (em cima do eixo real) que se situam à direita de s_0 for um número ímpar

$$KW(s)H(s) = K\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - os segmentos sobre o eixo real

    $]-\infty, -2]$ e

    $[-1, 0]$

    pertencem ao LR

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 6: os pontos onde o Lugar de Raízes sai ou entra no eixo real, são pontos onde k, visto como função de $s \in \mathbb{R}$, atinge, respectivamente um máximo ou um mínimo (pontos de quebra)

$$KW(s)H(s) = K\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - ponto de quebra

$$K = -s(s+1)(s+2) \Rightarrow \frac{dK}{ds} = \frac{d}{ds}\left(-s^3 - 3s^2 - 2s\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = \cancel{-1{,}577} \\ s = -0{,}423 \quad \Rightarrow K = 0{,}384 \end{cases}$$

  - logo, a função de transferência em malha fechada tem raízes reais para

$$K \in [0;\, 0{,}384]$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - regra 7: se os eixos real e imaginário tiverem escalas idênticas, então o ângulo da tangente ao Lugar de Raízes no pólo (ou no zero) da função de transferência em malha aberta pode ser obtido somando (subtraindo) as contribuições angulares dos zeros (dos pólos) e subtraindo (somando) as contribuições angulares dos pólos (dos zeros) a 180º

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - regra 8: para valores elevados de s, $d-n$ ramos do Lugar de Raízes são assimptotas rectas que fazem ângulos com o eixo real de

$$\frac{(2l+1)180^{\circ}}{(d-n)}$$

  - e que intersectam o eixo real no ponto (centróide)

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{(d-n)}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

$$KW(s)H(s) = K\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

  - $d - n = 3 - 0$
  - ângulos das assimptotas $\dfrac{(2l+1)180^{\circ}}{3} = \pm 60^{\circ}, 180^{\circ}$
  - centróide $\sigma = \dfrac{0-1-2}{3} = -1$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

  - regra 9: quando o Lugar de Raízes cruza o eixo imaginário, os pontos de intersecção e o ganho nesses pontos podem ser determinados pelo critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

$$KW(s)H(s) = K\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes
  - equação característica $s^3 + 3s^2 + 2s + K$

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 2 \\
2 & 3 & K \\
1 & (6-K)/3 & \\
0 & K &
\end{array}
$$

$$K = 6$$

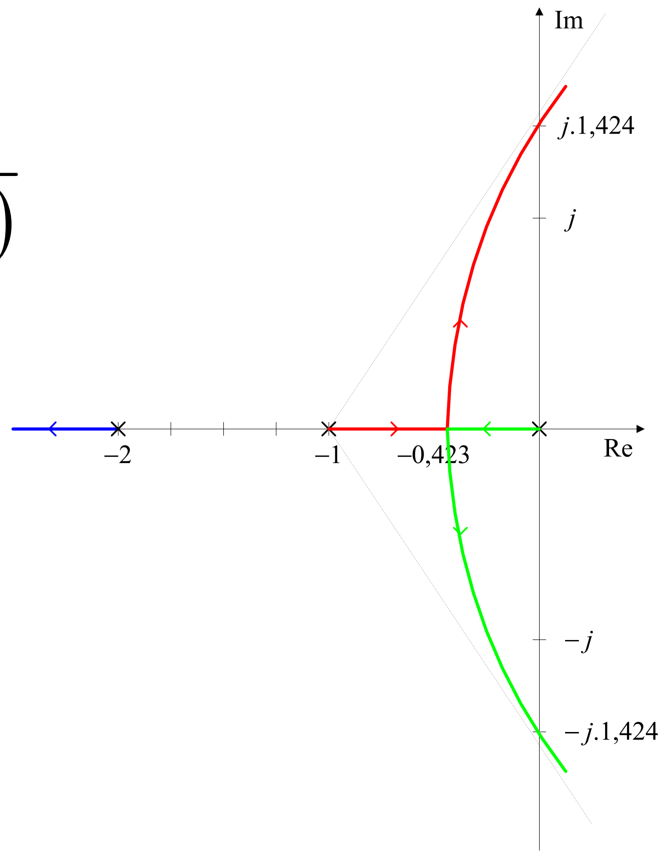
$$3s^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow s = \pm j\sqrt{2}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Método do Lugar Geométrico de Raízes

- Construção do Lugar Geométrico de Raízes

$$KW(s)H(s) = K\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Regras para a Construção do LGR Directo (*K* > 0)

- Exemplo 3

$$KG(s)H(s) = K\frac{1}{(1+s)(1+0,1s)(s^2+6s+18)}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Regras para a Construção do LGR Directo (K > 0)

1. Obter a equação característica do sistema na forma $GH(s) = -1$ com o parâmetro K em evidência

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Regras para a Construção do LGR Directo ($K > 0$)

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta (FTMA) do sistema
   - o número de ramos do LGR é igual ao número de pólos da FTMA
   - o LGR começa nos pólos da FTMA e termina nos zeros da FTMA ou no infinito

Regras para a Construção do LGR Directo ($K > 0$)

3. São ramos do LGR sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Regras para a Construção do LGR Directo ($K > 0$)

4. O número de assimptotas é $d - n$ ($d =$ nº de pólos da FTMA; $n =$ nº de zeros da FTMA)
   - os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180^{\circ}}{d-n}$$

   - a intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Regras para a Construção do LGR Directo (*K* > 0)

5. Os pontos de entrada e saída do LGR no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por

$$\frac{dk}{ds} = 0$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Regras para a Construção do LGR Directo (*K* > 0)

6. Os ângulos de partida do LGR dos pólos complexos são dados por

$$\phi = 180^{\circ} - \left(\sum_{i=1}^{d-1} \arg(s - p_i) \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \arg(s - z_i) \right)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Regras para a Construção do LGR Directo (*K* > 0)

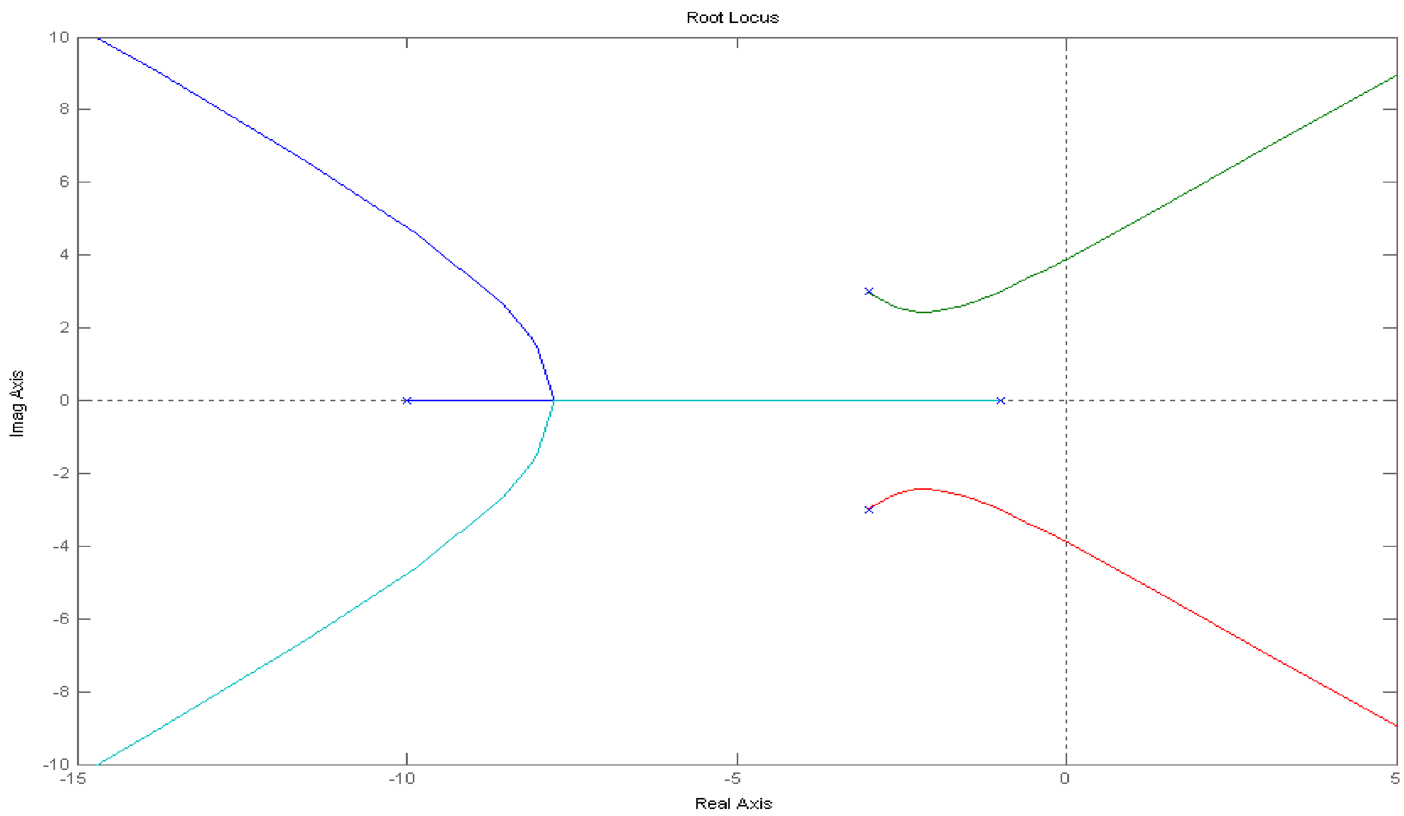
7. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica

$$1 + GH(s)\Big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e K

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Regras para a Construção do LGR Directo ($K > 0$)



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt