1. a) $GH(s) = \dfrac{k}{s(s+1)(s+2)}$

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: não tem
Pólos: $p_1 = 0$
$p_2 = -1$
$p_3 = -2$

Nº de zeros: n = 0
Nº de pólos: d = 3

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 3.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 3

Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180^{o}}{d-n} = \frac{(1+2.h).180^{o}}{3-0} = \pm 60^{o}, 180^{o}$$

A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{0-1-2-0}{3-0} = -1$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-s.(s+1).(s+2)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3.s^2 - 6.s - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -1{,}577 \\ s_2 = -0{,}423 \end{cases}$$

Neste caso só a segunda solução é válida.

6. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\Big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

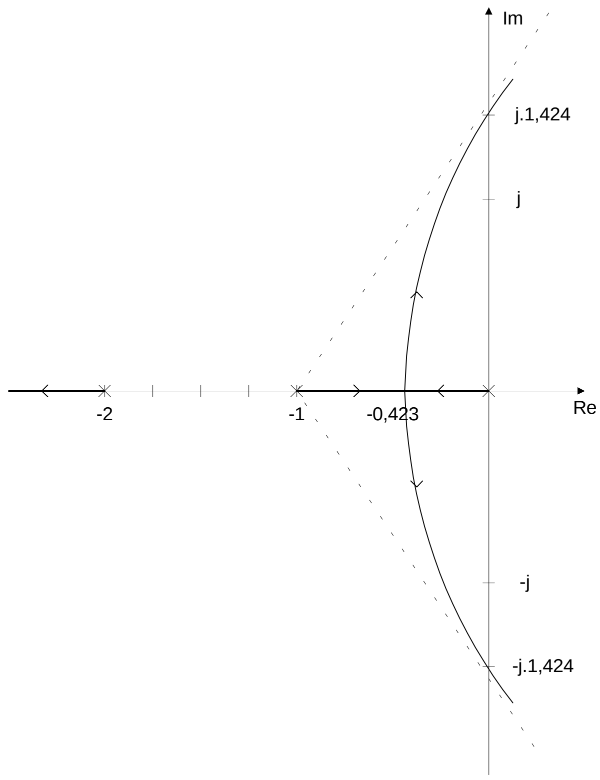
$$1 + \left.\frac{k}{s(s+1)(s+2)}\right|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^3 + 3.s^2 + 2.s + k\Big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -j.\omega^3 - 3.\omega^2 + 2.j.\omega + k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ \omega = \sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} k = 6 \\ \omega = -\sqrt{2} \end{cases}$$

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



1. b) $GH(s) = k\dfrac{3s}{(s+2)(s^2+6s+18)}$

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s) = k.\frac{3.s}{(s+2).(s^2+6.s+18)} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

   Zeros: $z_1 = 0$
   Pólos: $p_1 = -2$
   $p_2 = -3 + j.3$
   $p_3 = -3 - j.3$

   Nº de zeros: n = 1
   Nº de pólos: d = 3

   O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 3.

   O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 2

   Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180^{o}}{d-n} = \frac{(1+2.h).180^{o}}{3-1} = \pm 90^{o}$$

A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{-2-3+j.3-3-j.3-0}{3-1} = \frac{-8}{2} - 4$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{(s+2).(s^2+6.s+18)}{3.s}\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -s^3 - 4.s^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -2{,}8834 + j.1{,}3691 \\ s_1 = -2{,}8834 - j.1{,}3691 \\ s_1 = 1{,}7677 \end{cases}$$

Conclui-se que o L.G.R. não tem pontos de entrada/saída no eixo real.

6. Os ângulos de partida do L.G.R. dos pólos complexos são dados por:

$$\phi = 180^{o} - \left(\arg\left(\sum_{i=1}^{d-1}(s-p_i)\right) - \arg\left(\sum_{i=1}^{n}(s-z_i)\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 180^{o} - \left[\arg(s+2) + \arg(s+3+j.3) - \arg(s)\right]_{s=-3+j.3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 180^{o} - \arg(-1+j.3) - \arg(j.6) + \arg(-3+j.3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 180^{o} - 108{,}435^{o} - 90^{o} + 135^{o} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 116{,}565^{o}$$

7. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

$$1 + k.\left.\frac{3.s}{(s+2).(s^2+6.s+18)}\right|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

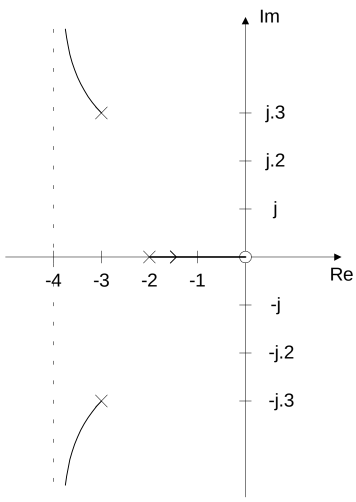
$$\Leftrightarrow s^3 + 8.s^2 + 30.s + 3.k.s + 36\Big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -j.\omega^3 - 8.\omega^2 + 30.j.\omega + 3.k.j.\omega + 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -10 \\ \omega = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} k = -8{,}5 \\ \omega^2 = 4{,}5 \end{cases}$$

Conclui-se que o L.G.R. deste sistema não intersecta o eixo imaginário.

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



1. c) $GH(s) = k.\frac{(s+3)}{s.(s+1).(s+2).(s+4)}$

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s) = k.\frac{(s+3)}{s.(s+1).(s+2).(s+4)} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: $p_1 = -3$
Pólos: $p_1 = 0$
$p_2 = -1$
$p_3 = -2$
$p_4 = -4$

Nº de zeros: n = 1
Nº de pólos: d = 4.

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 4.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 3

   Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180^{o}}{d-n} = \frac{(1+2.h).180^{o}}{4-1} = \pm 60^{o}, 180^{o}$$

   A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{0-1-2-4+3}{4-1} = -1{,}33$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{s.(s+1).(s+2).(s+4)}{(s+3)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3.s^4 - 26.s^3 - 77.s^2 - 84.s - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -3{,}3110 + j.0{,}6812 \\ s_1 = -3{,}3110 - j.0{,}6812 \\ s_3 = -1{,}6097 \\ s_4 = -0{,}4349 \end{cases}$$

   Neste caso só a última solução é válida.

6. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\big|_{s=j.\omega} = 0$$

   resultando ω e k.

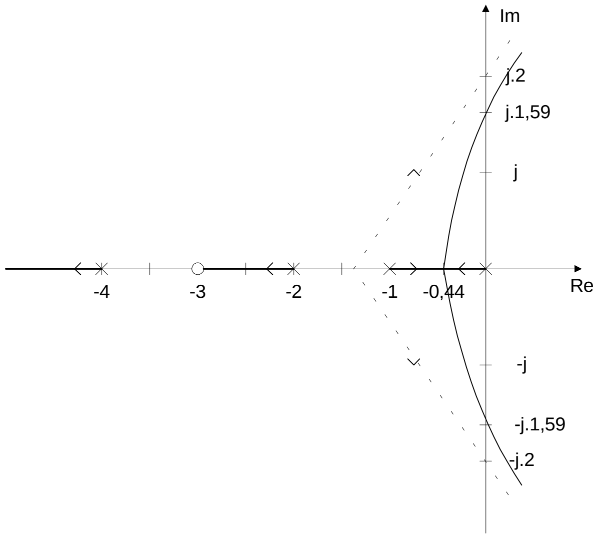
$$1 + k.\left.\frac{(s+3)}{s.(s+1).(s+2).(s+4)}\right|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^4 + 7.s^3 + 14.s^2 + (8+k).s + 3.k\Big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega^4 - 7.j.\omega^3 - 14.\omega^2 + (8+k).j.\omega + 3.k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \omega = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} k = 9{,}645 \\ \omega = 1{,}59 \end{cases} \vee \begin{cases} k = 9{,}645 \\ \omega = -1{,}59 \end{cases}$$

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



1. d) $GH(s) = k\dfrac{(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2}$

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s) = k.\frac{(s+1)}{s.(s+2).(s+4)^2} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: $z_1 = -1$
Pólos: $p_1 = 0$
$p_2 = -2$
$p_3 = p_4 = -4$ (pólo duplo)

Nº de zeros: n = 1
Nº de pólos: d = 4

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 4.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 3

   Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180^{o}}{d-n} = \frac{(1+2.h).180^{o}}{4-1} = \pm 60^{o}, 180^{o}$$

   A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{0-2-4-4+1}{4-1} = -3$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{s.(s+2).(s+4)^2}{s+1}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3.s^4 - 24.s^3 - 62.s^2 - 64.s - 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -4 \\ s_2 = -2{,}5994 \\ s_3 = -0{,}7003 + j.0{,}7317 \\ s4 = -0{,}7003 - j.0{,}7317 \end{cases}$$

   Neste caso só a segunda solução é válida.

6. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\big|_{s=j.\omega} = 0$$

   resultando ω e k.

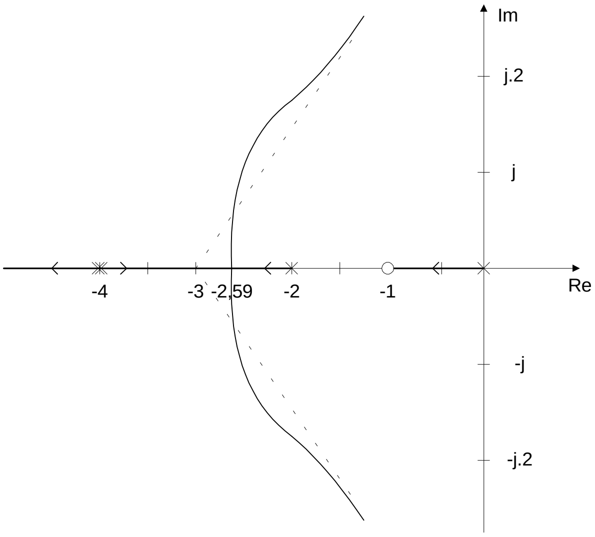
$$1+k.\frac{(s+1)}{s.(s+2).(s+4)^2}\bigg|_{s=j.\omega}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^4+10.s^3+32.s^2+32.s+k.s+k\big|_{s=j.\omega}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega^4-10.j.\omega^3-32.\omega^2+(32+k).j.\omega+k=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ \omega=0 \end{cases} \vee \begin{cases} k^2+154.k-9216=0 \\ impossivel! \end{cases}$$

Conclui-se que o L.G.R. deste sistema não intersecta o eixo imaginário (excepto no pólo na origem).
A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



1. e) $GH(s)=\dfrac{k}{s(s^2+2s+5)}$

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s)=k.\frac{1}{s.(s^2+2.s+5)}=-1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: não tem
Pólos: $p_1 = 0$
$p_2 = -1 + j.2$
$p_3 = -1 - j.2$

Nº de zeros: n = 0
Nº de pólos: d = 3.

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 3.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 3

   Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180^{o}}{d-n} = \frac{(1+2.h).180^{o}}{3-0} = \pm 60^{o}, 180^{o}$$

   A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{0-1+j.2-1-j.2}{3-0} = -0{,}666$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-s.(s^2+2.s+5)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3.s^2 - 4.s - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -\dfrac{2}{3} - j.\dfrac{\sqrt{44}}{6} \\ s_2 = -\dfrac{2}{3} + j.\dfrac{\sqrt{44}}{6} \end{cases}$$

   Uma vez que as soluções são imaginárias conclui-se que não existem pontos de quebra.

6. Os ângulos de partida do L.G.R. dos pólos complexos são dados por:

$$\phi = 180^{o} - \left(\arg\left(\sum_{i=1}^{d-1}(s-p_i)\right) - \arg\left(\sum_{i=1}^{n}(s-z_i)\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi = 180^{o} - \left[\arg(s) + \arg(s+1+j.2)\right]\Big|_{s=-1+j.2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi = 180^{o} - \arg(-1+j.2) - \arg(j.4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi = 180^{o} - 116{,}565 - 90^{o} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi = -26{,}565^{o}$$

7. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

$$1 + \left.\frac{k}{s.(s^2 + 2.s + 5)}\right|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^3 + 2.s^2 + 5.s + k\big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -j.\omega^3 - 2.\omega^2 + 5.j.\omega + k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \omega = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} k = 10 \\ \omega = \sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} k = 10 \\ \omega = -\sqrt{5} \end{cases}$$

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema: