TESIS:
Teoria dos Sistemas

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

1. Análise de sistemas em malha aberta
2. Função de transferência e integral de convolução
3. Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem
    1. resposta de sistemas de primeira ordem
        1. ao impulso de Dirac
        2. ao degrau
        3. à rampa
    2. resposta de sistemas de segunda ordem
        1. ao degrau
4. Sistemas de ordem mais elevada
5. Efeito dos zeros na resposta ao degrau
6. Análise de sistemas em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

1. Análise de sistemas em malha aberta
2. Função de transferência e integral de convolução
3. Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem
    1. resposta de sistemas de primeira ordem
        1. ao impulso de Dirac
        2. ao degrau
        3. à rampa
    2. resposta de sistemas de segunda ordem
        1. ao degrau
4. Sistemas de ordem mais elevada
5. Efeito dos zeros na resposta ao degrau
6. Análise de sistemas em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise de sistemas em malha aberta (I)
  - estuda-se o comportamento de um sistema descrito por uma equação diferencial linear de coeficientes constantes, do tipo

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m u$$

    onde $m \leq n$

  - para esta equação diferencial resulta uma função de transferência (considerando condições iniciais nulas) da forma

$$Y(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} U(s)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise de sistemas em malha aberta (II)
  - dada a função de transferência

$$Y(s)=\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} U(s)$$

  - as raízes do numerador chamam-se zeros
  - as raízes do denominador chamam-se pólos

  - se $m > n$ diz-se que a função de transferência é imprópria
  - se $m \leq n$ diz-se que a função de transferência é própria

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

1. Análise de sistemas em malha aberta
2. Função de transferência e integral de convolução
3. Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem
    1. resposta de sistemas de primeira ordem
        1. ao impulso de Dirac
        2. ao degrau
        3. à rampa
    2. resposta de sistemas de segunda ordem
        1. ao degrau
4. Sistemas de ordem mais elevada
5. Efeito dos zeros na resposta ao degrau
6. Análise de sistemas em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Função de transferência e integral de convolução (I)
  - descrição de um sistema através da sua função de transferência
    - descrição paramétrica – função de transferência especificada por um número finito de parâmetros
  - outro tipo de descrição é a não-paramétrica
  - resposta impulsional do sistema cai nesta categoria
    - resposta temporal $\omega(t)$, $t \in \mathbb{R}$, do sistema para um impulso de Dirac $\delta(t)$, aplicado em $t = 0$
    - neste caso, a transformada de Laplace da resposta é igual à função de transferência pois $L\{\delta(t)\} = 1$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

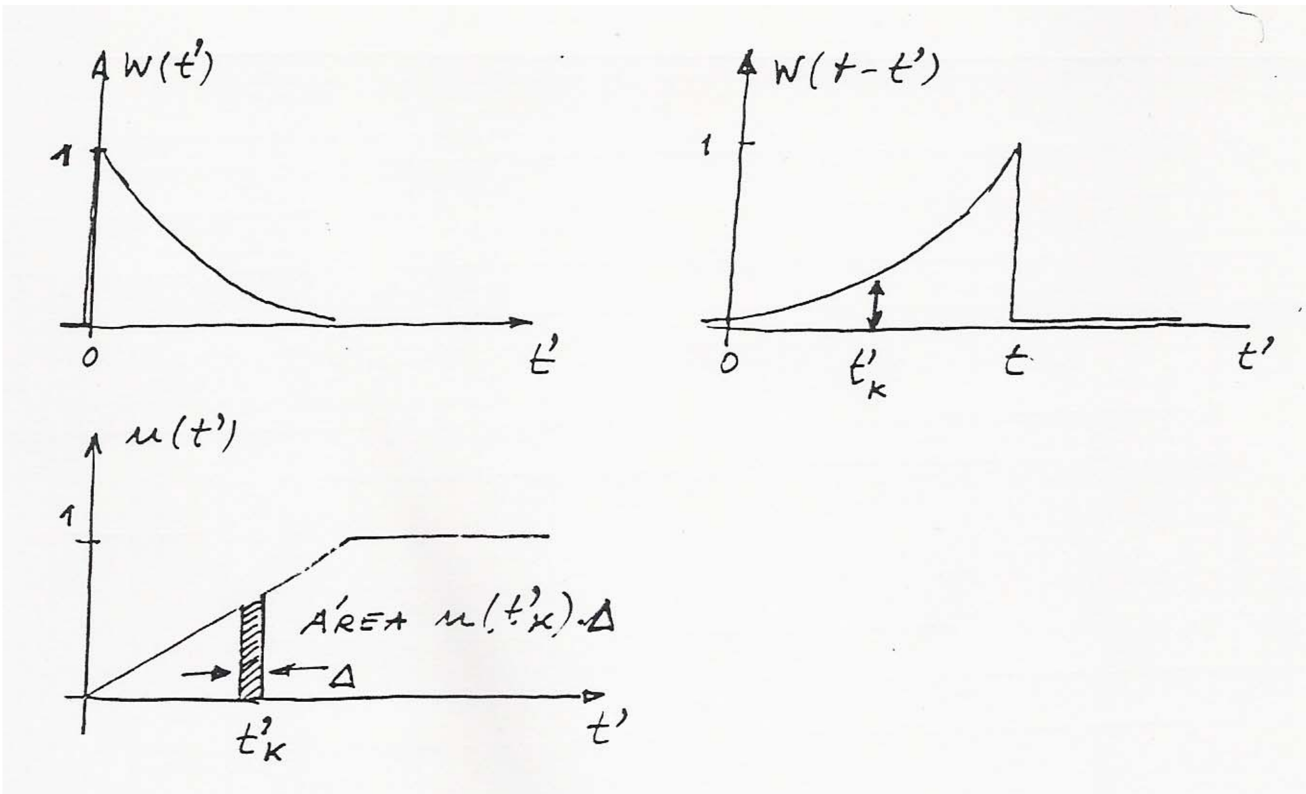
- Função de transferência e integral de convolução (II)
  - pelo teorema da convolução da transformada de Laplace, a resposta $y(t)$ a uma entrada $u(t)$ aplicada em $t = 0$ é dada por

$$y(t) = \int_0^t \omega(t - t')u(t')\,dt'$$

  - obviamente $y(t) = 0,\ t < 0$
  - esta expressão não é atractiva para cálculos manuais, mas é adequada a uma simulação computacional, tanto mais que $\omega(t)$ é fácil de obter
  - figura seguinte proporciona uma interpretação do teorema

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Função de transferência e integral de convolução (III)
  - sistema é "causal", i.e. a resposta no instante t não depende de valores futuros da entrada
  - sistema tem "memória" pois a resposta no instante t depende dos valores passados da entrada
  - memória do sistema é um "factor de esquecimento"
    - entrada no instante $t'_k < t$ contribui para a resposta no instante t através do factor $\omega(t - t'_k)$
    - à medida que se caminha para o passado este factor tende para zero

$$y(t) \approx \sum_{i=1}^{n} \omega(t - t'_k)\, u(t'_k)\, \Delta \quad , \quad \Delta = \frac{t}{n}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

1. Análise de sistemas em malha aberta
2. Função de transferência e integral de convolução
3. Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem
   1. resposta de sistemas de primeira ordem
      1. ao impulso de Dirac
      2. ao degrau
      3. à rampa
   2. resposta de sistemas de segunda ordem
      1. ao degrau
4. Sistemas de ordem mais elevada
5. Efeito dos zeros na resposta ao degrau
6. Análise de sistemas em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem (I)
  - importância dos sistemas de primeira e de segunda ordem reside no facto de constituírem
    - blocos fundamentais de sistemas de ordem mais elevada
    - boa aproximação para a maioria dos casos

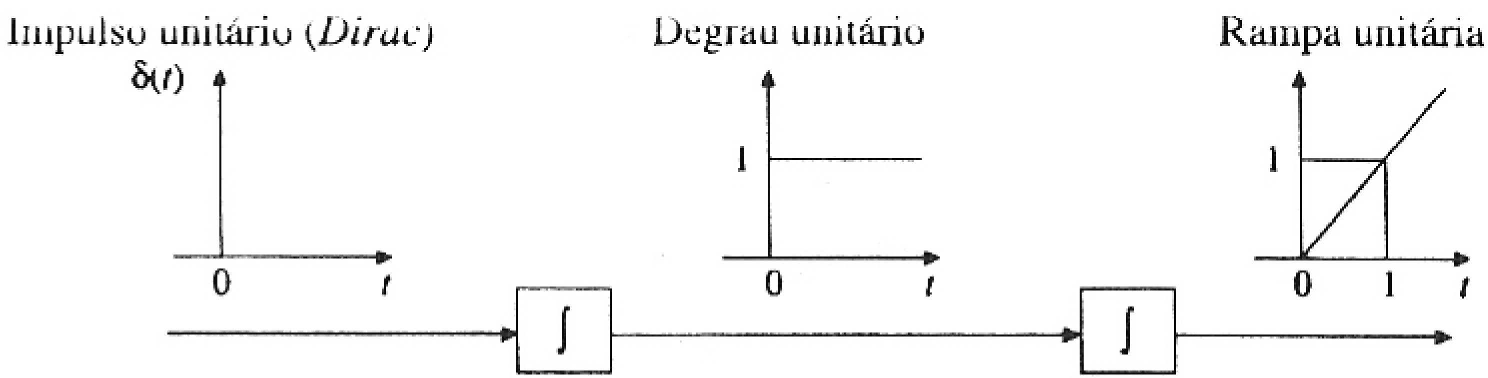
Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem (II)
  - dada a impossibilidade de analisar a resposta do sistema para todos os tipos de entradas só se estuda a resposta às entradas
    - impulso de Dirac
    - degrau unitário
    - rampa unitária
  - experiência demonstra que estas entradas simulam satisfatoriamente as situações que ocorrem com mais frequência na prática

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem (III)
  - como os sistemas em estudo são lineares, em princípio basta estudar a resposta a um destes sinais
  - se u produz a resposta y, então o sinal du/dt produz a resposta dy/dt e o sinal $\int u dt$ produz a resposta $\int y dt$



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

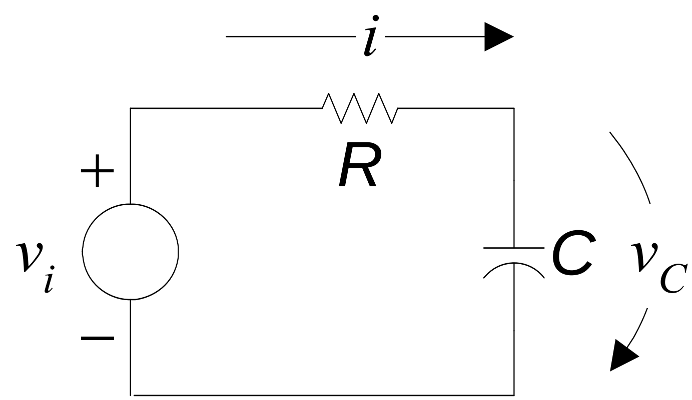
Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

1. Análise de sistemas em malha aberta
2. Função de transferência e integral de convolução
3. Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem
    1. resposta de sistemas de primeira ordem
        1. ao impulso de Dirac
        2. ao degrau
        3. à rampa
    2. resposta de sistemas de segunda ordem
        1. ao degrau
4. Sistemas de ordem mais elevada
5. Efeito dos zeros na resposta ao degrau
6. Análise de sistemas em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de primeira ordem (I)

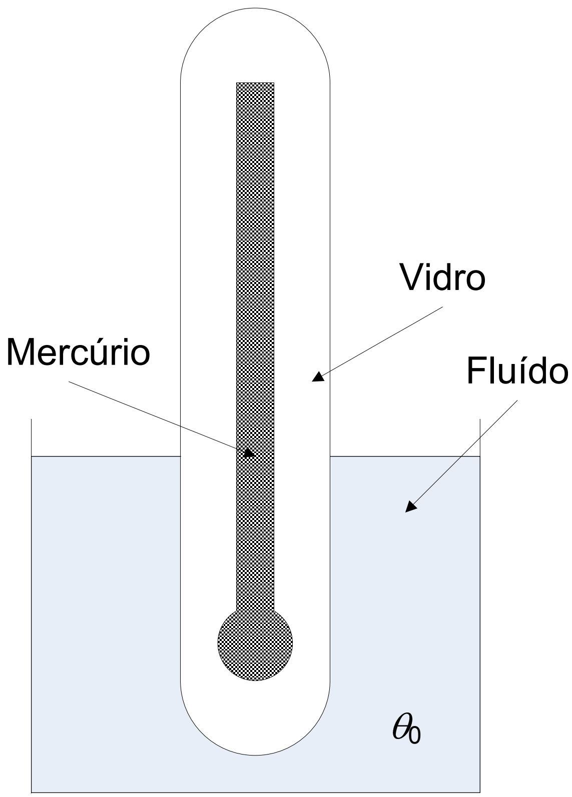


$$\frac{v_i(t)-v_C(t)}{R}=C\frac{dv_C(t)}{dt}\Leftrightarrow RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=v_i(t)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de primeira ordem (II)



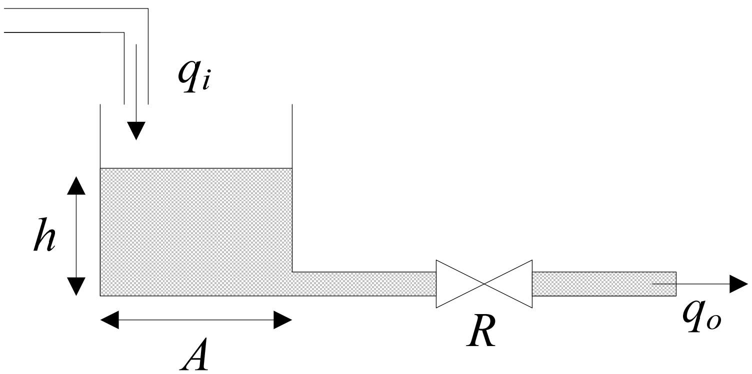
$$\frac{\theta_0 - \theta_m(t)}{R} = C\frac{d}{dt}\left[\theta_m(t) - \theta_m(0)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow RC\frac{d\theta_m(t)}{dt} + \theta_m(t) = \theta_0$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de primeira ordem (III)



$$\begin{cases} q_i(t) = q_o(t) + A\dfrac{dh(t)}{dt} \\ q_o(t) = \dfrac{h(t)}{R} \end{cases} \Leftrightarrow A\frac{dh(t)}{dt} + \frac{h(t)}{R} = q_i(t)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de primeira ordem (IV)
  - descritos por uma equação diferencial linear do tipo

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t) \xrightarrow{L} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

1. Análise de sistemas em malha aberta
2. Função de transferência e integral de convolução
3. Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem
    1. resposta de sistemas de primeira ordem
        1. ao impulso de Dirac
        2. ao degrau
        3. à rampa
    2. resposta de sistemas de segunda ordem
        1. ao degrau
4. Sistemas de ordem mais elevada
5. Efeito dos zeros na resposta ao degrau
6. Análise de sistemas em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de primeira ordem – resposta ao impulso de Dirac (I)

  - como $L\{\delta(t)\}=1$ vem

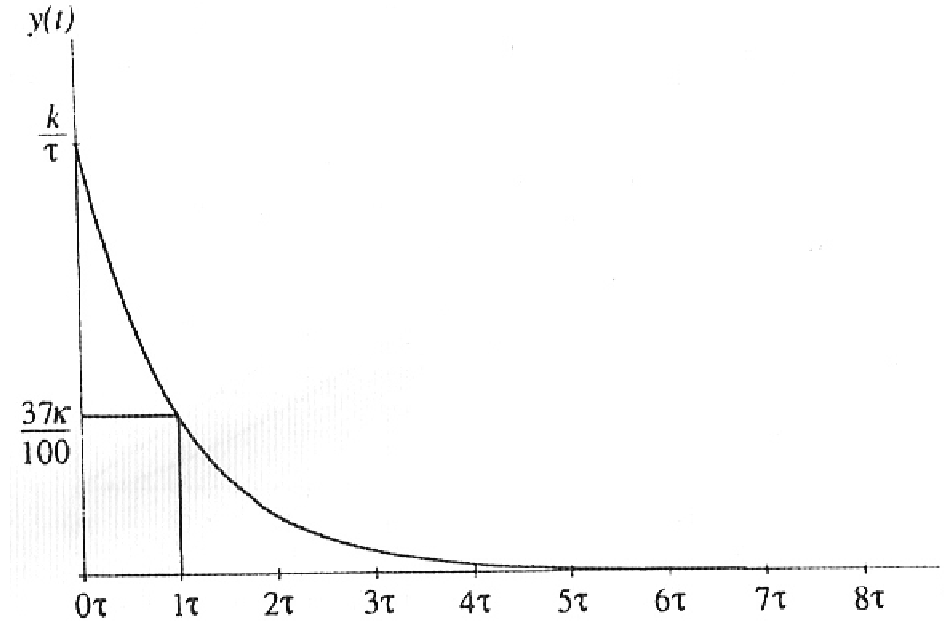
$$Y(s)=\frac{k}{\tau s+1}U(s)\Leftrightarrow Y(s)=\frac{k}{\tau s+1}=\frac{k}{\tau}\cdot\frac{1}{s+1/\tau}\Rightarrow y(t)=\frac{k}{\tau}\cdot e^{-t/\tau}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de primeira ordem – resposta ao impulso de Dirac (II)

$$y(t) = \frac{k}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$$



  - para $t = \tau$ a resposta é aproximadamente 37% do valor máximo

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

1. Análise de sistemas em malha aberta
2. Função de transferência e integral de convolução
3. Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem
    1. resposta de sistemas de primeira ordem
        1. ao impulso de Dirac
        2. ao degrau
        3. à rampa
    2. resposta de sistemas de segunda ordem
        1. ao degrau
4. Sistemas de ordem mais elevada
5. Efeito dos zeros na resposta ao degrau
6. Análise de sistemas em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de primeira ordem – resposta ao degrau (I)
  - como $L\{u(t)\} = 1/s$ vem

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1} U(s) \Leftrightarrow Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s} = k \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} \right)$$

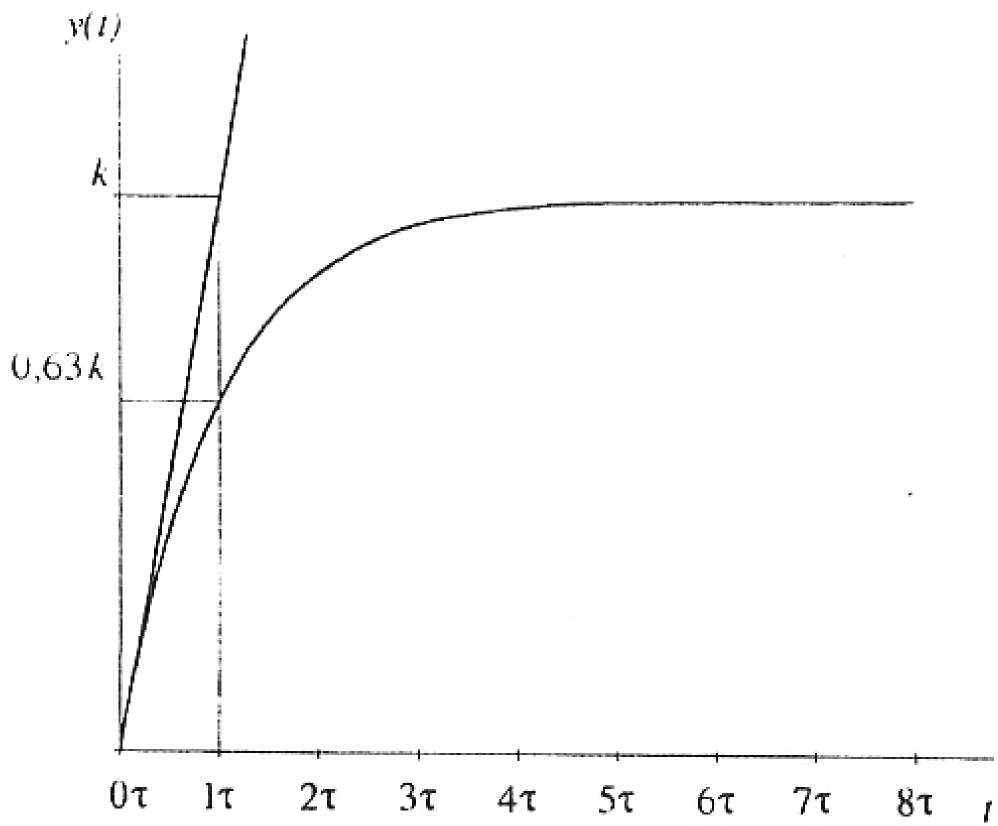
$$\Rightarrow y(t) = k \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

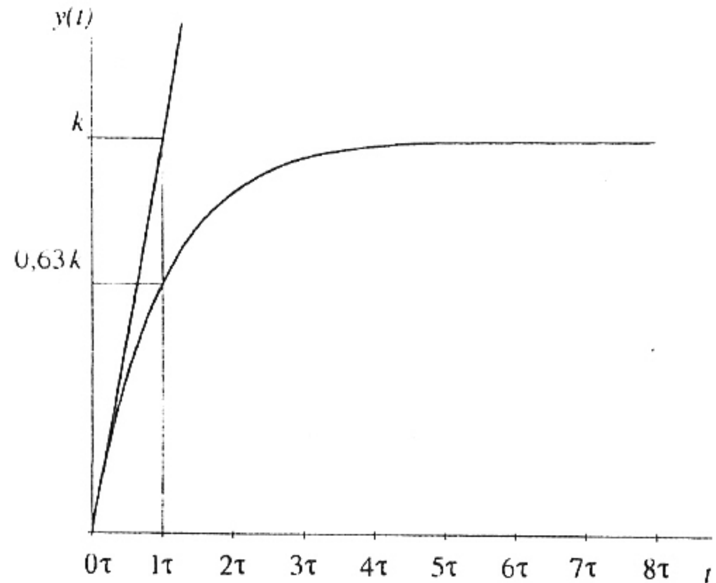
- Sistemas de primeira ordem – resposta ao degrau (II)

$$y(t) = k \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$



Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de primeira ordem – resposta ao degrau (III)
  - declive da tangente na origem é k/τ
  - para $t = \tau$ a resposta é 0,632 do valor final
  - para $t = 4\tau$ a resposta é 0,982 do valor final



  - considera-se que em regime permanente a resposta atingiu o seu valor final quando está no intervalo de ±1,8% do valor final
    - neste caso, o tempo de estabelecimento é $t_s = 4\tau$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

1. Análise de sistemas em malha aberta
2. Função de transferência e integral de convolução
3. Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem
    1. resposta de sistemas de primeira ordem
        1. ao impulso de Dirac
        2. ao degrau
        3. à rampa
    2. resposta de sistemas de segunda ordem
        1. ao degrau
4. Sistemas de ordem mais elevada
5. Efeito dos zeros na resposta ao degrau
6. Análise de sistemas em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de primeira ordem – resposta à rampa (I)

  - para $\begin{cases} u(t)=0, & t<0 \\ u(t)=t, & t\geq 0 \end{cases}$ vem $L\{u(t)\}=1/s^2$

  - logo, resulta

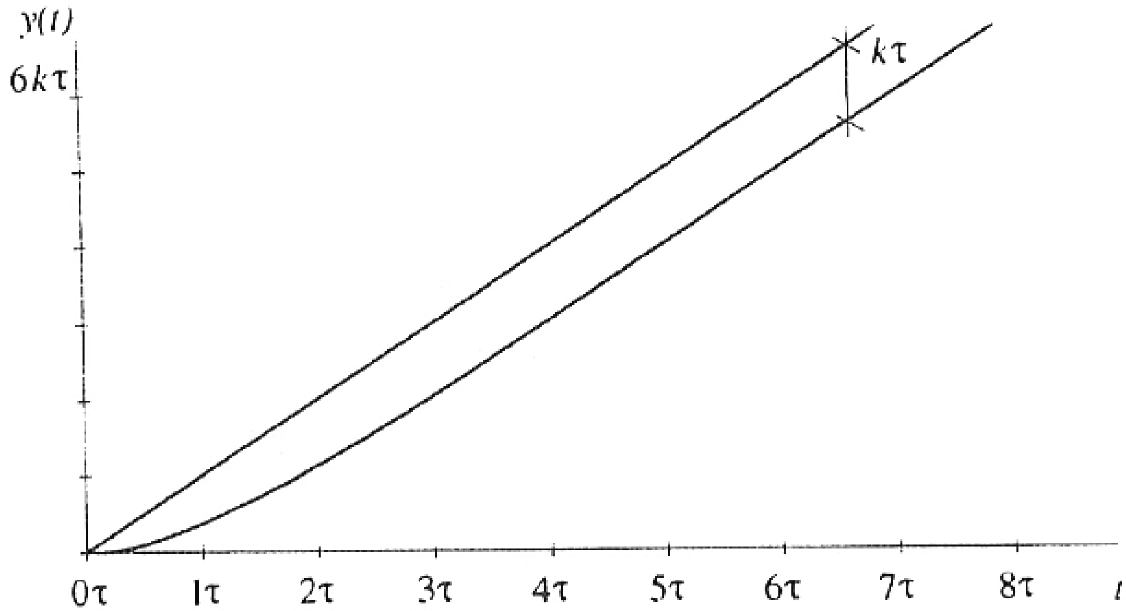
$$Y(s)=\frac{k}{\tau s+1}U(s)\Leftrightarrow Y(s)=\frac{k}{\tau s+1}\cdot\frac{1}{s^2}=k\cdot\left(\frac{1}{s^2}-\frac{\tau}{s}+\frac{\tau^2}{\tau s+1}\right)$$

$$\Rightarrow y(t)=k\cdot\left(t-\tau+\tau e^{-t/\tau}\right),\quad t\geq 0$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de primeira ordem – resposta à rampa (II)



- quando $t \to \infty, \quad y(t) \approx k(t-\tau)$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

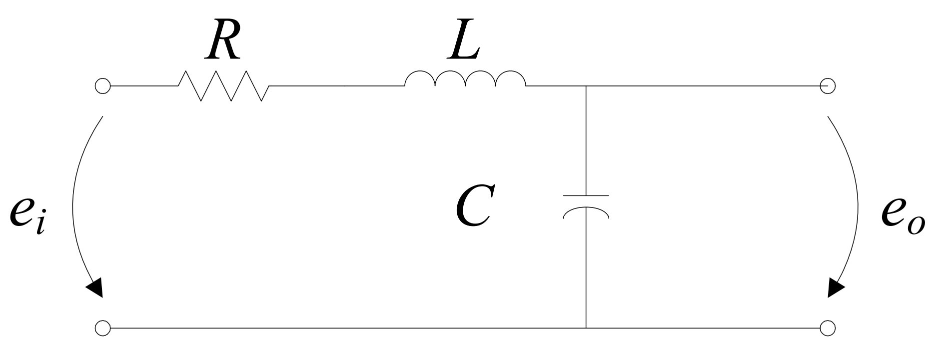
Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

1. Análise de sistemas em malha aberta
2. Função de transferência e integral de convolução
3. Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem
    1. resposta de sistemas de primeira ordem
        1. ao impulso de Dirac
        2. ao degrau
        3. à rampa
    2. resposta de sistemas de segunda ordem
        1. ao degrau
4. Sistemas de ordem mais elevada
5. Efeito dos zeros na resposta ao degrau
6. Análise de sistemas em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem (I)

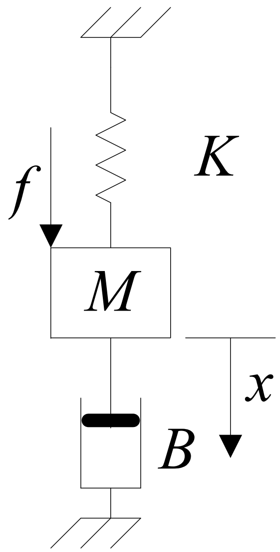


$$F.T. = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem (II)

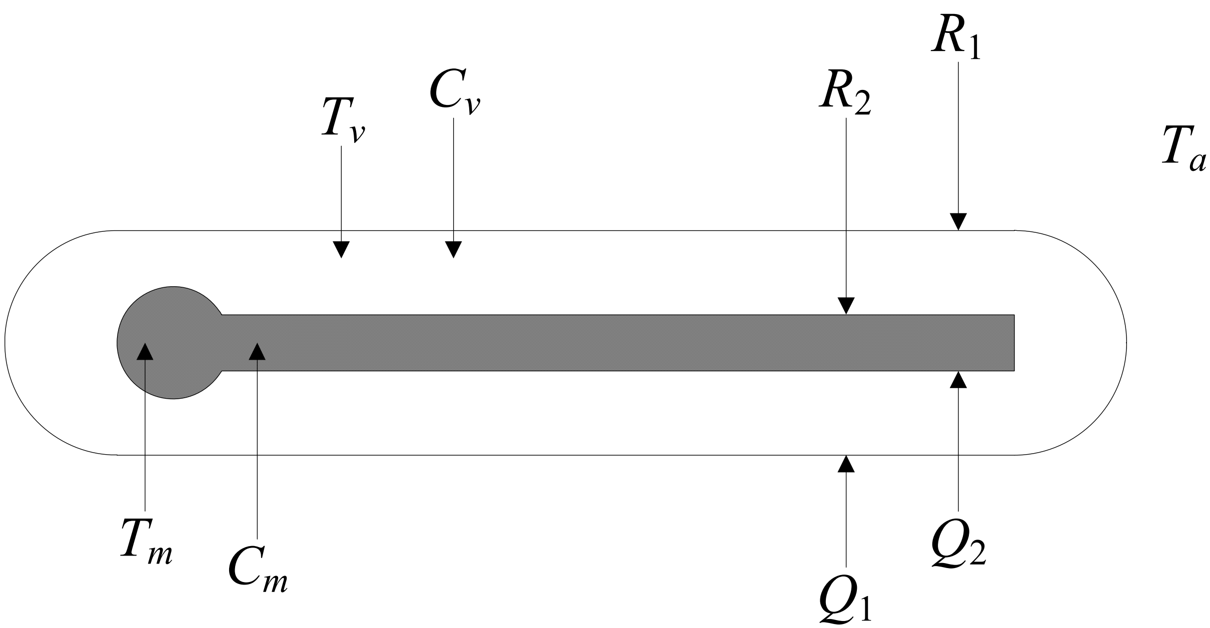


$$F.T. = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 M + sB + K}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem (III)

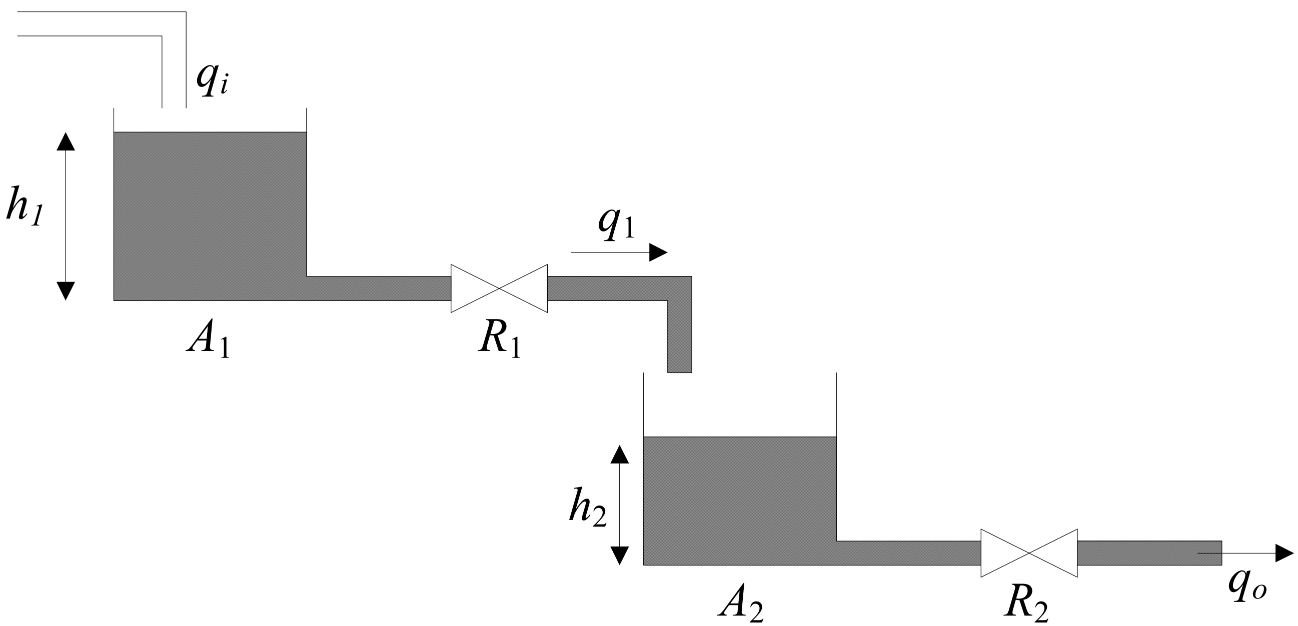


$$F.T. = \frac{T_m(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{(1+sR_2C_m)(1+sR_1C_v)+sR_1C_m}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem (IV)



$$G(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{s^2 A_1 A_2 R_1 R_2 + s\left(A_1 R_1 + A_2 R_2\right) + 1}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem (IV)
  - um sistema de segunda ordem apresenta uma equação do tipo

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^{\ 2} y(t) = K\omega_n^{\ 2} u(t)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}$$

  - ω_n – frequência natural não amortecida
  - ζ – coeficiente de amortecimento
  - K – ganho em regime permanente

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem (V)
  - forma canónica da função de transferência de um sistema de segunda ordem

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^{\;2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\;2}}$$

  - considerando o ganho em regime permanente $K = 1$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem (VI)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}$$

- resposta do sistema pode ser dividida em três categorias, dependendo do valor de ζ
  - subamortecida, $0 \le \zeta < 1$
  - amortecimento crítico, $\zeta = 1$
  - sobreamortecida, $\zeta > 1$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

1. Análise de sistemas em malha aberta
2. Função de transferência e integral de convolução
3. Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem
    1. resposta de sistemas de primeira ordem
        1. ao impulso de Dirac
        2. ao degrau
        3. à rampa
    2. resposta de sistemas de segunda ordem
        1. ao degrau
4. Sistemas de ordem mais elevada
5. Efeito dos zeros na resposta ao degrau
6. Análise de sistemas em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem – resposta ao degrau unitário (I)
  - como $L\{u(t)\} = 1/s$ vem

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot U(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

  - no cálculo da transformada inversa podem ocorrer três casos

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem – resposta ao degrau unitário (II)
  - $0 \leq \zeta < 1$

    $$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}\left[\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \arccos(\zeta)\right]$$

  - $\zeta = 1$

    $$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)$$

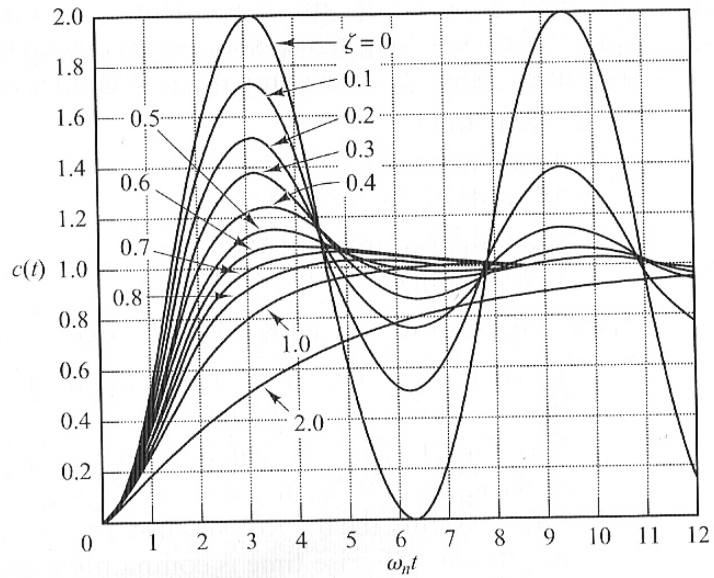
  - $\zeta > 1$

    $$y(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left[\frac{e^{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}\right]$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem – resposta ao degrau unitário (III)



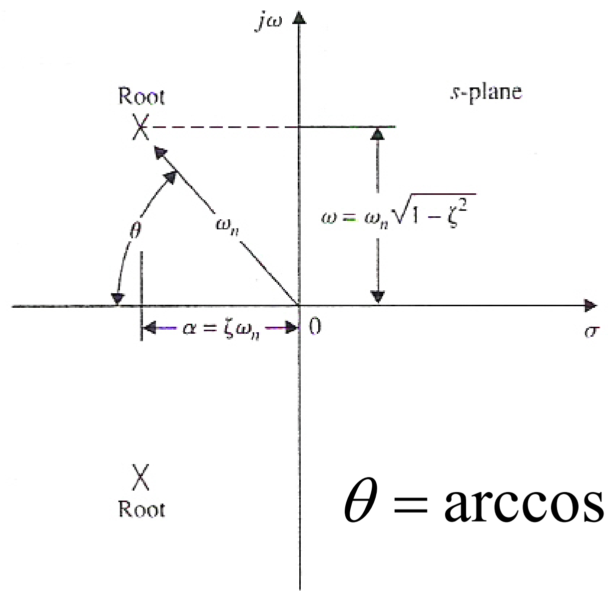
- resposta oscilatória para $\zeta < 1$ e monótona crescente para $\zeta \geq 1$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem – resposta ao degrau unitário (IV)
  - quando $0 \le \zeta < 1$ a resposta é oscilatória e os pólos da função de transferência são

$$-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



$$\theta = \arccos\varsigma$$

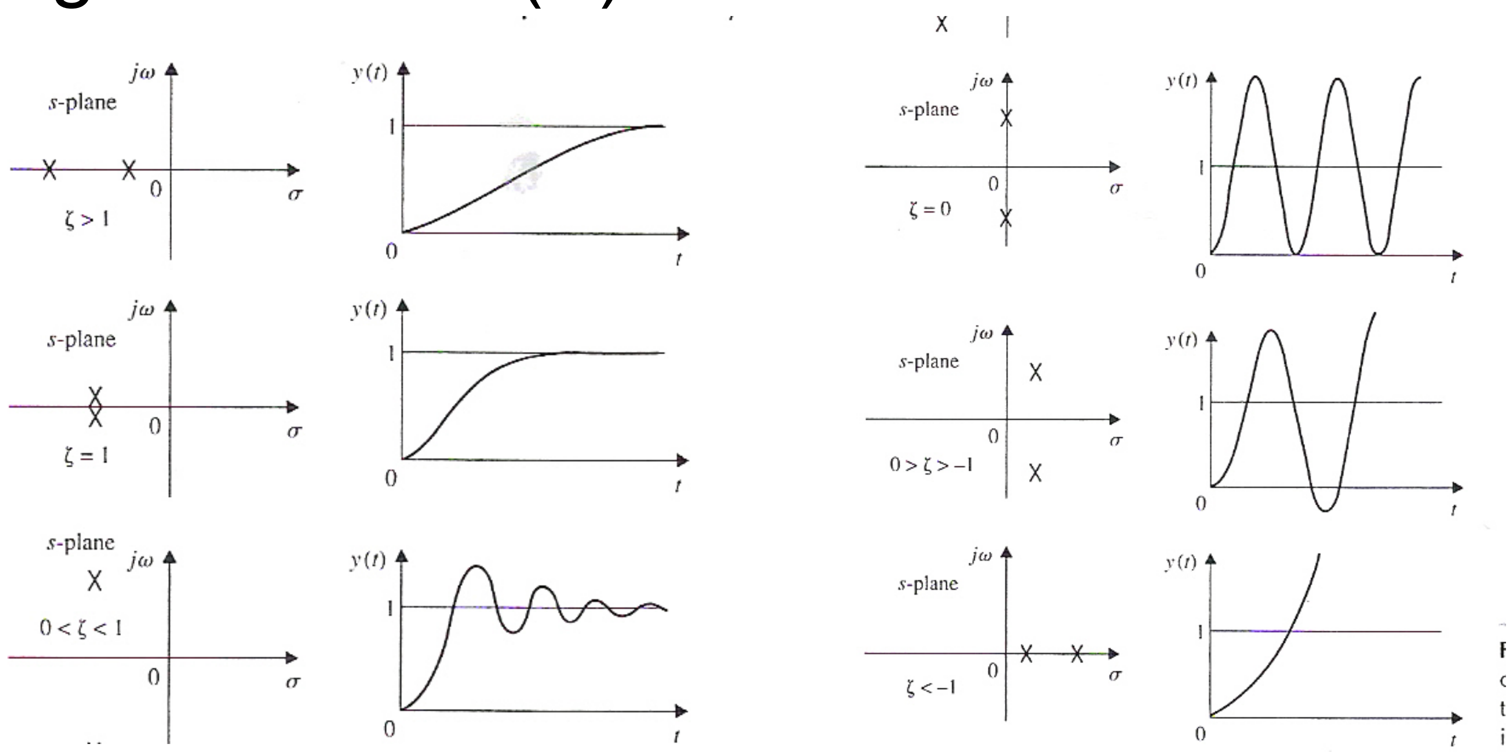
  - parte real dos pólos
    é a razão de decaimento
  - parte imaginária é
    a frequência de oscilação

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

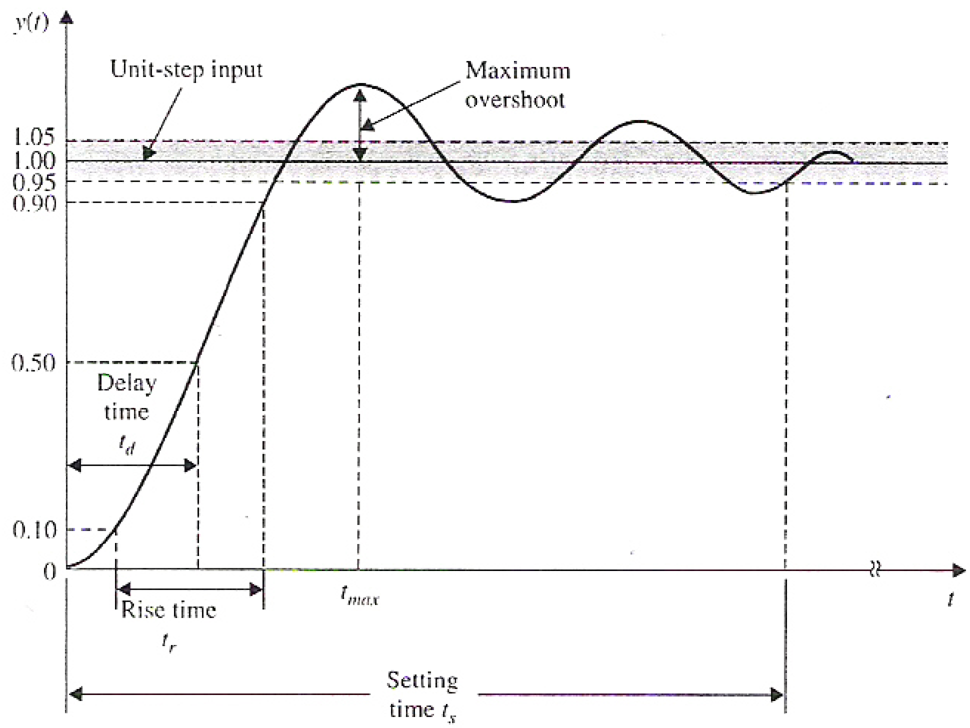
- Sistemas de segunda ordem – resposta ao degrau unitário (V)



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem – resposta ao degrau unitário (VI)



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem – resposta ao degrau unitário (VII)
  - note-se que $\omega_d \leq \omega_n$ e que $\omega_d = \omega_n$ para $\zeta = 0$
    - ω_n - frequência natural não amortecida
    - ω_d - frequência amortecida
  - quando $0 \leq \zeta < 1$ tem particular interesse o valor máximo de $y(t)$ e o instante t_p para o qual ocorre
  - calculando a derivada de $y(t)$ e igualando a zero vem

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad y\left(t_p\right) = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem – resposta ao degrau unitário (VIII)
  - definindo sobreelongação (*overshoot*) da resposta

$$M_p = \frac{\text{Valor Maximo} - \text{Valor Final}}{\text{Valor Final}}$$

  - vem

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

  - se a resposta $y(t)$ for oscilatória ($0 \le \zeta < 1$) as expressões de t_p e $y(t_p)$ permitem identificar os parâmetros da função de transferência (ζ , ω_n)

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem – resposta ao degrau unitário (IX)
  - para a resposta $y(t)$ estar no intervalo de ±5% do valor final, é necessário um tempo de estabelecimento t_s (*settling time*) de

    $$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

  - para a resposta $y(t)$ estar no intervalo de ±1,8% do valor final, é necessário um tempo de estabelecimento t_s (*settling time*) de

    $$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem – resposta ao degrau unitário (X)
  - outra característica importante é o tempo de subida t_r (*rise time*) definido como o tempo necessário para a resposta subir de 10% a 90% do valor final
  - apesar de não existir uma expressão analítica para t_r, a fórmula seguinte constitui uma boa aproximação

$$t_r \approx \frac{e^{\theta/\tan(\theta)}}{\omega_n}, \quad \theta = \operatorname{arccos}(\zeta)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de segunda ordem – resposta ao degrau unitário (XI)

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad y(t_p) = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}$$

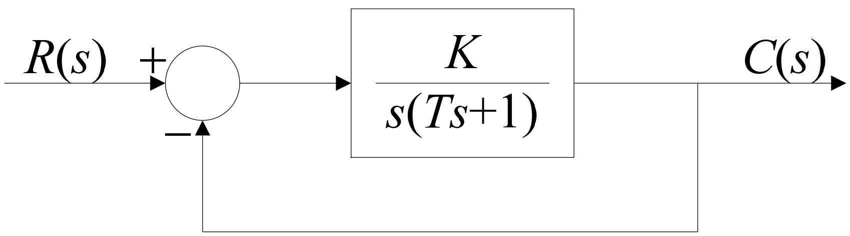
$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

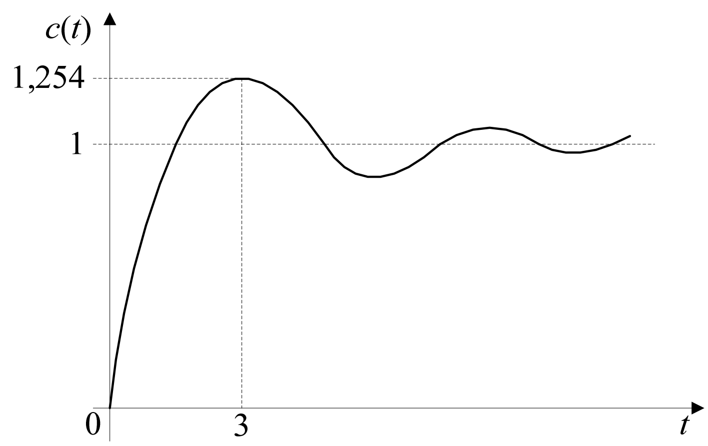
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$t_r \approx \frac{e^{\theta/\tan(\theta)}}{\omega_n}, \quad \theta = \arccos(\zeta)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

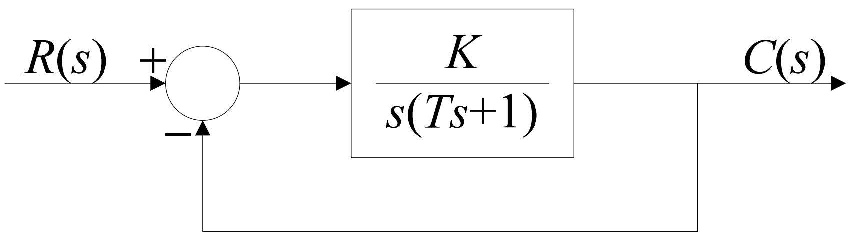


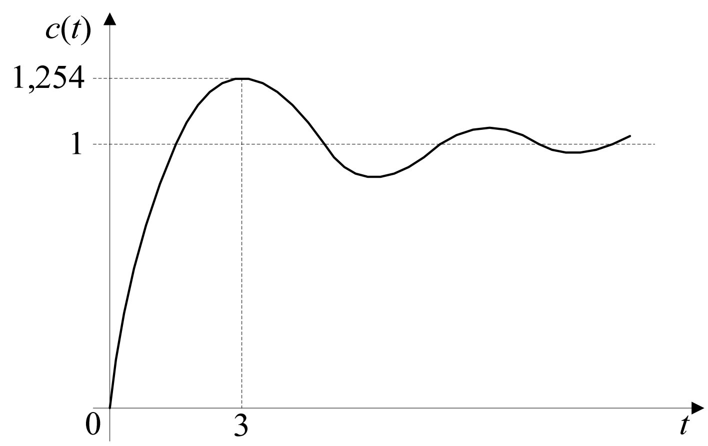


- Sistemas de segunda ordem – exemplo 1 (I)
  - considere o sistema representado na figura superior
  - para uma entrada $u(t)$ em degrau unitário, obtém-se a resposta $c(t)$ representada na figura inferior
  - determine os valores de K e T

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos





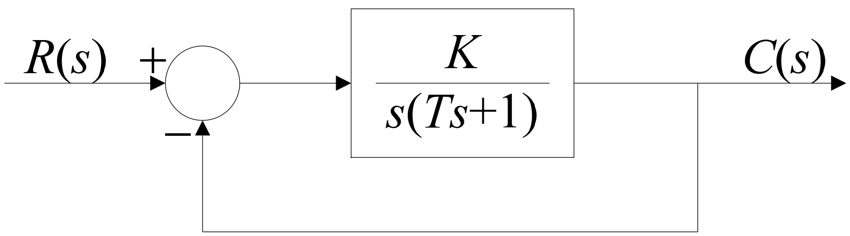
- Sistemas de segunda ordem – exemplo 1 (II)

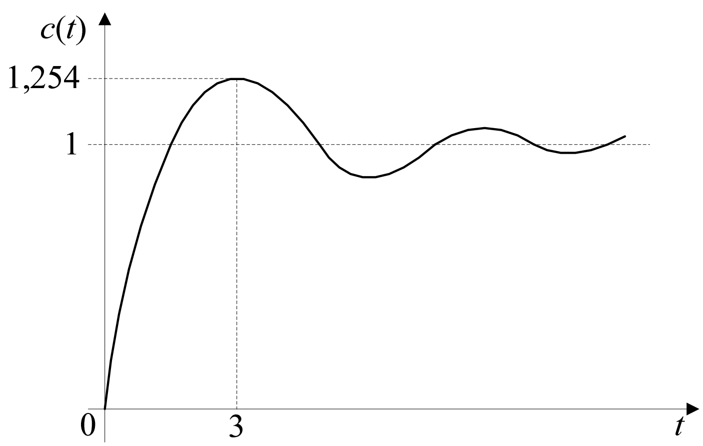
$$\begin{cases} t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 3 \\ M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0,254 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_n = 1,14 \text{ rad/s} \\ \zeta = 0,400 \end{cases}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos





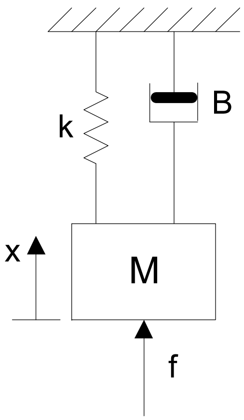
- Sistemas de segunda ordem – exemplo 1 (III)

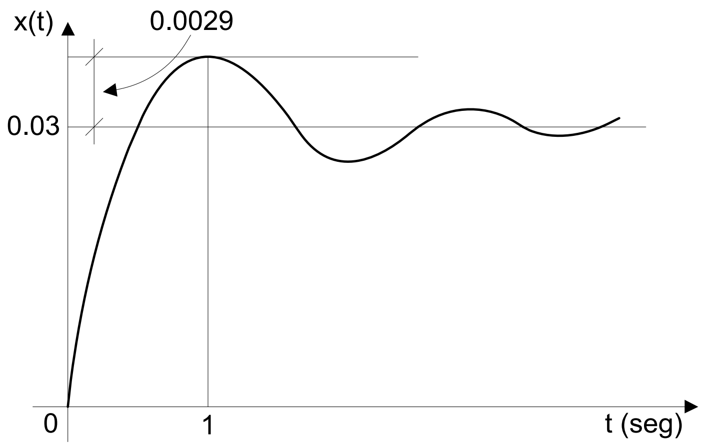
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K/T}{s^2 + 1/T\, s + K/T}$$

$$\begin{cases} \dfrac{K}{T} = \omega_n^{\ 2} \\ \dfrac{1}{T} = 2\zeta\omega_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 1,425 \\ T = 1,096 \text{ seg} \end{cases}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

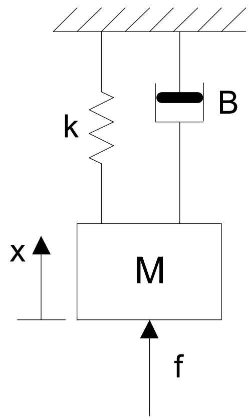


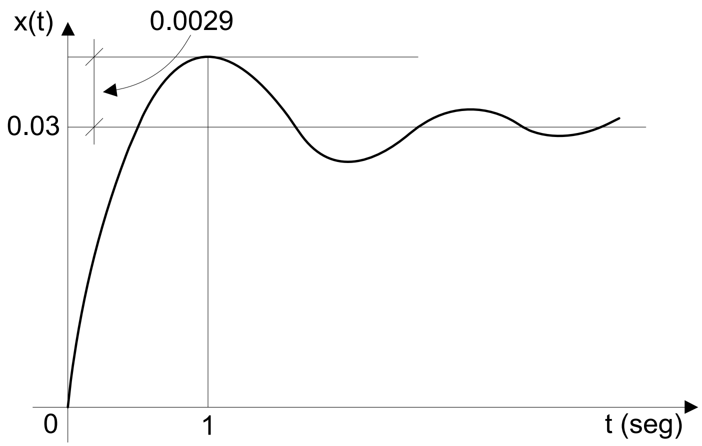


- Sistemas de segunda ordem – exemplo 2 (I)
  - considere o sistema mecânico representado na figura superior
  - quando é aplicada uma força $f(t)$ = 8,9 N, $t \geq 0$, a resposta temporal $x(t)$ do sistema (*i.e.* o deslocamento), é a indicada na figura inferior
  - calcule os valores de M, k e B

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos





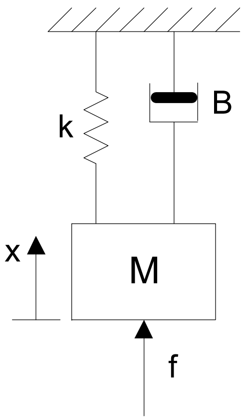
- Sistemas de segunda ordem – exemplo 2 (II)

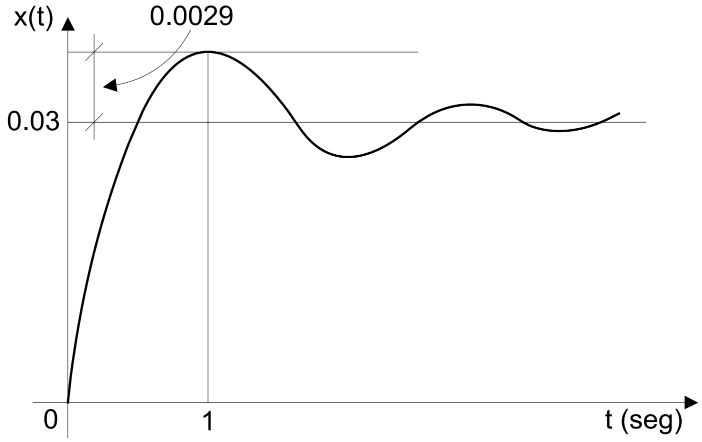
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 M + sB + k}$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{k/M}{s^2 + s\,B/M + k/M}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos





- Sistemas de segunda ordem – exemplo 2 (III)

$$\begin{cases} \omega_n^{\;2} = \dfrac{k}{M} \\ 2\zeta\omega_n = \dfrac{B}{M} \\ \text{ganho} = \dfrac{1}{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 296,7 \text{ N/m} \\ M = 19,2 \text{ kg} \\ B = 90,62 \text{ Nsm}^{-1} \end{cases}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

1. Análise de sistemas em malha aberta
2. Função de transferência e integral de convolução
3. Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem
    1. resposta de sistemas de primeira ordem
        1. ao impulso de Dirac
        2. ao degrau
        3. à rampa
    2. resposta de sistemas de segunda ordem
        1. ao degrau
4. Sistemas de ordem mais elevada
5. Efeito dos zeros na resposta ao degrau
6. Análise de sistemas em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de ordem elevada
  - resposta de sistemas de ordem superior a dois pode ser obtida como combinação linear das respostas de ordem mais baixa
  - fazendo a expansão, em fracções simples, da função de transferência, vem

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = W(s) = b_0 + \frac{a_{11}}{s+p_1} + \cdots + \frac{a_{1k}}{(s+p_1)^k} + \cdots + \frac{a_{l1}}{s+p_l} + \cdots + \frac{a_{lm}}{(s+p_l)^m}$$

  - onde $-p_1$, $-p_2$, ..., $-p_l$ são pólos distintos de $W(s)$ com multiplicidades k, ..., m

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de ordem elevada
  - cada parcela da expressão anterior contribui para a resposta impulsional $\omega(t)$, com uma parcela

$$L^{-1}\left\{\frac{A}{(s+p)^m}\right\} = A\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{-pt}$$

  - se $Re(-p) < 0$ a parcela tende para zero quando $t \to +\infty$
  - quanto maior $|Re(-p)|$ mais rápida é essa convergência

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de ordem elevada
  - isto significa que $\omega(t)$ é dominada pela contribuição dos pólos mais próximos da origem pois o transitório demora mais tempo a desaparecer
  - as parcelas anteriores designam-se de modos naturais do sistema com função de transferência $W(s)$

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de ordem elevada
  - a partir da expressão é possível desenhar um diagrama de blocos e obter informação sobre a dinâmica do sistema por simples inspecção
  - por exemplo, para

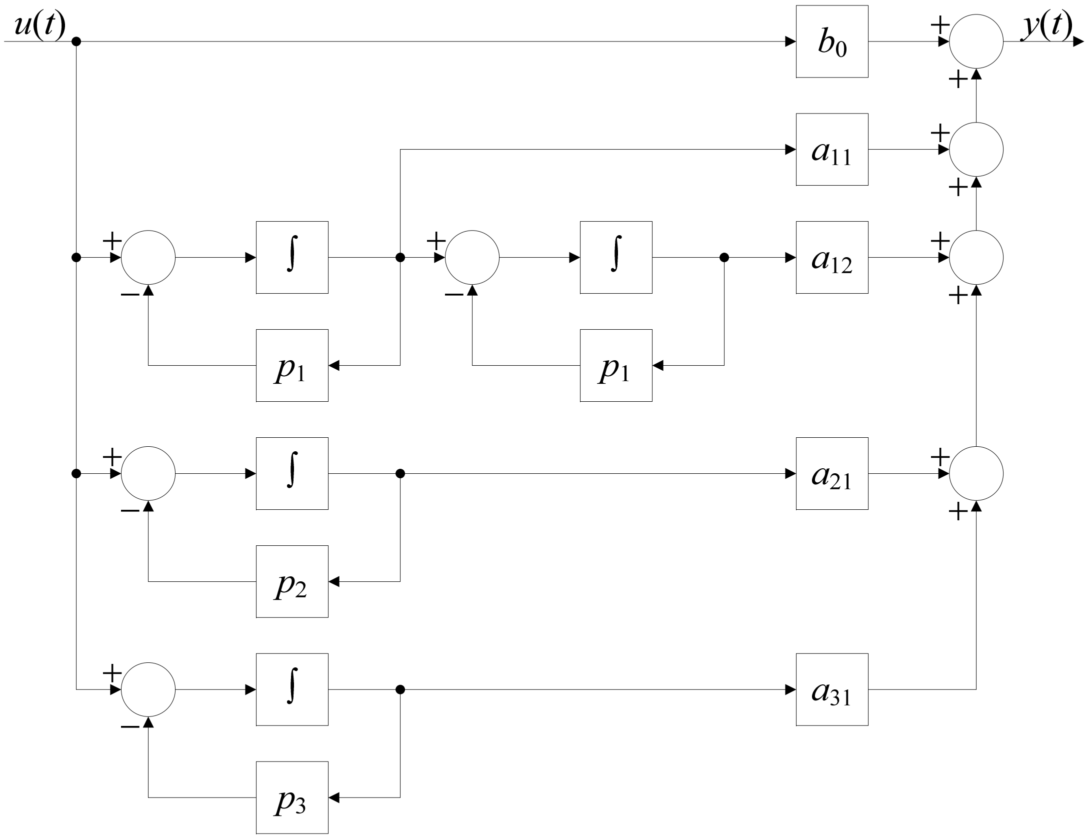
$$W(s) = b_0 + \frac{a_{11}}{s+p_1} + \frac{a_{12}}{(s+p_1)^2} + \frac{a_{21}}{s+p_2} + \frac{a_{31}}{s+p_3}$$

  - sistema com três modos distintos

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de ordem elevada



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de ordem elevada
  - quando alguns dos pólos são números complexos os coeficientes no diagrama de blocos não são números reais
  - este problema pode ser evitado agrupando o par de pólos complexos conjugados

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de ordem elevada

$$W(s) = \frac{1}{(s+p)(s+p^*)}, \quad p = a + jb$$

$$W(s) = \frac{j}{2b}\left(\frac{1}{s+p} - \frac{1}{s+p^*}\right)$$

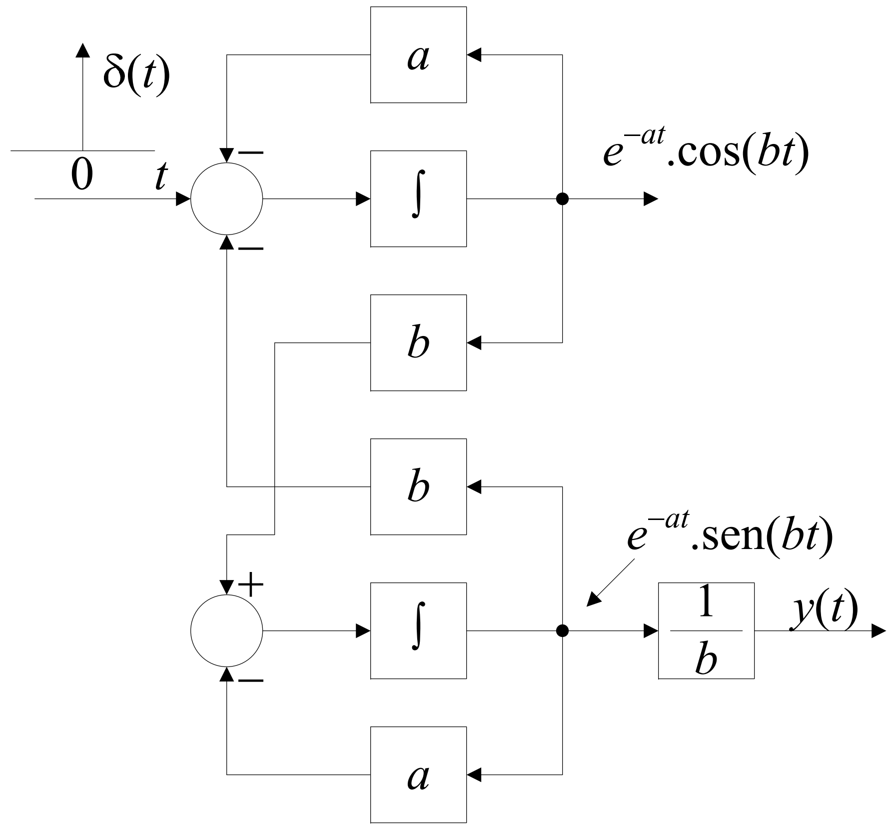
- logo

$$\omega(t) = L^{-1}\{W(s)\} = \frac{j}{2b}\left[e^{-(a+jb)t} - e^{-(a-jb)t}\right] = \frac{1}{b}e^{-at}\,\mathrm{sen}(bt)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Sistemas de ordem elevada



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

1. Análise de sistemas em malha aberta
2. Função de transferência e integral de convolução
3. Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem
    1. resposta de sistemas de primeira ordem
        1. ao impulso de Dirac
        2. ao degrau
        3. à rampa
    2. resposta de sistemas de segunda ordem
        1. ao degrau
4. Sistemas de ordem mais elevada
5. Efeito dos zeros na resposta ao degrau
6. Análise de sistemas em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Efeito dos zeros na resposta ao degrau
  - viu-se anteriormente que

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = W(s) = b_0 + \frac{a_{11}}{s+p_1} + \cdots + \frac{a_{1k}}{(s+p_1)^k} + \cdots + \frac{a_{l1}}{s+p_l} + \cdots + \frac{a_{lm}}{(s+p_l)^m}$$

  - zeros da função de transferência não influenciam a estabilidade
    - determinada unicamente pelos pólos
  - contudo, os factores a_{ij} na decomposição dependem dos zeros de $W(s)$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Efeito dos zeros na resposta ao degrau
  - analisar o efeito de um zero adicional em sistemas de primeira e de segunda ordem
  - para um sistema de primeira ordem a função de transferência vem

$$H_1(s) = \alpha \frac{s+1}{s+\alpha} \qquad \text{(zero no SPE – negativo)}$$

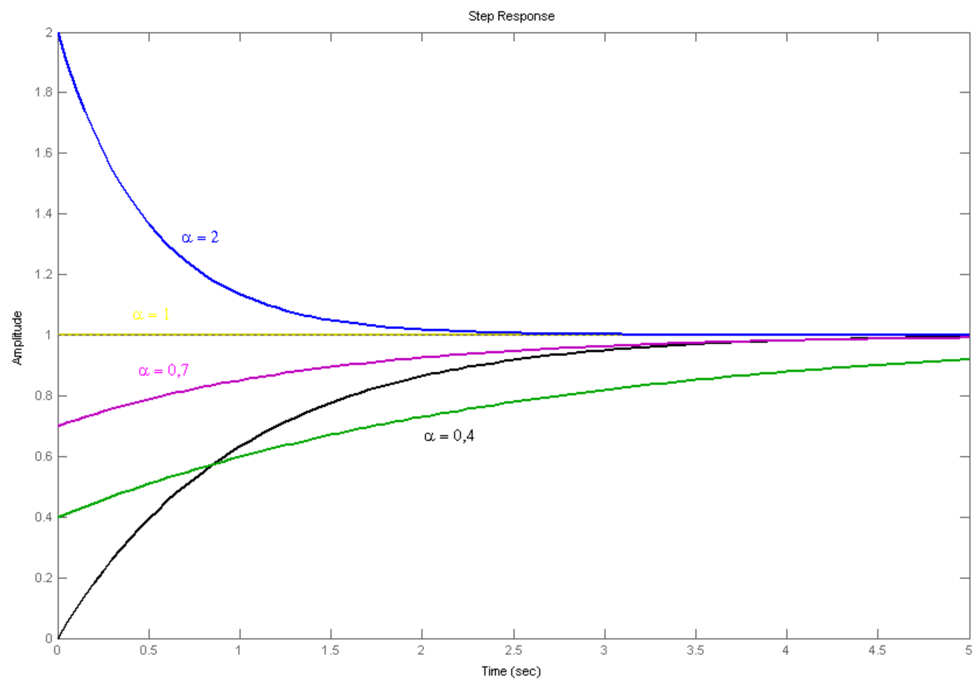
$$H_2(s) = \alpha \frac{1-s}{s+\alpha} \qquad \text{(zero no SPD – positivo)}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Efeito dos zeros na resposta ao degrau
  - para uma entrada em degrau unitário vem

$$H_1(s) = \alpha \frac{s+1}{s+\alpha}$$



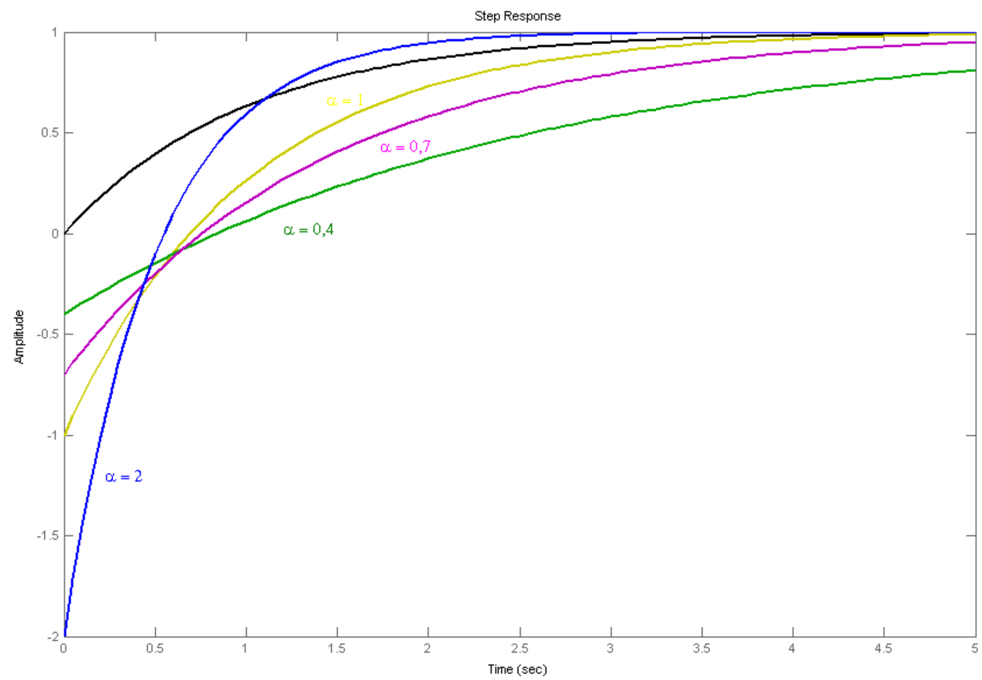
jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Efeito dos zeros na resposta ao degrau
  - para uma entrada em degrau unitário vem

$$H_2(s) = \alpha \frac{1-s}{s+\alpha}$$

  - para $H_2(s)$ a presença de um zero no SPD origina uma resposta do "tipo inverso", porque começa no sentido inverso da entrada



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Efeito dos zeros na resposta ao degrau
  - para um sistema de segunda ordem a função de transferência vem

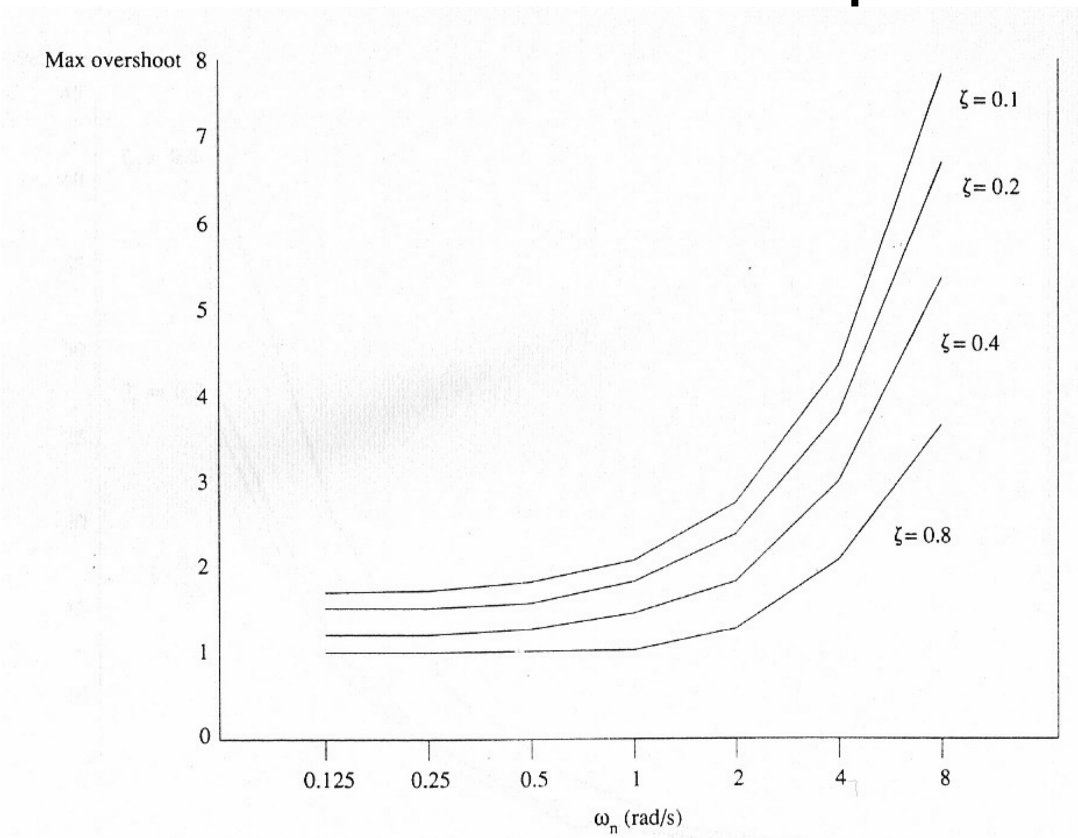
$$H(s) = \frac{\omega_n^{\,2}(s+1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\,2}}$$

  - para a entrada em degrau a máxima sobreelongação vem

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Efeito dos zeros na resposta ao degrau

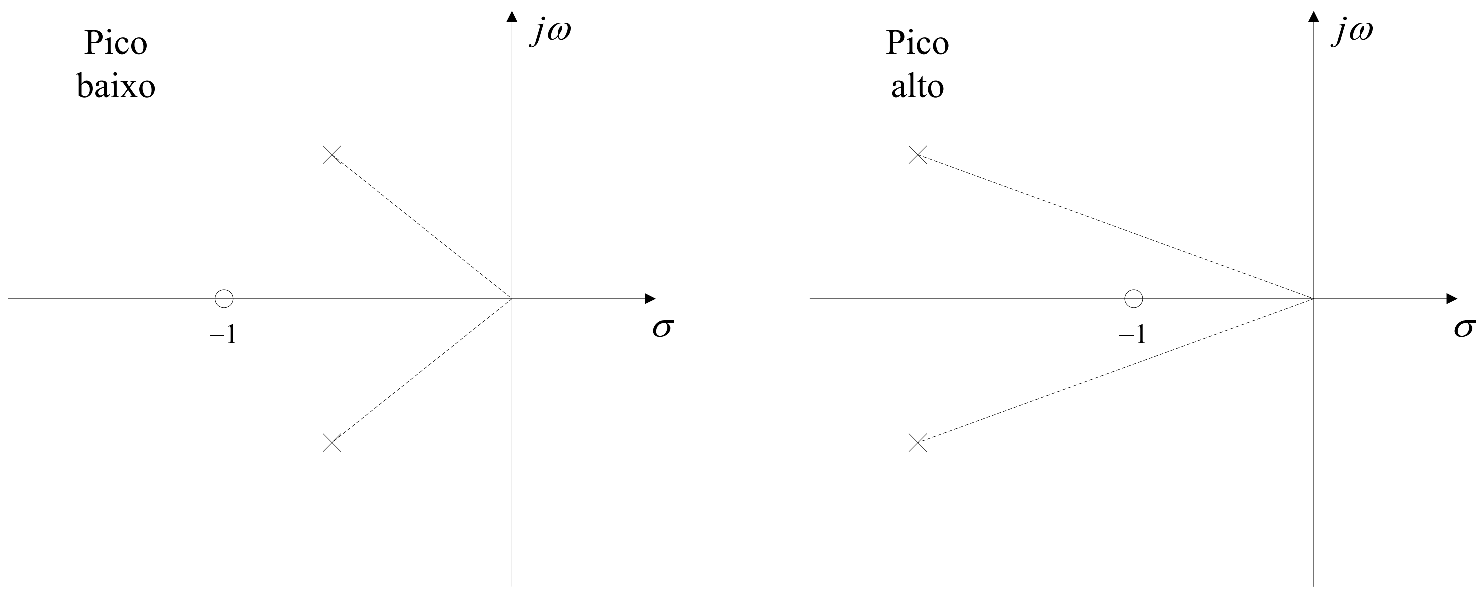


- para um sistema sem zero as curvas seriam rectas horizontais
- a sobreelongação aumenta com a rapidez do sistema, isto é, quando ω_n aumenta e ζ diminui

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Efeito dos zeros na resposta ao degrau
  - sobreelongação aumenta com a rapidez do sistema, isto é, quando ω_n aumenta e ζ diminui



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Efeito dos zeros na resposta ao degrau
  - tempo de pico t_p varia pouco para um sistema de segunda ordem com e sem zero
  - de facto, as mudanças só são significativas para valores elevados de ω_n

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Efeito dos zeros na resposta ao degrau
  - resposta ao degrau unitário de sistemas com funções de transferência ($\omega_n = 8$ e $\zeta = 0{,}1$)

$$H(s) = \frac{64}{s^2 + 1{,}6s + 64}$$

$$H'(s) = \frac{64(s+1)}{s^2 + 1{,}6s + 64}$$ (zero no SPE – negativo)

$$H''(s) = \frac{64(1-s)}{s^2 + 1{,}6s + 64}$$ (zero no SPD – positivo)

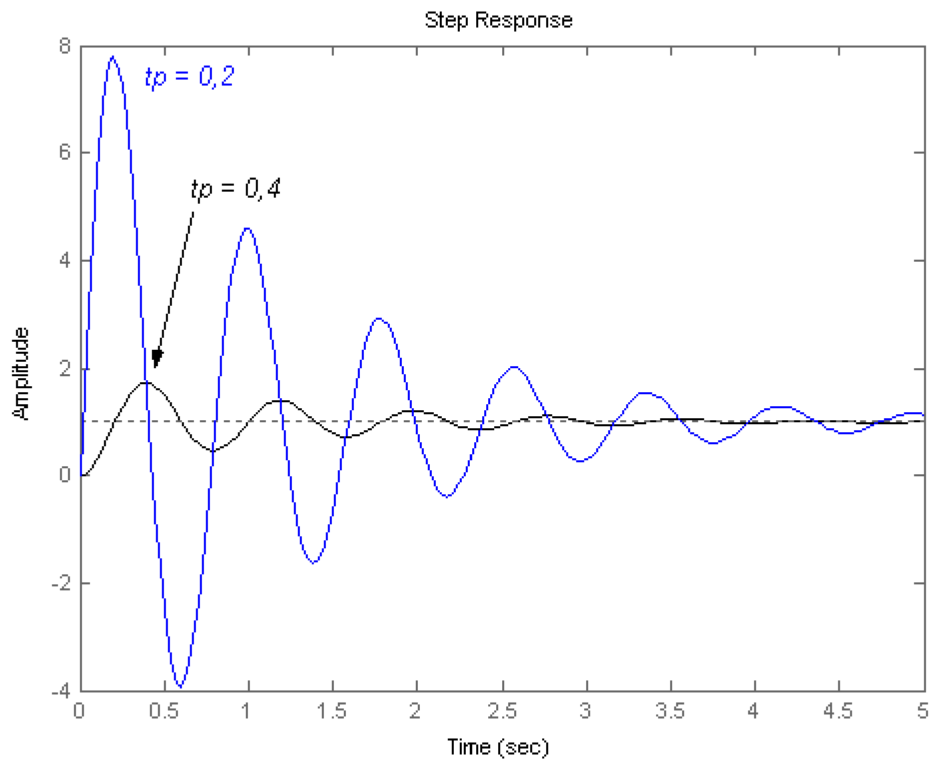
jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Efeito dos zeros na resposta ao degrau

$$H(s) = \frac{64}{s^2 + 1,6s + 64}$$

$$H'(s) = \frac{64(s+1)}{s^2 + 1,6s + 64}$$



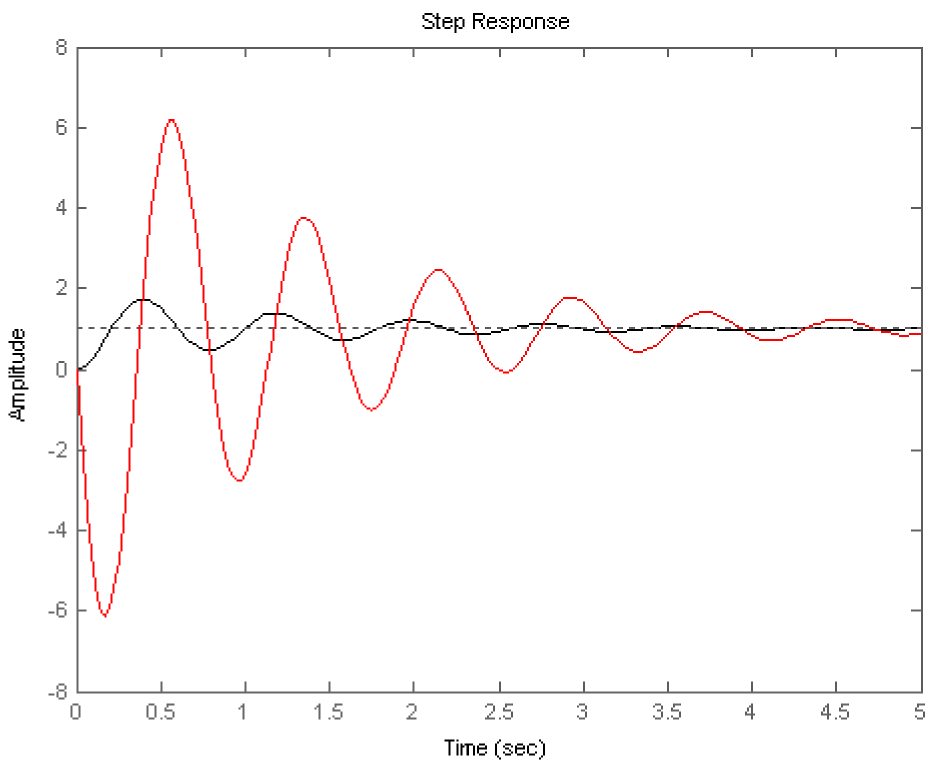
Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Efeito dos zeros na resposta ao degrau

$$H(s)=\frac{64}{s^2+1,6s+64}$$

$$H''(s)=\frac{64(1-s)}{s^2+1,6s+64}$$

  - para o caso de um zero no SPD ocorre uma sub-elongação (*undershot*) na resposta



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

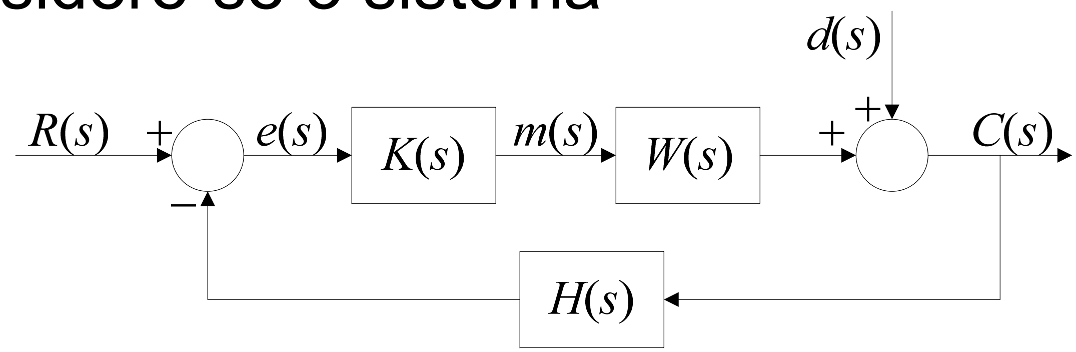
Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

1. Análise de sistemas em malha aberta
2. Função de transferência e integral de convolução
3. Análise da resposta transitória de sistemas de primeira e de segunda ordem
   1. resposta de sistemas de primeira ordem
      1. ao impulso de Dirac
      2. ao degrau
      3. à rampa
   2. resposta de sistemas de segunda ordem
      1. ao degrau
4. Sistemas de ordem mais elevada
5. Efeito dos zeros na resposta ao degrau
6. Análise de sistemas em malha fechada

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - considere-se o sistema



$$C(s)=\frac{K(s)W(s)}{1+K(s)W(s)H(s)}R(s)+\frac{1}{1+K(s)W(s)H(s)}D(s)$$

$$E(s)=\frac{1}{1+K(s)W(s)H(s)}\left[R(s)-H(s)D(s)\right]$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - por exemplo, considere-se que
    - $K(s) = K$ (controlador proporcional)
    - $W(s) = \dfrac{1}{s+1}, \quad H(s) = 1$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - substituindo, vem

$$C(s) = \frac{\frac{K}{s+1}}{1+\frac{K}{s+1}} R(s) + \frac{1}{1+\frac{K}{s+1}} D(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+\frac{K}{s+1}} \left[R(s) - D(s) \right]$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - considerando
    - $D(s)=0$
    - em $t=0$ é aplicado um degrau na entrada, tal que

$$r(t)=20\cdot u(t) \quad \rightarrow \quad R(s)=\frac{20}{s}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - pelo teorema do valor final, o valor do erro e da saída em regime permanente (*steady state*)

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{20}{s}\cdot\frac{1}{1+K/(s+1)}\right]$$

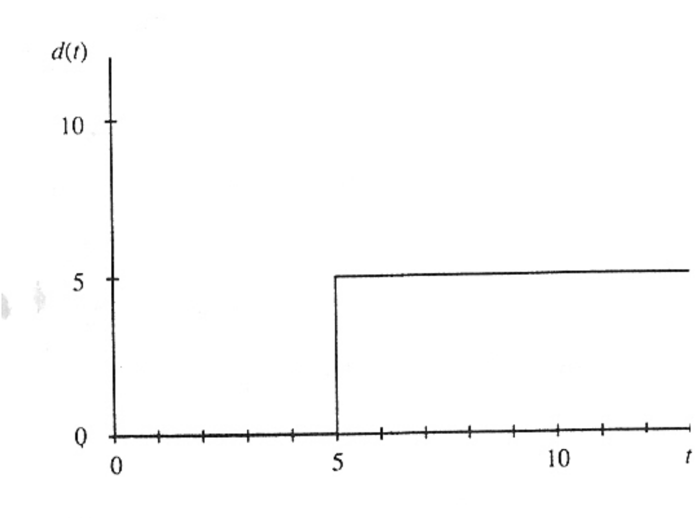
$$c_{ss}=\lim_{t\to\infty}c(t)=\lim_{s\to 0}sC(s)=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{20}{s}\cdot\frac{K/(s+1)}{1+K/(s+1)}\right]$$

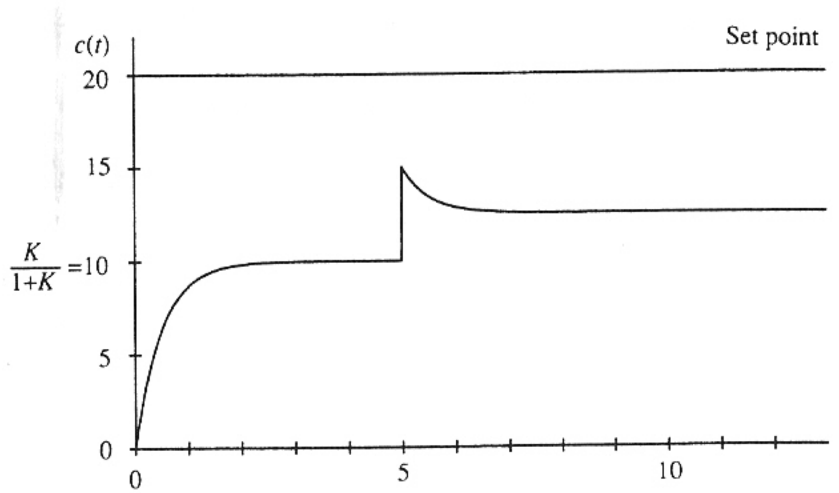
$$e_{ss}=\frac{20}{1+K} \qquad c_{ss}=20\frac{K}{1+K}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - resposta a uma perturbação $d(t) = 5 \cdot u(t-5)$ para um controlador $K = 1$





$$\frac{20K+5}{1+K}$$

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - erro depende da amplitude da perturbação $d(t)$

$$e_{ss} = \frac{20}{1+K}$$

  - quanto maior o valor do ganho K menor o erro
  - contudo, existem limitações para o valor de K

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - uma alternativa consiste em adoptar um controlador integral

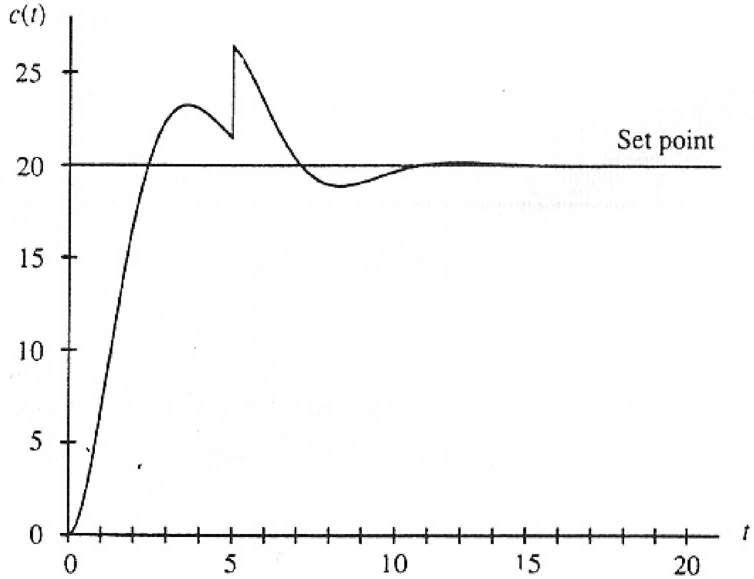
$$K(s) = \frac{K}{s} \quad \Rightarrow \quad m(t) = K\int_0^t e(t')\,dt'$$

  - neste caso, a saída do controlador só pára quando o erro é nulo

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - efeito da introdução de um controlador integral
  - erro em regime permanente e_{ss} é eliminado (com ou sem perturbação)



$$K(s) = \frac{1}{s}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

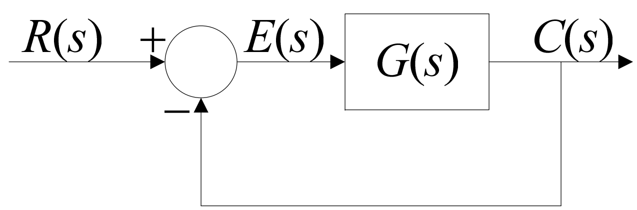
- Análise em regime permanente
  - analisa-se a resposta em regime permanente ao degrau unitário, à rampa e à parábola, para um sistema com realimentação unitária ($H(s) = 1$)
  - resposta transitória
    - determinada pela ordem do sistema (número de pólos)
  - resposta em regime permanente
    - depende somente do número de pólos da função de transferência em malha aberta na origem (i.e., do tipo de sistema)

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - considere-se

$$G(s) = K(s) \cdot W(s), \quad H(s) = 1, \quad d = 0$$



$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} \left[\frac{sR(s)}{1 + G(s)} \right]$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - referência – degrau unitário $R(s) = 1/s$
  - para

$$G(s) = \frac{K\left(1 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m\right)}{s^l \left(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n\right)}$$

  - com $l \geq 0$, $l + n \geq m$, então

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \begin{cases} K, & \text{se} \quad l = 0 \\ \infty, & \text{se} \quad l \geq 1 \end{cases}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - referência – degrau unitário $R(s) = 1/s$
  - este limite designa-se por Coeficiente de Erro Estático de Posição

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$

  - resultando

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s}}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + K_p} = \begin{cases} \frac{1}{1+K}, & \text{se} \quad l = 0 \\ 0, & \text{se} \quad l \geq 1 \end{cases}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - referência – rampa unitária $R(s) = 1/s^2$
  - neste caso

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sG(s)}$$

  - define-se Coeficiente de Erro Estático de Velocidade

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - referência – rampa unitária $R(s) = 1/s^2$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad l = 0 \\ K, & \text{se} \quad l = 1 \\ \infty, & \text{se} \quad l \geq 2 \end{cases}$$

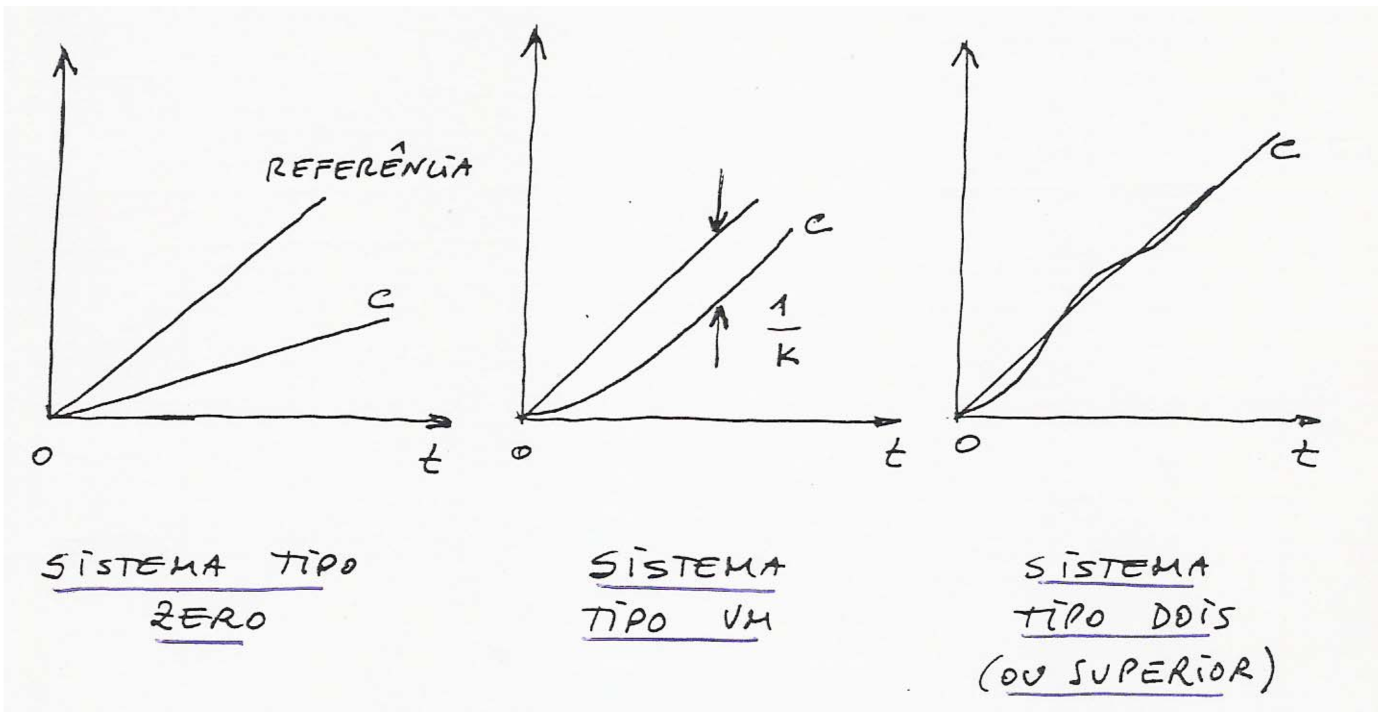
  - resultando

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty, & \text{se} \quad l = 0 \\ \dfrac{1}{K}, & \text{se} \quad l = 1 \\ 0, & \text{se} \quad l \geq 2 \end{cases}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - referência – rampa unitária $R(s) = 1/s^2$



jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - referência – parábola unitário $R(s) = 1/s^3$
  - para $r(t) = \frac{1}{2}t^2, \quad R(s) = \frac{1}{s^3}$
  - vem

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot \left(\frac{1}{s^3}\right)}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - referência – parábola unitário $R(s) = 1/s^3$
  - define-se Coeficiente de Erro Estático de Aceleração

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad l = 0,1 \\ K, & \text{se} \quad l = 2 \\ \infty, & \text{se} \quad l \geq 3 \end{cases} \qquad e_{ss} = \begin{cases} \infty, & \text{se} \quad l = 0,1 \\ \dfrac{1}{K}, & \text{se} \quad l = 2 \\ 0, & \text{se} \quad l \geq 3 \end{cases}$$

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - erro em regime permanente para um sistema estável

sinal de referência	tipo $l=0$	de $l=1$	sistema $l=2$	$l \geq 3$
degrau	$\frac{1}{1+k_p}$	0	0	0
rampa	∞	$\frac{1}{k_v}$	0	0
parabola	∞	∞	$\frac{1}{k_a}$	0

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt

Análise de Sistemas no Domínio dos Tempos

- Análise em regime permanente
  - adicionar integradores ao controlador
    - melhora a resposta em regime permanente
    - mas degrada a estabilidade

jtm@isep.ipp.pt, mss@isep.ipp.pt