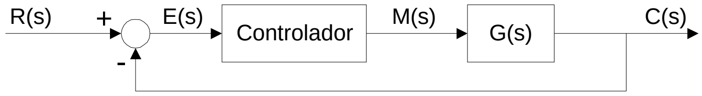
1.



a) Podemos simplificar G(S), ficando:

$$G(s)=\frac{4}{s^2+8s+80},$$

Por sua vez, a Função de Transferência do controlador PID é:

$$M(s)=20\left[1+\frac{1}{T_i\cdot s}+s\cdot T_d\right]\cdot E(s)$$

e admitindo que não existe acção integral ($1/T_i=0$), fica:

$$M(s)=20\left[1+s\cdot T_d\right]\cdot E(s)$$

A partir das expressões para a Função de Transferência do controlador PD e de G(S), podemos determinar a Função de Transferência em Malha Fechada deste sistema (C(s)/R(s)):

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{80\cdot s\cdot T_d+80}{s^2+(80\cdot T_d+8)\cdot s+160}$$

Uma vez que se pretende que o amortecimento do sistema realimentado seja unitário, devemos fazer:

$$\begin{cases}2\cdot\zeta\cdot\omega_n=80\cdot T_d+8\\ \omega_n^{\,2}=160\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}T_d=0{,}216\,s\\ \omega_n=12{,}65\,rad/s\end{cases}$$

b) Considerando agora que o controlador dispõe de acção integrativa, e a partir das expressões para a Função de Transferência do controlador PID e de G(S), podemos determinar a Função de Transferência em Malha Fechada do sistema (C(s)/R(s)), fazendo $T_d = 0{,}216$ s e $K_i = 1/T_i$:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{17{,}3\cdot s^2+80\cdot s+80\cdot K_i}{s^3+25{,}3\cdot s^2+160\cdot s+80\cdot K_i}$$

Aplicando o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz ao polinómio do denominador da Função de Transferência apresentada podemos determinar as condições em que o sistema anterior é estável:

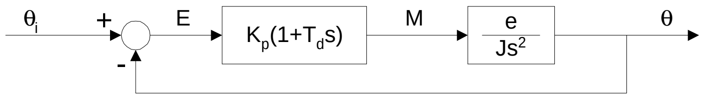
$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 160\\
2 & 25{,}3 & 80\cdot K_i\\
1 & 160-\dfrac{80\cdot K_i}{25{,}3} & \\
0 & 80\cdot K_i &
\end{array}$$

Para o sistema ter todas as raízes com parte real negativa não pode haver trocas de sinal nos coeficientes dos termos da primeira coluna, ou seja, têm que ser todos positivos. Logo, temos que ter:

$$\begin{cases} 160 - \dfrac{80 \cdot K_i}{25{,}3} > 0 \\ 80 \cdot K_i > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_i < 50{,}6 \\ K_i > 0 \end{cases}$$

Do exposto conclui-se que para o sistema permanecer estável devemos ter: $0 < K_i < 50{,}6$, ou seja $T_i > 0{,}01976$ s.

2.



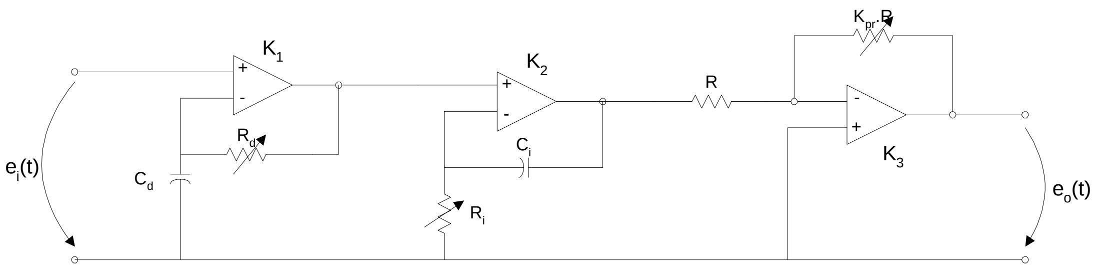
A Função de Transferência em Malha Fechada do sistema anterior é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{K_p \cdot T_d \cdot e}{J} \cdot s + \dfrac{K_p \cdot e}{J}}{s^2 + \dfrac{K_p \cdot T_d \cdot e}{J} \cdot s + \dfrac{K_p \cdot e}{J}}$$

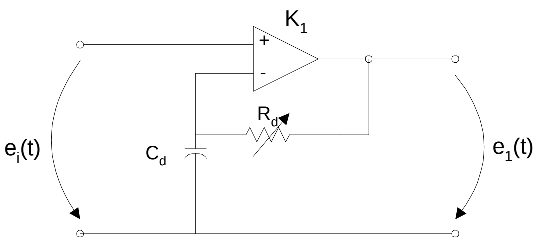
Uma vez que se pretende que o amortecimento do sistema realimentado seja $\zeta=0.7$, devemos fazer:

$$\begin{cases} 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = \dfrac{K_p \cdot T_d \cdot e}{J} \\ \omega_n^{\ 2} = \dfrac{K_p \cdot e}{J} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_d = 1{,}4 \cdot \sqrt{\dfrac{J}{K_p \cdot e}}\ s \\ \omega_n = \sqrt{\dfrac{K_p \cdot e}{J}}\ rad/s \end{cases}$$

3.



a) Acção de controlo do 1º Andar do controlador representado na figura anterior:

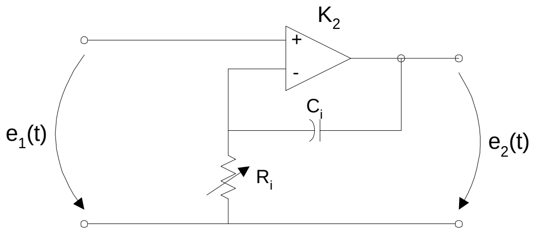


A Função de Transferência deste andar do controlador é dada por:

$$\frac{E_1(s)}{E_i(s)} = s \cdot C_d \cdot R_d + 1$$

o que implica uma acção de controlo derivativa.

Acção de controlo do 2º Andar:

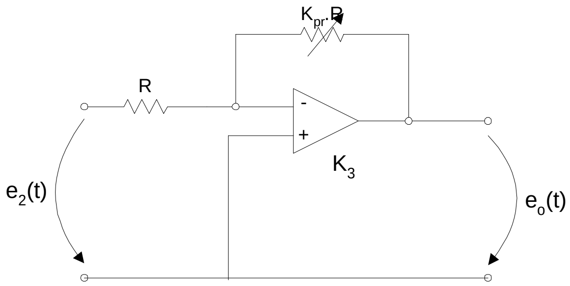


A Função de Transferência deste andar do controlador é dada por:

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = 1 + \frac{1}{s \cdot C_i \cdot R_i}$$

o que implica uma acção de controlo integral.

Acção de controlo do 3º Andar:



Por último, a Função de Transferência deste andar do controlador é dada por:

$$\frac{E_o(s)}{E_2(s)} = -K_p$$

o que implica uma acção de proporcional.

A Função de Transferência global do circuito é dada por:

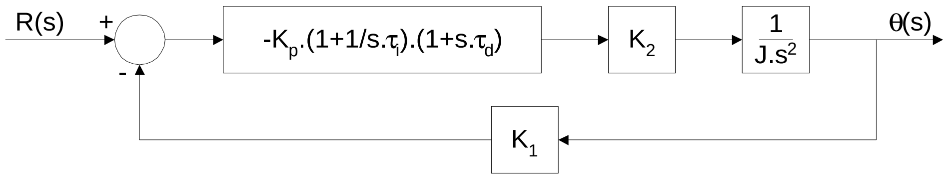
$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E_1(s)}{E_i(s)} \cdot \frac{E_2(s)}{E_1(s)} \cdot \frac{E_o(s)}{E_2(s)} = -\frac{K_p}{s \cdot C_i \cdot R_i} - K_p \cdot s \cdot C_d \cdot R_d - \left(K_p + K_p \cdot \frac{C_d \cdot R_d}{C_i \cdot R_i} \right)$$

donde se conclui que a acção de controlo deste circuito é do tipo PID.

b) A Função de Transferência da Inércia será:

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{J \cdot s^2}$$

O diagrama de blocos do sistema equivalente (considerando a existência de um conversor/amplificador entre o controlador e a inércia a controlar com ganho K_1 e de um transdutor na malha de realimentação com ganho K_2) é:



A Função de Transferência em Malha Fechada deste sistema é dada por (fazendo $K=K_1.K_2.K_p/J$):

$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{K\!\not{}_{K_2} \cdot \left(s^2 \cdot \tau_i \cdot \tau_d + s \cdot (\tau_i + \tau_d) + 1\right)}{s^3 \cdot \tau_i + s^2 \cdot \tau_i \cdot \tau_d \cdot K + s \cdot (\tau_i + \tau_d) \cdot K + K}$$

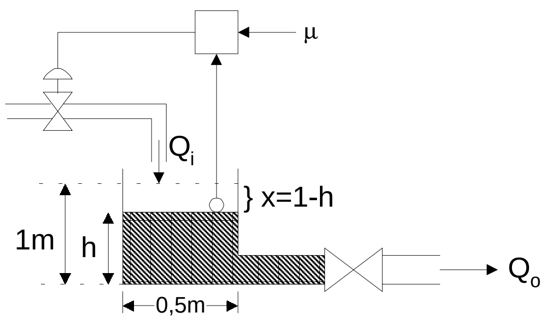
Para determinar as condições em que este sistema é estável, podemos aplicar o Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz ao polinómio do denominador da F.T.M.F. obtida:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & \tau_i & (\tau_i + \tau_d) \cdot K \\
2 & \tau_i \cdot \tau_d \cdot K & K \\
1 & \dfrac{K \cdot \tau_d \cdot \tau_i + K \cdot \tau_d{}^2 - 1}{\tau_d} & \\
0 & K &
\end{array}$$

Para o sistema ser estável não pode haver trocas de sinal nos coeficientes dos termos da primeira coluna, ou seja, têm que ser todos positivos. Logo, temos que ter:

$$\begin{cases} \dfrac{K \cdot \tau_d \cdot \tau_i + K \cdot \tau_d{}^2 - 1}{\tau_d} > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K > \dfrac{1}{\tau_d \cdot (\tau_d + \tau_i)} \\ -\dfrac{K_1 \cdot K_2 \cdot K_p}{J} > 0 \end{cases}$$

4.



a) As equações dinâmicas que regem o comportamento do sistema descrito na figura anterior são as seguintes:

$$\begin{cases} q_i(t) = 0.125 \cdot \left[x(t) + \int_0^t x(\tau)d\tau \right] \\ q_o(t) = 0.01 \cdot h(t) \\ q_i(t) - q_o(t) = A \cdot \dfrac{dh(t)}{dt} \end{cases}$$

Passando as equações anteriores para o domínio de Laplace e fazendo h(t) = 1- x(t) e A = 0,196 m^2, vem:

$$\begin{cases} Q_i(s) = 0.125 \cdot \left[X(s) + \dfrac{X(s)}{s} \right] \\ Q_o(s) = \dfrac{0,01}{s} - 0,01 \cdot X(s) \\ Q_i(s) - Q_o(s) = -s \cdot 0,196 \cdot X(s) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações anterior em ordem a X(s), obtém-se:

$$X(s) = \frac{0,051}{s^2 + 0,688 \cdot s + 0,637} = 0,08 \cdot \frac{0,637}{s^2 + 0,688 \cdot s + 0,637}$$

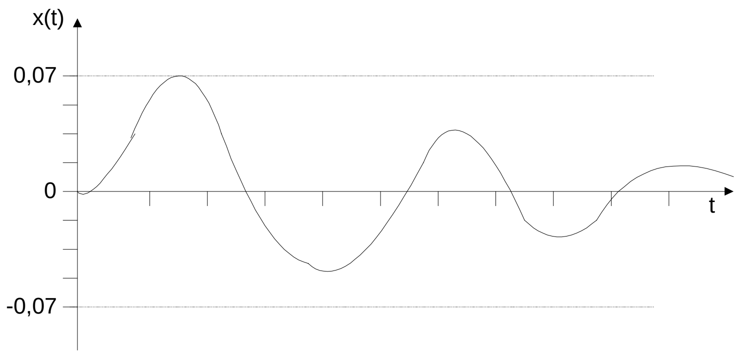
sendo esta a resposta de um sistema de 2ª ordem com:

$$\begin{cases} \zeta = 0,431 \\ \omega_n = 0,798 \, rad/s \end{cases}$$

A expressão x(*t*) é obtida aplicando a Transformada Inversa de Laplace a X(s), ficando:

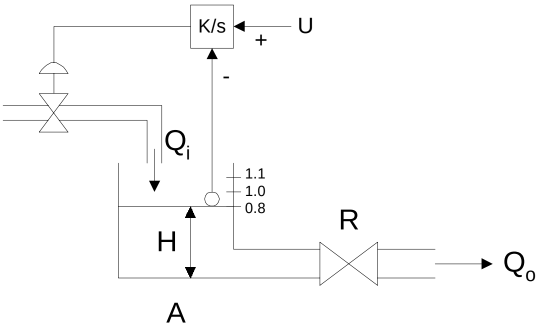
$$x(t) = 0,07 \cdot e^{-0,344 \cdot t} \cdot sen(0,72 \cdot t)$$

Graficamente, a resposta x(t) vai ser da forma:



b) Em regime estacionário x(t) $\rightarrow$ 0, logo h(t) $\rightarrow$ 1 m.

5.

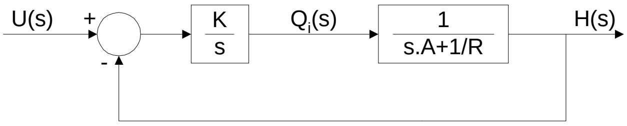


a) As equações dinâmicas que regem o comportamento do sistema descrito na figura anterior são as seguintes:

$$Q_i(s) = \frac{k}{s}\left[U(s) - H(s)\right]$$

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{s.A + \frac{1}{R}}$$

e o diagrama de blocos equivalente deste sistema é:



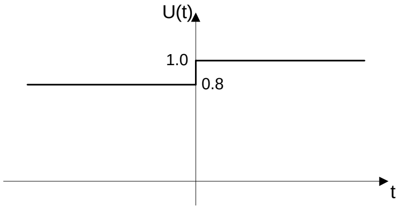
Sendo a Função de Transferência em Malha Fechada dada por:

$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K}{A}}{s^2 + \frac{1}{A \cdot R} \cdot s + \frac{K}{A}} = \frac{0{,}1}{s^2 + 0{,}1 \cdot s + 0{,}1}$$

vem:

$$\begin{cases} \zeta = 0{,}16 \\ \omega_n = 0{,}316 \ rad/s \end{cases}$$

b) Supondo que se aplica à entrada do sistema o seguinte sinal:



e uma vez que o sistema que estamos a estudar é um sistema linear e invariante no tempo, podemos considerar a resposta a este sinal de entrada como sendo a soma da resposta a um sinal constante de amplitude 0,8 com a resposta a um degrau de Heaviside de amplitude 0,2:

$$U(t) = 0{,}8 + u(t)$$

sendo:

$$u(t) = 0{,}2 \quad , t \geq 0 \quad \Rightarrow U(s) = \frac{0{,}2}{s}$$

A entrada constante de valor 0,8 será responsável pelo regime estático inicial e a entrada em degrau de amplitude 0,2 será responsável pelo regime dinâmico que se vai sobrepor ao regime estático inicial.

Uma vez que a Função de Transferência deste sistema é:

$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K}{A}}{s^2 + \frac{1}{A \cdot R} \cdot s + \frac{K}{A}} = \frac{0{,}1}{s^2 + 0{,}1 \cdot s + 0{,}1}$$

a resposta será:

$$H(s) = \frac{0{,}1}{s^2 + 0{,}1 \cdot s + 0{,}1} \cdot U(s) = \frac{0{,}1}{s^2 + 0{,}1 \cdot s + 0{,}1} \cdot \frac{0{,}2}{s}$$

A expressão h(*t*) é obtida aplicando a Transformada Inversa de Laplace a H(s), ficando:

$$h(t) = 0{,}2 \cdot \left[1 - 1{,}01 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t} \cdot sen(0{,}312 \cdot t + 1{,}41)\right]$$

Os parâmetros que caracterizam a resposta temporal deste sistema à entrada u(*t*), são os seguintes:

$$\omega_d = \omega_n . \sqrt{1 - \zeta^2} = 0{,}312 \; rad / s$$

$$\tau = \frac{1}{\zeta . \omega_n} = 20 \; s$$

$$t_s = 4 \cdot \tau = 80 \; s$$

$$t_r \Big|_{0 \to 100\%} = \frac{\pi - ar\,cos(\zeta)}{\omega_n . \sqrt{1 - \zeta^2}} = 5{,}55 \; s$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n . \sqrt{1 - \zeta^2}} = 10 \; s$$

$$h(t_p) = 0{,}2 \cdot \left[1 + e^{-\frac{\zeta . \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}\right] = 0{,}32$$

da expressão de h(t_p) conclui-se que o tanque transborda quando se atinge o pico da resposta ao degrau de entrada de amplitude 0,2.

c) Reduzindo o ganho para metade, a Função de Transferência do sistema passa a ser:

$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{0{,}05}{s^2 + 0{,}1 \cdot s + 0{,}1}$$

pelo que passamos a ter:

$\omega_n = 0{,}223 \; rad/s$

e

$\zeta = 0{,}227$

donde os parâmetros que caracterizam a resposta temporal deste sistema à entrada u(*t*), passam a ser os seguintes:

$$t_r\Big|_{0\to 100\%} = \frac{\pi - ar\cos(\zeta)}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}} = 8{,}33 \; s$$

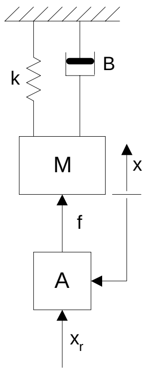
$$t_s = 4 \cdot \tau = 79 \; s$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}} = 14{,}5 \; s$$

$$h(t_p) = 0{,}2 \cdot \left[1 + e^{-\frac{\zeta.\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right] = 0{,}296$$

da expressão de h(t_p) conclui-se que nesta situação o tanque já não transborda quando se atinge o pico da resposta ao degrau de entrada de amplitude 0,2.

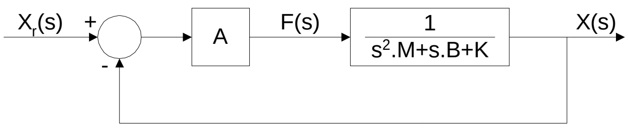
6.



a) A equação dinâmica que rege o sub-sistema Massa+mola+atrito é a seguinte:

$$f(t) - K.x(t) - B.\frac{dx(t)}{dt} = M.\frac{d^2x(t)}{dt^2} \Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2.M + s.B + K}$$

Logo, o diagrama de blocos deste sistema é o seguinte:



sendo a Função de Transferência em Malha Fechada dada pela expressão:

$$\frac{X(s)}{X_r(s)} = \frac{A}{s^2 \cdot M + s \cdot B + K + A} = \frac{5}{s^2 + s \cdot B + 7}$$

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

Uma vez que o objectivo é esboçar o L.G.R. com B como parâmetro, temos que obter uma expressão do tipo:

$$B \cdot G(s) \cdot H(s) = -1$$

Rearranjando a F.T.M.F., obtém-se:

$$B \cdot \frac{s}{s^2 + 7} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: $z_1 = 0$
Pólos: $p_1 = -\ j.2{,}646$
$p_2 = +\ j.2{,}646$

Nº de zeros: n = 1
Nº de pólos: d = 2

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 2.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 1

Uma vez que só existe uma assímptota esta é coincidente com o eixo real.

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{dB}{ds} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{ds}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s - p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{ds}\left[-\frac{(s^2 + 7)}{s}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -s^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s = \pm\sqrt{7} = \pm 2{,}646$$

Conclui-se que s = 2,646 é um ponto de entrada do L.G.R. no eixo real.

6. Os ângulos de partida do L.G.R. dos pólos complexos são dados por:

$$\phi = 180^o - \left(arg\left(\sum_{i=1}^{d-1} (s - p_i) \right) - arg\left(\sum_{i=1}^{n} (s - z_i) \right) \right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 180^o - \left[arg(s + j\sqrt{7}) - arg(s) \right]_{s=+j.\sqrt{7}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 180^o - arg(2 \cdot j.\sqrt{7}) + arg(j.\sqrt{7}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 180^o - 90^o + 90^o \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 180^o$$

7. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

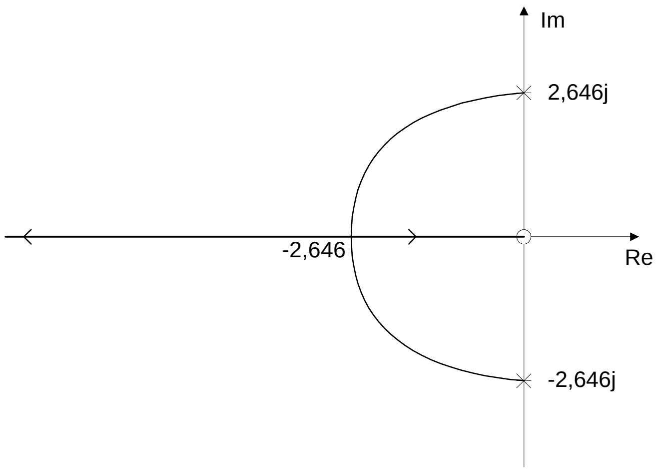
$$1 + GH(s)\Big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

$$1 + B.\frac{s}{s^2 + 7}\Bigg|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s^2 + B.s + 7\Big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\omega^2 + B.j.\omega + 7 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \omega = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

Conclui-se que o L.G.R. deste sistema só intersecta o eixo imaginário nos pólos e zero da Função de Transferência em Malha Aberta.

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



b) Para a saída deste sistema não apresentar oscilação, os pólos da Função de Transferência em Malha Fechada devem ser reais, o que sucede quando o L.G.R. se encontra sobre o eixo real. Fazendo:

$$s = -\sqrt{7} = -2{,}646$$

conclui-se que:

$$B = -\left.\frac{(s^2 + 7)}{s}\right|_{s=-\sqrt{7}} = 2 \cdot \sqrt{7}$$

Logo, o sistema não apresenta oscilação à sua saída para:

$$B \geq 2 \cdot \sqrt{7}$$