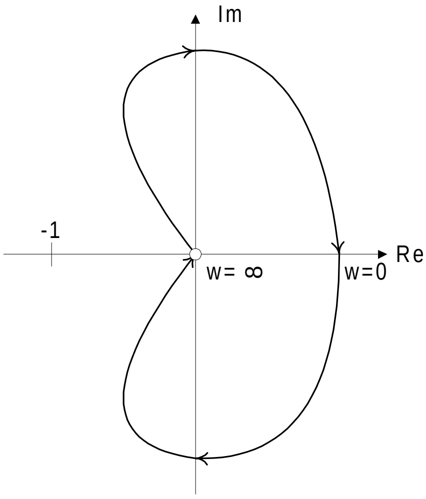
7.

7. a) $G(s) = \dfrac{K_0}{(1+s.T_1).(1+s.T_2)}$

De G(S), temos:

$$G(j\omega) = \frac{K_0}{(1+j\omega.T_1).(1+j\omega.T_2)}$$

Estabelecendo o traçado de Nyquist, obtém-se:



Daqui conclui-se:

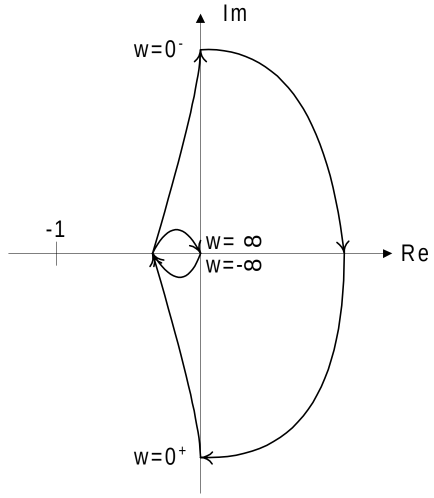
1. Uma vez que G(s) não possui qualquer pólo no semi plano direito do plano s, P=0;
2. Uma vez que não há qualquer envolvimento do traçado de G(s).H(s) ao ponto –1+j0, N=0;
3. Do exposto tira-se: Z=N+P=0, o que significa que o sistema é sempre estável para quaisquer valores positivos de K_0, T_1 e T_2.

7. b) $G(s) = \dfrac{K_1}{s.(1+s.T_1).(1+s.T_2)}$

De G(S), temos:

$$G(j\omega) = \frac{K_1}{j\omega.(1+j\omega.T_1).(1+j\omega.T_2)}$$

Estabelecendo o traçado de Nyquist, obtém-se:



Para este sistema apresentam-se duas situações:

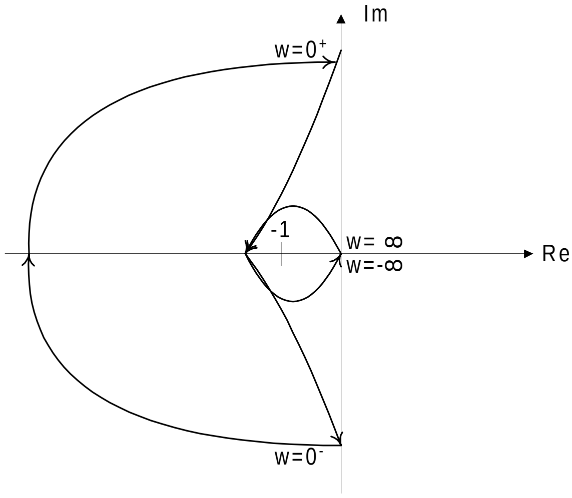
1. Para pequenos valores de K_1, não há qualquer envolvimento do traçado de G(s).H(s) ao ponto –1+j0, o que significa que o sistema é sempre estável para quaisquer valores positivos de T_1 e T_2;
2. Para elevados valores de K_1, há dois envolvimento do traçado de G(s).H(s) ao ponto –1+j0, no sentido horário, o que significa que o sistema é sempre instável para quaisquer valores positivos de T_1 e T_2;

8. $G(s).H(s) = K.\frac{s+3}{s.(s-2)}$

De G(S), temos:

$$G(j\omega).H(j\omega) = K.\frac{j\omega+3}{j\omega.(j\omega-2)}$$

Estabelecendo o traçado de Nyquist, obtém-se:



Daqui conclui-se:

1. Uma vez que G(s) possui um pólo no semi plano direito do plano s, P=1, e Z deverá ser igual a 0 para o sistema ser estável, implica que N deverá ser –1;
2. Para este sistema apresentam-se duas situações:
3. Para pequenos valores de K, o sistema é sempre instável;

4. Para elevados valores de K, o sistema é sempre estável.

Para determinar com exactidão o intervalo de valores de k que tornam o sistema estável, torna-se necessário determinar para que valor de k ocorre o cruzamento com o eixo real. Para este efeito devemos fazer:

$$G(s)\cdot H(s)=k.\frac{s+3}{s\cdot(s-2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(j\cdot\omega)\cdot H(j\cdot\omega)=k.\frac{-5\cdot\omega^2+j\cdot\left(6\cdot\omega-\omega^3\right)}{\omega^4+4\cdot\omega^2}$$

O cruzamento com o eixo real ocorre quando a parte imaginária de G(jω)H(jω) = 0, ou seja quando $\omega^2=6$.

Para $\omega^2 = 6$, temos G(jω)H(jω) = – k/2, o que significa que se k > 2 o sistema é estável; caso contrário, o sistema é instável.

O resultado que acabamos de obter recorrendo ao Critério de Estabilidade de Nyquist pode também ser obtido esboçando o L.G.R. deste sistema, como vamos passar a ver:

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$k.\frac{s+3}{s\cdot(s-2)}=-1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: $z_1 = -3$
Pólos: $p_1 = 0$
$p_2 = +2$

Nº de zeros: n = 1
Nº de pólos: d = 2

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 2.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 1

Uma vez que só existe uma assímptota esta é coincidente com o eixo real.

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{ds}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{ds}\left[\frac{-s^2 + 2\cdot s}{s+3}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -s^2 - 6\cdot s + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = -6{,}872 \\ s = 0{,}873 \end{cases}$$

6. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\Big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

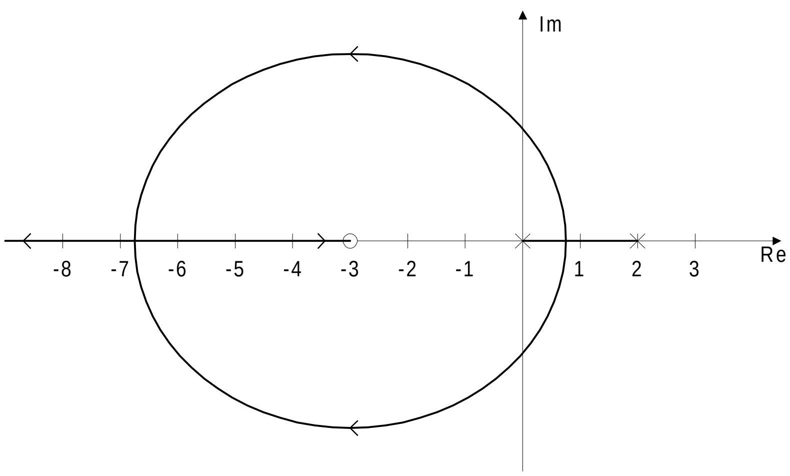
$$1 + k.\frac{s+3}{s\cdot(s-2)}\Bigg|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2 - 2\cdot s + k.s + 3\cdot k\Big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 - 2\cdot j\cdot\omega + k.j.\omega + 3\cdot k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ \omega^2 = 6 \end{cases}$$

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema



Para este sistema ser estável, os pólos da Função de Transferência em Malha Fechada devem situar-se no semi-plano esquerdo, o que sucede para k > 2, como concluímos ao calcular as intersecções do L.G.R. com o eixo imaginário.

9. $G(s).H(s) = \dfrac{K.e^{-T.s}}{s.(s+1).(s+2)}$

9. a)

Fazendo T=0, ficamos com:

$$G(j\omega).H(j\omega) = \frac{K}{j\omega.(j\omega+1).(j\omega+2)}$$

Uma vez que se pretende obter uma Margem de Ganho de 15,6 dB, devemos ter:

$$MG_{dB} = 20.\log\left(\frac{1}{|G.H(j\omega_\pi)|.}\right) = 15{,}6dB$$

quando:

$$\arg[G.H(j\omega_\pi)] = -\pi$$

Da segunda equação, tiramos que:

$$\omega_\pi = \sqrt{2}rad/s$$

Substituindo este valor na primeira equação, obtém-se o valor de K:

$$K = 0{,}9958$$

Para termos uma Margem de Fase de 25º, devemos ter:

$$M\phi = 180^o + \arg[G.H(j\omega_1)] = 25^o$$

quando:

$$|G.H(j\omega_1)| = 1$$

Desta equação tiramos que K deve ser:

$$K = 1{,}934$$

Substituindo este valor na penúltima equação, obtém-se o valor de ω_1:

$$\omega_1 = 0{,}876rad/s$$

9. b)

Para termos uma Margem de Fase de 25º, devemos ter $K = 1{,}934$ a uma frequência $\omega_1 = 0{,}876 rad/s$.

Para esta situação, o atraso máximo que se pode introduzir no sistema de forma a que este permaneça estável é igual a:

$$\omega_1.T = 25^{\circ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{25.\pi}{180^{\circ}}.\frac{1}{\omega_1} = 0{,}498 seg.$$

9. c)

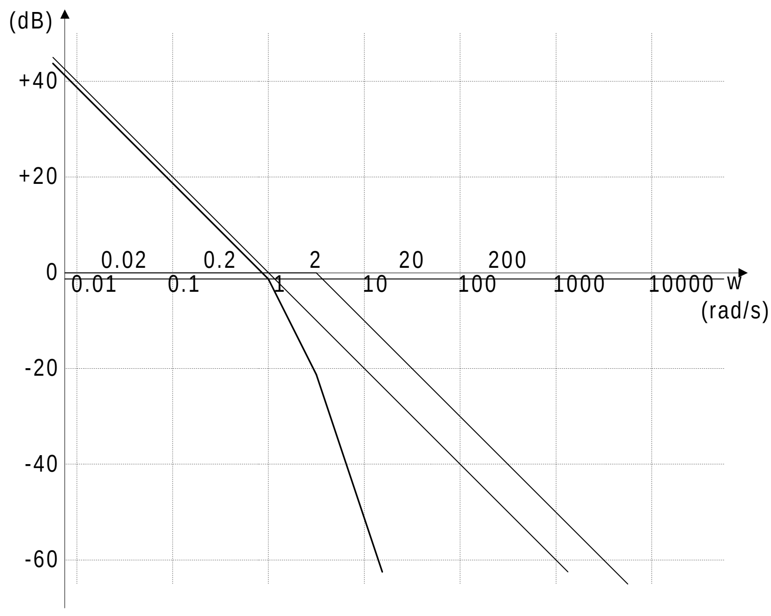
A função de transferência do sistema, fica:

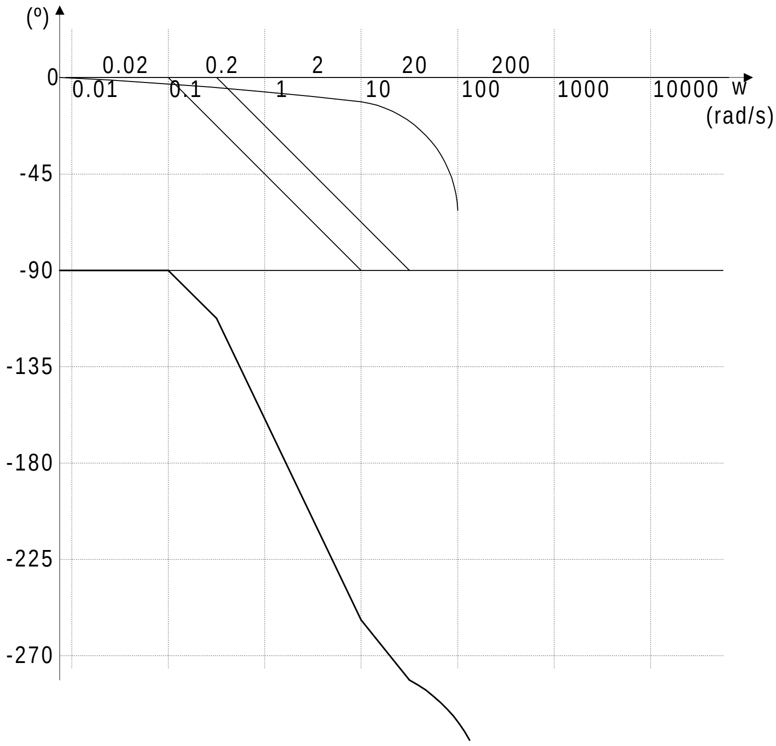
$$G(s).H(s) = \frac{1{,}934.e^{-0{,}498.s}}{s.(s+1).(s+2)}$$

O que decompondo em factores básicos, dá:

$$G(s).H(s) = \frac{0{,}967.e^{-0{,}498.j\omega}}{j\omega.(j\omega+1).\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)}$$

Pelos que os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, para este sistema, são os que se apresentam nas figuras seguintes:





10.

1. Recorde que um sistema de fase minima só tem pólos no semi-plano esquerdo;
2. A função de transferência do sistema do qual se representa o traçado de Nyquist é da forma: K.G.H(jω) = K.X(jω);
3. O traçado de Nyquist é obtido variando ω de 0 →∝ e fazendo K constante e igual a 1;
4. As curvas do L.G.R. são obtidas fazendo variar K de 0 →∝.

Suponhamos o caso em que ω=8:

$$K_1.X\left(j\omega_1\right)\Big|_{\omega_1=8}=-\mathrm{Re}_1+j\,\mathrm{Im}_1$$

como este ponto apresenta parte imaginária, não se verifica a condição G.H(jω) = –1

Do exposto, conclui-se que:
- os pontos de intersecção com o eixo imaginário são os pontos que no traçado de Nyquist estão sobre o eixo real;
- num dos pontos ω = 16;
- no outro: 2 < ω < 4.

Agora é necessário calcular K:

$$K_1.X\left(j\omega_1\right)=16$$

e

$$K_1.X\left(j\omega_2\right)=2\rightarrow 4$$

Do exposto, conclui-se que:

$$\Rightarrow K.X(j\omega) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |K| = \dfrac{1}{|X(j\omega)|} \\ \arg[X(j\omega)] = 180º \end{cases}$$

Temos assim:

- $\omega_1 = 16$:

$$K_1.X(j\omega_1) = a \Leftrightarrow$$

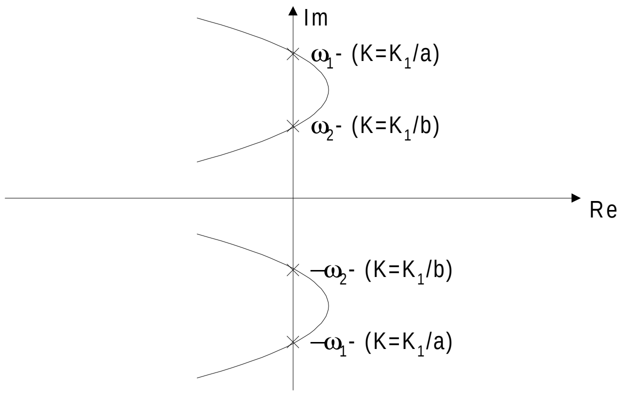
$$\Leftrightarrow |X(j\omega_1)| = \frac{a}{K_1} \Rightarrow K = \frac{K_1}{a}$$

- $2 < \omega_2 < 4$:

$$K_1.X(j\omega_2) = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |X(j\omega_2)| = \frac{b}{K_1} \Rightarrow K = \frac{K_1}{b}$$

Dado que o sistema é de fase minima, o L.G.R. tem que circular da maneira que se representa.



11.

11. a)

O sistema apresentado tem três pólos e um zero. As frequências a que ocorrem o zero e os pólos são as seguintes:

- p_1 à frequência 2 rad/s (pólo duplo na origem);
- p_2 à frequência 5 rad/s;
- p_3 à frequência 20 rad/s;
- z_1 à frequência 1 rad/s;

Considerando os seguintes factores básicos para os pólos:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\dfrac{j\omega}{p_i} + 1}$$

E para os zeros:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{z_i} + 1$$

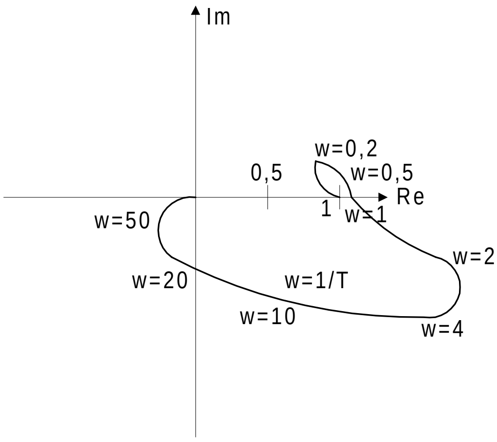
Temos:

$$G(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{1} + 1\right) \cdot \frac{1}{\frac{j\omega}{2} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{j\omega}{5} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{j\omega}{20} + 1}$$

Logo:

$$G(s) = \frac{200 \cdot (s+1)}{(s+2) \cdot (s+5) \cdot (s+20)}$$

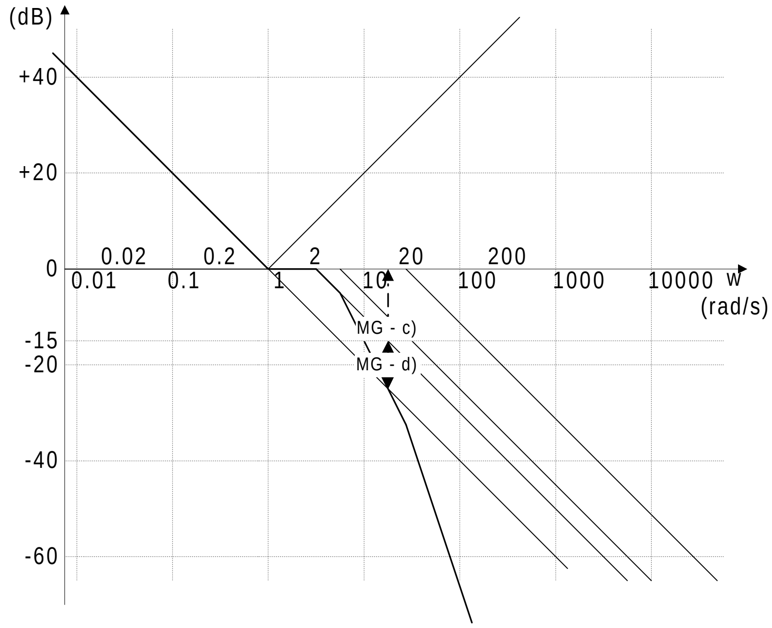
O Traçado de Nyquist desta função de transferência é o seguinte:

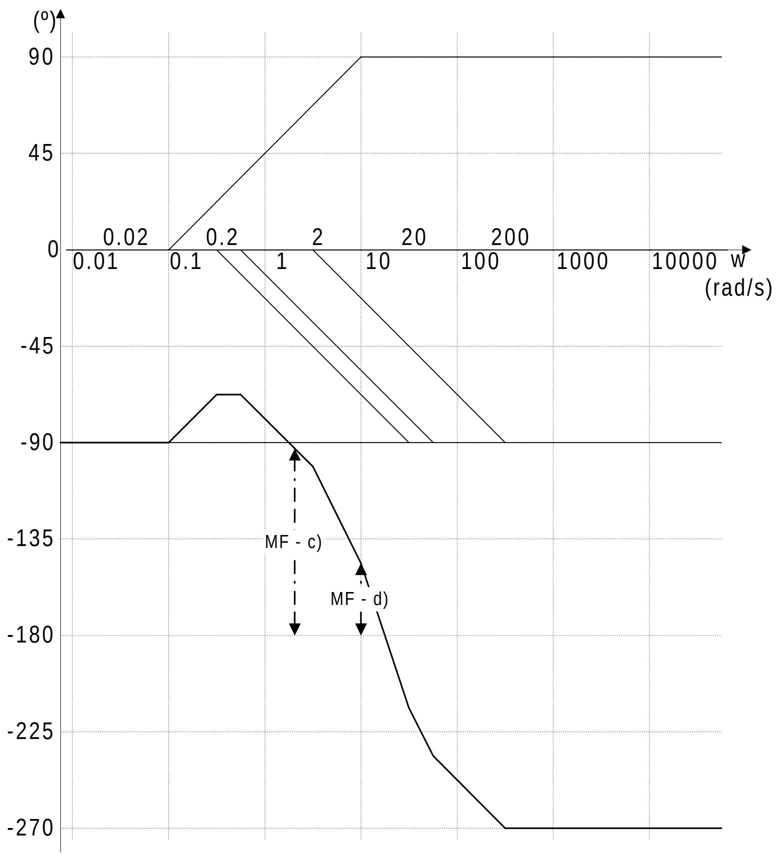


11. b)

Para esta situação, passamos a ter a seguinte função de transferência para o sistema:

$$G(s) = \frac{200 \cdot (s+1)}{s \cdot (s+2) \cdot (s+5) \cdot (s+20)}$$





11. c)

Ver os traçados assimptóticos de Bode.

11. d)

Ver os traçados assimptóticos de Bode.

O sistema fica mais próximo da instabilidade, uma vez que quer a Margem de Fase, quer a Margem de Ganho diminuem bastante, nesta situação.

11. e)

Um ganho em regime constante de 15 dB é equivalente a:

20.log[k] = 15 dB $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ k = 5,6

A função de transferência para esta situação fica:

$$G(s) = \frac{5{,}6 \times 200 \cdot (s+1)}{s \cdot (s+2) \cdot (s+5) \cdot (s+20)} = \frac{1120 \cdot (s+1)}{s \cdot (s+2) \cdot (s+5) \cdot (s+20)}$$