

TESIS: Teoria dos Sistemas



Transformada de Laplace

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace



1. Transformada de Laplace
2. Transformada inversa de Laplace
3. Propriedades da transformada de Laplace
4. Tabela de transformadas de Laplace
5. Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples
6. Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Transformada de Laplace



- Transformada de Laplace

- Definição: para uma função real de variável real $f(t)$ tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$ a **transformada de Laplace** de $f(t)$ é uma função de variável complexa definida por

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Transformada de Laplace



- Exemplo

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{at}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a}$$

Transformada de Laplace



- Existe uma correspondência biunívoca entre $f(t)$ e $F(s)$, isto é:

- se $f_1(t) \neq f_2(t) \Rightarrow F_1(s) \neq F_2(s)$

- se $f_1(t) = f_2(t) \Rightarrow F_1(s) = F_2(s)$

Transformada de Laplace



- Transformada inversa de Laplace
 - O cálculo de $f(t)$ a partir de $F(s)$ designa-se por **transformada inversa de Laplace** e pode ser obtido através do integral

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

para valores adequados de σ_1

Transformada de Laplace



- Propriedades da transformada de Laplace (I)

$$L[af(t)] = aF(s)$$

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

$$L_{\pm} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0^{\pm})$$

$$L_{\pm} \left[\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0^{\pm}) - \dot{f}(0^{\pm})$$

$$L \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s}$$

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace



- Propriedades da transformada de Laplace (II)

$$L[f(t - \alpha)u(t - \alpha)] = e^{-\alpha s} F(s), \alpha > 0$$

$$L[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$L[t^2 f(t)] = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

$$L[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + \alpha)$$

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace



• Propriedades da transformada de Laplace (III)

- teorema do valor inicial

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

- teorema do valor final

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

- teorema da convolução

$$w(t) * u(t) = \int_{0^-}^t w(t-t')u(t')dt' = L^{-1}[W(s)U(s)]$$

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace



• Tabela de transformadas de Laplace (I)

$f(t)$	$F(s)$
Impulso unitário $\delta(t)$	1
Degrau unitário $u(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa unitária t	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace



- Tabela de transformadas de Laplace (II)

$f(t)$	$F(s)$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{s \sin(\phi) + \omega \cos(\phi)}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{1}{[s + (a + j\omega)][s + (a - j\omega)]}$

Transformada de Laplace



- Cálculo da transformada inversa de Laplace através da decomposição em fracções simples

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s(s+1)^2} \right] = L^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} \right] =$$

$$= 1 - \frac{te^{-t}}{1!} - e^{-t} = 1 - e^{-t}(t+1) \quad \text{para } t \geq 0$$

Transformada de Laplace



- Aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u$$

aplicando a transformada de Laplace, vem

$$\begin{aligned} & a_n \left[s^n Y(s) - s^{n-1} y(0^-) - s^{n-2} y'(0^-) - \dots - s y^{(n-2)}(0^-) - y^{(n-1)}(0^-) \right] + \\ & + a_{n-1} \left[s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0^-) - s^{n-3} y'(0^-) - \dots - s y^{(n-3)}(0^-) - y^{(n-2)}(0^-) \right] + \\ & + \dots + a_0 Y(s) = b_m \left[s^m U(s) - s^{m-1} u(0^-) - s^{m-2} u'(0^-) - \dots - u^{(m-1)}(0^-) \right] + \dots + b_0 U(s) \end{aligned}$$

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace



- Logo

$$\begin{aligned} Y(s) = & U(s) \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + s b_1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + s a_1 + a_0} + \text{resposta livre} \\ & + \frac{y(0^-)(s^{n-1} a_n + s^{n-2} a_{n-1} + \dots + a_1) + y'(0^-)(s^{n-2} a_n + s^{n-3} a_{n-1} + \dots + a_2) + \dots}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \\ & - \frac{u(0^-)(s^{m-1} b_m + s^{m-2} b_{m-1} + \dots + b_1) - u'(0^-)(s^{m-2} b_m + s^{m-3} b_{m-1} + \dots + b_2)}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

Note: In the original image, the first fraction is circled in red and labeled 'resposta forçada', and the remaining terms are circled in blue and labeled 'resposta livre'.

TESIS – Teoria dos Sistemas

ISEP – Ano Lectivo 2008 / 2009

Manuel Silva: mss@isep.ipp.pt

Transformada de Laplace



- Define-se **Função de Transferência** como

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + s b_1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + s a_1 + a_0}$$

considerando as condições iniciais nulas

Transformada de Laplace



- Exemplo

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u''(t) + 2u'(t) + 2u(t)$$

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 3sY(s) - 3y(0^-) + 2Y(s) &= \\ = s^2 U(s) - su(0^-) - u'(0^-) + 2sU(s) - 2u(0^-) + 2U(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 3s + 2} U(s) + \\ &+ \frac{sy(0^-) + 3y(0^-) + y'(0^-) - su(0^-) - 2u(0^-) - u'(0^-)}{s^2 + 3s + 2} \end{aligned}$$

Transformada de Laplace



- Supondo condições iniciais nulas, obtém-se a função de transferência

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+2)}$$

- Se, por exemplo, $u(t) = \delta(t)$ vem

$$L[\delta(t)] = 1$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+2)} \cdot 1 = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

$$L^{-1}[Y(s)] = \delta(t) + e^{-t} - 2e^{-2t}$$