Departamento de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto

TESIS
Teoria dos Sistemas

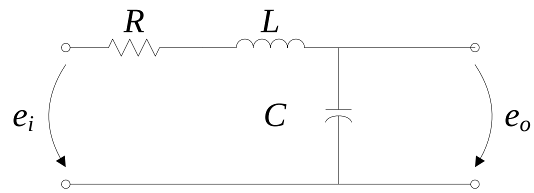
Modelação de Sistemas

–

Resolução dos Exercícios Propostos

1. Determine a Função de Transferência $G(s)$ dos sistemas eléctricos representados nas figuras seguintes:

a)



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\begin{cases} e_i(t) = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)dt \\ e_o(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)dt \end{cases}$$

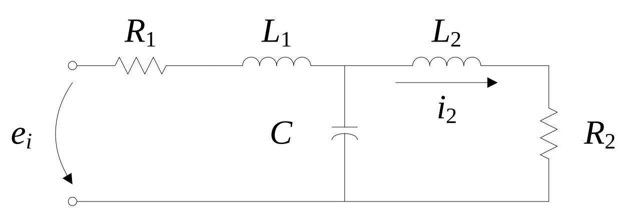
Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} E_i(s) = RI(s) + sLI(s) + \dfrac{1}{sC}I(s) \Leftrightarrow E_i(s) = \left[R + sL + \dfrac{1}{sC}\right]I(s) \\ E_o(s) = \dfrac{1}{sC}I(s) \end{cases}$$

Dividindo $E_o(s)$ por $E_i(s)$, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T. = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}$$

b)



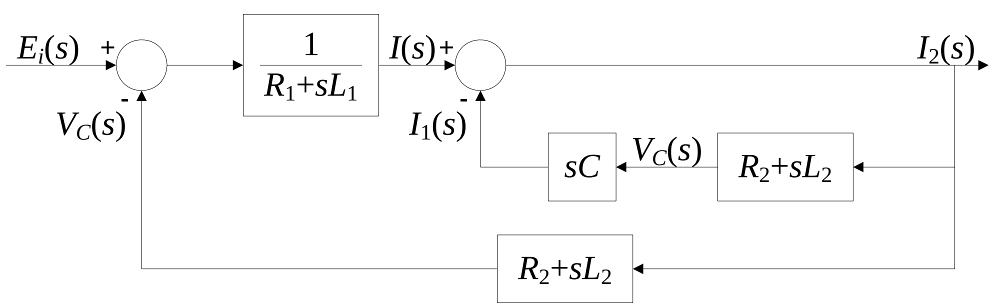
As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\begin{cases} e_i(t) = R_1 i(t) + L_1 \dfrac{di(t)}{dt} + v_c(t) \\ v_c(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_1(t)dt \\ v_c(t) = L_2 \dfrac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) \\ i(t) = i_1(t) + i_2(t) \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} E_i(s) = R_1 I(s) + sL_1 I(s) + V_c(s) \\ V_c(s) = \dfrac{1}{sC} I_1(s) \\ V_c(s) = sL_2 I_2(s) + R_2 I_2(s) \\ I(s) = I_1(s) + I_2(s) \end{cases}$$

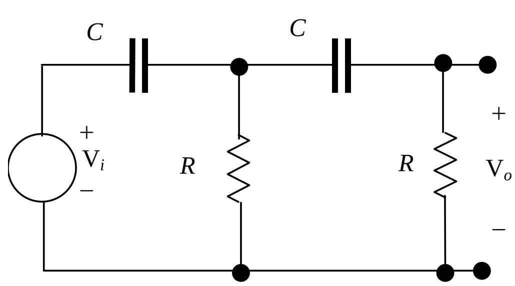
A partir das equações anteriores é possível construir o seguinte diagrama de blocos deste sistema:



Simplificando o diagrama de blocos anterior, obtém-se a função de transferência do sistema, apresentada abaixo:

$$F.T. = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{s^3 L_1 L_2 C + s^2(R_1 L_2 C + L_1 R_2 C) + s(L_1 + L_2 + R_1 R_2 C) + R_1 + R_2}$$

c)



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\begin{cases} v_i(t) = Ri_{11}(t) + \dfrac{1}{C}\int i_{11}(t)dt - Ri_{22}(t) \\ -Ri_{11}(t) + \dfrac{1}{C}\int i_{22}(t)dt + 2Ri_{22}(t) = 0 \\ v_o(t) = Ri_{22}(t) \end{cases}$$

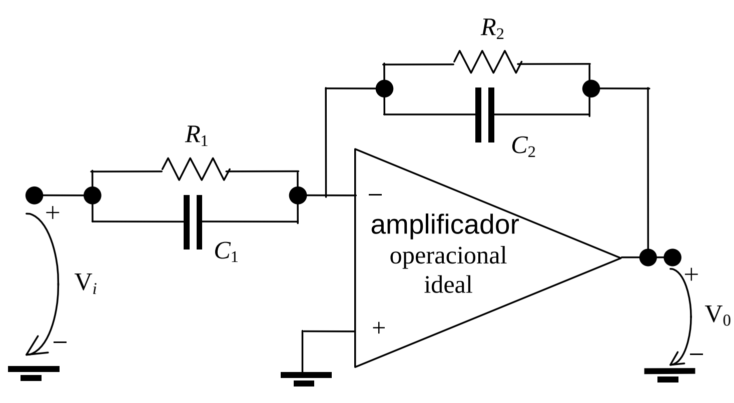
Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} V_i(s) = RI_{11}(s) + \dfrac{1}{sC} I_{11}(s) - RI_{22}(s) \\ -RI_{11}(s) + \dfrac{1}{sC} I_{22}(s) + 2RI_{22}(s) = 0 \\ V_o(s) = RI_{22}(s) \end{cases}$$

Resolvendo a segunda equação em ordem a $I_{11}(s)$ e substituindo na primeira equação, resolve-se de seguida a primeira equação em ordem a $I_{22}(s)$ e substitui-se o resultado na terceira equação, obtendo-se a Função de Transferência pretendida:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{(sCR)^2}{(sCR)^2 + 3sCR + 1}$$

d)



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\begin{cases} i_1(t) = \dfrac{v_i(t)}{R_1} + C_1 \dfrac{dv_i(t)}{dt} \\ i_2(t) = -\dfrac{v_o(t)}{R_2} - C_2 \dfrac{dv_o(t)}{dt} \\ i_1(t) = i_2(t) \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

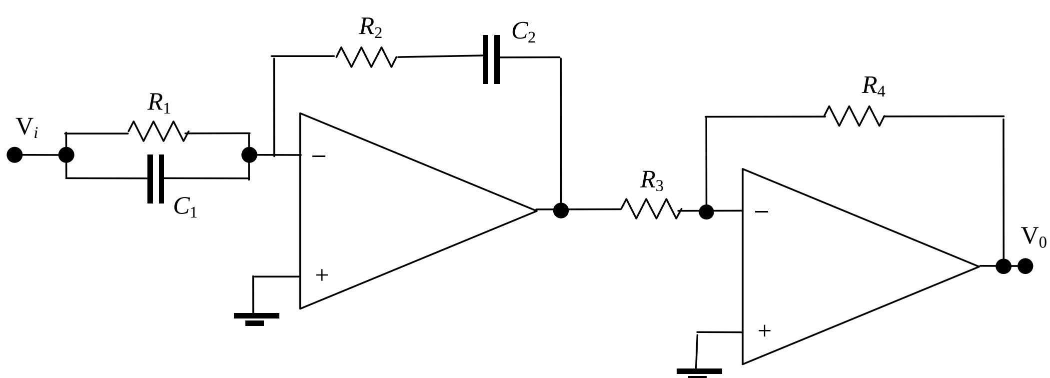
$$\begin{cases} I_1(s) = \dfrac{V_i(s)}{R_1} + sC_1V_i(s) \\ I_2(t) = -\dfrac{V_o(s)}{R_2} - sC_2V_o(s) \\ I_1(s) = I_2(s) \end{cases}$$

Igualando $I_1(s)$ a $I_2(s)$ e simplificando, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$\left[\frac{1}{R_1} + sC_1\right]V_i(s) = -\left[\frac{1}{R_2} + sC_2\right]V_o(s)$$

$$\frac{\mathrm{V}_o(s)}{\mathrm{V}_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{sC_1R_1+1}{sC_2R_2+1}$$

e)



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\begin{cases} i_1(t) = \dfrac{v_i(t)}{R_1} + C_1 \dfrac{dv_i(t)}{dt} \\ -v_1(t) = R_2 i_1(t) + \dfrac{1}{C_2}\int i_1(t')dt' \\ \dfrac{v_o(t)}{v_1(t)} = -\dfrac{R_4}{R_3} \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} I_1(s) = \dfrac{V_i(s)}{R_1} + sC_1V_i(s) \\ -V_1(s) = R_2 I_1(s) + \dfrac{1}{sC_2} I_1(s) \\ \dfrac{V_o(t)}{V_1(t)} = -\dfrac{R_4}{R_3} \end{cases}$$

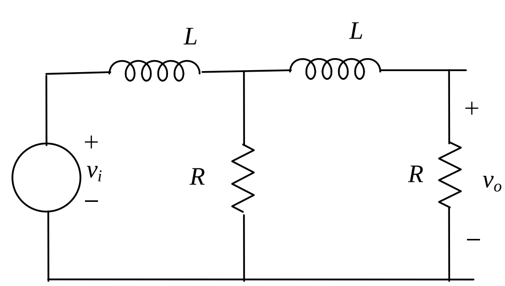
Resolvendo a primeira equação em ordem a $I_1(s)$ e substituindo o resultado na segunda equação, obtém-se:

$$V_1(s) = -\left[\frac{sC_2R_2+1}{sC_2}\right]\left[\frac{sC_1R_1+1}{R_1}\right]V_i(s)$$

Simplificando, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$\frac{\mathrm{V}_o(s)}{\mathrm{V}_i(s)} = \frac{R_4}{R_3}\frac{(sC_1R_1+1)(sC_2R_2+1)}{sC_2R_1}$$

f)



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\begin{cases} v_i(t) = Ri_{11}(t) + L\dfrac{di_{11}(t)}{dt} - Ri_{22}(t) \\ -Ri_{11}(t) + L\dfrac{di_{22}(t)}{dt} + 2Ri_{22}(t) = 0 \\ v_o(t) = Ri_{22}(t) \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

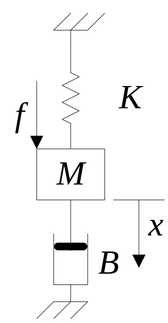
$$\begin{cases} V_i(s) = RI_{11}(s) + sLI_{11}(s) - RI_{22}(s) \\ -RI_{11}(s) + sLI_{22}(s) + 2RI_{22}(s) = 0 \\ V_o(s) = RI_{22}(s) \end{cases}$$

Resolvendo a segunda equação em ordem a $I_{11}(s)$ e substituindo na primeira equação, resolve-se de seguida a primeira equação em ordem a $I_{22}(s)$ e substitui-se o resultado na terceira equação, obtendo-se a Função de Transferência pretendida:

$$\frac{\mathrm{V}_o(s)}{\mathrm{V}_i(s)} = \frac{\omega_0^{\,2}}{s^2 + 3s\omega_0 + \omega_0^{\,2}}$$

2. Determine a Função de Transferência $G(s)$ dos sistemas mecânicos de translação representados nas figuras seguintes:

a)



Uma vez que:

$$\sum F = Ma = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

A equação dinâmica que descreve o funcionamento deste sistema é a seguinte:

$$f(t) - Kx(t) - B\frac{dx(t)}{dt} = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

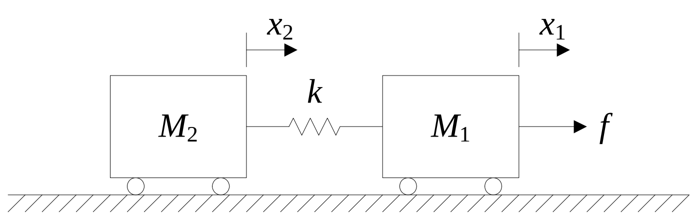
Aplicando a Transformada de Laplace a esta equação, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$F(s) - KX(s) - sBX(s) = s^2 MX(s)$$

Simplificando a equação anterior, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T. = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 M + sB + K}$$

b)



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste sistema são as seguintes:

$$\begin{cases} \sum F_1 = M_1 a_1 \\ \sum F_2 = M_2 a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum F_1 = M_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} \\ \sum F_2 = M_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) - k\left[x_1(t) - x_2(t)\right] = M_1 \dfrac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \\ -k\left[x_2(t) - x_1(t)\right] = M_2 \dfrac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \end{cases}$$

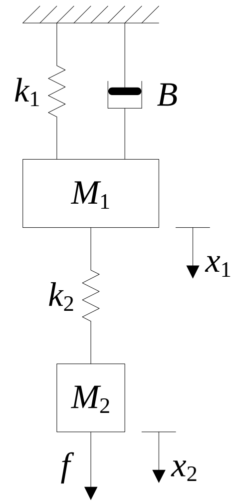
Aplicando a Transformada de Laplace a estas equações, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} F(s) - k\left[X_1(s) - X_2(s)\right] = s^2 M_1 X_1(s) \\ -k\left[X_2(s) - X_1(s)\right] = s^2 M_2 X_2(s) \end{cases}$$

Substituindo o valor de $X_1(s)$ obtido na segunda equação, na primeira equação, e simplificando o resultado obtido, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T. = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{k}{\left(s^2 M_1 + k\right)\left(s^2 M_2 + k\right) - k^2}$$

c)



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\sum F = M_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \Leftrightarrow -K_1 x_1(t) - B_1 \frac{dx_1(t)}{dt} - K_2\left[x_1(t) - x_2(t)\right] = M_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2}$$

$$\sum F = M_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \Leftrightarrow f(t) - K_2\left[x_2(t) - x_1(t)\right] = M_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

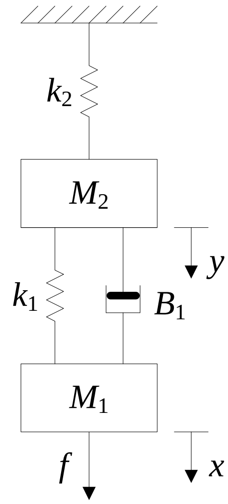
$$-K_1 X_1(s) - sB_1 X_1(s) - K_2\left[X_1(s) - X_2(s)\right] = s^2 M_1 X_1(s) \Leftrightarrow X_2(s) = \frac{s^2 M_1 + sB_1 + K_1 + K_2}{K_2}$$

$$F(s) - K_2\left[X_2(s) - X_1(s)\right] = s^2 M_2 X_2(s) \Leftrightarrow F(s) = \left[s^2 M_2 + K_2\right] X_2(s) - K_2 X_1(s)$$

Substituindo o valor de $X_2(s)$ obtido na primeira equação, na segunda equação, e simplificando o resultado obtido, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T. = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{K_2}{s^4 M_1 M_2 + s^3 B_1 M_2 + s^2(K_1 M_2 + M_2 K_2 + M_1 K_2) + s(B_1 K_2) + K_1 K_2}$$

d)



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\begin{cases} \sum F_1 = M_1 \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \sum F_2 = M_2 \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) - k_1\left[x(t) - y(t)\right] - B_1\left[\dfrac{dx(t)}{dt} - \dfrac{dy(t)}{dt}\right] = M_1 \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ -k_1\left[y(t) - x(t)\right] - B_1\left[\dfrac{dy(t)}{dt} - \dfrac{dx(t)}{dt}\right] - k_2 y(t) = M_2 \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \end{cases}$$

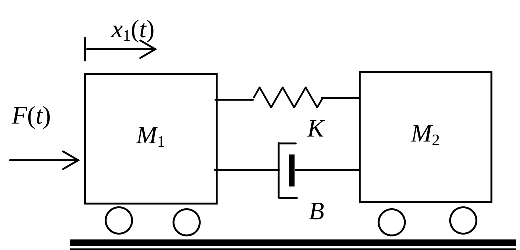
Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} F(s) - k_1\left[X(s) - Y(s)\right] - sB_1\left[X(s) - Y(s)\right] = s^2 M_1 X(s) \\ -k_1\left[Y(s) - X(s)\right] - sB_1\left[Y(s) - X(s)\right] - k_2 Y(s) = s^2 M_2 Y(s) \end{cases}$$

Substituindo o valor de $X(s)$ obtido na segunda equação, na primeira equação, e simplificando o resultado obtido, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T. = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{sB_1 + k_1}{\left(s^2M_1 + sB_1 + k_1\right)\left(s^2M_2 + sB_1 + k_1 + k_2\right) - \left(sB_1 + k_1\right)^2}$$

e)



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\begin{cases} \sum F_1 = M_1 \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \sum F_2 = M_2 \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(t) - K\left[x_1(t) - x_2(t)\right] - B\left[\dfrac{dx_1(t)}{dt} - \dfrac{dx_2(t)}{dt}\right] = M_1 \dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2} \\ -K\left[x_2(t) - x_1(t)\right] - B\left[\dfrac{dx_2(t)}{dt} - \dfrac{dx_1(t)}{dt}\right] = M_2 \dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2} \end{cases}$$

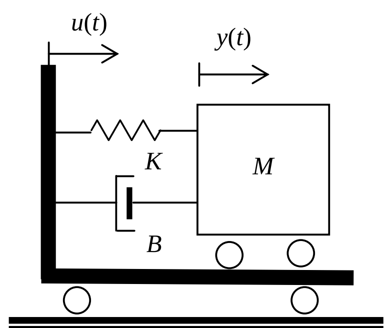
Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} F(s) - K\left[X_1(s) - X_2(s)\right] - sB\left[X_1(s) - X_2(s)\right] = s^2 M_1 X_1(s) \\ -K\left[X_2(s) - X_1(s)\right] - sB\left[X_2(s) - X_1(s)\right] = s^2 M_2 X_2(s) \end{cases}$$

Substituindo o valor de $X_2(s)$ obtido na segunda equação, na primeira equação, e simplificando o resultado obtido, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T. = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{s^2 M_2 + sB + K}{\left[s^2 M_1 M_2 + \left(M_1 + M_2\right)\left(sB + K\right)\right] s^2}$$

f)



Uma vez que:

$$\sum F(t) = Ma(t) = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

A equação dinâmica que descreve o funcionamento deste sistema é a seguinte:

$$-K\left[y(t) - u(t)\right] - B\left[\frac{dy(t)}{dt} - \frac{du(t)}{dt}\right] = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

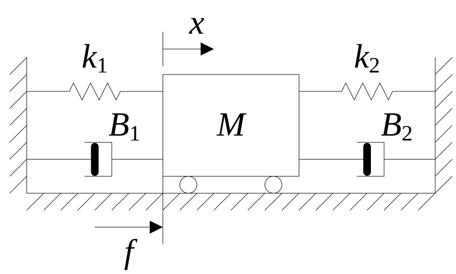
Aplicando a Transformada de Laplace a esta equação, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$-K\left[Y(s)-U(s)\right]-sB\left[Y(s)-U(s)\right]=s^2MY(s)$$

Simplificando a equação anterior, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T.=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{sB+K}{s^2M+sB+K}$$

g)



Uma vez que:

$$\sum F(t)=Ma(t)=M\,\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

A equação dinâmica que descreve o funcionamento deste sistema é a seguinte:

$$f(t)-k_1x(t)-k_2x(t)-B_1\frac{dx(t)}{dt}-B_2\frac{dx(t)}{dt}=M\,\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

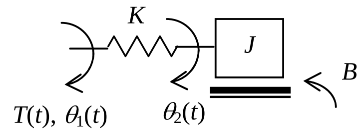
Aplicando a Transformada de Laplace a esta equação, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$F(s)-k_1X(s)-k_2X(s)-sB_1X(s)-sB_2X(s)=s^2MX(s)$$

Simplificando a equação anterior, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T.=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{s^2M+s\left(B_1+B_2\right)+K_1+K_2}$$

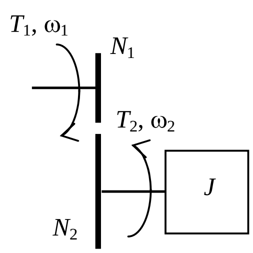
3. Para o sistema mecânico representado na figura, com uma inércia J, uma mola K e um atrito viscoso B, qual é o modelo matemático que descreve a relação entre o binário de entrada T e os deslocamentos angulares θ_1 e θ_2.



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste sistema mecânico são as seguintes:

$$\begin{cases} T = K\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ T = J\ddot{\theta}_2 + B\dot{\theta}_2 \end{cases}$$

4. Considere o sistema de engrenagem representado no esquema seguinte onde T_1 é o binário aplicado, ao passo que J e ω_2 são, respectivamente. a inércia e a velocidade angular da carga. Qual a relação entre T_1 e $\dot{\omega}_2$.



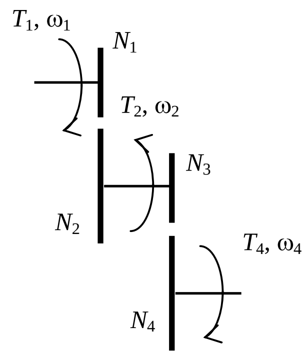
As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste sistema mecânico são as seguintes:

$$\begin{cases} T_2 = J\alpha_2 \\ \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{N_1}{N_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_2 = J\dot{\omega}_2 \\ T_1 = \dfrac{N_1}{N_2} T_2 \end{cases}$$

Logo:

$$T_1 = \frac{N_1}{N_2} T_2 = \frac{N_1}{N_2} J\dot{\omega}_2 = J\left(\frac{N_1}{N_2}\right)\dot{\omega}_2$$

5. Considere o sistema de engrenagens representado no esquema. Qual a relação entre T_1 e T_4.



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento do primeiro par de engrenagens deste sistema mecânico são as seguintes:

$$\begin{cases} T_1\omega_1 = T_2\omega_2 \\ \omega_1 N_1 = \omega_2 N_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

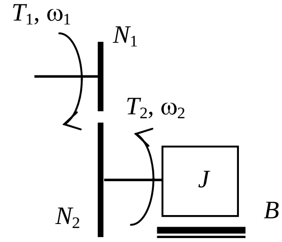
As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento do segundo par de engrenagens deste sistema mecânico são as seguintes:

$$\begin{cases} T_2\omega_2 = T_4\omega_4 \\ \omega_2 N_3 = \omega_4 N_4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_4} = \frac{N_3}{N_4} = \frac{\omega_4}{\omega_2}$$

Logo:

$$\frac{T_1}{T_4} = \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4}$$

6. Considere o sistema de engrenagem representado no esquema seguinte onde T_1 é o binário aplicado, ao passo que J e ω_2 são, respectivamente. a inércia e a velocidade angular da carga. Qual a relação entre T_1 e ω_1.



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste sistema mecânico são as seguintes:

$$T_2 = J\dot{\omega}_2 + B\omega_2$$

e

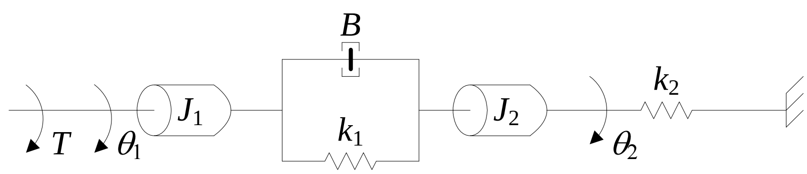
$$\begin{cases} T_1\omega_1 = T_2\omega_2 \\ \omega_1 N_1 = \omega_2 N_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Logo:

$$T_1 = \left(J\dot{\omega}_1 + B\omega_1\right)\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

7. Determine a Função de Transferência $G(s)$ dos sistemas mecânicos de rotação representados nas figuras seguintes:

a)



Uma vez que:

$$\sum T = J\alpha = J\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\sum T = J_1\frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} \Leftrightarrow T(t) - K_1\left[\theta_1(t) - \theta_2(t)\right] - B\left[\frac{d\theta_1(t)}{dt} - \frac{d\theta_2(t)}{dt}\right] = J_1\frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2}$$

$$\sum T = J_2.\frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2} \Leftrightarrow -K_1\left[\theta_2(t) - \theta_1(t)\right] - B\left[\frac{d\theta_2(t)}{dt} - \frac{d\theta_1(t)}{dt}\right] - K_2\theta_2(t) = J_2\frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

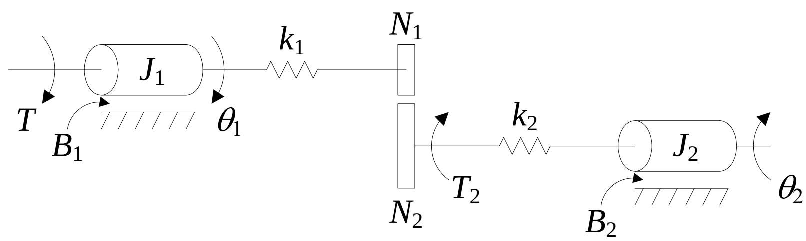
$$\begin{cases} T(s) - K_1\left[\theta_1(s) - \theta_2(s)\right] - sB\left[\theta_1(s) - \theta_2(s)\right] = s^2 J_1\theta_1(s) \\ -K_1\left[\theta_2(s) - \theta_1(s)\right] - sB\left[\theta_2(s) - \theta_1(s)\right] - K_2\theta_2(s) = s^2 J_2\theta_2(s) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T(s) = \left[s^2 J_1 + sB + K_1\right]\theta_1(s) - \left[sB + K_1\right]\theta_2(s) \\ \theta_1(s) = \dfrac{s^2 J_2 + sB + K_1 + K_2}{sB + K_1}\theta_2(s) \end{cases}$$

Substituindo o valor de $\theta_1(s)$ obtido na segunda equação, na primeira equação, e simplificando o resultado obtido, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T. = \frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{sB + K_1}{s^4 J_1 J_2 + s^3(J_1 B + J_2 B) + s^2(J_1 K_1 + J_1 K_2 + J_2 K_1) + s(BK_2) + K_1 K_2}$$

b)



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\begin{cases} T(t) - B_1 \dfrac{d\theta_1(t)}{dt} - K_1\left[\theta_1(t) - \theta_{12}(t)\right] = J_1 \dfrac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} \\ -nK_1\left[\theta_{12}(t) - \theta_1(t)\right] - K_2\left[\theta_{21}(t) - \theta_2(t)\right] = 0 \\ -K_2\left[\theta_2(t) - \theta_{21}(t)\right] - B_2 \dfrac{d\theta_2(t)}{dt} = J_2 \dfrac{d^2\theta_2(t)}{dt^2} \\ \theta_{12}(t) = \theta_{21}(t)n \\ T_2(t) = T_{12}(t)n \\ n = \dfrac{N_2}{N_1} \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} T(s) - sB_1\theta_1(s) - K_1\left[\theta_1(s) - \theta_{12}(s)\right] = s^2 J_1\theta_1(s) \\ nK_1\left[\theta_{12}(s) - \theta_1(s)\right] + K_2\left[\theta_{21}(s) - \theta_2(s)\right] = 0 \\ -K_2\left[\theta_2(s) - \theta_{21}(s)\right] - sB_2\theta_2(s) = s^2 J_2\theta_2(s) \\ \theta_{12}(s) = \theta_{21}(s)n \\ T_2(s) = T_{12}(s)n \end{cases}$$

Substituindo $\theta_{12}(s) = \theta_{21}(s)n$, na segunda equação, obtém-se:

$$\theta_{21} = \frac{nK_1\theta_1 + K_2\theta_2}{n^2K_1 + K_2}$$

e substituindo este valor na primeira e terceira equações, ficamos com:

$$T(s) = \left[s^2J_1 + sB_1 + \frac{K_1K_2}{n^2K_1 + K_2}\right]\theta_1(s) - \frac{nK_1K_2}{n^2K_1 + K_2}\theta_2(s) - \frac{nK_1K_2}{n^2K_1 + K_2}\theta_1(s) + \left[s^2J_2 + sB_2 + \frac{n^2K_1K_2}{n^2K_1 + K_2}\right]\theta_2(s$$

Considerando:

$$T(s) = G_1(s)\theta_1(s) - G_2(s)\theta_2(s) - G_3(s)\theta_1(s) + G_4(s)\theta_2(s) = 0$$

Temos:

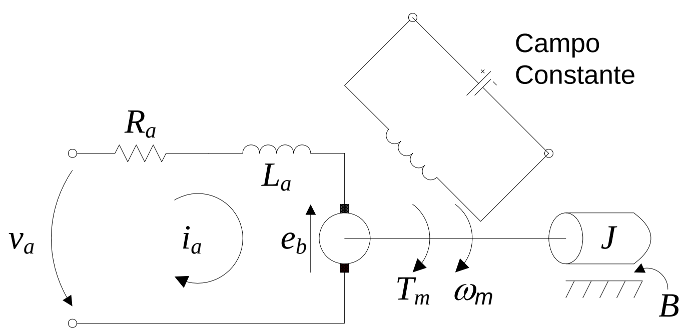
$$F.T._1 = \frac{\theta_1(s)}{T(s)} = \frac{G_4(s)}{G_1(s)G_4(s) - G_2(s)G_3(s)}$$

e

$$F.T._2 = \frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{G_3(s)}{G_1(s)G_4(s) - G_2(s)G_3(s)}$$

8. Determine a Função de Transferência $G(s)$ dos sistemas electromecânicos representados nas figuras seguintes:

a) Motor DC controlado pela armadura:



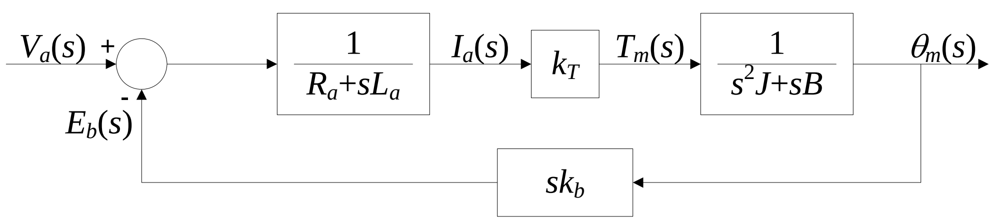
As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\begin{cases} v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \dfrac{di_a(t)}{dt} + e_b(t) \\ e_b(t) = k_b \omega_m = k_b \dfrac{d\theta_m(t)}{dt} \\ T_m(t) = J \dfrac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B \dfrac{d\theta_m(t)}{dt} \\ T_m(t) = k_I i_a(t) \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} V_a(s) = R_a I_a(s) + sL_a I_a(s) + E_b(s) \\ E_b(s) = sk_b \theta_m(s) \\ T_m(s) = s^2 J \theta_m(s) + sB\theta_m(s) \\ T_m(s) = k_I I_a(s) \end{cases}$$

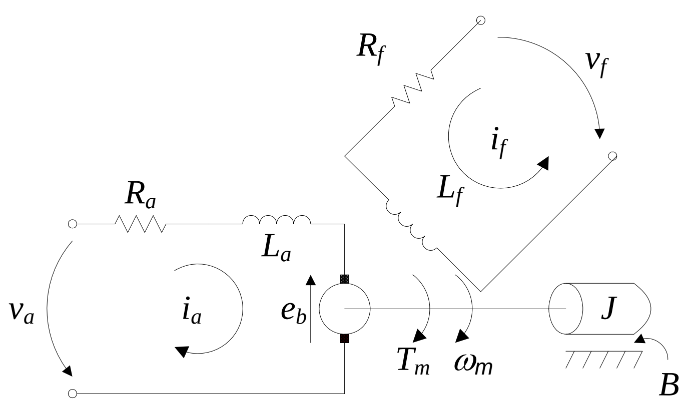
A partir das equações anteriores é possível construir o seguinte diagrama de blocos deste sistema:



Simplificando o diagrama de blocos anterior, obtém-se a função de transferência do sistema, apresentada abaixo:

$$F.T. = \frac{\theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{k_I}{(sL_a + R_a)(s^2 J + sB) + sk_b k_I}$$

b) Motor DC controlado pelo campo:



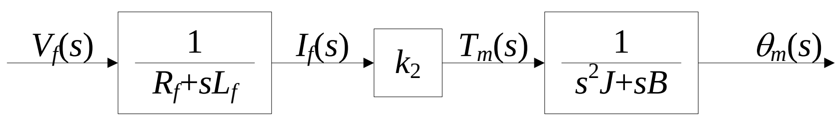
As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste circuito são as seguintes:

$$\begin{cases} v_f(t) = R_f i_f(t) + L_f \dfrac{di_f(t)}{dt} \\ T_m(t) = k_2 i_f(t) \\ T_m(t) = J\dfrac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B\dfrac{d\theta_m(t)}{dt} \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} V_f(s) = R_f I_f(s) + sL_f I_f(s) \\ T_m(s) = k_2 I_f(s) \\ T_m(s) = s^2 J\theta_m(s) + sB\theta_m(s) \end{cases}$$

A partir das equações anteriores é possível construir o seguinte diagrama de blocos deste sistema:

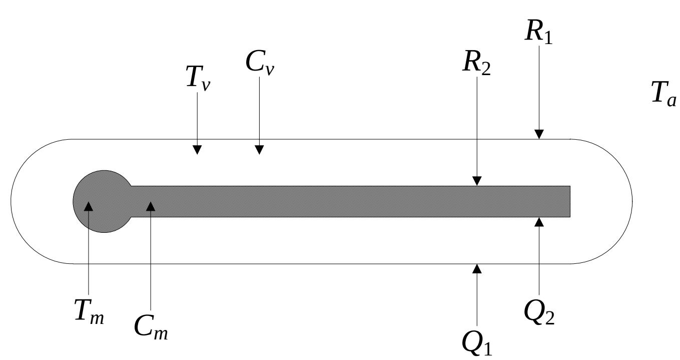


Simplificando o diagrama de blocos anterior, obtém-se a função de transferência do sistema, apresentada abaixo:

$$F.T. = \frac{\theta_m(s)}{V_f(s)} = \frac{k_2}{(sL_f + R_f)(s^2 J + sB)}$$

9. Determine a Função de Transferência $G(s)$ dos sistemas térmicos representados nas figuras seguintes:

a) Termómetro de mercúrio:



Sendo:

T_a: Temperatura ambiente
T_v: Temperatura do vidro
T_m: Temperatura do mercúrio
C_v: Capacidade calorífica do vidro
C_m: Capacidade calorífica do mercúrio
R_1, R_2: Resistências térmicas
Q_1, Q_2: Fluxos caloríficos

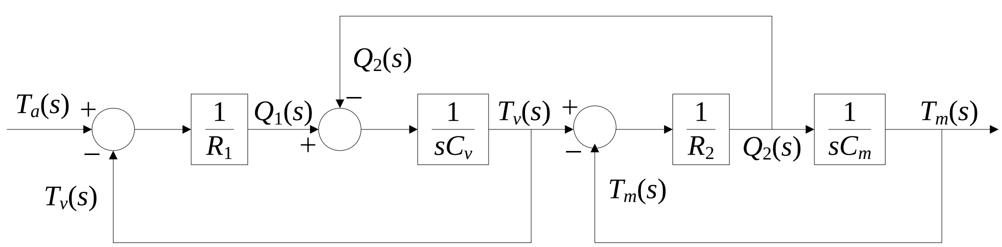
As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste sistema são as seguintes:

$$\begin{cases} Q_1(t) - Q_2(t) = C_v \dfrac{dT_v(t)}{dt} \\ Q_1(t) = \dfrac{T_a(t) - T_v(t)}{R_1} \\ Q_2(t) = C_m \dfrac{dT_m(t)}{dt} \\ Q_2(t) = \dfrac{T_v(t) - T_m(t)}{R_2} \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} Q_1(s) - Q_2(s) = sC_v T_v(s) \\ Q_1(s) = \dfrac{T_a(s) - T_v(s)}{R_1} \\ Q_2(s) = sC_m T_m(s) \\ Q_2(s) = \dfrac{T_v(s) - T_m(s)}{R_2} \end{cases}$$

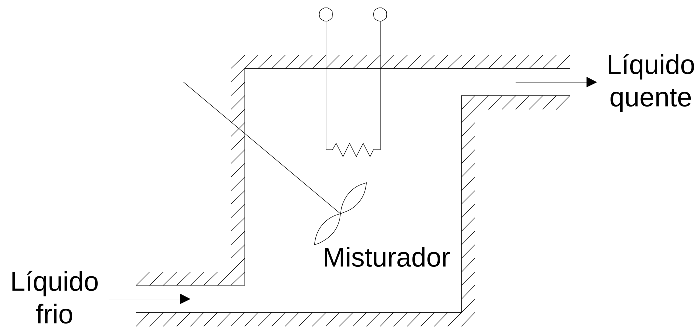
A partir das equações anteriores é possível construir o seguinte diagrama de blocos deste sistema:



Simplificando o diagrama de blocos anterior, obtém-se a função de transferência do sistema, apresentada abaixo:

$$F.T. = \frac{T_m(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{(1+sR_2C_m)(1+sR_1C_v)+sR_1C_m}$$

b) Caldeira de aquecimento de líquidos:



Neste sistema térmico assume-se que o tanque se encontra isolado de forma a evitar perdas de calor para o ar envolvente, que não existe acumulação de calor no isolamento do tanque nem nas suas paredes e que o líquido no tanque se encontra perfeitamente misturado estando desta forma a uma temperatura uniforme. Assume-se também que os fluxos de entrada e de saída de líquido no tanque são constantes e que a temperatura do líquido à entrada do tanque é constante e igual a Θ_i ºC.

Para $t < 0$ o sistema encontra-se num estado estável, e a resistência de aquecimento fornece calor a uma taxa de H J/s.

i) Para $t = 0$ a taxa de fornecimento de calor é alterada de H para $H + h$ J/s. Esta alteração provoca uma mudança da temperatura de saída do líquido de Θ_o para $\Theta_o + \theta$ ºC. Suponha que a alteração de temperatura de saída do líquido, θ ºC, é a saída do sistema e que a alteração da taxa de fornecimento de calor ao sistema, h J/s, é a entrada do sistema. Determine a função de transferência $\Theta(s)/H(s)$.
Considere:
 - G: fluxo do líquido (kg/s)
 - c: calor específico do líquido (J/kg.K)
 - M: massa do líquido no tanque (kg)
 - R: resistência térmica (K.s/J)
 - C: capacidade térmica (J/K)
 - h_o: alteração ao calor adicionado ao líquido de saída (J/s)

As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste sistema são as seguintes:

$$\begin{cases} h_o = Gc\theta \\ C = Mc \\ R = \dfrac{\theta}{h_o} = \dfrac{1}{Gc} \\ h_i - h_o = C\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

Sendo $Rh_o = \theta$, vem:

$$RC\frac{d\theta(t)}{dt}+\theta(t)=Rh_i(t)$$

Aplicando a Transformada de Laplace à equação anterior, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

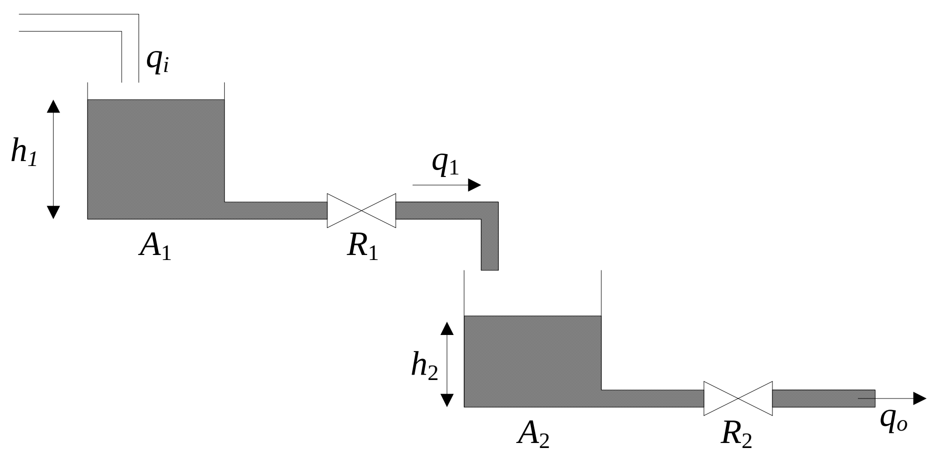
$$sRC\theta(s)+\theta(s)=RH_i(s)$$

Simplificando a equação anterior, obtém-se a função de transferência do sistema:

$$F.T.=\frac{\theta(s)}{H_i(s)}=\frac{R}{sRC+1}$$

10. Determine a Função de Transferência G(s) dos sistemas hidraúlicos representados nas figuras seguintes:

a) Sistema de tanques independentes:



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste sistema são as seguintes:

$$\begin{cases} q_i(t)=q_1(t)+A_1\dfrac{dh_1(t)}{dt} \\ q_1(t)=\dfrac{h_1(t)}{R_1} \end{cases}$$, para o tanque do lado esquerdo e

$$\begin{cases} q_1(t)=q_o(t)+A_2\dfrac{dh_2(t)}{dt} \\ q_o(t)=\dfrac{h_2(t)}{R_2} \end{cases}$$, para o tanque do lado direito.

Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} Q_i(s) = Q_1(s) + sA_1H_1(s) \\ Q_1(s) = \dfrac{H_1(s)}{R_1} \end{cases}$$

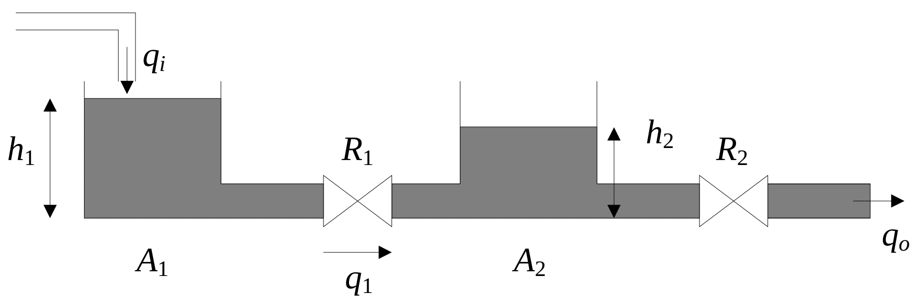
e

$$\begin{cases} Q_1(s) = Q_o(s) + sA_2H_2(s) \\ Q_o(s) = \dfrac{H_2(s)}{R_2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações anterior, obtém-se a Função de Transferência pretendida:

$$F.T. = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{s^2A_1A_2R_1R_2 + s(A_1R_1 + A_2R_2) + 1}$$

b) Sistema de tanques interligados:



As equações dinâmicas que descrevem o funcionamento deste sistema são as seguintes:

$$\begin{cases} q_i(t) = q_1(t) + A_1\dfrac{dh_1(t)}{dt} \\ q_1(t) = \dfrac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} \end{cases}$$, para o tanque do lado esquerdo e

$$\begin{cases} q_1(t) = q_o(t) + A_2\dfrac{dh_2(t)}{dt} \\ q_o(t) = \dfrac{h_2(t)}{R_2} \end{cases}$$, para o tanque do lado direito.

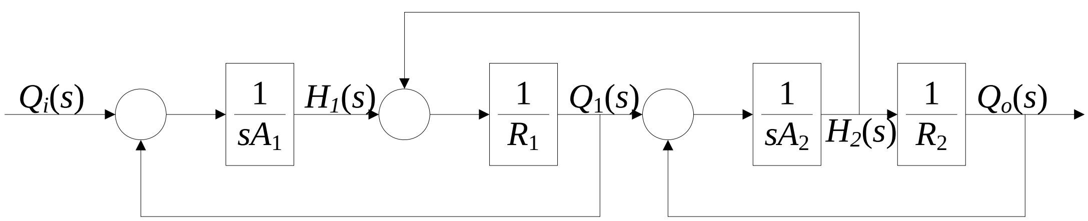
Aplicando a Transformada de Laplace às equações anteriores, supondo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} Q_i(s) = Q_1(s) + sA_1H_1(s) \\ Q_1(s) = \dfrac{H_1(s) - H_2(s)}{R_1} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} Q_1(s) = Q_o(s) + sA_2H_2(s) \\ Q_o(s) = \dfrac{H_2(s)}{R_2} \end{cases}$$

A partir das equações anteriores é possível construir o seguinte diagrama de blocos deste sistema:



Simplificando o diagrama de blocos anterior, obtém-se a função de transferência do sistema, apresentada abaixo:

$$F.T. = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{s^2 A_1 A_2 R_1 R_2 + s\left(A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2\right) + 1}$$