Departamento de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto

TESIS
Teoria dos Sistemas

Lugar Geométrico de Raízes

–

Resolução dos Exercícios Propostos

1. Esboce o Lugar Geométrico de Raízes Directo dos sistemas representados pelas seguintes Funções de Transferência:

a) $GH(s) = \dfrac{k}{s(s+1)(s+2)}$

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: não tem
Pólos: $p_1 = 0$
$p_2 = -1$
$p_3 = -2$

Nº de zeros: n = 0
Nº de pólos: d = 3

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 3.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 3

Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180º}{d-n} = \frac{(1+2.h).180º}{3-0} = \pm 60º, 180º$$

A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{0-1-2-0}{3-0} = -1$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-s.(s+1).(s+2)\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3.s^2 - 6.s - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -1{,}577 \\ s_2 = -0{,}423 \end{cases}$$

Neste caso só a segunda solução é válida.

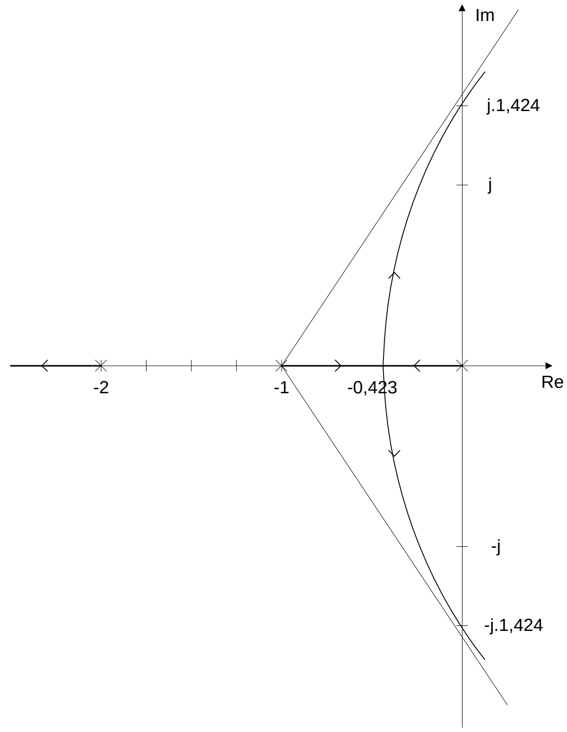
6. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

$$1 + \frac{k}{s(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s^3 + 3.s^2 + 2.s + k\big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -j.\omega^3 - 3.\omega^2 + 2.j.\omega + k = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ \omega = \sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} k = 6 \\ \omega = -\sqrt{2} \end{cases}$$

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



b) $GH(s) = k\dfrac{3s}{(s+2)(s^2+6s+18)}$

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s) = k.\frac{3.s}{(s+2).(s^2+6.s+18)} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: $z_1 = 0$
Pólos: $p_1 = -2$
$p_2 = -3 + j.3$
$p_3 = -3 - j.3$

Nº de zeros: n = 1
Nº de pólos: d = 3

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 3.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 2

Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180º}{d-n} = \frac{(1+2.h).180º}{3-1} = \pm 90º$$

A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{-2-3+j.3-3-j.3-0}{3-1} = \frac{-8}{2} - 4$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{(s+2).(s^2+6.s+18)}{3.s}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -s^3 - 4.s^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -2{,}8834 + j.1{,}3691 \\ s_1 = -2{,}8834 - j.1{,}3691 \\ s_1 = 1{,}7677 \end{cases}$$

Conclui-se que o L.G.R. não tem pontos de entrada/saída no eixo real.

6. Os ângulos de partida do L.G.R. dos pólos complexos são dados por:

$$\phi = 180º - \left(\sum_{i=1}^{d-1} \arg(s-p_i)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \arg(s-z_i)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi = 180º - \left[\arg(s+2) + \arg(s+3+j.3) - \arg(s)\right]\Big|_{s=-3+j.3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi = 180º - \arg(-1+j.3) - \arg(j.6) + \arg(-3+j.3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi = 180º - 108{,}435º - 90º + 135º \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi = 116{,}565º$$

7. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

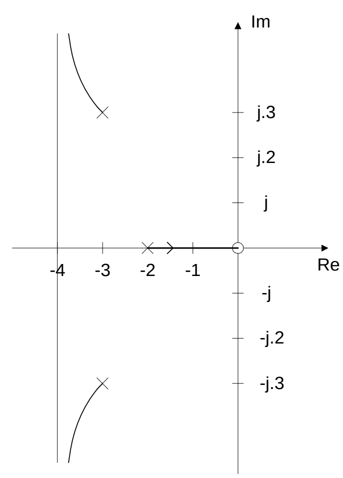
$$1 + GH(s)\big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

$$1 + k.\frac{3.s}{(s+2).(s^2+6.s+18)}\bigg|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s^3 + 8.s^2 + 30.s + 3.k.s + 36\big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -j.\omega^3 - 8.\omega^2 + 30.j.\omega + 3.k.j.\omega + 36 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -10 \\ \omega = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} k = -8{,}5 \\ \omega^2 = 4{,}5 \end{cases}$$

Conclui-se que o L.G.R. deste sistema não intersecta o eixo imaginário.

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



c) $GH(s) = k\dfrac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s) = k.\frac{(s+3)}{s.(s+1).(s+2).(s+4)} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: $p_1 = -3$
Pólos: $p_1 = 0$
$p_2 = -1$
$p_3 = -2$
$p_4 = -4$

Nº de zeros: n = 1
Nº de pólos: d = 4.

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 4.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 3

Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180º}{d-n} = \frac{(1+2.h).180º}{4-1} = \pm 60º, 180º$$

A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{0-1-2-4+3}{4-1} = -1{,}33$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{s.(s+1).(s+2).(s+4)}{(s+3)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3.s^4 - 26.s^3 - 77.s^2 - 84.s - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -3{,}3110 + j.0{,}6812 \\ s_1 = -3{,}3110 - j.0{,}6812 \\ s_3 = -1{,}6097 \\ s_4 = -0{,}4349 \end{cases}$$

Neste caso só a última solução é válida.

6. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

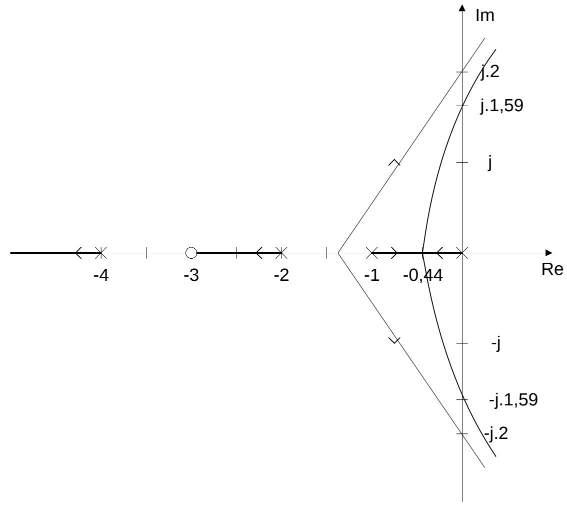
$$1 + k.\frac{(s+3)}{s.(s+1).(s+2).(s+4)}\bigg|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^4 + 7.s^3 + 14.s^2 + (8+k).s + 3.k\big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega^4 - 7.j.\omega^3 - 14.\omega^2 + (8+k).j.\omega + 3.k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \omega = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} k = 9{,}645 \\ \omega = 1{,}59 \end{cases} \vee \begin{cases} k = 9{,}645 \\ \omega = -1{,}59 \end{cases}$$

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



d) $GH(s) = k\dfrac{(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2}$

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s) = k.\frac{(s+1)}{s.(s+2).(s+4)^2} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: $z_1 = -1$
Pólos: $p_1 = 0$
$p_2 = -2$
$p_3 = p_4 = -4$ (pólo duplo)

Nº de zeros: n = 1
Nº de pólos: d = 4

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 4.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 3

Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180^{o}}{d-n} = \frac{(1+2.h).180^{o}}{4-1} = \pm 60^{o}, 180^{o}$$

A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{0-2-4-4+1}{4-1} = -3$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{s.(s+2).(s+4)^2}{s+1}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3.s^4 - 24.s^3 - 62.s^2 - 64.s - 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -4 \\ s_2 = -2{,}5994 \\ s_3 = -0{,}7003 + j.0{,}7317 \\ s4 = -0{,}7003 - j.0{,}7317 \end{cases}$$

Neste caso só a segunda solução é válida.

6. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

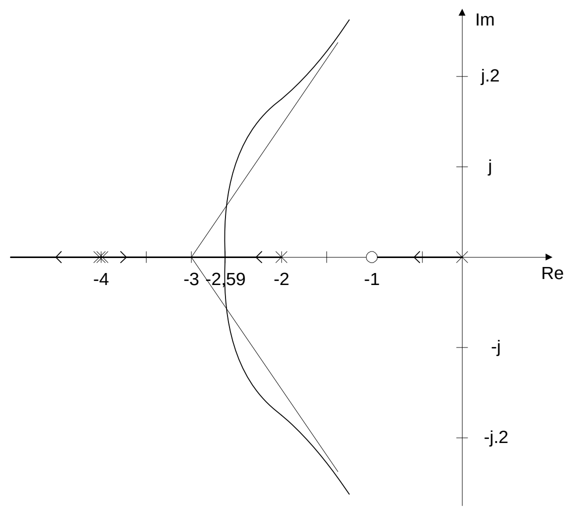
$$1+k.\frac{(s+1)}{s.(s+2).(s+4)^2}\bigg|_{s=j.\omega}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^4+10.s^3+32.s^2+32.s+k.s+k\big|_{s=j.\omega}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega^4-10.j.\omega^3-32.\omega^2+(32+k).j.\omega+k=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ \omega=0 \end{cases} \vee \begin{cases} k^2+154.k-9216=0 \\ \quad impossivel! \end{cases}$$

Conclui-se que o L.G.R. deste sistema não intersecta o eixo imaginário (excepto no pólo na origem).
A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



e) $GH(s)=\dfrac{k}{s(s^2+2s+5)}$

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s)=k.\frac{1}{s.(s^2+2.s+5)}=-1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: não tem
Pólos: $p_1 = 0$
$p_2 = -1 + j.2$
$p_3 = -1 - j.2$

Nº de zeros: n = 0

Nº de pólos: d = 3.

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 3.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 3

Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180^{o}}{d-n} = \frac{(1+2.h).180^{o}}{3-0} = \pm 60^{o}, 180^{o}$$

A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{0-1+j.2-1-j.2}{3-0} = -0{,}666$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-s.(s^2+2.s+5)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3.s^2 - 4.s - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -\frac{2}{3} - j.\frac{\sqrt{44}}{6} \\ s_2 = -\frac{2}{3} + j.\frac{\sqrt{44}}{6} \end{cases}$$

Uma vez que as soluções são imaginárias conclui-se que não existem pontos de quebra.

6. Os ângulos de partida do L.G.R. dos pólos complexos são dados por:

$$\phi = 180^{o} - \left(\sum_{i=1}^{d-1} \arg(s-p_i)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \arg(s-z_i)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 180^{o} - \left[\arg(s) + \arg(s+1+j.2)\right]\Big|_{s=-1+j.2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 180^{o} - \arg(-1+j.2) - \arg(j.4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 180^{o} - 116{,}565 - 90^{o} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = -26{,}565^{o}$$

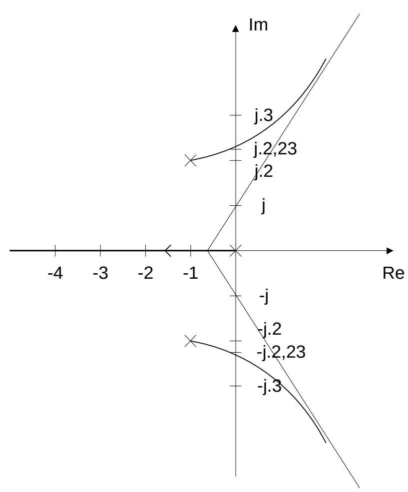
7. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\big|_{s=j.\omega} = 0$$

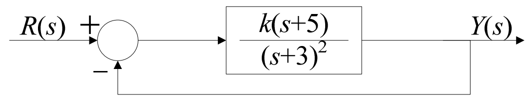
resultando ω e k.

$$1 + \left.\frac{k}{s.(s^2+2.s+5)}\right|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s^3 + 2.s^2 + 5.s + k\big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -j.\omega^3 - 2.\omega^2 + 5.j.\omega + k = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \omega = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} k = 10 \\ \omega = \sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} k = 10 \\ \omega = -\sqrt{5} \end{cases}$$

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



2. Esboce o Lugar Geométrico de Raízes Directo para o sistema que apresenta o seguinte diagrama de blocos:



1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s) = k.\frac{(s+5)}{(s+3)^2} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: $z_1 = -5$
Pólos: $p_1 = p_2 = -3$ (pólo duplo)

Nº de zeros: n = 1
Nº de pólos: d = 2.

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 2.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 1

Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180º}{d-n} = \frac{(1+2.h).180º}{2-1} = 180º$$

Neste caso, não faz sentido calcular a intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide), uma vez que a assimptota é o próprio eixo real.

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{(s+3)^2}{(s+5)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -s^2 - 10.s - 21 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -7 \\ s_2 = -3 \end{cases}$$

6. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\Big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

$$1 + k.\frac{(s+5)}{(s+3)^2}\Bigg|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

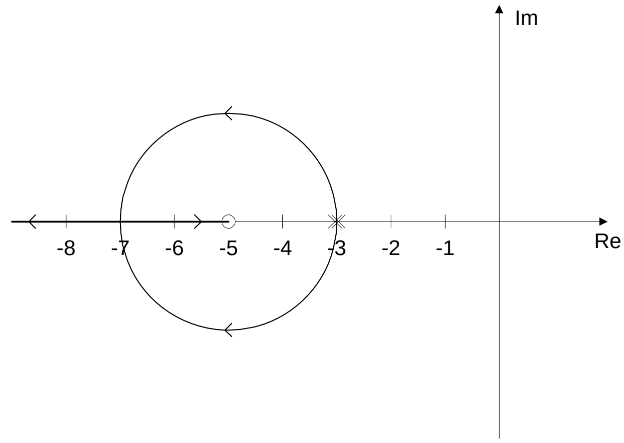
$$\Leftrightarrow s^2 + (6+k).s + (5.k+9)\Big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 + (6+k).j.\omega + (5.k+9) = 0 \Leftrightarrow$$

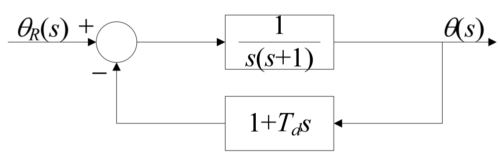
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{9}{5} \\ \omega = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} k = -6 \\ \omega^2 = \sqrt{-21} \end{cases} \Rightarrow impossivel$$

Uma vez que este sistema de equações é impossível, o L.G.R. não tem intersecções com o eixo imaginário.

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



3. Um sistema de controlo de posição apresenta o seguinte diagrama de blocos equivalente:



a) Esboce o Lugar Geométrico de Raízes Directo para este sistema, considerado em função de T_d.

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro T_d em evidência:

$$GH(s) = \frac{1+T_d\,.s}{s.(s+1)} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_d \cdot \frac{s}{s^2+s+1} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: $z_1 = 0$
Pólos: $p_1 = -0{,}5 + j.0{,}866$
$p_2 = -0{,}5 - j.0{,}866$

Nº de zeros: n = 1
Nº de pólos: d = 2.

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 2.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 1

Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180^o}{d-n} = \frac{(1+2.h).180^o}{2-1} = 180^o$$

Neste caso, não faz sentido calcular a intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide), uma vez que a assimptota é o próprio eixo real.

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial T_d}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{s^2+s+1}{s}\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -s^2+1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = +1 \end{cases}$$

Neste caso só a primeira solução é válida.

6. Os ângulos de partida do L.G.R. dos pólos complexos são dados por:

$$\phi = 180^o - \left(\sum_{i=1}^{d-1}\arg(s-p_i)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\arg(s-z_i)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 180^o - \left[\arg(s+0,5+j.0,866) - \arg(s)\right]\Big\|_{s=-0,5+j.0,866} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 180^o - \arg(+j.1,732) + \arg(-0,5+j.0,866) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 180^o - 90^o + 120^o \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \phi = 210^o$$

7. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e T_d.

$$1 + T_d \cdot \frac{s}{s^2 + s + 1}\bigg|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

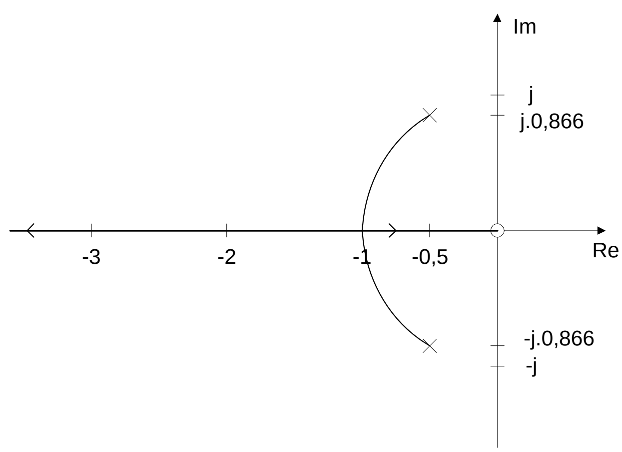
$$\Leftrightarrow s^2 + (1 + T_d).s + 1\big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 + (1 + T_d).\,j.\omega + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2 = 1 \\ \omega = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \omega^2 = 1 \\ T_d = -1 \end{cases} \Rightarrow impossivel$$

Uma vez que este sistema de equações é impossível, o L.G.R. não tem intersecções com o eixo imaginário.

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



b) Para que valores do ganho de realimentação de velocidade (T_d) o sistema apresenta uma saída não oscilatória?

Para o sistema não apresentar oscilação à sua saída, os pólos da Função de Transferência em Malha Fechada têm que ser reais (têm que estar sobre o eixo real). Assim, vamos calcular o valor de T_d a partir do qual o L.G.R. passa a estar sobre o eixo real:

$$1 + GH(s)\big|_{s=-1} = 0$$

resultando T_d.

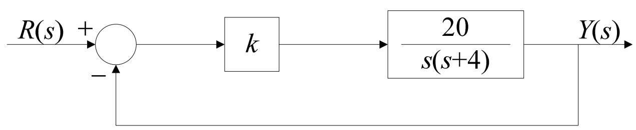
$$1 + T_d \cdot \left.\frac{s}{s^2 + s + 1}\right|_{s=-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_d = -\left.\frac{s^2 + s + 1}{s}\right|_{s=-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_d = 1$$

Para valores de T_d maiores que 1, o sistema não apresenta oscilação à sua saída.

4. Dado o sistema da figura seguinte:



a) Esboce o seu Lugar Geométrico de Raízes Directo.

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s) = k.\frac{20}{s.(s+4)} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: não tem
Pólos: $p_1 = 0$
$p_2 = -4$

Nº de zeros: n = 0
Nº de pólos: d = 2.

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 2.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 2

Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180^{\circ}}{d-n} = \frac{(1+2.h).180^{\circ}}{2-0} = \pm 90^{\circ}$$

A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{0-4}{2-0} = -2$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{s.(s+4)}{20}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2.s - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s = -2$$

6. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\Big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

$$1 + k.\frac{20}{s.(s+4)}\Bigg|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

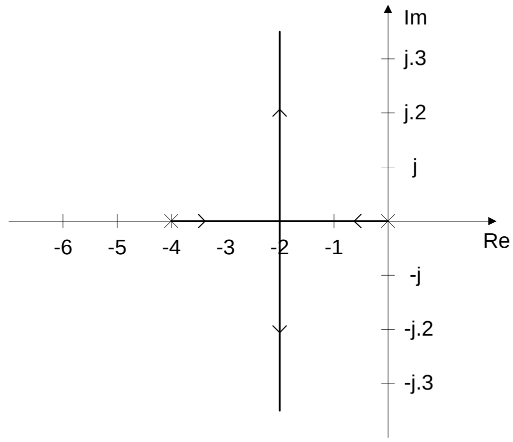
$$\Leftrightarrow s^2 + 4.s + 20.k\Big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 + 4.j.\omega + 20.k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$$

Daqui conclui-se que não existem intersecções do L.G.R. com o eixo imaginário, excepto para o pólo na origem (reparar que as assimptotas fazem 90º com o eixo real, logo são paralelas ao eixo imaginário).

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



b) Para que valores do ganho *k*, o sistema não apresenta oscilação à sua saída?

Para o sistema não apresentar oscilação à sua saída, os pólos da Função de Transferência em Malha Fechada têm que ser reais (têm que estar sobre o eixo real). Assim, vamos calcular o valor de k a partir do qual o L.G.R. deixa de estar sobre o eixo real:

$$1 + GH(s)\Big|_{s=-2} = 0$$

resultando k.

$$1 + k.\frac{20}{s.(s+4)}\Bigg|_{s=-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{s.(s+4)}{20}\Bigg|_{s=-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 0{,}2$$

Para valores de k, tais que: $0{,}2 \geq k > 0$ o sistema não apresenta oscilação à sua saída.

c) Existe algum valor do ganho *k* para o qual o sistema apresente o seguinte par de pólos em malha fechada: $s_{1,2} = -3 \pm j3$?

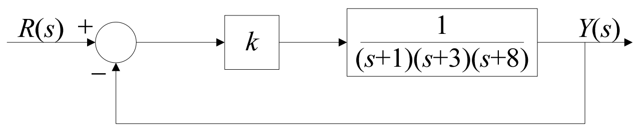
Poder-se-ia resolver a equação característica do sistema:

$$1 + GH(s)\Big|_{s=-3\pm j.3} = 0$$

e ver se havia algum valor de k que permitisse cumprir as especificações.

Alternativamente, olhando para o L.G.R. conclui-se que os pólos do sistema ou são reais ou, no caso de serem imaginários, têm parte real igual a – 2, logo não se consegue ter os pólos – 3 ± j.3.

5. Considere o sistema da figura seguinte:



a) Esboce o seu Lugar Geométrico de Raízes Directo.

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s) = k.\frac{1}{(s+1).(s+3).(s+8)} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: não tem
Pólos: $p_1 = -1$
$p_2 = -3$
$p_3 = -8$

Nº de zeros: n = 0
Nº de pólos: d = 3.

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 3.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 3

Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180^o}{d-n} = \frac{(1+2.h).180^o}{3-0} = \pm 60^o, 180^o$$

A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{-1-3-8}{3-0} = -4$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-(s+1).(s+3).(s+8)\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3.s^2 - 24.s - 35 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -1{,}92 \\ s_2 = -6{,}08 \end{cases}$$

Neste caso só a primeira solução é válida.

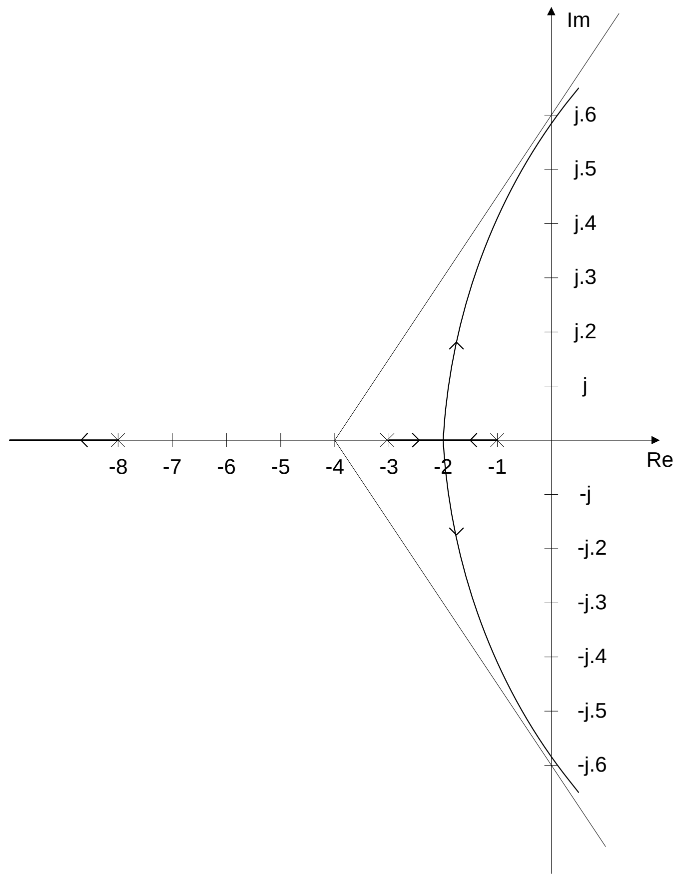
6. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

$$1 + GH(s)\big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

$$1 + k.\frac{1}{(s+1).(s+3).(s+8)}\bigg|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s^3 + 12.s^2 + 35.s + (24+k)\big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -j.\omega^3 - 12.\omega^2 + 35.j.\omega + (24+k) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -24 \\ \omega = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} k = 396 \\ \omega = \sqrt{35} \end{cases} \vee \begin{cases} k = 396 \\ \omega = -\sqrt{35} \end{cases}$$

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



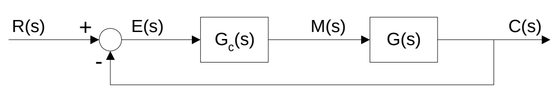
b) Indique os valores de *k* para os quais o sistema é estável.

O sistema torna-se instável quando passa a ter pólos no semi-plano direito. Isso acontece para $k > 396$. Para o sistema ser estável é necessário que: $0 < k < 396$.

6. Uma máquina de controlo numérico apresenta a seguinte Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

As especificações de desempenho exigem que, na configuração de "*feedback*" unitário da figura seguinte, o sistema apresente um "*Overshoot*" percentual máximo inferior a 2,5 % e um tempo de estabelecimento inferior a 1 seg.



a) Mostre que esta especificação não pode ser alcançada recorrendo a um controlador de acção unicamente proporcional.

Para a situação de *Overshoot* percentual máximo de 2,5% e tempo de estabelecimento de 1 s, temos:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta.\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0{,}025 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \zeta = 0{,}76$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta.\omega_n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 = \frac{4}{0{,}76.\omega_n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega_n = 5{,}26 rad/s$$

Para o sistema apresentar as especificações de desempenho pretendidas, necessita que os seus pólos tenham os seguintes valores:

$$p_{1,2} = -\zeta.\omega_n \pm j.\omega_n.\sqrt{\zeta^2 - 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p_{1,2} = -4 \pm j.3{,}42$$

Vamos agora esboçar o L.G.R. para ver se estes pólos pertencem ao sistema.

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s) = k.\frac{1}{s.(s+1)} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: não tem
Pólos: $p_1 = 0$
$p_2 = -1$

Nº de zeros: n = 0
Nº de pólos: d = 2.

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 2.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 2

Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180º}{d-n} = \frac{(1+2.h).180º}{2-0} = \pm 90º$$

A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{0-1}{2-0} = -0{,}5$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-s.(s+1)\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2.s - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s = -0{,}5$$

6. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

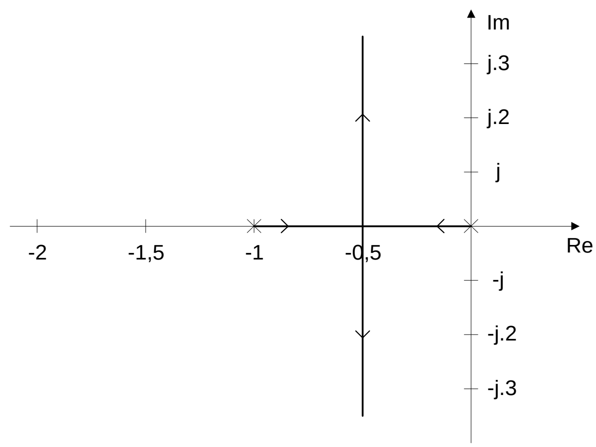
$$1 + GH(s)\big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

$$1 + k.\frac{1}{s.(s+1)}\bigg|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s^2 + s + k\big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\omega^2 + j.\omega + k = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$$

Daqui conclui-se que não existem intersecções do L.G.R. com o eixo imaginário, excepto para o pólo na origem (reparar que as assimptotas fazem 90º com o eixo real, logo são paralelas ao eixo imaginário).

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



Analisando o L.G.R. do sistema verifica-se que com um controlador de acção unicamente proporcional não se conseguem cumprir as especificações de desempenho pretendidas, uma vez que $-4 \pm j.3{,}42$ nunca são pólos do sistema, independentemente do valor de k.

b) Indique o intervalo de valores do ganho proporcional para os quais o sistema apresenta uma saída não oscilatória?

Para a resposta do sistema não apresentar oscilação, os pólos da Função de Transferência em Malha Fechada têm que ser reais (têm que estar sobre o eixo real). Assim, vamos calcular o valor de k a partir do qual o L.G.R. deixa de estar sobre o eixo real:

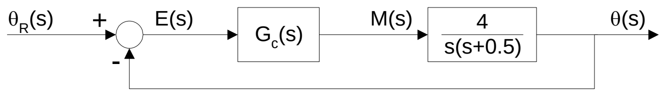
$$1 + GH(s)\Big|_{s=-\frac{1}{2}} = 0$$

resultando *k*.

$$1 + k.\frac{1}{s.(s+1)}\bigg|_{s=-\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k = -s.(s+1)\Big|_{s=-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k = 0{,}25$$

Para valores de k, tais que: $0{,}25 \geq k > 0$ o sistema não apresenta oscilação à sua saída.

7. Um sistema de controlo de posição angular pode ser representado pelo seguinte diagrama de blocos:



Pretende-se que este sistema apresente as seguintes especificações de desempenho:

- "*Overshoot*" percentual máximo inferior a 16,32 %;
- tempo de estabelecimento inferior a 1,6 seg.

a) Mostre que estas especificações não podem ser alcançadas recorrendo a um controlador de acção unicamente proporcional.

Para a situação de *Overshoot* percentual máximo de 16,32% e tempo de estabelecimento de 1,6 s, temos:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta.\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0{,}1632 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \zeta = 0{,}5$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta.\omega_n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1{,}6 = \frac{4}{0{,}5.\omega_n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega_n = 5rad/s$$

Para o sistema apresentar as especificações de desempenho pretendidas, necessita que os seus pólos tenham os seguintes valores:

$$p_{1,2} = -\zeta.\omega_n \pm j.\omega_n.\sqrt{1-\zeta^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p_{1,2} = -2{,}5 \pm j.4{,}33$$

Vamos agora esboçar o L.G.R. para ver se estes pólos pertencem ao sistema.

1. Obter a equação característica do sistema na forma GH(s) = – 1 com o parâmetro k em evidência:

$$GH(s) = k.\frac{4}{s.(s+0{,}5)} = -1$$

2. Marcar os pólos e os zeros da Função de Transferência em Malha Aberta do sistema:

Zeros: não tem

Pólos: $p_1 = 0$
$p_2 = -0{,}5$

Nº de zeros: n = 0
Nº de pólos: d = 2.

O número de ramos do L.G.R. é igual ao número de pólos da F.T.M.A., logo, o número de ramos do L.G.R. = d = 2.

O L.G.R. começa nos pólos em malha aberta e termina nos zeros em malha aberta ou no infinito.

3. São ramos do L.G.R. sobre o eixo real, todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita uma soma ímpar de zeros e pólos sobre este eixo.

4. O número de assimptotas é d – n = 2

Os ângulos que as assimptotas fazem com o eixo real, são:

$$angulos(assimptotas - L.G.R.) = \frac{(1+2.h).180º}{d-n} = \frac{(1+2.h).180º}{2-0} = \pm 90º$$

A intersecção das assimptotas com o eixo real (centróide) é dada por:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{d-n} = \frac{0-0{,}5}{2-0} = -0{,}25$$

5. Os pontos de entrada e saída do L.G.R. no eixo real são designados por pontos de quebra e são dados por:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{-\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{s.(s+0{,}5)}{4}\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -8.s - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s = -0{,}25$$

6. Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados através do Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, ou através da equação característica:

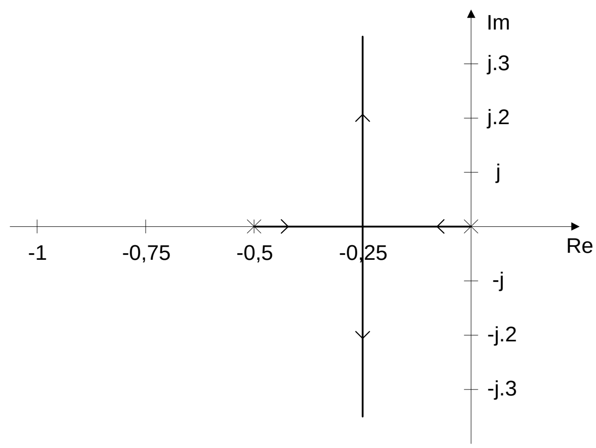
$$1 + GH(s)\Big|_{s=j.\omega} = 0$$

resultando ω e k.

$$1 + k.\frac{4}{s.(s+0{,}5)}\Bigg|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s^2 + 0{,}5.s + 4.k\Big|_{s=j.\omega} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\omega^2 + 0{,}5.j.\omega + 4.k = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$$

Daqui conclui-se que não existem intersecções do L.G.R. com o eixo imaginário, excepto para o pólo na origem (reparar que as assimptotas fazem 90º com o eixo real, logo são paralelas ao eixo imaginário).

A partir destes dados torna-se possível esboçar o L.G.R. deste sistema:



Analisando o L.G.R. do sistema verifica-se que com um controlador de acção unicamente proporcional não se conseguem cumprir as especificações de desempenho pretendidas, uma vez que $-2{,}5 \pm j.4{,}33$ nunca são pólos do sistema, independentemente do valor de k.

b) Indique o intervalo de valores do ganho proporcional para os quais o sistema apresenta uma saída não oscilatória?

Para a resposta do sistema não apresentar oscilação, os pólos da Função de Transferência em Malha Fechada têm que ser reais (têm que estar sobre o eixo real). Assim, vamos calcular o valor de k a partir do qual o L.G.R. deixa de estar sobre o eixo real:

$$1+GH(s)\Big|_{s=-\frac{1}{4}}=0$$

resultando *k*.

$$1+k.\frac{4}{s.(s+0{,}5)}\Bigg|_{s=-\frac{1}{4}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=-\frac{s.(s+0{,}5)}{4}\Bigg|_{s=-\frac{1}{4}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=0{,}015625$$

Para valores de *k*, tais que: $0{,}015625 \geq k > 0$ o sistema não apresenta oscilação à sua saída.