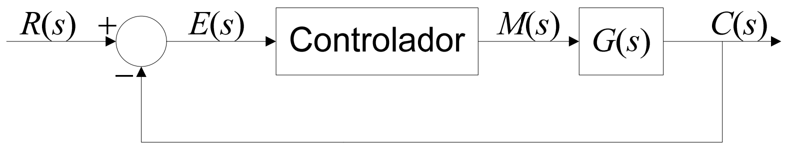
Departamento de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto

TESIS
Teoria dos Sistemas

Controladores PID
–
Exercícios Propostos e Soluções

Ano Lectivo: 2007/2008

1. Considere o seguinte sistema de controlo:



No qual:

- O processo controlado é $G(s) = \dfrac{40}{10s^2 + 80s + 800}$

- O controlador é do tipo PID: $m(t) = 20\left[e(t) + \dfrac{1}{T_i}\displaystyle\int_0^t e(t)dt + T_d \dfrac{de(t)}{dt} \right]$

a) Admitindo que não existe acção integral ($1/T_i = 0$), calcular T_d de modo que o amortecimento do sistema realimentado seja unitário.

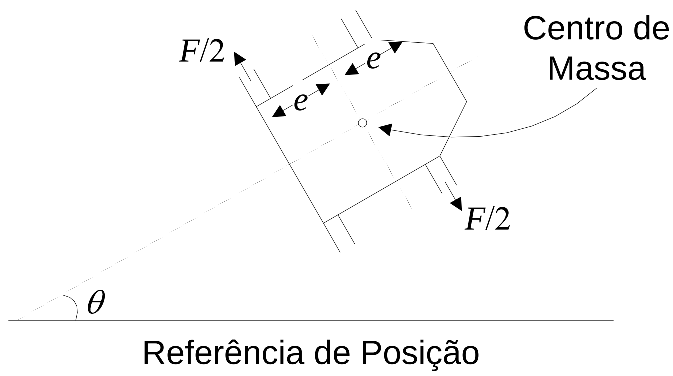
b) Para o valor de T_d calculado, determinar o valor máximo de $1/T_i$ de modo a manter o sistema estável.

Solução:

a) $T_d = 0{,}216$ s

b) $K_i < 50{,}6$

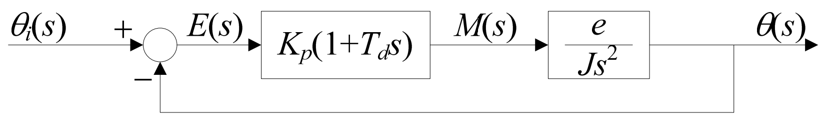
2. A figura seguinte é o esquema de um sistema de controlo de posição de um satélite:



Sendo:

$2e$	- comprimento do satélite;
J	- momento de inércia;
$F/2$	- força de reacção produzida por cada foguete

Supondo que o controlador é de tipo PD, o diagrama de blocos do sistema fica:

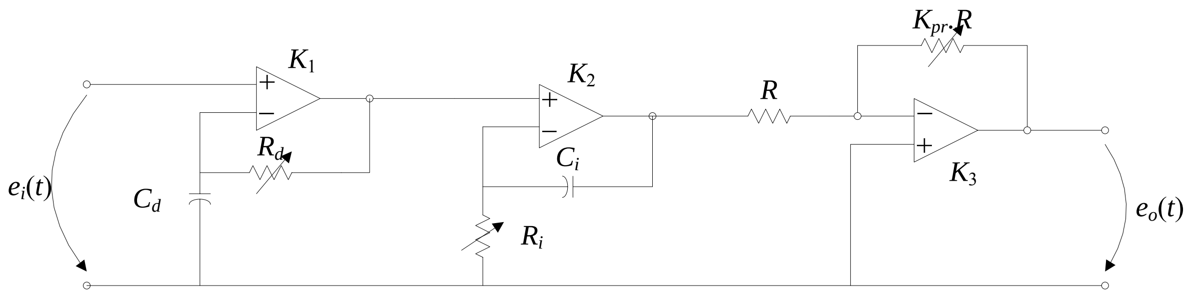


Determine o valor da constante de tempo T_d, de modo que ζ = 0,7.

Solução:

$$\begin{cases} 2\cdot\zeta\cdot\omega_n = \dfrac{K_p\cdot T_d\cdot e}{J} \\ \omega_n^{\,2} = \dfrac{K_p\cdot e}{J} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_d = 1{,}4\cdot\sqrt{\dfrac{J}{K_p\cdot e}}\ \text{ s} \\ \omega_n = \sqrt{\dfrac{K_p\cdot e}{J}}\ \text{ rad/s} \end{cases}$$

3. Considere o controlador apresentado na figura seguinte:



a) Que tipo de acção de controlo produz o controlador indicado?

b) Em que condições poderia este controlador estabilizar o controlo de posição de uma massa de inércia ($T(s)=Js^2\theta(s)$)?

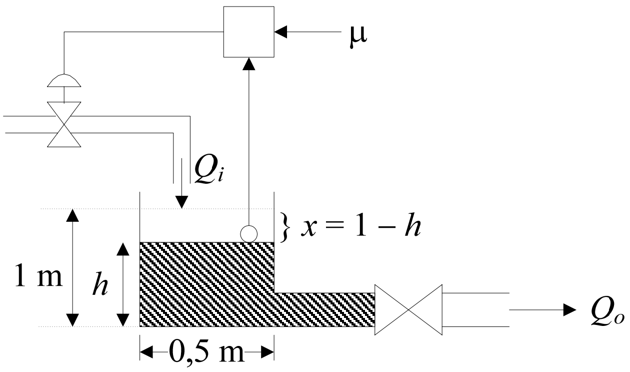
Solução:

a)

$$G(s)=\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{E_1(s)}{E_i(s)}\cdot\frac{E_2(s)}{E_1(s)}\cdot\frac{E_o(s)}{E_2(s)}=-\frac{K_p}{s\cdot C_i\cdot R_i}-K_p\cdot s\cdot C_d\cdot R_d-\left(K_p+K_p\cdot\frac{C_d\cdot R_d}{C_i\cdot R_i}\right)$$

b) $\begin{cases} \dfrac{K\cdot\tau_d\cdot\tau_i + K\cdot{\tau_d}^2 - 1}{\tau_d} > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K > \dfrac{1}{\tau_d\cdot(\tau_d+\tau_i)} \\ -\dfrac{K_1\cdot K_2\cdot K_p}{J} > 0 \end{cases}$

4. Considere o seguinte sistema de controlo de nível de um tanque cilíndrico:



O caudal da entrada é comandado por um controlador através da relação:

$$Q_i(t) = 0{,}125\left[x(t) + \int_0^t x(\tau)d\tau\right], \quad t \geq 0$$

sendo $x(t)$ o desnível em metros relativamente ao valor desejado de 1 m.

Considerar que a válvula de saída foi bruscamente aberta, em t = 0, estando o sistema em repouso (h = 1 m, q_o = 0 m^3/s), originando um caudal de saída $q_o(t)$=0,01$h(t)$ m^3/s. Considere ainda que $q_i(t) - q_o(t) = A.(dh(t)/dt)$.

Nestas condições determinar:

a) A expressão de $x(t)$ em função do tempo.

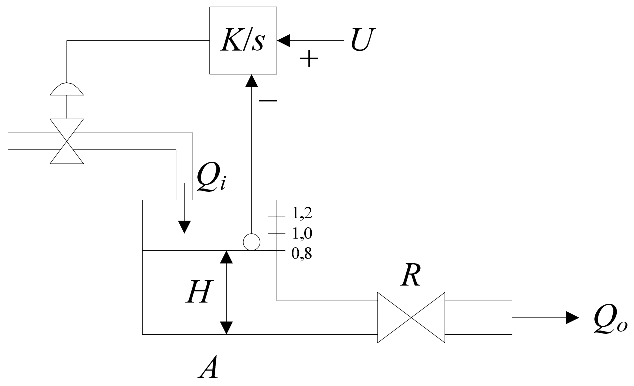
b) A altura do liquido no tanque, em regime estacionário. Justifique.

Solução:

a) $x(t) = 0{,}07\cdot e^{-0{,}344\cdot t}\cdot \text{sen}(0{,}72\cdot t)$

b) Em regime estacionário $x(t) \to 0$ m, logo $h(t) \to 1$ m

5. O sistema apresentado na figura seguinte viu a sua referência ser ajustada para o valor 1 m.

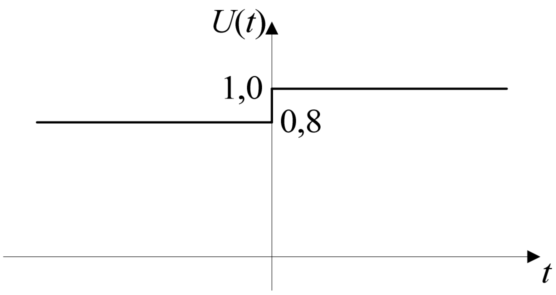


Considere que a acção do controlador (acção integral) é: $Q_i(s) = \frac{K}{s}\left[U(s) - H(s)\right]$ sendo a Função de Transferência do tanque: $\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{s.A + 1/R}$.

Sendo:
$A = 1$ m^2
$K = 0,1$
$R = 9,88$ s/m^{-2}

a) Qual a frequência natural e qual o coeficiente de amortecimento do sistema?

b) Qual a sua resposta temporal ao seguinte sinal de entrada:



c) Reduzir o ganho para metade e voltar a calcular ζ, ω_n, t_r, t_s.

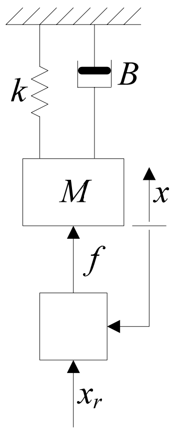
Solução:

a) $\begin{cases} \zeta = 0{,}16 \\ \omega_n = 0{,}316\ rad/s \end{cases}$

b) $t_p = 10$ s; $t_s = 80$ s; $h_{max}(t_p) = 0{,}32$ m

c) ω_n=0,223 rad/s ; $\zeta = 0{,}227$

6. O controlador (proporcional) do sistema de controlo de posição da figura apresentada abaixo fornece uma força $f = A(x_r - x)$.



Sendo:

$M = 1$ Kg

$A = 5$

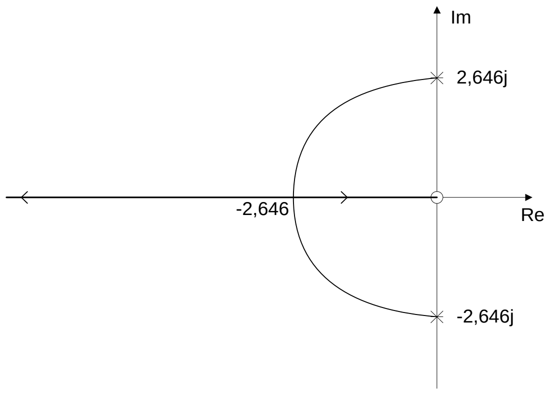
$k = 2$ Nm^{-1}

a) Desenhar o Lugar Geométrico de Raízes do sistema com B como parâmetro.

b) Determinar B de modo que o sistema não oscile.

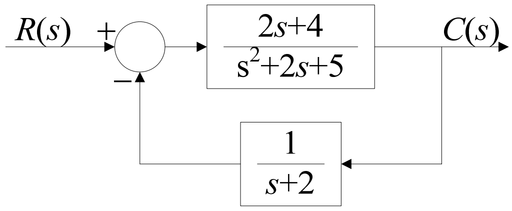
Solução:

a)



b) $B \geq 2\sqrt{7}$

7. Considere o seguinte sistema em malha fechada.



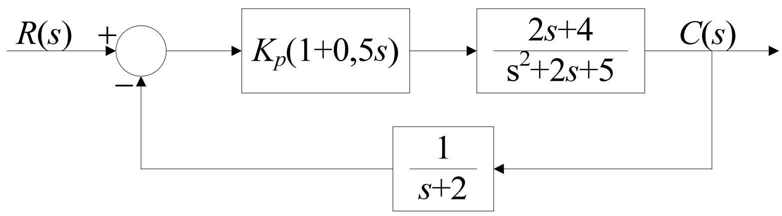
a) Redesenhe o sistema incluindo um controlador PD, com a expressão $G_c = k_p(1+0{,}5s)$.

b) Recorrendo ao lugar de Raízes (directo) analise a estabilidade do sistema com o controlador.

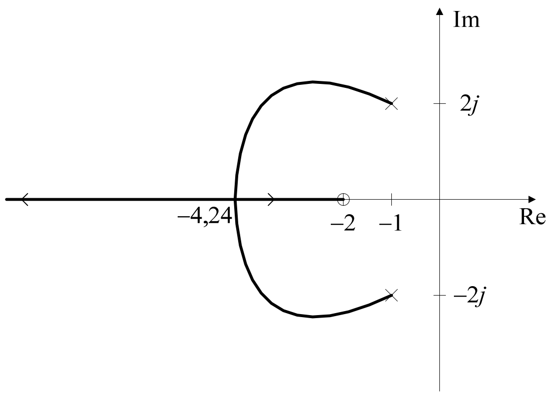
c) Que valor deveria ter a constante proporcional para que o sistema apresentasse um amortecimento de 0,866.

Solução:

a)



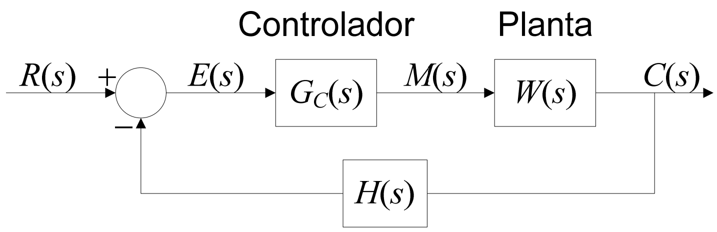
b)



O sistema é estável para $K_p > 0$

c) $K_p = 5{,}46$

8. Considere o seguinte sistema de controlo de temperatura de um forno cuja planta é do género $W(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ e o controlador é do tipo $m(t) = 2 \cdot K \cdot e(t) + K \cdot \dfrac{de(t)}{dt}$.



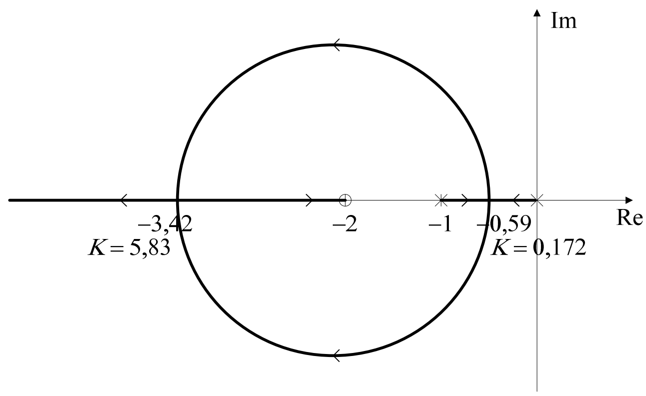
a) Que tipo de controlador está implementado no controlo do sistema?

b) Esboce o lugar geométrico das raízes deste sistema, em função da variação de K e considerando que tem realimentação unitária. Defina as zonas de comportamentos típicos, em função de K.

Solução:

a) Controlador PD

b)

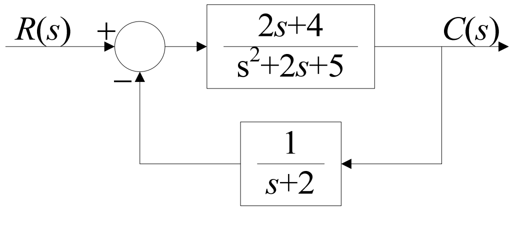


Para $0 < K < 0{,}172$ e $K > 5{,}83 \rightarrow \zeta > 1$, logo o sistema não oscila (sobreamortecido)

Para $K = 0{,}172$ e $K = 5{,}83 \rightarrow \zeta = 1$, logo o sistema não oscila (criticamente amortecido)

Para $0{,}172 < K < 5{,}83 \rightarrow 0 < \zeta < 1$, logo o sistema oscila (subamortecido)

9. Considere o seguinte sistema em malha fechada.



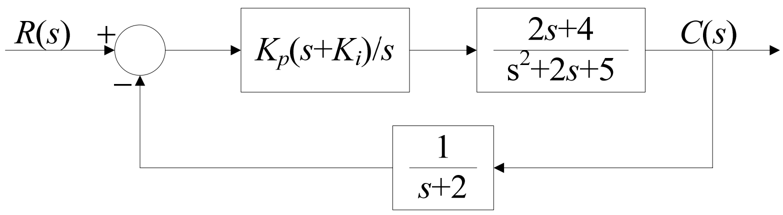
a) Redesenhe o sistema incluindo um controlador PI: $m(t) = K_p\,[e(t) + K_i \int e(t)\, dt]$.

b) Quais são as alterações que este controlador introduz no comportamento do sistema.

c) Analise a estabilidade do sistema com o controlador.

Solução:

a)



b) O controlador é do tipo PI, pelo que introduz mais um pólo. O sistema passa a ser de terceira ordem.

c) Recorrendo ao Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz verifica-se que para o sistema ser estável têm que se verificar simultaneamente as seguintes condições: $K_pK_i > 0$ e $K_p(2 - K_i) > -5$.