Departamento de Engenharia Electrotécnica
Instituto Superior de Engenharia do Porto

TESIS
Teoria dos Sistemas

Análise de Sistemas no Domínio das Frequências

–

Resolução dos Exercícios Propostos

Isabel Jesus
(isj@isep.ipp.pt)

Março de 2007

1. Esboce os diagramas de Bode, de amplitude e fase, dos sistemas representados pelas seguintes Funções de Transferência:

a) $G(s) = \dfrac{5}{s+5}$

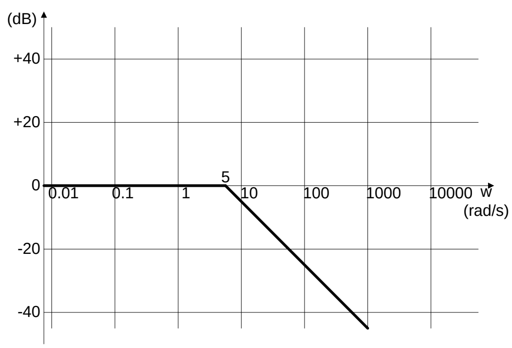
Esta função de transferência pode ser escrita na forma:

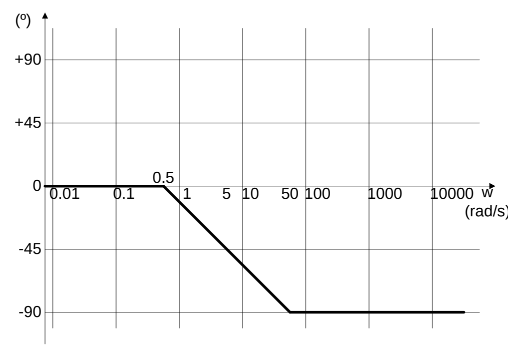
$$G(s) = \frac{1}{\frac{s}{5}+1}$$

Pelo que:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{5}+1}$$

Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, correspondentes a $G(j\omega)$, são os seguintes:





Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
n = [5]
d = [1  5]
G=tf (n,d)
bode (G)
```

b) $G(s) = \dfrac{100}{s(s+10)}$

Esta função de transferência, que apresenta dois pólos, pode ser decomposta em factores básicos, ficando:

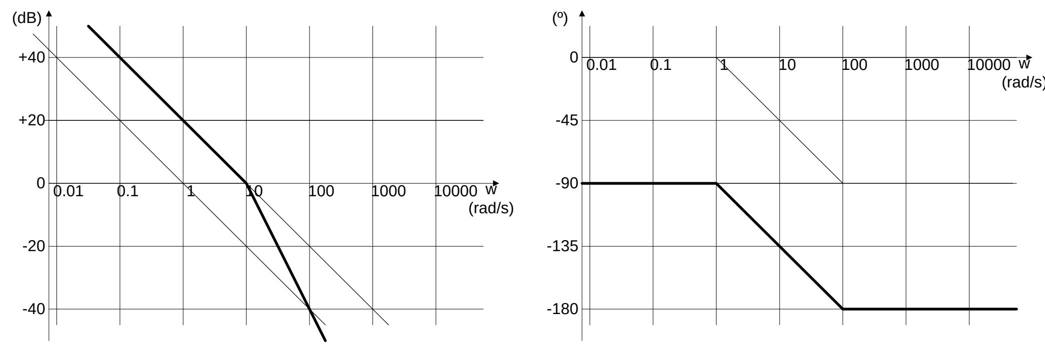
$$G(s) = 10 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\frac{s}{10}+1}$$

Pelo que:

$$G(j\omega)=10\cdot\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{1}{\frac{j\omega}{10}+1}$$

O valor do ganho correspondente ao termo constante é de: 20 log 10 = 20 dB.

Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, correspondentes a $G(j\omega)$, são os seguintes:



Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
n = [100]
d = [1  10  0]
G=tf (n,d)
bode (G)
```

c) $G(s)=\dfrac{2000(s+0{,}5)}{s(s+10)(s+50)}$

Esta função de transferência, que apresenta um zero e três pólos, pode ser decomposta em factores básicos, ficando:

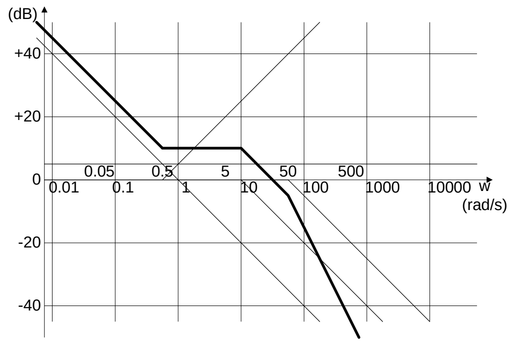
$$G(s)=\frac{2\cdot\left(\frac{s}{0{,}5}+1\right)}{s\cdot\left(\frac{s}{10}+1\right)\cdot\left(\frac{s}{50}+1\right)}=2\cdot\left(\frac{s}{0{,}5}+1\right)\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{10}+1\right)}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{50}+1\right)}$$

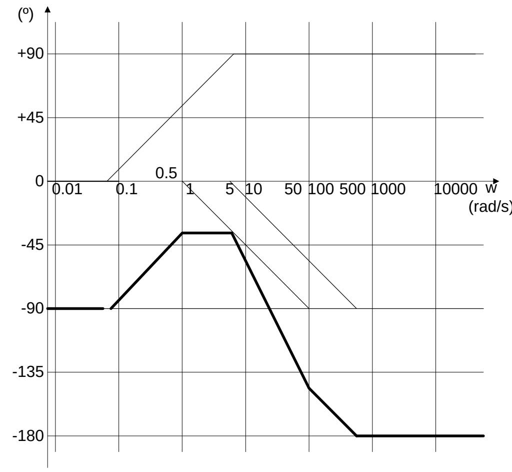
Pelo que:

$$G(j\omega)=2\cdot\left(\frac{j\omega}{0{,}5}+1\right)\cdot\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{1}{\frac{j\omega}{10}+1}\cdot\frac{1}{\frac{j\omega}{50}+1}$$

O valor do ganho correspondente ao termo constante é de: 20 log 2 = 6.0206 dB.

Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, correspondentes a $G(j\omega)$, são os seguintes:





Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
n = [2000  1000]
d = [1  60  500  0]
G=tf (n,d)
bode (G)
```

d) $G(s) = \dfrac{10}{s(s^2 + 0{,}4s + 4)}$

Esta função de transferência, que apresenta três pólos (dois deles complexos conjugados), pode ser decomposta em factores básicos, ficando:

$$G(s) = 2{,}5 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}1.s + \dfrac{s^2}{4}}$$

Pelo que:

$$G(j\omega) = 2{,}5 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}1.\,j\omega + \left(\dfrac{j\omega}{2}\right)^2}$$

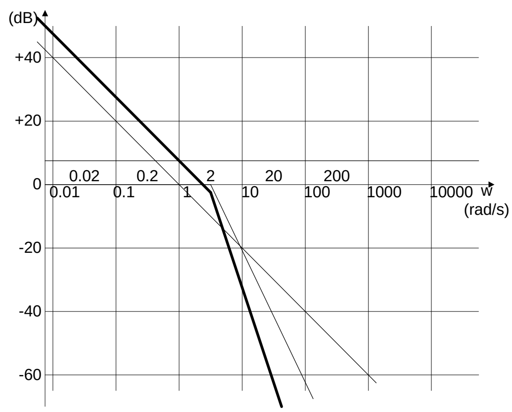
Uma vez que esta função de transferência apresenta um factor quadrático (e $\zeta < 0{,}707$), é necessário calcular o valor da frequência de ressonância e do correspondente pico:

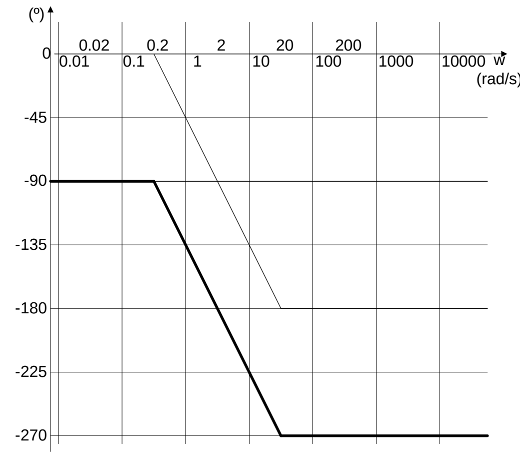
$$\omega_r = \omega_n.\sqrt{1 - 2 \cdot \zeta^2} \Leftrightarrow \omega_r = 1{,}98 rad/s$$

$$M_r = \frac{1}{2.\zeta.\sqrt{1-\zeta^2}} \Leftrightarrow M_r = 5{,}025$$

O valor do ganho correspondente ao termo constante é de: 20 log 2.5 = 7.9588 dB.

Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, correspondentes a $G(j\omega)$, são os seguintes:





Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
n = [10]
d = [1  0.4  4  0]
G=tf (n,d)
bode (G)
```

e) $G(s) = \dfrac{50}{s^2(s+5)}$

Esta função de transferência, que apresenta três pólos, pode ser decomposta em factores básicos, ficando:

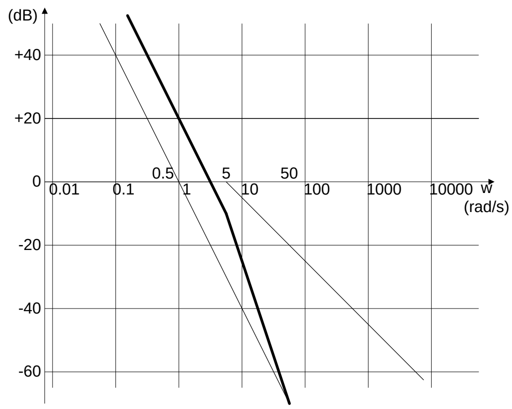
$$G(s) = \frac{10}{s.s.\left(\frac{s}{5}+1\right)} = 10 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\frac{s}{5}+1}$$

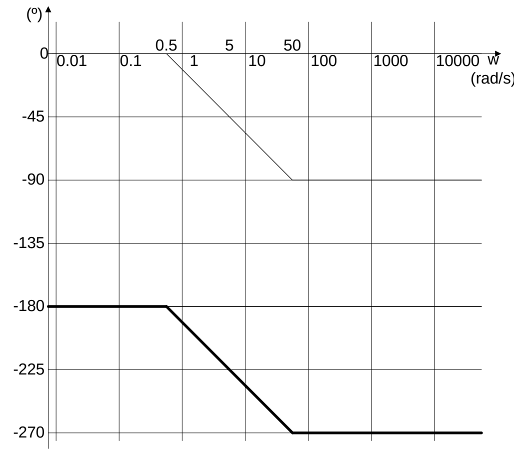
Pelo que:

$$G(j\omega) = 10 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{\frac{j\omega}{5}+1}$$

O valor do ganho correspondente ao termo constante é de: 20 log 10 = 20 dB.

Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, correspondentes a $G(j\omega)$, são os seguintes:

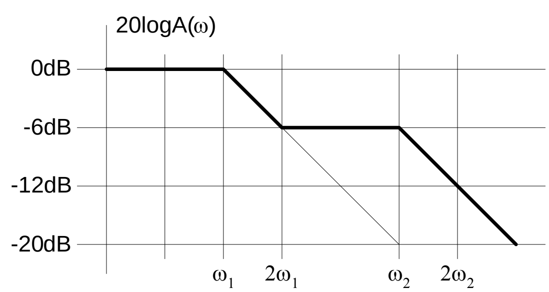




Código MATLAB para cálculo das raízes do polinómio

```
n = [50]
d = [1  5  0  0]
G=tf (n,d)
bode (G)
```

2. Considere o seguinte traçado assimptótico de amplitudes:



a) Relacione ω_1 e ω_2.

b) Qual o valor da amplitude à frequência $2\omega_2$?

À frequência $2.\omega_2$ temos:

$$20.\log[A(2.\omega_2)] = -12 \text{ dB}$$

pelo que:

$$A(2.\omega_2) = 0{,}251$$

c) Quantos pólos e zeros possui o sistema? Obtenha a Função de Transferência.

O sistema possui 2 pólos e um zero; as frequências a que estes ocorrem são as seguintes:

p_1 à frequência ω_1;
p_2 à frequência ω_2;
z_1 à frequência $2.\omega_1$;

Considerando os seguintes factores básicos para os pólos:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{p_i} + 1}$$

E para os zeros:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{z_i} + 1$$

Temos:

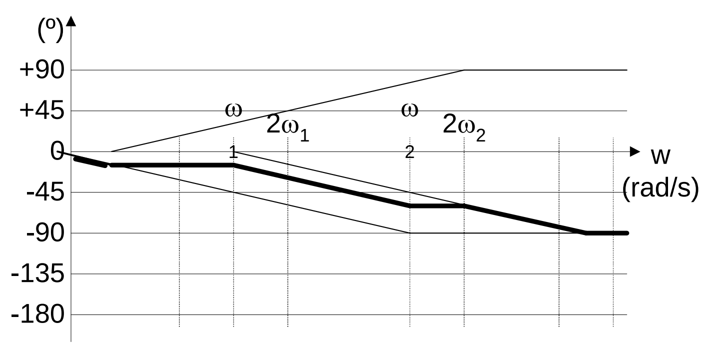
$$G(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{2.\omega_1} + 1\right) . \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_1} + 1} . \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_2} + 1}$$

Logo:

$$G(s) = 5 \cdot \omega_1 \cdot \frac{s + 2.\omega_1}{(s + \omega_1) \cdot (s + \omega_2)}$$

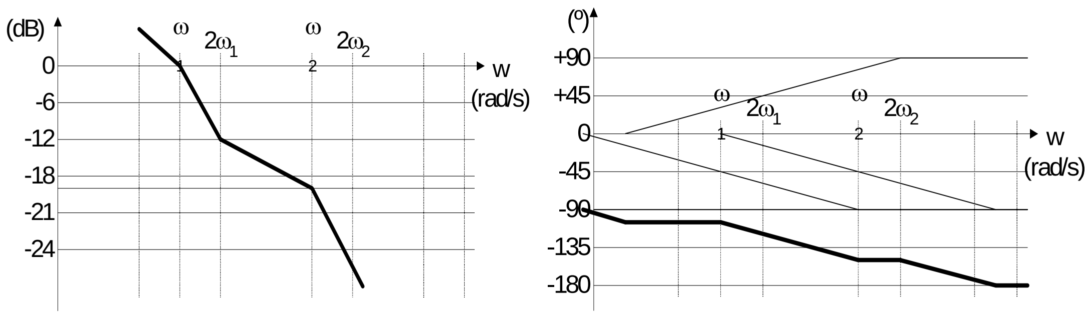
d) Faça o esboço das fases.

O traçado assimptótico de Bode, de fase, deste sistema, é o representado na figura seguinte:

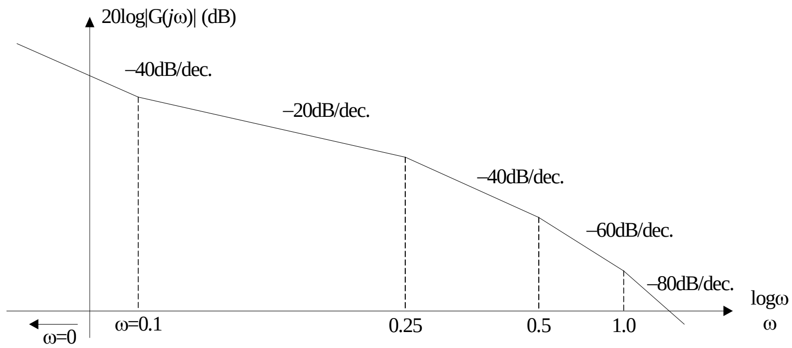


e) Desenhe os traçados de Bode que se obtêm se se acrescentar um pólo na origem ao sistema.

Acrescentar um pólo na origem a um sistema, equivale no traçado assimptótico de Bode das amplitudes a somar um declive de –20 dB/dec. e no traçado assimptótico de Bode das fases a subtrair 90º. Para este sistema, temos então:



3. Seja:



a) Quantos pólos e zeros tem o sistema?

O sistema apresentado tem cinco pólos e um zero. As frequências a que ocorrem o zero e os pólos são as seguintes:

$p_{1,2}$ à frequência 0 rad/s (pólo duplo na origem);
p_3 à frequência 0,25 rad/s;
p_4 à frequência 0,5 rad/s;
p_5 à frequência 1 rad/s;
z_1 à frequência 0,1 rad/s;

b) Determinar a expressão analitica da Função de Transferência.

Considerando os seguintes factores básicos para os pólos:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\dfrac{j\omega}{p_i}+1} \quad \text{e para os zeros:} \quad G(j\omega) = \frac{j\omega}{z_i}+1$$

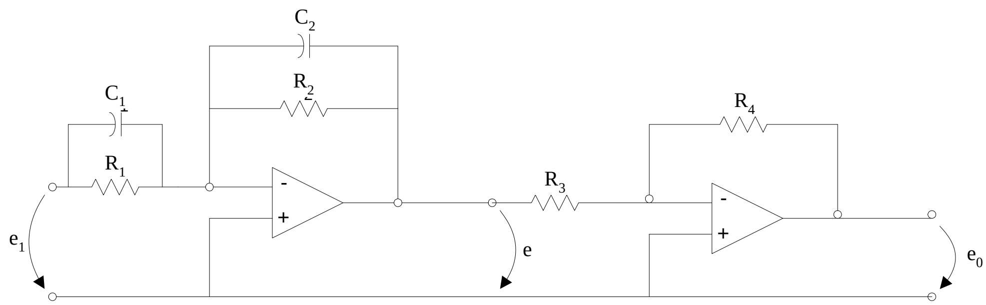
temos:

$$G(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{0,1}+1\right)\cdot\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{1}{\dfrac{j\omega}{0,25}+1}\cdot\frac{1}{\dfrac{j\omega}{0,5}+1}\cdot\frac{1}{\dfrac{j\omega}{1}+1}$$

Logo:

$$G(s) = \frac{1,25\cdot(s+0,1)}{s^2\cdot(s+0,25)\cdot(s+0,5)\cdot(s+1)}$$

4. Considere o circuito electrónico representado na figura seguinte:



a) Esboce os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, deste sistema, sendo a sua Função de Transferência a seguinte:

$$\frac{E_o(s)}{E_1(s)} = \frac{R_4.R_2}{R_3.R_1} \cdot \frac{sR_1C_1 + 1}{sR_2C_2 + 1}$$

Considere:

R_1, R_3 = 1 KΩ
R_2, R_4 = 2 KΩ
C_1 = 1 nF
C_2 = 1 μF

Substituindo na expressão anterior os valores dos parâmetros, obtemos a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{4 \cdot \left(1 \times 10^{-6} \cdot s + 1\right)}{2 \times 10^{-3} \cdot s + 1}$$

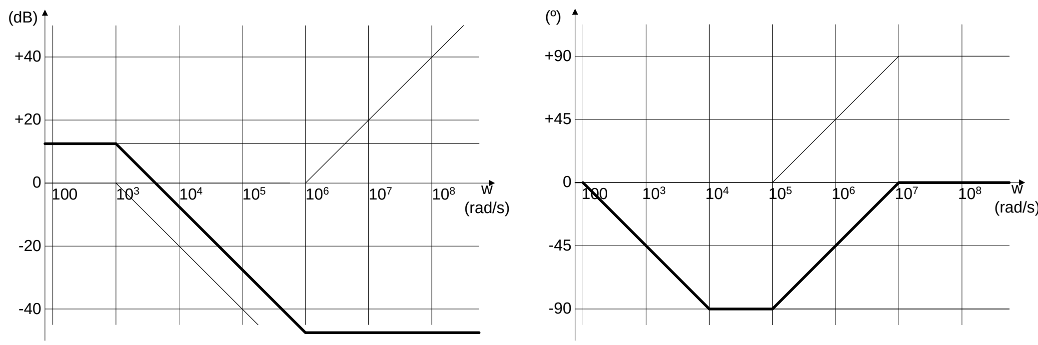
esta função de transferência pode ser reescrita como o seguinte produto de factores básicos:

$$G(j\omega) = 4 \cdot \left(\frac{j\omega}{1 \times 10^{6}} + 1\right) \cdot \frac{1}{\dfrac{j\omega}{2 \times 10^{3}} + 1}$$

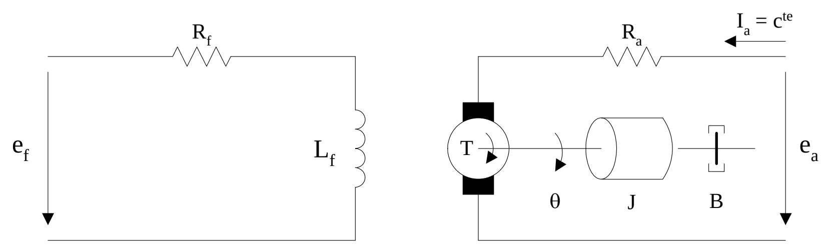
O sistema apresentado tem um pólo e um zero. As frequências a que ocorrem o zero e o pólo são as seguintes:

p_1 à frequência 500 rad/s;
z_1 à frequência $1x10^6$ rad/s;

O valor do ganho correspondente ao termo constante é de: 20 log 4 = 12.0412 dB.
Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, deste sistema, são os representados nas figuras seguintes:



5. Considere o seguinte modelo do motor DC controlado pelo campo:



A função de Transferência deste motor é dada por:

$$\frac{\theta(s)}{E_f(s)} = \frac{k_2}{s(L_f s + R_f)(Js + B)}$$

a) Esboce os diagramas assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, do sistema, para a situação em que:

$k_2 = 0{,}05$ N m A^{-1}
$L_f = 0{,}1$ H
$R_f = 2\ \Omega$
$J = 0{,}02$ Kg m^2
$B = 0{,}02$ Kg m rad^{-1} s

Substituindo na expressão anterior os valores dos parâmetros, obtemos a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{0{,}05}{s \cdot (0{,}1 \cdot s + 2) \cdot (0{,}02 \cdot s + 0{,}02)}$$

esta função de transferência pode ser reescrita como o seguinte produto de factores básicos:

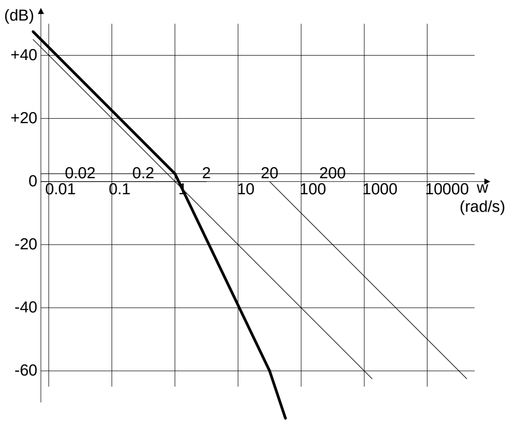
$$G(j\omega) = 1{,}25 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega + 1} \cdot \frac{1}{\frac{j\omega}{20} + 1}$$

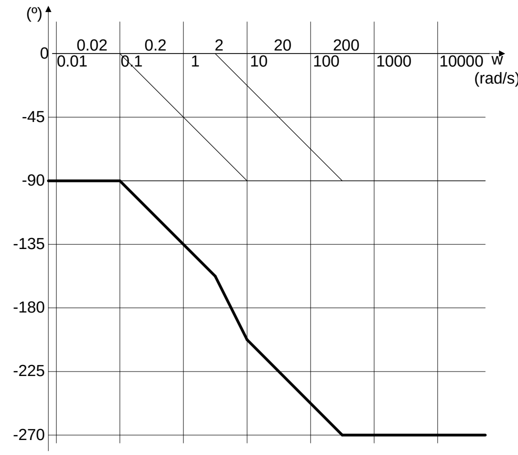
O sistema apresentado tem três pólos. As frequências a que estes ocorrem são as seguintes:

p_1 à frequência 0 rad/s (pólo na origem);
p_2 à frequência 1 rad/s;
p_3 à frequência 20 rad/s;

O valor do ganho correspondente ao termo constante é de: 20 log 1.25 = 1.9382 dB.

Os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, deste sistema, são os representados nas figuras seguintes:





b) Qual será a resposta deste circuito ao seguinte sinal de entrada:

$$e_f(t)=24\ \text{sen}(100\ \pi\ t).$$

Uma vez que:

$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{E_f(s)}=\frac{0{,}05}{s\cdot(0{,}1\cdot s+2)\cdot(0{,}02\cdot s+0{,}02)}$$

e a entrada para o sistema é sinusoidal:

$$e_f(t)=24\cdot sen(100\cdot\pi\cdot t)$$

temos que:

$$\theta(t)=\left|G(j\omega)\right|\Big|_{\omega=100\cdot\pi}\cdot 24\cdot sen\left\{100\cdot\pi\cdot t-\arg\left[G(j\omega)\right]_{\omega=100\cdot\pi}\right\}$$

$$\theta(t)=24\times 8\times 10^{-7}\cdot sen(100\cdot\pi\cdot t-1{,}5)$$

6. Considere o sistema:

$$GH(s)=\frac{ke^{-Ts}}{s(s+1)(s+2)}$$

a) Faça T = 0 e calcule k de modo que:

- ❖ MG = 15,6 dB
- ❖ MF = 25º

Fazendo T = 0, ficamos com:

$$G(j\omega).H(j\omega)=\frac{K}{j\omega.(j\omega+1).(j\omega+2)}$$

Uma vez que se pretende obter uma Margem de Ganho de 15,6 dB, devemos ter:

$$\mathrm{MG}_{\mathrm{dB}} = 20.\log\left(\frac{1}{\left|G.H(j\omega_\pi)\right|}\right) = 15{,}6dB$$

quando:

$$\arg\left[G.H(j\omega_\pi)\right] = -\pi$$

Da segunda equação, tiramos que:

$$\omega_\pi = \sqrt{2}rad/s$$

Substituindo este valor na primeira equação, obtém-se o valor de *K*:

$$K = 0{,}9958$$

Para termos uma Margem de Fase de 25º, devemos ter:

$$\mathrm{MF} = 180º + \arg\left[G.H(j\omega_1)\right] = 25º$$

quando:

$$\left|G.H(j\omega_1)\right| = 1$$

Desta equação tiramos que *K* deve ser:

$$K = 1{,}934$$

Substituindo este valor na penúltima equação, obtém-se o valor de ω_1:

$$\omega_1 = 0{,}876rad/s$$

b) Com o ganho obtido em a) ii) calcule o valor do atraso máximo que mantém o sistema estável.

Para termos uma Margem de Fase de 25º, devemos ter $K = 1{,}934$ a uma frequência $\omega_1 = 0{,}876rad/s$.

Para esta situação, o atraso máximo que se pode introduzir no sistema de forma a que este permaneça estável é igual a:

$$\omega_1.T = 25º \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{25.\pi}{180º}.\frac{1}{\omega_1} = 0{,}498seg.$$

c) Esboce os traçados de Bode (assimptóticos) desta situação.

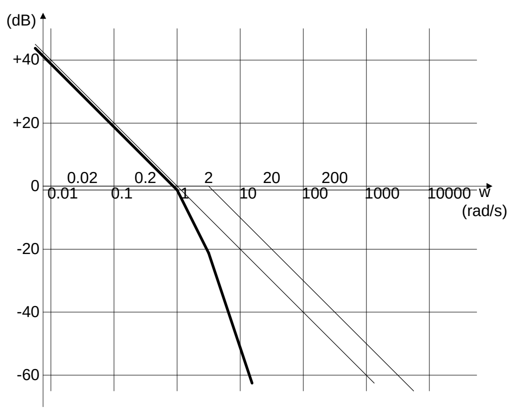
A função de transferência do sistema, fica:

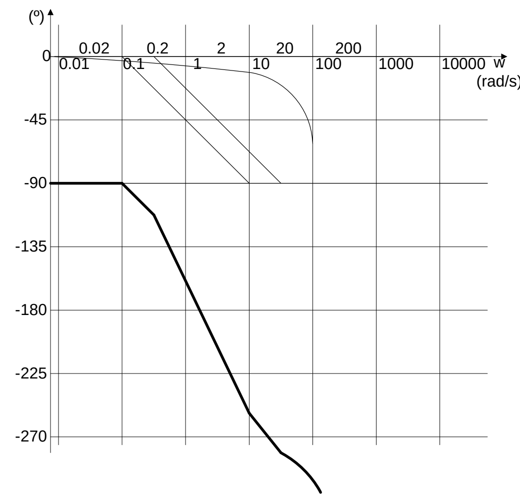
$$G(s).H(s) = \frac{1{,}934.e^{-0{,}498.s}}{s.(s+1).(s+2)}$$

O que decompondo em factores básicos, dá:

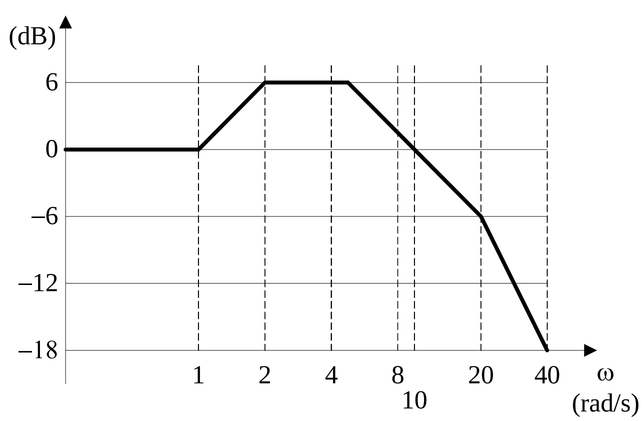
$$G(s).H(s) = \frac{0{,}967.e^{-0{,}498.j\omega}}{j\omega.(j\omega+1).\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)}$$

O valor do ganho correspondente ao termo constante é de: 20 log 0.967 = –0.2915 dB, pelo que os traçados assimptóticos de Bode, de amplitude e fase, para este sistema, são os que se apresentam nas figuras seguintes:





7. Considere o seguinte traçado assimptótico de Bode das amplitudes:



a) Esboce os traçados assimptóticos de Bode (amplitude e fase) quando se acrescenta um pólo na origem.

O sistema apresentado tem três pólos e um zero. As frequências a que ocorrem o zero e os pólos são as seguintes:

p_1 à frequência 2 rad/s;

p_2 à frequência 5 rad/s;

p_3 à frequência 20 rad/s;

z_1 à frequência 1 rad/s;

Considerando os seguintes factores básicos para os pólos:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{p_i} + 1}$$

E para os zeros:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{z_i} + 1$$

Temos:

$$G(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{1} + 1\right) \cdot \frac{1}{\frac{j\omega}{2} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{j\omega}{5} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{j\omega}{20} + 1}$$

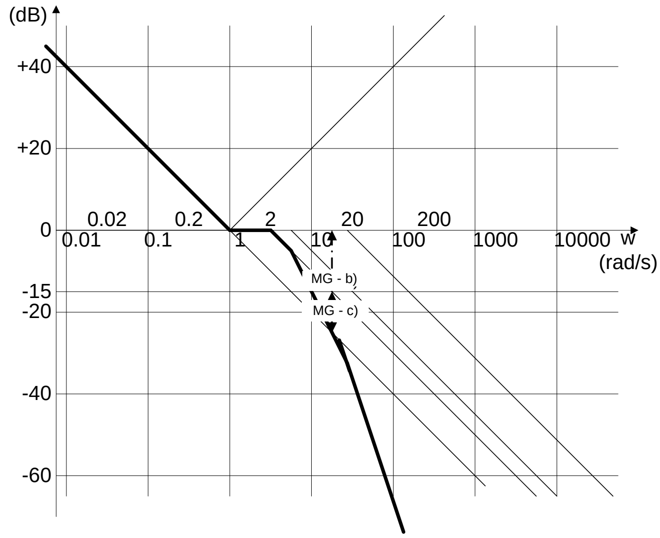
Logo:

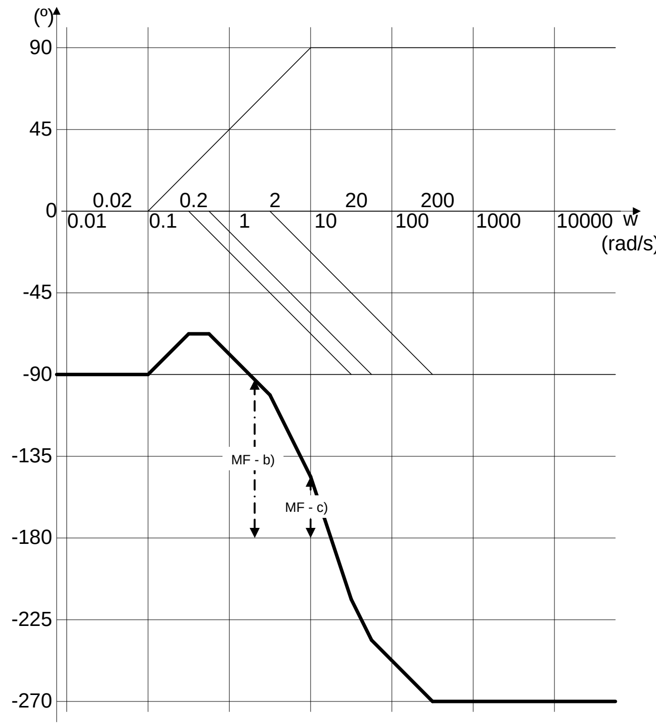
$$G(s) = \frac{200 \cdot (s+1)}{(s+2) \cdot (s+5) \cdot (s+20)}$$

Para a situação na qual se acrescenta um polo na origem, passamos a ter a seguinte função de transferência do sistema:

$$G(s) = \frac{200 \cdot (s+1)}{s \cdot (s+2) \cdot (s+5) \cdot (s+20)}$$

O valor do ganho correspondente ao termo constante é de: 20 log 1 = 0 dB.





b) Indique nos traçados esboçados na alínea anterior a Margem de Ganho e a Margem de Fase.

Ver os traçados assimptóticos de Bode.

c) Aumente o ganho de 15 dB. Verifique o efeito na estabilidade do sistema.

Ver os traçados assimptóticos de Bode.

O sistema fica mais próximo da instabilidade, uma vez que quer a Margem de Fase, quer a Margem de Ganho diminuem bastante, nesta situação.

d) Qual a Função de Transferência do sistema para a situação apresentada na alínea anterior?

Um ganho em regime constante de 15 dB é equivalente a:

$$20*\log[k] = 15 \text{ dB} \Leftrightarrow k = 5{,}6$$

A função de transferência para esta situação fica:

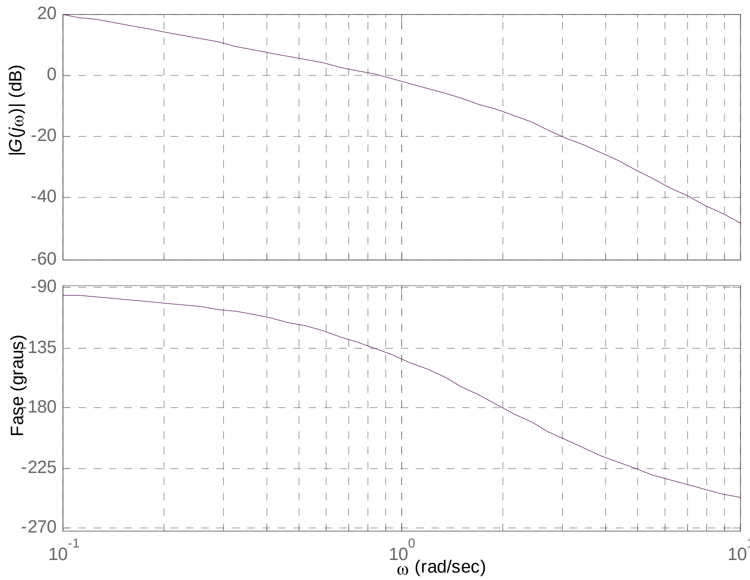
$$G(s) = \frac{5{,}6 \times 200 \cdot (s+1)}{s \cdot (s+2) \cdot (s+5) \cdot (s+20)} = \frac{1120 \cdot (s+1)}{s \cdot (s+2) \cdot (s+5) \cdot (s+20)}$$

8. Considere:

$$G(s) = \frac{1}{s\left(1+\frac{s}{2}\right)^2}$$

a) Efectue a representação assimptótica de Bode.

O valor do ganho correspondente ao termo constante é de: 20 log 1 = 0 dB.



b) A frequência à qual o gráfico intercepta os 180° (ωπ) é:

9. Considere:

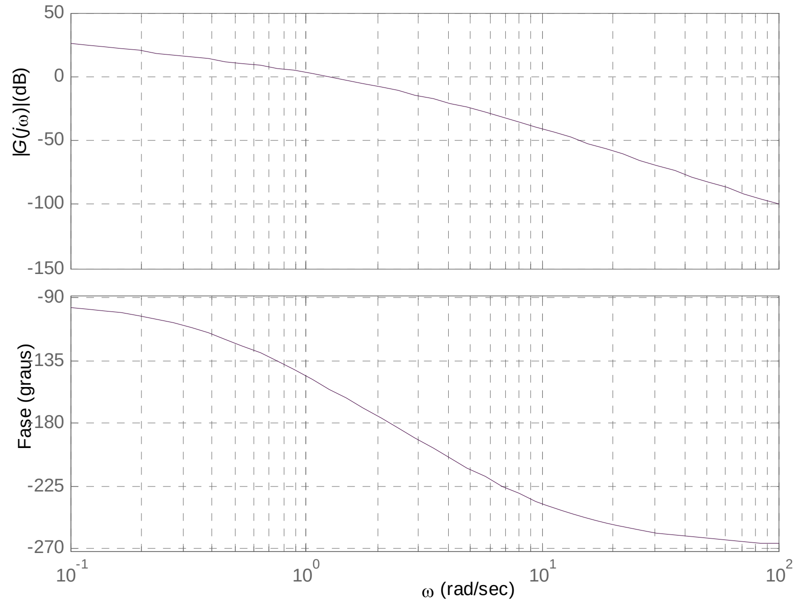
$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+5)}$$

a) Efectue a representação assimptótica de Bode.

Esta função de transferência pode ser escrita na forma:

$$G(s) = \frac{10}{5s(s+1)\left(\frac{s}{5}+1\right)} = \frac{2}{s(s+1)\left(\frac{s}{5}+1\right)}$$

correspondendo ao termo constante o valor de: 20 log 2 = 6 dB.



b) Verifique a estabilidade do sistema.