CURSO DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA

SISTEMAS ELÉCTRICOS DE ENERGIA

TEORIA DOS SISTEMAS DE CONTROLO

V. A TENREIRO MACHADO

TEORIA DOS SISTEMAS DE CONTROLO

PROGRAMA:

1. ÁLGEBRA DOS DIAGRAMAS DE BLOCOS
2. MODELOS MATEMÁTICOS
3. ANÁLISE DE SISTEMAS EM MALHA ABERTA NO DOMÍNIO DOS TEMPOS
4. ANÁLISE DE SISTEMAS REALIMENTADOS NO DOMÍNIO DOS TEMPOS
5. ANÁLISE DE SISTEMAS NO DOMÍNIO DAS FREQUÊNCIAS
6. ESTUDO DO CONTROLADOR PID

BIBLIOGRAFIA:

1. J.L. MARTINS DE CARVALHO, "DYNAMICAL SYSTEMS AND AUTOMATIC CONTROL", PRENTICE-HALL.
2. JOSEPH J. DISTEFANO, "SISTEMAS DE RETROAÇÃO E CONTROLE", SCHAUM, McGRAW-HILL.
3. JOHN J. D'AZZO, CONSTANTINE H. HOUPIS, "LINEAR CONTROL SYSTEM ANALYSIS AND DESIGN", McGRAW-HILL
4. K. OGATA, "SYSTEM DYNAMICS", PRENTICE-HALL.
5. K. OGATA, "MODERN CONTROL ENGINEERING", PRENTICE-HALL.

0. A TRANSFORMADA DE LAPLACE

DEFINIÇÃO: PARA UMA FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL $f(t)$ TAL QUE $f(t)=0$ PARA $t<0$ A TRANSFORMADA DE LAPLACE DE $f(t)$ É UMA FUNÇÃO DE VARIÁVEL COMPLEXA DEFINIDA POR:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

EXEMPLO: $f(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ e^{at}, & t \geq 0 \end{cases}$

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{at} e^{-st}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t}\, dt = \frac{1}{s-a}$$

EXISTE UMA CORRESPONDÊNCIA BIUNÍVOCA ENTRE $f(t)$ E $F(s)$, ISTO É:

- SE $f_1(t) \neq f_2(t) \Longrightarrow F_1(s) \neq F_2(s)$
- SE $f_1(t) = f_2(t) \Longrightarrow F_1(s) = F_2(s)$

O CÁLCULO DE $f(t)$ A PARTIR DE $F(s)$ DESIGNA-SE POR TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE PODE SER OBTIDO ATRAVÉS DO INTEGRAL:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$$

PARA VALORES ADEQUADOS DE σ_1.

0.2. PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

- $\mathcal{L}\left[a\, f(t) + b\, g(t)\right] = a\, F(s) + b\, G(s)$

- $\mathcal{L}\left[{df}/{dt}\right] = s\, F(s) - f(0^-)$

  $\mathcal{L}\left[{d^2f}/{dt^2}\right] = s^2 F(s) - s\, f(0^-) - f'(0^-)$

- $\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(t')\, dt'\right] = \dfrac{F(s)}{s}$

- $\lim\limits_{s \to \infty} sF(s) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = f(0^+)$ TEOREMA DO VALOR INICIAL

- $\lim\limits_{s \to 0} sF(s) = \lim\limits_{t \to \infty} f(t) = f(\infty)$ TEOREMA DO VALOR FINAL

- $\mathcal{L}\left[f(t-T)\right] = e^{-sT} F(s)$

- $\mathcal{L}^{-1}\left[W(s)\, U(s)\right] = \int_{0^-}^{t} w(t-t')\, u(t')\, dt' =$

  $= w(t) * u(t)$ TEOREMA DA CONVOLUÇÃO

- $\mathcal{L}\left[t\, f(t)\right] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$

  $\mathcal{L}\left[t^2 f(t)\right] = \dfrac{d^2F(s)}{ds}$

- $\mathcal{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s+a)$

0.3 TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

FUNÇÃO	TRANSFORMADA DE LAPLACE
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$1/s$
$r(t)$	$1/s^2$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
$\dfrac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$	$\dfrac{1}{(s+a)^n}$
$\sin wt$	$\dfrac{w}{s^2+w^2}$
$\cos wt$	$\dfrac{s}{s^2+w^2}$
$\sin(wt+\phi)$	$\dfrac{s\sin\phi + w\cos\phi}{s^2+w^2}$
$\dfrac{1}{w}e^{-at}\sin wt$	$\dfrac{1}{[s+(a+jw)][s+(a-jw)]}$

0.4. CÁLCULO DA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE ATRAVÉS DA DECOMPOSIÇÃO EM FRACÇÕES SIMPLES

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}\right] =$$

$$= 1 - \frac{te^{-t}}{0!} - e^{-t} = 1 - e^{-t}(t+1) \quad \text{PARA} \quad t \geq 0$$

0.5. Aplicação da Transformada de Laplace na Resolução de Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_0 u$$

Aplicando transformada de Laplace vem:

$$a_n \left[s^n Y(s) - y(0^-) - s\,\dot{y}(0^-) - \cdots - s^{n-1} y^{(n-1)}(0^-) \right] +$$

$$+ a_{n-1} \left[s^{n-1} Y(s) - y(0^-) - s\,\dot{y}(0^-) - \cdots - s^{n-2} y^{(n-2)}(0^-) \right] +$$

$$+ \cdots + a_0 Y(s) = b_m \left[s^m U(s) - u(0^-) - s\,\dot{u}(0^-) - \cdots \right] +$$

$$+ \cdots + b_0 U(s)$$

Logo:

$$Y(s) = \underbrace{U(s) \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0}}_{\text{Resposta forçada}} + \underbrace{\frac{y(0^-)(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1) + s^2 \dot{y}(0^-)(a_n + \cdots + a_2) + \cdots}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} - \frac{u(0^-)(b_m + \cdots + b_1) + s^2 \dot{u}(0^-)(b_m + \cdots + b_2) + \cdots}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}}_{\text{Resposta livre}}$$

Define-se Função de Transferência como

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0}$$

considerando as condições iniciais nulas.

EXEMPLO

$$y'' + 3y' + 2y = u'' + 2u' + 2u$$

$$s^2 Y(s) - y(0^-) - s\dot{y}(0^-) + 3s\,Y(s) - 3y(0^-) + 2\,Y(s) =$$

$$= s^2 U(s) - u(0^-) - s\dot{u}(0^-) + 2s\,U(s) - 2u(0^-) + 2\,U(s)$$

$$Y(s) = U(s)\,\frac{s^2+2s+2}{s^2+3s+2} + \frac{2y(0^-) + s\dot{y}(0^-) - 3u(0^-) - s\dot{u}(0^-)}{s^2+3s+2}$$

— SUPONDO CONDIÇÕES INICIAIS NULAS, OBTÉM-SE A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2+2s+2}{s^2+3s+2} = \frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}$$

— SE, POR EXEMPLO, $u(t) = \delta(t)$ VEM:

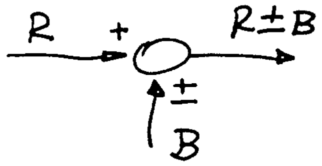
$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$Y(s) = \frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)} \cdot 1 = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

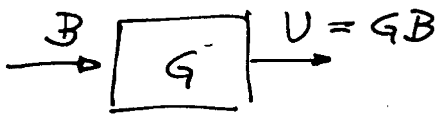
$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \delta(t) + e^{-t} - 2e^{-2t}$$

1. Álgebra dos Diagramas de Blocos

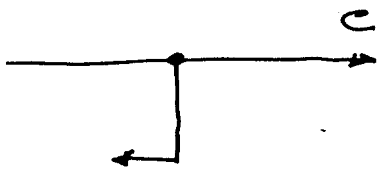
1.0. Designações



Ponto de soma

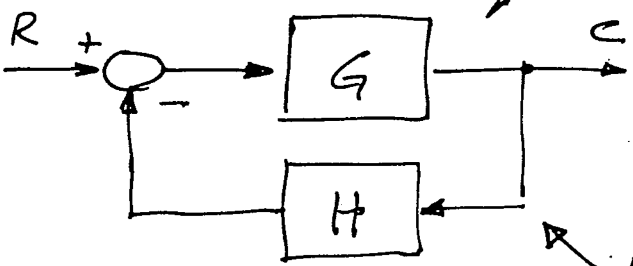


Bloco
G – função de transferência



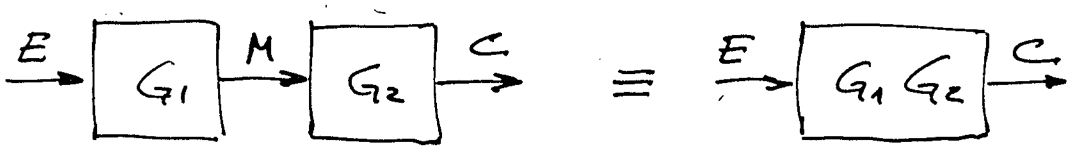
Ponto de saída

Malha directa



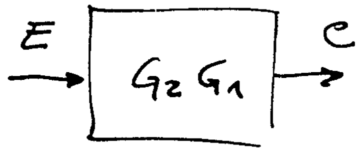
Malha de realimentação
(feedback)

1.1. Blocos em cascata (em série)

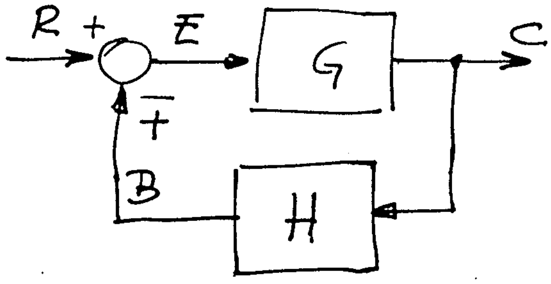


$M = G_1 E$ $\longrightarrow$ $C = G_1 G_2 E = G_2 G_1 E$
$C = G_2 M$

A multiplicação de funções de transferência é comutativa $\equiv$



1.2. FORMA CANÓNICA DE UM SISTEMA DE CONTROLO



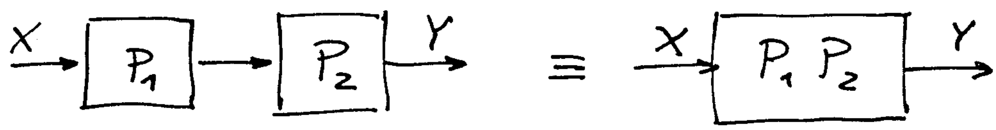
$$
\begin{aligned}
E &= R \mp B \\
C &= GE \\
B &= HC
\end{aligned}
\quad \longrightarrow \quad \frac{C}{G} = R \mp HC \iff C = \frac{G}{1 \pm GH} R
$$

R - SINAL DE REFERÊNCIA
C - SINAL DE SAÍDA
E - SINAL DE ERRO

$1 \pm GH = 0 \equiv$ EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

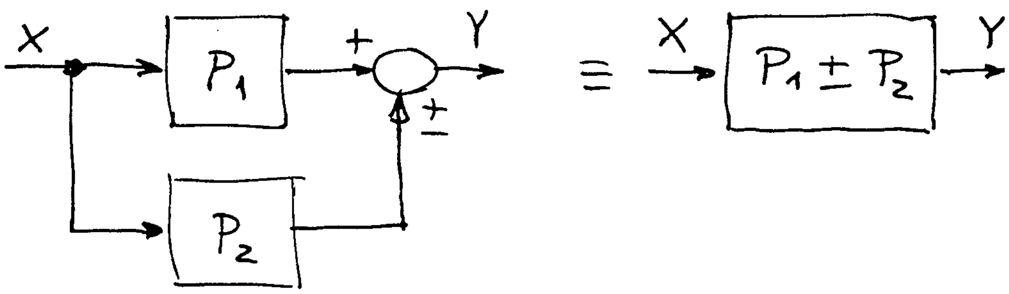
1.3. TRANSFORMAÇÃO DE DIAGRAMAS DE BLOCOS

I)

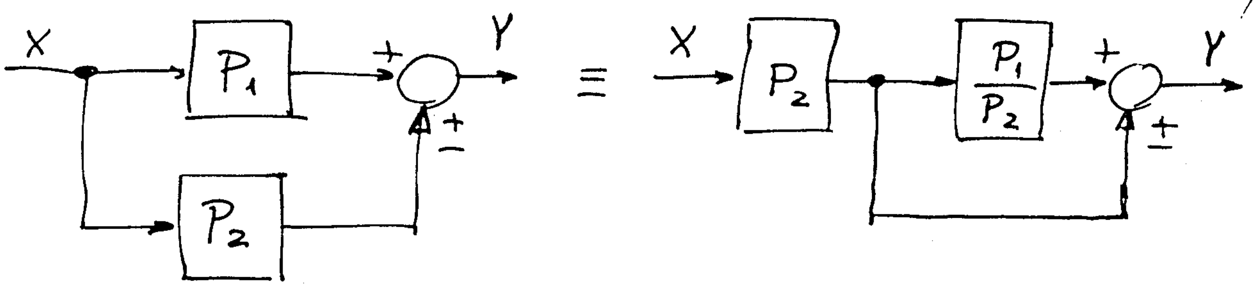


$$Y = (P_1 P_2) \cdot X$$

II)

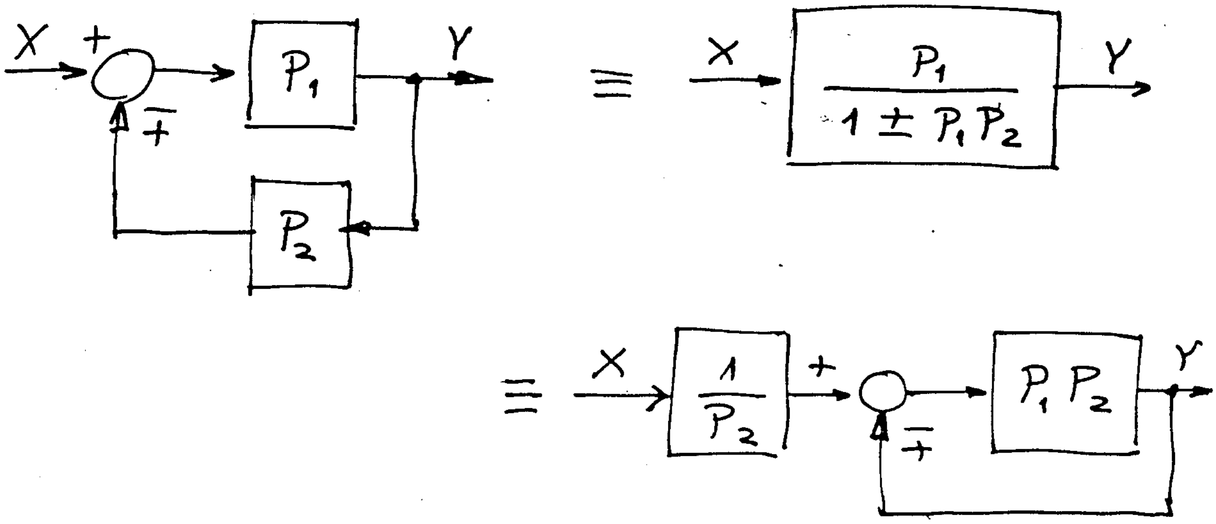


$$Y = (P_1 \pm P_2) \cdot X$$

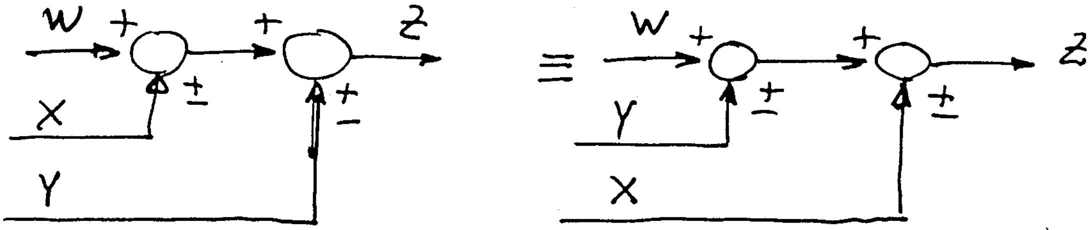


$$Y = (P_1 \pm P_2) X$$

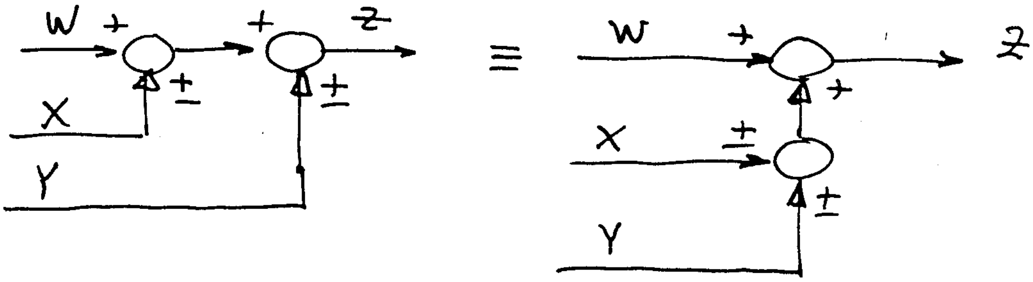
III)



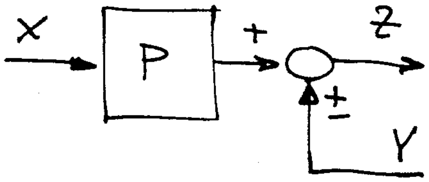
IV)

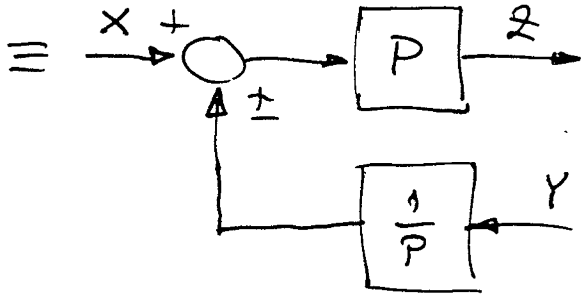


$$z = W \pm X \pm Y$$



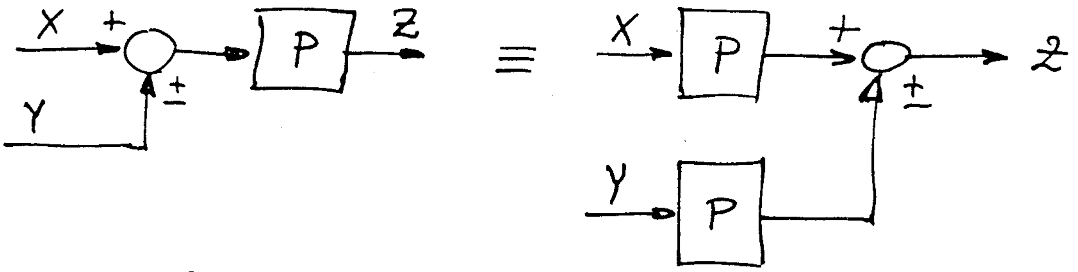
V)





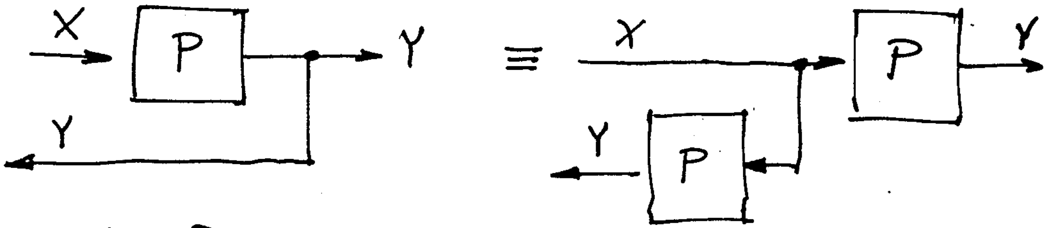
$$z = PX \pm Y$$

VI)



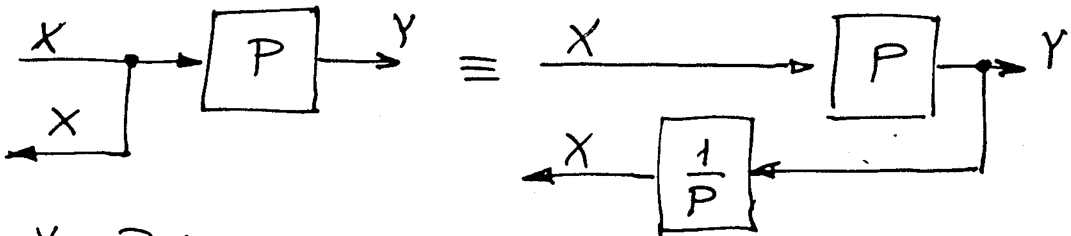
$z = P(X \pm Y)$

VII)



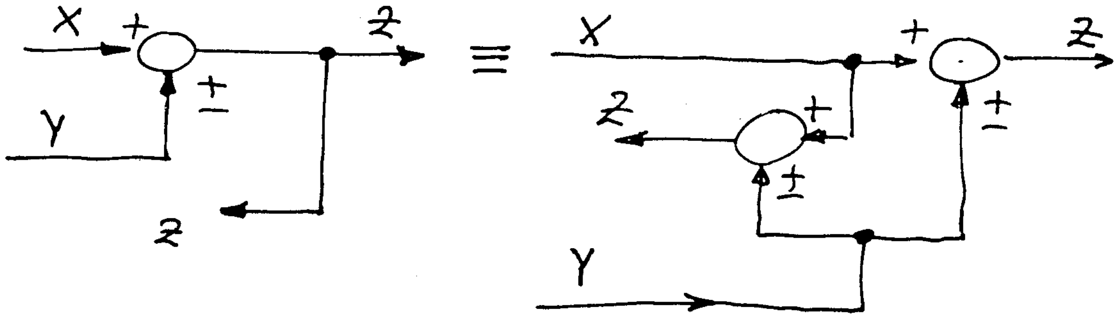
$Y = PX$

VIII)



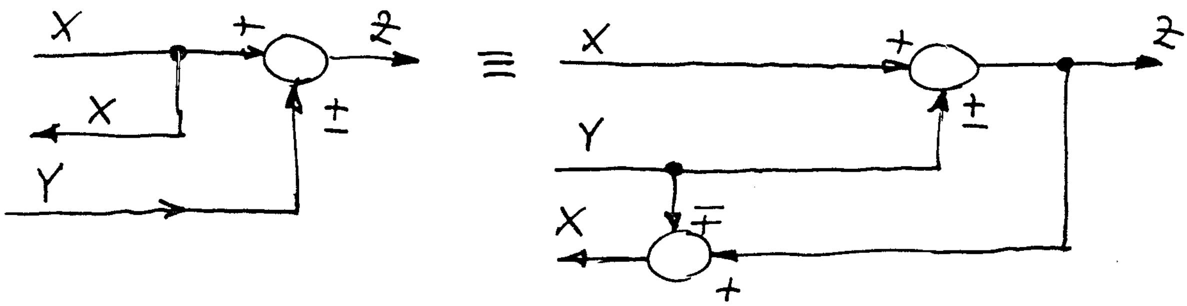
$Y = PX$

IX)



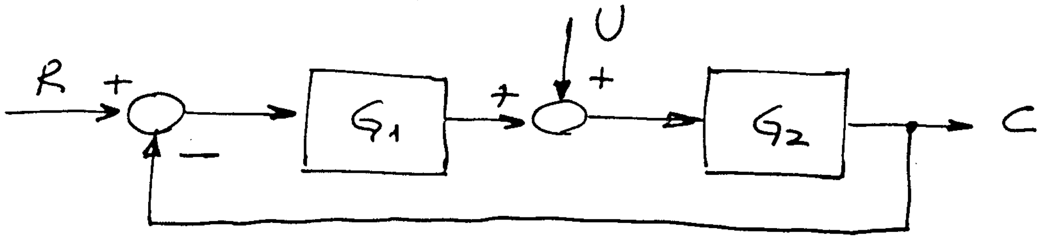
$z = X \pm Y$

X)

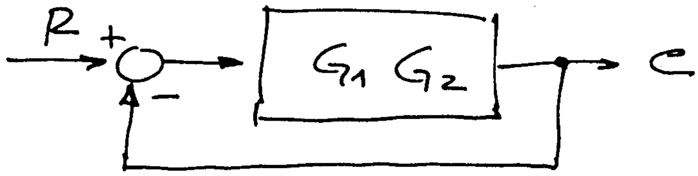


$z = X \pm Y$

1.4. SOBREPOSIÇÃO DE VÁRIOS SINAIS DE ENTRADA

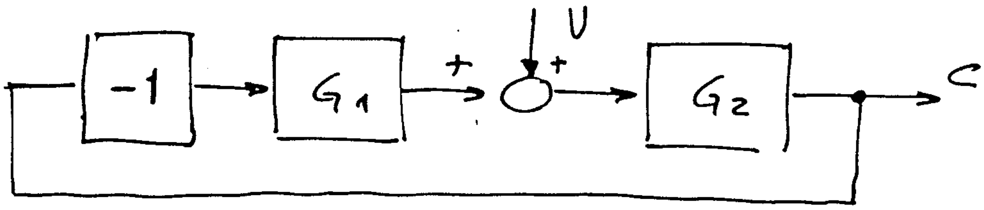


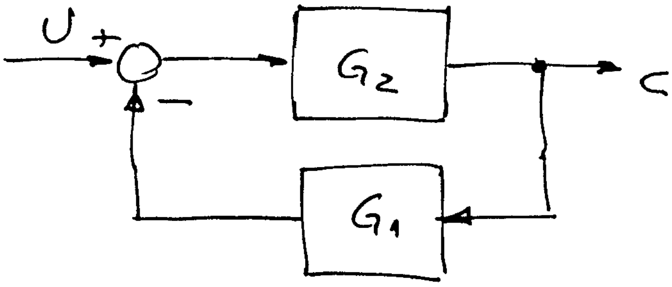
- FAZENDO $U=0$ VEM:



$$C = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} R$$

- FAZENDO $R=0$ VEM:



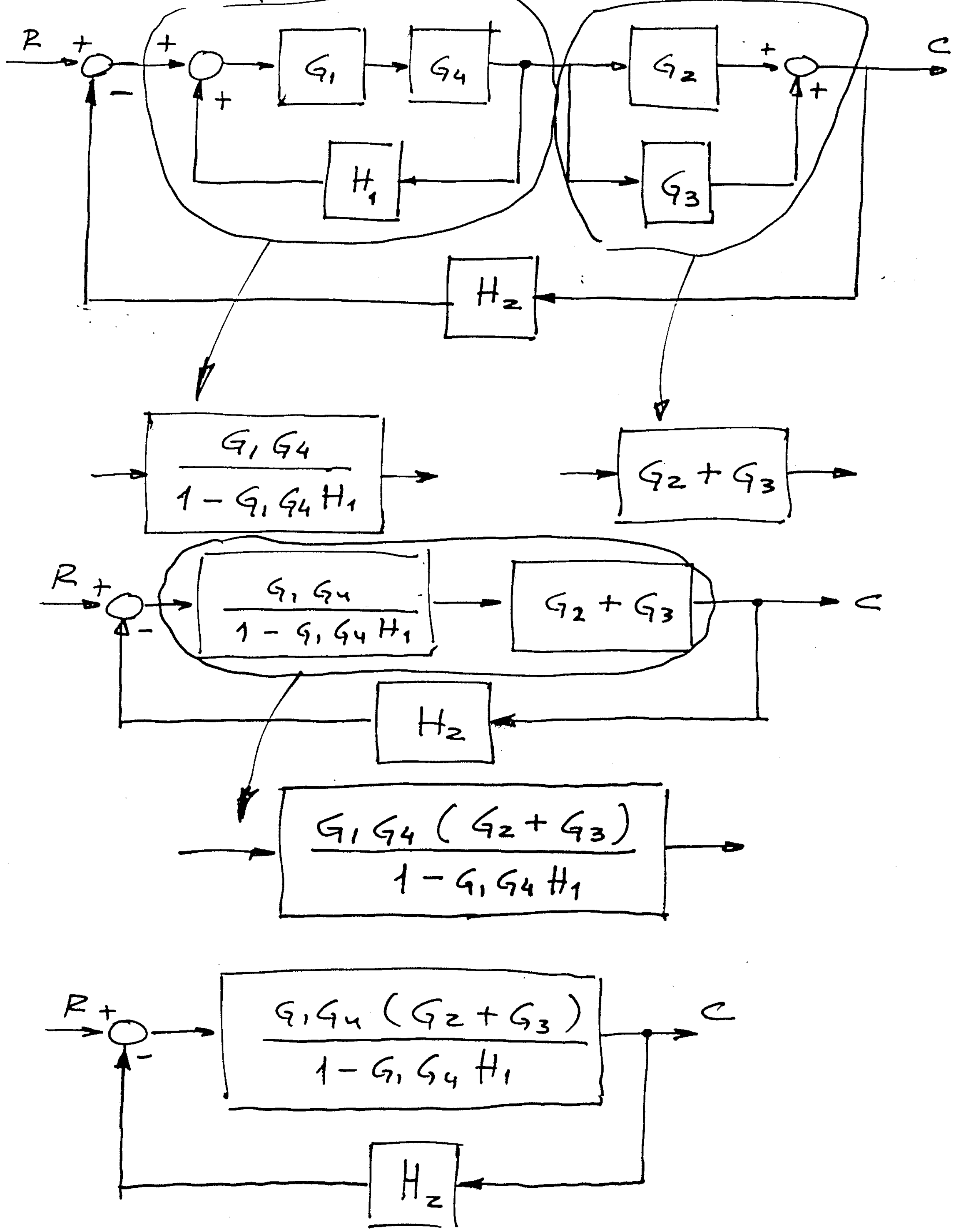


$$C = \frac{G_2}{1+G_1 G_2} U$$

LOGO: $$C = \frac{G_2}{1+G_1 G_2} \left(G_1 R + U \right)$$

(TEOREMA DA SOBREPOSIÇÃO)

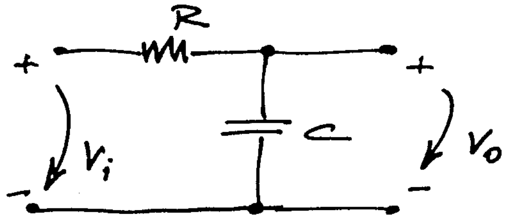
1.5. Simplificação de Diagramas de Blocos



$$C = \frac{\dfrac{G_1 G_4 (G_2 + G_3)}{1 - G_1 G_4 H_1}}{1 + \dfrac{G_1 G_4 (G_2 + G_3)}{1 - G_1 G_4 H_1} H_2} R = \cdots$$

1.6. DIAGRAMAS DE BLOCOS E MODELOS MATEMÁTICOS

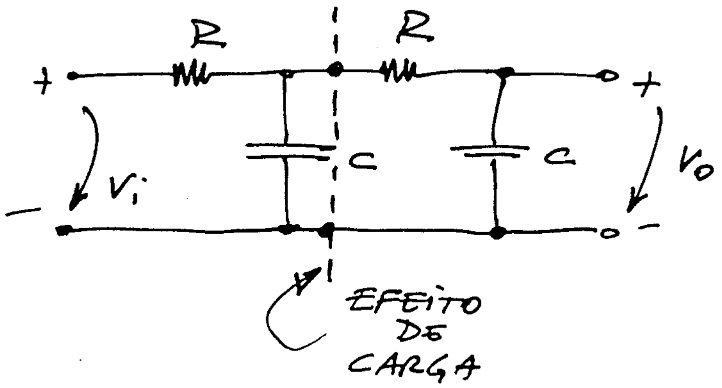
NA REPRESENTAÇÃO POR DIAGRAMAS DE BLOCOS CONSIDERA-SE QUE NÃO HÁ EFEITO DE CARGA.



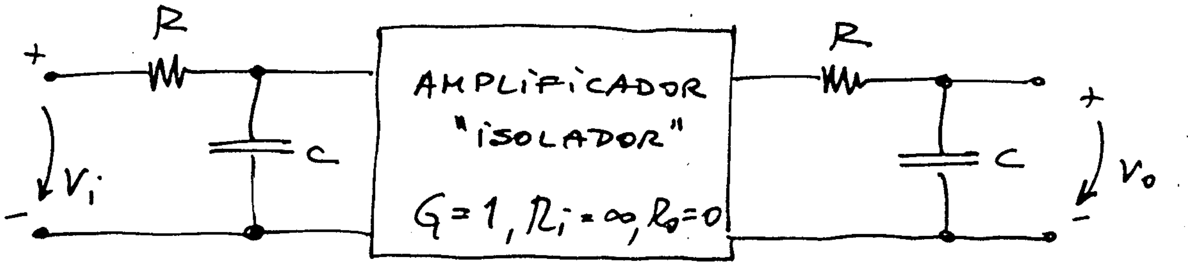
$$V_o = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} V_i$$

FAZENDO $w_o = \frac{1}{RC}$ VEM

$$V_o = \frac{w_o}{s + w_o} V_i \qquad V_i \longrightarrow \boxed{\frac{w_o}{s+w_o}} \longrightarrow V_o$$



$$V_o = \frac{w_o^2}{s^2 + 3 w_o s + w_o^2} V_i$$



$$V_o = \left(\frac{w_o}{s + w_o}\right)^2 V_i$$

NÃO HÁ EFEITO DE CARGA ENTRE OS DOIS CIRCUITOS RC

1.7. Regra de Mason

Em diagramas de blocos complexos a função de transferência pode ser calculada através da fórmula de Mason:

$$T = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta}$$

P_i - Ganho da malha directa i

P_{jk} - Produto possível de ordem j de k ganhos de anéis que não se tocam.

$$\Delta = 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_{jk} =$$

$$= 1 - \sum_j P_{j1} + \sum_j P_{j2} - \sum_j P_{j3} + \cdots =$$

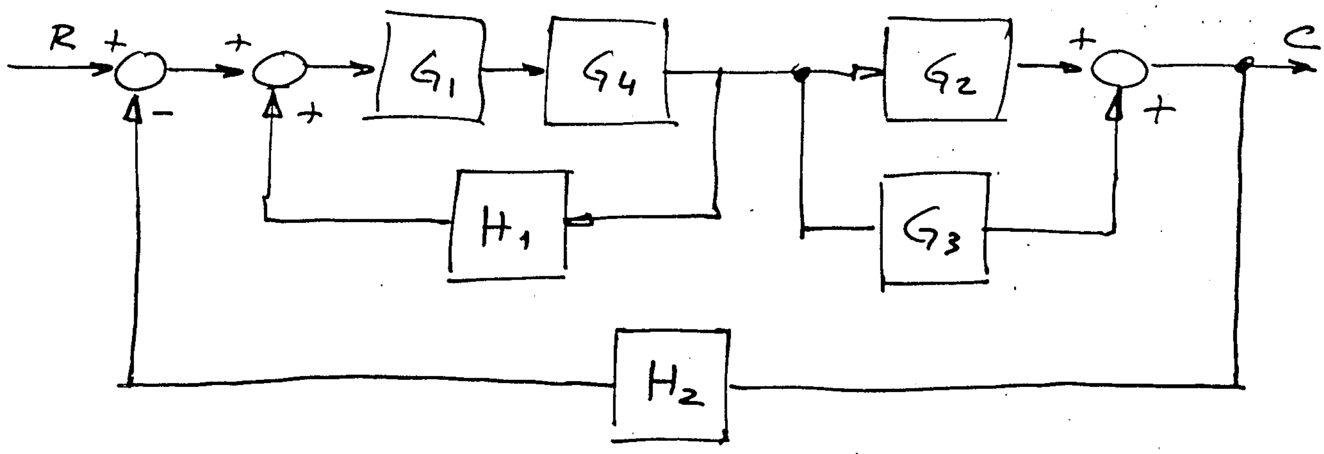
= 1 − (soma de todos os ganhos de anéis) +
+ (soma de todos os produtos de dois anéis que não se tocam) −
− (soma de todos os produtos de três anéis que não se tocam) + ⋯

$\Delta_i = \Delta$ calculado com todos os anéis que tocam em P_i eliminados

Dois anéis ou duas malhas "não se tocam" quando não têm nós em comum.

$\Delta = 0$ é a equação característica do sistema

EXEMPLO:



- EXISTEM 2 CAMINHOS DIRECTOS COM GANHOS:

$$P_1 = G_1 G_2 G_4 \quad , \quad P_2 = G_1 G_3 G_4$$

- EXISTEM 3 ANÉIS

$$P_{11} = G_1 G_4 H_1 \, , \quad P_{21} = -G_1 G_2 G_4 H_2 \, , \quad P_{31} = -G_1 G_3 G_4 H_2$$

- NÃO EXISTEM QUAISQUER ANÉIS QUE NÃO TOQUEM EM P_1 E P_2, PELO QUE:

$$\Delta_1 = 1 \, , \quad \Delta_2 = 1$$

- $\Delta = 1 - G_1 G_4 H_1 + G_1 G_2 G_4 H_2 + G_1 G_3 G_4 H_2$

LOGO:

$$T = \frac{C}{R} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} =$$

$$= \frac{G_1 G_4 (G_2 + G_3)}{1 + G_1 G_4 \left[-H_1 + H_2 (G_2 + G_3) \right]}$$

2. MODELOS MATEMÁTICOS

2.1. MODELOS DE SISTEMAS FÍSICOS

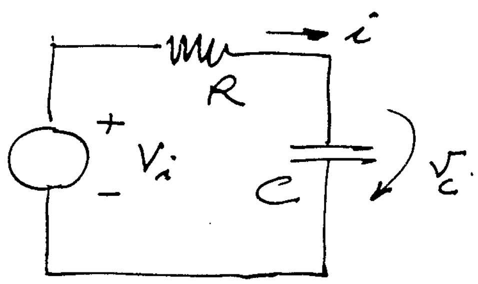
NESTE CAPÍTULO ESTUDA-SE A MODELIZAÇÃO DE SISTEMAS CONTÍNUOS (NO TEMPO) ATRAVÉS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES ORDINÁRIAS DA FORMA:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m u$$

ONDE $y(t)$ É A SAÍDA E $u(t)$ A ENTRADA DO SISTEMA.

2.1.1. O CIRCUITO RC

O CIRCUITO RC É UM DOS EXEMPLOS MAIS SIMPLES DE SISTEMAS DINÂMICOS E QUE É MUITO ÚTIL PARA ESTABELECER COMPARAÇÕES COM OUTROS SISTEMAS.



A TENSÃO NO CONDENSADOR VEM:

$$V_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt' + V_c(0)$$

ONDE $V_c(0)$ É A TENSÃO NO CONDENSADOR NO INÍCIO DA CONTAGEM DOS TEMPOS.

PELA LEI DE KIRCHOFF DAS TENSÕES:

$$V_i(t) = R\,i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt' \qquad (\text{SUPONDO } V_c(0) = 0)$$

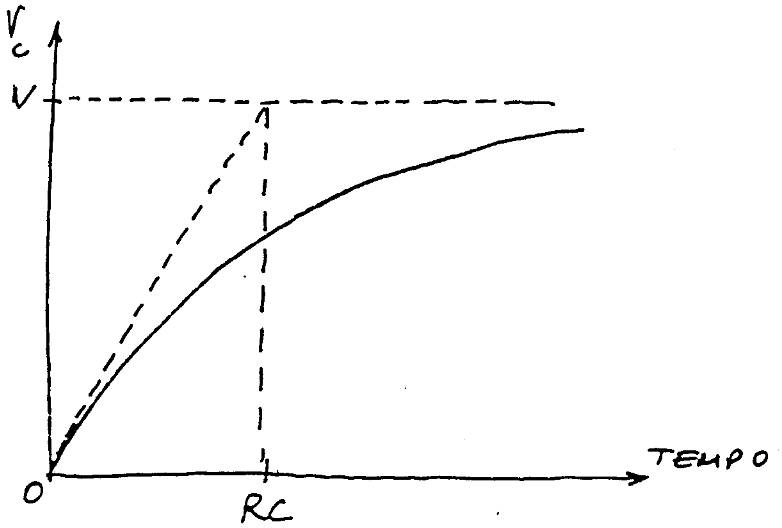
USUALMENTE PREFERE-SE TRABALHAR COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
APLICANDO A LEI DE KIRCHOFF DAS CORRENTES VEM:

$$\frac{V_i - V_c}{R} = C\,\frac{dV_c}{dt} \Leftrightarrow RC\,\frac{dV_c}{dt} + V_c = V_i$$

VERIFICA-SE QUE O CIRCUITO É MODELIZADO POR UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA DE SEGUNDA ORDEM.

PARA UMA VARIAÇÃO DE V_i EM DEGRAU NO INSTANTE $t=0$ DE AMPLITUDE V ENTÃO RESULTA

$$V_c = V\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

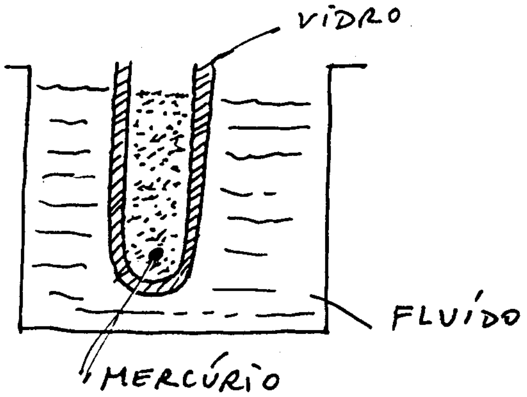


RC TOMA O NOME DE CONSTANTE DE TEMPO DO CIRCUITO.
NOTAR QUE QUANTO MAIOR O VALOR DE R OU DE C TANTO MAIS LENTA É A RESPOSTA $V_c(t)$.

A RESPOSTA IMEDIATAMENTE A SEGUIR À APLICAÇÃO DO DEGRAU É APROXIMADAMENTE LINEAR COM DECLIVE V/RC.

2.1.2. O termómetro de Mercúrio

O comportamento dinâmico de um termómetro pode também ser descrito por uma equação diferencial de primeira ordem.



Despreza-se a capacidade calorífica das paredes de vidro e considera-se que o mercúrio está a uma temperatura uniforme θ_m.

No instante $t=0$ o termómetro é imerso no fluído à temperatura θ_0.

O fluxo de calor q (quantidade de calor por unidade de tempo que que passa do fluído para o termómetro) vem:

$$q = \frac{\theta_0 - \theta_m(t)}{R}$$

Onde R é a resistência calorífica à passagem do calor. Supõe-se que a quantidade de fluído é muito superior à quantidade de mercúrio e que, assim, θ_0 se mantém constante.

Por outro lado, a variação da temperatura do mercúrio de $\theta_m(0)$ para $\theta_m(t)$ levou ao aumento da quantidade de calor armazenada:

$$C\left[\theta_m(t) - \theta_m(0)\right]$$

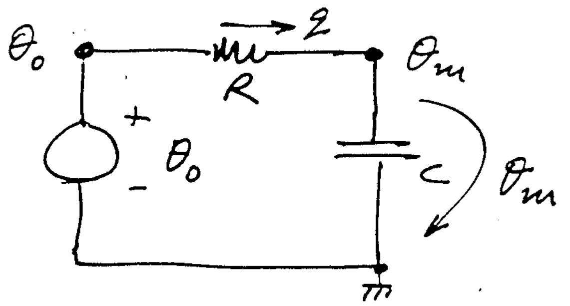
onde C é a capacidade térmica do mercúrio.

Pelo princípio de conservação da quantidade de energia

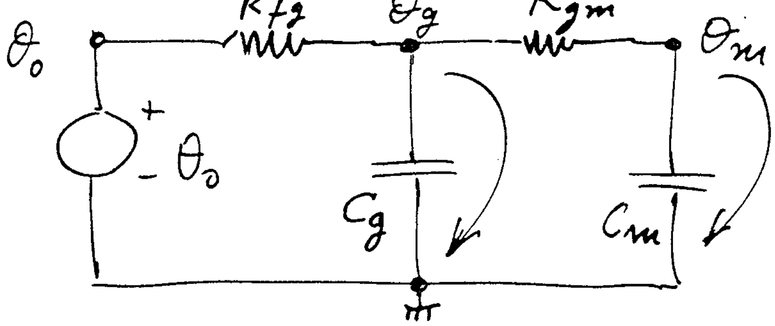
$$\frac{\theta_0 - \theta_m(t)}{R} = C\frac{d}{dt}\left[\theta_m(t) - \theta_m(0)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow RC\frac{d\theta_m}{dt} + \theta_m = \theta_0$$

Comparando esta equação com a do circuito RC verifica-se que RC é a constante de tempo do termómetro. Assim, a figura seguinte é uma analogia eléctrica deste sistema:



Uma descrição mais detalhada incluirá os efeitos da capacidade térmica das paredes de vidro



2.1.5. Sistema Mola-Massa-Atrito

Considere-se uma massa M interligada a uma mola (linear) e a um atrito (linear).

- A mola produz uma força de reacção proporcional ao deslocamento:

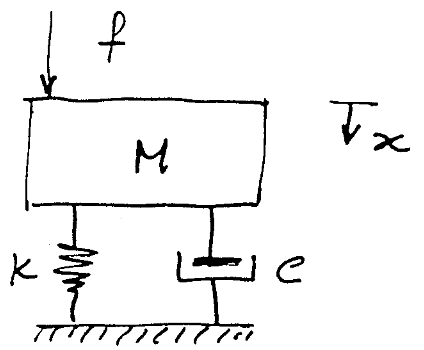
$$F_{MOLA} = kx$$

- O amortecedor produz uma força de reacção proporcional à velocidade:

$$F_{ATRITO} = c\frac{dx}{dt}$$

- A massa produz uma força de reacção inercial proporcional à aceleração:

$$F_{MASSA} = M\frac{d^2x}{dt^2}$$



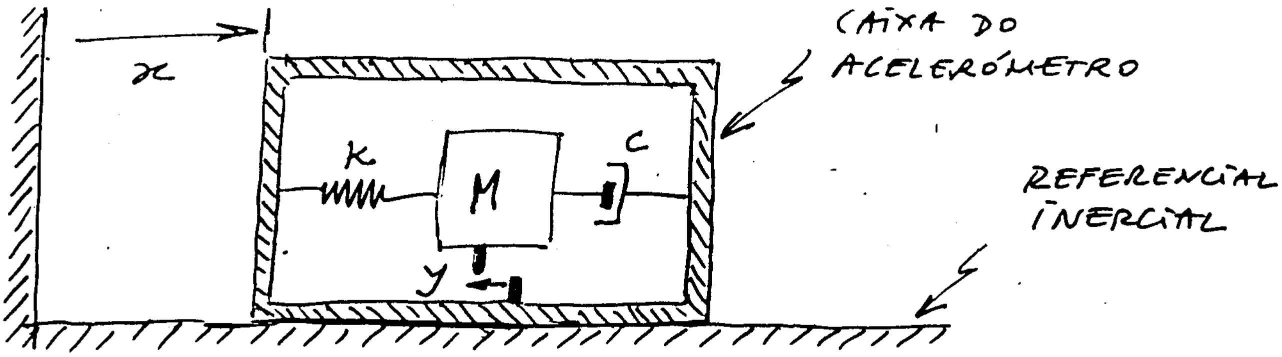
Seja f uma força aplicada exteriormente.

$$f - c\frac{dx}{dt} - kx = M\frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f = M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx$$

2.1.6. ACELERÓMETRO MECÂNICO

CONSIDERE-SE O SISTEMA SEGUINTE:



SEJA x O DESLOCAMENTO DA CAIXA RELATIVAMENTE AO REFERENCIAL INERCIAL E SEJA y O DESLOCAMENTO DA MASSA M RELATIVAMENTE À CAIXA DO ACELERÓMETRO.

CONSIDERE-SE QUE PARA $y=0$ O SISTEMA ESTÁ EM DESCANÇO.
EQUACIONANDO AS FORÇAS VEM:

$$M \frac{d^2}{dt^2}(y-x) = -Ky - c\frac{dy}{dt} \iff$$

$$\iff \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{c}{M}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{K}{M}\right)y = \frac{d^2x}{dt^2}$$

NO CASO DA CAIXA SER SUBMETIDA A UMA ACELERAÇÃO CONSTANTE E APÓS TEREM DESAPARECIDOS OS TRANSITÓRIOS VEM:

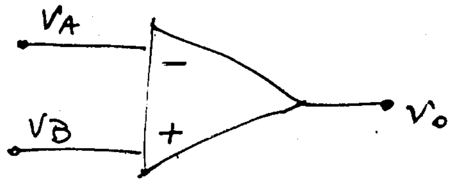
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \text{CONST} \implies y = \left(\frac{M}{K}\right)\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$$

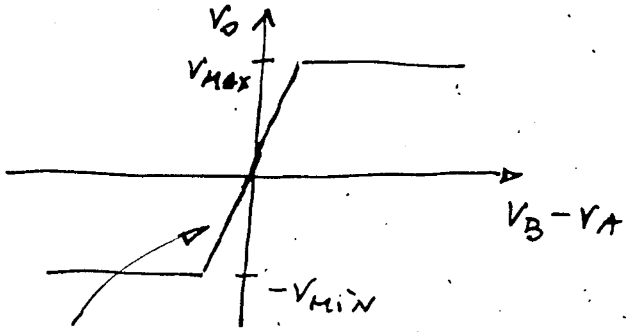
ASSIM, O DESLOCAMENTO y É PROPORCIONAL À ACELERAÇÃO.

2.1.7. O amplificador operacional

Um amplificador operacional ideal tem:

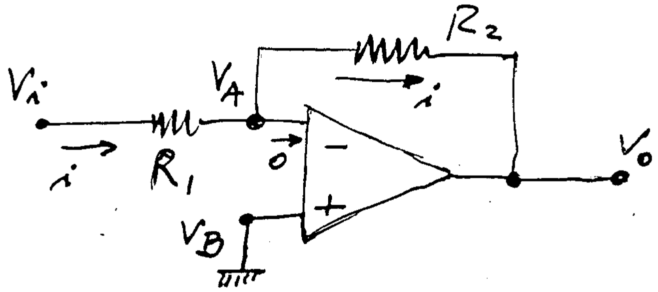
i) Ganho infinito
ii) Corrente nula nos terminais de entrada
isto é, impedância de entrada infinita
iii) Impedância de saída nula





Declive $\begin{cases} \text{ideal} = \infty \\ \text{real} \geq 10^5 \end{cases}$

Estas características implicam que $V_A = V_B$ e que o amplificador operacional tem a capacidade de fornecer/absorver qualquer corrente na saída sem variar a tensão V_o.

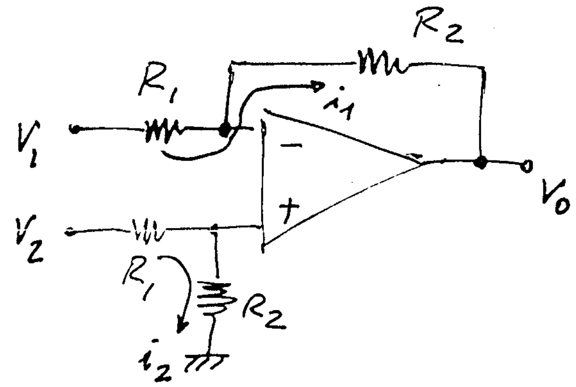


Amplificador inversor

$V_A = V_B = 0$ (pois o ganho é infinito)

$$i = \frac{V_i - 0}{R_1} = \frac{0 - V_o}{R_2} \iff V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_i$$

Neste circuito a impedância de entrada é R_1.

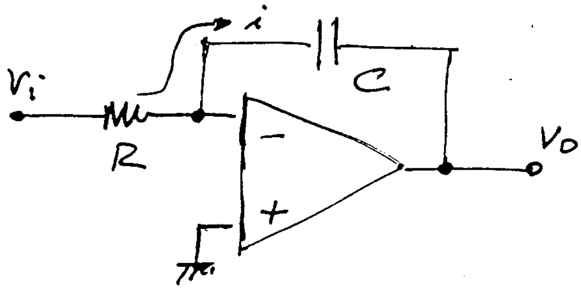


AMPLIFICADOR DIFERENCIAL

$$V^+ = V^- = V_2 \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$i = \frac{1}{R_1}(V_1 - V^-) = (V^- - V_0)\frac{1}{R_2}$$

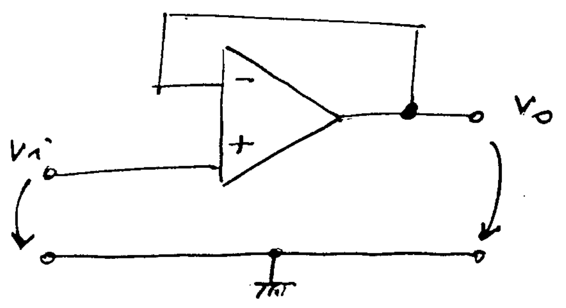
$$V_0 = \frac{R_2}{R_1}(V_2 - V_1)$$



$$\frac{V_i - 0}{R} = C\frac{d}{dt}(0 - V_0)$$

$$\therefore \; V_0(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t V_i(t')\,dt' + V_0(0)$$

INTEGRADOR



$$V_0 = V_i$$

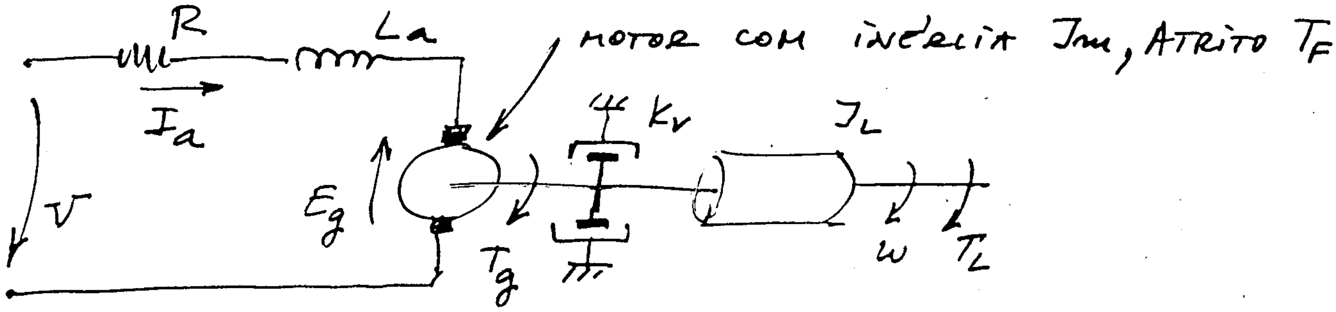
SEGUIDOR DE TENSÃO

<u>NOTA</u>: NOS CIRCUITOS ANTERIORES A MALHA DE REALIMENTAÇÃO ESTÁ LIGADA AO TERMINAL —. UMA REALIMENTAÇÃO ATRAVÉS DO TERMINAL + PODERIA CONDUZIR À INSTABILIDADE.

2.1.9. O MOTOR DC DE ÍMAN PERMANENTE

O MOTOR DC DE ÍMAN PERMANENTE É VOCACIONADO PARA APLICAÇÕES EM CONTROLO DEVIDO ÀS SUAS CARACTERÍSTICAS DE ALTO BINÁRIO DE ACELERAÇÃO, BAIXA INÉRCIA E CARACTERÍSTICA LINEAR DE BINÁRIO - VELOCIDADE.

CONSIDERE-SE A LIGAÇÃO DO MOTOR A UMA CARGA.



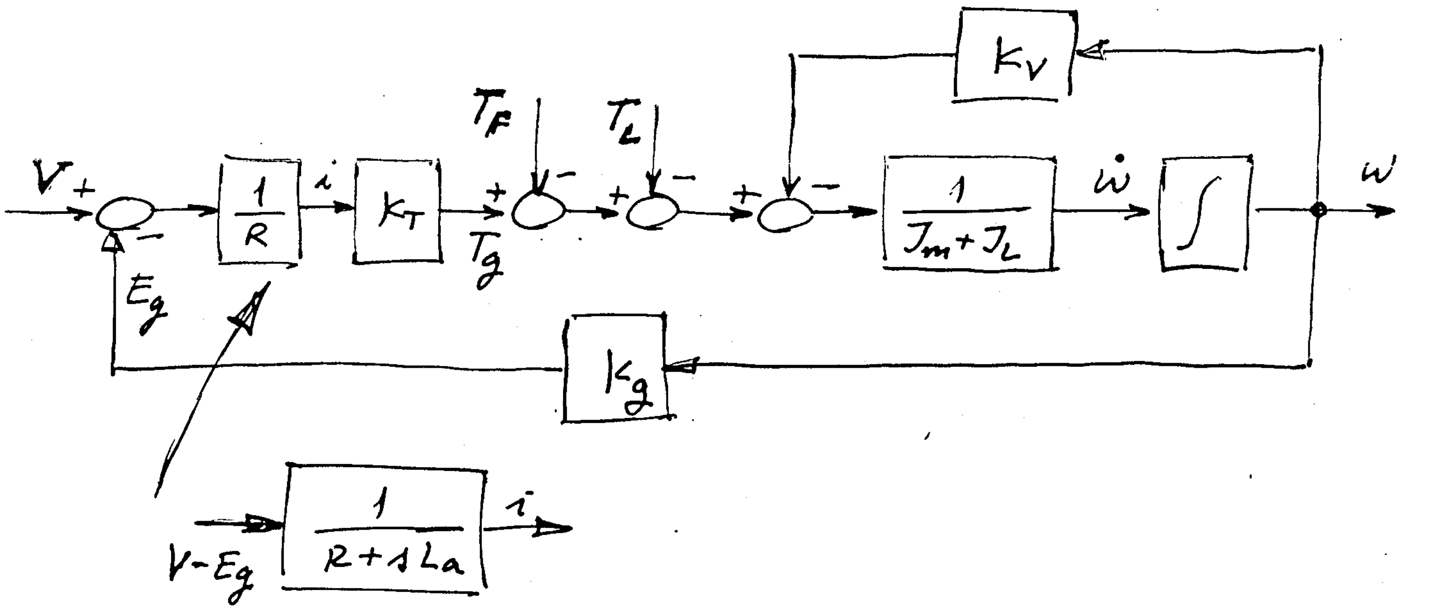
L_a - INDUTÂNCIA DO ENROLAMENTO DA ARMADURA
I_a - CORRENTE NO ENROLAMENTO DA ARMADURA
T_g - BINÁRIO GERADO PELO MOTOR
E_g - FORÇA CONTRA-ELECTRO-MOTRIZ GERADA PELO MOTOR
w - VELOCIDADE DE ROTAÇÃO DO MOTOR
T_L - BINÁRIO DE CARGA

$$V = L_a \frac{dI_a}{dt} + R I_a + \underbrace{k_g w}_{E_g}$$

$$T_g = k_T I_a$$

$$T_g = (J_m + J_L)\frac{dw}{dt} + k_v w + T_F + T_L$$

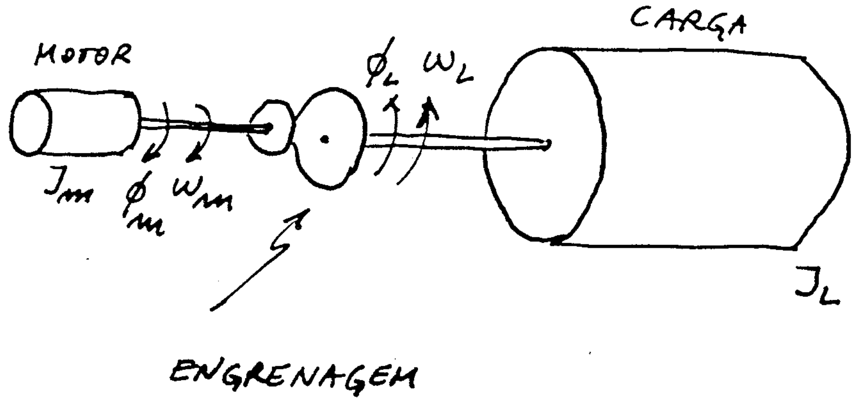
A PARTIR DESTAS EQUAÇÕES PODE ESTABELECER-SE O DIAGRAMA DE BLOCOS SEGUINTE (DESPREZANDO A INDUTÂNCIA La):



NOTE-SE QUE E_g DIMINUI A SENSIBILIDADE DA VELOCIDADE W RELATIVAMENTE A VARIAÇÕES DA CARGA T_L. DE FACTO, QUANDO T_L AUMENTA, W DIMINUI, E_g DIMINUI, PELO QUE i AUMENTA E T_g AUMENTA COMPENSANDO, ASSIM, O EFEITO DA CARGA.

2.1.10. MOTORES E CARGAS

FREQUENTEMENTE A CARGA NÃO ESTÁ ACOPLADA DIRECTAMENTE AO VEIO DO MOTOR. NESSES CASOS É CONVENIENTE CALCULAR O SISTEMA EQUIVALENTE COM A CARGA A TER O MESMO MOVIMENTO ANGULAR QUE O MOTOR.



ϕ_L - DESLOCAMENTO ANGULAR DA CARGA
ϕ_m - DESLOCAMENTO ANGULAR DO MOTOR

$$w_m = \frac{d\phi_m}{dt}, \quad w_L = \frac{d\phi_L}{dt}$$ VELOCIDADES ANGULARES

$$N = \frac{\phi_m}{\phi_L} = \frac{w_m}{w_L}$$ RAZÃO DA ENGRENAGEM

A INÉRCIA J_{LS} DO SISTEMA EQUIVALENTE SEM ENGRENAGEM DEVE SER TAL QUE A ENERGIA CINÉTICA É A MESMA NOS DOIS SISTEMAS:

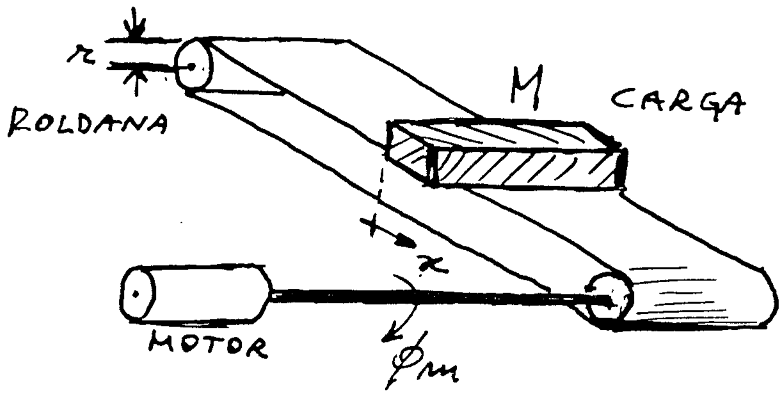
$$\frac{1}{2} J_{LS} w_m^2 = \frac{1}{2} J_L w_L^2 \Rightarrow J_{LS} = \frac{1}{N^2} J_L$$

DE UM MODO SEMELHANTE CONCLUI-SE QUE

$$K_{VS} = \frac{1}{N^2} K_V$$ (ATRITO NA CARGA)

$$K_S = \frac{1}{N^2} K$$ (MOLA NA CARGA)

$$T_{LS} = \frac{1}{N} T_L$$ (BINÁRIO DE CARGA)



CONSIDERE-SE AGORA O CASO DE UMA MASSA M DESLOCADA LINEARMENTE.

$$x = \phi_m r$$

IGUALANDO AS ENERGIAS CINÉTICAS: $\frac{1}{2} J_{LS} w_m^2 = \frac{1}{2} M \frac{d^2x}{dt^2}$

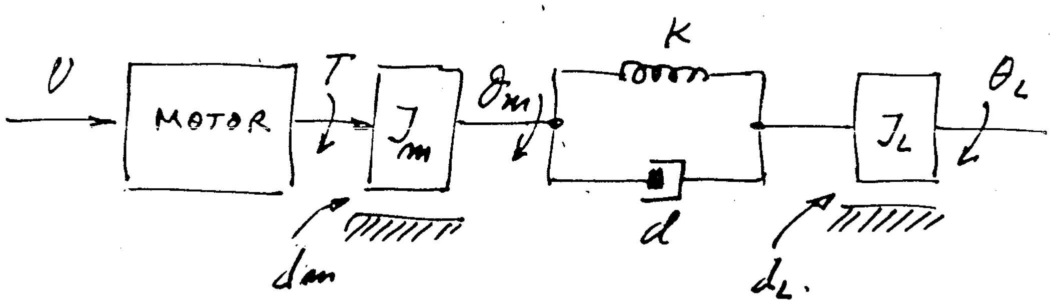
RESULTA: $J_{LS} = r^2 M$

DE UM MODO SEMELHANTE CONCLUI-SE QUE PARA UMA FORÇA F_L NA CARGA VEM:

$$F_{LS} = r \cdot F_L$$

DURANTE OS PERÍODOS TRANSITÓRIOS MUITA DA POTÊNCIA CONSUMIDA DEVE-SE AO MOMENTO DE INÉRCIA.
SE O MOTOR FOR SUJEITO A ACELERAÇÕES/DESACELERAÇÕES FREQUENTES OS ENROLAMENTOS DA ARMADURA PODEM AQUECER SIGNIFICATIVAMENTE.
A ENERGIA DISSIPADA PODE SER MINIMIZADA ATRAVÉS DA ESCOLHA APROPRIADA DA RAZÃO DA ENGRENAGEM, DE TAL FORMA QUE A INÉRCIA DO MOTOR SEJA APROXIMADAMENTE IGUAL À INÉRCIA DA CARGA VISTA PELO MOTOR ("INERTIA MATCH").

EXISTEM CASOS ONDE A DINÂMICA DO MOTOR PODE SER DESPREZADA (E.G. MOTORES DC COM REALIMENTAÇÃO DE CORRENTE). NESSE CASO, PODE CONSIDERAR-SE QUE O BINÁRIO T É PROPORCIONAL À TENSÃO V, COMO, POR EXEMPLO, NO "DRIVE" DE MOTORES DE ROBOTS COM ELEVADO DESEMPENHO. TODAVIA, NAS TRANSMISSÕES DOS ROBOTS PODEM EXISTIR MODOS TORSIONAIS POUCO AMORTECIDOS QUE LEVANTAM GRAVES PROBLEMAS DE CONTROLO.



$$T = k_m V$$

$$T = J_m \ddot{\theta}_m + d_m \dot{\theta}_m + d(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_L) + K(\theta_m - \theta_L)$$

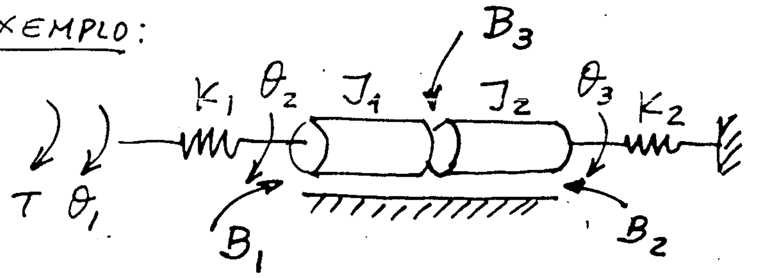
$$J_L \ddot{\theta}_L + d_L \dot{\theta}_L + d(\dot{\theta}_L - \dot{\theta}_m) + K(\theta_L - \theta_m) = 0$$

PARA O CASO DE UMA TRANSMISSÃO IDEAL (I.E. SEM ATRITO E SEM FLEXIBILIDADE) VEM:

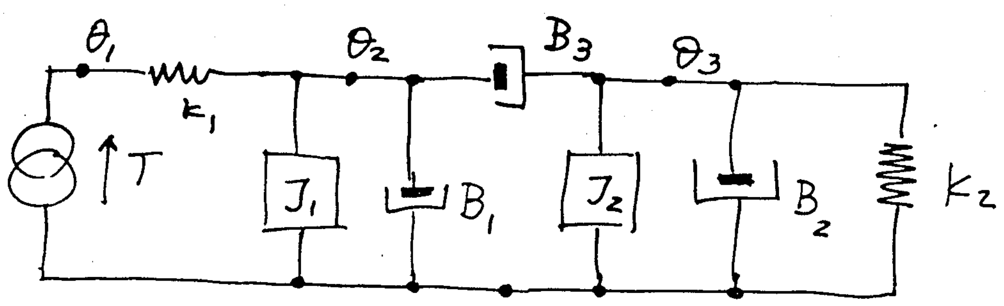
$$\begin{array}{l} d = 0 \\ K = \infty \end{array} \longrightarrow \theta_m = \theta_L$$

$$(J_L + J_m)\ddot{\theta}_m + (d_L + d_m)\dot{\theta}_m = T$$

EXEMPLO:



SISTEMA MECÂNICO ROTACIONAL



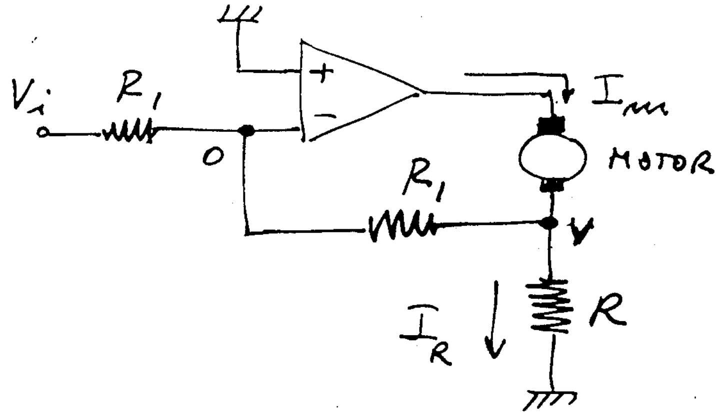
CIRCUITO MECÂNICO CORRESPONDENTE

$$
\begin{cases}
K_1\theta_1 - K_1\theta_2 = T \\
-K_1\theta_1 + \left[J_1 D^2 + (B_1+B_3)D + K_1\right]\theta_2 - B_3 D\theta_3 = 0 \\
-B_3 D\theta_2 + \left[J_2 D^2 + (B_2+B_3)D + K_2\right]\theta_3 = 0
\end{cases}
$$

ANALOGIA ELÉCTRICA E MECÂNICA

MECÂNICO		ELÉCTRICO	
SÍMBOLO	VARIÁVEL	SÍMBOLO	VARIÁVEL
f	FORÇA	i	CORRENTE
$v = \dot{x}$	VELOCIDADE	e, v	TENSÃO
M	MASSA	C	CAPACIDADE
K	COEFICIENTE DE RIGIDEZ	$1/L$	INVERSO DA INDUTÂNCIA
B	COEFICIENTE DE VISCOSIDADE	$G = 1/R$	CONDUTÂNCIA

EXEMPLO



SISTEMA DE CONTROLO DE BINÁRIO

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{V_i}{R_1} = -\dfrac{V}{R_1} \Rightarrow V = -V_i \\[2ex] I_m - \dfrac{V}{R_1} = \dfrac{V}{R} \end{array}\right\} I_m = -V_i\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)$$

SE: $V_i = -R\,I_d$ (I_d - CORRENTE DESEJADA)

$R_1 >> R$

VEM:

$$I_m = \left(1 + \frac{R}{R_1}\right) I_d \approx I_d$$

3. Análise de Sistemas em Malha Aberta no Domínio dos Tempos

Neste capítulo estuda-se o comportamento de um sistema descrito por uma equação diferencial linear de coeficientes constantes, do tipo:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m u$$

onde $m \leq n$.

Para esta equação diferencial resulta uma função de transferência (considerando as condições iniciais nulas) da forma:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

As raízes do numerador chamam-se zeros.
As raízes do denominador chamam-se pólos.

Se $m > n$ diz-se que a função de transferência é imprópria.
Se $m \leq n$ diz-se que a função de transferência é própria.

3.2 Função de Transferência e Integral de Convolução

A descrição de um sistema através da sua função de transferência é denominada de descrição paramétrica porque a função de transferência é especificada por um número finito de números.

Outro tipo de descrição é a não-paramétrica. A resposta impulsional do sistema cai nesta categoria:

- A resposta temporal $w(t)$, $t \in \mathbb{R}$, do sistema para um impulso de Dirac $\delta(t)$, aplicado em $t=0$. Neste caso, a transformada de Laplace da resposta é igual à função de transferência pois $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

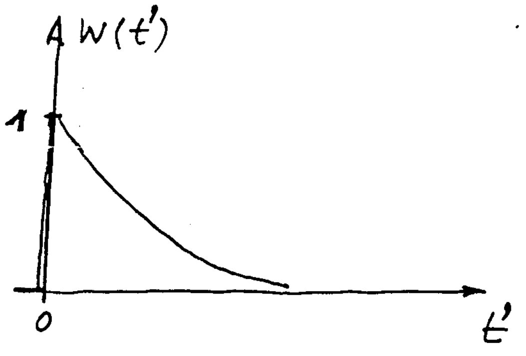
Pelo teorema da convolução da transformada de Laplace, a resposta $y(t)$ a uma entrada $u(t)$ aplicada em $t=0$ é dada por:

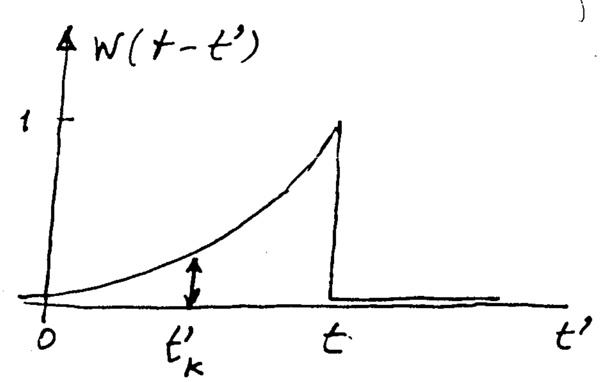
$$y(t) = \int_0^t w(t-t')\, u(t')\, dt'$$

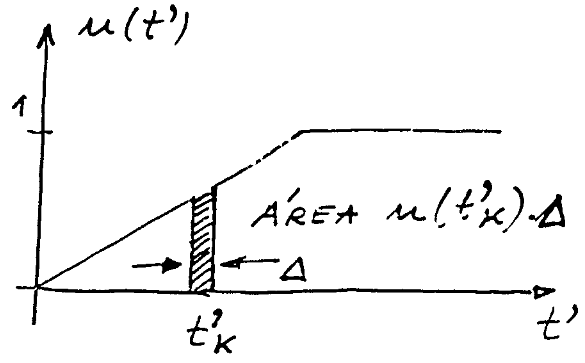
Obviamente $y(t) = 0$, $t < 0$.

Esta expressão não é atractiva para cálculos manuais, mas é adequada a uma simulação computacional, tanto mais que $w(t)$ é fácil de obter.

A figura seguinte proporciona uma interpretação do teorema.







- O SISTEMA É "CAUSAL", I.E. A RESPOSTA NO INSTANTE t NÃO DEPENDE DE VALORES FUTUROS DA ENTRADA.

- O SISTEMA TEM "MEMÓRIA" POIS A RESPOSTA NO INSTANTE t DEPENDE DOS VALORES PASSADOS DA ENTRADA

- A MEMÓRIA DO SISTEMA É UM "FACTOR DE ESQUECIMENTO". A ENTRADA NO INSTANTE $t'_k < t$ CONTRIBUI PARA A RESPOSTA NO INSTANTE t ATRAVÉS DO FACTOR $w(t-t'_k)$. À MEDIDA QUE SE CAMINHA PARA O PASSADO ESTE FACTOR TENDE PARA ZERO:

$$y(t) \approx \sum_{k=1}^{n} w(t-t'_k)\, u(t'_k)\,\Delta \quad , \quad \Delta = \frac{t}{n}$$

3.3. Análise da Resposta Transitória de Sistemas de Primeira e de Segunda Ordem

A importância dos sistemas de primeire e segunda ordem reside no facto de:

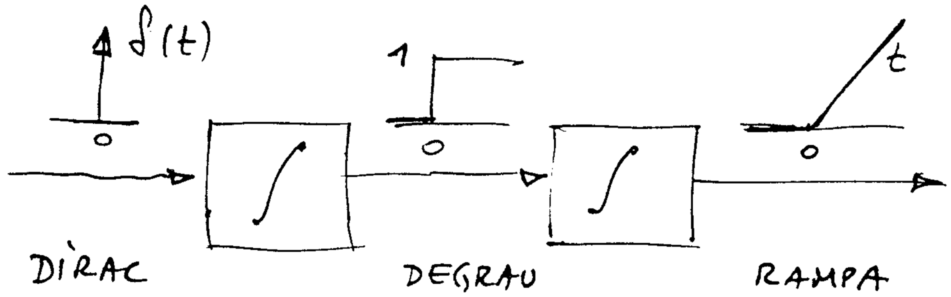
- Constituirem os blocos fundamentais de sistemas de ordem mais elevada.
- Constituírem uma boa aproximação para a maioria dos casos.

Dada a impossibilidade de analizar a resposta do sistema para todos os tipos de entradas só se estuda a resposta às entradas:
- impulso de Dirac,
- degrau unitário.
- rampa unitária.

A experiência demonstra que estas entradas simulam satisfactoriamente as situações que ocorrem com mais frequência na prática.

Como os sistemas em estudo são lineares, em princípio basta estudar a resposta a um destes sinais.
Se u produz a resposta y, então o sinal du/dt produz a resposta dy/dt e o sinal $\int u\,dt$ produz a resposta $\int y\,dt$.

Note-se que:



3.3.1. Sistemas de Primeira Ordem

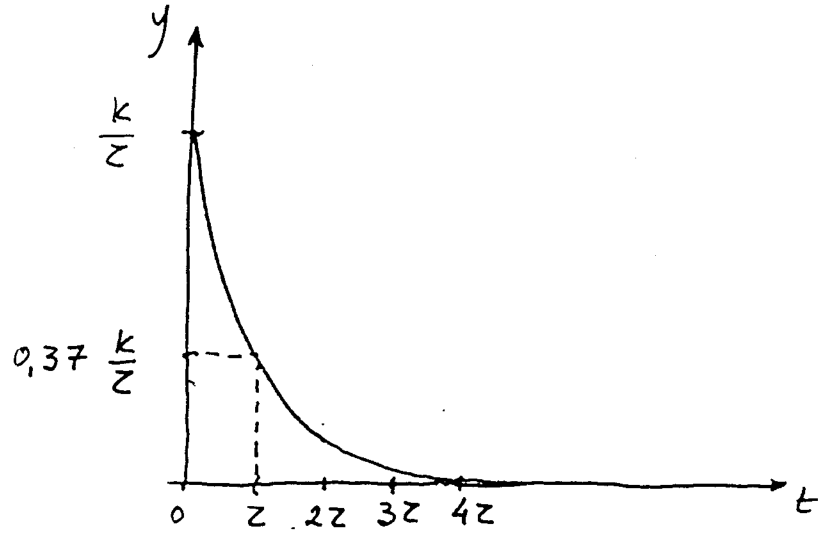
Estes sistemas são descritos por uma equação diferencial linear:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = k u \iff \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}$$

3.3.1.1. Resposta ao Impulso de Dirac

Como $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ vem

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1} = \frac{k}{\tau} \cdot \frac{1}{s + 1/\tau} \Rightarrow y(t) = \frac{k}{\tau} e^{-t/\tau}$$



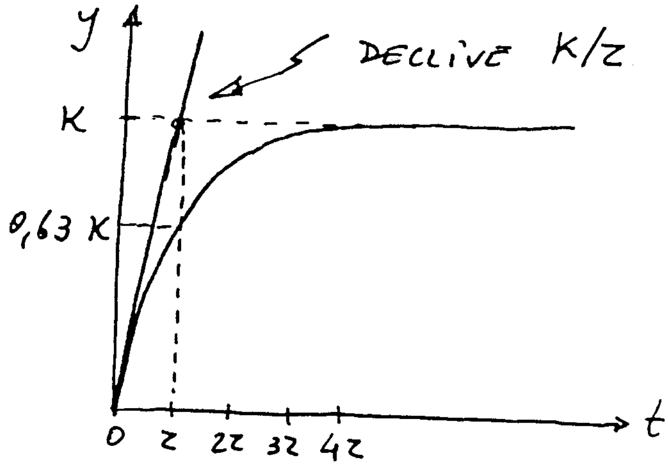
Para $t = \tau$ a resposta é aproximadamente 37% do valor máximo.

3.3.1.2. Resposta ao Degrau

Como $\mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$ vem:

$$Y(s) = \frac{k}{s(\tau s+1)} = k\left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s+1}\right) \Rightarrow y(t) = k\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Notar que o declive da tangente na origem é k/τ.
Para $t=\tau$ a resposta é 0,632 do valor final.
Para $t=4\tau$ a resposta é 0,982 do valor final.



Considera-se que em regime permanente a resposta atingiu o seu valor final quando está no intervalo de ±1,8 %.

Neste caso, o Tempo de Estabelecimento é $t_s = 4\tau$.

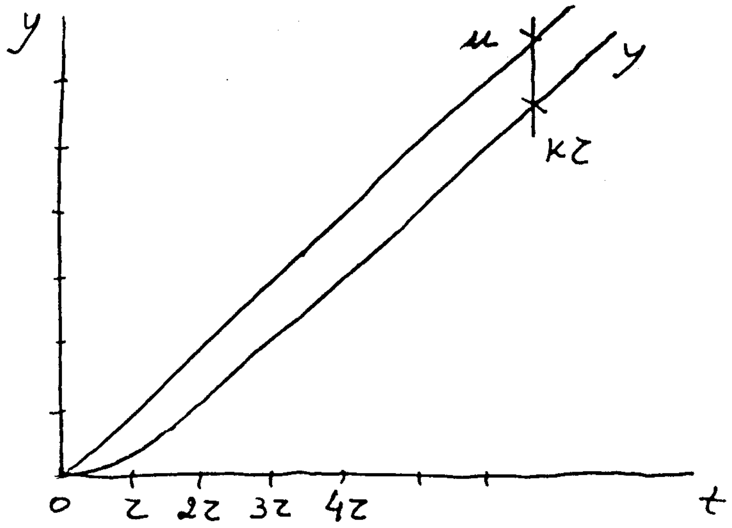
3.3.1.3. Resposta à Rampa

Para $\begin{cases} u(t)=0, & t<0 \\ u(t)=t, & t>0 \end{cases}$ vem $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s^2}$.

Logo, resulta:

$$Y(s) = \frac{K}{s^2(\tau s+1)} = K\left(\frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau^2}{\tau s+1}\right)$$

$$y(t) = K\left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau}\right), \quad t \geq 0$$



QUANDO $t \to \infty$, $y(t) \simeq K(t-\tau)$.

3.3.2. Sistemas de Segunda Ordem

UM SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM TEM UMA EQUAÇÃO DO TIPO

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi w_n \frac{dy}{dt} + w_n^2 y = w_n^2 u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

A RESPOSTA DO SISTEMA PODE SER DIVIDIDA EM TRÊS CATEGORIAS, DEPENDENDO DO VALOR DE ξ:

- SUBAMORTECIDA, $0 \leq \xi < 1$
- AMORTECIMENTO CRÍTICO, $\xi = 1$
- SOBREAMORTECIDA, $\xi > 1$

ANALISA-SE AGORA A RESPOSTA AO DEGRAU.

$$U(s) = 1/s$$

$$Y(s) = \frac{w_n^2}{s(s^2+2\xi w_n s + w_n^2)}$$

NO CÁLCULO DA TRANSFORMADA INVERSA PODEM OCORRES TRÊS CASOS:

- $0 \leq \xi < 1$

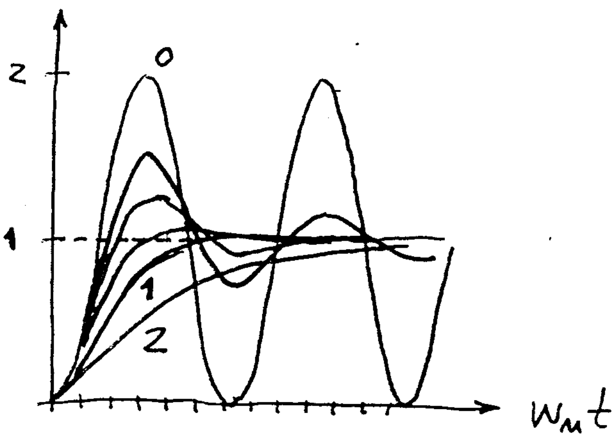
$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left[\sqrt{1-\xi^2}\, w_n t + \cos^{-1}\xi\right]$$

- $\xi = 1$

$$y(t) = 1 - e^{-w_n t}(1 + w_n t)$$

- $\xi > 1$

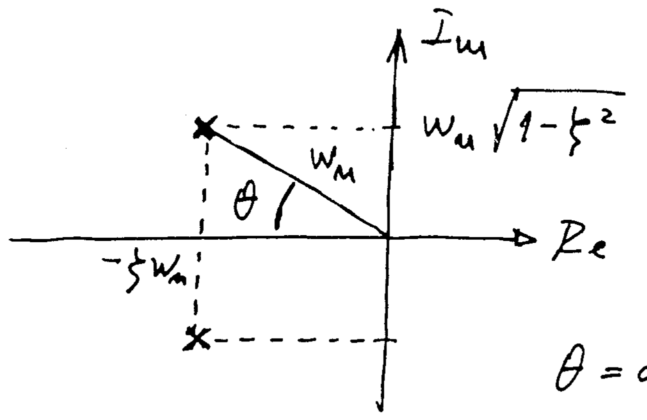
$$y(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left[\frac{e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})w_n t}}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}} - \frac{e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})w_n t}}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}\right]$$



A RESPOSTA É OSCILATÓRIA PARA $\xi < 1$ E MONÓTONA CRESCENTE PARA $\xi \geq 1$.

QUANDO $0 \leq \xi < 1$ A RESPOSTA É OSCILATÓRIA E OS PÓLOS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA SÃO:

$$-\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1-\xi^2}$$



$$\theta = \arccos \xi$$

A PARTE REAL DOS PÓLOS É A RAZÃO DE DECAIMENTO E A PARTE IMAGINÁRIA É A FREQUÊNCIA DE OSCILAÇÃO $w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2}$.

NOTE-SE QUE $w_d \leq w_n$ E QUE $w_d = w_n$ PARA $\xi = 0$.
DESIGNA-SE

w_n - FREQUÊNCIA NATURAL NÃO-AMORTECIDA
w_d - FREQUÊNCIA AMORTECIDA

QUANDO $0 \leq \xi < 1$ TEM PARTICULAR INTERESSE O VALOR MÁXIMO DE $y(t)$ E O INSTANTE t_p PARA O QUAL OCORRE.
CALCULANDO A DERIVADA DE $y(t)$ E IGUALANDO A ZERO VEM:

$$t_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} \quad , \quad y(t_p) = 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

DEFININDO SOBREELONGAÇÃO (OVERSHOOT) DA RESPOSTA:

$$M_p = \frac{\text{VALOR MÁXIMO} - \text{VALOR FINAL}}{\text{VALOR FINAL}}$$

VEM:

$$M_p = e^{-\frac{\xi \cdot \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

SE A RESPOSTA $y(t)$ FOR OSCILATÓRIA ($0 \leq \xi < 1$) AS EXPRESSÕES DE t_p E $y(t_p)$ PERMITEM IDENTIFICAR OS PARÂMETROS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA (ξ, w_n).

PARA A RESPOSTA $y(t)$ ESTAR NO INTERVALO DE $\pm 1,8\%$ DO VALOR FINAL, É NECESSÁRIO UM TEMPO DE ESTABELECIMENTO (SETTLING TIME) DE:

$$t_s = \frac{4}{\xi w_n}$$

OUTRA CARACTERÍSTICA IMPORTANTE É O TEMPO DE SUBIDA t_r (RISE TIME) DEFINIDO COMO O TEMPO NECESSÁRIO À RESPOSTA SUBIR DE 10% A 90% DO VALOR FINAL.

APESAR DE NÃO EXISTIR UMA EXPRESSÃO ANALÍTICA PARA t_r, A FÓRMULA SEGUINTE CONSTITUI UMA BOA APROXIMAÇÃO:

$$t_r \approx \frac{\exp(\theta / \tan\theta)}{w_n}, \qquad \theta = \cos^{-1}\xi$$

3.4. Sistemas de Ordem Elevada

A resposta de sistemas de ordem superior a dois pode ser obtida como uma combinação linear das respostas de ordem mais baixa. De facto, fazendo a expansão, em fracções simples, da função de transferência, vem:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = W(s) = b_0 + \frac{a_{11}}{s+p_1} + \cdots + \frac{a_{1k}}{(s+p_1)^k} + \cdots + \frac{a_{l1}}{s+p_l} + \cdots + \frac{a_{lm}}{(s+p_l)^m}$$

onde $-p_1, -p_2, \cdots, -p_l$ são pólos distintos de $W(s)$ com multiplicidades $k, \ldots, m$.

Cada parcela da expressão anterior contribui para a resposta impulsional $w(t)$ com uma parcela:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s+p)^m}\right\} = A\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{-pt}$$

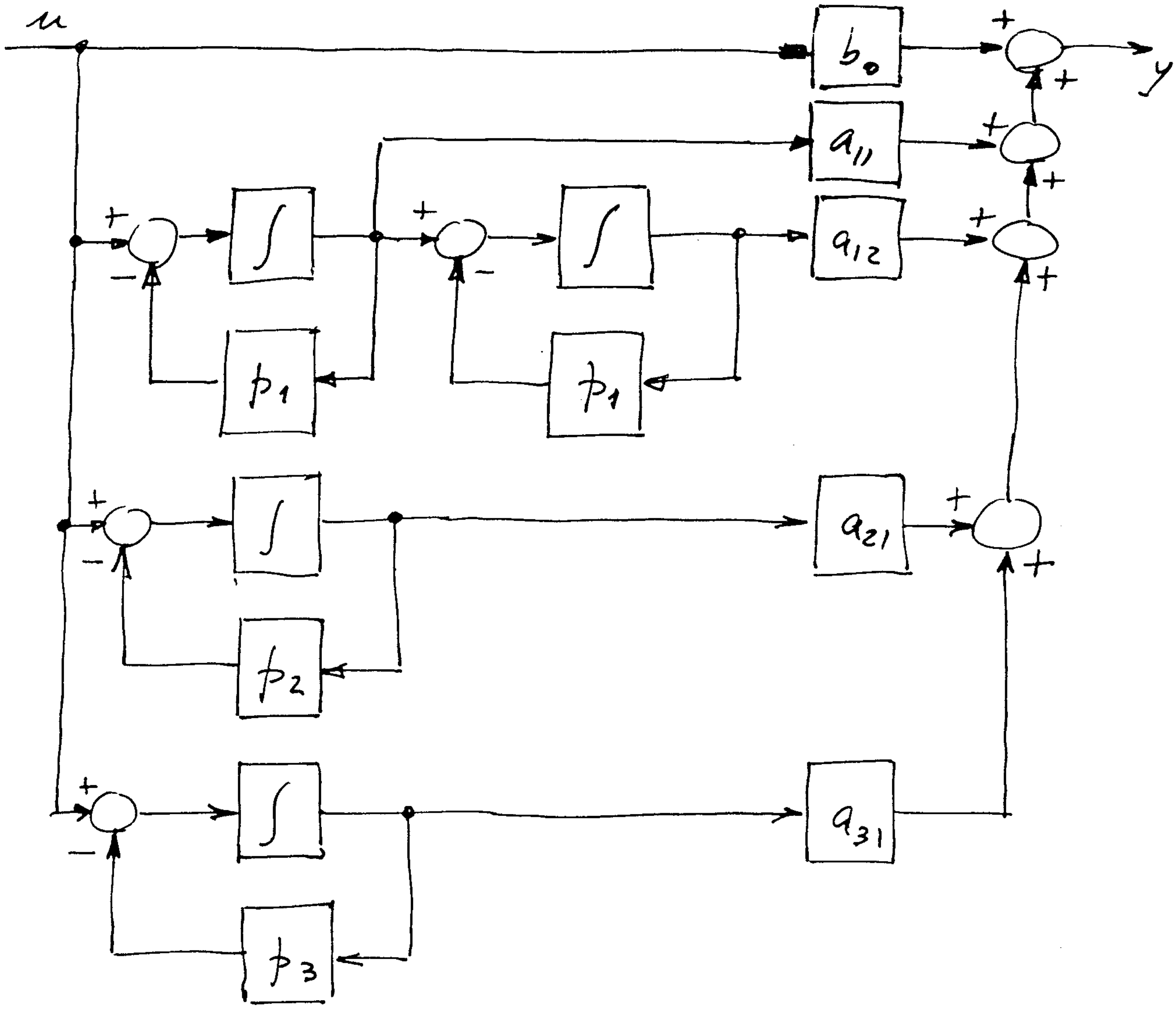
Se $Re(-p)<0$ a parcela tende para zero quando $t \to +\infty$ e quanto maior $|Re(-p)|$ mais rápida é essa convergência.

Isto significa que $w(t)$ é dominada pela contribuição dos pólos mais próximos da origem pois o transitório demora mais tempo a desaparecer.

As parcelas anteriores designam-se de **modos naturais** do sistema com função de transferência $W(s)$.

A partir da expressão é possível desenhar um diagrama de blocos e obter informação sobre a dinâmica do sistema por simples inspecção.

POR EXEMPLO, PARA $W(s) = b_0 + \frac{a_{11}}{s+p_1} + \frac{a_{12}}{(s+p_1)^2} + \frac{a_{21}}{s+p_2} + \frac{a_{31}}{s+p_3}$



SISTEMA COM TRÊS MODOS DISTINTOS.

QUANDO ALGUNS DOS PÓLOS SÃO NÚMEROS COMPLEXOS OS COEFICIENTES NO DIAGRAMA DE BLOCOS NÃO SÃO NÚMEROS REAIS. ESTE PROBLEMA PODE SER EVITADO AGRUPANDO O PAR DE PÓLOS COMPLEXOS CONJUGADOS:

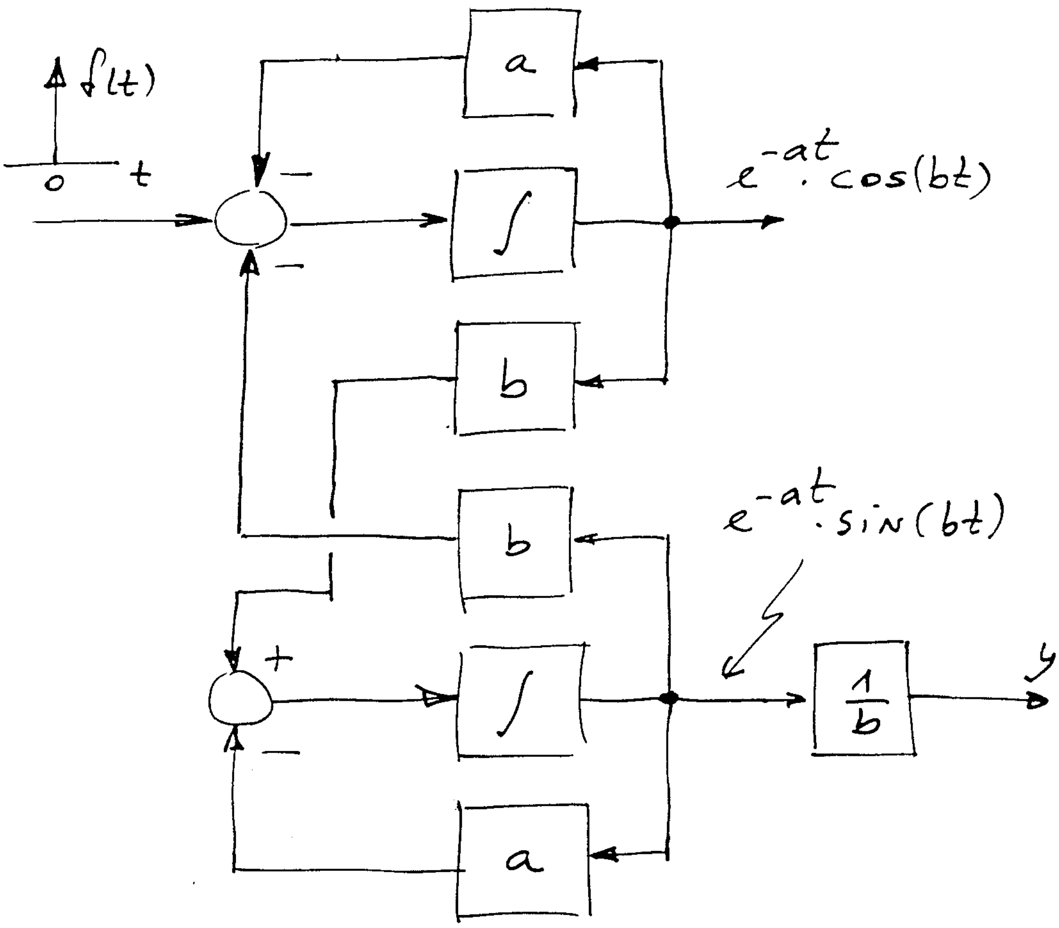
$$W(s) = \frac{1}{(s+p)(s+p^*)} \quad , \quad p = a + jb$$

$$W(s) = \frac{j}{2b}\left(\frac{1}{s+p} - \frac{1}{s+p^*}\right)$$

Logo:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \frac{j}{2b}\left[e^{-(a+jb)t} - e^{-(a-jb)t}\right]$$

$$= \frac{1}{b} e^{-at} \sin(bt)$$



3.5. O Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Um sistema define-se como estável quando uma entrada limitada produz uma saída limitada. Assim, conclui-se que uma função de transferência $W(s) = N(s)/D(s)$ é estável se, e somente se, todas as raízes do denominador $D(s)$ (i.e. os pólos de $W(s)$) tiverem parte real negativa.

O critério de Routh-Hurwitz é um critério algébrico que mostra se um dado polinómio tem raízes com parte real negativa ou positiva.

Comece-se por obter a condição necessária para um polinómio ter todas as raízes com parte real negativa.

Seja:

$$\begin{aligned} D(s) &= s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = \\ &= (s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_n) = \\ &= s^n - (r_1 + r_2 + \cdots + r_n) s^{n-1} + \\ &\quad + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_2 r_3 + r_2 r_4 + \cdots) s^{n-2} - \\ &\quad - (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots r_2 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_5 + \cdots) s^{n-3} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + (-1)^n r_1 r_2 r_3 \cdots r_n \end{aligned}$$

- Se algumas raízes de $D(s)$ forem complexas, ocorrem em pares conjugados pois $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

- Da expressão anterior conclui-se que se todas as raízes de $D(s)$ tiverem parte real negativa então todos os coeficientes de $D(s)$ são positivos.

Por exemplo, $s^3 + 0s^2 + 3s + 1$ tem pelo menos uma raiz com parte real não-negativa pois o coeficiente de s^2 é 0.

PARA UM POLINÓMIO QUE SATISFAÇA A CONDIÇÃO NECESSÁRIA ANTERIOR, APLICA-SE O CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH-HURWITZ:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \dots$$

$$\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\
n-3 & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\
\vdots & \cdots & & & \\
0 & h_{n-1} & & &
\end{array}$$

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

...

O CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH-HURWITZ AFIRMA QUE SE OS COEFICIENTES DA PRIMEIRA COLUNA NÃO FOREM NULOS, ENTÃO O NÚMERO DE MUDANÇAS DE SINAL É IGUAL AO NÚMERO DE RAÍZES DE $D(s)$ COM PARTE REAL POSITIVA.

EXEMPLO: $D(s)=s^3+s^2+2s+20$ RAÍZES: $-2{,}814$; $0{,}907 \pm j2{,}507$

3	1	2
2	1	20
1	−18	0
0	20	

→ HÁ DUAS TROCAS DE SINAL NA PRIMEIRA COLUNA

⇓

O POLINÓMIO TEM DUAS RAÍZES COM PARTE REAL POSITIVA

DEVEM TER-SE EM ATENÇÃO OS CASOS ESPECIAIS

- SE UM TERMO DA PRIMEIRA COLUNA É ZERO E OS RESTANTES TERMOS DESSA LINHA SÃO NÃO-NULOS ENTÃO O ZERO DEVE SER SUBSTITUÍDO POR UM NÚMERO POSITIVO PEQUENO $\varepsilon > 0$ E OS RESTANTES VALORES CALCULADOS DE SEGUIDA

EXEMPLO: $D(s)=s^3+3s^2+s+3$ RAÍZES: -3; $\pm j$

3	1	1
2	3	3
1	$0 \simeq \varepsilon$	
0	3	

→ O SINAL DO COEFICIENTE ACIMA DE ε É IDÊNTICO AO DO COEFICIENTE ABAIXO

⇓

O POLINÓMIO TEM UM PAR DE RAÍZES IMAGINÁRIAS

EXEMPLO: $D(s)=s^3-3s+2$ RAÍZES: 1 (DUPLA); -2

3	1	−3
2	$0 \simeq \varepsilon$	2
1	$-3-2/\varepsilon$	
0	2	

→ HÁ DUAS TROCAS DE SINAL NA PRIMEIRA COLUNA

⇓

O POLINÓMIO TEM DUAS RAÍZES COM PARTE REAL POSITIVA.

- SE TODOS OS COEFICIENTES DE UMA LINHA FOREM ZERO ISSO INDICA QUE EXISTEM RAÍZES DE IGUAL AMPLITUDE MAS DE SINAL OPOSTO. NESSE CASO, O CÁLCULO PODE PROSSEGUIR ATRAVÉS DE UM POLINÓMIO AUXILIAR FORMADO COM OS COEFICIENTES DA LINHA ANTERIOR. ENTÃO, A LINHA DE ZEROS É SUBSTITUÍDA PELOS COEFICIENTES DA DERIVADA DESSE POLINÓMIO.

EXEMPLO: $D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50$

RAÍZES: $\pm 1, \pm j5, -2$

5	1	24	-25
4	2	48	-50
3	0	0	
⋮	⋮	⋮	

POLINÓMIO AUXILIAR $P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$

$P'(s) = 8s^3 + 96s$

5	1	24	-25
4	2	48	-50
3	8	96	
2	24	-50	
1	112,7	0	
0	-50		

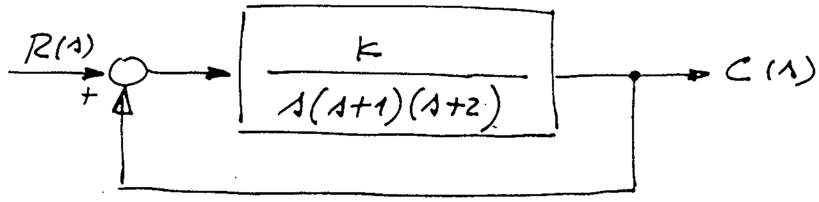
HÁ UMA TROCA DE SINAL

$\Downarrow$

O POLINÓMIO TEM UMA RAÍZ COM PARTE REAL POSITIVA

O CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ É ÚTIL NO CÁLCULO DE INTERVALOS DE VARIAÇÃO ADMISSÍVEIS PARA CERTOS PARÂMETROS.

EXEMPLO:



CALCULAR O INTERVALO DE VALORES DE K PARA OS QUAIS O SISTEMA PERMANECE ESTÁVEL.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^3+3s^2+2s+K}$$

3	1	2
2	3	K
1	$(6-K)/3$	0
0	K	

PARA NÃO OCORREREM TROCAS DE SINAIS $\Rightarrow$ $0 < K < 6$

3.6 O EFEITO DOS ZEROS NA RESPOSTA AO DEGRAU

VIU-SE ANTERIORMENTE QUE:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{a_{11}}{s+p_1} + \cdots + \frac{a_{1m}}{(s+p_1)^m} + \cdots + \frac{a_{l1}}{s+p_l} + \cdots + \frac{a_{lm}}{(s+p_l)^m}$$

OS ZEROS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA NÃO INFLUENCIAM A ESTABILIDADE QUE FICA DETERMINADA SOMENTE PELOS PÓLOS.

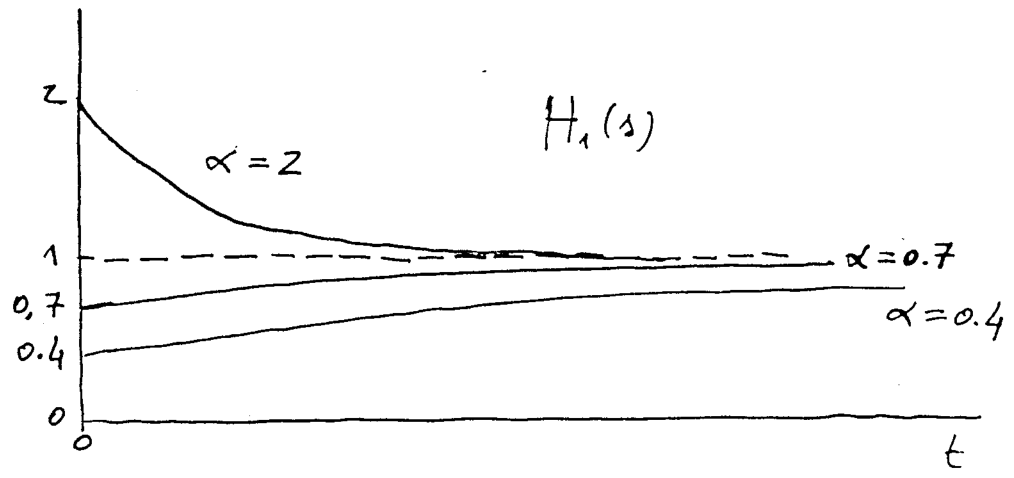
CONTUDO, OS FACTORES a_{ij} NA DECOMPOSIÇÃO DEPENDEM DOS ZEROS DE $W(s)$.

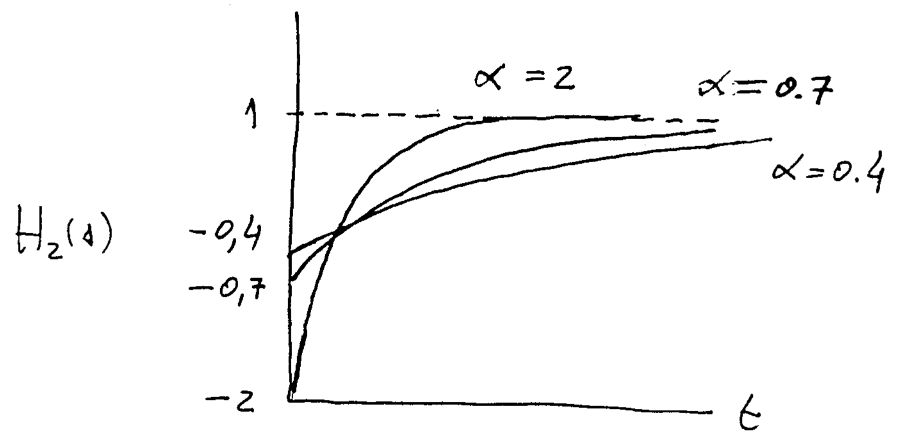
VAMOS AGORA ANALISAR O EFEITO DE UM ZERO ADICIONAL EM SISTEMAS DE PRIMEIRA E DE SEGUNDA ORDEM.

PARA UM SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA VEM

$$H_1(s) = \alpha \frac{s+1}{s+\alpha} \quad ; \quad H_2(s) = \alpha \frac{1-s}{s+\alpha}$$

PARA UMA ENTRADA EM DEGRAU VEM:



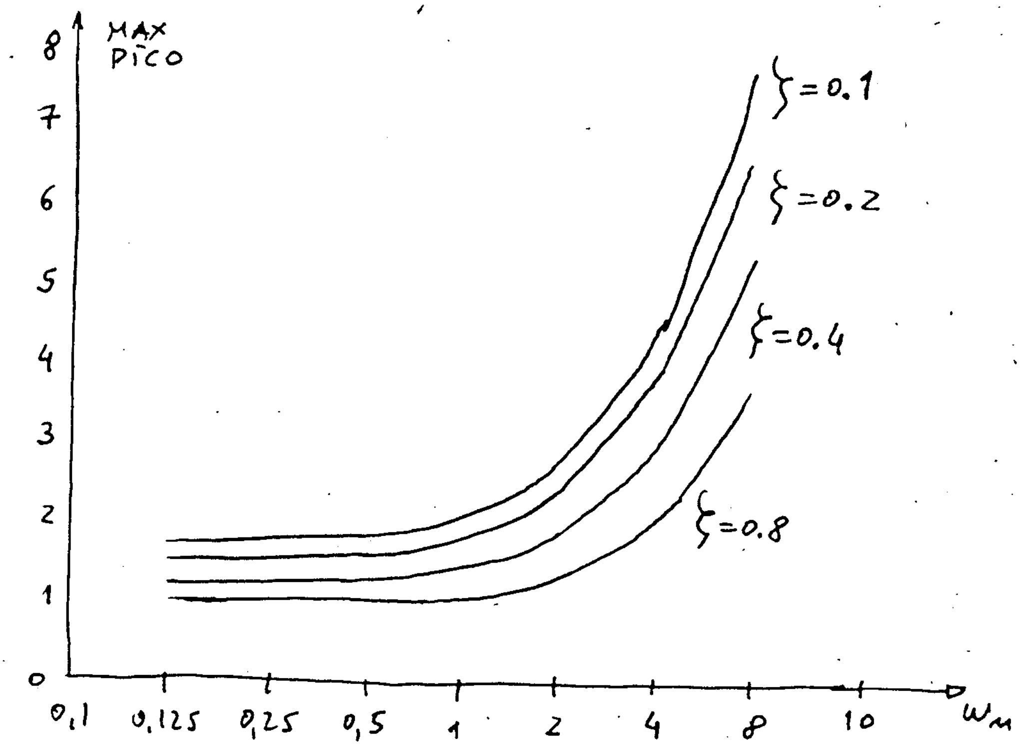


PARA $H_2(s)$, A PRESENÇA DE UM ZERO NO SEMIPLANO DIREITO ORIGINA UMA RESPOSTA DO "TIPO INVERSO", PORQUE COMEÇA NO SENTIDO INVERSO DA ENTRADA.

PARA UM SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA VEM

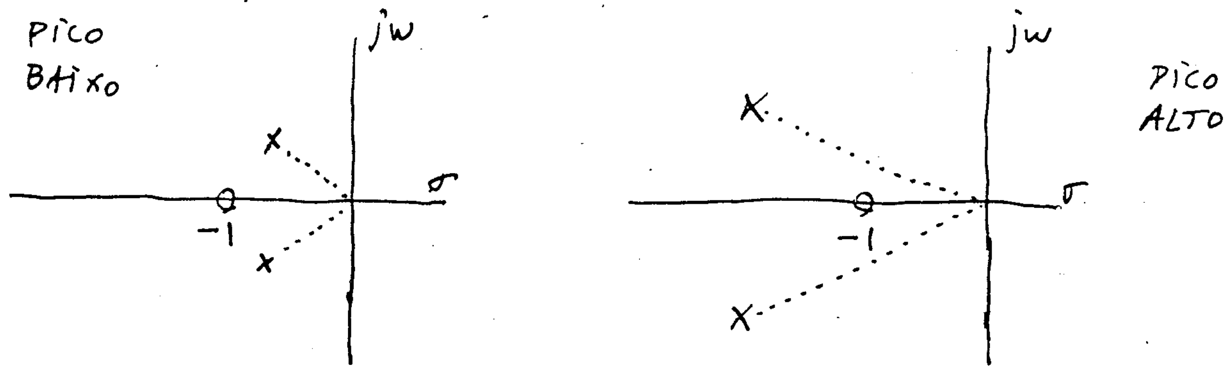
$$H(s) = \frac{w_n^2(1+s)}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

PARA A ENTRADA EM DEGRAU A MÁXIMA SOBRE-ELONGAÇÃO E O TEMPO DE PICO VÊM:



PARA UM SISTEMA SEM ZERO AS CURVAS SERIAM RECTAS HORIZONTAIS.

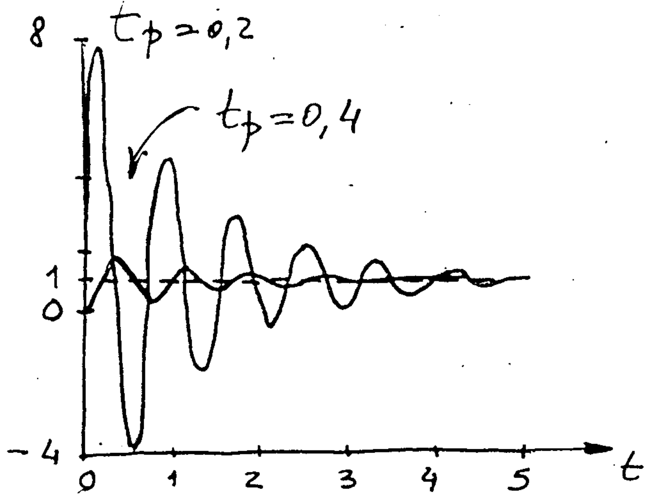
A SOBRE-ELONGAÇÃO AUMENTA COM A RAPIDEZ DO SISTEMA, ISTO É QUANDO w_n AUMENTA E ξ DIMINUI.



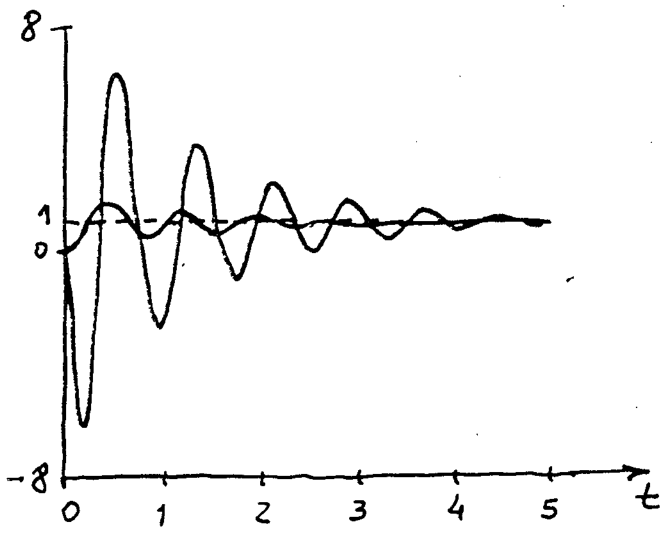
O TEMPO DE PICO t_p VARIA POUCO PARA UM SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM COM E SEM ZERO. DE FACTO, AS MUDANÇAS SÓ SÃO SIGNIFICATIVAS PARA VALORES ELEVADOS DE w_m, CONFORME SE PODE VER PELA FIGURA.

RESPOSTA AO DEGRAU UNITÁRIO DE SISTEMAS COM FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ($\zeta = 0.1$, $w_n = 8$):

$$H(s) = \frac{64(1+s)}{s^2+1{,}6s+64} \qquad H'(s) = \frac{64}{s^2+1{,}6s+64}$$



PARA O CASO DE UM ZERO NO SEMIPLANO DIREITO OCORRE UMA SUB-ELONGAÇÃO (UNDERSHOOT) NA RESPOSTA.



$$H''(s) = \frac{64(1-s)}{s^2+1{,}6s+64}$$

EXERCÍCIO: CONSIDERE A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

$$s^4 + k s^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

DETERMINAR OS VALORES DE K PARA OS QUAIS O SISTEMA É ESTÁVEL.

RESOLUÇÃO

s^4	1	1	1
s^3	k	1	0
s^2	$\frac{k-1}{k}$	1	0
s^1	$1 - \frac{k^2}{k-1}$	0	
s^0	1		

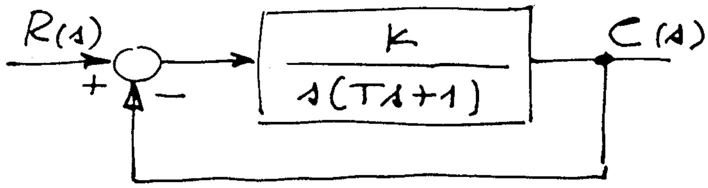
PARA O SISTEMA SER ESTÁVEL É NECESSÁRIO QUE:

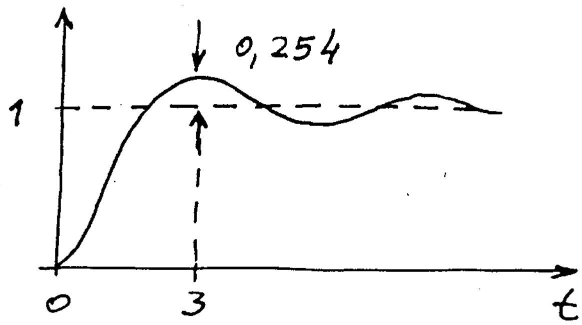
$$\begin{cases} k > 0 \\ \frac{k-1}{k} > 0 \\ 1 - \frac{k^2}{k-1} > 0 \end{cases}$$

k	$-\infty$		0		1		$+\infty$
k		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{k-1}{k}$		$+$	∞	$-$	0	$+$	
$1 - \frac{k^2}{k-1}$		$+$	|	$+$	∞	$-$	

As três condições nunca se verificam simultaneamente, pelo que o sistema nunca é estável.

EXERCÍCIO: CONSIDERE O SISTEMA REPRESENTADO NA FIGURA. PARA UMA ENTRADA $u(t)$ EM DEGRAU UNITÁRIO OBTÉM-SE A RESPOSTA $c(t)$ REPRESENTADA. DETERMINE OS VALORES DE K E T.





RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 3 \\[2ex] M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0,254 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{———} \\[2ex] \xi = 0,400 \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_n = 1,14 \text{ rad/s} \\[2ex] \text{———} \end{cases}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{K}{s(Ts+1)}}{1 + \dfrac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{K/T}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}}$$

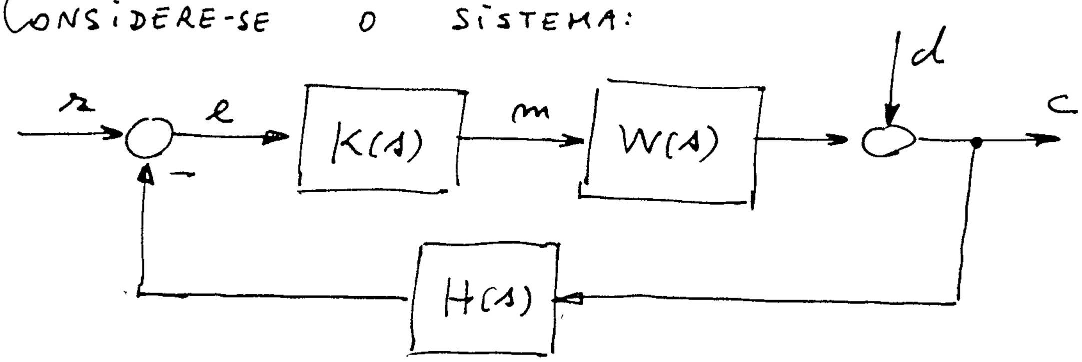
$$\begin{cases} \dfrac{K}{T} = \omega_n^2 \\[2ex] \dfrac{1}{T} = 2\xi\omega_n \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{———} \\[2ex] T = 1,096 \text{ seg} \end{cases} \qquad \begin{cases} K = 1,425 \\[2ex] \text{———} \end{cases}$$

4. Análise de Sistemas Realimentados no Domínio dos Tempos

4.1 Álgebra dos Diagramas de Blocos

4.2. Análise em Regime Permanente

Considere-se o sistema:



$$C(s) = \frac{K(s)\,W(s)}{1 + K(s)\,W(s)\,H(s)}\,R(s) + \frac{1}{1 + K(s)\,W(s)\,H(s)}\,D(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + K(s)\,W(s)\,H(s)}\left(R(s) - H(s)\,D(s)\right)$$

Por exemplo, considere-se que:

$K(s) = K$ (controlador proporcional)

$W(s) = \frac{1}{s+1}$, $H(s) = 1$

$d = 0$

e que para $t=0$ é aplicado um degrau na entrada, tal que:

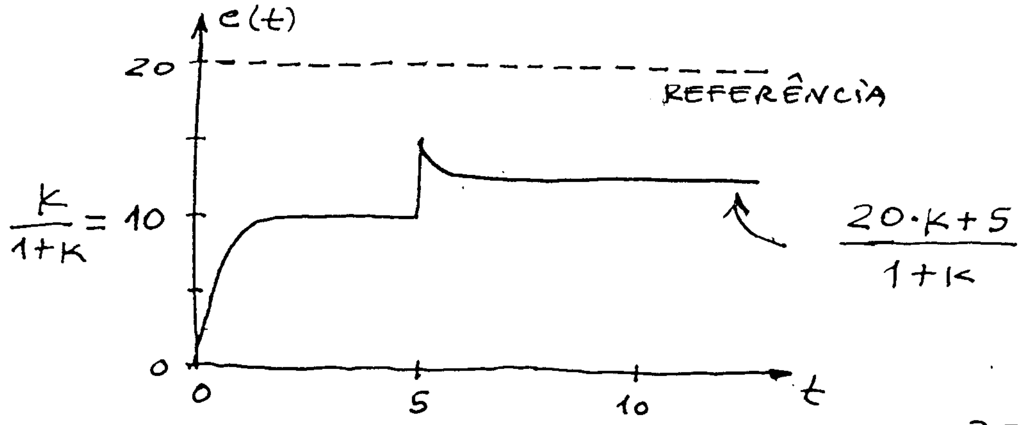
$$r(t) = 20 \cdot u(t) \longrightarrow R(s) = \frac{20}{s}$$

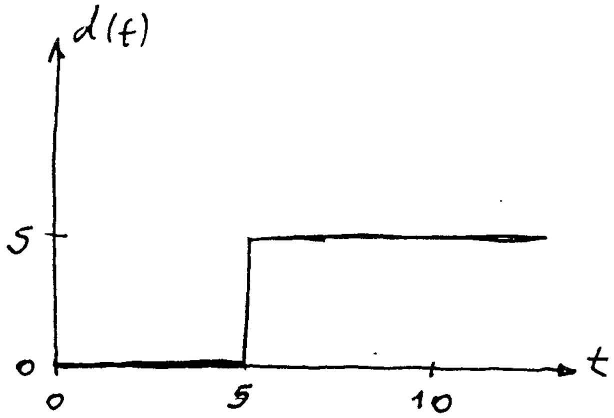
PELO TEOREMA DO VALOR FINAL O VALOR DO ERRO E DA SAÍDA EM REGIME PERMANENTE (STEADY STATE):

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{20}{s} \, \frac{1}{1 + K/(s+1)} \right]$$

$$c_{ss} = \lim_{t \to \infty} c(t) = \lim_{s \to 0} sC(s) = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{20}{s} \cdot \frac{K/(s+1)}{1 + K/(s+1)} \right]$$

$$\therefore \quad e_{ss} = \frac{20}{1+K} \, , \qquad c_{ss} = 20 \, \frac{K}{1+K}$$





RESPOSTA A UMA PERTURBAÇÃO $d(t) = 5 \cdot u(t-5)$ PARA UM CONTROLADOR $K = 1$.

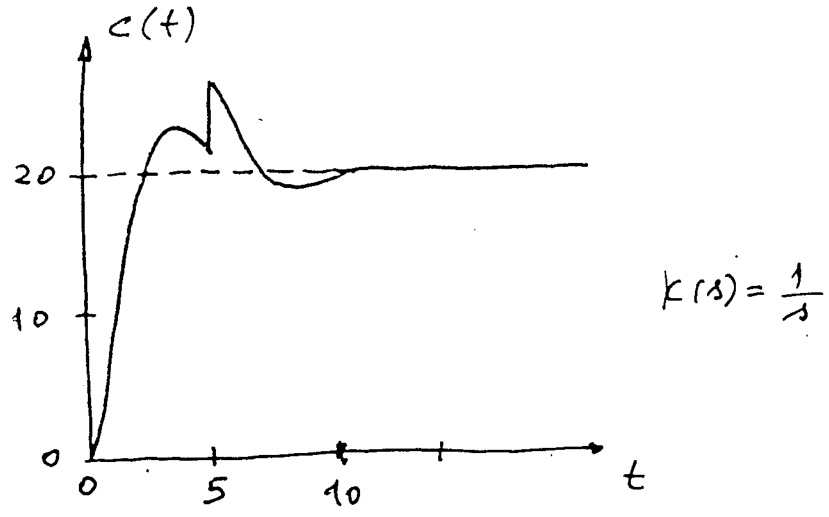
- O ERRO DEPENDE DA AMPLITUDE DA PERTURBAÇÃO $d(t)$
- QUANTO MAIOR O VALOR DO GANHO K MENOR O ERRO. CONTUDO, EXISTEM LIMITAÇÕES PARA O VALOR DE K.

UMA ALTERNATIVA CONSISTE EM ADOPTAR UM CONTROLADOR INTEGRAL:

$$K(s) = \frac{K}{s} \Rightarrow u(t) = K\int_0^t e(t')\,dt'$$

NESTE CASO, A SAÍDA DO CONTROLADOR SÓ PÁRA QUANDO O ERRO É NULO.

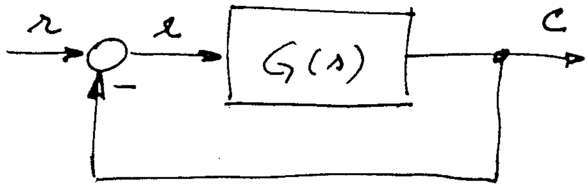
A FIGURA SEGUINTE MOSTRA O EFEITO DA INTRODUÇÃO DE UM CONTROLADOR INTEGRAL. O ERRO EM REGIME PERMANENTE e_{ss} É ELIMINADO (COM OU SEM PERTURBAÇÃO).



DE SEGUIDA ANALISA-SE A RESPOSTA EM REGIME PERMANENTE AO DEGRAU UNITÁRIO, À RAMPA E À PARÁBOLA, PARA UM SISTEMA COM REALIMENTAÇÃO UNITÁRIA (i.e. $H(s)=1$).

AO CONTRÁRIO DO QUE SE VERIFICOU PARA A RESPOSTA TRANSITÓRIA, QUE É DETERMINADA PELA ORDEM DO SISTEMA, A RESPOSTA EM REGIME PERMANENTE DEPENDE SOMENTE DO NÚMERO DE PÓLOS NA ORIGEM DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA ABERTA (i.e. DO TIPO DE SISTEMA).

CONSIDERE-SE $G(s) = K(s)\,W(s)$, $H(s)=1$, $d=0$.



$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{s\,R(s)}{1+G(s)}$$

4.2.1. REFERÊNCIA: DEGRAU UNITÁRIO $R(s) = 1/s$

PARA:

$$G(s) = \frac{K(1+b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m)}{s^l(1+a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n)}$$

COM: $l \geq 0$, $l+n \geq m$, ENTÃO:

$$\lim_{s\to 0} G(s) = \begin{cases} K & , \text{ SE } l=0 \\ \infty & , \text{ SE } l \geq 1 \end{cases}$$

ESTE LIMITE DESIGNA-SE POR COEFICIENTE DE ERRO ESTÁTICO DE POSIÇÃO:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)$$

RESULTANDO:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\cdot\frac{1}{s}}{1+G(s)} = \frac{1}{1+K_p} = \begin{cases} \frac{1}{1+K} & , \text{ SE } l=0 \\ 0 & , \text{ SE } l \geq 1 \end{cases}$$

4.2.2. Referência: Rampa Unitária $R(s) = 1/s^2$

Neste caso:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s\,(1/s^2)}{1 + G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s\,G(s)}$$

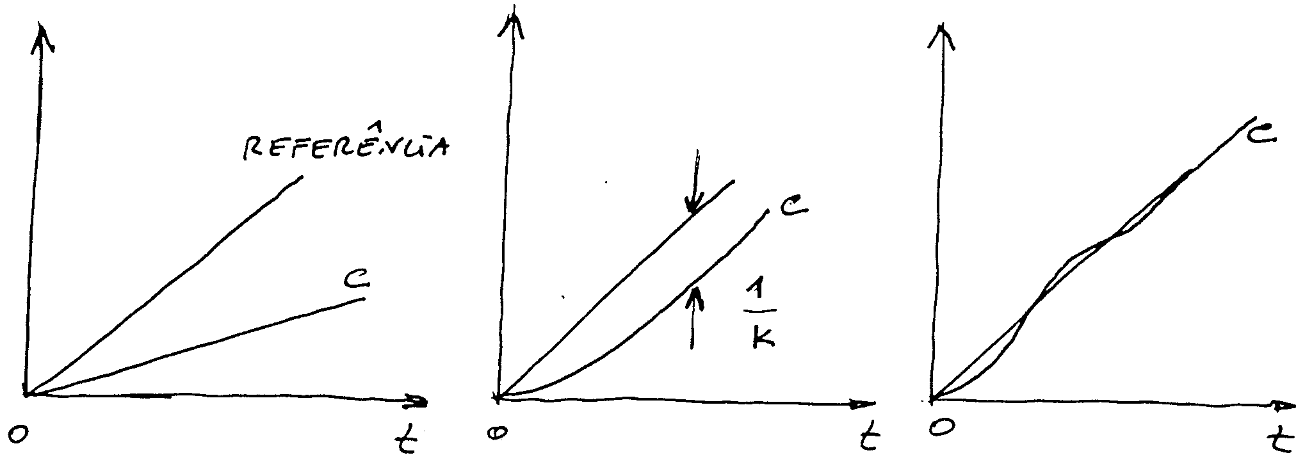
Define-se Coeficiente de Erro Estático de Velocidade

$$K_V = \lim_{s \to 0} s\,G(s)$$

$$\lim_{s \to 0} s\,G(s) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \ell = 0 \\ K & , \text{ se } \ell = 1 \\ \infty & , \text{ se } \ell \geq 2 \end{cases}$$

Resultando:

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty & , \text{ se } \ell = 0 \\ 1/K & , \text{ se } \ell = 1 \\ 0 & , \text{ se } \ell \geq 2 \end{cases}$$



Sistema tipo zero

Sistema tipo um

Sistema tipo dois (ou superior)

4.2.3. Referência: Parábola $R(s) = 1/s^3$

Para $r(t) = \frac{1}{2} t^2$, $R(s) = \frac{1}{s^3}$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s(1/s^3)}{1 + G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

Define-se Coeficiente de Erro Estático de Aceleração

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

$$K_a = \begin{cases} 0, & \text{se } l = 0, 1 \\ K, & \text{se } l = 2 \\ \infty, & \text{se } l \geq 3 \end{cases} \rightarrow e_{ss} = \begin{cases} \infty, & l = 0, 1 \\ 1/K, & l = 2 \\ 0, & l \geq 3 \end{cases}$$

Erro em regime permanente para um sistema estável

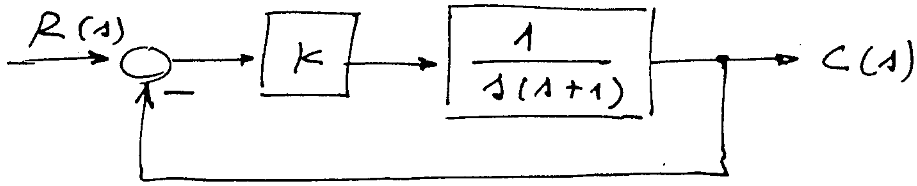
Sinal de Referência	Tipo $l=0$	de $l=1$	sistema $l=2$	$l \geq 3$
Degrau	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0	0
Rampa	∞	$1/K_v$	0	0
Parábola	∞	∞	$1/K_a$	0

Adicionar integradores ao controlador melhora a resposta em regime permanente mas degrada a estabilidade.

4.3. O MÉTODO DO LUGAR DE RAÍZES

NESTA SECÇÃO DESENVOLVE-SE UM CONJUNTO DE REGRAS PARA ESBOÇAR O LUGAR GEOMÉTRICO DOS PÓLOS DE $C(s)/R(s)$, PARA $K \in [0, +\infty[$ SEM RESOLVER A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA.

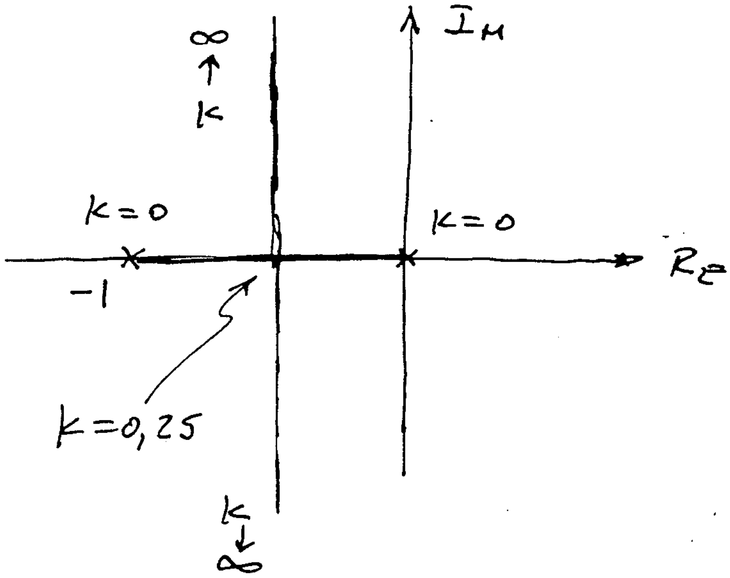
EXEMPLO 1



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2+s+K}$$

PARA $0 \leq K \leq 0{,}25$ A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA TEM UM PAR DE PÓLOS DADOS POR $-1 \pm \sqrt{1-4K}$

PARA $K > 0{,}25$ OS PÓLOS SÃO COMPLEXOS CONJUGADOS DA FORMA $-0{,}5 \pm j\sqrt{4K-1}/2$.



O LUGAR DE RAÍZES (ROOT-LOCUS) MOSTRA NÃO SÓ OS VALORES DE K PARA OS QUAIS O SISTEMA É ESTÁVEL, MAS TAMBÉM PERMITE PREVER O DESEMPENHO EM MALHA FECHADA.

4.3.1. Construção do Lugar de Raízes (L.R)

Considere-se:

$$W(s)\,H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{d}(s-p_i)} \quad , \quad d \geq m$$

A função de transferência em malha fechada vem:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K\,W(s)}{1+K\,W(s)\,H(s)}$$

E a equação característica:

$$1 + K \cdot W(s) \cdot H(s) = 0 \iff D(s) + K\,N(s) = 0$$

tem d raízes. Estas raízes variam continuamente com K.

<u>Regra 1:</u> O número de ramos do lugar de raízes é igual ao número de pólos da função de transferência em malha aberta.

<u>Regra 2:</u> Os ramos do lugar de raízes são curvas contínuas.

Das equações anteriores, para um ponto s_0 do LR:

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(s_0 - z_i)}{\prod_{i=1}^{d}(s_0 - p_i)} = -\frac{1}{K}$$

ESTA EQUAÇÃO MOSTRA QUE PARA:

- VALORES PEQUENOS DE K, s_0 ESTÁ PERTO DE p_i
- VALORES ELEVADOS DE K, s_0 ESTÁ PERTO DE z_i OU $|s_0|$ É ELEVADO.

SE SE DEFINIR O INÍCIO DO LR NOS PONTOS ONDE $K=0$ OBTÉM-SE A REGRA:

REGRA 3: O LR COMEÇA NOS PÓLOS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA ABERTA E TERMINA OU NOS ZEROS OU NO INFINITO.

OS PÓLOS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA FECHADA SÃO RAÍZES DE UM POLINÓMIO COM COEFICIENTES REAIS, PELO QUE OCORREM AOS PARES CONJUGADOS NO CASO DE SEREM NÚMEROS COMPLEXOS.

REGRA 4: O LR É SIMÉTRICO RELATIVAMENTE AO EIXO REAL.

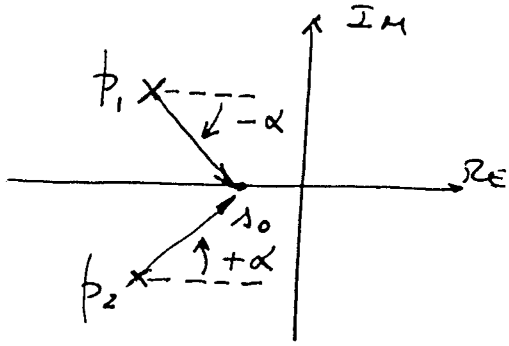
A EQUAÇÃO ANTERIOR:

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(s_0-z_i)}{\prod_{i=1}^{d}(s_0-p_i)} = -\frac{1}{K}$$

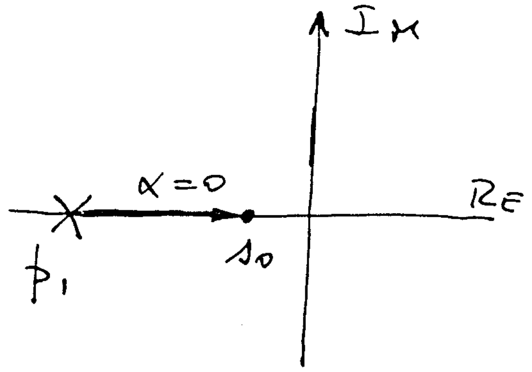
DEVE SATISFAZER A CONDIÇÃO ANGULAR:

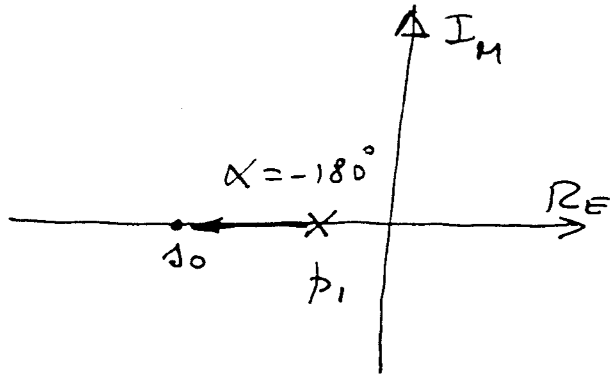
$$\sum_{i=1}^{m} \angle s_0 - z_i - \sum_{i=1}^{d} \angle s_0 - p_i = (2l+1)180°, \quad l=0,\pm1,\ldots$$

- SE s_0 PERTENCE AO EIXO REAL ENTÃO A CONTRIBUIÇÃO ANGULAR DE UM PAR DE PÓLOS, OU DE ZEROS, COMPLEXOS CONJUGADOS É NULA.



- SE OS PÓLOS, OU ZEROS, SE SITUAM À ESQUERDA DE s_0 ENTÃO A SUA CONTRIBUIÇÃO É NULA.
- SE OS PÓLOS (ZEROS) SE SITUAM À DIREITA DE s_0 ENTÃO A SUA CONTRIBUIÇÃO É $-180°$ $(+180°)$

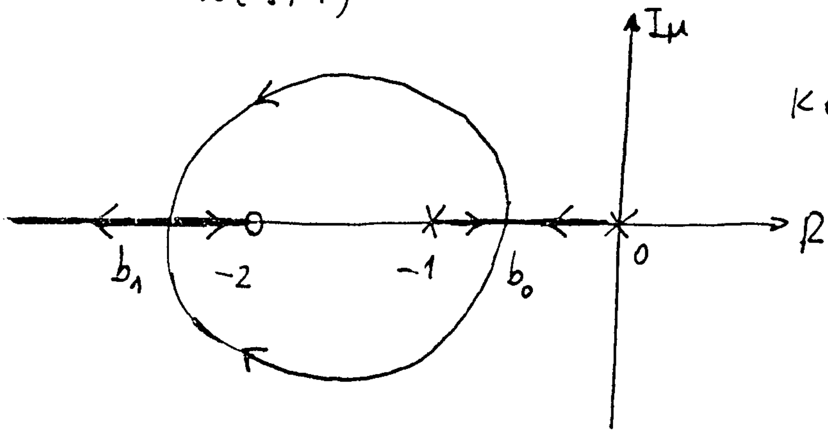




REGRA 5: UM PONTO s_0 NO EIXO REAL PERTENCE AO LR SE, E SOMENTE SE, O NÚMERO DE PÓLOS E ZEROS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA ABERTA (EM CIMA DO EIXO REAL) QUE SE SITUAM À DIREITA DE s_0 FOR UM NÚMERO ÍMPAR.

REGRA 6: OS PONTOS ONDE O LR SAI OU ENTRA NO EIXO REAL, SÃO PONTOS ONDE K, VISTO COMO FUNÇÃO DE $s \in \mathbb{R}$, ATINGE, RESPECTIVAMENTE UM MÁXIMO OU UM MÍNIMO. (PONTOS DE QUEBRA).

EXEMPLO: $H(s)\,W(s) = \dfrac{K(s+2)}{s(s+1)}$



$K \in [0, +\infty[$

- REGRA 5: $]-\infty, -2]$ E $[-1, 0]$ PERTENCEM AO LR.
- REGRA 3: O LR COMEÇA EM $-1+j0$ E $0+j0$ E ACABA EM $-2+j0$ E $-\infty+j0$.
- REGRA 6:

$$K = -\frac{s(s+1)}{s+2} \Rightarrow \frac{dK}{ds} = -\frac{s^2+4s+2}{(s+2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} s = -3{,}414 \leftarrow \text{PONTO } b_1 \\ s = -0{,}586 \leftarrow \text{PONTO } b_0 \end{array} \right.$$

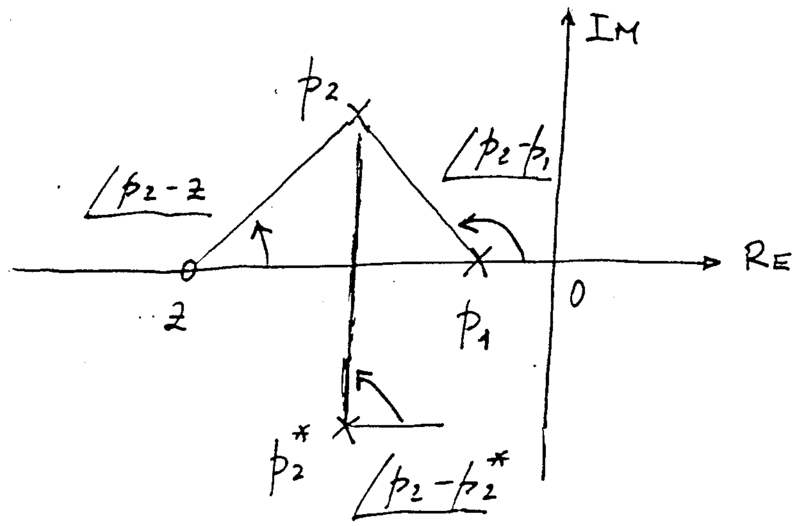
SUBSTITUINDO VEM:

PONTO $b_1 \rightarrow K = 5{,}828$
PONTO $b_0 \rightarrow K = 0{,}172$

LOGO, A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA FECHADA TEM RAÍZES REAIS PARA $K \in [0;\ 0.172] \cup [5{,}828;\ +\infty[$

QUANDO A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA TEM PÓLOS OU ZEROS COMPLEXOS É IMPORTANTE CONHECER A DIRECÇÃO SEGUNDO A QUAL O LR DEIXA O PÓLO COMPLEXO (ÂNGULO DE PARTIDA) OU ENTRA NO ZERO COMPLEXO (ÂNGULO DE CHEGADA).

POR EXEMPLO, CONSIDERE-SE: $H(s)\,W(s) = \dfrac{K(s-z)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_2^*)}$



CONSIDERE-SE UM PONTO PRÓXIMO DE p_2. NESSE CASO:

$s - z \approx p_2 - z \;,\; s - p_1 \approx p_2 - p_1 \;,\; s - p_2^* \approx p_2 - p_2^*$

SE s PERTENCE AO LR ENTÃO SERÁ:

$$\angle s - p_2 \approx (2l+1)180^\circ + \angle p_2 - z - \angle p_2 - p_1 - \angle p_2 - p_2^*$$

REGRA 7: SE OS EIXOS REAL E IMAGINÁRIO TIVEREM ESCALAS IDÊNTICAS, ENTÃO O ÂNGULO DA TANGENTE AO LR NO PÓLO (OU NO ZERO) DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA ABERTA PODE SER OBTIDO SOMANDO (SUBTRAINDO) AS CONTRIBUIÇÕES ANGULARES DOS ZEROS (DOS PÓLOS) E SUBTRAINDO (SOMANDO) AS CONTRIBUIÇÕES ANGULARES DOS PÓLOS (DOS ZEROS) A 180°.

EXEMPLO: $H(s)W(s) = \dfrac{K}{(s-p)^m}$, $m = 1, 2, 3, 4$

NESTE CASO, AS REGRAS DESENVOLVIDAS ATÉ AO MOMENTO SÃO POUCO ÚTEIS.

SEJA:

$$s - p = r e^{j\theta}$$

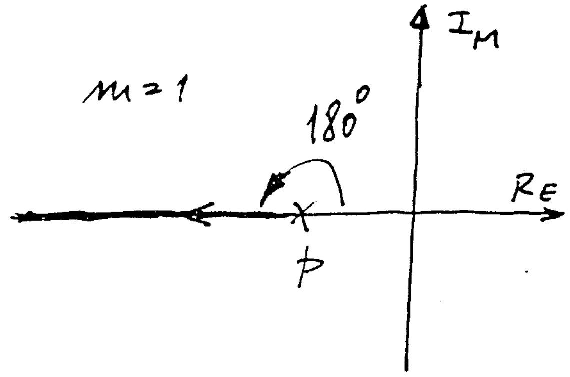
ENTÃO: $HW(s) = \dfrac{K}{r^m} \angle -m\theta$

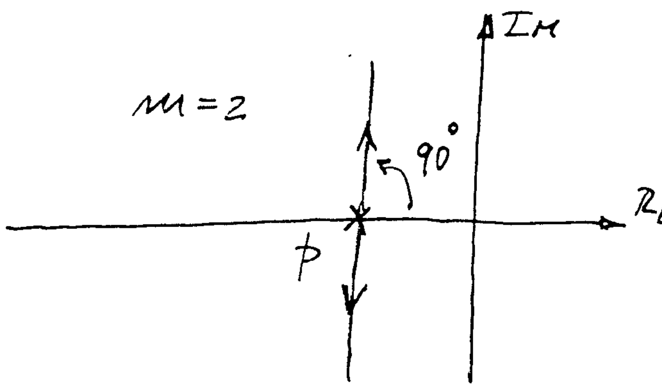
PARA UM PONTO $s_0 = r_0 e^{j\theta_0}$ DO LR DEVERÁ SER SATISFEITA A CONDIÇÃO ANGULAR:

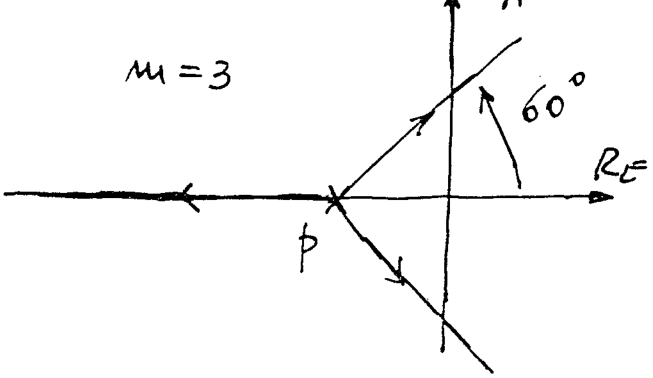
$$-m\theta_0 = (2l+1)\, 180^\circ$$

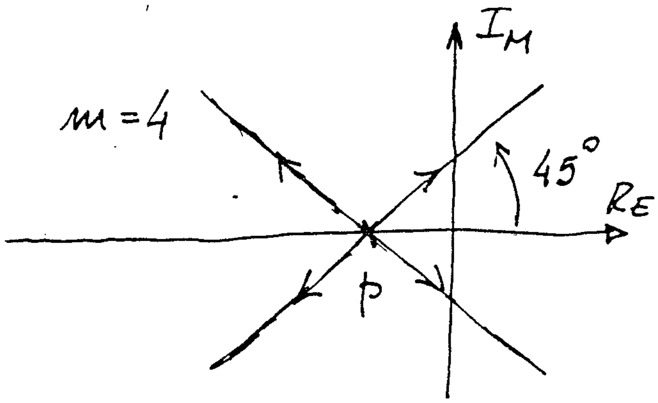
ASSIM, O LR CONSISTE EM RECTAS QUE PASSAM PELO PONTO p DO EIXO REAL E QUE FAZEM ÂNGULOS DE

$$(2l+1)\, 180^\circ/m \;,\; l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$









QUANDO A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA ABERTA TEM m ZEROS E $d > m$ PÓLOS ENTÃO $d-m$ RAMOS DO LR ACABAM NO INFINITO.

$$KW(s)\,H(s) = K\,\frac{s^m - \left(\sum_{i=1}^{m} z_i\right) s^{m-1} + \cdots}{s^d - \left(\sum_{i=1}^{d} p_i\right) s^{d-1} + \cdots}$$

DIVIDINDO OS DOIS POLINÓMIOS PELO NUMERADOR VEM:

$$KW(s)\,H(s) = K\,\frac{1}{s^{d-m} - \left(\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right) s^{d-m-1} + \cdots}$$

SABENDO QUE:

$$(s-p)^{d-m} = s^{d-m} - (d-m)\,p\,s^{d-m-1} + \cdots$$

VEM:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{d-m}$$

REGRA 8: PARA VALORES ELEVADOS DE s, $d-m$ RAMOS DO LR SÃO ASSIMPTOTAS RECTAS QUE FAZEM ÂNGULOS COM O EIXO REAL DE:

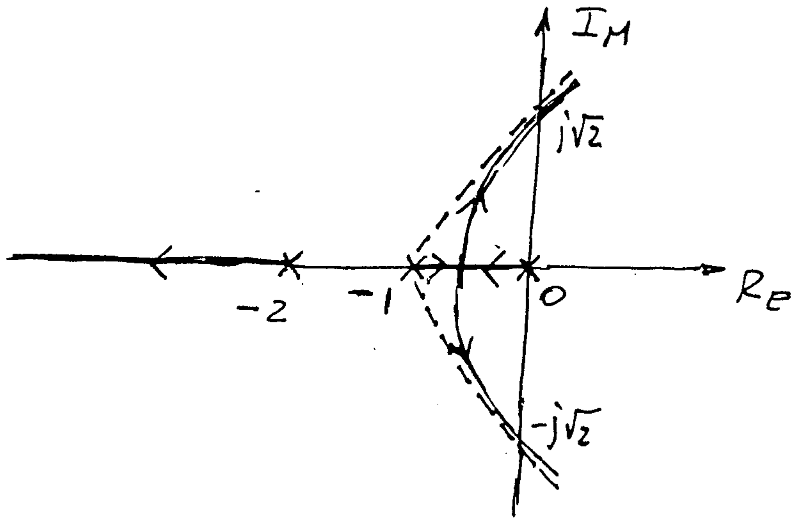
$$(2l+1)\,180^\circ/(d-m)$$

E QUE INTERSECTAM O EIXO REAL NO PONTO

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{d} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{d-m} \qquad \text{(CENTRÓIDE)}$$

REGRA 9: QUANDO O LR CRUZA O EIXO IMAGINÁRIO, OS PONTOS DE INTERSECÇÃO E O GANHO NESSES PONTOS PODEM SER DETERMINADOS PELO CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ.

EXEMPLO: $KW(s)H(s) = K \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)} \rightarrow d-m = 3-0$



- ÂNGULOS DAS ASSIMPTOTAS: $(2\ell+1)\,180°/3 = \pm 60°, 180°$
- CENTRÓIDE: $\sigma = (0-1-2)/3 = -1$
- PONTO DE QUEBRA: $K = -s(s+1)(s+2)$

$dK/ds = -s^3 - 3s^2 - 2s = 0 \Rightarrow \begin{cases} s = \cancel{-1{,}577} \\ s = -0{,}423 \Rightarrow K = 0{,}384 \end{cases}$

- PONTOS DE INTERSECÇÃO COM O EIXO IMAGINÁRIO:

EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA: $s^3 + 3s^2 + 2s + K$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & (6-K)/3 & \\ s^0 & K & \end{array} \longrightarrow 3s^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow s = \pm j\sqrt{2}$$

$K = 6$

5. ANÁLISE DE SISTEMAS NO DOMÍNIO DAS FREQUÊNCIAS

5.1. ANÁLISE EM MALHA ABERTA

CONSIDERE-SE UM SISTEMA LINEAR ESTÁVEL COM FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA $G(s)$ COM ENTRADA $u(t)$ E SAÍDA $y(t)$. SE $u(t) = \sin(\omega t)$, $t \geq 0$ VEM:

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$Y(s) = \left[\frac{a}{s-j\omega} + \frac{\bar{a}}{s+j\omega}\right] + \left[\frac{b_1}{s-p_1} + \dots + \frac{b_m}{s-p_m}\right] \quad *$$

ONDE $p_1, \dots, p_m$ SÃO OS PÓLOS DE $G(s)$.
SUPONDO (SEM PERDA DE GENERALIDADE) QUE OS PÓLOS SÃO SIMPLES, A RESPOSTA NOS TEMPOS VEM:

$$y(t) = a\, e^{j\omega t} + \bar{a}\, e^{-j\omega t} + b_1 e^{p_1 t} + \dots + b_m e^{p_m t}$$

SE O SISTEMA É ESTÁVEL, A RESPOSTA EM REGIME PERMANENTE É:

$$y_{ss}(t) = a\, e^{j\omega t} + \bar{a}\, e^{-j\omega t}$$

PARA CALCULAR a E $\bar{a}$ SABE-SE QUE:

$$* \quad Y(s) = \left[\frac{a}{s-j\omega} + \frac{\bar{a}}{s+j\omega}\right] + \left[\frac{b_1}{s-p_1} + \dots + \frac{b_m}{s-p_m}\right]$$

$$(s+j\omega)\, Y(s) = \left[a\,\frac{s+j\omega}{s-j\omega} + \bar{a}\right] + \left[b_1\,\frac{s+j\omega}{s-p_1} + \dots + b_m\,\frac{s+j\omega}{s-p_m}\right]$$

$$\lim_{s\to -j\omega} (s+j\omega)\, Y(s) = \bar{a}$$

POR OUTRO LADO:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot \frac{w}{s^2 + w^2}$$

LOGO: $$\bar{a} = \lim_{s \to -jw} \left[G(s) \frac{w}{s^2+w^2} (s+jw) \right] =$$

$$= \lim_{s \to -jw} \left[G(s) \frac{w}{s-jw} \right] = \frac{1}{2} j \, G(-jw)$$

IDENTICAMENTE: $$a = -\frac{1}{2} j \, G(jw)$$

SE SE EXPRIMIR G NA FORMA POLAR VEM:

$$G(jw) = |G(jw)| \, e^{j\varphi}$$

$$G(-jw) = |G(jw)| \, e^{-j\varphi}$$

$$\therefore \; y_{ss}(t) = a \, e^{jwt} + \bar{a} \, e^{-jwt} =$$

$$= \frac{1}{2} j \, |G(jw)| \cdot \left[-e^{j(\varphi + wt)} + e^{-j(\varphi + wt)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} j \, |G(jw)| \cdot \left[-2j \sin(wt + \varphi) \right] =$$

$$= |G(jw)| \sin(wt + \varphi)$$

EM CONCLUSÃO:
PARA UM SISTEMA LINEAR ESTÁVEL COM FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA $G(s)$ E PARA UM SINAL DE ENTRADA $u(t) = \sin(wt)$, $t \geq 0$, A SAÍDA CONVERGE PARA

$$y(t) = |G(jw)| \cdot \sin\left[wt + \text{ARG } G(jw)\right]$$

EXEMPLO: CONSIDERE O SISTEMA COM FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA $G(s) = \frac{1}{s+1}$ E A ENTRADA $u(t) = \sin(2t)$

$$u(t) = \sin(2t)$$

$$G(j2) = \frac{1}{1+j2} = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-j1,11}$$

$$\therefore \quad y_{ss}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2t - 1,11)$$

ALTERNATIVAMENTE:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{2}{s^2+2^2} = \frac{2/5}{s+1} + \frac{2/5 - 2/5\, s}{s^2+2^2}$$

COMO:

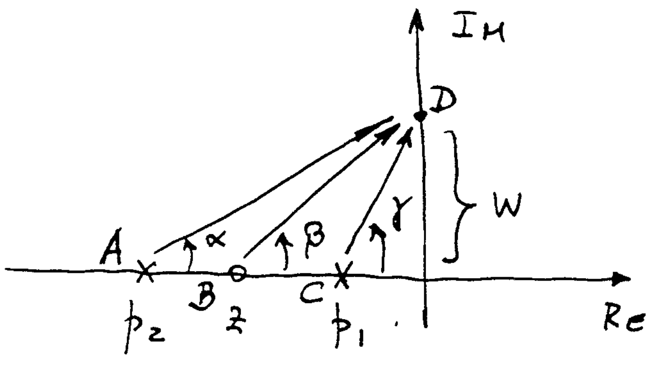
$$\mathcal{L}[\sin(wt+\phi)] = \frac{s \sin\phi + w\cos\phi}{s^2+w^2}$$

VEM:

$$y(t) = 0,4\, e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2t - 1,11)$$

EM REGIME PERMANENTE, A RAZÃO ENTRE AS AMPLITUDES DAS SINUSOIDES DE SAÍDA E DE ENTRADE É O GANHO A ESSA FREQUÊNCIA. POR OUTRO LADO, A DIFERENÇA DE FASE ENTRE A SAÍDA E A ENTRADA É A FASE A ESSA FREQUÊNCIA.

ESTES VALORES PODEM OBTER-SE GRAFICAMENTE. POR EXEMPLO, PARA:



$$G(s) = \frac{s+z}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

$$|G(jw)| = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD} \cdot \overline{AD}}$$

$$\mathrm{ARG}\, G(jw) = \beta - \gamma - \alpha$$

5.1.1. Representação Gráfica da Resposta em Frequência

Como $G(j\omega)$ é uma função complexa de uma variável real pode ser representada:

- No plano complexo, com ω como parâmetro → Diagrama Polar

- Separadamente para a amplitude e para a fase em função de ω. No caso de se adoptarem escalas logaritmicas → Diagramas de Bode

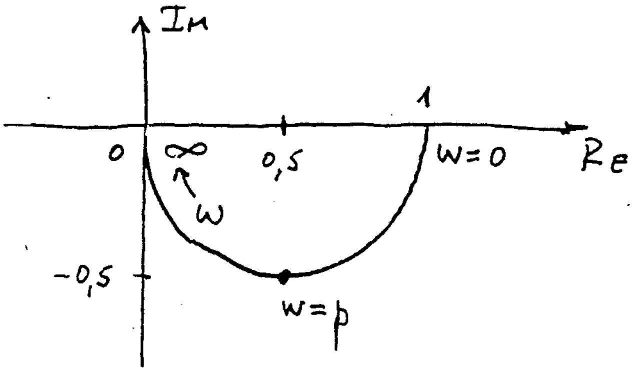
5.1.2. Diagramas Polares

O diagrama polar de $G(s)$ é a representação gráfica de $G(j\omega)$, $\omega \in [0, +\infty[$.

Por exemplo, se $G(j\omega) = \dfrac{p}{p+j\omega}$

$$G(j\omega) = \frac{p}{\sqrt{p^2+\omega^2}} \angle -\operatorname{arctg}(\omega/p)$$

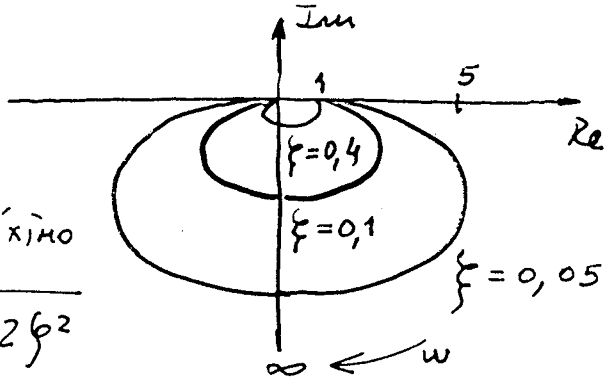
ou: $$G(j\omega) = \frac{p(p-j\omega)}{p^2+\omega^2} = \frac{p^2}{p^2+\omega^2} - j\frac{\omega p}{p^2+\omega^2}$$



POR EXEMPLO, SE:

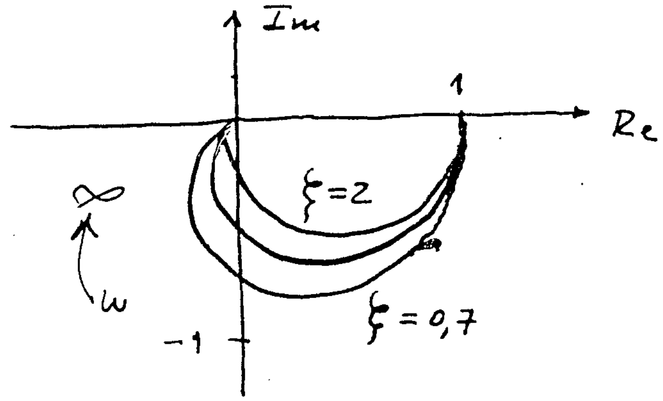
$$G(j\omega) = \frac{\omega_M^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_M(j\omega) + \omega_M^2}$$

$\xi < 0,707$



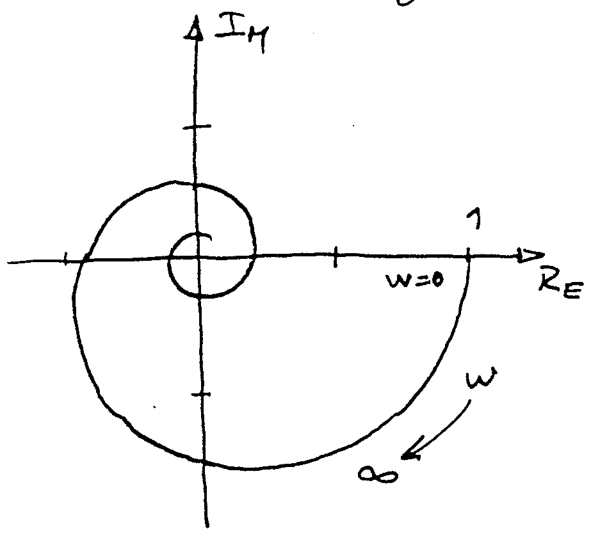
$|G(j\omega)|$ → TEM UM MÁXIMO PARA $W = W_M\sqrt{1-2\xi^2}$

$\xi > 0,707$



POR EXEMPLO, PARA UM SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM COM UM ATRASO T:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega T}}{j\omega+1} = \frac{1}{\sqrt{W^2+1}} \underline{/-WT - \mathrm{ARCTG}\, W}$$



5.1.3. DIAGRAMAS DE BODE

NESTE CASO USAM-SE DOIS GRÁFICOS SEPARADOS PARA REPRESENTAR $G(jw)$:

- AMPLITUDE VERSUS FREQUÊNCIA
- FASE VERSUS FREQUÊNCIA.

CONSIDERE-SE:

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{s^r(s+p_1)\cdots(s+p_n)}e^{-sT}$$

$$G(s) = K_B\frac{(1+s/z_1)\cdots(1+s/z_m)\,e^{-sT}}{s^r(1+s/p_1)\cdots(1+s/p_n)}$$

$$K_B = K\frac{z_1\,z_2\cdots z_m}{p_1\,p_2\cdots p_n}$$

ENTÃO, $\log|G(jw)|$ É A SOMA DAS PARCELAS

$\log|K_B|$

$\log|1+jw/z_i| \qquad i=1,2,\ldots,m$

$\log|1+jw/p_i| \qquad i=1,2,\ldots,n$

$\log|(jw)^r| = -r\log|jw| = -r\log w$

$\log|e^{-jwT}| = 1$

QUANDO $G(s)$ TEM UM PAR DE PÓLOS COMPLEXOS CONJUGADOS $p_1 = p$ E $p_2 = \bar{p}$ É CONVENIENTE COLOCAR NA FORMA:

$$\frac{1}{(1+j\omega/p)(1+j\omega/\bar{p})} = \frac{1}{1+2\xi(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2}$$

ONDE:

$$p, \bar{p} = \xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

POR OUTRO LADO, PARA $ARG[G(j\omega)]$ VEM:

$$ARG[G(j\omega)] = \sum_{i=1}^{m} ARG(1+j\omega/z_i) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} ARG(1+j\omega/p_i) - r\frac{\pi}{2} - \omega T$$

PARA A AMPLITUDE DE G USAM-SE DECIBEIS (dB) QUE SE CALCULAM ATRAVÉS DE:

$$20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

ALÉM DISSO, QUANDO SE ADOPTA UMA ESCALA LOGARITMICA PARA ω (QUER PARA $|G|$ QUER PARA $ARG(G)$) OS GRÁFICOS TOMAM OS NOMES DE GRÁFICOS DE BODE DA AMPLITUDE E DA FASE.

ASSIM, OS GRÁFICOS DE BODE DE UMA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA PODEM SER OBTIDOS ATRAVÉS DA ADIÇÃO DOS GRÁFICOS DE:

$$K_B, \quad (1+j\omega/z)^{\pm 1}, \quad (j\omega)^{\pm r},$$

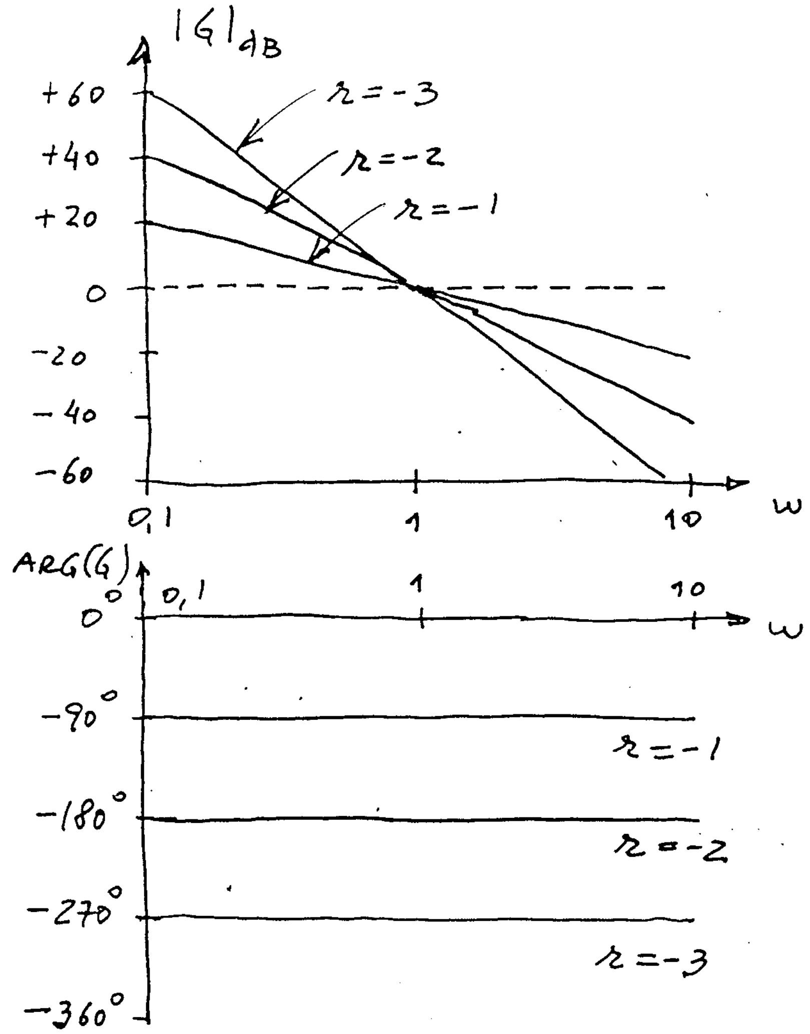
$$\frac{1}{1+2\xi(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2}, \quad e^{-j\omega T}$$

PARA A CONSTANTE K_B O DIAGRAMA DE BODE DAS AMPLITUDE CONSISTE NUMA RECTA HORIZONTAL COM VALOR $20 \log_{10} |K_B|$. O DIAGRAMA DE BODE DAS FASES CONSISTE NUMA RECTA HORIZONTAL COM VALOR 0° SE $K_B > 0$ OU COM VALOR -180° SE $K_B < 0$.

PARA O FACTOR $(j\omega)^{\pm r}$ O DIAGRAMA DE BODE DAS AMPLITUDES CONSISTE NUMA RECTA COM DECLIVE $\pm 20 r$ dB/DEC POIS:

$$20 \log_{10} |j 10 \omega|^{\pm r} \, dB = \pm r \left(20 \log_{10} \omega \; dB + 20 \; dB \right)$$

O DIAGRAMA DE BODE DAS FASES É UMA RECTA HORIZONTAL COM VALOR $\pm r \cdot 90^\circ$.



DIAGRAMAS DE BODE DE $(j\omega)^{-r}$

POR VEZES O DIAGRAMA DE BODE DAS AMPLITUDES É EXPRESSO EM dB/OITAVA.
RELEMBRANDO QUE ω_2 ESTÁ UMA OITAVA ACIMA DE ω_1 SE $\omega_2 = 2\omega_1$ CONCLUI-SE QUE:

$$\pm s \text{ dB/DÉCADA} = \pm 0{,}3\, s \text{ dB/OITAVA}$$

POIS $\log_{10}(2\omega_1) - \log_{10}(\omega_1) = \log_{10} 2 = 0{,}3$
EM PARTICULAR

$$\pm 20 \text{ dB/DÉCADA} = \pm 6 \text{ dB/OITAVA}$$

VAMOS AGORA ANALIZAR OS GRÁFICOS DE $\dfrac{1}{1+j\omega/p}$

$$\frac{1}{1+j\omega/p} \approx 1 \,, \quad \omega \ll p$$

$$\frac{1}{1+j\omega/p} \approx \frac{p}{j\omega} \,, \quad \omega \gg p$$

CONCLUI-SE QUE O GRÁFICO DE BODE DAS AMPLITUDES PODE SER APROXIMADO POR DUAS RECTAS:

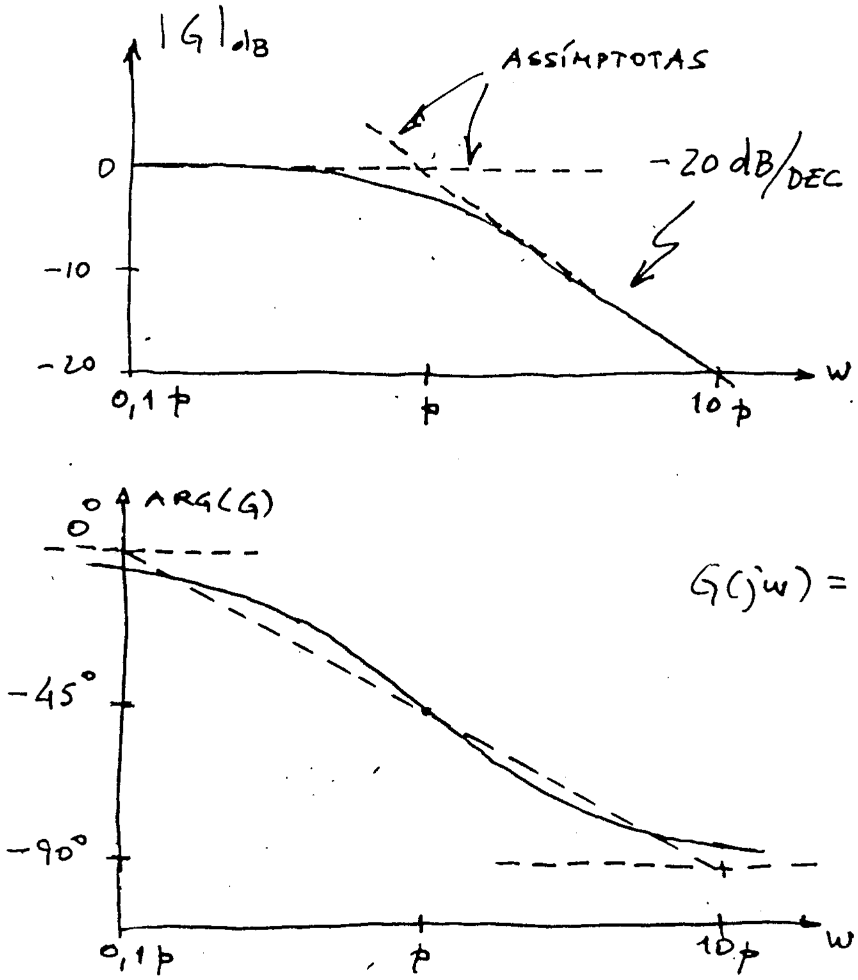
- RECTA 0 dB, PARA $\omega \ll p$
- RECTA -20 dB/DEC, PARA $\omega \gg p$

AS DUAS RECTAS INTERSECTAM-SE EM 0 dB, PARA $\omega = p$.
ESTAS RECTAS DESIGNAM-SE POR ASSIMPTOTAS, RESPECTIVAMENTE ÀS BAIXAS E ÀS ALTAS FREQUÊNCIAS.

PARA $\omega = p$, $(1+j\omega/p)^{-1} = (1+j1)^{-1} = 1/\sqrt{2}\ \angle -45^\circ$.
LOGO $|G| = -3$ dB, $\arg(G) = -45^\circ$

CONCLUI-SE QUE O GRÁFICO DE BODE DAS FASES PODE SER APROXIMADO POR

- 0° PARA $\omega \ll p$
- -90° PARA $\omega \gg p$



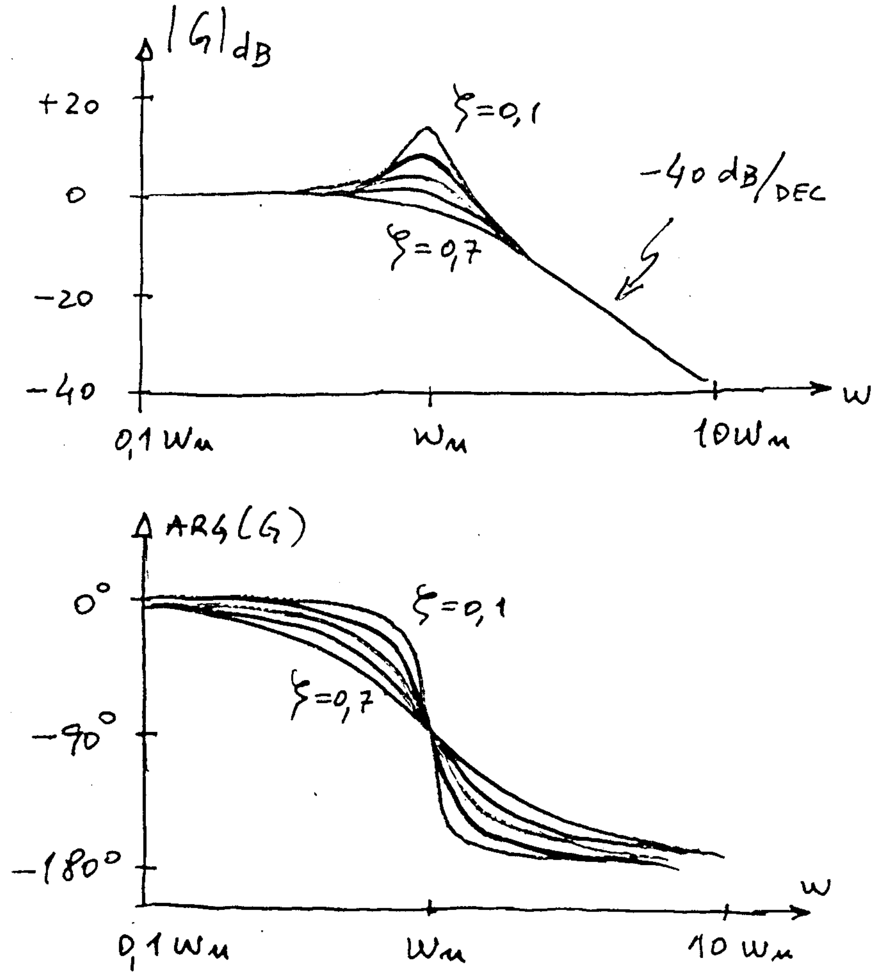
$$G(jw) = \frac{1}{1 + jw/p}$$

CONSIDERE-SE AGORA UM SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM COM UM PAR DE PÓLOS COMPLEXOS CONJUGADOS:

$$\frac{1}{1 + 2\xi(jw/w_m) + (jw/w_m)^2} \quad , \quad 0 < \xi \leq 1$$

- $G(jw) \approx 1$, $w \to 0$ (i.e. 0 dB, 0°)
- $G(jw) \approx -\left(\frac{w_m}{w}\right)^2$, $w \gg w_m$ (i.e. -40 dB/DEC, $-180°$)

ESTA RECTA INTERSECTA OS 0dB PARA $w = w_m$



PARA $\xi \geq 0{,}707$ O GRÁFICO DE BODE DAS AMPLITUDES DECRESCE MONOTONAMENTE.
PARA $0 < \xi < 0{,}707$ OCORRE UM PICO (RESSONÂNCIA):

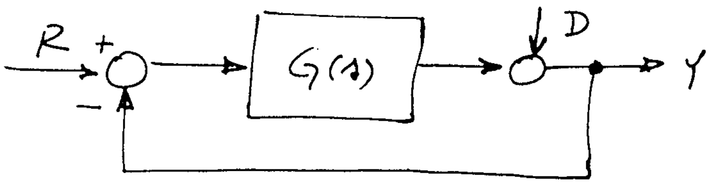
$$W_r = W_n \sqrt{1-2\xi^2}$$

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{(PICO DE RESSONÂNCIA)}$$

OBVIAMENTE, $M_r = 1$ PARA $\xi = \sqrt{2}/2 = 0{,}707$ E $M_r \to \infty$ QUANDO $\xi \to 0$.

5.2. Análise em Malha Fechada

Nesta secção vai estudar-se a estabilidade do sistema seguinte a partir da resposta em frequência de $G(s)H(s)$.



O método designa-se por Critério de Estabilidade de Nyquist.

Por exemplo considere-se o sistema:

$$F(s) = \frac{s-a}{s-b}$$

e um contorno fechado Γ orientado no sentido dos ponteiros do relógio conforme representado na figura seguinte.

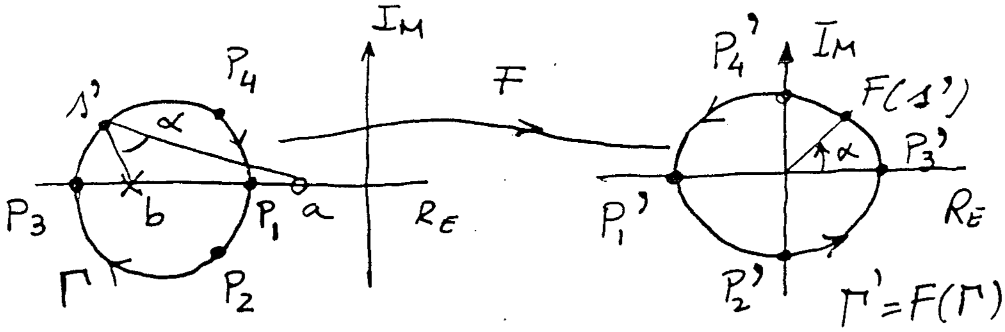
Para um ponto s' sobre Γ vem:

$$\text{ARG } F(s') = \text{ARG}\left[\frac{s'-a}{s'-b}\right] = \alpha$$

Vamos começar por considerar o caso onde Γ engloba somente um pólo, isto é:

$$Z=0 \;,\; R=1$$

Z e R: número de zeros e de pólos de $F(s)$ dentro de Γ.



QUANDO s' PASSA POR $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4$ RESULTA $\alpha = -\pi \to -\pi/2 \to 0 \to +\pi$.

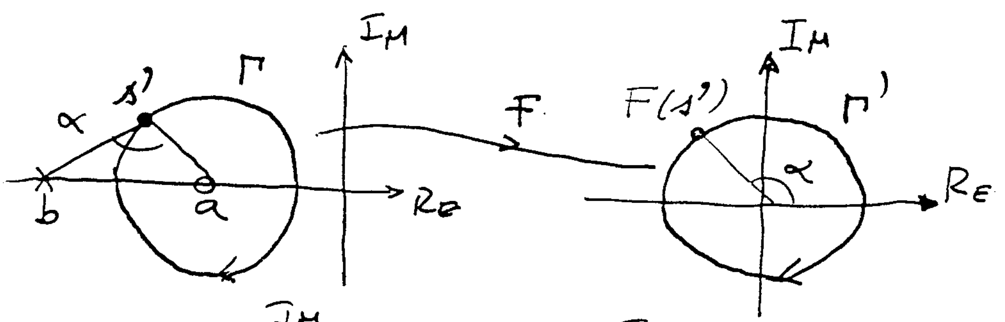
ASSIM, O NÚMERO DE VOLTAS N DE $\Gamma' = F(\Gamma)$ EM REDOR DA ORIGEM VEM:

$$N = -1$$

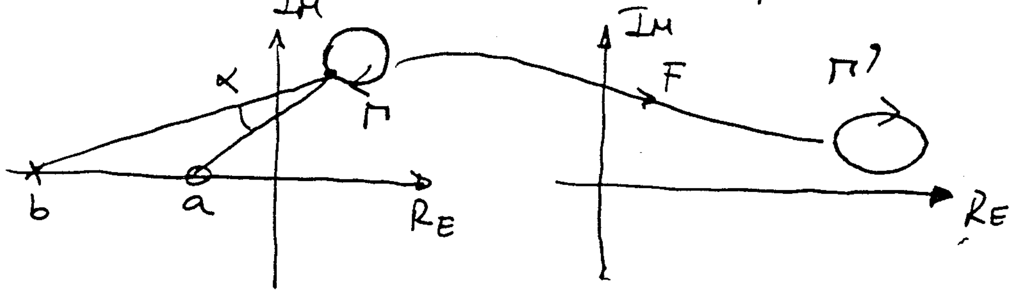
N - NÚMERO DE VOLTAS DO CONTORNO IMAGEM Γ' EM REDOR DA ORIGEM.

LOGO: $$N = Z - R$$

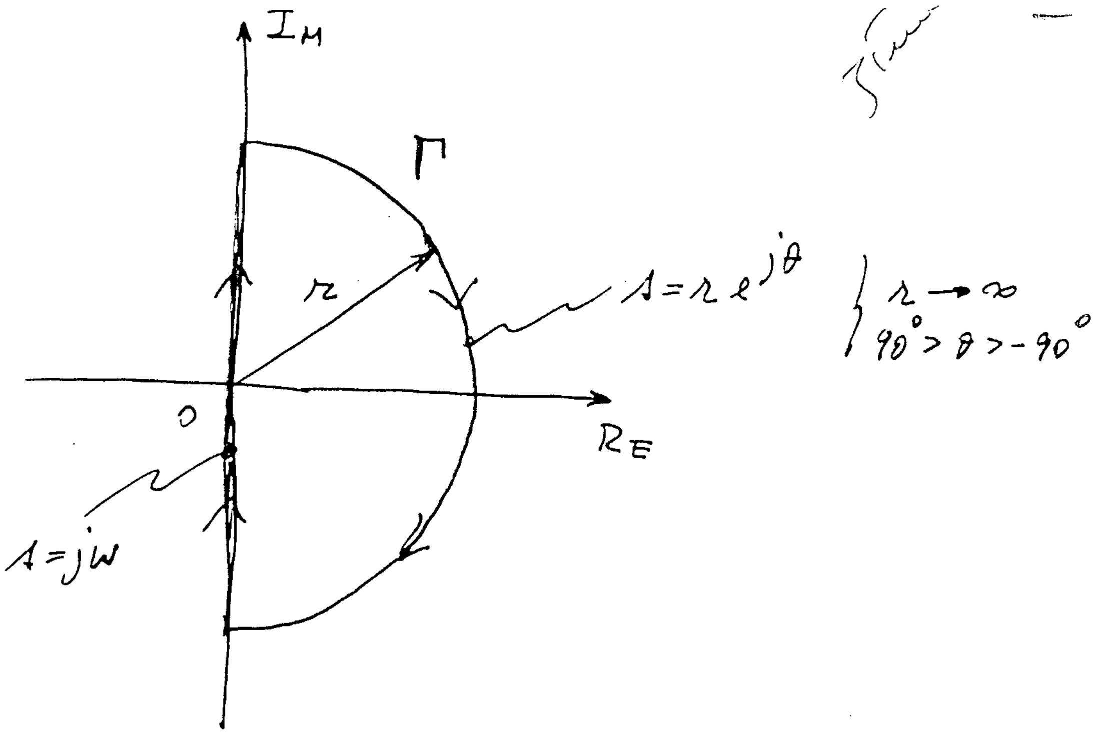
PARA OS CASOS DE Γ ENGLOBAR SOMENTE 1 ZERO E NÃO ENGLOBAR NEM O ZERO NEM O PÓLO RESULTA:



$$\left.\begin{aligned} N&=1 \\ Z&=1 \\ R&=0 \end{aligned}\right\}$$



$$\left.\begin{aligned} N&=0 \\ Z&=0 \\ R&=0 \end{aligned}\right\}$$



SE SE UTILIZAR O CONTORNO Γ DA FIGURA, COM r SUFICIENTEMENTE ELEVADO PARA ENGLOBAR TODO O SEMIPLANO DIREITO (i.e. $r \to +\infty$) ENTÃO A IMAGEM Γ' (ATRAVÉS DE $1+GH(s)$) TERÁ UM NÚMERO DE VOLTAS IGUAL AO NÚMERO DE ZEROS MENOS O NÚMERO DE PÓLOS.

EM GERAL, $GH(s)$ É UMA FRACÇÃO PRÓPRIA PELO QUE A IMAGEM QUANDO $s = r e^{j\theta}$, COM $r \to \infty$, É ZERO.

POR OUTRO LADO, PARA $s = j\omega$, $G(j\omega)$ É O CONJUGADO DE $G(-j\omega)$ PELO QUE BASTA CALCULAR A IMAGEM DO SEMI-EIXO IMAGINÁRIO POSITIVO.

POR RAZÕES PRÁTICAS DESENHA-SE $GH(j\omega)$ EM VEZ DE $1+GH(j\omega)$. COMO O PRIMEIRO SE OBTÉM DO SEGUNDO SUBTRAINDO $-1+j0$ O NÚMERO DE VOLTAS EM TORNO DA ORIGEM DE $1+GH$ É IDÊNTICO AO NÚMERO DE VOLTAS DE GH EM TORNO DE $-1+j0$.

CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST

N - NÚMERO DE VOLTAS DE $GH(j\omega)$ EM TORNO DE $-1+j0$
$\omega \in]-\infty, +\infty[$

R - NÚMERO DE PÓLOS DE $GH(s)$ NO SEMIPLANO DIREITO *

Z - NÚMERO DE ZEROS DE $1+GH(s)$ NO SEMIPLANO DIREITO (PÓLOS INSTÁVEIS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA FECHADA).

$$N = Z - R \Leftrightarrow Z = N + R$$

*NOTA: $GH(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow 1 + GH(s) = \dfrac{N(s) + D(s)}{D(s)}$

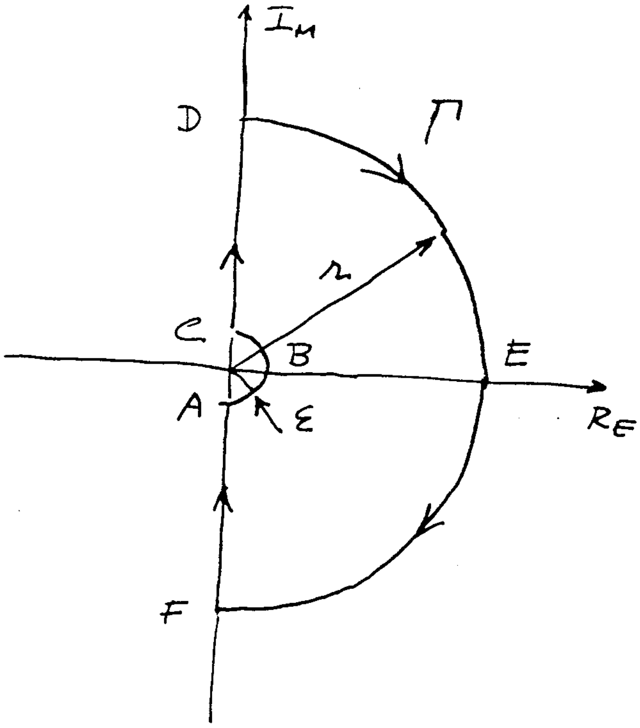
OS PÓLOS DE $GH(s)$ E DE $1+GH(s)$ SÃO IDÊNTICOS.

PARA O CASO MAIS FREQUÊNTE DE $GH(s)$ SER UMA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA ESTÁVEL VEM $R=0$. ASSIM, O SISTEMA EM MALHA FECHADA É ESTÁVEL ($Z=0$) SE, E SOMENTE SE O NÚMERO DE VOLTAS DE $GH(j\omega)$ EM TORNO DE $-1+j0$ FOR $N=0$.

NO CASO DE $GH(s)$ TER PÓLOS OU ZEROS NO EIXO IMAGINÁRIO O CONTORNO Γ DEVE SER MODIFICADO. ASSIM, ADOPTA-SE UMA SEMI-CIRCUNFERÊNCIA CENTRADA NESSES PONTOS E COM RAIO $\varepsilon \to 0$.

EXEMPLO

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}\ ,\quad H(s)=1$$



PARA CALCULAR A IMAGEM DE Γ FAZ-SE:

- $s=\varepsilon e^{j\theta}$, $s\in\widehat{ABC}$
- $s=j\omega$, $s\in\overline{CD}$ ou $s\in\overline{FA}$
- $s=re^{j\theta}$, $s\in\widehat{DEF}$

(com $r\to\infty$ e $\varepsilon\to 0$)

- PARA $s=\varepsilon e^{j\theta}$ $(\varepsilon\to 0)$ VEM $GH\approx\frac{1}{\varepsilon}e^{-j\theta}$

$A\equiv 0\ \angle{-90^\circ}\ \to\ B\equiv 0\ \angle{0^\circ}\ \to\ C\equiv 0\ \angle{+90^\circ}$

$A'\equiv\infty\ \angle{+90^\circ}\ \to\ B'\equiv\infty\ \angle{0^\circ}\ \to\ C'\equiv\infty\ \angle{-90^\circ}$ $*$

- PARA $s=re^{j\theta}$ $(r\to\infty)$ VEM $GH\approx\frac{1}{r^2}e^{-j2\theta}$

$D\equiv\infty\ \angle{+90^\circ}\ \to\ E\equiv\infty\ \angle{0^\circ}\ \to\ F\equiv\infty\ \angle{-90^\circ}$

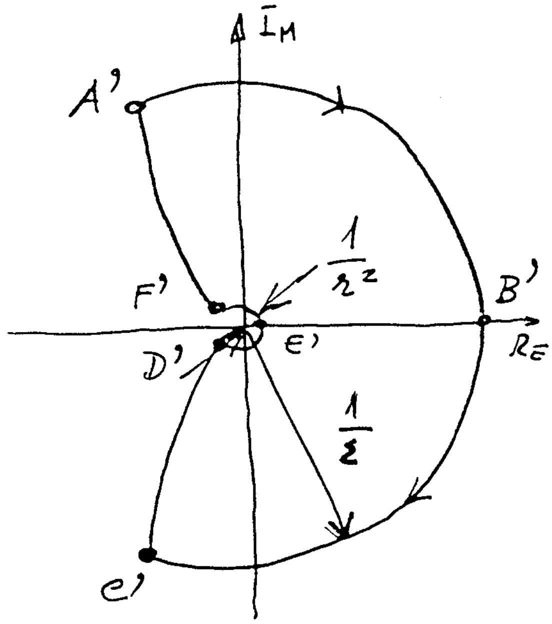
$*$ $D'\equiv 0\ \angle{-2\cdot 90^\circ}\ \to\ E'\equiv 0\ \angle{-2\cdot 0}\ \to\ F'\equiv 0\ \angle{-2\cdot(-90^\circ)}$

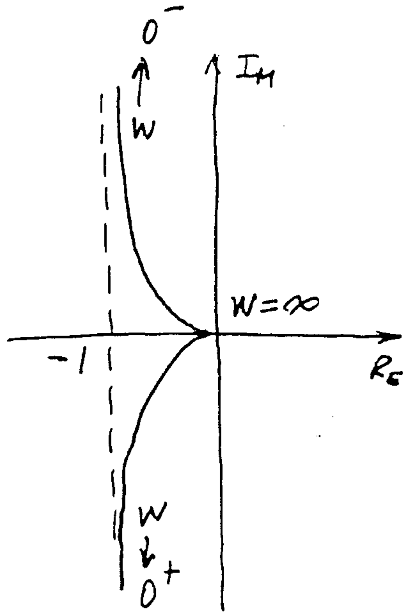
- PARA $s=j\omega$ VEM $GH(j\omega)=\frac{1}{j\omega(j\omega+1)}$

$\omega\to 0^+\ \Rightarrow\ C'=\infty\ \angle{-90^\circ}$ $*$

$\omega\to+\infty\ \Rightarrow\ D'\equiv 0\ \angle{-180^\circ}$ $*$

ASSIM, O CONTORNO IMAGEM Γ' VEM:





NOTA: $G(jw) = \dfrac{1}{jw(jw+1)} = \dfrac{1}{w^2-1} + j\dfrac{1}{w(w^2-1)}$

QUANDO $w \to \mp 0$ $G(jw) \to -1 \pm j\infty$

→ DA FIGURA CONCLUI-SE QUE $N=0$.

→ COMO GH NÃO TEM PÓLOS NO SEMIPLANO DIREITO SABE-SE QUE $R=0$

→ LOGO CONCLUI-SE QUE O SISTEMA É ESTÁVEL, ISTO É:

$$Z = N + R = 0$$

(1 + GH NÃO TEM RAÍZES NO SEMIPLANO DIREITO).

EXEMPLO: $G(s) = \dfrac{K}{s\,(s+1)^2}$, $H(s) = 1$

• $s = r\,e^{j\theta}$, $\overline{DEF}$ $(r \to \infty)$

$$G(s) \approx \frac{K}{r^3}\, e^{-j3\theta}$$

$$D \equiv \infty \angle +90^\circ \to E \equiv \infty \angle 0^\circ \to F \equiv \infty \angle -90^\circ$$

$$* \quad D' \equiv 0 \angle -3\cdot 90^\circ \to E' \equiv 0 \angle -3\cdot 0^\circ \to F' \equiv 0 \angle -3\cdot(-90^\circ)$$

• $s = \varepsilon\, e^{j\theta}$, $\overline{ABC}$ $(\varepsilon \to 0)$

$$G(s) \approx \frac{K}{\varepsilon}\, e^{-j\theta}$$

$$A \equiv 0 \angle -90^\circ \to B \equiv 0 \angle 0^\circ \to C \equiv 0 \angle +90^\circ$$

$$A' \equiv \infty \angle +90^\circ \to B' \equiv \infty \angle 0^\circ \to C' \equiv \infty \angle -90^\circ \quad *$$

• $s = j\omega$, $\overline{CD}$ ou $\overline{FA}$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)^2}$$

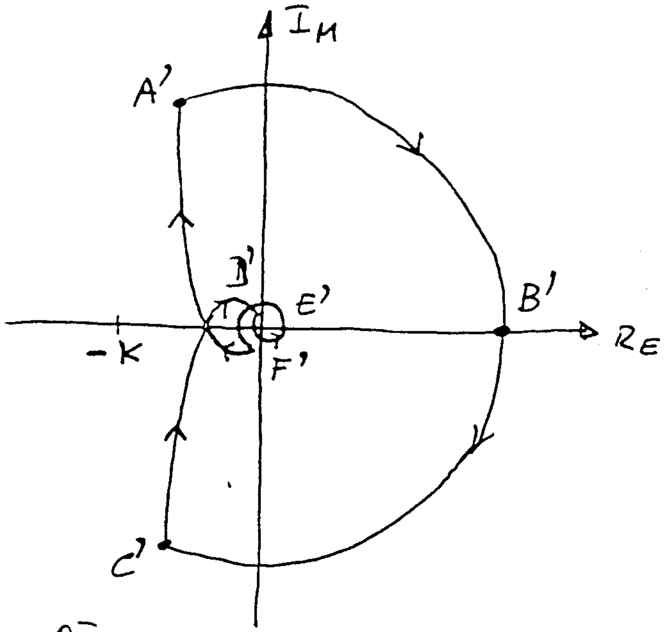
$$\omega \to 0^+ , \quad G \approx \frac{K}{j\omega} \to C' \equiv \infty \angle -90^\circ \quad *$$

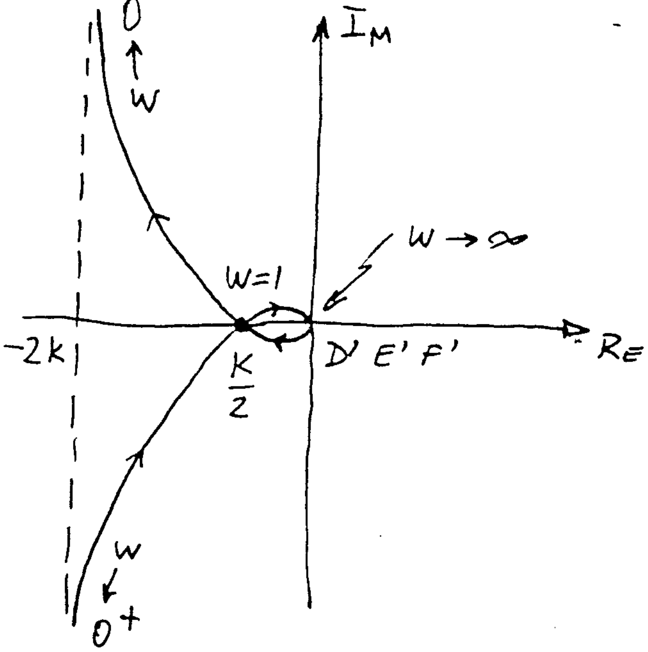
$$\omega \to +\infty , \quad G \simeq \frac{K}{(j\omega)^3} \to D' \equiv 0 \angle -3 \times 90^\circ \quad *$$

NOTA: $G(j\omega) = \dfrac{K\left[-2\omega^2 - j\omega(1-\omega^2)\right]}{4\omega^4 + \omega^2(1-\omega^2)^2}$

$$\lim_{\omega \to 0^\pm} G(j\omega) = -2K \mp j\infty$$

5.19





PARA $W = 1 \rightarrow G(jW) = -\frac{K}{2}$

- SE $K < 2 \rightarrow N = 0$. COMO $R = 0 \Rightarrow Z = 0$
  O SISTEMA É ESTÁVEL

- SE $K > 2 \rightarrow N = 2$. COMO $R = 0 \Rightarrow Z = 2$
  O SISTEMA É INSTÁVEL.

COMPARAR RESULTADOS COM O MÉTODO DO LUGAR DE RAÍZES ...

5.2.1. ESTABILIDADE RELATIVA

NA PRÁTICA ESTAMOS INTERESSADOS EM SABER, NÃO SÓ SE O SISTEMA É ESTÁVEL, MAS TAMBÉM SE ESTÁ LONGE (OU PERTO) DA INSTABILIDADE.

COMO A DISTÂNCIA DO TRAÇADO DE $G(j\omega)H(j\omega)$ RELATIVAMENTE AO PONTO $-1+j0$ É A AMPLITUDE DE

$$|1+G(j\omega)H(j\omega)|$$

PODE-SE DIZER QUE QUANTO MAIS PERTO ESTIVER $GH(j\omega)$ DO PONTO $-1+j0$ MAIS OSCILATÓRIA SERÁ A RESPOSTA DO SISTEMA EM MALHA FECHADA.

ESTA "DISTÂNCIA" É USUALMENTE MEDIDA ATRAVÉS DA MARGEM DE FASE E DA MARGEM DE GANHO.

A MARGEM DE GANHO (MG) INDICA QUANTO SE PODE AUMENTAR O GANHO ATÉ CONDUZIR O SISTEMA AO LIMITE DA ESTABILIDADE. POR OUTRAS PALAVRAS, O GANHO DE $GH(j\omega)$ DEVE SER UNITÁRIO QUANDO A FASE É DE $-180°$:

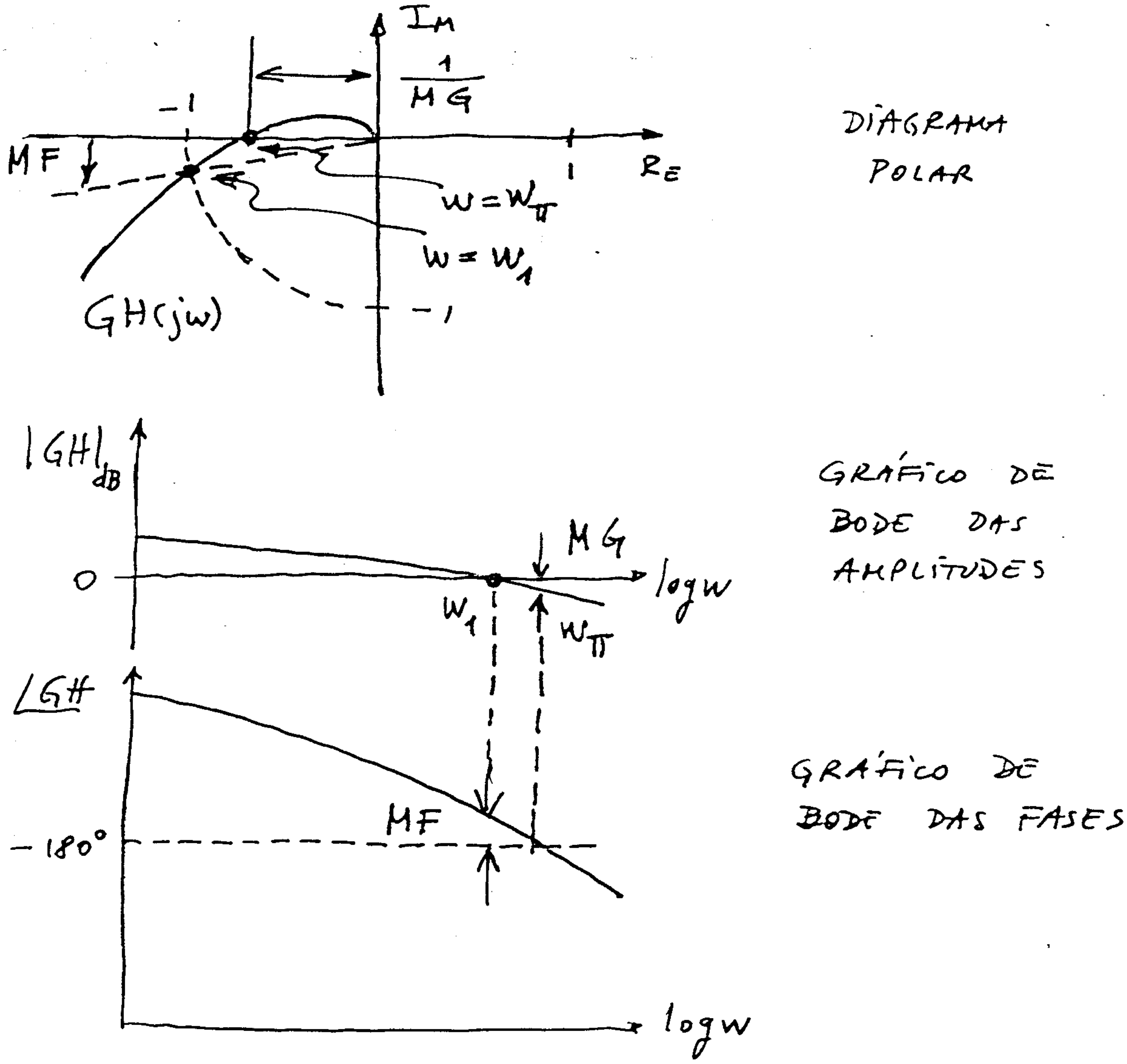
$$\arg\left(GH(j\omega_\pi)\right) = -\pi \implies MG = \frac{1}{|GH(j\omega_\pi)|}$$

$$\text{OU: } MG_{dB} = 20\log_{10}\frac{1}{|GH(j\omega_\pi)|}$$

A MARGEM DE FASE (MF) INDICA QUANTO SE PODE AUMENTAR A FASE ATÉ CONDUZIR O SISTEMA AO LIMITE DA ESTABILIDADE. A FASE DE $GH(j\omega)$ DEVE SER $-180°$ QUANDO O MÓDULO É UNITÁRIO:

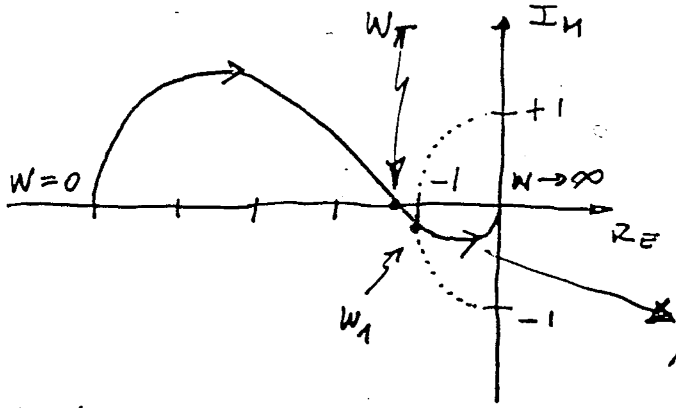
$$|GH(j\omega_1)| = 1 \implies MF = 180° + \arg\left[GH(j\omega_1)\right]$$

A MG E A MF PODEM SER CALCULADAS QUER PELO DIAGRAMA POLAR, QUER PELOS GRÁFICOS DE BODE.



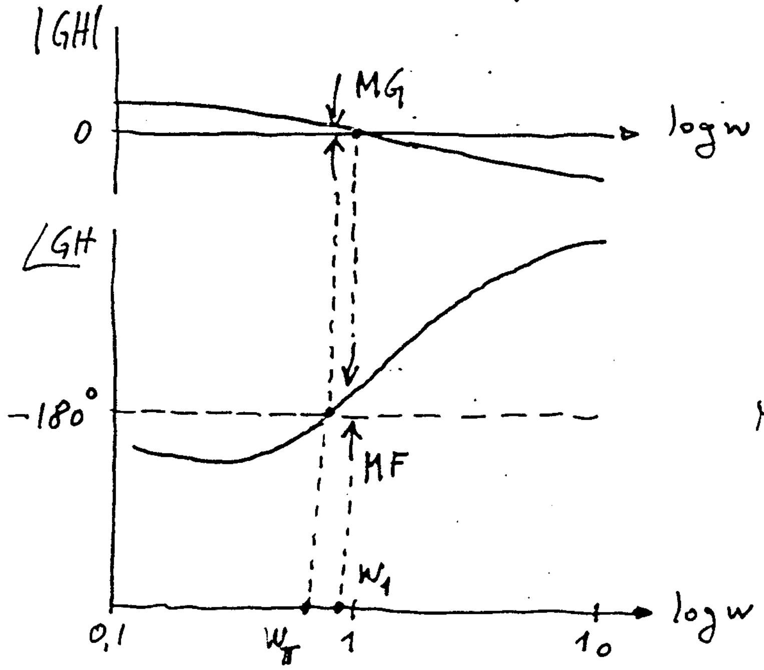
UM SISTEMA ESTÁVEL DEVE UMA $MG_{dB} > 0$ (EM DECIBÉIS) E UMA $MF > 0$.

QUANDO A AMPLITUDE E A FASE DE $GH(jw)$ VARIAM MONOTONAMENTE COM ω, AS NOÇÕES DE MG E DE MF SÃO BEM DEFINIDAS E PODEM SER USADAS COMO MEDIDAS DE ESTABILIDADE. CONTUDO, HÁ CASOS QUE APRESENTAM AMBIGUIDADE, CONFORME SE PODE VER NO EXEMPLO SEGUINTE.



$$GH(s) = \frac{s+1}{(s+0{,}2)(s-1)}$$

$N=-1$, $P=1$ $\Rightarrow$ $Z=0$ (SIST. ESTÁVEL)



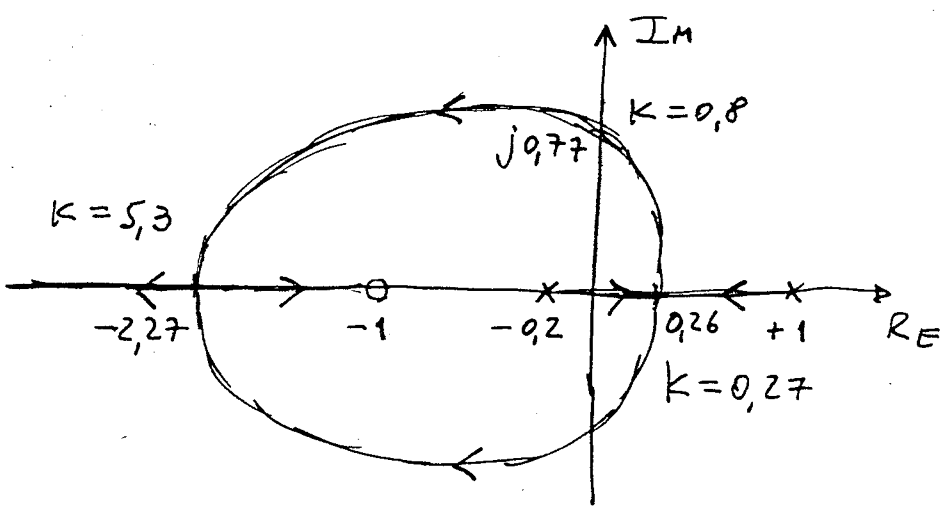
MG < 0 (SIST. INSTÁVEL)

MF > 0 (SIST. ESTÁVEL)

CONTRADITÓRIO!

$w_1 = 0{,}98$ rad/s, $MF = 10{,}4°$

$w_\pi = 0{,}77$ rad/s, $MG = -1{,}95$ dB



SISTEMA DE FASE NÃO-MÍNIMA