

Matematikopgaver i Matematik for ingeniører 1 (BA-MAT1) 2024

Henrik Skov Midtiby

23. september 2024

Indhold

1	Matricer, vektorer og ligningssystemer	1
2	Differens og differentialkvotient	5
3	Lineariseringer	7
4	Komplekse tal	8
5	Matematik facts der er gode at kunne	10
6	Hints	14
7	Løsninger	24

1 Matricer, vektorer og ligningssystemer

Opgave 1.1

[hint solution](#)

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.2

[hint solution](#)

Skriv et linært ligningssystem, hvis koefficient matrice er

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -5 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Opgave 1.3

[hint solution](#)

Differentier og forenkl udtrykket:

$$y = x \cdot e^{-x} - x$$

Opgave 1.4

[hint solution](#)

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.5

[hint solution](#)

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 4 & -4 \\ 4 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 11 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.6

[hint solution](#)

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.7[hint solution](#)

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot [3 \ 0 \ 8] = ?$$

Opgave 1.8[hint solution](#)

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.9[hint solution](#)

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -5 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.10[hint solution](#)

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot [3 \ 0 \ 8]^T = ?$$

Opgave 1.11[hint solution](#)

Løs ligningssystemet eller vis at der ikke findes en løsning til ligningssystemet.

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -1 \\ -4x + 2y - 6z &= 2 \end{aligned}$$

Opgave 1.12[hint solution](#)

Bestem rangen af matricen

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Opgave 1.13[hint solution](#)

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 & -4 \\ 4 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.14[hint solution](#)

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.15[hint solution](#)

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [3 \quad 0 \quad 8] = ?$$

Opgave 1.16[hint solution](#)

Løs ligningssystemet eller vis at der ikke findes en løsning til ligningssystemet.

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ -4w - x - y + 2z &= -4 \\ -2w + 3x + 3y - 6z &= -2 \end{aligned}$$

Opgave 1.17[hint solution](#)

Bestem rangen af matricen

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Opgave 1.18[hint solution](#)

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = ?$$

Opgave 1.19

[hint solution](#)

Find værdien af følgende udtryk, eller forklar hvorfor de ikke er definerede.

$$\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

2 Differens og differentialkvotient

Opgave 2.1

[hint solution](#)

Bestem den afledte af

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

Opgave 2.2

[hint solution](#)

Find forskriften for den rette linje der tangerer $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ ved $x = 2$.

Opgave 2.3

[hint hint hint solution](#)

Beregn den afledte af

$$f(x) = (1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x)(1 + 4x)$$

Opgave 2.4

[hint hint solution](#)

Find forskriften for den rette linje der tangerer $y = \sqrt{x+1}$ ved $x = 3$.

Opgave 2.5

[hint solution](#)

Beregn den afledte af

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x^3 + 2)}{(x^2 + 2)(x^3 + 1)}$$

Opgave 2.6

[hint hint solution](#)

Vis at hvis f kan differentieres med x og $f(x) > 0$, så gælder der

$$\frac{d}{dx} \sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Benyt derefter denne regel (Square Root Rule) til at bestemme den afledte af

$$\sqrt{x^2 + 1}.$$

Opgave 2.7

[hint hint solution](#)

Find en formel for tangentlinjen til

Oprindeligt
 $x = -1$

$$y = (1 + x^{2/3})^{3/2}$$

ved $x = 1$.

Opgave 2.8

[hint solution](#)

Beregn et antal afledte af funktionen

$$f(x) = \cos(ax).$$

Beregn så mange at du kan gætte formelen for den n 'te afledte ($f^{(n)}(x)$). Verificer derefter gættet vha. induktion.

Opgave 2.9

[hint hint solution](#)

Med cirka hvor mange procent vil et volumen ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$) af en kugle med radius r øges, hvis radius stiger med 2%?

Opgave 2.10

[hint solution](#)

Hvis f og g er funktioner, der begge kan differentieres mindst to gange, vis at følgende gælder:

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

Opgave 2.11

[hint hint solution](#)

Benyt differentialer til at approksimere ændringen i funktionen

$$h(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$$

fra $t = 2$ til $t = 2 + \frac{\pi}{10}$.

Opgave 2.12

[hint hint solution](#)

(Poiseuille's Law) Volumenflowet F (i liter per minut) af en væske igennem et rør er proportional til rørets radius i fjerde potens:

$$F = k \cdot r^4$$

Approksimer hvor meget radius skal øges for at øge flowet igennem røret med 10%.

3 Lineariseringer

Opgave 3.1

[hint solution](#)

Lineariser nedenstående funktion omkring punktet $x = \pi$.

$$\sin(x)$$

Opgave 3.2

[hint solution](#)

Benyt en passende linearisering til at approksimere den angivne værdi.

$$\cos(49^\circ)$$

Bestem fortegnet på fejlen og estimer dennes størrelse. Benyt denne information til at angive et interval der med sikkerhed indeholder værdien.

Opgave 3.3

[hint hint solution](#)

Om en funktion $g(x)$ vides det at $g(2) = 1$, $g'(2) = 2$ og $|g''(x)| < 1 + (x - 2)^2$ for alle $x > 0$. Bestem den bedste approksimation du kan for $g(1.8)$. Hvor stor kan fejlen blive?

Opgave 3.4

[hint solution](#)

Vis at lineariseringen af $\sin(\theta)$ ved $\theta = 0$ er $L(\theta) = \theta$. Hvor stor kan den procentvise fejl i approksimationen $\sin(\theta) \sim \theta$ blive hvis $|\theta| < 17^\circ$?

4 Komplekse tal

Opgave 4.1

[hint solution](#)

Bestem real og imaginær delen af tallet $z = -5+2i$ og plot det i det komplekse plan.

Opgave 4.2

[hint hint solution](#)

Bestem modulus og argument af $z = -1 + i$.

Opgave 4.3

[hint solution](#)

Differentier og forenkl udtrykket:

$$x(t) = e^{3t} \cdot \ln(t)$$

Opgave 4.4

[hint solution](#)

Bestem modulus og argument af $z = -5i$.

Opgave 4.5

[hint solution](#)

Hvis $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$ og $\arg(w) = \frac{\pi}{2}$, bestem $\arg(z \cdot w)$.

Opgave 4.6

[hint solution](#)

Omskriv det komplekse tal til kartesisk form $z = a + ib$. Vi ved at $|z| = 2$ og $\arg(z) = \pi$.

Opgave 4.7

[hint solution](#)

Bestem modulus og argument af $z = 3i$.

Opgave 4.8

[hint solution](#)

Bestem real og imaginær delen af tallet $z = -\pi i$ og plot det i det komplekse plan.

Opgave 4.9

[hint solution](#)

Omskriv det komplekse tal til kartesisk form $z = a + ib$. Vi ved at $|z| = 5$ og $\arg(z) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$.

Opgave 4.10

[hint solution](#)

Bestem den kompleks konjugerede til $5 + 3i$.

Opgave 4.11

[hint solution](#)

Hvis $\arg(z) = \frac{-5\pi}{6}$ og $\arg(w) = \frac{\pi}{4}$, bestem $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$.

Opgave 4.12

[hint solution](#)

Beskriv geometrisk eller lav en skitse af den mængde af punkter z i det komplekse plan som opfylder kravet: $|z| = 2$.

Opgave 4.13

[hint solution](#)

Omskriv det komplekse tal til kartesisk form $z = a + ib$. Vi ved at $|z| = 1$ og $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$.

Opgave 4.14

[hint solution](#)

Bestem modulus og argument af $z = -2$.

Opgave 4.15

[hint solution](#)

Beskriv geometrisk eller lav en skitse af den mængde af punkter z i det komplekse plan som opfylder kravet: $|z - 3 + 4i| \leq 5$.

Opgave 4.16

[hint solution](#)

Forenkl udtrykket $(4 + i)(4 - i)$.

Opgave 4.17

[hint](#) [hint solution](#)

Benyt de Moivres sætning til at finde en trigonometrisk identitet (omskrivningsregel) for $\cos(3\theta)$ ud fra $\cos(\theta)$ og en tilsvarende for $\sin(3\theta)$ ud fra $\sin(\theta)$.

Opgave 4.18

[hint solution](#)

Bevis at $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

Opgave 4.19

[hint solution](#)

Bestem de tre kubikrødder af $-8i$.

Opgave 4.20

[hint solution](#)

Bestem den kompleks konjugerede til $-3 - 5i$.

Opgave 4.21

[hint solution](#)

Find alle komplekse løsninger til ligningen

$$z^4 + 1 - i\sqrt{3} = 0$$

Opgave 4.22

[hint solution](#)

Find alle løsninger til $z^5 + a^5 = 0$, når a er et positivt reelt tal.

5 Matematik facts der er gode at kunne

Brøker

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$\frac{a \cdot b}{c \cdot b} = \frac{a}{c}$$

Potenser

$$a^0 = 1$$

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Logaritmer

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log(a^b) = b \cdot \log(a)$$

$$\log(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\log_{10}(10) = 1$$

Afledte

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2 \cdot x$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

Afledte, regneregler

definition $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx}[g(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Komplekse tal

$$\text{Kartesisk form} \quad z = a + i \cdot b$$

$$\text{Polær form} \quad z = m \cdot e^{i \cdot \theta}$$

$$e^{i \cdot \theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$$

$$m = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + n \cdot \pi \quad n \in 0, 1 \text{ afhængig af } a \text{ og } b$$

Integraler

$$\int 1 \, dx = x + k$$

$$\int x \, dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 + k$$

$$\int x^2 \, dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 + k$$

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + k$$

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + k$$

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + k$$

$$\int \exp(x) \, dx = \exp(x) + k$$

$$\int \ln(x) \, dx = x \cdot \ln(x) - x + k$$

Omskrivning af integraler

$$\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int [f(x) \cdot g'(x)] \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

Taylor udviklinger

$$\text{taylor om } x_0 \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots$$

$$\text{taylor sum} \quad f(x) = \sum_k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

$$\text{taylor} \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$\text{taylor} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$\text{taylor} \quad \exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Navngivne funktioner

$$\text{ret linje} \quad y = a \cdot x + b$$

$$\text{parabel} \quad y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\text{hyperbel} \quad y = a \cdot x^{-1}$$

Blandet

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1$$

$$e = 2.718281\dots$$

$$\pi = 3.14159\dots$$

6 Hints

Første hint til 1.1

[Tilbage til opgave 1.1](#)

Vær særligt opmærksom på dimensionerne af matricerne.

For at to matricer kan lægges sammen og trækkes fra hinanden skal de have samme dimensioner

Første hint til 1.2

[Tilbage til opgave 1.2](#)

Bemærk at der kun er opgivet en koefficient matrice

Lad hhv. første anden og tredje ligning være lig k_1 , k_2 og k_3 da resultatmatricen ikke er opgivet, og matricen ikke står på udvidet matrice form.

Første hint til 1.3

[Tilbage til opgave 1.3](#)

Benyt at hvert led kan differentieres for sig.

Bemærk derudover at første led er et produkt, der kan differentieres via produktreglen: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Første hint til 1.4

[Tilbage til opgave 1.4](#)

Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:

$$A : m \times n \quad \wedge \quad B : n \times p$$

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Første hint til 1.5

[Tilbage til opgave 1.5](#)

Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:

$$A : m \times n \quad \wedge \quad B : n \times p$$

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Første hint til 1.6[Tilbage til opgave 1.6](#)

Værdien af udtrykket er defineret da matricerne har samme mål

To matricer trækkes fra hinanden som vist nedenfor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix}$$

Første hint til 1.7[Tilbage til opgave 1.7](#)

Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:

$$A : m \times n \quad \wedge \quad B : n \times p$$

Første hint til 1.8[Tilbage til opgave 1.8](#)

Værdien af udtrykket er defineret da matricerne har samme mål

To matricer trækkes fra hinanden som vist nedenfor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix}$$

Første hint til 1.9[Tilbage til opgave 1.9](#)

Vær særligt opmærksom på dimensionerne af matricerne.

For at to matricer kan lægges sammen og trækkes fra hinanden skal de have samme dimensioner

Første hint til 1.10[Tilbage til opgave 1.10](#)

Transponer først matricen.

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Første hint til 1.11[Tilbage til opgave 1.11](#)

Benyt Gauss elimination, ved at skrive ligningssystemet op på udvidet matrice form.

Første hint til 1.12[Tilbage til opgave 1.12](#)

Rangen beskriver det maksimale antal lineære uafhængige rækker.

Udfør Gauss-elimination på matricen.

Tæl herefter antallet af rækker der ikke kun består af 0'er

Første hint til 1.13

[Tilbage til opgave 1.13](#)

Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:

$$A : m \times n \quad \wedge \quad B : n \times p$$

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Første hint til 1.14

[Tilbage til opgave 1.14](#)

Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:

$$A : m \times n \quad \wedge \quad B : n \times p$$

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Første hint til 1.15

[Tilbage til opgave 1.15](#)

Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:

$$A : m \times n \quad \wedge \quad B : n \times p$$

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Første hint til 1.16

[Tilbage til opgave 1.16](#)

Omskriv ligningssystemet til udvidet matrice form og udfør Gauss elimination.

Der er uendeligt mange løsninger, hvis rangen er mindre end antallet af unikke rækkevariabler.

Første hint til 1.17

[Tilbage til opgave 1.17](#)

Udfør Gauss-elimination på matricen.

Tæl herefter antallet af rækker der ikke kun består af 0'er.

Første hint til 1.18

[Tilbage til opgave 1.18](#)

Undersøg først om matricerne opfylder kravet for gange-operationen:

$$A : m \times n \quad \wedge \quad B : n \times p$$

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Første hint til 1.19

[Tilbage til opgave 1.19](#)

Undersøg først om matricerne vil komme til at opfylde kravet for gange-operationen ($A : m \times n \quad \wedge \quad B : n \times p$) efter at de to første matricer er ganget sammen.

Benyt herefter følgende metode til at opskrive regnestykket:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Første hint til 2.1

[Tilbage til opgave 2.1](#)

Benyt at hvert led kan differentieres for sig:

$$\frac{d}{dx}(1 + 2x) = \frac{d}{dx}1 + \frac{d}{dx}2x$$

Første hint til 2.2

[Tilbage til opgave 2.2](#)

Benyt formelen for Linearisering:

$$L(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Første hint til 2.3[Tilbage til opgave 2.3](#)

Reducer udtrykket enten helt eller nok til at benytte produktreglen.

Første hint til 2.4[Tilbage til opgave 2.4](#)

Linearisering $L(x)$ er givet ved:

$$L(x) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Benyt kædereglen til at bestemme $y'(x)$

Første hint til 2.5[Tilbage til opgave 2.5](#)

Se at udtrykket kan skrives som $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ og at kvotient-reglen derfor kan benyttes: $f'(x) = \left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$

Første hint til 2.6[Tilbage til opgave 2.6](#)

Benyt kædereglen til at bestemme $\frac{d}{dx} \sqrt{f(x)}$

Første hint til 2.7[Tilbage til opgave 2.7](#)

Linearisering er givet ved $L(x) = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0)$

Første hint til 2.8[Tilbage til opgave 2.8](#)

Differentier udtrykket indtil der ses et mønster Den skiftende trigonometriske funktion kan med fordel kaldes f ved den generelle løsning

Første hint til 2.9[Tilbage til opgave 2.9](#)

Hvis r stiger med 2%, svarer det til, i ligningen, at erstatte r med $1.02 \cdot r$.

Første hint til 2.10[Tilbage til opgave 2.10](#)

Den afledte af to funktioner ganget sammen kan findes ved produktreglen $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ Benyt denne til først at bestemme den dobbeltafledte

Første hint til 2.11[Tilbage til opgave 2.11](#)

Lineariser funktionen omkring $t = 2$, benyt $L(x) = h'(x_0) \cdot (x - x_0) + h(x_0)$

Første hint til 2.12[Tilbage til opgave 2.12](#)

Hvis f skal øges med 10%, svare det til at udtrykket på højre side skal være 1.1 gang større.

Første hint til 3.1[Tilbage til opgave 3.1](#)

Lineariseringen er givet ved

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Første hint til 3.2[Tilbage til opgave 3.2](#)

1. Til info $\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. Find lineariseringen af funktionen omkring et passende punkt. (Et passende punkt er et punkt du vælger som du kender resultatet på.)

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$
3. $x_0 = \text{punkt}_{\text{passende}}$ og $x = \text{punkt}_{\text{opgivet}}$
4. Find fejlen for linearisering $e(t) = \frac{f''(c)}{2}(t - x_0)^2$
5. Intervallet hvori resultatet befinder sig er $[L(x_0) + e(t), L(x_0)]$

Første hint til 3.3

[Tilbage til opgave 3.3](#)

Benyt Taylors sætning, der siger at fejlen kan skrives som

$$\text{error} = \frac{|f''(a)|}{2}(x - x_0)^2$$

hvor a ligger mellem x_0 og x .

Første hint til 3.4

[Tilbage til opgave 3.4](#)

Benyt Taylors sætning, der siger at fejlen kan skrives som

$$\text{error} = \frac{|f(a)|}{2}(x - x_0)^2$$

hvor a ligger mellem x_0 og x .

Første hint til 4.1

[Tilbage til opgave 4.1](#)

Komplekse tal er på formen $z = a + bi$

Første hint til 4.2

[Tilbage til opgave 4.2](#)

Til at bestemme modulus kan pythagoras læresætning anvendes.

For at bestemme argumentet ses der på hvordan vinklen findes til linjen der går fra origo til z

Første hint til 4.3

[Tilbage til opgave 4.3](#)

Benyt produktreglen $(\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x))) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Første hint til 4.4

[Tilbage til opgave 4.4](#)

Prøv at tegn det på det komplekse plan.

Første hint til 4.5

[Tilbage til opgave 4.5](#)

Start med at stille z og w op på eksponentiel form, med r_1 og r_2 som modulus

Første hint til 4.6

[Tilbage til opgave 4.6](#)

Husk at $\pi = 180^\circ$ og se så på hvor i det komplekse plan den vinkel svare til.

Første hint til 4.7[Tilbage til opgave 4.7](#)

Læg mærke til at z ligger på den imaginære akse. Tegn det evt. da det kan være det nemmere at se på et plot.

Første hint til 4.8[Tilbage til opgave 4.8](#)

Et komplekst tal kan skrives på formen $a + bi$

Første hint til 4.9[Tilbage til opgave 4.9](#)

Læg mærke til at $\arg(z)$ er skrevet på formen der benyttes til at bestemme argumentet til et komplekst tal i første og fjerde kvadrant.

Første hint til 4.10[Tilbage til opgave 4.10](#)

Når $z = a + bi$ så er $\bar{z} = a - bi$

Første hint til 4.11[Tilbage til opgave 4.11](#)

Skriv z og w op på eksponentiel form med r_z og r_w som modulus. Derefter kan potens regneregler benyttes til at bestemme $\arg(\frac{z}{w})$.

Første hint til 4.12[Tilbage til opgave 4.12](#)

Læg mærke til at det kun er modulus der er blevet oplyst. Argumentet kan altså have en hvilken som helst værdi.

Første hint til 4.13[Tilbage til opgave 4.13](#)

Formlen $r \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ kan benyttes til at omskrive fra polær form til kartesisk form.

Første hint til 4.14[Tilbage til opgave 4.14](#)

Prøv at tegne det ind i det komplekse plan og se hvad vinklen bliver fra den positive side af den reelle akse og hvor langt væk punktet ligger fra origo

Første hint til 4.15[Tilbage til opgave 4.15](#)

Du kan illustrere dette ved at bruge ligningen for en cirkel.

$$(a - x)^2 + (b - y)^2 = r^2$$

Hvor r er cirkelns radius og x og y fås fra det givne krav. a og b kendes ikke, da disse er de variable i cirkelns ligning.

Når denne ligning er fundet vides centrum af cirklen og dets radius.

Første hint til 4.16[Tilbage til opgave 4.16](#)

Se på tredje kvadratsætning

Første hint til 4.17[Tilbage til opgave 4.17](#)

de Moivres sætning for $n = 3$ er

$$\cos(3\theta) + i \cdot \sin(3\theta) = (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))^3$$

Første hint til 4.18[Tilbage til opgave 4.18](#)

Prøv at skriv dem op på kartesisk form $(a + bi)$.

Første hint til 4.19[Tilbage til opgave 4.19](#)

Opskriv på polær form.

Første hint til 4.20[Tilbage til opgave 4.20](#)

For at nå frem til den kompleks konjugerede ganger den imaginære del (b) med -1

Første hint til 4.21[Tilbage til opgave 4.21](#)**Første hint til 4.22**[Tilbage til opgave 4.22](#)

Isolér z i ligningen.

Andet hint til 2.3[Tilbage til opgave 2.3](#)

Betragt funktionen som en række produkter og grupper produkterne. Derefter kan produktreglen anvendes i alt tre gange. Tilbage er så at rydde op i et ret grimt udtryk ...

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}((1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x))$$

Produktreglen anvendes første gang

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dx}[(1+x)] \cdot [(1+2x)(1+3x)(1+4x)] \\ &\quad + (1+x) \cdot \frac{d}{dx}[(1+2x)(1+3x)(1+4x)] \end{aligned}$$

Produktreglen anvendes anden gang og $\frac{d}{dx}[(1+x)]$ beregnes

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot [(1+2x)(1+3x)(1+4x)] \\ &\quad + (1+x) \cdot \left(\frac{d}{dx}[(1+2x)] \cdot [(1+3x)(1+4x)] \right. \\ &\quad \left. + (1+2x) \cdot \frac{d}{dx}[(1+3x)(1+4x)] \right) \end{aligned}$$

Produktreglen anvendes tredje gang

$$\begin{aligned}
 &= (1+2x)(1+3x)(1+4x) + (1+x) \cdot \left(2 \cdot [(1+3x)(1+4x)] \right. \\
 &\quad \left. + (1+2x) \cdot \frac{d}{dx} [(1+3x)(1+4x)] \right) \\
 &= (1+2x)(1+3x)(1+4x) + (1+x) \cdot \left(2 \cdot [(1+3x)(1+4x)] \right. \\
 &\quad \left. + (1+2x) \cdot \left[\frac{d}{dx} [(1+3x)] \cdot (1+4x) + (1+3x) \cdot \frac{d}{dx} (1+4x) \right] \right) \\
 &= (1+2x)(1+3x)(1+4x) + (1+x) \cdot \left(2 \cdot (1+3x)(1+4x) \right. \\
 &\quad \left. + (1+2x) \cdot [3 \cdot (1+4x) + (1+3x) \cdot 4] \right)
 \end{aligned}$$

Vi er nu nået til det endelige udtryk, som vi ikke ønsker at forsimple mere

$$\begin{aligned}
 &= (1+2x)(1+3x)(1+4x) + (1+x) \cdot 2 \cdot (1+3x)(1+4x) \\
 &\quad + (1+x)(1+2x) \cdot 3 \cdot (1+4x) + (1+x)(1+2x)(1+3x) \cdot 4
 \end{aligned}$$

Andet hint til 2.4

[Tilbage til opgave 2.4](#)

I kædereglens

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

sættes $g(x) = x + 1$ og $f(x) = \sqrt{x}$.

Andet hint til 2.6

[Tilbage til opgave 2.6](#)

Måske gør omskrivningen $\sqrt{f(x)} = f(x)^{\frac{1}{2}}$ det lettere at overskue.

Andet hint til 2.7

[Tilbage til opgave 2.7](#)

Kædereglens $\frac{d}{dx} (g(h(x))) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ kan benyttes til at bestemme $y'(x)$

Andet hint til 2.9

[Tilbage til opgave 2.9](#)

Omskriv udtrykket til formen $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot x$ hvor x herefter kan omskrives til procent

Andet hint til 2.11

[Tilbage til opgave 2.11](#)

Benyt kædereglens til at differentiere h Benyt lineariseringen til at bestemme værdien i punktet $t = 2 + \frac{10}{\pi}$

Andet hint til 2.12

[Tilbage til opgave 2.12](#)

Udtrykket kommer til at se således ud: $F = k \cdot r^4 \cdot 1.1$

Omskriv herefter udtrykket så konstanten bliver ganget på radius r .

Andet hint til 3.3[Tilbage til opgave 3.3](#)

Benyt $x_0 = 2$ og

Andet hint til 4.2[Tilbage til opgave 4.2](#)

Formlen til at beregne $\arg(z)$ er når z ligger i anden kvadrant er

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + \pi$$

Andet hint til 4.17[Tilbage til opgave 4.17](#)

Gang parenteser ud og sammenlign siderne.

Tredje hint til 2.3[Tilbage til opgave 2.3](#)

Efter at have ganget parenteserne sammen fås

$$f(x) = 1 + 10x + 35x^2 + 50x^3 + 24x^4$$

Herefter kan udtrykket lettere differentieres.

7 Løsninger

Solution to 1.1

[Tilbage til opgave 1.1](#)

Matricerne kan ikke adderes eller trækkes fra hinanden, da matrix dimensionerne ikke stemmer overens.

Solution to 1.2

[Tilbage til opgave 1.2](#)

Da resultatmatricen ikke er opgivet, benyttes k_1 , k_2 og k_3 i stedet. Hvorefter koefficientmatricen benyttes til at opskrive ligningssystemet.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -5 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} -5y - 3z &= k_1 \\ -5x + 2y + 4z &= k_2 \\ -3x + 4y &= k_3 \end{aligned}$$

Solution to 1.3

[Tilbage til opgave 1.3](#)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x \cdot e^{-x} - x)$$

Differentier hvert led for sig

$$= \frac{d}{dx} (x \cdot e^{-x}) - \frac{d}{dx} (x)$$

Anvend produkt reglen

$$= \frac{d}{dx} (x) \cdot e^{-x} + (x) \cdot \frac{d}{dx} (e^{-x}) - 1$$

Anvend kæde reglen

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot \frac{d}{dx} (-x) - 1 \\ &= e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) - 1 \\ &= e^{-x} - x \cdot e^{-x} - 1 \\ &= e^{-x} \cdot (1 - x) - 1 \end{aligned}$$

Solution to 1.4

[Tilbage til opgave 1.4](#)

Hvert element i den resulterende matrice beregnes ved at gange den tilsvarende række fra matricen på venstre side af gangetegnet med den tilsvarende kolonne fra matricen på højre side.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 5 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 10 \cdot 5 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ -10 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 49 \\ -43 \end{bmatrix}$$

Solution to 1.5[Tilbage til opgave 1.5](#)

Hvert element i den resulterende matrice beregnes ved at gange den tilsvarende række fra matricen på venstre side af gangetegnet med den tilsvarende kolonne fra matricen på højre side.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 4 & -4 \\ 4 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 9 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot -4 & 6 \cdot 4 - 2 \cdot 7 - 2 \cdot 0 & 6 \cdot -4 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 11 \\ 10 \cdot 9 - 3 \cdot 4 + 1 \cdot -4 & 10 \cdot 4 - 3 \cdot 7 + 1 \cdot 0 & 10 \cdot -4 - 3 \cdot 0 + 1 \cdot 11 \\ -10 \cdot 9 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot -4 & -10 \cdot 4 + 5 \cdot 7 + 1 \cdot 0 & -10 \cdot -4 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 & 10 & -46 \\ 74 & 19 & -29 \\ -74 & -5 & 51 \end{bmatrix}$$

Solution to 1.6[Tilbage til opgave 1.6](#)

For at trække de to matricer fra hinanden trækker man de tilhørende elementer i de to matricer fra hinanden, således at $a_{11} - b_{11} = c_{11}$, $a_{12} - b_{12} = c_{12}$, $a_{21} - b_{21} = c_{21}$ osv.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 6 & 2 - 1 \\ 2 + 4 & 4 - 7 \\ 1 + 8 & 3 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution to 1.7[Tilbage til opgave 1.7](#)

Da matricen på højre side ikke har lige så mange rækker som matricen på venstre side har kolonner kan disse to matricer ikke ganges med hinanden.

Solution to 1.8[Tilbage til opgave 1.8](#)

For at trække de to matricer fra hinanden trækker man de tilhørende elementer i de to matricer fra hinanden, således at $a_{11} - b_{11} = c_{11}$, $a_{12} - b_{12} = c_{12}$, $a_{21} - b_{21} = c_{21}$ osv.

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 0 & 1 - 2 \\ -4 - 2 & 7 - 4 \\ -8 - 1 & 3 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 3 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution to 1.9[Tilbage til opgave 1.9](#)

Da matricerne ikke er lige store kan de ikke lægges sammen.

Solution to 1.10[Tilbage til opgave 1.10](#)

Start med at transponerer matricen på højre side af gange tegnet. Derefter hvert element i den resulterende matrice bestemmes ved at gange den tilsvarende række fra matricen på venstre side sammen med den tilsvarende kolonne fra matricen på højre side.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot [3 \ 0 \ 8]^T = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 8 \\ 10 \cdot 3 - 3 \cdot 0 + 1 \cdot 8 \\ -10 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 38 \\ -22 \end{bmatrix}$$

Solution to 1.11[Tilbage til opgave 1.11](#)

Til at starte med sættes ligningssystemet op på udvidet matrixform, hvorefter rangen bestemmes.

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -1 \\ -4x + 2y - 6z &= 2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & -6 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2+2 \cdot R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Da matricen er af rang et vil der være uendeligt mange løsninger til ligningssystemet. For at finde en af løsningerne kan man da den er af rang et, give 2 af konstanterne en tilfældig værdi og løse for den sidste. y og z bliver i dette tilfælde sat lig 0 hvorefter der løses for x

$$2x - 0 + 3 \cdot 0 = -1 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -0.5$$

Til sidst sættes værdierne ind i ligningerne for at teste løsningen

$$\begin{aligned} 2 \cdot -0.5 - 0 + 3 \cdot 0 &= -1 \Leftrightarrow -1 = -1 \\ -4 \cdot -0.5 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0 &= 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \end{aligned}$$

Solution to 1.12[Tilbage til opgave 1.12](#)

Der benyttes Gauss-elimination til at bestemme rang

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{R_3/5 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1 \rightarrow R_3} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_3 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 4 \cdot R_2 \rightarrow R_1} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 3 \cdot R_2 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Det er ikke muligt at få ren nuller på nogle rækker og den er derfor af rang 3

Solution to 1.13[Tilbage til opgave 1.13](#)

Hvert element i den resulterende matrice beregnes ved at gange den tilsvarende række fra matricen på venstre side af gangetegnet med den tilsvarende kolonne fra matricen på højre side.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 9 & 4 & -4 \\ 4 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} 9 \cdot 6 + 4 \cdot 10 - 4 \cdot -10 & 9 \cdot -2 + 4 \cdot -3 - 4 \cdot 5 & 9 \cdot -2 + 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 6 + 7 \cdot 10 + 0 \cdot -10 & 4 \cdot -2 + 7 \cdot -3 + 0 \cdot 5 & 4 \cdot -2 + 7 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ -4 \cdot 6 + 0 \cdot 10 + 11 \cdot -10 & -4 \cdot -2 + 0 \cdot -3 + 11 \cdot 5 & -4 \cdot -2 + 0 \cdot 1 + 11 \cdot 1 \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} 134 & -50 & -18 \\ 94 & -29 & -1 \\ -134 & 63 & 19 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Solution to 1.14[Tilbage til opgave 1.14](#)

Først transponeres matricen på venstre side af gangetegnet. Derefter kan hvert element i den resulterende matrice beregnes ved at gange den tilsvarende række fra matricen på venstre side af gangetegnet med den tilsvarende kolonne fra matricen på højre side.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 6 & 10 & -10 \\ -2 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 6 \cdot 6 + 10 \cdot 10 - 10 \cdot -10 & 6 \cdot -2 + 10 \cdot -3 - 10 \cdot 5 & 6 \cdot -2 + 10 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \\ -2 \cdot 6 - 3 \cdot 10 + 5 \cdot -10 & -2 \cdot -2 - 3 \cdot -3 + 5 \cdot 5 & -2 \cdot -2 - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \\ -2 \cdot 6 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot -10 & -2 \cdot -2 + 1 \cdot -3 + 1 \cdot 5 & -2 \cdot -2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 236 & -92 & -12 \\ -92 & 38 & 6 \\ -12 & 6 & 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Solution to 1.15

[Tilbage til opgave 1.15](#)

Hvert element i den resulterende matrice beregnes ved at gange den tilsvarende række fra matricen på venstre side af gangetegnet med den tilsvarende kolonne fra matricen på højre side.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 3 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 8 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 40 \\ 3 & 0 & 8 \\ 6 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Solution to 1.16

[Tilbage til opgave 1.16](#)

Ligningssystemet skrives først op på udvidet matrixform, hvorefter Gauss-elimination benyttes til at bestemme rangen.

$$\begin{aligned}
x + y - 2z &= 0 \\
-4w - x - y + 2z &= -4 \\
-2w + 3x + 3y - 6z &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 3 & -6 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 - R_1 \cdot 3 \rightarrow R_3]{R_2 + R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2 \cdot R_3 \rightarrow R_2} \\
& \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Da rangen er 2 og der er 4 ubekendte kan 2 af de ubekendte gives en tilfældig værdi. I dette tilfælde er $y = 1$ og $z = 0$. Disse værdier kan så sættes ind i ligningssystemet hvorefter de to sidste ubekendte kan bestemmes.

$$\begin{aligned}x + 1 - 2 \cdot 0 &= 0 \\-4w - x - 1 + 2 \cdot 0 &= -4 \\-2w + 3x + 3 \cdot 1 - 6 \cdot 0 &= -2\end{aligned}$$

x kan nu bestemmes ud fra øverste ligning, hvorefter denne kan indsættes i en af ligningerne under for at bestemme w

$$\begin{aligned}x + 1 - 2 \cdot 0 &= 0 \leftrightarrow x = -1 \\-4w - (-1) - 1 + 2 \cdot 0 &= -4 \leftrightarrow w = 1\end{aligned}$$

Til sidst indsættes værdierne i alle ligningerne for at tjekke efter

$$\begin{aligned}w = 1 \quad x = -1 \quad y = 1 \quad z = 0 \\-1 + 1 - 2 \cdot 0 &= 0 \leftrightarrow 0 = 0 \\-4 \cdot 1 - (-1) - 1 + 2 \cdot 0 &= -4 \leftrightarrow -4 = -4 \\-2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 - 6 \cdot 0 &= -2 \leftrightarrow -2 = -2\end{aligned}$$

Solution to 1.17

[Tilbage til opgave 1.17](#)

Der benyttes Gauss-elimination til at bestemme matrixens rang

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\substack{R_2/3 \rightarrow R_2 \\ R_1/3 \rightarrow R_1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ -1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 4 \cdot R_2 \rightarrow R_3} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ -1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 5 & \frac{20}{3} \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_3 - 5 \cdot R_1 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ -1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Det er ikke muligt at få flere rækker med rene nuller, og matrixen er derfor af rang 2

Solution to 1.18

[Tilbage til opgave 1.18](#)

Resultatet bestemmes ved at gange a_{11} med b_{11} , a_{12} med b_{21} og a_{13} med b_{31} og derefter lægge disse tal sammen

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 31$$

Solution to 1.19[Tilbage til opgave 1.19](#)

Først ganges matricerne i parentes sammen hvorefter den resulterende matrix kan ganges sammen med matricen på højre side af gange tegnet.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 3 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 8 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} 15 & 0 & 40 \\ 3 & 0 & 8 \\ 6 & 0 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 10 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} 15 \cdot 6 + 0 \cdot 10 + 40 \cdot -10 & 15 \cdot -2 + 0 \cdot -3 + 40 \cdot 5 & 15 \cdot -2 + 0 \cdot 1 + 40 \cdot 1 \\ 3 \cdot 6 + 0 \cdot 10 + 8 \cdot -10 & 3 \cdot -2 + 0 \cdot -3 + 8 \cdot 5 & 3 \cdot -2 + 0 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \\ 6 \cdot 6 + 0 \cdot 10 + 16 \cdot -10 & 6 \cdot -2 + 0 \cdot -3 + 16 \cdot 5 & 6 \cdot -2 + 0 \cdot 1 + 16 \cdot 1 \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} -310 & 170 & 10 \\ -62 & 34 & 2 \\ -124 & 68 & 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Solution to 2.1[Tilbage til opgave 2.1](#)

Hvert led differentieres for sig selv, derved fås:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \\
 f'(x) &= 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3
 \end{aligned}$$

Solution to 2.2[Tilbage til opgave 2.2](#)

For at benytte ligningen for tangentlinjen $L(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, bestemmes først den afledte, ved at differentiere hvert led for sig.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \\
 f'(x) &= 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3
 \end{aligned}$$

Herefter indsættes der i ligningen for tangentlinjen

$$\begin{aligned}
 L(x) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \\
 &= (1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3) \cdot (x - 2) + (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \\
 &= (49) \cdot (x - 2) + 31 \\
 &= (49x - 98) + 31 \\
 &= 49x - 67
 \end{aligned}$$

Altså bliver løsningen på tangentlinjen til punktet $x=2$

$$L(x) = 49x - 67$$

Solution to 2.3

[Tilbage til opgave 2.3](#)

Først ganges parenteserne sammen to og to

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x) \\ &= (1+2x+x+2x^2)(1+4x+3x+12x^2) \\ &= (1+3x+2x^2)(1+7x+12x^2) \end{aligned}$$

Herefter kan der enten benyttes produktregel, ellers kan parenteserne ganges sammen igen. Ved denne løsning vælges sidste mulighed

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+3x+2x^2)(1+7x+12x^2) \\ &= 1+7x+12x^2+3x+21x^2+36x^3+2x^2+14x^3+24x^4 \\ &= 1+10x+35x^2+50x^3+24x^4 \end{aligned}$$

Til slut kan hvert led differentieres for sig

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+10x+35x^2+50x^3+24x^4 \\ f'(x) &= 0+10+70x+150x^2+96x^3 \end{aligned}$$

Solution to 2.4

[Tilbage til opgave 2.4](#)

Lineariseringen er givet ved $L(x) = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0)$. Det er derfor nødvendigt at bestemme den afledte, hertil benyttes kædereglen:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \sqrt{g(x)} & f'(g(x)) &= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \\ g(x) &= x+1 & g'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Indsættes dette i kædereglen fås

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(g(x)) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 \end{aligned}$$

Da $y'(x)$ nu kendes, kan der indsættes i ligningen for linearisering.

$$\begin{aligned}
 L(x) &= y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3+1}}(x - 3) + \sqrt{1+3} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{4}}(x - 3) + \sqrt{4} \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 2}(x - 3) + 2 \\
 &= \frac{1}{4}(x - 3) + 2 \\
 &= \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + 2 \\
 &= \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + \frac{8}{4} \\
 &= \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

Altså bliver løsningen på tangentlinjen til punktet $x=3$

$$L(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

Solution to 2.5

[Tilbage til opgave 2.5](#)

Parenteserne i hhv. nævner og tæller ganges sammen og Kvotientreglen $f'(x) = \left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$ benyttes. Herefter bestemmes $g(x)$, g' , h og h'

$$\begin{aligned}
 g(x) &= x^5 + x^3 + 2x^2 + 2 \\
 g'(x) &= 5x^4 + 3x^2 + 4x \\
 h(x) &= x^5 + 2x^3 + x^2 + 2 \\
 h'(x) &= 5x^4 + 6x^2 + 2x
 \end{aligned}$$

Disse kan nu indsættes i Kvotientreglen, derved fås følgende udtryk

$$f'(x) = \frac{(5x^4 + 3x^2 + 4x) \cdot (x^5 + 2x^3 + x^2 + 2) - (x^5 + x^3 + 2x^2 + 2) \cdot (5x^4 + 6x^2 + 2x)}{(x^5 + 2x^3 + x^2 + 2)^2}$$

Det er ikke nødvendigt at reducere dette udtryk yderligere.

Solution to 2.6

[Tilbage til opgave 2.6](#)

For at vise at $\frac{d}{dx} \sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ gælder, benyttes kædereolen (bemærk navn-givning):

$$\frac{d}{dx}(h(g(x))) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Samt at $\sqrt{f(x)} = f(x)^{\frac{1}{2}}$

Først bestemmes h og g samt deres afledte

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{x} \\ h'(x) &= \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ g(x) &= f(x) \\ g'(x) &= f'(x) \end{aligned}$$

Disse kan nu indsættes i udtrykket for kædereolen:

$$\frac{d}{dx} \sqrt{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Det er nu bevist at udtrykket er gældende. Herefter kan $\frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + 1}$ bestemmes:

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + 1} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Solution to 2.7

[Tilbage til opgave 2.7](#)

Benytter kædereolen ($\frac{d}{dx}(g(h(x))) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$) for at differentiere.

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{3/2} & g'(x) &= \frac{3}{2} x^{1/2} \\ h(x) &= 1 + x^{2/3} & h'(x) &= \frac{2}{3} x^{-1/3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= \frac{3}{2} \cdot (1 + x^{2/3})^{1/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} \\ &= \sqrt{1 + x^{2/3}} \cdot x^{-1/3} \end{aligned}$$

Bestemmer værdier

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(1) = (1 + 1^{2/3})^{3/2} = 2^{3/2} = \sqrt{8} \\ f'(x_0) &= f'(1) = \sqrt{1 + 1^{2/3}} \cdot 1^{-1/3} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Indsætter i udtrykket for $L(x)$

$$\begin{aligned}L(x) &= \sqrt{8} + \sqrt{2} \cdot (x - 1) \\&= 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot (x - 1) \\&= \sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}(x + 1)\end{aligned}$$

Solution to 2.8

[Tilbage til opgave 2.8](#)

Udtrykket $f(x) = \cos(ax)$ differentieres indtil der ses et mønster

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos(ax) \\f'(x) &= a \cdot -\sin(ax) = -a \cdot \sin(ax) \\f''(x) &= a^2 \cdot -\cos(ax) = -a^2 \cdot \cos(ax) \\f'''(x) &= a^3 \cdot \sin(ax) = a^3 \cdot \sin(ax) \\f''''(x) &= a^4 \cdot \cos(ax) = a^4 \cdot \cos(ax)\end{aligned}$$

Der ses et mønster med a der kan beskrives ved a^n . Når der tages et lige antal afledte (n er lige), er den afledte funktion en cosinus. Ved et ulige antal afledte er den afledte funktion sinus. Desuden skifter fortegnet på funktionen når der tages to afledte. Alt i alt betyder det at funktionen kan skrives som :

$$f^n(x) = \begin{cases} (-1)^{(n+1)/2} \cdot a^n \cdot \sin(a \cdot x) & n \text{ er ulige} \\ (-1)^{n/2} \cdot a^n \cdot \cos(a \cdot x) & n \text{ er lige} \end{cases}$$

Solution to 2.9

[Tilbage til opgave 2.9](#)

r erstattes med $1.02r$

$$\begin{aligned}V &= \frac{4}{3}\pi(1.02r)^3 \\&= \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 1.02^3 \\&= \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 1.0612\end{aligned}$$

Der ses at V stiger med ca. $1.0612 = 6.1\%$

Solution to 2.10

[Tilbage til opgave 2.10](#)

Den dobbeltafledte bestemmes ved at benytte produktreglen på produktreglen. $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\begin{aligned}(fg)' &= f'g + fg' \\(fg)'' &= (f''g + f'g') + (f'g' + fg'') \\&= f''g + 2f'g' + fg''\end{aligned}$$

Solution to 2.11[Tilbage til opgave 2.11](#)

Funktionen lineariseres omkring $t = 2$, ved brug af $L(x) = h'(x_0) \cdot (x - x_0) + h(x_0)$

h differentieres ved brug af kædereolen $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = -\sin(x)$$

$$g(x) = \frac{\pi t}{4}$$

$$g'(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = -\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$$

Linearisering omkring $t = 2$ opskrives

$$\begin{aligned} L(x) &= h'(2) \cdot (x - 2) + h(2) \\ &= -\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi 2}{4}\right) \cdot (x - 2) + \cos\left(\frac{\pi 2}{4}\right) \\ &= -\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot (x - 2) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{\pi}{4}(x - 2) = \frac{-\pi x + 2\pi}{4} \end{aligned}$$

Herefter indsættes $t = 2 + \frac{\pi}{10}$

$$\begin{aligned} L\left(2 + \frac{\pi}{10}\right) &= \frac{-\pi(2 + \frac{\pi}{10}) + 2\pi}{4} \\ &= \frac{-2\pi - \frac{\pi^2}{10} + 2\pi}{4} \\ &= \frac{-\pi^2}{40} \approx -0,25 \end{aligned}$$

Solution to 2.12[Tilbage til opgave 2.12](#)

Først ganges højre side med 1.1 da dette øger F med 10% Herefter omskrives udtrykket således r ganges med denne nye konstant

$$\begin{aligned} F &= k \cdot r^4 \cdot 1,1 \\ &= k \cdot (r \cdot (1.1)^{\frac{1}{4}})^4 \\ &= k \cdot (r \cdot 1.0241)^4 \end{aligned}$$

Det kan nu ses at r skal øges med 0.0241 eller 2.4% for at øge F med 10%

Solution to 3.1

[Tilbage til opgave 3.1](#)

Lineariser nedenstående funktion omkring $x_0 = \pi$

$$f(x) = \sin(x)$$

Lineariseringen er givet ved

$$\begin{aligned} L(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ &= f(\pi) + f'(\pi) \cdot (x - \pi) \\ &= \sin(\pi) + \left. \frac{d}{dx}(\sin(x)) \right|_{x=\pi} \cdot (x - \pi) \\ &= 0 + \cos(x)|_{x=\pi} \cdot (x - \pi) \\ &= -1 \cdot (x - \pi) \\ &= \pi - x \end{aligned}$$

Solution to 3.2

[Tilbage til opgave 3.2](#)

Den funktion der skal lineariseres er $f(x) = \cos(x)$, vi skal nu vælge et passende punkt at linearisere omkring. Punktet skal være tæt ved 49° og vi skal kende funktions værdien og den afledte i punktet. Derfor vælges $x_0 = 45^\circ = \pi/4$ Lineariseringen bliver så

$$\begin{aligned} L(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x - \pi/4) \end{aligned}$$

Punktet $49^\circ = 49 \cdot \pi/180$ indsættes i lineariseringen. Det giver.

$$\begin{aligned} \cos(49^\circ) &= L(49 \cdot \pi/180) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (49 \cdot \pi/180 - \pi/4) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (4 \cdot \pi/180) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\pi/45) \\ &= 0.6577 \end{aligned}$$

Herefter findes funktionen for fejlen for lineariseringen:

$$e(t) = \frac{f''(c)}{2}(t - x_0)^2$$

hvor $c = x_0 = 45^\circ$

$$e(t) = \frac{-\cos(\pi/4)}{2}(t - \pi/4)^2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}(t - \pi/4)^2$$

$t = 49^\circ$ indsættes

$$\begin{aligned} e\left(\frac{49\pi}{180}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{49\pi}{180} - 48\pi/180\right)^2 \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{45}\right)^2 \\ &= -0.0017 \end{aligned}$$

Intervallene hvori resultatet af $\cos(49^\circ)$ ligger med sikkerhed er:

$$[0.6577 - 0,0017; 0.6577] = [0.6560; 0.6577]$$

Solution to 3.3

[Tilbage til opgave 3.3](#)

Givet

$$\begin{aligned} g(2) &= 1 \\ g'(2) &= 2 \\ |g'(x)| &< 1 + (x - 2)^2 \quad \text{for alle } x > 0 \end{aligned}$$

Bestem den bedste approksimation af $g(1.8)$.

Vi har fået nok information til at linearisere $g(x)$ omkring $x = 2$.

$$\begin{aligned} L(x) &= g(2) + g'(z) \cdot (x - 2) \\ &= 1 + 2 \cdot (x - 2) \end{aligned}$$

Lineariseringen benyttes til at estimere værdien af $g(1.8)$

$$\begin{aligned} g(1.8) &\simeq L(1.8) \\ &= 1 + 2 \cdot (1.8 - 2) \\ &= 1 - 0.4 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

Fejlen på lineariseringen er begrænset af

$$\frac{f''(a)}{2} \cdot (x - 2)^2$$

Den værdi indsættes i udtrykket for fejlen

$$\begin{aligned}\text{error} &= \frac{|f''(a)|}{2}(1.8 - 2)^2 \leq \frac{1.04}{2} \cdot (1.8 - 2)^2 \\ &= \frac{1.04}{2} \cdot 0.2^2 \\ &= 0.0104 \cdot 2 \\ &= 0.0208\end{aligned}$$

Samlet set kan man sige at $g(1.8)$ er i intervallet

$$0.6 - 0.0208 \leq g(1.8) \leq 0.6 + 0.0208$$

Solution to 3.4

[Tilbage til opgave 3.4](#)

Lineariseringen er givet ved

$$\begin{aligned}h(\theta) &= f(\theta) + f'(0) \cdot \theta \\ &= \sin(0) + \left. \frac{d}{dx} \sin(x) \right|_{x=0} \cdot \theta \\ &= 0 + \cos(0) \cdot \theta\end{aligned}$$

Ikke afsluttet

Solution to 4.1

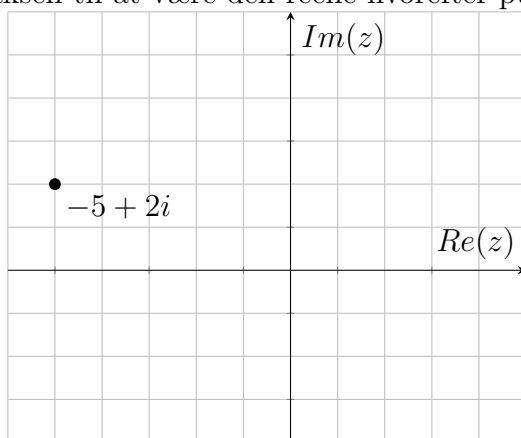
[Tilbage til opgave 4.1](#)

Den reelle del er den del der ikke er ganget med i og den imaginære er den der er ganget med i

$$\operatorname{Re}(z) = -5$$

$$\operatorname{Im}(z) = 2$$

For at tegne det ind på en graf sættes y-aksen til at være den imaginære og x-aksen til at være den reelle hvorefter punktet tegnes ind.



Solution to 4.2[Tilbage til opgave 4.2](#)

Til at bestemme modulus benyttes Pythagoras' læresætning.

For at bestemme argumentet skal man først bestemme hvilken kvadrant z ligger i. I dette tilfælde ligger den i anden kvadrant og formlen $\arg(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + \pi$ benyttes derfor.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3 \cdot \pi}{4}$$

Solution to 4.3[Tilbage til opgave 4.3](#)

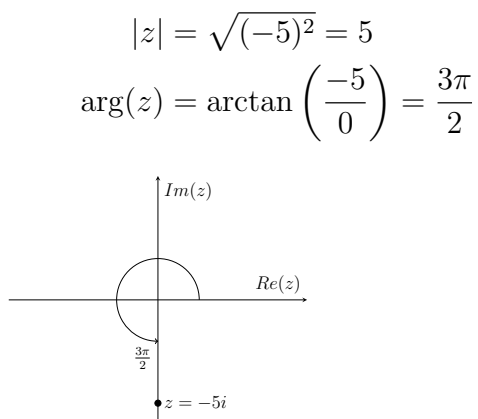
$$x(t) = e^{3t} \cdot \ln(t)$$

Produktreglen $\left(\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\right)$ benyttes da $x(t)$ kan skrives som to separate funktioner ganget sammen. Desuden benyttes $(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$ og $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$$x'(t) = 3 \cdot e^{3t} \cdot \ln(t) + e^{3t} \cdot \frac{1}{t} = e^{3t} \left(3 \ln(t) + \frac{1}{t}\right)$$

Solution to 4.4[Tilbage til opgave 4.4](#)

$$z = -5i$$



Bemærk at vinklen er $\frac{3\pi}{2}$ da den ligger på den negative del af den imaginære akse og at modulus er 5 da den reelle del er 0 og længden derfor er lig den imaginære del.

Solution to 4.5[Tilbage til opgave 4.5](#)

$$\arg(z) = \frac{3\pi}{4} \quad \arg(w) = \frac{\pi}{2}$$

z og w skrives på polær form, med modulus på henholdsvis r_1 og r_2 . Derefter ganges disse to sammen og der bruges potens-regneregler til at bestemme argumentet

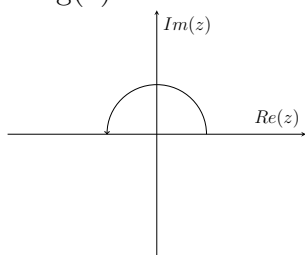
$$z \cdot w = r_1 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}} \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2})} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \frac{5\pi}{4}}$$

$$\arg(z \cdot w) = \frac{5\pi}{4}$$

Solution to 4.6[Tilbage til opgave 4.6](#)

$$|z| = 2 \quad \arg(z) = \pi.$$

Bemærk at $\arg(z) = \pi$ og der derfor ikke er nogen imaginær del. Desuden viser $\arg(z)$ at den reelle del er negativ



Dette betyder at $z = -2$ da modulus er 2

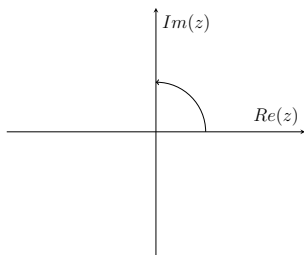
Solution to 4.7[Tilbage til opgave 4.7](#)

$$z = 3i$$

Bemærk at der ikke er nogen reel del, dette koblet sammen med at den imaginære del er positiv betyder at argumentet er $\frac{\pi}{2}$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2}$$

$$|z| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$$



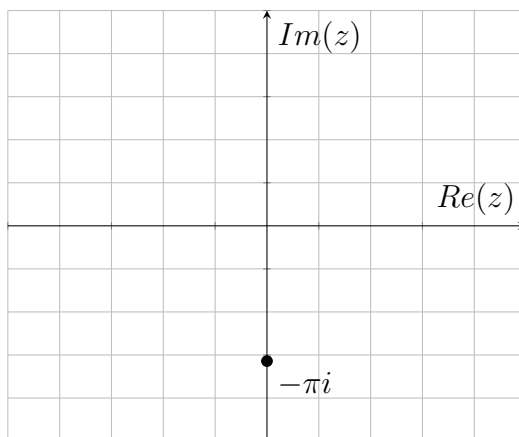
Solution to 4.8

[Tilbage til opgave 4.8](#)

$$z = -\pi i$$

$$\operatorname{Re}(z) = 0$$

$$\operatorname{Im}(z) = -\pi$$



Solution to 4.9

[Tilbage til opgave 4.9](#)

$$|z| = 5 \quad \arg(z) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$$

Ses der på formelen for argumentet til z i første og fjerde kvadrant $\arg(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}\right)$ ses der at den imaginære del er 3 og den reelle er 4. Dette kan så tjekkes efter ved at se om modsat giver 5 hvis den imaginære del er 3 og den reelle er 4. $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$$z = 4 + 3i$$

Solution to 4.10

[Tilbage til opgave 4.10](#)

$$z = 5 + 3i$$

$$\bar{z} = 5 - 3i$$

Solution to 4.11[Tilbage til opgave 4.11](#)

$$\arg(z) = \frac{-5\pi}{6} \quad \arg(w) = \frac{\pi}{4}$$

z og w skrives på eksponentiel form, med modulus på henholdsvis r_z og r_w . Derefter divideres disse to med hinanden og der bruges potens-regneregler til at bestemme argumentet.

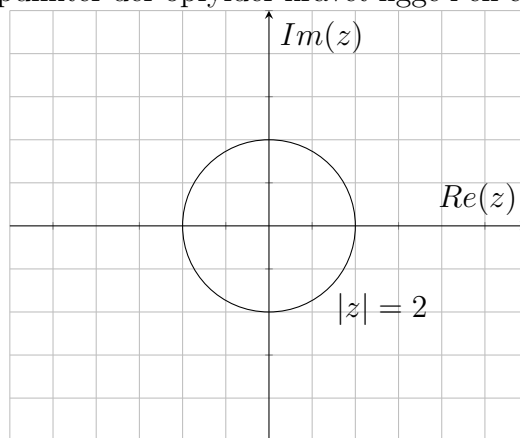
$$\frac{z}{w} = \frac{r_z \cdot e^{i\frac{-5\pi}{6}}}{r_w \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{r_z}{r_w} \cdot e^{i(\frac{-5\pi}{6} - \frac{\pi}{4})} = R \cdot e^{i(\frac{-10\pi}{12} - \frac{3\pi}{12})} = R \cdot e^{i\frac{-13\pi}{12}}$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{-13\pi}{12}$$

Solution to 4.12[Tilbage til opgave 4.12](#)

$$|z| = 2$$

$|z|$ beskriver hvor langt væk fra origo punktet ligger. Derfor vil mængden af punkter der opfylder kravet ligge i en cirkel med radius 2 og center i origo.

**Solution to 4.13**[Tilbage til opgave 4.13](#)

$$|z| = 1 \quad \arg(z) = \frac{3\pi}{4}$$

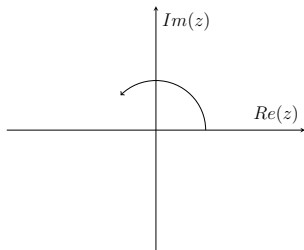
Til at omskrive fra polær til kartesisk bruges formelen $r \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

$$z = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) =$$

$$1 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1 \cdot i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Der tjekkes efter ved at beregne modulus

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}^2}{2^2} + \frac{\sqrt{2}^2}{2^2}} = \sqrt{1} = 1$$



Solution to 4.14

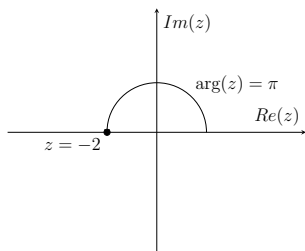
[Tilbage til opgave 4.14](#)

$$z = -2$$

Da der ikke er en kompleks del er modulus 2 og da punktet ligger på den negative del af den reelle akse er argumentet π

$$|z| = 2$$

$$\arg(z) = \pi$$



Solution to 4.15

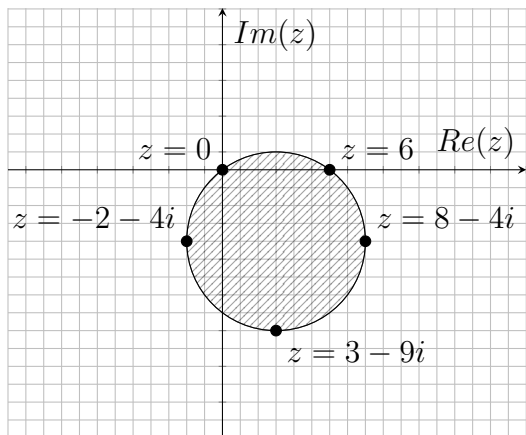
[Tilbage til opgave 4.15](#)

$$|z - 3 + 4i| \leq 5$$

Ligningen omskrives så a og b komponenterne af z kan bestemmes. Derefter bestemmes nogle af de z værdier som udfylder $|z - 3 + 4i| = 5$, disse punkter vil så kunne forbindes til en cirkel, alle punkter inden for denne cirkel vil således opfylde kriteriet $|z - 3 + 4i| \leq 5$

$$|z - 3 + 4i| = \sqrt{(a - 3)^2 + (b + 4)^2}$$

$$(a - 3)^2 + (b + 4)^2 \leq 25$$



Det skraverede område indeholder mængden af punkter z som opfylder kriteriet $|z - 3 + 4i| \leq 5$. Bemærk at cirkelns center ligger i punktet $(3, -4)$.

Solution to 4.16

[Tilbage til opgave 4.16](#)

$$(4 + i)(4 - i) = 4 \cdot 4 + 4i - 4i - i^2 = 16 + 1 = 17$$

Solution to 4.17

[Tilbage til opgave 4.17](#)

$$\begin{aligned} A &= \cos(3\theta) + i \cdot \sin(3\theta) \\ &= (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))^3 \\ &= (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) \cdot (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 + 2 \cdot i \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta)^3 - \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)^2 + 2i \cdot \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \\ &\quad + i \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)^2 - i \cdot \sin(\theta)^3 - 2 \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)^2 \\ &= \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)^2 + 3i \cdot \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - i \cdot \sin(\theta)^3 \end{aligned}$$

Ved at sammenligne de reelle og de imaginære dele på begge sider fåes;

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos(\theta)^3 - 3 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)^2 \\ &= \cos(\theta)^3 - 3 \cdot \cos(\theta) \cdot (1 - \cos(\theta)^2) \\ &= 4 \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta) \end{aligned}$$

Tilsvarende for $\sin(3\theta)$

$$\begin{aligned} \sin(3\theta) &= 3 \cdot \cos(\theta)^2 \cdot \sin(\theta) - \sin(\theta)^3 \\ &= 3 \cdot (1 - \sin(\theta)^2) \cdot \sin(\theta) - \sin(\theta)^3 \\ &= 3 \cdot \sin(\theta) - 4 \sin(\theta)^3 \end{aligned}$$

Solution to 4.18[Tilbage til opgave 4.18](#)

$\overline{z+w}$ skrives op på kartesisk form $(a+bi)$ og der omskrives.

$$\begin{aligned}\overline{z+w} &= (a_z + a_w) - (b_z i + b_w i) = a_z - b_z i + a_w - b_w i = \\ &= (a_z - b_z i) + (a_w - b_w i) = \bar{z} + \bar{w}\end{aligned}$$

Solution to 4.19[Tilbage til opgave 4.19](#)

Skriv $8i$ på polær form. Vi skal løse ligningen

$$\begin{aligned}\omega^3 &= -8i \\ (r_\omega \cdot e^{i\theta_\omega})^3 &= 8 \cdot e^{i3\pi/2} \\ r_\omega^3 \cdot e^{i\theta_\omega 3} &= 8 \cdot e^{i3\pi/2} \\ r_\omega &= 2 \quad \text{og} \quad \theta_\omega = \pi/2 + n \cdot 2\pi/3 \quad n = 1, 2, 3\end{aligned}$$

Dermed har vi løsningerne:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2 \cdot e^{i\pi/2} = 2i \\ \omega_2 &= 2 \cdot e^{i7\pi/6} \\ \omega_3 &= 2 \cdot e^{i11\pi/6}\end{aligned}$$

Solution to 4.20[Tilbage til opgave 4.20](#)

For at nå frem til den kompleks konjugerede ganger den imaginære del (b) med -1

$$\begin{aligned}z &= -3 - 5i \\ \bar{z} &= -3 + 5i\end{aligned}$$

Solution to 4.21[Tilbage til opgave 4.21](#)**Solution to 4.22**[Tilbage til opgave 4.22](#)

$z^5 + a^5 = 0$, når a er et positivt reelt tal.

$$\begin{aligned}z^5 + a^5 &= 0 \rightarrow z^5 = -a^5 \\ z &= \sqrt[5]{-a^5} = \sqrt[5]{-1} \cdot \sqrt[5]{a^5} = -1^{\frac{1}{5}} \cdot a = -a\end{aligned}$$

Todo list

Ikke afsluttet	38
--------------------------	----