Треугольник Паскаля как группа

Треугольник Паскаля можно представить как группу, где каждая строка - это элемент группы.

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
g_0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
g_1 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
g_2 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
g_3 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
g_4 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
g_5 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
g_6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
g_7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
... & & & & & & & & ... & & & & & & &
\end{array}
$$

Добавим операцию '$+$', со свойством $g_{\mathrm{n}} + g_{\mathrm{m}} = g_{\mathrm{n+m}}$.

Порядок чисел в элементе важен для операции, поэтому представим их как кортежи:

$$g_0 = \{1\}, \qquad g_1 = \{1, 1\}, \qquad g_2 = \{1, 2, 1\}, \qquad ...$$

Определим операцию как умножение столбиком без переноса разрядов.

Например,

$$
g_1 + g_2 = \begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 2 & 1 \\
(+) & & & 1 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 2 & 1 \\
+ & 1 & 2 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 3 & 1
\end{array} = g_3
$$

или

$$g_4 + g_2 = \begin{array}{c|ccccccc}
 & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
(+) & & & & & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
+ & & 2 & 8 & 12 & 8 & 2 & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
\hline
 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array} = g_6$$

Нейтральным элементом в группе является g_0, т.к. для любого n выполняется $g_\mathrm{n} + g_0 = g_\mathrm{n}$.

Треугольник Паскаля может быть определен для отрицательных строк[1], которые будут обратными элементами группы. Элементы треугольника - биномиальные коэффициенты, который можно определеить при $\binom{n}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$, а $n \in \mathbb{Z}$, т.е. n может быть отрицательным. Пример, отрицательных строк треугольника:

$$\begin{array}{lcccccccc}
\ldots & & & & \ldots & & & \\
g_{-3} & 1 & -3 & 6 & -10 & 15 & -21 & \ldots \\
g_{-2} & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & \ldots \\
g_{-1} & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots \\
g_0 & 1 & & & & & &
\end{array}$$

Примеры операции с отрицательными элементами:

$$g_{-1} + g_1 = \begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots \\
(+) & & & & & 1 & 1 & \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots \\
+ & & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \ldots \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots
\end{array} = g_0$$

$$g_{-2} + g_1 = \begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & \ldots \\
(+) & & & & & 1 & 1 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & \ldots \\
+ & & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & \ldots \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots
\end{array} = g_{-1}$$

В силу наличия свойств ассоциативности и коммутативности у целых чисел, получаем, что данное множество с операцией также обладает этими свойствами. В нем есть нейтральный элемент и для каждого элемента есть обратный, отсюда следует, что оно является группой (обозначим G). Также эта группа изоморфна группе целых чисел по сложению, $(G, +) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

[1]Конкретная математика. 1998. Грэхем, Кнут, Поташник. Стр. 189, таблица 189