

Grafi

Gianluigi Zavattaro
Dip. di Informatica – Scienza e Ingegneria
Università di Bologna
gianluigi.zavattaro@unibo.it

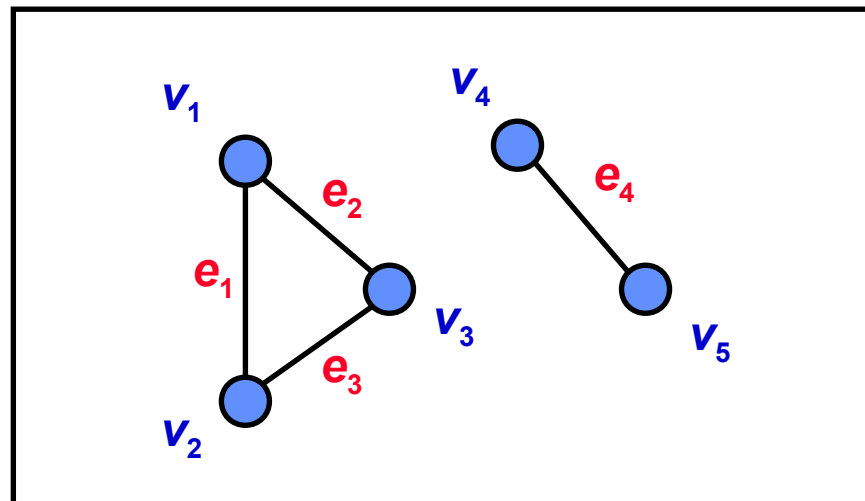
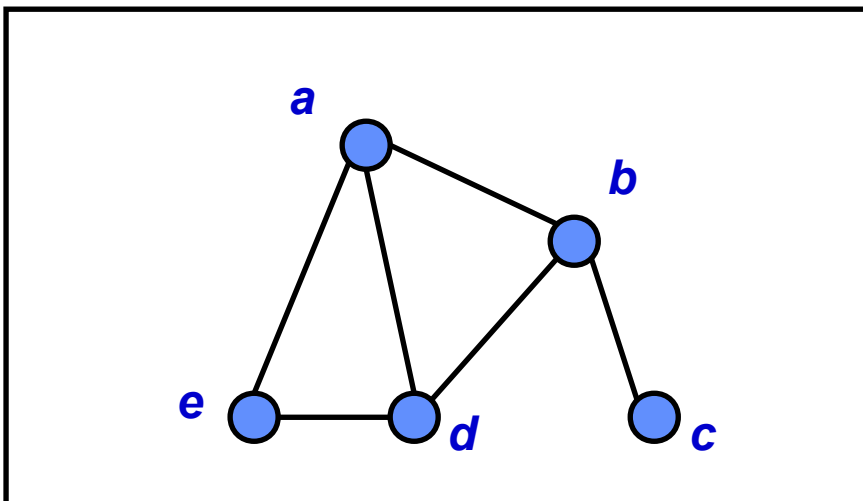
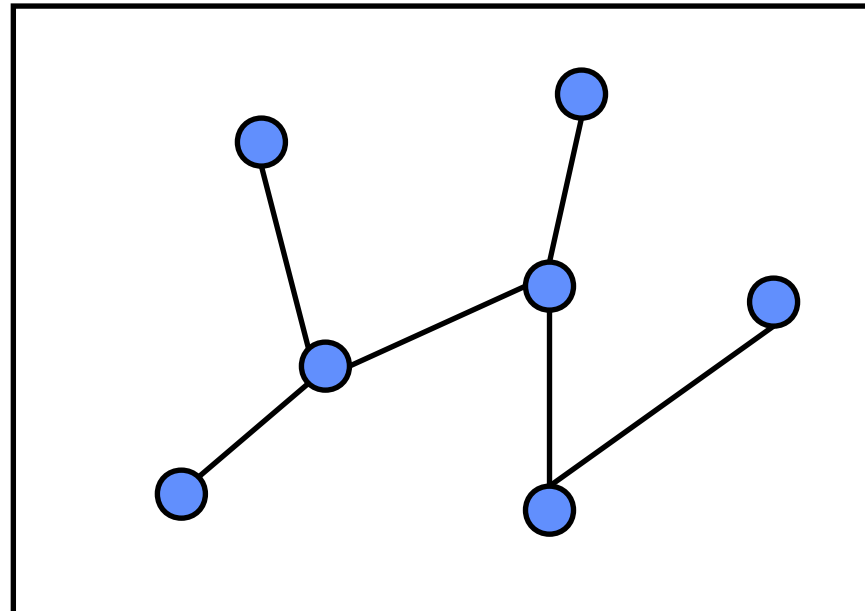
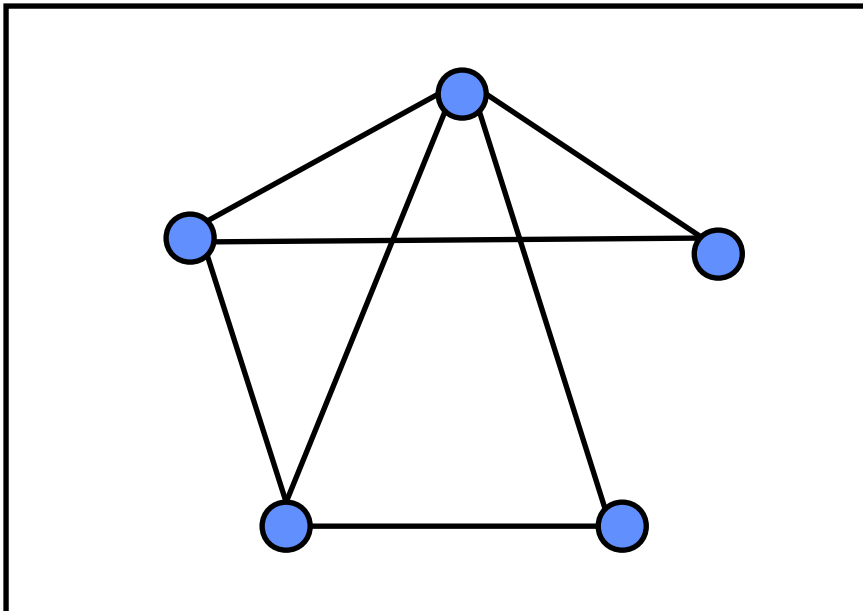
Slide realizzate a partire da materiale fornito dal Prof. Moreno Marzolla

Original work Copyright © Alberto Montresor, Università di Trento, Italy
(<http://www.dit.unitn.it/~montreso/asd/index.shtml>)

Modifications Copyright © 2009—2011 Moreno Marzolla, Università di Bologna, Italy
(<http://www.moreno.marzolla.name/teaching/ASD2010/>)

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/> or send a letter to Creative Commons, 543 Howard Street, 5th Floor, San Francisco, California, 94105, USA.

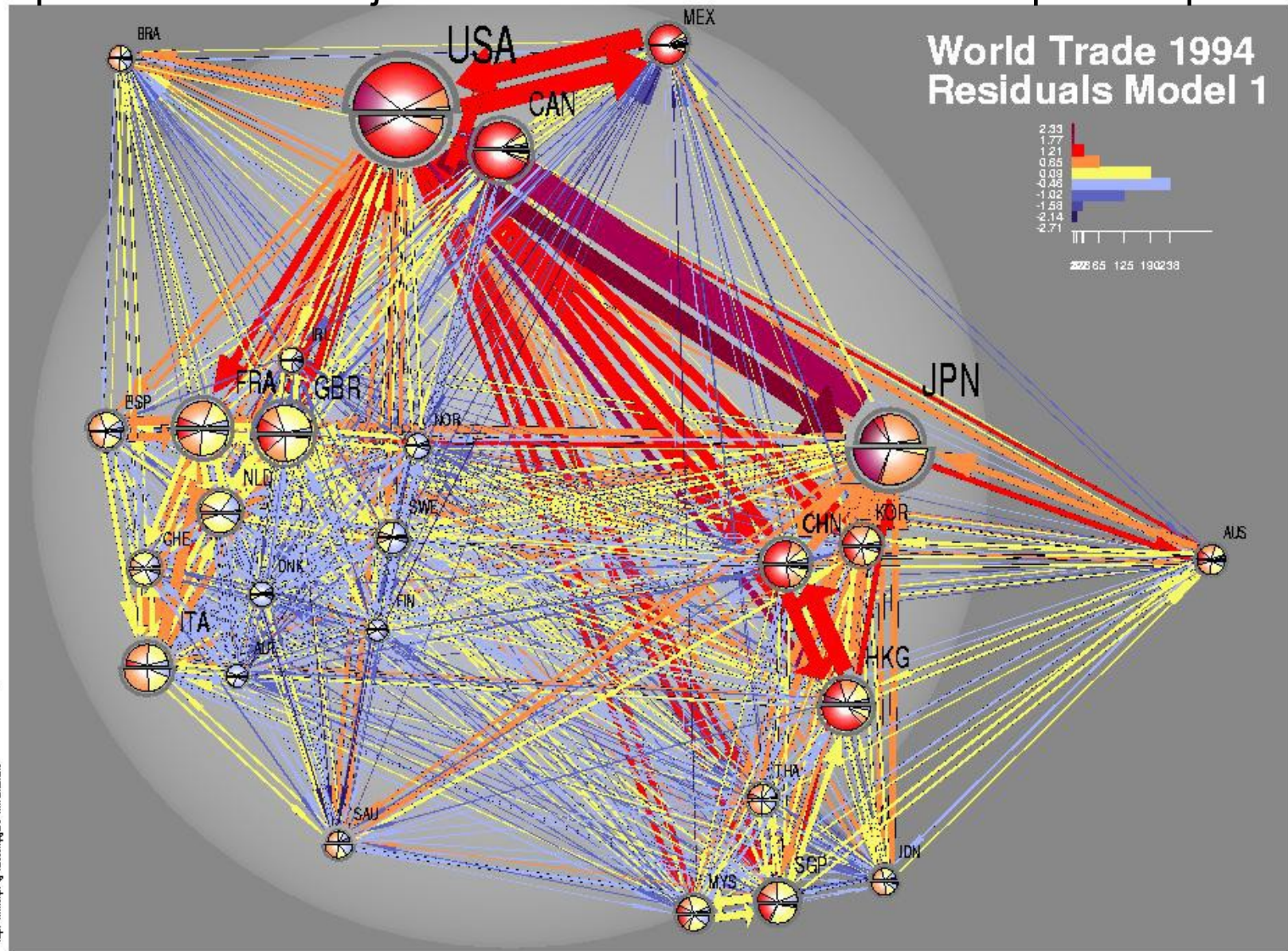
Esempi di grafi



Esempi di grafi

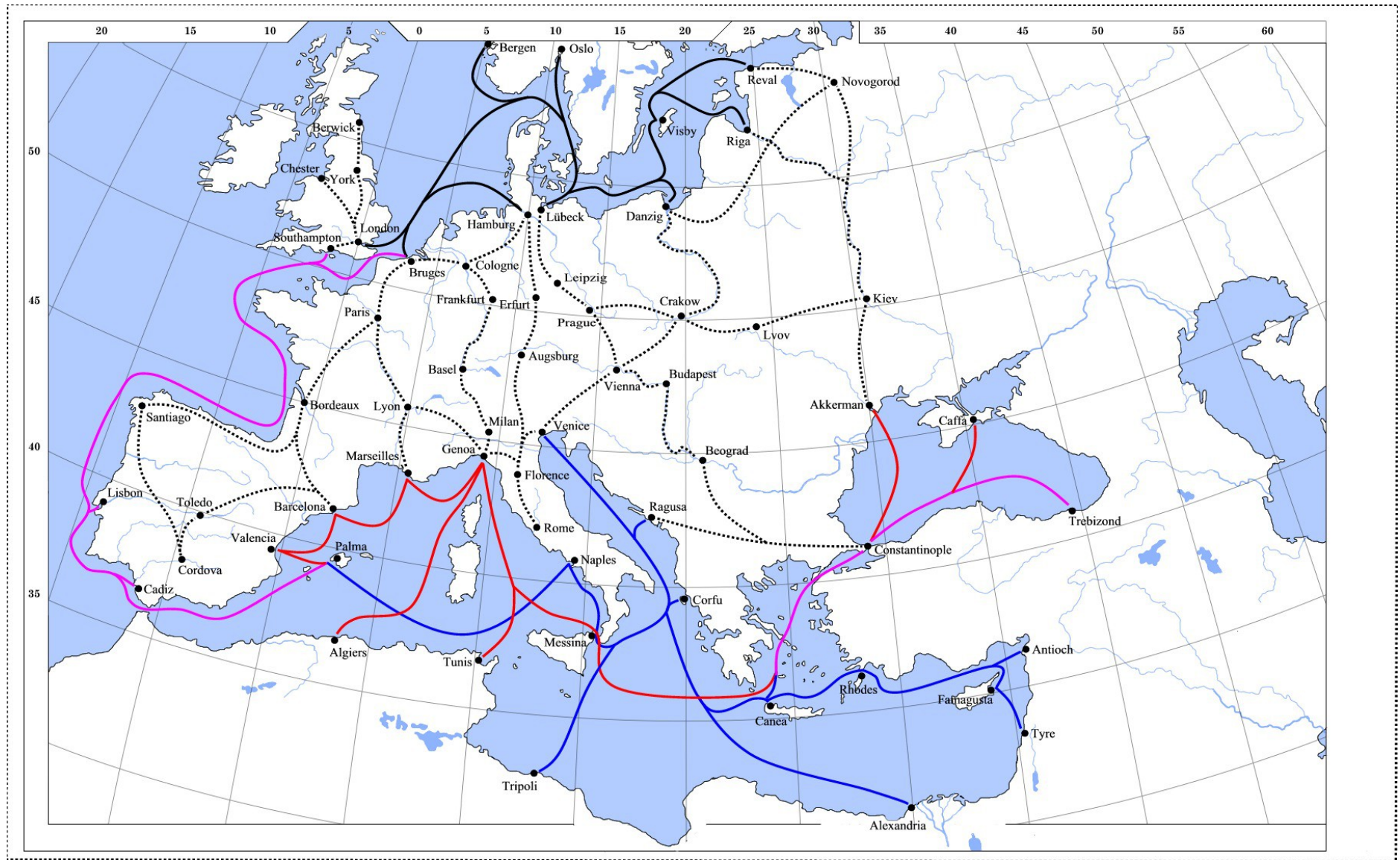
Import/Export

<http://www.cmu.edu/joss/content/articles/volume4/KrempelPlumper.html>



Esempi di grafi

Rotte commerciali medievali



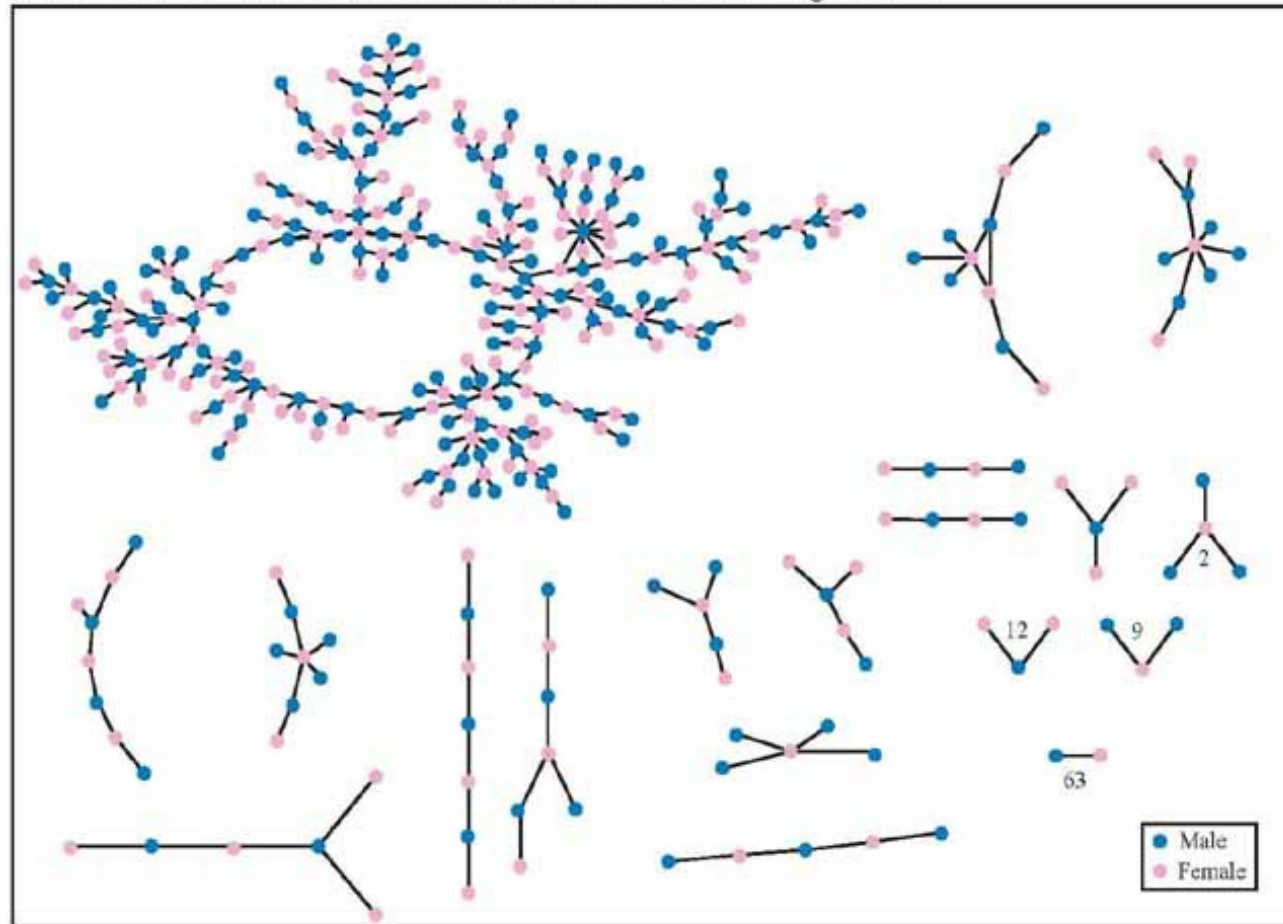
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Late_Medieval_Trade_Routes.jpg

Algoritmi e Strutture di Dati

Esempi di grafi

Relazioni romantiche

The Structure of Romantic and Sexual Relations at "Jefferson High School"



From the American Journal of Sociology, Vol. 100, No. 1. *"Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks,"* Bearman PS, Moody J, Stovel K.

<http://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/386272>

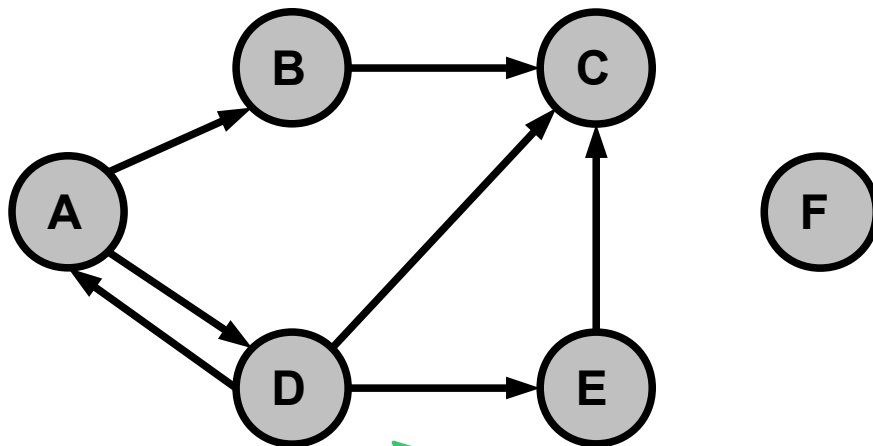
Algoritmi e Strutture di Dati

Problemi sui grafi

- Visite
 - Visite in ampiezza (cammini di lunghezza minima da singola sorgente)
 - Visite in profondità (ordinamento topologico, componenti fortemente connesse)
- Alberi di copertura minimi
- Cammini minimi
 - Da singola sorgente
 - Fra tutte le coppie di vertici

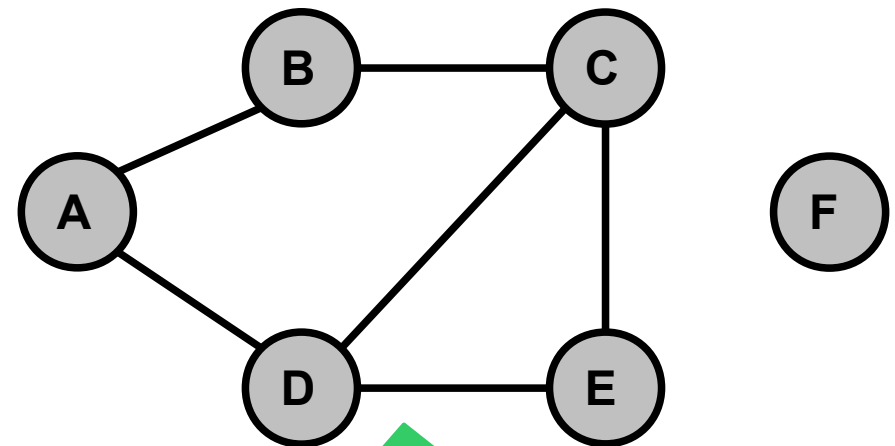
Grafi orientati e non orientati: definizione

- Un **grafo orientato** G è una coppia (V, E) dove:
 - Insieme finito dei **vertici** V
 - **Insieme degli archi** E :
relazione binaria tra vertici



$V = \{A, B, C, D, E, F\}$
 $E = \{ (A,B), (A,D), (B,C), (D,C), (E,C), (D,E), (D,A) \}$

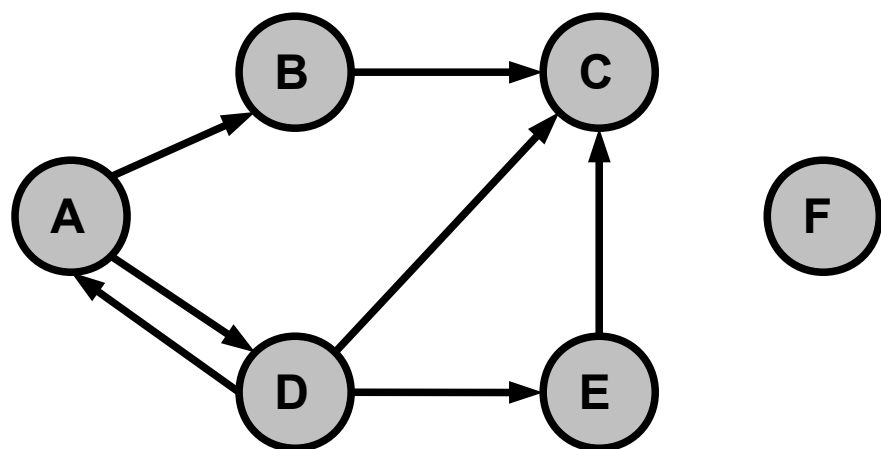
- Un **grafo non orientato** G è una coppia (V, E) dove:
 - Insieme finito dei **vertici** V
 - **Insieme degli archi** E :
coppie non ordinate



$V = \{A, B, C, D, E, F\}$
 $E = \{ \{A,B\}, \{A,D\}, \{B,C\}, \{C,D\}, \{C,E\}, \{D,E\} \}$

Definizioni: incidenza e adiacenza

- In un grafo orientato l'arco (v, w) è *incidente* da v in w
- Un vertice w è *adiacente* a v se e solo se $(v, w) \in E$
- In un grafo non orientato la relazione di adiacenza tra vertici è simmetrica



(A, B) è incidente da A a B
 (A, D) è incidente da A a D
 (D, A) è incidente da D a A

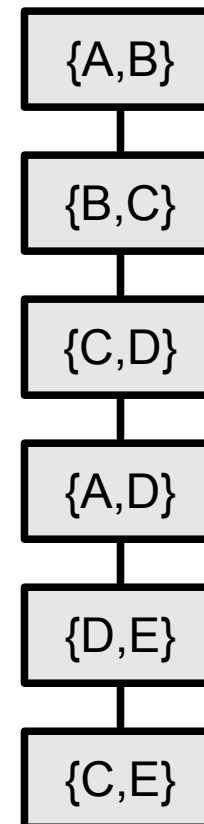
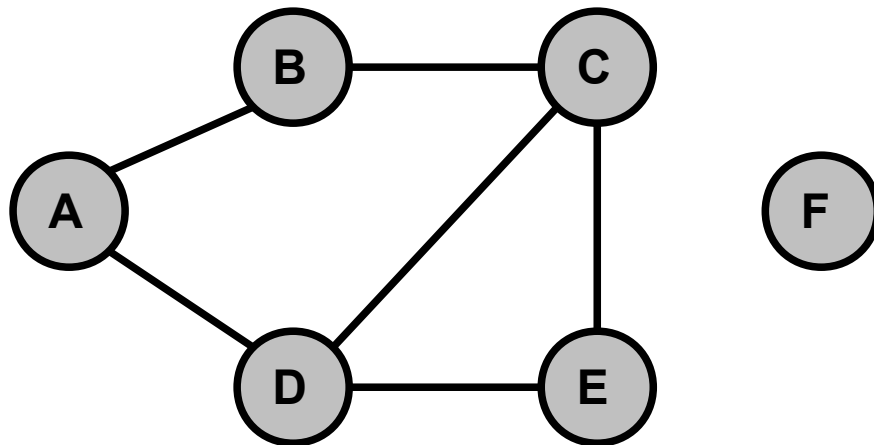
B è adiacente ad A
C è adiacente a B, D, E
A è adiacente a D e viceversa
B non è adiacente a D, C
F non è adiacente ad alcun vertice

Rappresentazione di grafi

- Operazioni che la struttura dati deve supportare
 - `NumVertici()` \rightarrow intero
 - `NumArchi()` \rightarrow intero
 - `grado(vertex v)` \rightarrow intero
 - `archiIncidenti(vertex v)` \rightarrow (arco, arco, ... arco)
 - `estremi(arco e)` \rightarrow (vertex, vertex)
 - `opposto(vertex x, arco e)` \rightarrow vertex
 - `sonoAdiacenti(vertex x, vertex y)` \rightarrow booleano
 - `aggiungiVertice(vertex v)`
 - `aggiungiArco(vertex x, vertex y)`
 - `rimuoviVertice(vertex v)`
 - `rimuoviArco(arco e)`

Liste di archi (grafo non orientato)

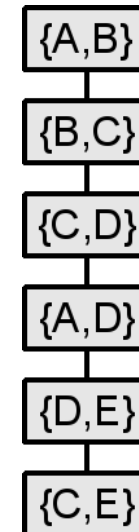
Spazio: $\Theta(|E|)$



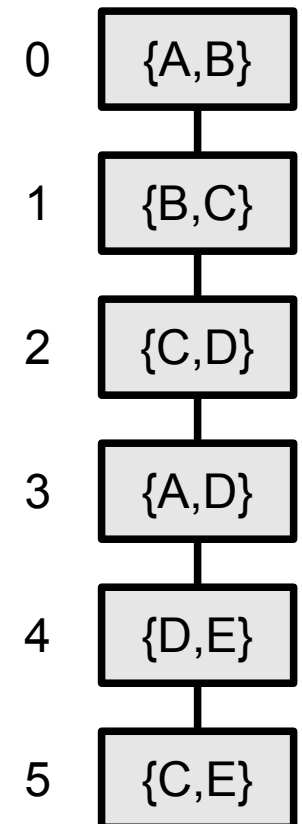
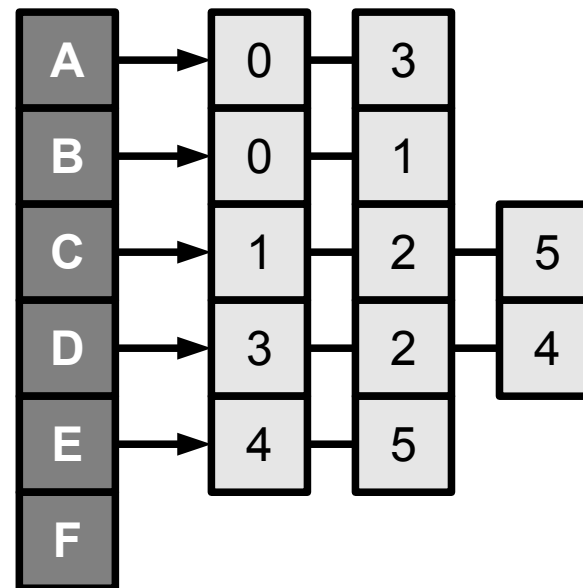
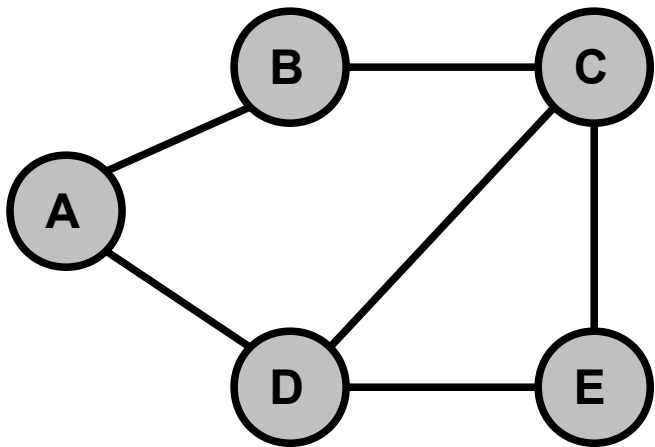
Costi

Liste di archi

- $\text{grado}(\text{vertice } v) \rightarrow \text{intero}$ $O(m)$
- $\text{archiIncidenti}(\text{vertice } v) \rightarrow (\text{arco}, \text{arco}, \dots \text{arco})$ $O(m)$
- $\text{sonoAdiacenti}(\text{vertice } x, \text{vertice } y) \rightarrow \text{booleano}$ $O(m)$
- $\text{aggiungiVertice}(\text{vertice } v)$ $O(1)$
- $\text{aggiungiArco}(\text{vertice } x, \text{vertice } y)$ $O(1)$
- $\text{rimuoviVertice}(\text{vertice } v)$ $O(m)$
- $\text{rimuoviArco}(\text{arco } e)$ $O(1)$
- **Nota:** molte operazioni sono inefficienti perché richiedono la scansione dell'intera lista di archi



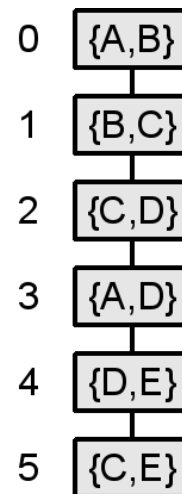
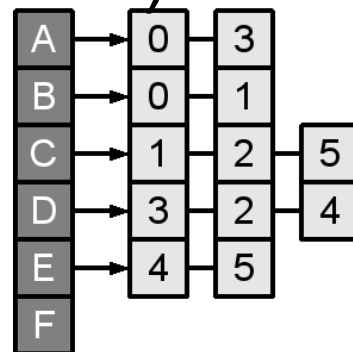
Liste di incidenza (grafo non orientato)



Costi

Liste di incidenza

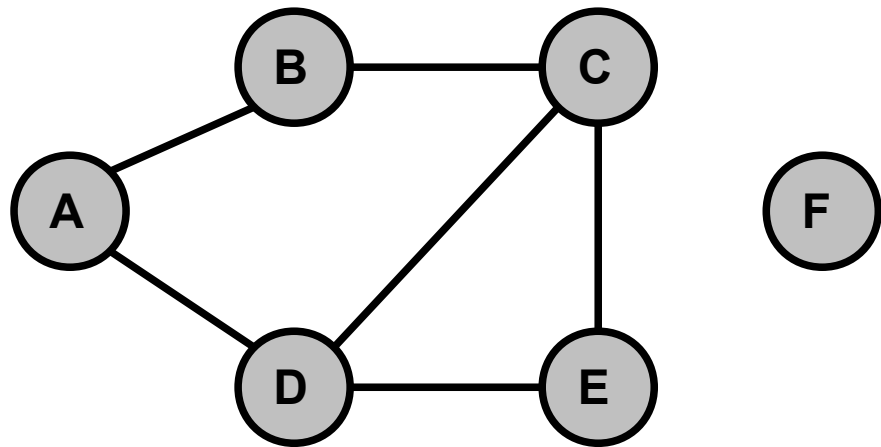
- $\text{grado}(\text{vertice } v) \rightarrow \text{intero}$ $O(\delta(v))$
- $\text{archilIncidenti}(\text{vertice } v) \rightarrow (\text{arco}, \text{arco}, \dots \text{arco})$ $O(\delta(v))$
- $\text{sonoAdiacenti}(\text{vertice } x, \text{vertice } y) \rightarrow \text{booleano}$
 $O(\min\{\delta(x), \delta(y)\})$
- $\text{aggiungiVertice}(\text{vertice } v)$ $O(1)$
- $\text{aggiungiArco}(\text{vertice } x, \text{vertice } y)$ $O(1)$
- $\text{rimuoviVertice}(\text{vertice } v)$ $O(m)$
- $\text{rimuoviArco}(\text{arco } e)$ $O(\delta(x) + \delta(y))$



Indichiamo con
 $n = |V|$, $m = |E|$,
 $\delta(x) = \text{grado del nodo } x$
 (spiegato in seguito)

Matrice di adiacenza (grafo non orientato)

$$M(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } \{u, v\} \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Spazio: $\Theta(|V|^2)$

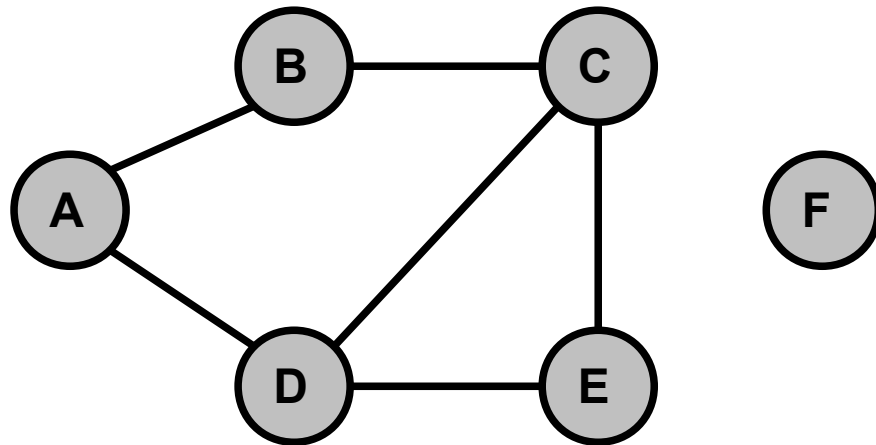
Proprietà della matrice di adiacenza

0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

M

2	0	2	0	1	0
0	2	0	2	1	0
2	0	3	1	1	0
0	2	1	3	1	0
1	1	1	1	2	0
0	0	0	0	0	0

M^2



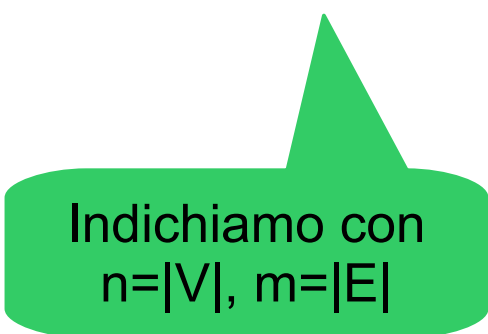
0	4	1	5	2	0
4	0	5	1	2	0
1	5	2	6	4	0
5	1	6	2	4	0
2	2	4	4	2	0
0	0	0	0	0	0

M^3

Costi

Matrice di adiacenza

- `grado(vertex v) → intero` $O(n)$
- `archiIncidenti(vertex v) → (arco, arco, ... arco)` $O(n)$
- `sonoAdiacenti(vertex x, vertex y) → booleano` $O(1)$
- `aggiungiVertice(vertex v)` $O(n^2)$
- `aggiungiArco(vertex x, vertex y)` $O(1)$
- `rimuoviVertice(vertex v)` $O(n^2)$
- `rimuoviArco(arco e)` $O(1)$

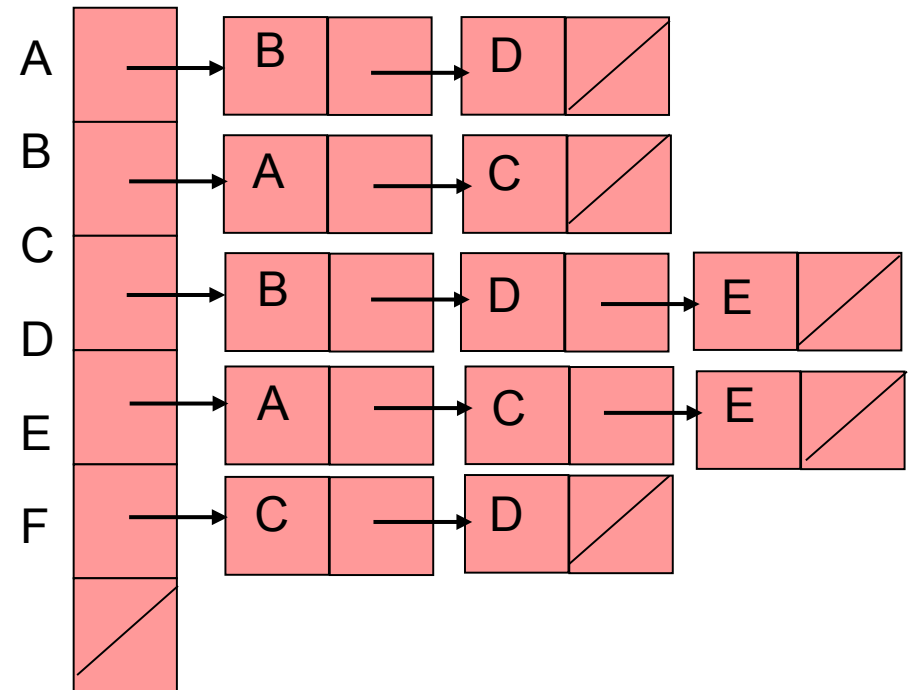
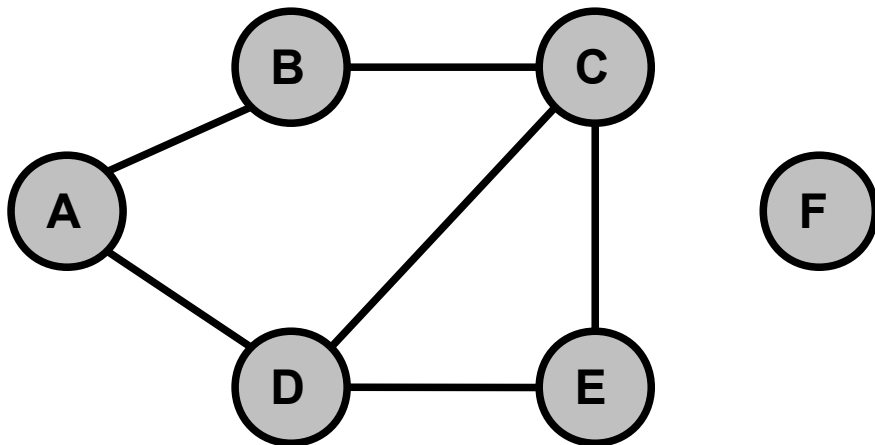


Indichiamo con
 $n=|V|$, $m=|E|$

Liste di adiacenza (grafo non orientato)

Spazio: $\Theta(|V|+|E|)$

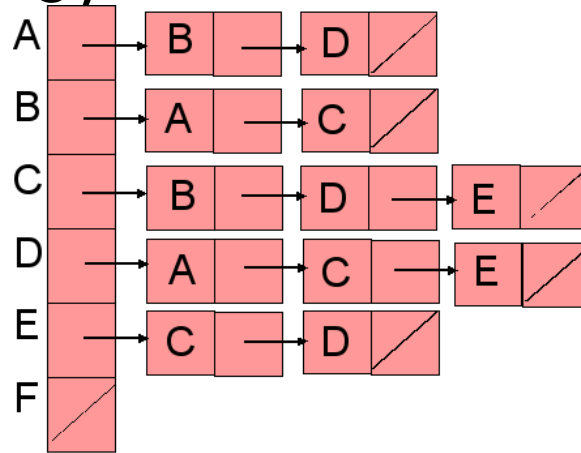
$$v.\text{adj} = \{ w \mid \{v,w\} \in E \}$$



Costi

Liste di adiacenza

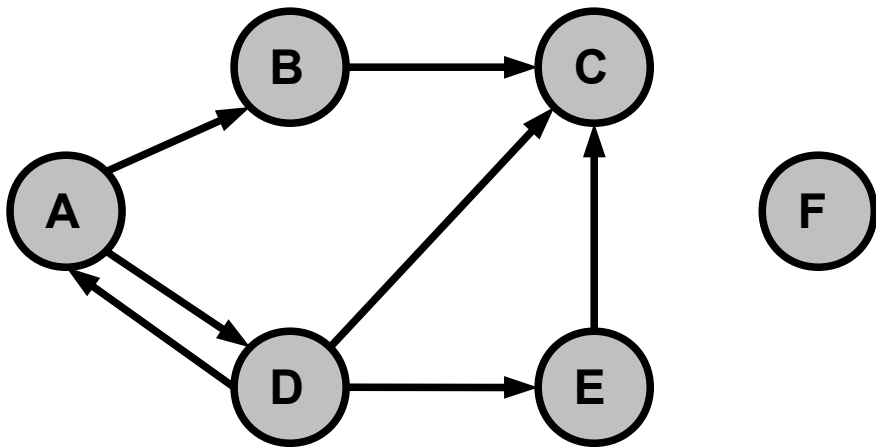
- $\text{grado}(\text{vertice } v) \rightarrow \text{intero}$ $O(\delta(v))$
- $\text{archiIncidenti}(\text{vertice } v) \rightarrow (\text{arco}, \text{arco}, \dots \text{arco})$ $O(\delta(v))$
- $\text{sonoAdiacenti}(\text{vertice } x, \text{vertice } y) \rightarrow \text{booleano}$
 $O(\min\{\delta(x), \delta(y)\})$
- $\text{aggiungiVertice}(\text{vertice } v)$ $O(1)$
- $\text{aggiungiArco}(\text{vertice } x, \text{vertice } y)$ $O(1)$
- $\text{rimuoviVertice}(\text{vertice } v)$ $O(m)$
- $\text{rimuoviArco}(\text{arco } e)$ $O(\delta(x) + \delta(y))$



Indichiamo con
 $n = |V|$, $m = |E|$,
 $\delta(x)$ = grado del nodo x
 (spiegato in seguito)

Matrice di adiacenza (grafo orientato)

$$M(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } (u, v) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



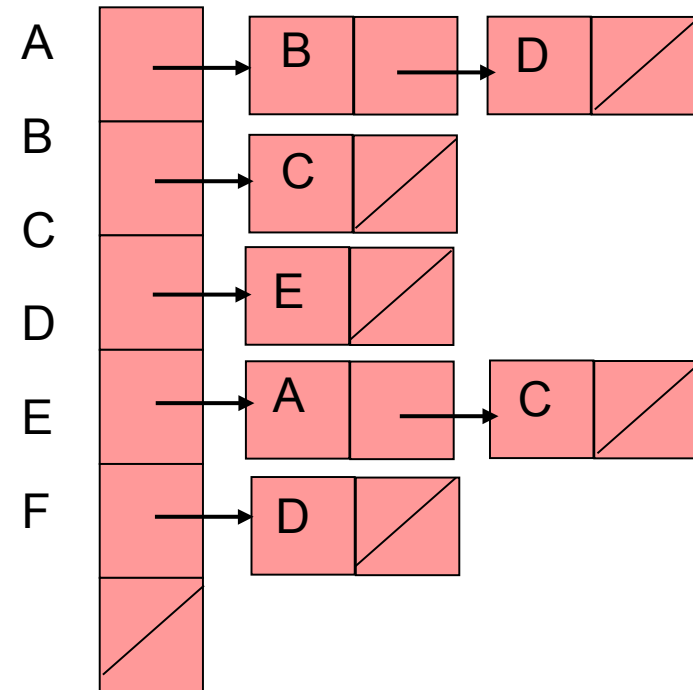
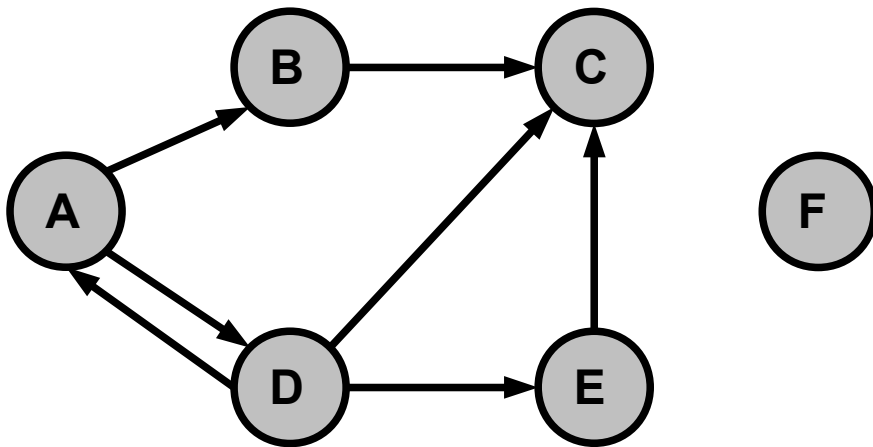
Spazio: $\Theta(|V|^2)$

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Liste di adiacenza (grafo orientato)

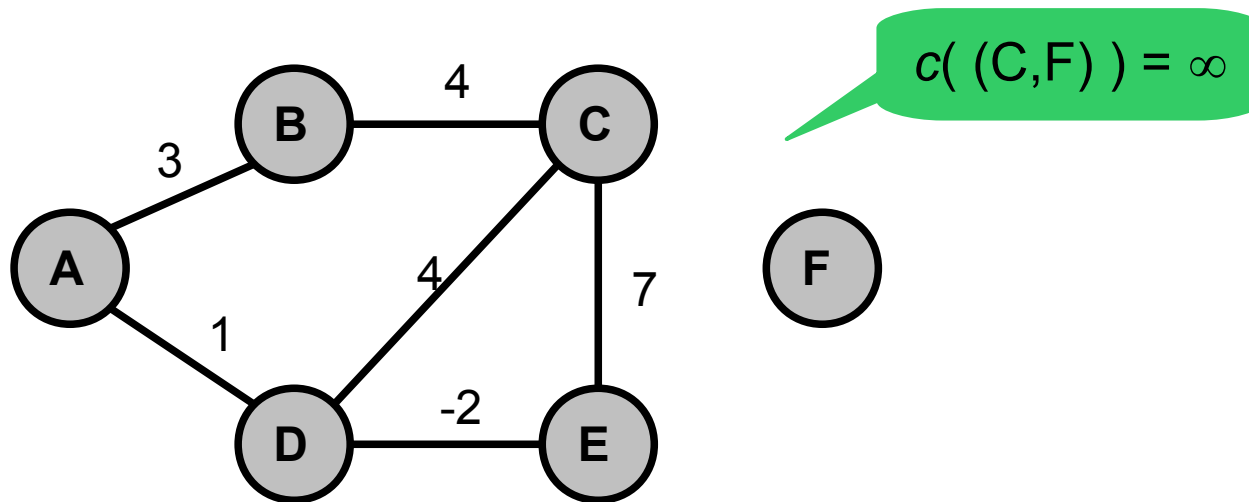
Spazio: $\Theta(|V|+|E|)$

$$v.\text{adj} = \{ w \mid (v,w) \in E \}$$



Grafi pesati

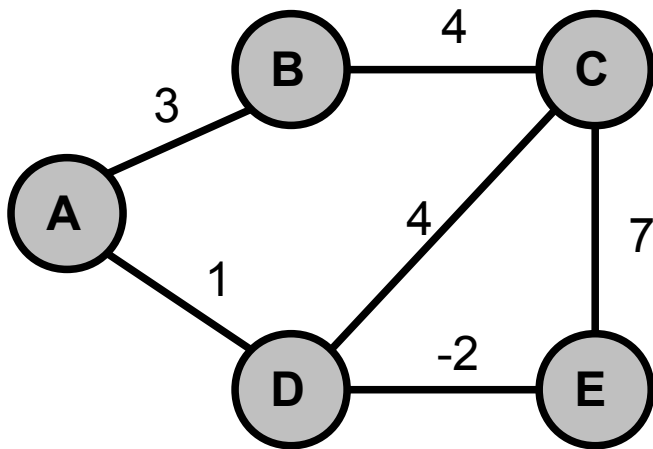
- In alcuni casi ogni arco ha un **peso** (o **costo**) associato
- Il costo può essere determinato tramite una funzione di costo $c: E \rightarrow \mathcal{R}$, dove \mathcal{R} è l'insieme dei numeri reali
- Quando tra due vertici non esiste un arco, si dice che il costo è infinito



Matrice di adiacenza in grafi non orientati pesati

$$M(u, v) = \begin{cases} c(u, v) & \text{se } \{u, v\} \in E \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

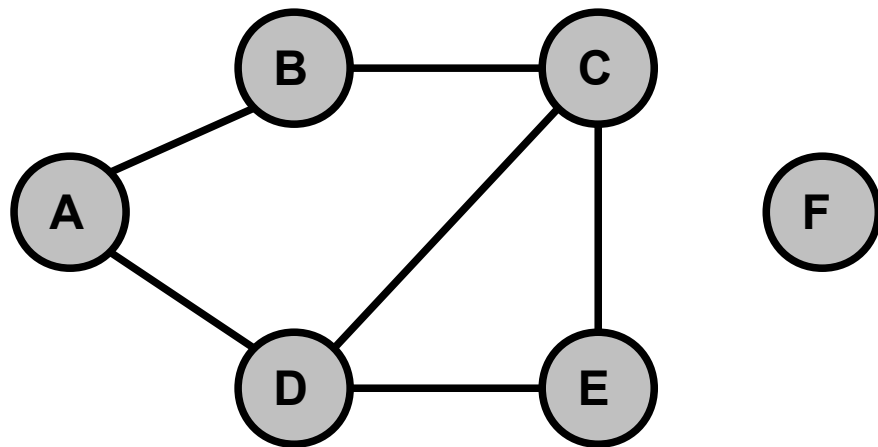
Spazio: $\Theta(|V|^2)$



$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 3 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 4 & 7 & \infty \\ 1 & \infty & 4 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & -2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Definizioni: grado

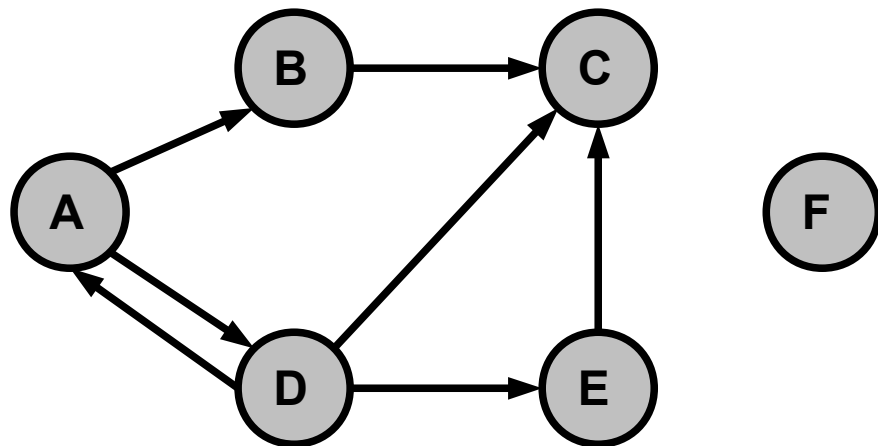
- In un *grafo non orientato*, il *grado* di un vertice è il numero di archi che partono da esso



A, *B* ed *E* hanno *grado* 2
C e *D* hanno *grado* 3
F ha *grado* 0

Definizioni: grado

- In un *grafo orientato*, il *grado entrante* (*uscente*) di un vertice è il numero di archi incidenti in (da) esso
- In un *grafo orientato* il *grado* di un vertice è la somma del suo grado entrante e del suo grado uscente

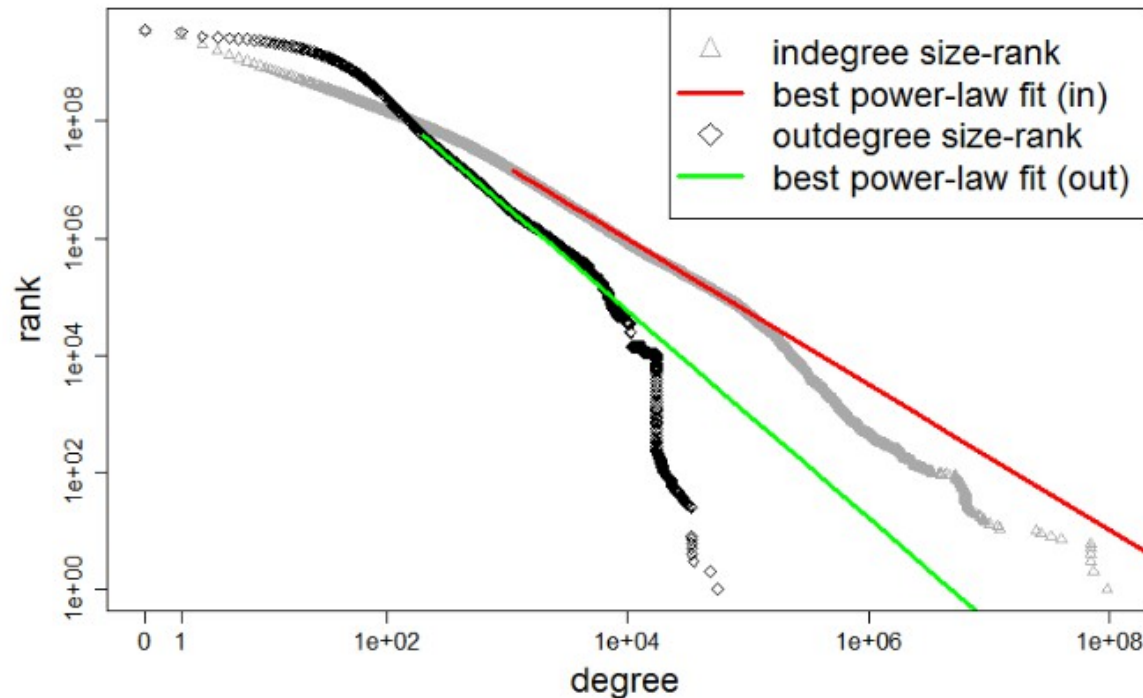


A ha *g. u.* 2 e *g. e.* 1
B ha *g. u.* 1 e *g. e.* 1
C ha *g. u.* 0 e *g. e.* 3
D ha *g. u.* 3 e *g. e.* 1

A e *C* hanno *grado* 3
B ha *grado* 2
D ha *grado* 4

...Nel mondo reale

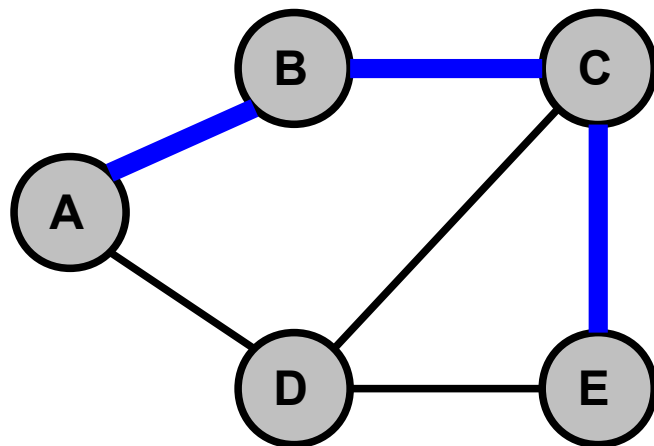
- Il Web può essere visto come un grafo **orientato** in cui i nodi rappresentano le singole pagine, ed esiste un arco (u,v) sse la pagina u contiene un link che punta verso la pagina v



Meusel et al., "Graph Structure in the Web — Revisited",
<http://www.quantware.ups-tlse.fr/FETNADINE/papers/P4.9.pdf>

Cammini

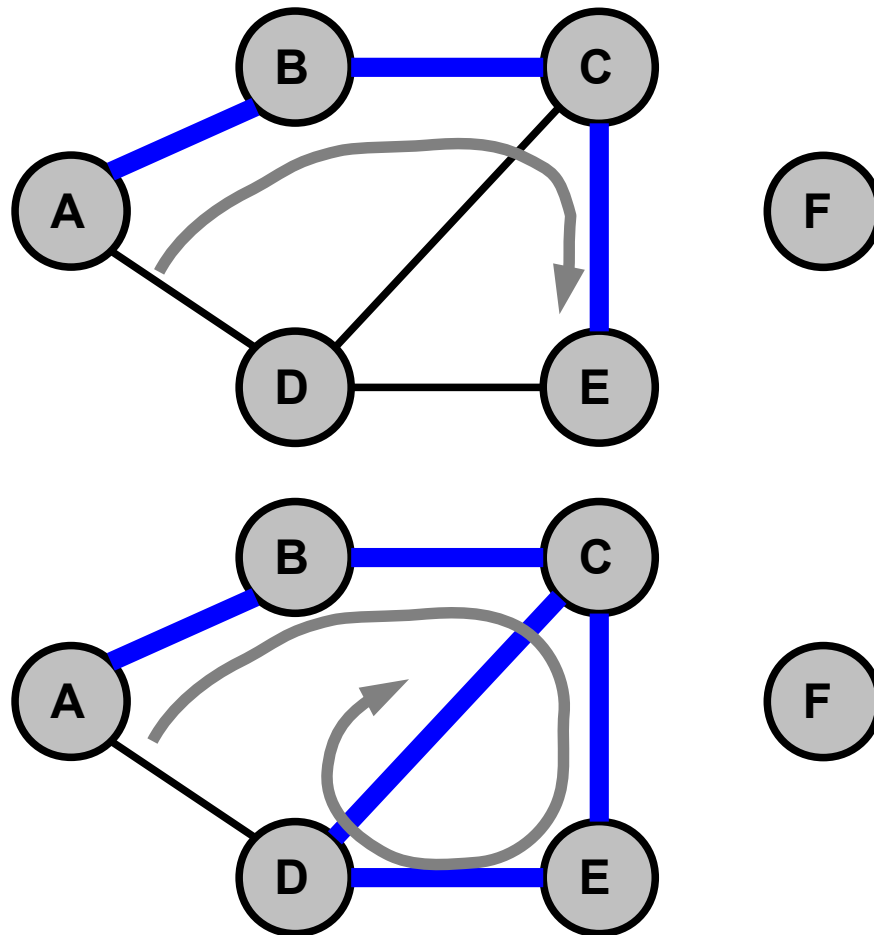
- Un *cammino* in $G=(V,E)$ è una sequenza di vertici $\langle w_0, w_1, \dots, w_k \rangle$ tale che $\{w_i, w_{i+1}\} \in E$ per $0 \leq i \leq k-1$
- Il cammino $\langle w_0, w_1, w_2, \dots, w_k \rangle$ contiene i vertici w_0, w_1, \dots, w_k e gli archi $\{w_0, w_1\} \{w_1, w_2\} \dots \{w_{k-1}, w_k\}$
- La lunghezza del cammino è il numero di archi attraversati



$\langle A, B, C, E \rangle$ è
un cammino di
lunghezza 3

Cammini

- Un cammino si dice **semplice** se tutti i suoi vertici sono distinti (compaiono una sola volta nella sequenza)



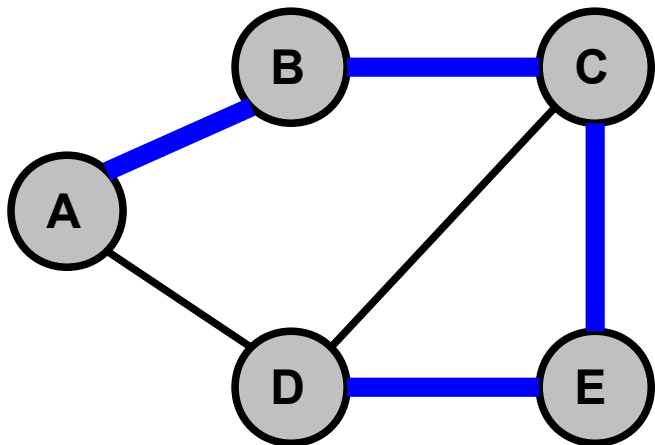
Il cammino
<A, B, C, E>
è semplice...

... ma il cammino
<A, B, C, E, D, C>
non è semplice,
poiché C è ripetuto

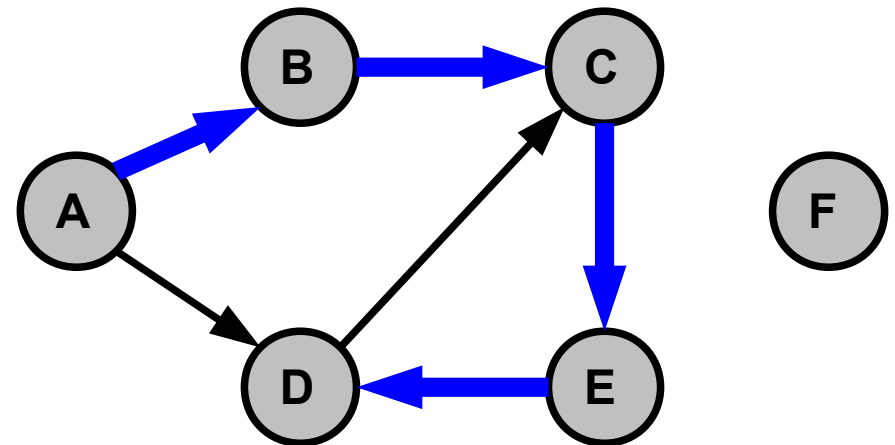
Cammini

- Se esiste un cammino c tra i vertici v e w , si dice che w è raggiungibile da v tramite c

A è raggiungibile da D e viceversa



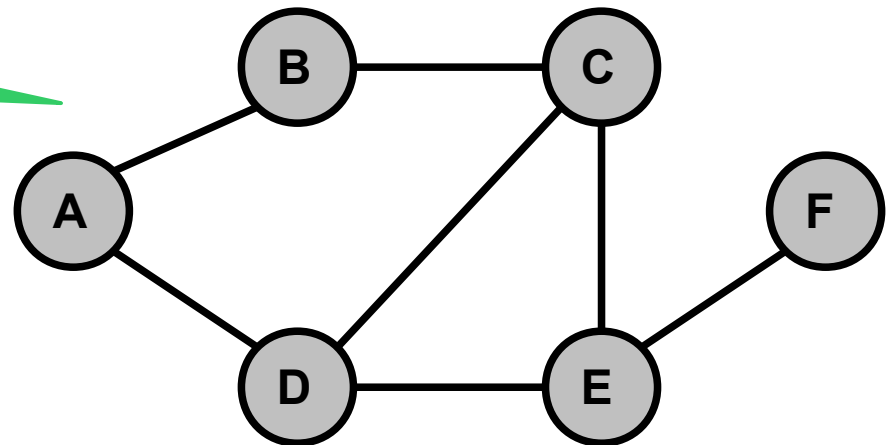
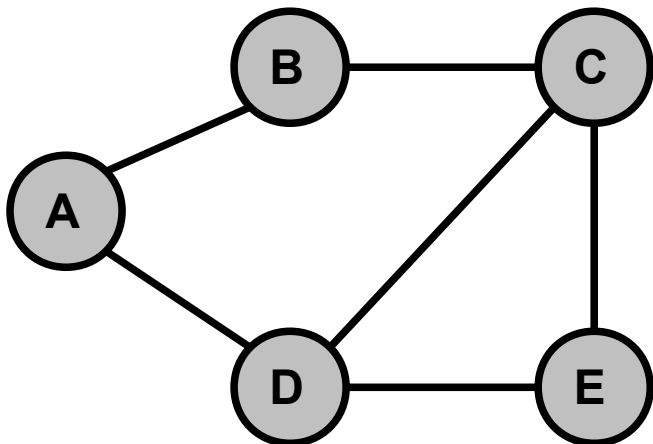
D è raggiungibile da A ma non viceversa



Grafi connessi

- Se G è un grafo **non orientato**, diciamo che G è **connesso** se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice.

Questo grafo non orientato è **connesso**.



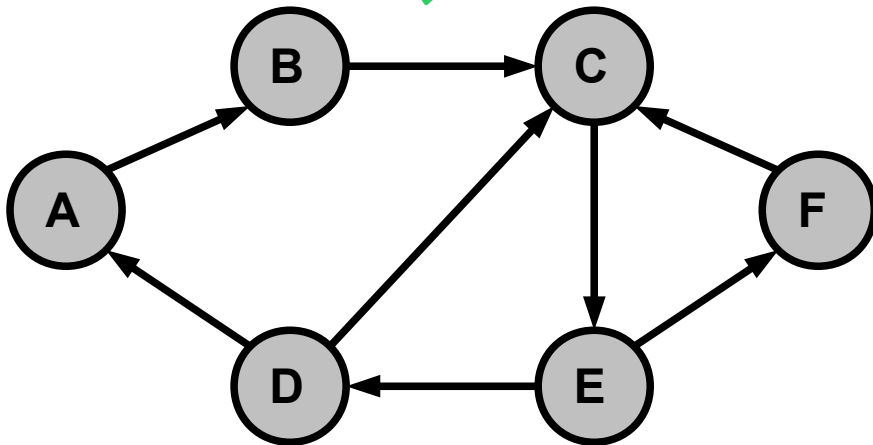
Questo grafo non orientato **non è connesso**.



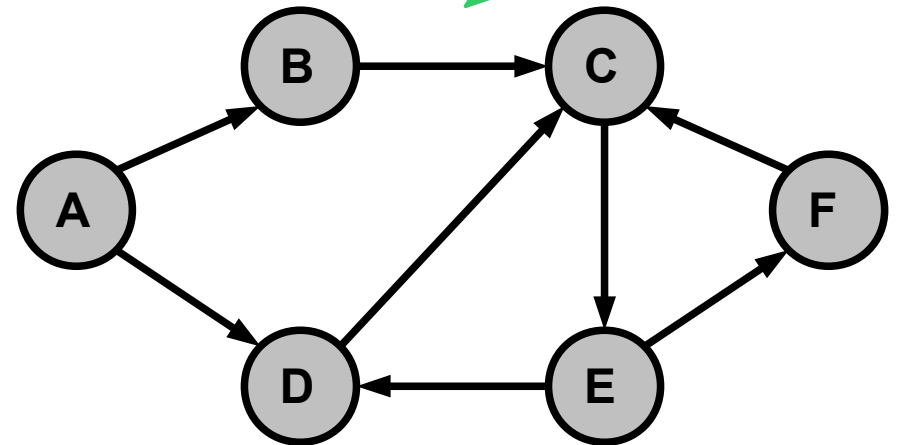
Grafi fortemente connessi

- Se G è un grafo **orientato**, diciamo che G è **fortemente connesso** se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice.

Questo grafo orientato è **fortemente connesso**.

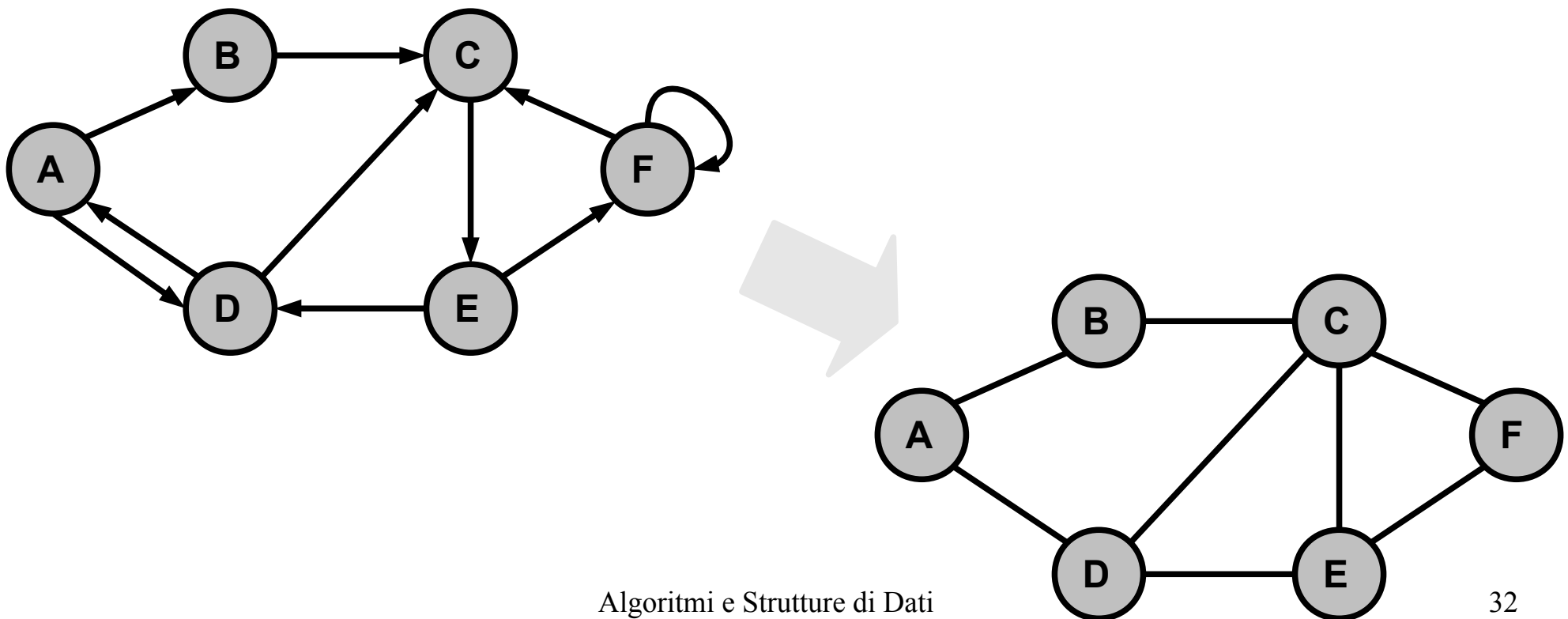


Questo grafo orientato **non è fortemente connesso**; ad es., non esiste cammino da D a A.



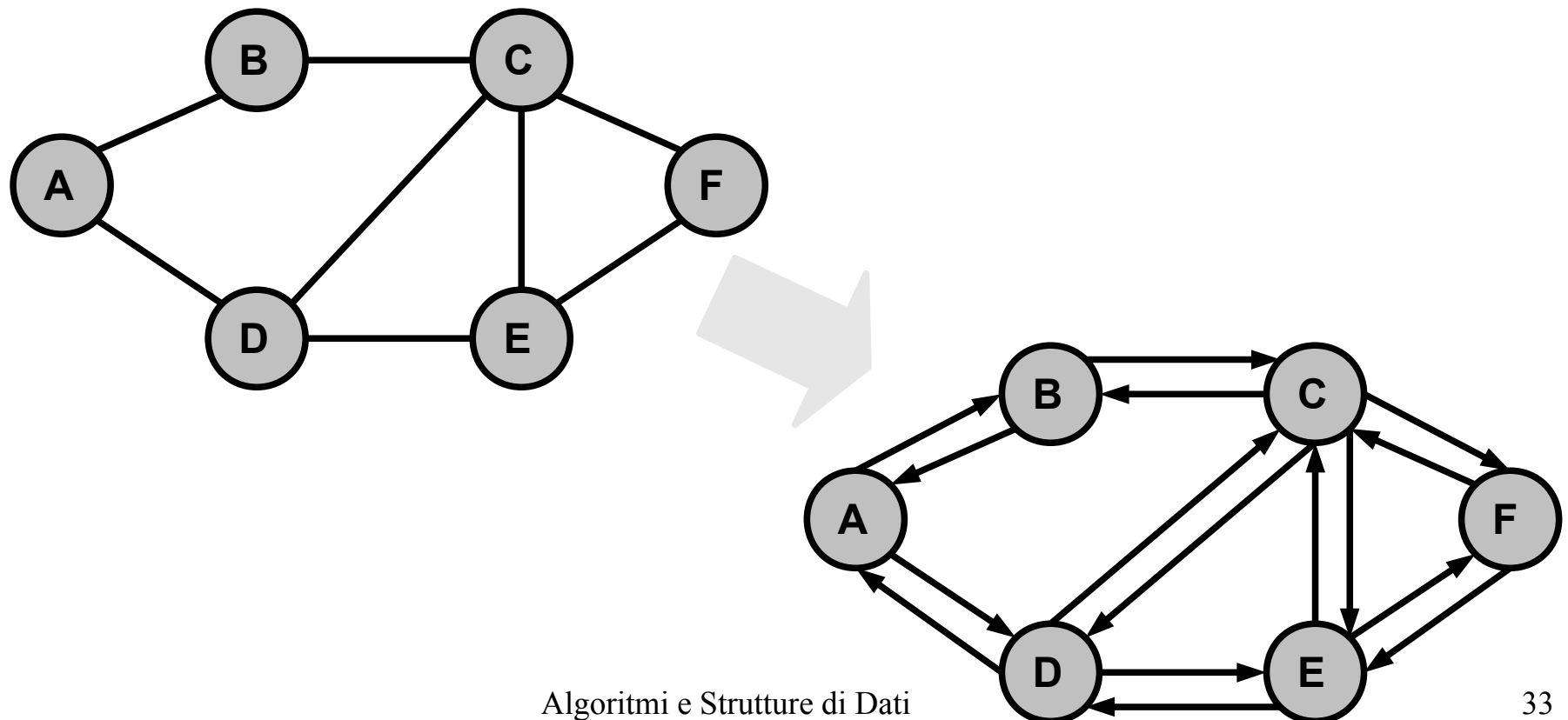
Versione non orientata

- Se G è un grafo **orientato**, il grafo ottenuto ignorando la direzione degli archi e i cappi è detto grafo non orientato sottostante o anche **versione non orientata** di G .



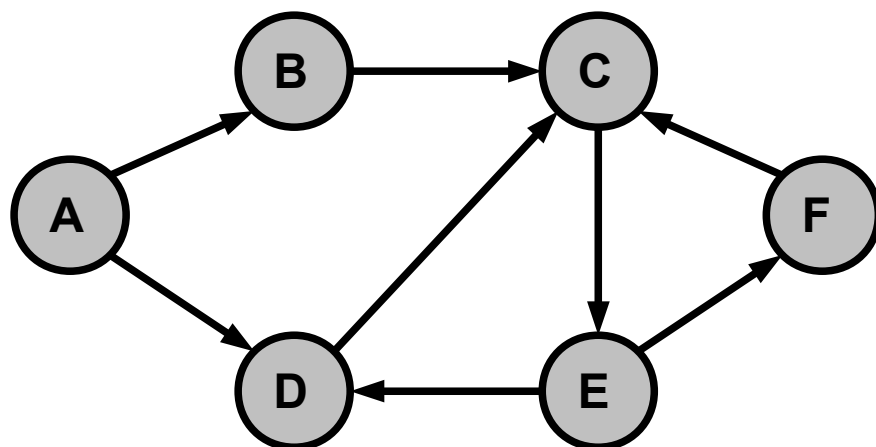
Versione orientata

- Se G è un grafo **non orientato**, il grafo ottenuto inserendo due archi orientati opposti per ogni arco non orientato del grafo è detto la **versione orientata** di G .



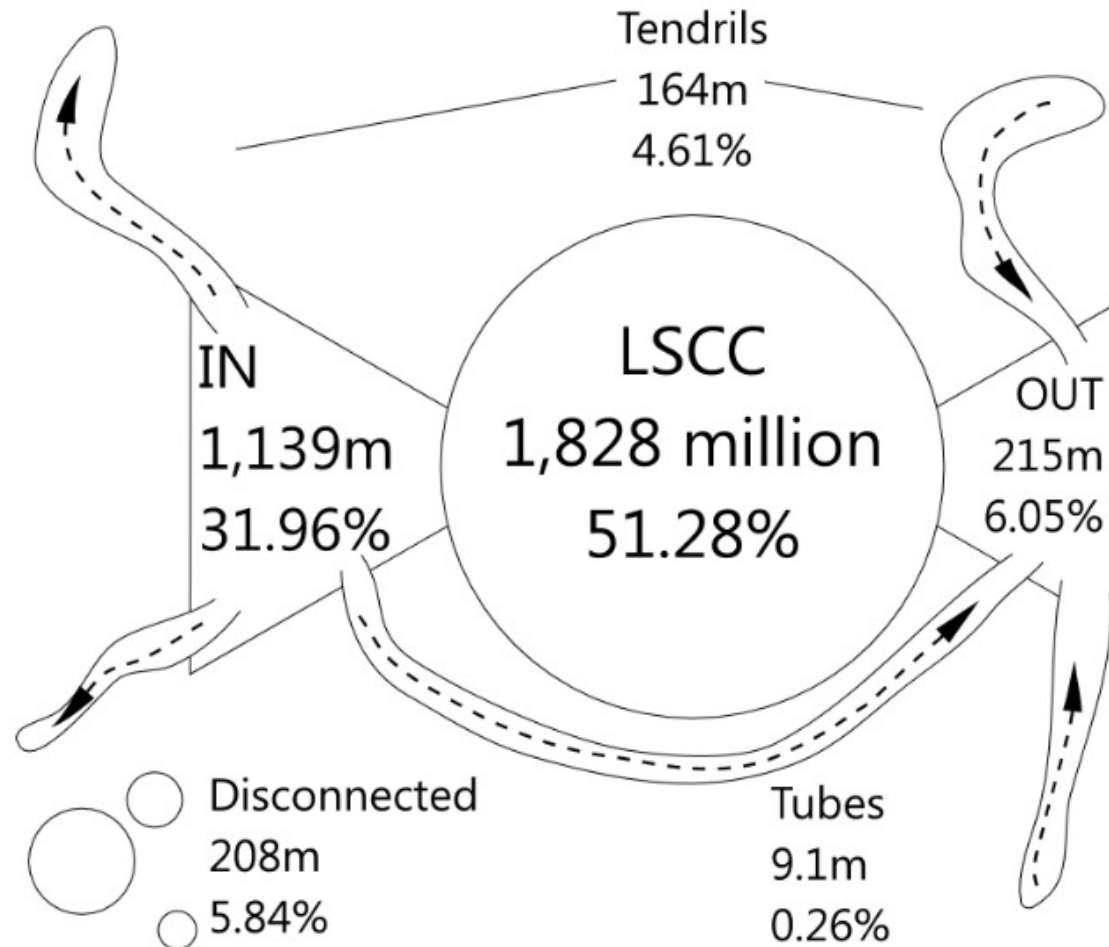
Grafi debolmente connessi

- Se G è un grafo **orientato** che non è fortemente connesso, ma la sua versione non orientata è connessa, diciamo che G è **debolmente connesso**



Questo grafo orientato
***non è fortemente
connesso***, ma è
debolmente connesso

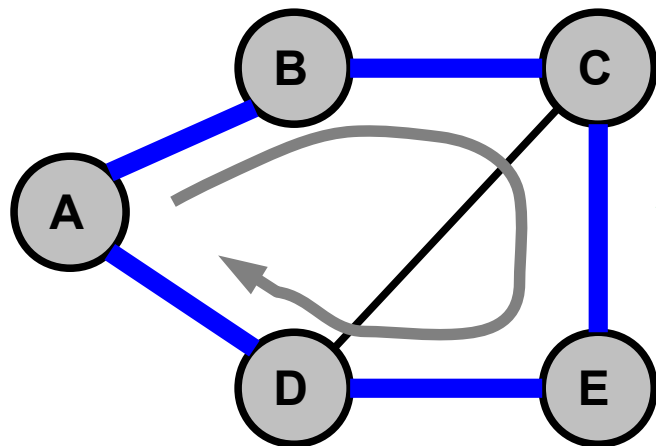
...Nel mondo reale



Meusel et al., "Graph Structure in the Web — Revisited",
<http://www.quantware.ups-tlse.fr/FETNADINE/papers/P4.9.pdf>

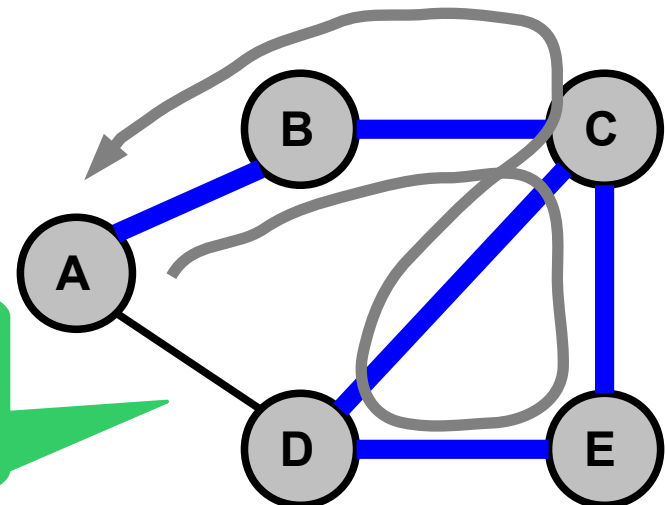
Cicli

- Un *ciclo* è un cammino $\langle w_0, w_1, \dots, w_n \rangle$ di lunghezza ≥ 1 tale che $w_0 = w_n$
- In grafi non orientati, un ciclo di lung. 2 è detto *banale*
- Un ciclo è semplice se i nodi w_1, \dots, w_{n-1} sono tutti distinti



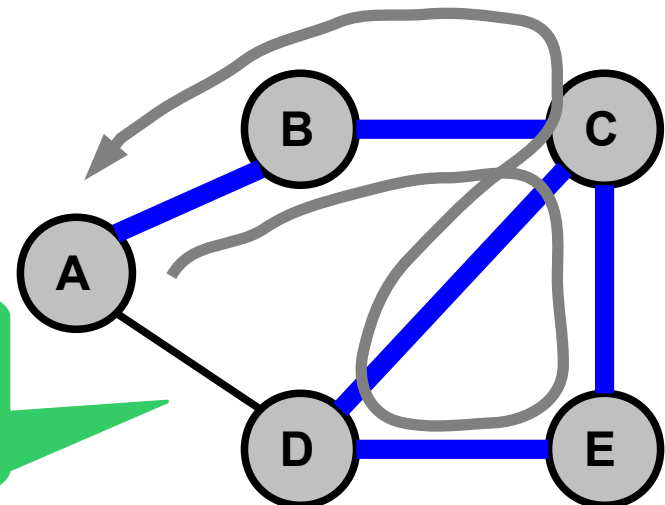
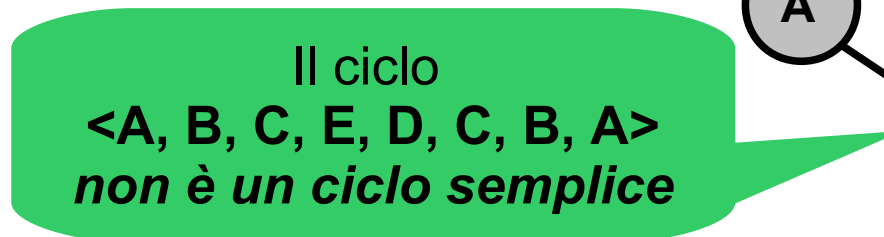
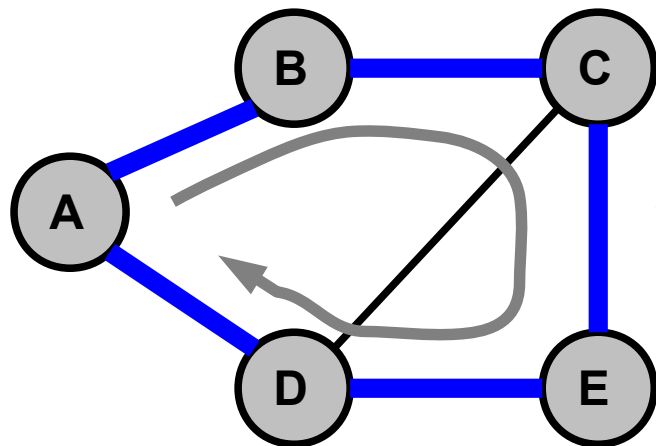
Il cammino
 $\langle A, B, C, E, D, A \rangle$
è un ciclo semplice

Il ciclo
 $\langle A, B, C, E, D, C, B, A \rangle$
non è un ciclo semplice



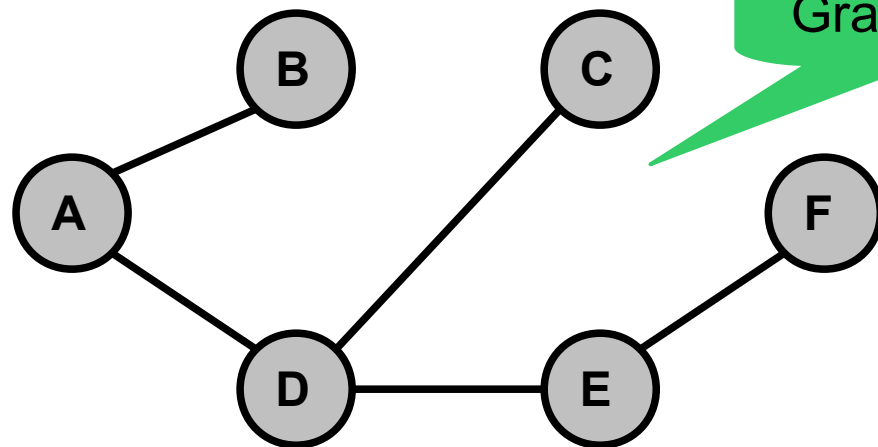
Cicli

- Un *ciclo* è un cammino $\langle w_0, w_1, \dots, w_n \rangle$ di lunghezza ≥ 1 tale che $w_0 = w_n$
- In grafi non orientati, un ciclo di lung. 2 è detto *banale*
- Un ciclo è semplice se i nodi w_1, \dots, w_{n-1} sono tutti distinti

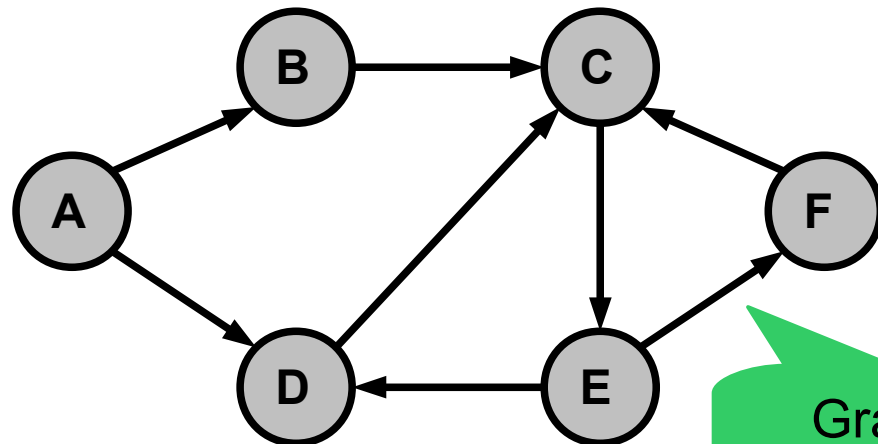


Grafi aciclici

- Un grafo senza cicli (escludendo quelli “banali” di lunghezza 2 nei grafi non orientati) è detto **aciclico**.

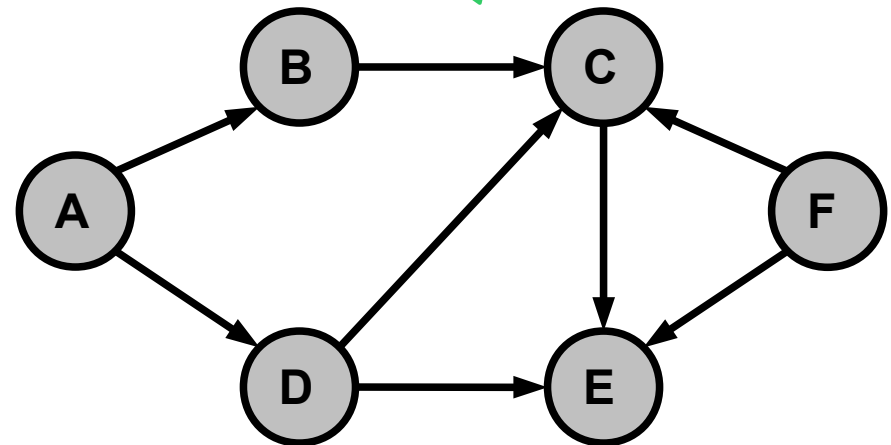


Grafo aciclico



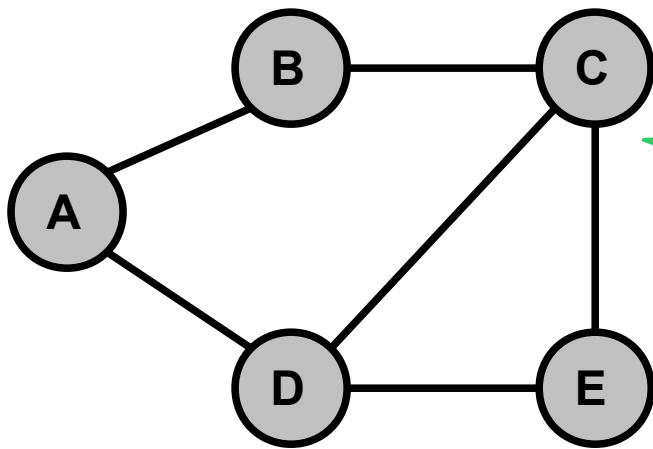
Grafo non
aciclico

Un *grafo orientato aciclico* è chiamato **DAG** (*Directed Acylic Graph*).



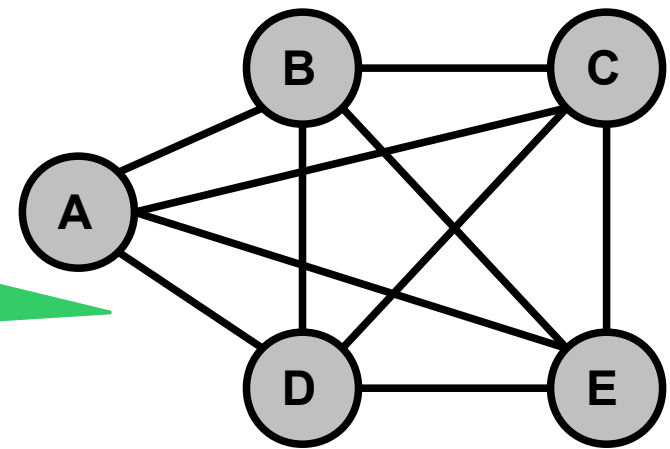
Grafo completo

- Un *grafo non orientato completo* è un grafo non orientato che ha un arco tra ogni coppia di vertici.



Questo grafo non è completo

Questo grafo è **completo**



- Quanti archi ci sono in un grafo non orientato completo?

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{|V|(|V|-1)}{2}$$

Alberi

- Un **albero libero** è un grafo non orientato connesso, aciclico.
- Se un vertice è detto radice, otteniamo un **albero radicato**.

