

# NOTAZIONE ASINTOTICA

PIETRO DI LENA

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA – SCIENZA E INGEGNERIA  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

ALGORITMI E STRUTTURE DI DATI  
ANNO ACCADEMICO 2021/2022



# INTRODUZIONE

- **Scopo:** analizzare il tempo di calcolo e l'occupazione di memoria degli algoritmi in termini di **dimensione dell'input**
- Qual è una buona misura per tempo di calcolo e memoria?
  - Tempo (sec), memoria (MB)  $\Rightarrow$  **legati a macchina e linguaggio!**
  - Meglio considerare il **comportamento asintotico** degli algoritmi
- **Comportamento asintotico** di un algoritmo
  - Ignora costanti additive/multiplicative e termini di ordine inferiore
  - Descrive quanto velocemente tempo/memoria crescono rispetto alla dimensione dell'input
  - Ci permette di confrontare le prestazioni di algoritmi differenti che risolvono lo stesso problema, indipendentemente dall'hardware su cui sono eseguiti

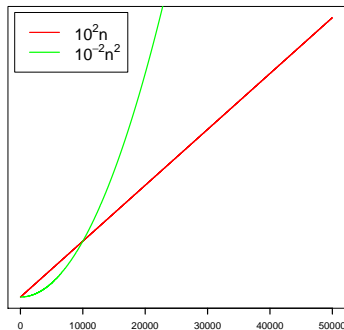
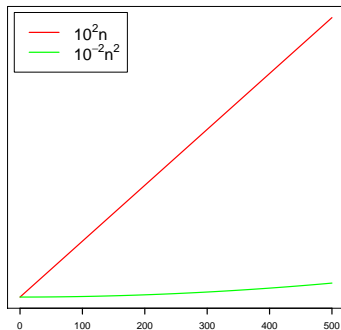
## Definizione

*Dato  $n \geq 0$  indichiamo con  $f(n) \geq 0$  la quantità di risorse (tempo di calcolo oppure occupazione di memoria) richiesta da un algoritmo su un input di dimensione  $n$*

- Solo valori non-negativi per dimensioni di input e quantità di risorse
- Tipicamente, dimensioni di input intere e costo reale ( $f(n) \in \mathbb{R}$ )
- Siamo interessati a valutare il **rate di crescita** di  $f(n)$ 
  - Ignoriamo fattori costanti
  - Ignoriamo termini di ordine inferiore

# ESEMPIO DI COMPORTAMENTO ASINTOTICO

- Consideriamo due algoritmi  $A$  and  $B$  per lo stesso problema
  - $f_A(n) = 10^3 n$  è la funzione di costo di  $A$
  - $f_B(n) = 10^{-3} n^2$  è la funzione di costo di  $B$
- Quale algoritmo ha prestazioni migliori in termini di tempo di calcolo?

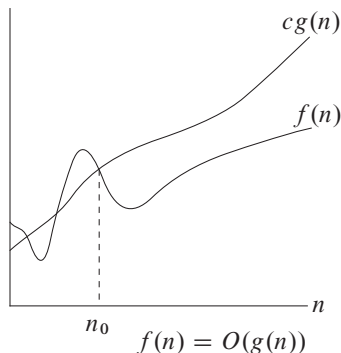


# NOTAZIONE ASINTOTICA: O-GRANDE

## Definizione (O-grande)

Data una funzione di costo  $g(n)$  definiamo l'insieme di funzioni per cui  $g(n)$  rappresenta un *limite asintotico superiore* come

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, n_0 \geq 0 \text{ tale che } \forall n \geq n_0, f(n) \leq cg(n)\}$$



- Intuitivamente  $O(g(n))$  è l'insieme di funzioni che hanno ordine di crescita inferiore o uguale a  $g(n)$
- $g(n) = O(g(n))$
- Con abuso di notazione, diciamo che  $f(n) = O(g(n))$  mentre la notazione corretta sarebbe  $f(n) \in O(g(n))$

# ESEMPIO: NOTAZIONE O-GRANDE

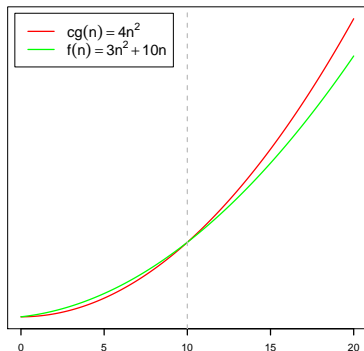
- Siano  $g(n) = n^2$  e  $f(n) = 3n^2 + 10n$ . Dimostriamo che  $f(n) = O(g(n))$
- Dobbiamo trovare due costanti  $c > 0$  e  $n_0 \geq 0$  tali che

$$\forall n \geq n_0, f(n) \leq cg(n) \implies 3n^2 + 10n \leq cn^2$$

- La costante  $c$  deve soddisfare la seguente disequazione

$$c \geq \frac{3n^2 + 10n}{n^2} = 3 + \frac{10}{n}$$

- Verificata  $\forall c \geq 13$  e  $\forall n_0 \geq 1$
- N.B. Possiamo anche scegliere  
 $n_0 = 10$  e  $c \geq 4$

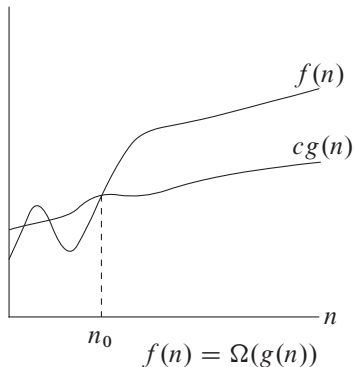


# NOTAZIONE ASINTOTICA: OMEGA-GRANDE

## Definizione ( $\Omega$ -grande)

Data una funzione di costo  $g(n)$  definiamo l'insieme di funzioni per cui  $g(n)$  rappresenta un *limite asintotico inferiore* come

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, n_0 \geq 0 \text{ tale che } \forall n \geq n_0, f(n) \geq cg(n)\}$$



- Intuitivamente,  $\Omega(g(n))$  è l'insieme di funzioni che hanno ordine di crescita superiore o uguale a  $g(n)$
- $g(n) = \Omega(g(n))$

# ESEMPIO: NOTAZIONE OMEGA-GRANDE

- Siano  $g(n) = n^2$  e  $f(n) = n^3 + 2n^2$ . Dimostriamo che  $f(n) = \Omega(g(n))$
- Dobbiamo cercare due costanti  $c > 0$  e  $n_0 \geq 0$  tali che

$$\forall n \geq n_0, f(n) \geq cg(n) \implies n^3 + 2n^2 \geq cn^2$$

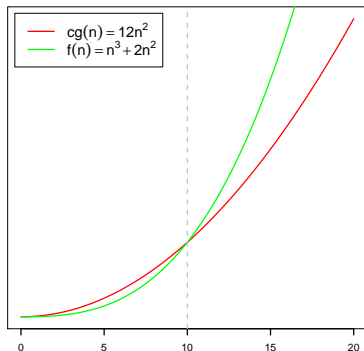
- La costante  $c$  deve soddisfare la seguente disuguaglianza

$$c \leq \frac{n^3 + 2n^2}{n^2} = n + 2$$

- Verificata  $\forall 0 < c \leq 2, \forall n_0 \geq 0$

- N.B. Possiamo anche scegliere

$$n_0 = 10 \text{ e } c \leq 12$$



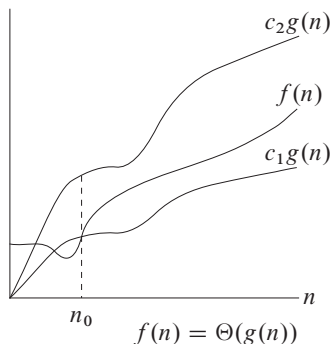


# NOTAZIONE ASINTOTICA: THETA

## Definizione ( $\Theta$ )

Data una funzione di costo  $g(n)$  definiamo l'insieme di funzioni *asintoticamente equivalenti* a  $g(n)$  come

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0, n_0 \geq 0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$



■ Intuitivamente  $\Theta(g(n))$  è l'insieme di funzioni il cui ordine di crescita è uguale a quello di  $g(n)$

■  $g(n) = \Theta(g(n))$

■ **Teorema.**  $f(n) = \Theta(g(n))$   
se e solo se

$$f(n) = O(g(n)) \text{ e } f(n) = \Omega(g(n))$$

# ESEMPIO: NOTAZIONE THETA

■ Siano  $g(n) = n^3$  e  $f(n) = n^3 + 2n^2$ . Dimostriamo che  $f(n) = \Theta(g(n))$

■ Dobbiamo cercare tre costanti  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  e  $n_0 \geq 0$  tali che

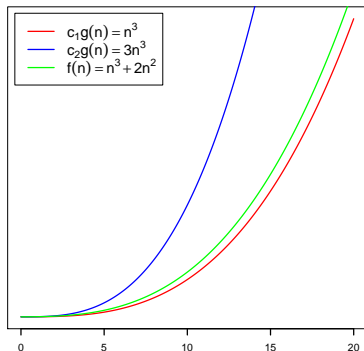
$$\forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \implies c_1 n^3 \leq n^3 + 2n^2 \leq c_2 n^3$$

■ Le costanti  $c_1, c_2$  devono soddisfare le seguenti disuguaglianze

$$c_1 \leq \frac{n^3 + 2n^2}{n^3} = 1 + \frac{2}{n} \leq c_2$$

■ Verificata

$$\forall c_1 \leq 1, c_2 \geq 3 \text{ e } \forall n_0 \geq 1$$



# NOTAZIONE ASINTOTICA: $o$ -PICCOLO

## Definizione ( $o$ -piccolo)

Data una funzione di costo  $g(n)$  definiamo l'insieme di funzione che sono *dominate asintoticamente* da  $g(n)$  come

$$o(g(n)) = \{f(n) \mid \forall c > 0, \exists n_0 \geq 0 \text{ tale che } \forall n \geq n_0, f(n) < cg(n)\}$$

- In cosa differisce dalla notazione  $O$ -grande?
  - $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow f(n) \leq cg(n)$  per qualche costante  $c > 0$
  - $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) < cg(n)$  per tutte le costanti  $c > 0$
- Per ogni funzione di costo  $g(n) \neq o(g(n))$ 
  - Esempio:  $2n = o(n^2)$ ,  $2n^2 \neq o(n^2)$
- Per definizione, se  $f(n) = o(g(n))$  allora  $f(n) = O(g(n))$ 
  - Il contrario è generalmente non vero

# NOTAZIONE ASINTOTICA: $\omega$ -PICCOLO

## Definizione ( $\omega$ -piccolo)

Data una funzione di costo  $g(n)$  definiamo l'insieme di funzioni che *dominano asintoticamente*  $g(n)$  come

$$\omega(g(n)) = \{f(n) \mid \forall c > 0, \exists n_0 \geq 0 \text{ tale che } \forall n \geq n_0, f(n) > cg(n)\}$$

- In cosa differisce dalla notazione  $\Omega$ -grande?
  - $f(n) = \Omega(g(n)) \Rightarrow f(n) \geq cg(n)$  per qualche costante  $c > 0$
  - $f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow f(n) > cg(n)$  per tutte le costanti  $c > 0$
- Per ogni funzione di costo  $g(n) \neq \omega(g(n))$ 
  - Esempio:  $n^2/2 = \omega(n)$ ,  $n^2/2 \neq \omega(n^2)$
- Per definizione, se  $f(n) = \omega(g(n))$  allora  $f(n) = \Omega(g(n))$ 
  - Il contrario è generalmente non vero

# NOTAZIONE ASINTOTICA E LIMITI

- L'ordine di crescita asintotico può essere confrontato utilizzando **limiti**
- Se il seguente limite **esiste ed è zero**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

allora  $f(n) = o(g(n)) \implies f(n) = O(g(n))$

- Se il seguente limite **esiste ed è infinito**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

allora  $f(n) = \omega(g(n)) \implies f(n) = \Omega(g(n))$

- Se il seguente limite **esiste ed è una costante positiva**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k > 0$$

allora  $f(n) = \Theta(g(n))$

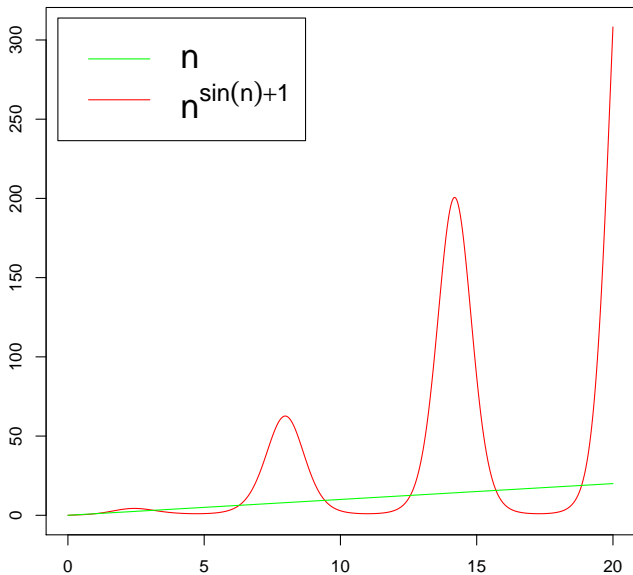
# INTERPRETAZIONE INTUITIVA

- Interpretazione del confronto tra ordine di crescita asintotica di funzioni in analogia con il confronto tra numeri reali

Funzioni	Numeri reali
$f(n) = O(g(n))$	$f \leq g$
$f(n) = o(g(n))$	$f < g$
$f(n) = \Omega(g(n))$	$f \geq g$
$f(n) = \omega(g(n))$	$f > g$
$f(n) = \Theta(g(n))$	$f = g$

- Comunque, a differenza di quanto avviene nel dominio dei numeri reali, non tutti gli ordini di crescita asintotica sono confrontabili
  - Se  $a, b$  sono numeri reali, solo una tra  $a < b, a = b, a > b$  è vera
  - $f(n) = n, g(n) = n^{\sin(n)+1}$  non sono confrontabili
    - $f(n) \neq O(g(n))$  poiché quando  $\sin(n) = -1$  allora  $g(n) = 1$
    - $f(n) \neq \Omega(g(n))$  poiché quando  $\sin(n) = 1$  allora  $g(n) = n^2$

# FUNZIONI NON CONFRONTABILI



# ALCUNE PROPRIETÀ DELLA NOTAZIONE ASINTOTICA

## Transitività

$$f(n) = O(g(n)) \text{ e } g(n) = O(h(n)) \implies f(n) = O(h(n))$$

Vale anche per  $\Omega$ ,  $\Theta$ ,  $o$  e  $\omega$

## Riflessività

$$f(n) = O(f(n))$$

Vale lo stesso per  $\Omega$  e  $\Theta$  ma non per  $o$  e  $\omega$

## Simmetria

$$g(n) = \Theta(f(n)) \iff f(n) = \Theta(g(n))$$

## Simmetria trasposta

- $f(n) = O(g(n)) \iff g(n) = \Omega(f(n))$
- $f(n) = o(g(n)) \iff g(n) = \omega(f(n))$



# ALCUNE REGOLE UTILI

## Somma

Se  $f_1(n) = O(g_1(n))$  e  $f_2(n) = O(g_2(n))$  allora

$$f_1(n) + f_2(n) = O(g_1(n) + g_2(n))$$

## Prodotto

Se  $f_1(n) = O(g_1(n))$  e  $f_2(n) = O(g_2(n))$  allora

$$f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$$

## Moltiplicazione per una costante

Se  $f(n) = O(g(n))$  e  $a > 0$  allora

$$a \cdot f(n) = O(g(n))$$

# NOTAZIONE ASINTOTICA IN EQUAZIONI

- Come dovremmo interpretare la seguente formula?

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$$

Esiste qualche funzione  $f(n)$  in  $\Theta(n)$  tale che

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + f(n)$$

- Come dovremmo interpretare la seguente formula?

$$2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

Esiste qualche funzione  $f(n)$  in  $\Theta(n)$  tale che

$$2n^2 + f(n) = \Theta(n^2)$$

- Allo stesso modo, possiamo utilizzare in equazioni anche  $O$ ,  $\Theta$ ,  $o$  e  $\omega$

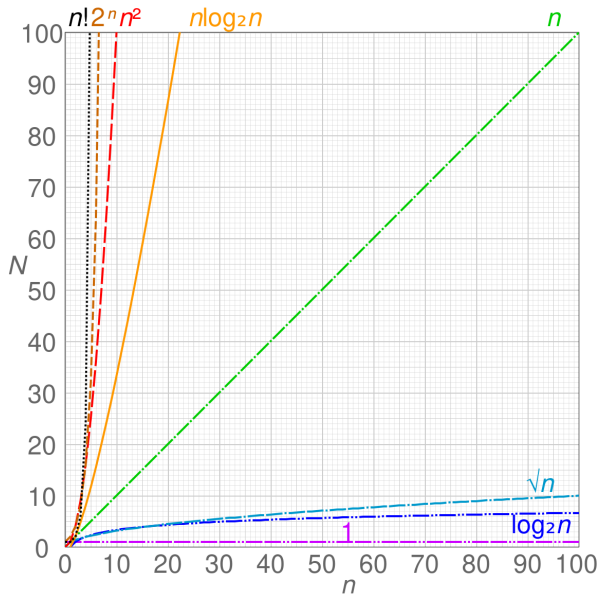
# ORDINI DI CRESCITA (MOLTO COMUNI)

Ordine di crescita	Nome
$O(1)$	Costante
$O(\log n)$	Logaritmico
$O(\log^k n)$	Polilogaritmico, $k \geq 1$
$O(n^k)$	Sublineare, $0 < k < 1$
$O(n)$	Lineare
$O(n \log n)$	Pseudolineare
$O(n^k)$	Polinomiale, $k > 1$
$O(n^2)$	Quadratico, per $k = 2$
$O(n^3)$	Cubico, per $k = 3$
$O(c^n)$	Esponenziale, base $c > 1$
$O(n!)$	Fattoriale
$O(n^n)$	Esponenziale, base $n$

N.B. Utilizziamo la seguente notazione per i logaritmi

- $\log = \log_2 n$
- $\log^k n = (\log n)^k$

## CONFRONTO TRA ORDINI DI CRESCITA



# COSTO E COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE

## Definizione (costo computazionale)

Un **algoritmo**  $\mathcal{A}$  ha **costo computazionale**  $O(f(n))$  rispetto ad una certa risorsa di calcolo se la quantità di risorse necessaria per eseguire  $\mathcal{A}$  su un qualsiasi input di dimensione  $n$  è  $O(f(n))$ .

## Definizione (complessità computazionale)

Un **problema**  $\mathcal{P}$  ha **complessità computazionale**  $O(f(n))$  rispetto ad una certa risorsa di calcolo se esiste un algoritmo che risolve  $\mathcal{P}$  con costo computazionale  $O(f(n))$  rispetto a tale risorsa di calcolo.

- Le **risorse di calcolo** principalmente considerate solo il **tempo di esecuzione** oppure l'**occupazione di memoria**
- Le due definizioni sono valide anche per le altre notazioni asintotiche

# ANALISI DEL CASO OTTIMO, PESSIMO E MEDIO

- Spesso abbiamo bisogno di esprimere quali siano *almeno* (**caso ottimo**), *al peggio* (**caso pessimo**) o *in media* (**caso medio**) le risorse di calcolo richieste da un algoritmo
- **Caso ottimo**: descrive il comportamento in *condizioni ottimali*
  - E.g. ricerca sequenziale quando l'elemento cercato è il primo
- **Caso pessimo**: descrive il comportamento in *condizioni sfavorevoli*
  - E.g. ricerca sequenziale quando l'elemento cercato è l'ultimo
- **Caso medio**: descrive il *comportamento medio* su tutti i possibili input
  - E.g. costo medio di una ricerca sequenziale in una lista
- Quando sviluppiamo algoritmi siamo principalmente interessati a migliorare le prestazioni nel caso pessimo e/o medio

## ESEMPIO: VALORE MINIMO

Cercare la posizione del valore minimo in un array

```
1: function MIN(ARRAY  $A[1 \cdots n]$ )  $\rightarrow$  INT  
2:    $m = 1$   
3:   for  $i = 2, \cdots, n$  do  
4:     if  $A[i] < A[m]$  then  
5:        $m = i$   
6:   return  $m$ 
```

- Il loop for viene eseguito  $n - 1$  volte con un costo  $O(1)$
- Caso ottimo, pessimo e medio coincidono:  $O(n)$
- Possiamo essere maggiormente precisi ed utilizzare  $\Theta(n)$  (perché?)

## ESEMPIO: RICERCA LINEARE

Cercare la posizione di un valore all'interno di un array ( $-1$  se non trovato)

```
1: function SEARCH(ARRAY  $A[1 \cdots n]$ , INT  $x$ )  $\rightarrow$  INT  
2:   for  $i = 1, \dots, n$  do  
3:     if  $A[i] == x$  then  
4:       return  $i$   
5:   return  $-1$ 
```

- **Caso ottimo** ( $x$  è il primo elemento):  $O(1)$
- **Caso pessimo** ( $x$  non presente oppure ultimo):  $\Theta(n)$
- **Caso medio**: dobbiamo semplificare il problema
  - **Probabilità uniforme**:  $x$  in posizione  $i$  con probabilità  $P_i = 1/n$
  - Il tempo necessario per ispezionare la posizione  $i$  è  $T_i = i$

$$\text{Costo medio} = \sum_{i=1}^n P_i T_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n)$$



# ANALISI AMMORTIZZATA

- L'analisi ammortizzata è un metodo per valutare il costo medio di una sequenza di operazioni
- Differenza tra costo ammortizzato e costo medio
  - costo medio: media del costo di una singola operazione
  - costo ammortizzato: media del costo di una sequenza di operazioni
- Per alcuni algoritmi, una data operazione può essere molto costosa in alcune situazioni e molto efficiente in altre
  - L'analisi del caso pessimo può essere troppo pessimistica
  - L'analisi del caso medio necessita assunzioni probabilistiche non sempre semplici da formulare
- L'analisi ammortizzata complementa l'analisi nel caso pessimo e medio

## ESEMPIO: CONTATORE BINARIO

- Operazione di incremento di un numero binario su array
- La cifra più significativa è nella prima posizione dell'array

```
1: function INCREMENT(ARRAY  $A[1 \dots k]$ )  
2:    $i = k$   
3:   while  $i \geq 1$  and  $A[i] == 1$  do  
4:      $A[i] = 0$   
5:      $i = i - 1$   
6:   if  $i \geq 1$  then ▷ if  $i = 0$  counter overflow  
7:      $A[i] = 1$ 
```

- Tempo di calcolo nel **caso ottimo**: (quando  $A[k]$  contiene zero):  $O(1)$
- Tempo di calcolo nel **caso pessimo** ( $A$  contiene tutti uno):  $O(k)$
- Una sequenza di  $n$  incrementi ha un costo limitato da  $\Omega(n)$  and  $O(nk)$
- Sono queste stime precise per il tempo di calcolo?

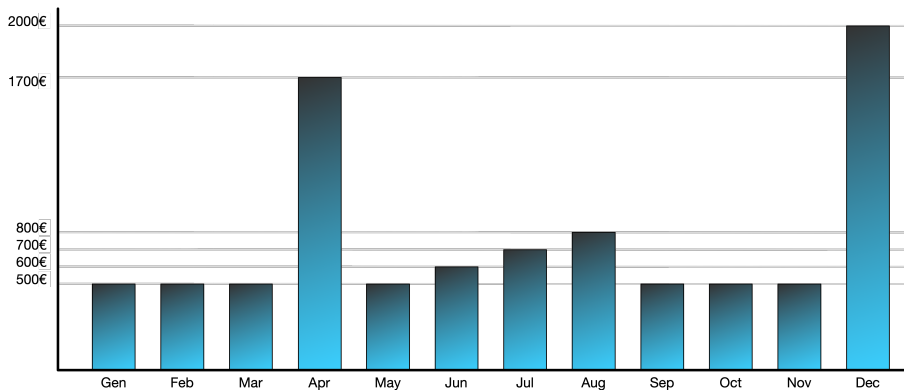
## ESEMPIO: CONTATORE BINARIO

Value	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	Cost
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	0	2
3	0	0	0	1	1	1
4	0	0	1	0	0	3
5	0	0	1	0	1	1
6	0	0	1	1	0	2
7	0	0	1	1	1	1
8	0	1	0	0	0	4
9	0	1	0	0	1	1
10	0	1	0	1	0	2

# METODI PER L'ANALISI AMMORTIZZATA

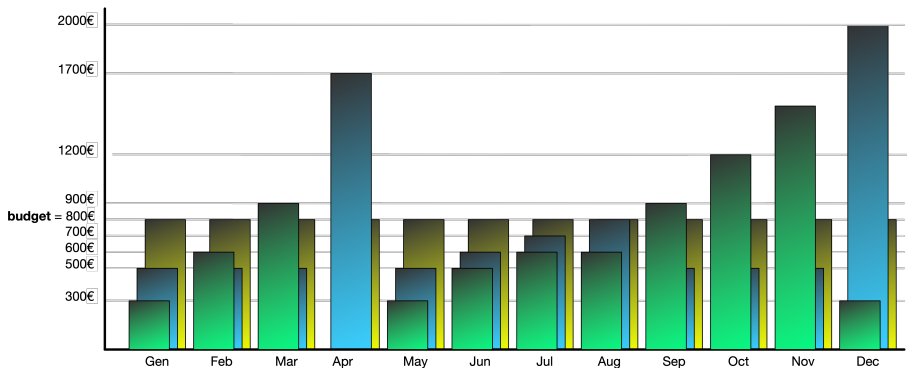
- **Metodo dell'aggregazione:** determiniamo un **limite superiore** al **costo totale** di una sequenza di  $n$  operazioni e dividiamo per  $n$
- **Metodo degli accantonamenti:** metodo basato sulla **contabilità**
  - Assegniamo un **costo ammortizzato** ad ogni operazione
  - Ogni operazione viene addebitata con il suo costo ammortizzato
  - Dopo ogni operazione, salviamo come **credito** la differenza tra il suo costo ammortizzato e costo reale
  - Accumuliamo il credito collezionato durante l'esecuzione
  - Se il costo reale è più alto del costo ammortizzato, usiamo il credito
  - Il costo ammortizzato è **corretto** se il **credito non è mai negativo**
- Ognuno dei due metodi può essere più o meno adatto ad un problema
  - Metodo dell'aggregazione: ideale se il costo totale è ben definito
  - Metodo degli accantonamenti: ideale se ci sono diverse operazioni

# AGGREGAZIONE VS ACCANTONAMENTI



- Il limite superiore è 2000€ per mese  $\Rightarrow$  24000€ per anno
- Metodo dell'aggregazione: somma i costi mensili e dividi per 12
  - Il costo ammortizzato è  $9300\text{€}/12 = 775\text{€}$  per mese

# AGGREGAZIONE VS ACCANTONAMENTI



- Metodo degli accantonamenti: stimiamo un budget di 800€ al mese mese che usiamo per pagare i costi e salvare credito
  - Il credito è usato per pagare i costi mensili che sfiorano il budget
  - Il credito non deve mai essere negativo altrimenti siamo falliti
  - Notiamo che se il budget è di 775€ al mese falliamo ad Aprile
  - Il costo ammortizzato è quindi 800€ al mese

# ANALISI AMMORTIZZATA CON AGGREGAZIONE

- Consideriamo una sequenza di  $n$  operazioni INCREMENT
- Metodo dell'aggregazione: sommiamo i costi per i cambi di bit
  - Il  $k$ -esimo bit è cambiato ad ogni incremento
  - Il  $(k - 1)$ -esimo bit è cambiato ogni due incrementi
  - Il  $(k - 2)$ -esimo bit è cambiato ogni quattro incrementi
  - Il costo totale di  $n$  operazioni è quindi limitato da

$$n + n/2 + \cdots + n/2^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n}{2^i} \leq n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = n \frac{1}{1 - 1/2} = 2n$$

N.B. Abbiamo solo  $k$  bit da cambiare anche se  $n > 2^k$  (overflow)

- Il costo pessimo totale di una sequenza di  $n$  operazioni è  $O(n)$
- Il costo ammortizzato per operazione è dunque  $\frac{O(n)}{n} = O(1)$

# ANALISI AMMORTIZZATA CON ACCANTONAMENTI

- Consideriamo una sequenza di  $n$  operazioni INCREMENT
- Metodo degli accantonamenti: addebitiamo un costo ammortizzato di 2€ per cambiare ad 1 un bit con valore 0
  - Usiamo 1€ per pagare il cambio ad 1
  - Salviamo il restante 1€ come credito
  - Il credito sarà usato successivamente per cambiare il bit a 0
  - Addebitiamo un costo solo ai cambi ad 1, non a quelli a 0
- **Teorema.** In ogni momento ogni 1 nell'array ha un 1€ di credito
  - numero di 1 mai negativo  $\Rightarrow$  credito residuo mai negativo
- **Teorema.** Una sequenza di  $n$  incrementi costa  $2n$ €
  - Un singolo incremento cambia un solo bit da 0 ad 1
  - Ogni cambio da 0 ad 1 costa 2€  $\Rightarrow$  costo totale uguale a  $2n$ €
- Il **costo ammortizzato** di ogni incremento è dunque  $\frac{2n}{n} = O(1)$



# ANALISI AMMORTIZZATA CON ACCANTONAMENTI

Valore	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	Credito residuo	Costo totale
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1€ 1	1	2
2	0	0	0	1€ 1	0€ 0	1	4
3	0	0	0	1€ 1	1€ 1	2	6
4	0	0	1€ 1	0€ 0	0€ 0	1	8
5	0	0	1€ 1	0€ 0	1€ 1	2	10
6	0	0	1€ 1	1€ 1	0€ 0	2	12
7	0	0	1€ 1	1€ 1	1€ 1	3	14
8	0	1€ 1	0€ 0	0€ 0	0€ 0	1	16
9	0	1€ 1	0€ 0	0€ 0	1€ 1	2	18
10	0	1€ 1	0€ 0	1€ 1	0€ 0	2	20