

Corso di Algoritmi e Strutture di Dati

Esercizi

Esercizio 1. Si consideri un grafo non orientato connesso $G = (V, E)$ i cui archi abbiano tutti lo stesso peso $w > 0$. Descrivere un algoritmo efficiente che, dato in input il grafo G e il peso w di tutti i suoi archi, determini un Minimum Spanning Tree di G . Determinare il costo computazionale dell'algoritmo proposto.

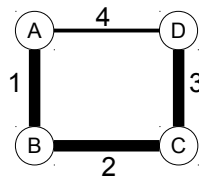
Soluzione. Dato che G è connesso, un qualunque spanning tree di G ha n nodi e $n - 1$ archi, e quindi peso $w(n - 1)$. Di conseguenza, ogni spanning tree di G è anche un minimum spanning tree. Un modo efficiente per trovarne uno è di scegliere un qualsiasi nodo e iniziare da lì una visita in ampiezza o profondità. L'albero risultante sarà un MST per G . Il costo dell'algoritmo è $O(m + n)$, nettamente inferiore al costo di calcolare un MST con l'algoritmo di Kruskal o Prim.

Esercizio 2. Proporre un algoritmo efficiente per calcolare un *Maximum Spanning Tree* di un grafo non orientato pesato $G = (V, E, w)$, in cui ad ogni arco e è associato un peso reale $w(e)$ non necessariamente positivo (un Maximum Spanning Tree è un albero di copertura di peso totale massimo).

Soluzione. Il problema può essere risolto moltiplicando tutti i pesi per -1 , e calcolando il Minimum Spanning Tree del grafo risultante utilizzando, ad esempio, l'algoritmo di Kruskal oppure quello di Prim. In maniera più diretta, possiamo applicare l'algoritmo di Kruskal considerando però gli archi in ordine *decrescente* di peso (si inizia dall'arco più pesante per terminare con quello più leggero, anziché il contrario come richiesto per il calcolo di un minimum spanning tree)

Esercizio 3. Consideriamo un grafo non orientato, connesso e pesato $G = (V, E, w)$. Mostrare, fornendo un controesempio, che non è sempre possibile costruire un MST contenente un arco e dato.

Soluzione. E' facile rendersi conto che nel grafo seguente



l'unico MST è quello che contiene gli archi evidenziati aventi peso rispettivamente 1, 2, 3; qualsiasi spanning tree che contenga l'arco (A, D) non sarà di peso minimo.