

## Esercitazione 1

### Argomento: aritmetica del calcolatore, cancellazione numerica

1. I seguenti numeri vengono introdotti in un calcolatore che opera in aritmetica floating-point con base  $N = 10$ ,  $t = 5$  cifre riservate alla mantissa e tecnica di arrotondamento:

$$a = 1.483593,$$

$$b = 1.484111.$$

Determinare il risultato  $\bar{s} = \bar{a} \ominus \bar{b}$ , ove  $\bar{x}$  indica il numero di macchina corrispondente a  $x$  nella suddetta aritmetica e  $\ominus$  denota l'operazione di macchina corrispondente all'operazione aritmetica della sottrazione. Confrontare  $\bar{s}$  con  $c = a - b$  e calcolare l'errore relativo associato a  $\bar{s}$ .

2. Valutare le funzioni

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1 - \cos(x)}{x^2}, & f_2(x) &= \frac{e^x - 1}{x}, \\ f_3(x) &= 1 - \sqrt{1 - x^2}, & f_4(x) &= \frac{(x+1)^2 - 1}{x} \end{aligned}$$

in  $x = 10^{-n}$  per  $n = 1, 2, \dots, 16$ . Successivamente riformulare le funzioni assegnate al fine di evitare il fenomeno della cancellazione numerica e, assumendo come valori esatti quelli che si ottengono mediante la riformulazione proposta, calcolare i corrispondenti errori relativi e confrontarli con la precisione di macchina. Per ogni valore di  $x$ , stampare e rappresentare graficamente il corrispondente errore relativo.

3. Si consideri la successione

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_n &= 2^{n-1/2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4^{1-n} x_{n-1}^2}}, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

per il calcolo approssimato di  $\pi$ . Calcolare gli errori relativi  $|\pi - x_n|/\pi$  per  $n = 1, \dots, 40$  e rappresentare il grafico dei suddetti errori in scala logaritmica. Successivamente, determinare un'espressione  $\tilde{x}_n$  equivalente a  $x_n$  che consenta di evitare il fenomeno della cancellazione numerica. Rappresentare graficamente gli errori relativi  $|\pi - \tilde{x}_n|/\pi$  per  $n = 1, \dots, 40$  in scala logaritmica e, confrontando il grafico con quello precedente, commentare i risultati.

4. Data la funzione  $f(x) = \sin(x)$ , si approssimi  $f'(x)$  con il seguente rapporto incrementale

$$f'(x) \approx r(x) = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h},$$

scegliendo  $h = 2^{-k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 50$ . Fissare, per esempio,  $x = \pi/4$ , rappresentare graficamente l'errore relativo  $|f'(x) - r(x)|/|f'(x)|$  e commentare i risultati. Successivamente riformulare  $r(x)$  al fine di evitare il fenomeno della cancellazione numerica e rappresentare graficamente il corrispondente errore relativo.