WYZNACZNIKI

Wyznaczniki są łatwym zagadnieniem, ale jednocześnie wymagają odrobiny wprawy, aby się nie zgubić.

Na podstawie kilku przykładów omówię dwie metody liczenia wyznaczników.

PIERWSZA METODA(SARRUSA)

Metoda Sarrusa najkrócej mówiąc polega na wymnożeniu ze sobą kolejnych wyrazów przekątnych i dodaniu ich do siebie i odjęciu od siebie dwóch przekątnych. Trudno jest mi to wytłumaczyć słownie, dlatego na kilka przykładach wyjaśnię dokładnie, o co chodzi.
WAŻNA UWAGA: METODĘ SARRUSA MOŻNA STOSOWAĆ DO LICZENIA WYZNACZIKÓW MACIERZY O ROZMIARACH NIE WIĘKSZYCH NIŻ 3X3.

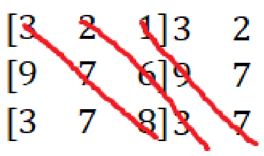
Przykład 1:

Mamy daną macierz:

[3 2 1]
[9 7 6]
[3 7 8]

Skorzystajmy z metody Sarrusa, aby policzyć wyznacznik takiej macierzy krok po kroku:

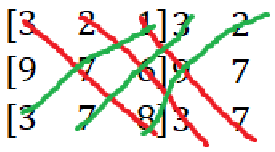
1. Zaczynając od lewego górnego rogu i idąc cały czas w prawo wymnażamy wyrazy po przekątnej(warto dopisać dwie pierwsze kolumny):
   [3 2 1] 3 2
   [9 7 6] 9 7 . Po dopisaniu dwóch pierwszych kolumn, podążamy od lewego
   [3 7 8] 3 7
   górnego rogu w prawo i wymnażamy ze sobą liczby na przekątnych i dodajemy je do siebie, tak jak na rysunku:



Czyli wyraz po wyrazie lecimy tak:

3*7*8+2*6*3+1*9*7

2. Teraz otwieramy nawias i przed nim stawiamy minus, i w ten sam sposób będziemy się kierować z drugą przekątną od lewego dolnego rogu, do prawej strony:



Czyli nasza druga przekątna będzie wyglądała tak:

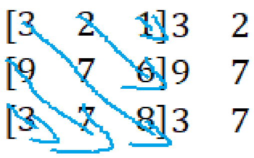
3*7*1+7*6*3+8*9*2

Czyli nasz wyznacznik będzie wyglądał tak:

detA = 3*7*8+2*6*3+1*9*7 –(3*7*1+7*6*3+8*9*2), czyli idąc dalej będzie:

168+36+63 –(21+126+144), czyli licząc do końca otrzymamy: 267 – 291 = -24, tyle wynosi wyznacznik takiej macierzy.

Te dwie pierwsze kolumny nie są dopisane bez powodu. Takie dopisanie ma na celu pokazać jak zachowują się wyrazy macierzy, a właściwie jak można je odczytać posiadając odrobinę wprawy. Na rysunku pokarzę dokładniej.



Proszę zwrócić uwagę na to jak poruszają się niebieskie strzałki. Zaczynając od pierwszej przekątnej mamy 3*7*8, potem idziemy dalej, kolejna strzałka zahacza dwa kolejne wyrazy 2 i 6, a następnym wyrazem jest 3, wprawa polega na tym, aby dostrzec, jak zachowują się wyrazy, czyli przy drugiej strzałce mamy 2*6 i potem strzałka przechodzi na 3, czyli mamy 2*6*3, stąd się bierze ta wprawa, następnie znowu strzałka na 1 i leci dalej przez 9 i 7, więc mamy 1*9*7. W praktyce wszystko wyjdzie.

Przykład 2:

$$\begin{array}{ccc} [1 & -2 & 5] \\ [-4 & 3 & -1] \\ [9 & 5 & 3] \end{array}$$

Znowu dopiszmy dwie pierwsze kolumny:

$$\begin{array}{ccccc} [1 & -2 & 5] & 1 & -2 \\ [-4 & 3 & -1] & -4 & 3 \\ [9 & 5 & 3] & 9 & 5 \end{array}$$

Ponownie zaczynając od lewego górnego rogu idziemy w prawo i mnożymy:

[1 - 2 5] 1 - 2
[- 4 3 - 1] 4 3
[9 5 3] 9 5

Czyli mamy:

1*3*3 + (-2)*(-1)*9 + 5*4*5

Teraz druga przekątna, kierujemy się od lewego dolnego rogu w prawo:

[1 - 2 5] 1 - 2
[- 4 3 - 1] 4 3
[9 5 3] 9 5

Czyli mamy:

9*3*5 + 5*(-1)*1 + 3*4*(-2)

Więc w pełni mamy tak:

detA = 1*3*3 + (-2)*(-1)*9 + 5*4*5 –(9*3*5 + 5*(-1)*1 + 3*4*(-2)) = 127 – (104) = 23.
Tyle wynosi nasz wyznacznik.

Przykład 3:

[1 4 2]
[8 5 3]
[1 −3 −2]

Spróbujmy teraz policzyć wyznacznik bez dopisywania dwóch kolumn, aby udoskonalić wprawę:

[1 4 2]
[8 5 3]
[1 - 3 - 2]

Zwracamy uwagę na to jak kierują się strzałki:

Idąc od pierwszej mamy:

1*5*(-2) teraz druga strzałka leci przez 4 i 3 i kończy się na 1, więc 4*3*1, ostatnia strzałka zaczyna się na 2 i kończy na -3, więc 2*8*(-3), teraz zajmiemy się drugą przekątną:

[1 4 2]
[8 5 3]
[1 - 3 - 2]

Znowu patrzymy się na strzałki, pierwsza strzałka leci przez 1,5 i 2, więc mamy:

1*5*2, teraz druga strzałka leci przez -3,3 i kończy się na 1, więc mamy: (-3)*3*1, i ostatnia strzałka zaczyna się na -2 i leci przez 8 i 4, więc mamy: (-2)*8*4, więc finalnie otrzymamy:

detA = 1*5*(-2) + 4*3*1 + 2*8*(-3) – (1*5*2 + (-3)*3*1 + (-2)*8*4) = -46 – (-63) = 17.

Tyle wynosi nasz wyznacznik.

Przykład 4:

[2 3 1]
[5 6 4]
[9 7 8]

Znowu, nie dopisujmy kolumn, tylko policzmy od razu:

[2 3 1]
[5 6 4]
[9 7 8]

Znowu patrzymy jak idą strzałki. Pierwsza leci przez 2,6 i 8, więc mamy: 2*6*8, teraz druga, leci przez 3 i 4, a kończy się na 9, więc mamy: 3*4*9, ostatnia strzałka zaczyna się na 1 i leci przez 5 i 7, więc mamy: 1*5*7, i teraz zrobimy to samo z drugą przekątną.

[2 3 1]
[5 6 4]
[9 7 8]

Znowu patrzymy na to, jak lecą strzałki.

Pierwsza leci przez 5, 6 i 1, więc mamy: 9*6*1, teraz druga, leci przez 7,4, kończy się na 2, więc mamy:

7*4*2, ostatnia biegnie przez 8, 5 i 3, więc mamy: 8*5*3, finalnie otrzymamy:

detA = 2*6*8 + 3*4*9 + 1*5*7 – (9*6*1 + 7*4*2 + 8*5*3) = 239 – (230) = 9. Tyle wynosi wyznacznik.

Dla pokazania tego, że nie trzeba dopisywać dwóch kolumn obliczę wyznacznik dopisując dwie kolumny:

[2 3 1] 2 3
[5 6 4] 5 6
[9 7 8] 9 7

[2 3 1] 2 3
[5 6 4] 5 6
[9 7 8] 9 7

Licząc pierwszą przekątną: 2*6*8, i teraz przesuwamy się w prawo i mamy strzałka leci przez 3 i 4 i kończy się na 9 tak samo, gdy liczyliśmy bez dopisywania, więc otrzymamy 3*4*9

Znowu się przesuwamy w prawo i mamy tak samo, strzałka zaczyna się na 1 i leci przez 5 i 7, tak samo jak liczyliśmy bez dopisywania, więc mamy: 1*5*7, teraz druga przekątna:

[2 3 1] 2 3
[5 6 4] 5 6
[9 7 8] 9 7

Znowu patrzymy jak idą strzałki. Pierwsza strzałka leci przez 9,6 i 1, więc mamy: 9*6*1

Przesuwamy się w prawo i widzimy, że przechodzi przez 7,4 i 2, więc mamy: 7*4*2, wszystko wychodzi tak samo, znowu się przesuwamy i strzałka przechodzi przez 8,5 i 3, więc mamy: 8*5*3, wszystko tak samo jak poprzednio. Warto stosować dopisywanie dwóch pierwszych kolumn zdecydowanie na początku, aby nie zgubić się w trakcie liczenia. Gdy już nabierzecie wprawy nie będziecie musieli tego robić.

Dokańczając liczenie otrzymamy:

detA = 2*6*8 + 3*4*9 + 1*5*7 – (9*6*1 + 7*4*2 + 8*5*3) = 239 – (230) = 9. Więc wyszło tyle samo.

Przejdźmy teraz do drugiej metody liczenia wyznaczników.

ROZWINIĘCIE LAPLACE'A

Rozwinięcie Laplace'a jest stosowane do obliczania wyznaczników macierzy większych niż 3x3. Przytoczmy wzór na rozwinięcie Laplace'a.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Oznaczenie wzoru:

I,j – numery wierszy i kolumn.

Mij – wyznacznik macierzy o 1 mniejszej.

(-1) – liczba, która wynika z własności wyznacznika, która mówi o tym, że zamiana wierszy lub kolumn w macierzy zmienia znak wyznacznika.

Cij – wyznacznik macierzy.

Wzór wygląda dosyć skomplikowanie, ale nie jest on skomplikowany. Przejdźmy do praktyki.

Przykład 5:

[2 3 4 1]

[6 8 0 2]

[7 1 4 3]

[3 5 1 5]

Policzmy wyznacznik tej macierzy krok po kroku:

1. Szukamy takiego wiersza lub takiej kolumny, w której występuję jak najwięcej zer, można zera sobie generować wykonując operacje elementarne, czyli działania na wierszach i kolumnach. W naszym przykładzie widać, że jeśli odejmiemy od 3 wiersza pierwszy, w ten sposób wygenerujemy sobie drugie zero w 3 kolumnie.
   [2 3 4 1]
   [6 8 0 2]
   [1 -2 0 2]
   [3 5 1 5]
   WAŻNA UWAGA:
   Chcemy uzyskać jak najwięcej zer, ponieważ im uzyskamy więcej zer, tym mniej wyznaczników mniejszego stopnia będziemy musieli policzyć, bo jeśli trafimy gdzieś na 0, to możemy pominąć, bo cokolwiek pomnożone przez 0 daje 0.
2. Teraz wybieramy ten wiesz lub kolumnę, w której występuje najwięcej zer.
3. Teraz wykonamy rozwinięcie Laplace'a względem 3 kolumny

3.1

Zaczynamy od pierwszego wyrazu kolumny lub wiersza. W naszym przypadku zaczynamy od 4.

Teraz robimy tak:

4 mnożymy przez -1 i liczbę -1 podnosimy do potęgi, która jest numerem wiersza + numer kolumny.

[2 3 4 1]
[6 8 0 2]
[1 -2 0 2]
[3 5 1 5]

Więc mamy 4*(-1) * wyznacznik stopnia o 1 mniejszego, który powstaje w taki sposób, że wykreślamy wiersz i kolumnę, z których wzięliśmy wyraz.

~~[2 3 4 1]~~
[6 8 ~~0~~ 2]
[1 -2 ~~0~~ 2]
[3 5 ~~1~~ 5]

W naszym przykładzie pierwszy wiersz i trzecia kolumna.

Teraz powstały wyznacznik macierzy będzie złożona z tych wyrazów, które nie zostały wykreślone, czyli:

[6 8 2]

[1 -2 2]

[3 5 5]

Czyli otrzymamy:

4*(-1)^wiersz + kolumna * wyznacznik tej macierzy, czyli

|6 8 2|

4*(-1)^wiersz+kolumna* |1 -2 2|, teraz dodajemy do tego następny wyraz, czyli 0 i

|3 5 5|

mnożymy go przez wyznacznik macierzy powstałej z wykreślenia drugiego wiersza i trzeciej kolumny:

[2 3 4 1]
[~~6 8 0 2~~]
[1 -2 0 2]
[3 5 1 5]

I tak będziemy robić z każdym wyrazem. Nie możemy zapomnieć o tym, by cały czas zapisywać to, co już było, czyli:

4*(-1)wiersz + kolumna* |6 8 2| + 0*(-1)^wiersz + kolumna* |2 3 1|

|1 -2 2| |1 -2 2|

|3 5 5| |3 5 5|

Teraz robimy to samo z następnym wyrazem, wykreślamy trzeci wiersz i trzecią kolumną:

[2 3 4 1]
[6 8 0 2]
[~~1 -2 0 2~~]
[3 5 1 5]

4*(-1)^1+3* |6 8 2| + 0*(-1)^2+3* |2 3 1| + 0*(-1)^3+3* |2 3 1|, został już ostatni wyraz

|1 -2 2| |1 -2 2| |6 8 2|

|3 5 5| |3 5 5| |3 5 5|

[2 3 4 1]
[6 8 0 2]
[1 -2 0 2]
[~~3 5 1 5~~]

4*(-1)^1+3* |6 8 2| + 0*(-1)^2+3* |2 3 1| + 0*(-1)^3+3* |2 3 1| + 1*(-1)^4+3 * |2 3 1|

|1 -2 2| |1 -2 2| |6 8 2| |6 8 2|

|3 5 5| |3 5 5| |3 5 5| |1 -2 2|

Warto dodać, że sposób z wykreślaniem wierszy i kolumn można łatwo zapamiętać w taki sposób, że wykreślamy ten wiersz i tą kolumnę, idąc odpowiednio z wierszem lub kolumną, tak jak było pokazane na rysunkach, czyli zaczęliśmy od 4, więc wykreśliliśmy pierwszy wiersz i trzecią kolumnę, potem drugi wiersz i trzecią kolumnę, trzeci wiersz i trzecią kolumnę, czwarty wiersz i trzecia kolumnę, a te wyrazy, które stoją na przecięciu są mnożone przez -1.

4. Teraz policzmy wszystkie pomniejsze wyznaczniki, można stosować ponownie rozwinięcie Laplace'a, ale szybciej jest liczyć metodą Sarrusa. Oczywiście, gdybyśmy liczyli wyznacznik macierzy 5x5, to powstałe mniejsze wyznaczniki też byśmy musieli liczyć rozwinięciem Laplace'a, bo były by to macierze 4x4. Teraz już policzmy powstałe wyznaczniki:

   Pierwszy:

[6 8 2]

[1 -2 2]

[3 5 5]

Sarrusem mamy:
6*(-2)*5 + 8*2*3 + 2*1*5 + (3*(-2)*2 + 5*2*6 + 5*1*8) = -60+48+10 – (-12 + 60 +40) = -2-88 = -90
Teraz pomnożymy tą liczbę przez to, co stało przed wyznacznikiem, czyli 4*(-1)^wiersz + kolumna, czyli 4*(-1)^1+3 * (-90)

Te wyznaczniki, w których widać, że wyjdzie zero pomijam. Mam tutaj namyśli wyznacznik 2 i 3, więc policzę od razu 4.

[2 3 1]

[6 8 2]

[1 -2 2]

2*8*2 + 3*2*1 + 1*6*(-2) – (1*8*1 + (-2)*2*2 + 2*6*3) = 32 + 6 – 12 – (8-8 + 36) = 26 – 36 = -10

Teraz przemnóżmy to przez to, co stało przed wyznacznikiem.

1*(-1)^4+3 * (-10). Teraz dodajmy do siebie wszystkie rzeczy.

4*(-1)^1+3 * (-90) + 1*(-1)^4+3 * (-10) = -360 + 10 = -350 = detA. Tyle jest równy nasz wyznacznik.

Liczenie wyznaczników przy pomocy rozwinięcia Laplace’a nie jest skomplikowane, tylko wymaga wprawy, aby się po drodze nie zgubić.

Zróbmy jeszcze 2 przykłady, aby utrwalić wiedzę.

Przykład 6:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Znowu, szukamy wiersza lub kolumny, w których występuję jak najwięcej zer. W tym przypadku widać, że w 3 wierszu występują 3 zera, więc zastosujemy rozwinięcie Laplace’a.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Zwróćcie uwagę na to, że mamy do policzenia tak naprawdę jeden wyznacznik (ten przy 4), bo nie ma sensu liczyć tych, gdzie występują zera, bo tak czy się dostaniemy 0, więc można pominąć.

Więc znowu bierzemy pierwszy wyraz z danego wiersza lub kolumny i wykreślamy dany wiersz i kolumnę.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

I idąc rozwinięciem Laplace’a mamy:

4*(-1)^3+1* wyznacznik macierzy powstałej z tych wyrazów, które są poza wykreśleniem.

[2 -5 8]

[1 -2 0]

[-1 -2 4]

Policzmy najpierw wyznacznik mniejszej macierzy:

2*(-2)*4 + (-5)*0*(-1) + 8*1*(-2) – ((-1)*(-2)*8 + (-2)*0*2 + 4*1*(-5)) = -16+0-16 – (16+0-20) = -32 – (-4) = -28

Teraz policzmy całość:

4*(-1)^3+1*(-28) = 4*(-28) = -112 = detA. Tyle wynosi nasz wyznacznik.

Ostatni przykład:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Zobaczmy, że 2 zera mamy już w drugim wierszu, więc względem tego wiersza zastosujemy rozwinięcie Laplace’a.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Znowu mamy do policzenia tylko jeden wyznacznik.

Czyli licząc:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cancel{3} & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{0} \\ 2 & \cancel{-2} & -3 \end{vmatrix}$$

Wykreślamy drugi wyraz z drugiego wiersza, bo ten wyraz będzie nam tylko potrzebny.

Policzmy teraz wyznacznik macierzy powstałej z wyrazów poza wykreśleniem:

[1 4]

[2 -3]

-3 – (8) = -11

Teraz zapiszmy już pełne obliczenia:

3*(-1)^2+2*(-11) = 3*(-11) = -33 = detA. Tyle wynosi wyznacznik naszej macierzy.

To już wszystkie przykłady jakie chciałem omówić. Jak widać liczenie wyznaczników nie jest skomplikowane, tylko wymaga wyrobienia wprawy i uważności, aby się nie zgubić.