PODPRZESTRZEŃ WEKTOROWA, LINIOWA NIEZALEŻNOŚĆ,BAZA I GENERATOR PRZESTRZENI LINIOWEJ

W tym pliku zajmuję się trzema dość prostymi zagadnieniami. Mogą one wydawać się na początku skomplikowane, ale postaram się pokazać, że tak nie jest.

Zacznijmy od podprzestrzeni wektorowej.

Aby sprawdzić, czy dany zbiór V jest podprzestrzenią liniową przestrzeni P należy tak naprawdę sprawdzić 4 rzeczy:

1. Czy wektor zerowy należy do zbioru V. Chodzi o to, że jak zaraz na zadaniu pokażę mamy pewien zbiór V określony jakimś wzorem. Wektor zerowy to taki, który ma każdą współrzędną równą zero. Jeśli po podstawieniu jego współrzędnych do warunku wyjdzie lewa równa prawej, czyli 0=0, to jest wszystko git, natomiast jeśli lewa nie będzie równa prawej to od razu warunek nie spełniony i już można powiedzieć, że zbiór nie jest podprzestrzenią liniową.
2. Bierzemy przykładowy wektor np. $v = (1,2,3)$, zakładamy, że wektor nie należy do zbioru V, a więc na pewno należy do przestrzeni R^n.
3. Bierzemy 2 dowolne wektory, zakładamy, że suma tych dwóch dowolnych wektorów należy do zbioru V (w zadaniu powiem więcej, bo tak będzie najlepiej)
4. Mnożymy dowolny wektor przez skalar i też zakładamy, że należy do zbioru V.

To teraz zobaczmy na paru przykładach, o co chodzi:

PRZYKŁAD 1:

$$P = \mathbb{R}^3, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

Zobaczmy. Mamy przestrzeń R^3, i jakiś zbiór. W warunku mamy, że $x + y + z = 0$. To jest ten warunek, o którym wspomniałem wcześniej.

To teraz podążając krok po kroku:

1. Bierzemy wektor zerowy ϴ= $(0,0,0)$, z racji tego, że mamy przestrzeń R^3 to wektory mają po 3 współrzędne, więc wektor zerowy mam 3 zera.

   Teraz pod nasz warunek wstawiamy odpowiednie współrzędne do warunku:

   $x + y + z = 0$ wektor zerowy ma 3 zera, więc $0 + 0 + 0 = 0$, więc ϴ∈V

2. Teraz bierzemy przykładowy wektor, niech będzie $v = (1,2,3)$ i znowu wstawiamy jego współrzędne do warunku, czyli $1 + 2 + 3 = 0$, a tak naprawdę $6 \neq 0$, więc wektor $v \notin V$, ale wektor $v \in R^3$. Ten warunek mamy spełniony.
3. Teraz bierzemy dwa dowolne wektory:

   $u = (x, y, z)$, $v = (x_1, y_1, z_1)$

   Zakładamy, że $u + v \in V$ suma tych wektorów należy do zbioru V.

Teraz należy pamiętać, aby warunek zapisać odpowiednio dla tych wektorów:

Mamy odpowiednio:

$u = (x, y, z)$ więc warunek przepisujemy $x + y + z = 0$

$v = (y_1, y_2, z_3)$ więc warunek modyfikujemy dla tego wektora po prostu wstawiając jego współrzędne do warunku: $x_1 + y_1 + z_1 = 0$

Teraz je sumujemy:

$u + v = (x, y, z) + (x_1, y_1, z_1) = (x + y_1, y + y_2, z + z_2)$, zsumowałem ze sobą odpowiednie współrzędne. Teraz odpowiednie współrzędne zsumowane ze sobą rozbijam na oddzielne nawiasy, tzn. W oddzielne nawiasy bierzemy sumę odpowiednich współrzędnych, czyli:

$(x + y_1, y + y_2, z + z_2)$, teraz sumuję ze sobą współrzędne x i y, i zapisuje to w innych nawiasach, czyli: $(x + y + z) + (x_1 + y_1 + z_1)$, teraz zwracamy uwagę na warunek. W warunku mamy: $x + y + z = 0$ i $x_1 + y_1 + z_1 = 0$, więc możemy teraz podstawić 0 za te wyrażenia, czyli mamy: 0+0=0, więc suma wektorów $u + v \in \mathrm{V}$

4. Teraz mnożymy jeden dowolny wektor przez skalar, czyli dowolną liczbę:

$\alpha u \in V$, więc podstawiamy wektor u: $\alpha * (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, teraz znowu patrzymy na nasz warunek w zadaniu: $x + y + z = 0$, teraz powstawiamy współrzędne tego wektora, który nam powstał po przemnożeniu przez skalar: $\alpha x + \alpha y + \alpha z = 0$, teraz wyłączając α mamy:

$\alpha(x + y + z) = \alpha * 0 = 0$, więc $\alpha u \in V$

Wszystkie warunki są spełnione, więc zbiór V jest podprzestrzenią liniową w przestrzeni R^3. Koniec zadania.

Mam nadzieję, że widać już powoli, że nie jest to skomplikowane.

PRZYKŁAD 2:

$$P = \mathbb{R}^3, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = x - y = 0\}$$

Zobaczmy, mamy przestrzeń $P = R^3$ i zbiór V. W warunku mamy:

$x + y + z = x - y = 0$

Znowu sprawdzamy 4 warunki:

1. Wektor zerowy należy do zbioru V:

$\Theta = (0,0,0)$więc podstawiamy współrzędne:

$0 + 0 + 0 = 0 - 0 = 0$, co finalnie daje 0=0, więc warunek jest spełniony.

2. Bierzemy byle jaki wektor, najlepiej $v = (1,2,3)$ i podstawiamy współrzędne do warunku:

Rozbijemy to na dwa oddzielne wyrażenia, bo jak widzimy te dwa wyrażenia są przyrównane do zera, więc

$x + y + z = 0$ i $x - y = 0$

Więc teraz te dwa wyrażenia muszą być różne od zera.

Wstawiamy odpowiednie współrzędne:

$1+2+3=0$ i $1-2=0$

$6 \neq 0$ i $-1 \neq 0$

Oba warunki spełnione więc można przejść dalej.

3. Teraz bierzemy dwa dowolne wektory i je sumujemy:

$u=(x,y,z), v=(x_1,y_1,z_1)$

Zatem znowu zakładamy, że $u+v \in V$ cały czas pamiętamy o tym, aby odpowiednio zmodyfikować warunek:

$u=(x,y,z): x+y+z=x-y=0$

$v=(x_1,y_1,z_1): x_1+y_1+z_1=x_1-y_1=0$

Liczymy u+v:

$u+v=(x,y,z)+(x_1,y_1,z_1)=(x+x_1,y+y_1,z+z_1)$ teraz odpowiednio zsumowane ze sobą współrzędne rozbijam na trzy oddzielne nawiasy:

$(x+x_1)+(y+y_1)+(z+z_1)$:

$(x+y+z)+(x_1+y_1+z_1)$, wiemy, że $x+y+z=0$ i $x_1+y_1+z_1=0$.

Więc możemy podstawić 0 za wyrażania:

Otrzymujemy $0+0=0$, więc suma wektorów $u+v \in$ V. Warunek spełniony.

4. Teraz mnożymy dowolny wektor przez skalar:

$\alpha u \in V$

Więc wektor, który wybraliśmy wstawiamy:

$\alpha * (x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

Znowu zwracamy uwagę na warunek podany w zadaniu:

Mamy, że $x+y+z=x-y=0$, czyli tak naprawdę że $x+y+z=0$, więc dalej mamy:

$\alpha(x+y+z) = \alpha * 0 = 0$, więc $\alpha u \in V$

Wszystkie warunki są spełnione, więc zbiór V jest podprzestrzenią liniową w przestrzeni R^3. Kończymy zadanie.

LINIOWA NIEZALEŻNOŚĆ:

Do sprawdzenia, czy wektory są niezależne wystarczy znajomość dwóch twierdzeń oraz definicja liniowej niezależności.

Myślę, że definicję warto przytoczyć:

Mówimy, że wektory **są liniowo niezależne wtedy i tylko, gdy dla każdego układu liczb rzeczywistych $\boldsymbol{\alpha_i = 1, 2, 3 \ldots\ldots n}$ mamy:**

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

Jeśli wektory **nie są liniowo niezależne, to mówimy, że są liniowo zależne.**

Twierdzenie 1:

Wektory $x_i, i = 1,2,3 \ldots . n$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy wśród wektorów $x_i, i = 1,2,3 \ldots . n +$ istnieje taki, który jest kombinacją liniową pozostałych.

Twierdzenie 2:

$x_i, i = 1,2,3 \ldots . n + z\ R^n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko, gdy $detA(x_1, x_2 \ldots . x_n) \neq 0$.

Gdzie $A(x_1, x_2 \ldots . x_n)$ jest macierzą, której wierszami są wektory $x_i, i = 1,2,3 \ldots n$.

Na paru przykładach pokażę o co chodzi.

PRZYKŁAD 3:

Zbadaj liniową niezależność wektorów w R^3.

3.1 $\overrightarrow{x_1} = [2, -1, 3]$, $\overrightarrow{x_2} = [-2, 5, 1]$, $\overrightarrow{x_3} = [3, -1, 2]$

Zobaczmy, mamy przestrzeń R^3, mamy podane 3 wektory. Ponieważ mamy 3 wektory z R^3, to możemy skorzystać z **Tw.2.** Ułóżmy macierz, w której wiersze lub kolumny (nie ma to znaczenia) będą wektory:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zgodnie z twierdzeniem wyznacznik tej macierzy musi być różny od zera, aby wektory były liniowo niezależne. Policzmy wyznacznik.

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 * 5 * 2 + (-3) + 6 - (45 - 1 + 4) = 23 - (40) = -23 \neq 0$$

Skoro wyznacznik macierzy jest różny od zera, to znaczy, że wektory są liniowo niezależne.

3.2

$\overrightarrow{x_1} = [-2, 1, 1]$, $\overrightarrow{x_2} = [3, 2, 0]$, $\overrightarrow{x_3} = [5, 2, 3]$ w R^3

Ponownie mamy 3 wektory z R^3, więc możemy skorzystać z **Tw.2**. Ułóżmy macierz i policzmy jej wyznacznik:

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 0 + 6 - (10 + 0 + 9) = -25 \neq 0$$

Skoro wyznacznik jest różny od 0, to wektory są liniowo niezależne.

PRZYKŁAD 4:

Zbadaj liniową niezależność wektorów w R^4.

$\overrightarrow{x_1} = [3, 1, -2, 4]$, $\overrightarrow{x_2} = [4, -2, 0, 4]$, $\overrightarrow{x_3} = [1, 3, 4, 0]$

Ponieważ mam podane tylko 3 wektory, to nie możemy użyć **Tw.1**. W tym przypadku musimy użyć definicji liniowej niezależności wektorów.

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$

$\alpha_1(3,1,-2,4) + \alpha_2(4,-2,0,4) + \alpha_3(1,3,4,0) = 0$, skoro to ma być równe 0, to musi być równe wektorowi zerowemu:

$\alpha_1(3,1,-2,4) + \alpha_2(4,-2,0,4) + \alpha_3(1,3,4,0) = (0,0,0,0)$

Teraz wymnażamy wektory przez skalary:

$(3\alpha_1, \alpha_1, -2\alpha_1, 4\alpha_1) + (4\alpha_2, -2\alpha_2, 0, 4\alpha_2) + (\alpha_3, 3\alpha_3, 4\alpha_3, 0) = (0,0,0,0)$

Teraz musimy dodać do siebie współrzędne w taki sposób, aby każda współrzędna powstałego wektora była sumą tych samych współrzędnych. Zobaczmy:

$(3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3)$ Pierwsza współrzędna

Dodaliśmy do siebie pierwsze współrzędne punktów i tak robimy z każdą współrzędną:

$(\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3)$ druga współrzędna

$(-2\alpha_1 + 0 + 4\alpha_3)$ trzecia współrzędna
$(4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 0)$ czwarta współrzędna

Teraz zapiszmy to w postaci jednego wektora:

$(3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3, -2\alpha_1 + 0 + 4\alpha_3, 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 0)$ = (0,0,0,0)

Teraz robimy układ równań:

$\{3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3$

$\{\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3$

$\{-2\alpha_1 + 0 + 4\alpha_3$

$\{4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 0$

Jeżeli powyższy układ będzie miał niezerowe rozwiązanie, to układ wektorów jest liniowo zależny. Natomiast jeżeli jedynym jego rozwiązaniem jest rozwiązanie zerowe, to układ wektorów jest liniowo niezależny.

Układamy macierz i rozwiązujemy układ równań:

A = [3 4 1]

[1 -2 3]

[-2 0 4]

[4   4   0]

Tutaj metoda rozwiązywania układów równań nie jest istotna. Ja użyje metody Gaussa.

$$A = [3 \quad 4 \quad 1]$$
$$[1 \quad -2 \quad 3]$$
$$[-2 \quad 0 \quad 4]$$
$$[4 \quad 4 \quad 0]$$

$W1 \leftrightarrow w2$ [1   -2   3]

[3   4   1] -> -3w1+w2

[-2   0   4]   2w1+w3

[4   4   0]   -4w1+w4

[1 -2 3]		[1 -2 3]
[0 10 -8]	-> 3w3+w4	[0 10 -8]
[0 -4 10]		[0 -4 10]
[0 12 12]		[0 0 18]

Teraz, wracamy do zapisu algebraicznego:

$\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \rightarrow \ \alpha_1 = 0$

$10\alpha_2 - 8\alpha_3 = 0$

$-4\alpha_2 + 10\alpha_3 = 0 \rightarrow \ \alpha_2 = 0$

$18\alpha_3 \ = 0 \rightarrow \ \alpha_3 = 0$

Z czwartego równania mamy $\alpha_3 = 0$ wstawiając kolejno do kolejnych równań mamy: $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 0$

Jedynym rozwiązaniem układu równań jest zero, więc wektory są liniowo niezależne. Tutaj kończymy.

PRZYKŁAD 5:

$\overrightarrow{x_1} = [3, 2, -1, 2]$, $\overrightarrow{x_2} = [2, -1, 0, 4]$, $\overrightarrow{x_3} = [7, 0, -1, 10]$ W R^4

Ponieważ mamy 3 wektory z R^4, to musimy użyć definicji liniowej niezależności.

$\alpha_1(3{,}2, -1.2) + \ \alpha_2(2, -1{,}0{,}4) + \alpha_3(7{,}0, -1{,}10) = (0{,}0{,}0{,}0)$

Mnożymy przez skalar:

$(3\alpha_1, 2\alpha_1, -\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, -\alpha_2, 0, 4\alpha_2) + (7\alpha_3, 0, -\alpha_3, 10\alpha_3) = (0{,}0{,}0{,}0)$

Teraz dodajemy do siebie współrzędne na odpowiednich miejscach.

$(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 7\alpha_3)$ pierwsza współrzędna

$(2\alpha_1 - \alpha_2 + 0)$ druga współrzędna

$(-\alpha_1 + 0 - \alpha_3)$ trzecia współrzędna

$(2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 10\alpha_3)$ czwarta współrzędna

Teraz zapiszmy to w jednym wektorze:

$(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 7\alpha_3, 2\alpha_1 - \alpha_2 + 0, -\alpha_1 + 0 - \alpha_3, 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 10\alpha_3) = (0,0,0,0)$

Układamy układ równań i rozwiązujemy:

Metoda rozwiązywania nie ma znaczenia, ja użyje metody Gaussa:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 10\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[2w_1 + w_2]{\substack{2w_1 + w_2 \\ 3w_1 + w_3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2w_3 + w_4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2w_2 + w_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teraz wracamy do zapisu algebraicznego:

$-\alpha_1 - \alpha_3 = 0$

$-\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$

$\alpha_1 = -\alpha_3$

$\alpha_2 = -2\alpha_3$

Widzimy, że istnieje niezerowe rozwiązanie np. dla $\alpha_3 = 1, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2$

Zatem wektory są liniowo zależne.

BAZA

Zacznę od definicji bazy:

Wektory $B = \{x_i\}, i \in N$ przestrzeni wektorowej X nad ciałem R nazywamy bazą tej przestrzeni, gdy każdy wektor $x \in X$ można przedstawić jako:

$$\sum_{i \in N} \alpha_i x_i$$

Tzn. że każdy element przestrzeni x jest kombinacją liniową wektorów bazowych.

UWAGA

Przestrzeń wektorowa może mieć wiele baz.

Jeśli przestrzeń wektorowa X ma bazę skończoną, to mówimy, że jest przestrzenią skończenie wymiarową. Wtedy wszystkie bazy tej przestrzeni mają tyle samo elementów, a liczbę wektorów tworzących dowolną bazę nazywamy **wymiarem przestrzeni** X i oznaczamy $dimX$.

Jeśli przestrzeń wektorowa X nie ma bazy złożonej ze skończonych wektorów, to przestrzeń nazywamy nieskończenie wymiarową.

Jeśli wektory $\{x_1, x_2, \dots \dots x_n\}$ tworzą bazę przestrzeni wektorowej X nad ciałem R, to są one liniowo niezależne, oraz jeśli $m > n$, to wektory $\{y_1, y_2 \dots \dots y_m\}$ tej przestrzeni są liniowo zależne.

Dla przestrzeni R^n układ wektorów

$e_1 = [1,0, \dots..0]$

$e_2 = [0,1,0 \dots..0]$

$\vdots$

$e_n = [0,0, \dots..0,1]$

Nazywamy bazą kanoniczną.

Zobaczmy o co chodzi na przykładzie:

PRZYKŁAD 6:

Zbadaj, czy dane wektory tworzą bazę przestrzeni wektorowej R^3.

$$\overrightarrow{x_1} = [3, 2, -1]\,,\ \overrightarrow{x_2} = [2, -2, 1]\,,\ \overrightarrow{x_3} = [-1, 3, 2]$$

Wiemy, że aby wektory stanowiły bazę w danej przestrzeni muszą być liniowo niezależne. Wiemy już, że aby wektory były liniowo niezależne, to wyznacznik macierzy, której wierszami lub kolumnami (nie ma to znaczenia) musi być różny od 0. Więc obliczmy wyznacznik takiej macierzy:

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12 - 2 - 6 - (-2 + 9 + 8) = -20 - 15 = -35 \neq 0$$

Zatem wektory stanowią bazę w przestrzeni R^3. Koniec zadania.

PRZYKŁAD 7:

Zbadaj, czy wektory stanowią bazę przestrzeni wektorowej R^3.

$\overrightarrow{x_1} = [3,2,4]$, $\overrightarrow{x_2} = [2,1,1]$, $\overrightarrow{x_3} = [-1,0,2]$

Ponownie, aby te wektory stanowiły bazę przestrzeni wektorowej R^3 to muszą być liniowo niezależne, więc wyznacznik macierzy utworzonej z tych wektorów musi być różny od 0.

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 + (-2) + 0 - (-4 + 0 + 8) = 4 - 4 = 0$$

Wyznacznik macierzy jest równy zero, więc wektory nie stanowią i nie mogą stanowić bazy przestrzeni R^3.

Teraz chciałbym pokazać 2 przykłady, które pokażą jak szukać generatorów danej przestrzeni liniowej.

PRZYKŁAD 8:

Znajdź generator przestrzeni liniowej.

$$V = \{(x - 2y, x + y + 3z, y - 4z, ,2x + z) : x, y, z \in R\}$$

Krok po kroku:

1. Wektor podany w naszej przestrzeni rozbijamy na czynniki pierwsze.

Przepiszmy nasz wektor: $(x - 2y, x + y + 3z, y - 4z, ,2x + z)$, teraz na czym to polega?

Chcemy wyodrębnić x,y i z, czyli chcemy zapisać sumę trzech wektorów, w której każda suma jest poświęcona innej współrzędnej, czyli zobaczcie, mamy 3 współrzędne w naszym wektorze:

$(x - 2y, x + y + 3z, y - 4z, 2x + z)$, na razie zapisałem wektor podany w warunku, ale teraz zobaczcie:

Teraz powstaje nam wektor, w którym każda współrzędna powstaje przez napisanie tego, co stoi przy każdym x,y i z z warunku, czyli:

$(x, x, 0,2x)$

Na pierwszym miejscu mamy jednego x-a, na drugim znów jednego x-a, na trzecim nie mam w ogóle więc pisze zero, na czwartym mam 2x, więc piszę 2x, stąd się wzięło:
$(x, x, 0,2x)$

Teraz robimy to samo z y.

Na pierwszym miejscu stoi -2y, więc piszemy, na drugim y, więc piszemy, na trzecim y, więc piszemy, na czwartym nie ma, więc piszemy 0. Więc druga współrzędna będzie taka:

$(-2y, y, y, 0)$

Teraz robimy to samo z ostatnią współrzędną, czyli z:

Na pierwszym miejscu nie ma nic, więc piszemy 0, na drugim stoi 3z, więc piszemy, na trzecim -4z, więc piszemy, na czwartym z, więc piszemy. Ta współrzędna będzie wyglądać tak:

$(0,3z,-4z,z)$.

Teraz zapiszmy to jako sumę wektorów:

$(x,x,0,2x)+(-2y,y,y,0)+(0,3z,-4z,z)$

2. Teraz przed każdy z tych wektorów wyłączam literkę odpowiedzialną za niego, czyli:

Za pierwszy wektor odpowiada x, więc wyłączam x.

x(1,1,0,2)

Za drugi odpowiada y, więc wyłączam y:

$y(-2,1,1,0)$

Za trzeci odpowiada z, więc wyłączam z:

$z(0,3,-4,1)$

Zobaczcie, że tak naprawdę to działa w taki sposób, jakbyście coś wyłączali przed nawias. Zapiszmy teraz to jako suma wektorów:

$x(1,1,0,2)+y(-2,1,1,0)+z(0,3,-4,1)$

Teraz te wektory, które nam powstały są naszym generatorem przestrzeni liniowej, więc mogę zapisać tak:

$$V=lin\{(11,0,2),(-2,1,1,0),(0,3,-4,1)\}$$

Można jeszcze powiedzieć, że wymiar $dimV=3$, bo powstały wektor ma 3 współrzędne.

Gdzie Lin oznacza, że nasze wektory są generowane przez powstałe wektory. Tutaj kończymy zadanie.

PRZYKŁAD 9:

Ten przykład rozwiążę drugim sposobem, czyli na układ równań.

Weźmy taką przestrzeń:

$$V=\{x-y+2t=y+z-t=x+y+z+t=0\}$$

Zapiszmy te równania w postaci układu równań:

$$\{x-y \quad +2t=0$$

$$\{y+z-t=0$$

$$\{x+y+z+t=0$$

Zatem układamy macierz i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & |0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & |0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & |0 \end{bmatrix} \to w3-w1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & |0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & |0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & |0 \end{bmatrix} \to w1+w2|\, w3-2w2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & |0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & |0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & |0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow w1 + w3|w2 + w3 \begin{matrix} [1 & 0 & 0 & 2 & |0] \\ [0 & 1 & 0 & 0 & |0] \\ [0 & 0 & 1 & -1 & |0] \end{matrix}$$

Teraz, gdy rozwiązaliśmy układ równań, to szczytujemy rozwiązania:

$$x = -2t$$

$$y = 0$$

$$z = t$$

$$t \in R$$

Teraz możemy zapisać wektor:

$$[-2t]$$

$$[0]$$

$$[t]$$

$$[t]$$

Teraz tak jak to robiliśmy w poprzednim przykładzie wyłączamy przed wektor literkę z nim związaną:

T=
$[-2]$

$[0]$

$[1]$

$[1]$

Zatem generator przestrzeni V = 1, wymiar $dimV = 1$. To jest koniec naszego zadania.

To wszystko, co miałem do powiedzenia, mam nadzieję, że rozjaśniłem wszystko i zagadnienia nie są już niezrozumiałe.