INDUKCJA MATEMATYCZNA

Indukcja matematyczna jest metodą dowodzenia twierdzeń(najczęściej równań i nierówności), które są prawdziwe dla nieskończonej liczby przypadków(najczęściej dla nieskończenie wielu liczb naturalnych).

Od razu warto powiedzieć, że zagadnienie to wymaga sporego przećwiczenia (jak i wiele zagadnień z analizy matematycznej).

Warto wspomnieć, że w dowodzeniu twierdzeń będziemy chcieli poprzez odpowiednie przekształcenia doprowadzić do sytuacji, gdzie obie strony równania lub nierówności będą prawdziwe, czyli w równaniu lewa będzie równa prawej, a w nierówności, że lewa jest większa, mniejsza, większa lub równa, mniejsza lub równa prawej.

Przed przejściem do przykładów warto przytoczyć odpowiednie twierdzenia:

TWIERDZENIE

Niech $T(n)$ będzie formą zdaniową, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych N. Załóżmy, że spełnione są następujące warunki:

1. Zdanie $T(1)$ jest prawdziwe
2. Dla dowolnego $n \in N$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \rightarrow T(n+1)$.

Wówczas dla każdej liczby naturalnej n zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.

W założeniu 2. Powyższego twierdzenia zdanie $T(n)$ jest nazwane założeniem indukcyjnym, zaś $T(n+1)$ tezą indukcyjną.

UWAGA 1

Czasami podstawienie do formy zdaniowej T pierwszych liczb naturalnych 1,2,3…., daje zdanie fałszywe, dopiero któraś z kolei liczba naturalna spełnia tę formę. Dlatego mamy jeszcze jedną wersję tego twierdzenia:

TWIERDZENIE

Niech $T(n)$ będzie formą zdaniową, której dziedzina to wszystkie liczby naturalne, wtedy spełnione muszą być warunki:

1. Zdanie $T(k_0)$ jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej k_0

$T(n) \rightarrow T(n+1)$

Wówczas dla każdej liczby naturalnej $n \geq k_0$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.

Teraz można przejść do przykładów.

Przykład 1

Zaczniemy od czegoś prostego.

Stosując zasadę indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej prawdziwy jest wzór:

$$\mathbf{1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

Krok po kroku:

1. Musimy sprawdzić, jak wygląda sytuacja dla $n=1$, zatem podstawiamy do lewej i prawej strony:

L = $\sum_{k=1}^{n} k$, to jest równoważny zapis lewej strony, po prostu jest to suma od 1 do jakiejś liczby n.

Zatem podstawiając 1 za k mamy, że lewa strona jest równa 1.

Teraz podstawy do 1 do prawej strony:

P = $\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$, więc L = P

Można tak wypisywać każdy wyraz po kolei, ale wtedy nie pokazalibyśmy prawdziwości dla wszystkich przypadków. Musimy to udowodnić ogólnikowo, więc dla wyrazu n+1.

2. Teraz musimy wykazać, że jeśli:

$\mathbf{1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$ jest prawdziwe dla n = 1, to wówczas zachodzi to samo równanie tylko dla wyrazu n+1, czyli:

Zapisujemy obie strony, tylko dodajemy do nich wyraz n+1

L = $1+2\ldots n+(n+1)$, dopisaliśmy tylko wyraz n+1.

W prawej stronie podstawiamy n+1 za wyraz n, czyli:

P = $\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$

Czyli otrzymujemy równość:

$$1+2\ldots n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

Teraz musimy pokazać, że jeśli równanie $\mathbf{1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$ zachodzi dla liczb n, to zachodzi również dla liczby większej, czyli n+1.

Pokazaliśmy już, że jest prawdziwe dla n = 1. Chcemy pokazać, że z prawdziwości dla n =1, wychodzi prawdziwość dla n = 2, z prawdziwości n = 2 wychodzi prawdziwość dla n = 3 itd. W nieskończoność. To jest tak naprawdę zasada, że mając punkt zaczepienia w n = 1 chcemy wykazać prawdziwość dla następnych wyrazów, czyli n+1.

Teraz musimy tylko udowodnić, że zdanie
$1 + 2 \ldots n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$ jest prawdziwe, ale możemy korzystać z równania:

$\mathbf{1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$ – to jest nasze założenie tak naprawdę. Zakładamy, że to jest prawda i korzystając z tego faktu, musimy udowodnić równanie: $1 + 2 \ldots n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$.

W tym celu wprowadzę oznaczenie:

L $= 1 + 2 \ldots + n + (n+1)$, P $= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$, zauważmy, że $= 1 + 2 \ldots + n$ wyraża się wzorem $\mathbf{\frac{n(n+1)}{2}}$, zatem możemy podstawić:

L = $\mathbf{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1)$, musimy pokazać, że ta strona jest równa prawej stronie wykonując przekształcenia.

Widzimy, że możemy sprowadzić te wyrażenia do wspólnego mianownika:

L = $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$ sumując i zapisując na jednej kresce mamy:

L = $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$, teraz możemy wyłączyć wspólny czynnik przed nawias, wspólnym czynnikiem jest n+1, zatem:

L = $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ widzimy, że lewa strona jest równa prawej, zatem dowiedliśmy prawdziwość. Tutaj kończymy dowód.

Przy końcowym wniosku warto dopisać, że :

Na mocy Z.I.M(zasady indukcji matematycznej) L=P.

PRZYKŁAD 2

Udowodnij, że:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Krok po kroku:

1. Sprawdźmy jak wyglądają obie strony dla n = 1

L = $\sum_{k=1}^{n} k^2$, podstawiając 1 za ka mamy, że:

L = $1^2 = 1$

Teraz zobaczmy, jak wygląda prawa strona:

P = $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{2*3}{6} = 1$

L=P

2.

Teraz musimy wykazać, że jeśli
$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ jest prawdziwe dla n = 1, to równocześnie jest prawdziwe dla wyrazu następnego, czyli n+1.

Ponownie zapisujemy obie strony dodając wyraz n+1:

L = $1^2+2^2+\cdots n^2+(n+1)^2$

P = $\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ podstawiłem n+1 za liczbę n i wykonałem obliczenia.

Teraz znowu spójrzmy na lewą stronę. Zobaczmy, że $1^2+2^2+\cdots n^2$ jest zapisane jako: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Zatem lewą stronę możemy zapisać jako:

L = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$, zatem musimy teraz pokazać, że lewa strona jest równa prawej. Sprowadźmy te wyrażenia do wspólnego mianownika:

L = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{6(n+1)^2}{6}$ teraz możemy wyciągnąć wspólny czynnik czyli n+1 przed nawias:

L = $\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$ po wyciągnięciu n+1 otrzymaliśmy to, ponieważ:

1. Z pierwszego iloczynu zostanie n(2n+1), więc $2n^2+n$
2. Dodaliśmy do tego $6(n+1)^2$, po wyciągnięciu n+1 zostanie tylko n+1, więc po przemnożeniu mamy 6n+6
3. Ostatecznie dodaliśmy to do siebie i otrzymaliśmy ostateczny wynik.

Teraz pozostało nam tylko uporządkować rzeczy w nawiasie:

L = $\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

Teraz możemy postąpić na 2 sposoby:

1. Możemy $(2n^2+7n+6)$ sprowadzić do postaci iloczynowej i wrócić do zapisu lewej strony
2. Możemy wziąć prawą stronę i wymnożyć nawiasy ze sobą zostawiając n+1 nie zmienione. Postąpię właśnie w ten sposób

P = $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, więc wymnażamy:

P = $\frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

P=L. Obie strony są sobie równe, więc na mocy Z.I.M(zasady indukcji matematycznej) P=L. Co kończy dowód.

PRZYKŁAD 3:

W tym przykładzie odpowiednio posegregujemy informacje. Wydzielimy w nim założenie, tezę i dowód.

Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą , $x > -1$. Udowodnij, że $(1+x)^n \geq 1+nx$ dla każdego $n \in N$

Zał.

Założeniem, będzie to, co mamy podane w przykładzie, czyli:

$(1+x)^n \geq 1+nx$

Teza.

W tezie przede wszystkim sprawdzamy, co uzyskamy po podstawieniu n = 1, to sprawdźmy:

$(1+x)^1 \geq 1+x$, co jest prawdą. Lewa strona będzie większa lub równa prawej.

Dowód:

W dowodzenie staramy się pokazać, czy obie strony będzie większe lub równe sobie dla n+1 elementu, korzystając z tego, co mamy podane w założeniu.

Przepiszmy przykład:

$(1+\mathrm{x})^{\mathrm{n}} \geq 1+\mathrm{nx}$

Będziemy chcieli pokazać, że jeśli $(1+x)^n \geq 1+nx$, to $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

Klasycznie po prawej stronie w miejsce n podstawiliśmy n+1, stąd uzyskaliśmy prawą stronę nierówności.

Rozpiszmy lewą stronę:

L = $(1+x)^n(1+x)^1$ iloczyn potęg o tych samych podstawach, więc wykładniki dodajemy.

Korzystając z założenia możemy zauważyć, że $(1+x)^n \geq 1+nx$

Nie możemy tego podstawić ze względu na znak ≥, ale możemy zapisać, że:

L = $(1+x)^n(1+x)^1 \geq (1+nx)(1+x)$ zgadza się to z naszym założeniem, ponieważ

$(1+x)^n \geq 1+nx$, to:

Całe $(1+x)^n(1+x)^1$ jest większe lub równe od $(1+nx)(1+x)$, idąc dalej:

L = $(1+x)^n(1+x)^1 \geq (1+nx)(1+x)$, teraz możemy wymnożyć nawiasy ze sobą po prawej stronie

L = $(1+x)^n(1+x)^1 \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2$

Teraz możemy się przyjrzeć prawej stronie, bo z lewą już nic dalej nie zrobimy.

P = $1+(n+1)x$, teraz możemy prawą stronę wymnożyć przez x.

P = $1+nx+x$, zwróćmy uwagę na to, że obie strony już są prawie identyczne, różnią się jedynie napisem nx^2.

Gdybyśmy zwrócili uwagę na założenia w zadaniu, to mamy tam powiedziane, że x > -1, więc wyrażenie $nx^2 \geq 0$, ponieważ za każdym razem będzie dodatnie ze względu na parzystą potęgę, może być równe zero, tylko gdy x będzie zerem.

L = $(1+x)^n(1+x)^1 \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2$, więc wyrażenie nx^2 na pewno nie zmniejszy nam tego wyrażenia.

W związku z tym możemy zapisać, że: $= 1+x+nx+nx^2 \geq 1+x+nx$ = P. Co kończy dowód.

PRZYKŁAD 4:

Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $3^{4n+2} + 1 \mid 10$

Zał.

$3^{4n+2} + 1 \mid 10$ założenie indukcyjne

Możemy je zapisać jako:

Warto jeszcze założyć, że $3^{4n+2} + 1 = 10k$, (gdzie k to dowolna liczba całkowita), bo ta liczba musi się dzielić na 10

Teraz chcemy wyznaczyć 3^{4n+2}, więc:

$$3^{4n+2} = 10k - 1$$

Teza:

Dla n = 1 mamy:

$3^6 + 1 \mid 10 = 730 \mid 10,$ co jest prawdą.

Teza indukcyjna:

$3^{4(n+1)+2} + 1 \mid 10$

Dowód:

Wykazaliśmy, że $3^{4n+2} + 1 \mid 10$. Teraz chcemy pokazać, że n+1 element będzie to spełniał.

Zatem ponownie za n wstawiamy n+1

$3^{4(n+1)+2} + 1$

Krok indukcyjny:

$3^{4(n+1)+2} + 1 = 0$

Czyli:

$3^{(4n+2)} = -1$

Teraz chcemy pokazać, że ta liczba jest podzielna na 10. Rozpiszmy to w taki sposób:

$$3^{(4n+4)+2} + 1 = 3^{(4n+2)+4} + 1 = 3^{4n+6} + 1 = 3^{4n+2} * 3^4$$

Teraz podstawiamy założenie indukcyjne $(10k - 1)$*81, gdzie 81 to 3^4

$$(10k - 1) * 81 = 810k - 81$$

Teraz musimy dodać 1, które było w założeniu, czyli mamy:

$810k - 80$, ponieważ ta liczba jest podzielna na 10, to dowód zakończony.

Wyjaśnijmy przekształcenia:

$3^{(4n+4)+2} + 1$, zamiana tego na $3^{(4n+2)+4}$ nie zmienia nam wartości wykładnika, ale jest wygodna do skorzystania z założenia indukcyjnego. Dzięki temu jesteśmy w stanie rozłożyć potęgę jako iloczyn $3^{4n+2} * 3^4$. Dalej mamy taką postać: $3^{4n+2} * 3^4 + 3^4 - 3^4 + 1$. Dopisane 3^4 i od razu jest odejmowane, ponieważ nie chcemy zmienić wartości wyrażenia, oczywiście jedynka na końcu zostaje, nie można o niej zapomnieć.

Ponieważ liczba $3^{4n+2} + 1$ jest podzielna przez 10, to oznacza, że liczba musi kończyć się na 0.

Następnie korzystamy z założenia indukcyjnego, więc zakładamy, że dla pewnego n twierdzenie jest prawdziwe, a następnie udowadniamy, że jest prawdziwe dla liczby $n + 1$. Z założenia indukcyjnego wykazaliśmy, że liczba jest podzielna na 10. Co kończy dowód.

PRZYKŁAD 5

Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $10^n - 4 \mid 6$

Jak zwykle zaczynamy od sprawdzenia, czy to twierdzenie jest prawdziwe dla n = 1

$10 - 4 \mid 6 = 6|6$, co jest prawdą.

Teraz wiemy, że dla n = 1 to zdanie jest prawdziwe, więc teraz postaramy się udowodnić, że jest prawdziwe dla n=1.

Teraz załóżmy, że liczba n = k, to liczba $10^n - 4 \mid 6$, co oznacza, że jeśli gdzieś znajdziemy liczbę $10^n - 4$, to możemy ją zapisać jako 6m, ponieważ jeśli liczba jest podzielna na 6, to jest wielokrotnością 6, gdzie m też jest liczbą naturalną.

Teraz chcemy wykazać, że $10^{k+1} - 4 \mid 6$, spróbujmy rozpisać:

Po rozbiciu potęg mamy:

$10^{k+1} - 4 = 10^1 * 10^k - 4$ teraz musimy to jeszcze dopełnić, bo zabraliśmy jedno 10^k, więc musimy teraz dodać w celu wyrównania, czyli:

$10 * 10^k - 4 + 9 * 10^k$, wiemy, że $10^k - 4 = 6m$, więc możemy podstawić. Warto jeszcze wyliczyć wartość dla $10^k = 6m + 4$, z dalszych wyliczeń wynika, że $10^{k+1} - 4 = 10 * 6m + 40$, wynika to z podstawienia $10^{k+1} - 4 = 10 * 10^k$, więc $10 * (6m) + 40 = 60m + 40$

$10 * (10^k - 4) + 40$, liczba +40 pojawiła się ponieważ nie chcemy zmienić wartości wyrażenia. Widzimy, że po wymnożeniu otrzymamy $10^{k+1} - 40$, więc aby wyrównać musimy dodać 40.

Teraz wystarczy rozbić 40 na sumę i sprawdzić, czy wyjdzie liczba podzielna na 6.

Rozpisujemy zatem $60m + 40$ na sumę tak, aby na końcu była liczba podzielna przez 6.

Można to rozpisać tak: $60m + 40 = 6 * 10m + 6 + 34$. Wiemy, że 34 nie jest podzielne przez 6, tutaj jest błąd. Zatem musimy wrócić do równania: $10^{k+1} - 4 = (10^n - 4) * 10 + 6$, teraz widać, że obie części są podzielne przez 6, co kończy dowód.