CIĄGI LICZBOWE

Ciągi są zagadnieniem przyjemnym oraz łatwym do przyswojenia, tylko trzeba znać parę rzeczy, które ułatwią nam pracę z nimi.

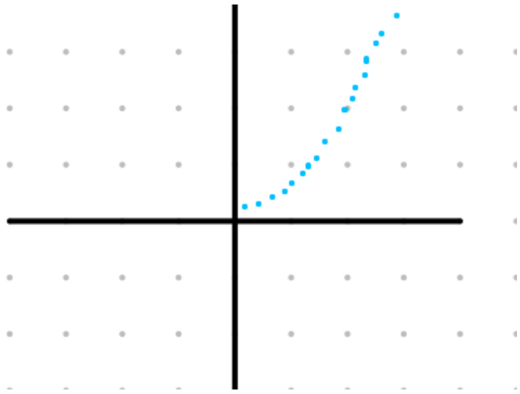
Ciągi dzielimy na ciąg arytmetyczny i geometryczny, każdym z tych rodzajów zajmę się w pracy.

Ciągi mogą być rosnące, malejące, stałe, nierosnące i niemalejące. Przytoczę teraz definicje dla każdego rodzaju ciągu:

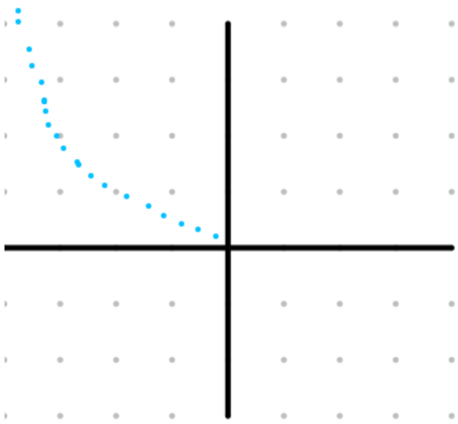
1. Ciąg nazywamy rosnącym, wtedy gdy jego następny wyraz jest mniejszy od poprzedniego, czyli zachodzi nierówność $a_{n+1} > \ a_n$. Równoważnie można go zapisać tak: $a_{n+1} - a_n > 0$
2. Ciąg nazywamy malejącym, wtedy gdy jego następny wyraz jest mniejszy od poprzedniego, czyli zachodzi nierówność $a_{n+1} < a_n$
3. Ciąg nazywamy stałym, wtedy gdy jego wyrazy są sobie równe, czyli zachodzi równość $a_{n+1} = a_n$
4. Ciąg nazywamy nierosnącym, wtedy gdy jego następny wyraz jest **mniejszy lub równy** poprzedniemu, czyli zachodzi nierówność $a_{n+1} \leq a_n$
5. Ciąg nazywamy niemalejącym, wtedy gdy jego następny wyraz jest **większy lub równy** następnemu, czyli zachodzi nierówność $a_{n+1} \geq a_n$

Przytoczę jeszcze wykresy trzech ciągów:

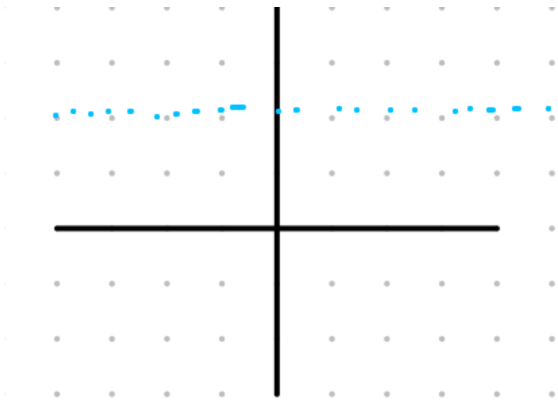
Rosnący:



Malejący:



Stały:



UWAGA 1:

Jeżeli ciąg posiada jedną z wyżej wymienionych cech w całej swojej dziedzinie, to nazywamy go monotonicznym.

PRZYKŁAD 1:

Zbadaj monotoniczność ciągu a_n

$$a_n = \frac{3n-1}{n+3}$$

Zadanie wydaję się być skomplikowane, ale my musimy jedynie zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$.

Robimy to w taki sposób:

Najpierw za n podstawiamy n+1, czyli:

$$a_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{n+1+3} = \frac{3n+2}{n+4}$$

Teraz robimy to samy, tylko dla n:

$a_n = \frac{3n-1}{n+3}$, nic nie zostało zmienione, po prostu wzór ciągu został przepisany

Zatem teraz możemy zapisać pełną różnicę:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n+2}{n+4} - \frac{3n-1}{n+3}$$

Teraz wystarczy za pomocą operacji arytmetycznych doprowadzić to wyrażenie do najprostszej postaci.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(3n+2)(n+3) - (3n-1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{3n^2 + 9n + 2n + 6 - (3n^2 + 12n - n - 4)}{(n+4)(n+3)}$$

$$= \frac{10}{(n+4)(n+3)}$$

Zostawię już w takiej postaci, bo już widać, że znak będzie dodatni, po prostu nie stoi żaden minus przed całym wyrażeniem. I to jest koniec naszego zadania.

PRZYKŁAD 2:

Zbadaj monotoniczność ciągu a_n

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Tym razem zobaczmy, że wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie, więc musimy obliczyć iloraz:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Ponownie najpierw podstawiamy n+1 za n

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Zatem możemy już zapisać pełne działanie:

$$\frac{a_{n+1}}{a^n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2^{n+1}} * 2^n = \frac{1}{2} < 1$$

Zatem od razu widać, że ten ciąg jest malejący, ponieważ zachodzi nierówność $a_{n+1} < a_n$.

I to jest koniec zadania.

Teraz przejdę do ciągu ograniczonego.

Jednak zanim podam definicję ciągu ograniczonego, to przytoczę definicję ciągu ograniczonego z góry i ograniczonego z dołu.

Mówimy, że ciąg jest ograniczony z góry, wtedy gdy istnieje taka liczba $M \in R$ taka, że dla każdego $n \in N$ zachodzi nierówność $a_n \leq M$.

Mówimy, że ciąg jest ograniczony z dołu, wtedy gdy istnieje taka liczba $m \in R$ taka, że dla każdego $n \in N$ zachodzi nierówność $a_n \geq m$.

Natomiast ciąg jest ograniczony, wtedy gdy $\forall_{m,M \in R} \exists_{n \in N}\ m \leq a_n \leq M$. Czyli tak naprawdę ciąg jest ograniczony wtedy, gdy jest ograniczony z góry lub z dołu.

PRZYKŁAD 3:

Zbadaj ograniczoność ciągu a_n:

$$a_n = \frac{1}{3 + n}$$

To, co warto zrobić na początku to zbadać znak tego ciągu, czyli policzyć różnicę $a_{n+1} - a_n$.

Zatem podstawiamy n+1 za n:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3 + n + 1} = \frac{1}{(4 + n)}$$

$$a_n = \frac{1}{3+n}$$

Zatem zapiszmy naszą różnicę:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4+n} - \frac{1}{3+n} = \frac{3+n-(4+n)}{(4+n)(3+n)} = -\frac{1}{(4+n)(3+n)} < 0$$

Zatem ciąg jest malejący. Teraz wyznaczmy pierwszy wyraz naszego ciągu a_n.

$$a_1 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

Wiemy, że ciąg a_n jest malejący, więc możemy to zapisać w taki sposób:

$a_n < a_1 = \frac{1}{4}$ jest to ograniczenie górne ciągu.

Ponieważ ciąg a_n jest malejący, to jego ograniczeniem będzie każda liczb liczba większa od jego pierwszego wyrazu.

Z drugiej strony $a_n > 0$ dla wszystkich n, czyli ciąg a_n jest ograniczony.

PRZYKŁAD 4:

Zbadaj ograniczoność ciągu a_n:

$$a_n = \frac{2}{n+2}$$

Na początku badamy znak tego ciągu:

$$a_{n+1} = \frac{2}{\color{red}{n+1}+2} = \frac{2}{n+3}$$

$$a_n = \frac{2}{n+2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{n+3} - \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+2)-2(n+3)}{(n+3)(n+2)} = -\frac{2}{(n+3)(n+2)} < 0$$

Zatem ciąg jest malejący.

Wyznaczmy pierwszy wyraz tego ciągu:

$$a_1 = \frac{2}{3}$$

Zatem możemy to zapisać jako $a_n < a_1 = \frac{2}{3}$

Zatem $\frac{2}{3}$ to ograniczenie górne ciągu.

PRZYKŁAD 5:

Zbadaj ograniczoność ciągu a_n:

$$a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$$

Na początku sprawdzamy znak:

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{3(n+1)+2} = \frac{2n+1}{3n+5}$$

$$a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$$

Zatem możemy zapisać różnicę:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{(2n+1)(3n+2)-(2n-1)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)}$$
$$= \frac{6n^2+4n+3n+2-(6n^2+10n-3n-5)}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{7}{(3n+5)(3n+2)} > 0$$

Zatem wiemy, że ciąg jest rosnący.

Wyznaczmy teraz pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = \frac{2*1-1}{3*1+2} = \frac{1}{5}$

Zatem $\frac{1}{5}$ jest ograniczeniem dolnym ciągu.

Można się teraz zastanowić, jak wyznaczyć górne ograniczenie?

Można to zrobić w tym przykładzie korzystając z jednej ze sztuczek z liczenia granic ciągów, na tym jednym przykładzie pokażę jak to zrobić, ale więcej będzie o tym mówione w przypadku granic ciągów, które będą w innym dokumencie.

Jest taka sztuczka stosowana przy liczeniu granic. Polega ona na tym, że wyciągając jakieś wyrażenie najczęściej w przypadku dzielenia będą to wyrażenia z największą potęgą, w naszym przypadku można przypadku można tutaj z licznika i mianownika wyciągnąć n i zobaczymy, co się stanie.

$$a_n = \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{n(2-\frac{1}{n})}{n(3+\frac{2}{n})}$$

Teraz powstały nam wyrażenia$\frac{1}{n}$ i $\frac{2}{n}$. Teraz możemy się zastanowić do czego one dążą? Granice ciągów, w przeciwieństwie do granic funkcji bada się tylko w nieskończoności i zapisuję się to w taki sposób:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, czyta się to tak: Granica przy n dążących(lub zbiegających do nieskończoności) obie formy są poprawne z ciągu a_n.

Zatem zapiszmy dalsze rachunki:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2-\frac{1}{n})}{n(3+\frac{2}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}$$

N, które wyłączyliśmy zostało skrócone, ale nadal mamy te niewygodne dla nas wyrażenia. Teraz za n możemy podstawić symbol nieskończoności.

$\lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{\infty}}{3+\frac{2}{\infty}}$, wygląda to dziwnie, ale takie nie jest. Zobaczcie, że nieskończoność jest jakąś bardzo małą liczbą, wyrażenie typu $\frac{a}{\infty}$, gdzie a jest dowolną liczbą, zawsze będzie dążyło do zera, więc tak naprawdę możemy to zapisać jako:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

Zatem granica tego ciągu przy n zbiegających do nieskończoności wynosi $\frac{2}{3}$ i to jest nasze górne ograniczenie tego ciągu.

PRZYKŁAD 6:

Sprawdź ograniczoność ciągu a_n:

$$a_n = \frac{n!}{3n}$$

Sprawdźmy znak tego ciągu:

Ponieważ mamy dzielnie, to w badaniu znaku posłużymy się ilorazem kolejnych wyrazów:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{3(n+1)} * \frac{3n}{n!}$$

Po rozpisaniu silni otrzymujemy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!\,(n+1)}{3(n+1)} * \frac{3n}{n!}$$

Silnie n! się skracają, więc otrzymujemy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)}{3(n+1)} * 3n = \frac{n}{n+1}$$

Teraz musimy sprawdzić, czy $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest mniejsze lub większe od 1.

$\frac{n}{n+1} < 1$ dla wszystkich $n \geq 1$, oznacza to, że $a_{n+1} < a_n$, czyli ciąg jest malejący.

W tym przypadku, aby znaleźć ograniczenie musimy przekształcić wzór ogólny tego ciągu.

Zauważmy, że $n! = 3 * 2 * 1 \ldots (n-1)$, zatem możemy wzór zapisać w taki sposób:

$$a_n = \frac{n!}{3n} = \frac{3 * 2 * 1 \ldots (n-1) * n}{3n} = \frac{3 * 2 * 1 \ldots (n-1)}{n} = \frac{(n-1)!}{3}$$

Podstawmy n=1, bo dlatego wartość tego ciągu będzie najmniejsza:

$a_1 = \frac{(1-1)!}{3} = \frac{0!}{3} = \frac{1}{3}$, ponieważ 0! = 1.

Podsumowując. Poznaliśmy nowe definicję, dowiedzieliśmy się jak można je rozróżnić. Poznaliśmy sporo rodzajów ciągów i nauczyliśmy się je odróżniać. Dowiedzieliśmy się czym jest ciąg ograniczony, po czym poznać, że jest ograniczony z góry lub dołu, oraz nauczyliśmy się to wyznaczać.