RÓWNANNIA MACIERZOWE I MACIERZ ODWROTNA

Pracę chciałbym zacząć od zapoznania się z macierzami odwrotnymi, bo będą one nam potrzebne do obliczania równań macierzowych.

Są dwa sposoby na szukanie macierzy odwrotnej. Metoda Gaussa i metoda tzw. Dopełnień algebraicznych.

Przed tym wspomnę jeszcze czym jest macierz odwrotna.

Macierz odwrotna to taka macierz, która pomnożona przez pomnożona przez macierz główną daję macierz identyczności.

$$A * A^{-1} = I$$

Gdzie I, to macierz identyczności.

Warunkiem koniecznym do istnienia macierzy odwrotnej jest to, że wyznacznik macierzy głównej musi być różny od zera.

Teraz można przejść to szukania macierzy odwrotnej. Zacznę od moim zdaniem prostszej metody, czyli metody dopełnień algebraicznych.

Metoda ta jest podobna do liczenia wyznaczników metodą Laplace'a, ale z jedną różnicą.

Weźmy taką macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Spróbujmy znaleźć macierz odwrotną stosując metodę dopełnień algebraicznych.

Metoda ta polega na liczeniu mniejszych wyznaczników, które będą następnymi wyrazami macierzy, która będzie transponowana i pomnożona przez takie wyrażenie:

$$\frac{1}{detA}$$

Warto tutaj dodać, co z resztą widać ze wzoru, że detA musi być różny od 0.

Cały wzór na macierz odwrotną metodą dopełnień algebraicznych jest taki:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} * A^D$$

Gdzie A^D to macierz dopełnień algebraicznych, która musi być jeszcze transponowana.

Zobaczmy teraz krok po kroku jak taką macierz policzyć:

1.

Liczymy wyznaczniki mniejszych macierzy:

Jeszcze dodam, że będziemy liczyć kolejne wyznaczniki, które będziemy oznaczać jako Dij.

Gdzie i,j to numery wierszy i kolumn.

Dopełnienia algebraiczne (czyli kolejne wyrazy macierzy dopełnień algebraicznych) liczy się w taki sposób:

$$(-1)^{i+j} * wyznacznik\ macierzy\ o\ jeden\ mniejszej$$

Gdzie i, j, to numery wierszy i kolumn.

I takie wyrazy obliczymy i następnie zapiszemy je w naszej macierzy.

Więc zobaczmy:

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{0} & 1 & 2 \\ \cancel{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wykreślamy pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę i liczymy wyznacznik tego, co zostało:

D11 = $(-1)^{1+1} * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 1*(1-2) = -1, to jest pierwszy wyraz

1+1, bo pierwszy wiersz i pierwsza kolumna.

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & \cancel{1} & 2 \\ 2 & \cancel{1} & 1 \end{bmatrix}$$

Teraz wykreślamy pierwszy wiersz i drugą kolumnę i liczymy kolejny wyznacznik z tego, co zostało:

D12 = $(-1)^{1+2} * \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ = (-1)*(0-4) = 4

1+2, bo pierwszy wiersz i druga kolumna.

Teraz wykreślamy pierwszy wiersz i trzecią kolumnę i liczymy wyznacznik z tego, co zostało:

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & 1 & \cancel{2} \\ 2 & 1 & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

D13 = $(-1)^{1+3} * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ = 1*(0-2) = -2

1+3, bo pierwszy wiersz i trzeci kolumna.

Teraz wykreślamy drugi wiersz i pierwszą kolumnę i znowu liczymy wyznacznik z tego, co zostało:

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D21 = $(-1)^{2+1} * \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = (-1)*(2-3) = 1

2+1, bo drugi wiersz i pierwsza kolumna.

I tak robimy z każdym wyrazem po kolei.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cancel{2} & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 2 & \cancel{1} & 1 \end{bmatrix}$$

Znowu liczymy wyznacznik z tego, co zostało:

D22 = $(-1)^{2+2} * \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ = 1*(1-6) = -5

2+2, bo drugi wiersz i druga kolumna.

Ponownie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 2 & 1 & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

Wykreśliliśmy drugi wiersz i trzecią kolumnę i liczymy wyznacznik z tego, co zostało:

D23 = $(-1)^{2+3} * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ = (-1)*(1-4) = 3

2+3, bo drugi wiersz i trzecia kolumna.

Teraz wykreślamy trzeci wiersz i pierwszą kolumnę:

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \cancel{0} & 1 & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

D31 = $(-1)^{3+1} * \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 1*(4-3) = 1

3+1, bo trzeci wiersz i pierwsza kolumna.

Wykreślamy trzeci wiersz i drugą kolumnę:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cancel{2} & 3 \\ 0 & \cancel{1} & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

D32 = $(-1)^{3+2} * \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ = (-1)*(2-0) = -2

3+2, bo trzeci wiersz i druga kolumna.

I ostatni wyraz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ 0 & 1 & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

D33 = $(-1)^{3+3} * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1*(1-0) = 1

3+3, bo trzeci wiersz i trzecia kolumna.

2. Teraz zapiszmy wyrazy naszej macierzy po kolei:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Teraz musimy policzyć wyznacznik macierzy głównej, czyli tej danej nam w zadaniu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Więc policzmy. Metoda dowolna.

detA = 1 + 8 + 0 – (6 + 2 + 0) = 9 – 8 = 1

detA ≠ 0, więc można liczyć dalej.

4. Teraz naszą otrzymaną macierz musimy transponować:

$$\begin{matrix}[-1 & 4 & -2] \\ [1 & -5 & 3] \\ [1 & -2 & 1]\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}[-1 & 1 & 1] \\ [4 & -5 & -2] \\ [-2 & 3 & 1]\end{matrix}$$

5. Gdy mamy macierz dopełnień algebraicznych transponowaną, to możemy podstawiać do wzoru:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} * A^D$$

A więc:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} * \begin{matrix}[-1 & 1 & 1] \\ [4 & -5 & -2] \\ [-2 & 3 & 1]\end{matrix} = \begin{matrix}[-1 & 1 & 1] \\ [4 & -5 & -2] \\ [-2 & 3 & 1]\end{matrix}$$

To jest nasza szukana macierz odwrotna. Nie jest to trudne, tak naprawdę podążamy według jednego schematu i trzeba pamiętać, że $detA \neq 0$.

Wykonajmy jeszcze kilka przykładów, aby zobaczyć o co chodzi.

PRZYKŁAD 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Policzmy wyznacznik tej macierzy:

detA = 2 + 12 + 0 – (0 + 0 + 0) = 14

detA ≠ 0

Więc można policzyć dopełnieniem algebraicznym.

Liczymy mniejsze wyznaczniki wykreślając odpowiednie wiersze i kolumny:

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & -1 & 3 \\ \cancel{2} & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

D11 = $(-1)^{1+1} * \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ = 1*(2 – 0) =2

1+1, bo pierwszy wiersz i pierwsza kolumna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Wykreślamy pierwszy wiersz i drugą kolumnę i liczymy wyznacznik z tego, co zostało:

D12 = $(-1)^{1+2} * \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$ = (-1)*(0 – 6) = 6

1+2, bo pierwszy wiersz i druga kolumna.

Teraz pierwszy wiersz i trzecia kolumna i liczymy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

D13 = $(-1)^{1+3} * \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ = 1*(0 + 2) = 2

1+3, bo pierwszy wiersz i trzeci kolumna.

Teraz drugi wiersz i pierwsza kolumna i liczymy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

D21 = $(-1)^{2+1} * \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ = (-1)*(-4 – 0) = 4

2+1, bo drugi wiersz i pierwsza kolumna.

Wykreślamy drugi wiersz i drugą kolumnę i liczymy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

D22 = $(-1)^{2+2} * \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$ =1*(-2 – 0) = -2

2+2, bo drugi wiersz i druga kolumna.

Wykreślamy drugi wiersz i trzecią kolumnę i liczymy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

D23 = $(-1)^{2+3} * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ =(-1)*(0 – 4) = 4

2+3, bo drugi wiersz i trzecia kolumna.

Teraz trzeci wiersz i pierwsza kolumna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

D31 = $(-1)^{3+1} * \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ = 1*(6 – 0) = 6

Teraz trzeci wiersz i druga kolumna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

D32 = $(-1)^{3+2} * \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ = (-1)*(3 – 0) = -3

3+2, bo trzeci wiersz i druga kolumna.

Ostatni wyraz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

D33 = $(-1)^{3+3} * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ = 1*(-1 – 0) = -1

3+3, bo trzeci wiersz i trzecia kolumna.

Generalnie to, co jest potęgą (-1), to są tak naprawdę sumy indeksów wierszy i kolumn, które wykreśliliśmy. Inaczej mówiąc. Jak mamy oznaczenie Dij, to i,j to jest to samo tylko zsumowane w wykładniku potęgi.

Teraz zapiszmy naszą macierz:

$$[2 \quad 6 \quad 2]$$
$$[4 \quad -2 \quad 4]$$
$$[6 \quad -3 \quad -1]$$

Mamy macierz dopełnień algebraicznych, teraz ją transponujmy:

$$[2 \quad 4 \quad 6]$$
$$[6 \quad -2 \quad -3]$$
$$[2 \quad 4 \quad -1]$$

Możemy już podstawiać do wzoru:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} * A^D$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14} * \begin{matrix} [2 & 4 & 6] \\ [6 & -2 & -3] \\ [2 & 4 & -1] \end{matrix}$$

Można zostawić w takiej postaci, albo już przemnożyć. Ja przemnożę.

$$A^{-1} = \begin{matrix} [\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7}] \\ [\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{14}] \\ [\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7}] \end{matrix}$$

To jest nasza szukana macierz odwrotna.

Ostatni przykład z tej metody:

PRZYKŁAD 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Najpierw policzmy wyznacznik tej macierzy:

detA = 1 + 0 + 0 – (0 + 0 + 0) = 1 ≠ 0

Wyznacznik jest różny od zera, więc można policzyć dopełnieniem algebraicznym.

Liczymy tak samo wyraz po wyrazie:

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-3} \\ \cancel{0} & 1 & 2 \\ \cancel{0} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D11 = $(-1)^{1+1} * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1*(1 – 0) = 1

Zwróćcie uwagę na to, co mówiłem, czyli (-1) jest podniesione do potęgi 1+1, a 1 i 1 to indeksy wiersza i kolumny wykreślonych.

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-3} \\ 0 & \cancel{1} & 2 \\ 0 & \cancel{0} & 1 \end{bmatrix}$$

D12 = $(-1)^{1+2} * \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = (-1)*(0 – 0) = 0

Ponownie indexy wiersza i kolumny się sumują 1+2.

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-3} \\ 0 & 1 & \cancel{2} \\ 0 & 0 & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

D13 = $(-1)^{1+3} * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ = 1*(0 - 0) = 0

Tutaj znowu 1+3. I tak przy każdym wyrazie.

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & 2 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{0} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D21 = $(-1)^{2+1} * \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = (-1)*(2 – 0) = -2

$$\begin{bmatrix} 1 & \cancel{2} & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 0 & \cancel{0} & 1 \end{bmatrix}$$

D22 = $(-1)^{2+2} * \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1*(1 – 0) = 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cancel{-3} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 0 & 0 & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

D23 = $(-1)^{2+3} * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ = (-1)*(0 – 0) = 0

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & 2 & -3 \\ \cancel{0} & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

D31 = $(-1)^{3+1} * \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 1*(4 + 3) = 7

$$\begin{bmatrix} 1 & \cancel{2} & -3 \\ 0 & \cancel{1} & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

D32 = $(-1)^{3+2} * \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ = (-1)*(2 – 0) = 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cancel{-3} \\ 0 & 1 & \cancel{2} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

D33 = $(-1)^{3+3} * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1*(1 – 0) = 1

Teraz zapiszmy naszą macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Transponujmy:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Możemy już podstawić do wzoru:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} * A^D$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} * \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

To jest nasza szukana macierz odwrotna.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na to, że jeśli wyznaczniki jeszcze bez mnożenia przez -1 będą dodatnie, to wyrazy macierzy będą się zmieniać, co każdy wyraz.

Teraz przejdziemy do mniej przyjemnej metody, czyli metody Gaussa.

METODA GAUSSA(ELIMINICJI GAUSSA)

Na czym polega metoda? Mamy jakąś macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Teraz do tej macierzy dopisujemy macierz identyczności, czyli macierz, która ma 1 na przekątnych, a wszędzie indziej ma zera.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ważne jest, aby zamknąć macierz dopiero po dopisaniu macierzy identyczności, a macierz główną oddzielić kreską od macierzy identyczności.

Teraz musimy wykonywać operacje elementarne **tylko na wierszach**, tak aby po lewej stronie pojawiła nam się macierz identyczności, czyli taka, w której są jedynki po przekątnej, a wszędzie indziej zera, a po prawej pojawi się nam wtedy macierz, która będzie macierzą odwrotną, którą trzeba będzie tylko sczytać.

Rozpocznijmy szukanie macierzy odwrotnej:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to w3 - 2w1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to w3 + 3w2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \to w2 - 2w3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \to w1 - 2w2 - 3w3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Po wykonanych przekształceniach wystarczy odczytać naszą macierz odwrotną z prawej strony, bo z lewej strony uzyskaliśmy macierz identyczności.

$$A^{-1} = \begin{matrix} [-1 & 1 & 1] \\ [4 & -5 & -2] \\ [-2 & 3 & 1] \end{matrix}$$

To jest nasza macierz odwrotna.

Nie ma, co ukrywać. Metoda Gaussa na szukanie macierzy odwrotnej wymaga po prostu dużej wprawy w operacjach elementarnych. Owszem jak można tutaj zauważyć jest ona krótsza, ale można się przy niej dobrze pomylić i można myśleć naprawdę długo nad szukaniem takiej macierzy tym sposobem.

PRZYKŁAD 3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Dopiszmy macierz jednostkową do naszej macierzy:

$$\begin{matrix} [2 & 5 & 7 & |1 & 0 & 0] \\ [6 & 3 & 4 & |0 & 1 & 0] \\ [5 & -2 & -3 & |0 & 0 & 1] \end{matrix}$$

Znowu znajdźmy macierz odwrotną wykonując operacje elementarne tylko na wierszach.

$$\begin{matrix} [2 & 5 & 7 & |1 & 0 & 0] \\ [6 & 3 & 4 & |0 & 1 & 0] \\ [5 & -2 & -3 & |0 & 0 & 1] \end{matrix} \rightarrow \text{w1 –(w2-w3)} \begin{matrix} [1 & 0 & 0 & |1 & -1 & 1] \\ [6 & 3 & 4 & |0 & 1 & 0] \\ [5 & -2 & -3 & |0 & 0 & 1] \end{matrix} \rightarrow \text{ w3-5w1 |w2-6w1}$$

$$\begin{matrix} [1 & 0 & 0 & | 1 & -1 & 1] \\ [0 & 3 & 4 & |-6 & 7 & -6] \\ [0 & -2 & -3 & |-5 & 5 & -4] \end{matrix} \rightarrow \text{w2+w3} \begin{matrix} [1 & 0 & 0 & | 1 & -1 & 1] \\ [0 & 1 & 1 & |-11 & 12 & -10] \\ [0 & -2 & -3 & | -5 & 5 & -4] \end{matrix} \rightarrow \text{w3+2w2}$$

$$\begin{matrix} [1 & 0 & 0 & | 1 & -1 & 1] \\ [0 & 1 & 0 & |-38 & 41 & -34] \\ [0 & 0 & -1 & |-27 & 29 & -24] \end{matrix} \rightarrow \text{-w3} \begin{matrix} [1 & 0 & 0 & | 1 & -1 & 1] \\ [0 & 1 & 0 & |-6 & 7 & -6] \\ [0 & 0 & 1 & | 27 & -29 & 24] \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \begin{matrix} [1 & -1 & 1] \\ [-6 & 7 & -6] \\ [27 & -29 & 24] \end{matrix}$$

To jest nasza szukana macierz odwrotna.

PRZYKŁAD 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Dopiszmy macierz identyczności do naszej macierzy:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \text{w2-3w1 | w3-w1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{7} * w2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \text{w1+w2 | w3-w2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} & -\frac{18}{7} & -\frac{1}{7} & 1 \end{array}\right] \rightarrow \frac{7}{6} * w3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{array}\right] \rightarrow w1 + \frac{6}{7} * w3 \mid w2 - \frac{1}{7} * w3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -3 & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

To jest nasza szukana macierz odwrotna.

To teraz, gdy już wiemy jak liczyć macierze odwrotne, to możemy przejść do równań macierzowych.

RÓWNANIA MACIERZOWE

Równania macierzowe są prostym zagadnieniem, przede wszystkim trzeba wiedzieć jak liczyć macierze odwrotne i jak zaraz na przykładach zobaczymy ważne będzie to, z której strony będziemy mnożyć, ale o tym zaraz.

Na czym polega liczenie równań macierzowych?

Równanie macierzowe ma najczęściej postać $Ax = B$, gdzie A i B, to macierze, a x to macierz szukana. Teraz to o czym mówiłem, czyli to, z której strony mnożymy.

Zobaczcie:

Jeżeli X stoi z lewej strony, czyli tak jak w postaci ogólnej $Ax = B$, to musimy **z lewej strony** pomnożyć przez takie wyrażenie: $\frac{1}{A} = A^{-1}$, teraz zobaczcie:

Z lewej strony otrzymamy: $A * A^{-1}x = B * A^{-1}$. Przede wszystkim nie panikujcie teraz.

Zobaczcie:

Jeżeli pomnożymy przez siebie macierz A i A^{-1}, to otrzymamy macierz identyczności.

Spróbujmy teraz wymnożyć takie macierze ze sobą:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Weźmy taką macierz. Zapiszę od razu znalezioną macierz odwrotną, aby zaoszczędzić miejsce:

$$A^{-1} = \begin{matrix} [-3 & 2 & 0] \\ [2 & -1 & 0] \\ [5 & -3 & 1] \end{matrix}$$

Wymnożę ze sobą te macierze:

$$\begin{matrix} [1 & 2 & 0] \\ [2 & 3 & 0] \\ [1 & -1 & 1] \end{matrix} * \begin{matrix} [-3 & 2 & 0] \\ [2 & -1 & 0] \\ [5 & -3 & 1] \end{matrix} = \begin{matrix} [1 & 0 & 0] \\ [0 & 1 & 0] \\ [0 & 0 & 1] \end{matrix}$$ w wyniku mnożenia tych macierzy otrzymaliśmy macierz identyczności, teraz obliczmy jej wyznacznik:

$$detI = 1 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 1$$

Gdzie I to macierz identyczności.

Widzimy, że wyznacznik tej jest równy 1. Więc tak naprawdę postać $Ax = B$ możemy przekształcić do postaci $detI * x = B * A^{-1}$, stąd byśmy otrzymali $x = A^{-1} * B$.

Te same operacje byśmy wykonali, gdybyśmy mieli: $xA = B$, postępując tak samo jak w pierwszym przypadku, otrzymamy: $x = B * A^{-1}$.

Ostatnia kwestia, co do mnożenia z lewej lub prawej strony.

Jeżeli w równaniu macierzowym $Ax = B$ macierz A pojawia się **z lewej strony X, to mnożymy z lewej strony przez A^{-1}, natomiast jeśli $xA = B$ macierz A pojawia się z prawej strony, to mnożymy z prawej strony przez A^{-1}**. Generalnie mnożymy z tej strony, z której znajduję się macierz A.

Wiemy już jak działają równania macierzowe, wiemy, z której strony mnożyć, wiemy skąd się wzięła postać ogólna, wiemy jak wyznaczać macierze odwrotne, to można przechodzić do przykładów.

PRZYKŁAD 5:

Zapiszę wszystko krok po kroku.

Mamy dane takie równanie. Jak na razie dla przejrzystości oznaczmy sobie te macierze:

$$X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

Więc możemy nasze równanie zapisać w postaci $XA = B$

1. Patrzymy, z której strony X jest macierz A

Jeżeli w równaniu macierzowym $Ax = B$ macierz A pojawia się **z lewej strony X, to mnożymy z lewej strony przez $\boldsymbol{A^{-1}}$, natomiast jeśli $\boldsymbol{xA = B}$ macierz A pojawia się z prawej strony, to mnożymy z prawej strony przez $\boldsymbol{A^{-1}}$**.

2. Liczymy macierz odwrotną do A.

$detA = -12 + 10 = -2$

D11 = $(-1)^{1+1} * (-4) = -4$, wyznacznik macierzy 1x1 jest równy liczbie, która stoi w macierzy.

D12 = $(-1)^{1+2} * 5 = -5$

D21 = $(-1)^{2+1} * (-2) = 2$

D22 = $(-1)^{2+2} * 3 = 3$

Zapiszmy macierz dopełnień algebraicznych:

$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

Teraz ją transponujmy:

$\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ Możemy już podstawiać do wzoru:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} * A^D$$

$A^{-1} = -\frac{1}{2} * \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

3. Mnożymy macierz odwrotną przez macierz B.
4. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -25 & -14 \end{bmatrix}$
5. Zatem macierz szukana X to: $\begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -25 & -14 \end{bmatrix}$

Tutaj kończymy równanie.

PRZYKŁAD 6:

$$X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$$

Ponownie oznaczmy sobie macierze:

A = $\begin{matrix} [3 & 5] \\ [4 & 8] \end{matrix}$, B = $\begin{matrix} [2 & 4] \\ [8 & 18] \end{matrix}$

Zapiszmy teraz równanie macierzowe:

$XA = B$

Znowu zwracamy uwagę, z której strony X stoi macierz A. Stoi z prawej strony, więc mnożymy z prawej strony przez A^{-1}.

$XA = B/*A^{-1}$

Więc uzyskujemy:

$X = B * A^{-1}$

Liczymy macierz odwrotną do A.

$detA = 24 - 15 = 9 \ \neq 0$

D11 = $(-1)^{1+1} * 8 = 8$

D12 = $(-1)^{1+2} * 4 = \ -4$

D21 = $(-1)^{2+1} * 5 = \ -5$

D22 = $(-1)^{2+2} * 3 = 3$

$\begin{matrix} [8 & -4] \\ [-5 & 3] \end{matrix}$ transponuje: $\begin{matrix} [8 & -5] \\ [-4 & 3] \end{matrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{9} * \begin{matrix} [8 & -5] \\ [-4 & 3] \end{matrix}$ = $\begin{matrix} [\frac{8}{9} & -\frac{5}{9}] \\ [-\frac{4}{9} & \frac{1}{3}] \end{matrix}$

Teraz pozostaje nam mnożenie $B * A^{-1}$

$X = \begin{matrix} [2 & 4] \\ [8 & 18] \end{matrix} * \begin{matrix} [\frac{8}{9} & -\frac{5}{9}] \\ [-\frac{4}{9} & \frac{1}{3}] \end{matrix}$ = $\begin{matrix} [0 & -\frac{2}{9}] \\ [-\frac{8}{9} & \frac{14}{9}] \end{matrix}$

Tutaj kończymy rozwiązywanie.

PRZYKŁAD 7:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zanim odpowiednio oznaczymy macierze, trzeba najpierw pamiętać o kolejności wykonywania działań.

Najpierw transponujmy sobie tą drugą macierz po lewej stronie:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gdy mamy to zrobione, to teraz musimy tą macierz przemnożyć przez pierwszą macierz z lewej strony.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ Teraz, gdy sprowadziliśmy równanie do najprostszej postaci, można odpowiednio oznaczyć.

Pamiętajmy o warunku mnożenia macierzy. Jeżeli liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy, to można je ze sobą pomnożyć.

A = $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Zapiszmy nasze równanie:

$AX = B$

Znowu zwracamy uwagę na to, z której strony X stoi macierz A. Stoi z lewej strony, więc mnożymy z lewej strony przez A^{-1}.

$A^{-1} */AX = B$

Teraz zwróćcie uwagę na to, że jeśli macierz A była z prawej strony to mieliśmy, że $X = B * A^{-1}$

Teraz mamy macierz A z lewej strony, więc otrzymamy: $X = A^{-1} * B$, więc teraz nasz X będziemy liczyć tak: $X = A^{-1} * B$ to jest ważna własność, która jest warta zapamiętania, bo **mnożenie macierzy nie jest przemienne.**

Tak więc liczymy teraz macierz odwrotną do A:

$detA = 2 - 4 = -2 \neq 0$

D11 = $(-1)^{1+1} * 1 = 1$

D12 = $(-1)^{1+2} * 2 = -2$

D21 = $(-1)^{2+1} * 2 = -2$

D22 = $(-1)^{2+2} * 2 = 2$

Zatem macierz dopełnień algebraicznych to:

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ transponuje: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

Podstawiam do wzoru:

$A^{-1} = -\frac{1}{2} * \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, teraz pozostaje nam odpowiednio przemnożyć tą macierz.

Pamiętajcie, jeśli macierz A jest lewej to mamy postać $X = A^{-1} * B$

Jeśli macierz A jest z prawej to mamy postać $X = B * A^{-1}$

$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ mamy X, więc kończymy.

PRZYKŁAD 8:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}\right) \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

W tym przykładzie znowu zwróćmy uwagę na kolejność wykonywania działań. Jeszcze zwróćcie uwagę na to, że będziemy mieli do policzenia dwie macierze odwrotne, bo przy X stoją dwie macierze, jedna z lewej i druga z prawej strony.

Najpierw wykonajmy wszystko, co możemy z lewej strony, czyli wymnóżmy dwie macierze i dodajmy do niej ostatnią macierz z lewej oraz wykonajmy obliczenia po prawej stronie równania.

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} * X * \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ wymnożyłem ze sobą macierze z lewej strony i z prawej strony dokonałem mnożenia macierzy przez 2. Kontynuując mamy:

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} * X * \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dodałem do siebie macierze stojące po lewej stronie X, transponowałem macierz stojącą po prawej stronie X, a po prawej stronie równania dodałem macierze.

Tak jak wspomniałem wcześniej musimy policzyć dwie macierze odwrotne, zacznę od tej po lewej stronie X. Na ten czas mogę zapisać równanie tak:

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} * X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Oznaczmy odpowiednio:

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = A$, B = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Zatem równanie ma postać:

$AX = B$

Macierz A jest z lewej strony, więc będziemy mieć postać:

$X = A^{-1} * B$

Policzmy macierz odwrotną do A:

$detA = 0 + 2 = 2 \neq 0$

D11 = $(-1)^{1+1} * 0 = 0$

D12 = $(-1)^{1+2} * (-2) = 2$

D21 = $(-1)^{2+1} * 1 = -1$

D22 = $(-1)^{2+2} * 2 = 2$

Macierz dopełnień: $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Transponowana: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{2} * \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Zatem $X_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Przez X_1 oznaczam znalezienie jednego z dwóch rozwiązań.

Teraz znajdźmy drugą macierz odwrotną. Zapiszmy równanie w postaci:

$X * \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Odpowiednio oznaczmy:

A = $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Zatem nasze równanie jest postaci:

$XA = B$

Macierz A jest z prawej strony, więc będziemy mieli postać:

$X = B * A^{-1}$

Liczymy macierz odwrotną do A:

$detA = -2 + 3 = 1 \neq 0$

D11 = $(-1)^{1+1} * (-1) = -1$

D12 = $(-1)^{1+2} * 3 = -3$

D21 = $(-1)^{2+1} * (-1) = 1$

D22 = $(-1)^{2+2} * (-2) = -2$

Macierz dopełnień: $\begin{matrix}[-1 & -3] \\ [1 & -2]\end{matrix}$

Transponowana: $\begin{matrix}[-1 & 1] \\ [-3 & -2]\end{matrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{1} * \begin{matrix}[-1 & 1] \\ [-3 & -2]\end{matrix} = \begin{matrix}[-1 & 1] \\ [-3 & -3]\end{matrix}$

Pozostaje nam już wyliczenie drugiej szukanej macierzy:

$X_2 = \begin{matrix}[1 & -2] \\ [0 & 0]\end{matrix} * \begin{matrix}[-1 & 1] \\ [-3 & -2]\end{matrix} = \begin{matrix}[5 & 5] \\ [0 & 0]\end{matrix}$, to jest nasza druga szukana macierz.

Zbierzmy jeszcze rozwiązania w jedno miejsce:

$X_1 = = \begin{matrix}[0 & 0] \\ [1 & -2]\end{matrix}$

$X_2 = \begin{matrix}[5 & 5] \\ [0 & 0]\end{matrix}$

PRZYKŁAD 9 (OSTATNI):

Na sam koniec chciałem pokazać przykład, w którym mamy sporo mieszańców jeśli chodzi o działania na macierzach:

$$-\tfrac{1}{2}\cdot\left(\begin{bmatrix}1&2&0\\2&3&1\end{bmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&-3&1\end{bmatrix}\right)^T\cdot\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}3&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}$$

Zobaczmy, co mamy w tym przykładzie. Dla przypomnienia w takich pionowych **kreskach oznaczamy wyznacznik, gdy nie chcemy pisać det, a nie macierz.**

Myślę, że wyznacznikiem zajmę się na początku:

Metoda liczenia dowolna.

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix} = 12 + 3 + 3 - (2 + 9 + 6) = 18 - (17) = 1$$

Teraz mogę macierz 2x3 (zaraz obok wyznacznika) pomnożyć przez wyznacznik:

$-\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1&2&0\\2&3&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&-3&1\end{bmatrix}\right)^T*\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}*\begin{bmatrix}3&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}$ z racji tego, że była to 1, to nic się nie zmieniło.

Teraz odejmę od siebie te dwie macierze:

$-\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&6&0\end{bmatrix}\right)^T*\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}*\begin{bmatrix}3&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}$, teraz mamy dwie drogi:

Pierwsza: policzyć teraz macierz odwrotną

Druga: Transponować macierz i przemnożyć przez $\frac{1}{2}$, a dopiero potem macierz odwrotną.

Wybiorę drugą drogę. Od razu transponuje i mnożę:

$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-1\\-1&-3\\1&0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}*\begin{bmatrix}3&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}$ Teraz obliczę macierz odwrotną.

$detA = -1 - 0 = -1 \neq 0$

D11 = $(-1)^{1+1}*(-1) = -1$

D12 = $(-1)^{1+2}*0 = 0$

D21 = $(-1)^{2+1}*2 = -2$

D22 = $(-1)^{2+2}*1 = 1$

Macierz dopełnień: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Transponowana: $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{1} * \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mamy macierz odwrotną, to zapiszmy teraz nasze równanie:

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ teraz wymnożę ze sobą dwie ostatnie macierze:

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ teraz pozostaje tylko wymnożyć ze sobą te dwie macierze:

$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & \frac{11}{2} \\ -3 & -2 & 14 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ to jest wynik końcowy.

Przykład nie był trudny, generalnie takie przykłady nie są trudne, tylko warto się przyjrzeć, co zrobić najpierw, tak jak w tym przykładzie najpierw policzyłem wyznacznik, a potem zająłem się resztą, potem zauważyłem macierz odwrotną, którą też policzyłem, a którą można było też na początku policzyć. Warto sobie takie przykłady rozkładać na czynniki pierwsze, coraz mniejsze części.

To już wszystko, co miałem do pokazania w tym pliku. Policzyliśmy masę macierzy odwrotnych, pokazałem dwa na sposoby na liczenie ich, obliczyliśmy sporo równań macierzowych, które również pokazałem jak robić. Starałem się to wyjaśnić tak, aby było jasno, prosto i zrozumiale.