WPROWADZENIE DO LICZB ZESPOLONYCH

PRZYDATNE MATERIAŁY POMOCNICZE ZNAJDUJĄ SIĘ NA KOŃCU

Liczba zespolona składa się z dwóch części:

Części rzeczywistej, którą się oznacza jako **Re(z) (Realis)**

Oraz części urojonej, którą się oznacza jak I**m(z) (Imaginaris)**

Część urojona zawiera w sobie tzw. Jednostkę urojoną i.

Ma ona taką własność, że podniesiona do kwadratu da –1.

Jednostkę urojoną i możemy zapisać w postaci pary liczb (0,1).

(0,1) = i.

Zatem Tw.1 możemy zapisać jako:

$$(0,1)\otimes\quad(0,1) = (-1,0)\ = -1.$$

Tw.1

$$i^2 = -1$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Każdą liczbę zespoloną Z = (a,b) możemy przedstawić w postaci a+bi. To jest postać algebraiczna. Dowód:

$$(a,0)\oplus\quad(0,b) = (a,0)\oplus\quad(b,0)\otimes\quad(0,1) = a + bi.$$

1. **Dodawanie liczb zespolonych.**

Najlepiej jest to pokazać na przykładzie

Niech będą dane dwie liczby zespolone

Z = 3+4i

W = 5+8i

Dodawanie liczb zespolonych wykonujemy tak samo jak dodawanie wyrażeń algebraicznych.

Spróbujmy dodać:

(3+4i) + (5+8i) =

Dodajemy części rzeczywiste do rzeczywistych i urojone do urojonych.

3+5 = 8

4i + 8i = 12i

Więc Z+W = 8 + 12i.

To samo z odejmowaniem:

Odejmujemy części rzeczywiste do siebie i to samo z urojonymi.

3-5 = -3

4i – 8i = -4i.

Więc Z-W = -3 – 4i.

A, co z mnożeniem? Również wykonuje się tak samo, ale należy pamiętać o tym, że $i^2 = -1$.

Wykonajmy mnożenie:

Z = 2+7i

W = 4+2i

Wymnóżmy te liczby ze sobą. Każdy wyraz z każdym. $(2 * 4 + 2 * 2i + 7i * 4 + 14i^2)$ Po wymnożeniu otrzymujemy:

$$(2 + 7i)(4 + 2i) = 8 + 4i + 28i + 14i^2$$

Zauważmy, że $i^2 = -1$. Podstawmy tę wartość za i^2

Otrzymamy: $8 - 14 + 32i$,

Zanim przejdziemy do dzielenia liczb zespolonych, to musimy poznać nowe zagadnienie.

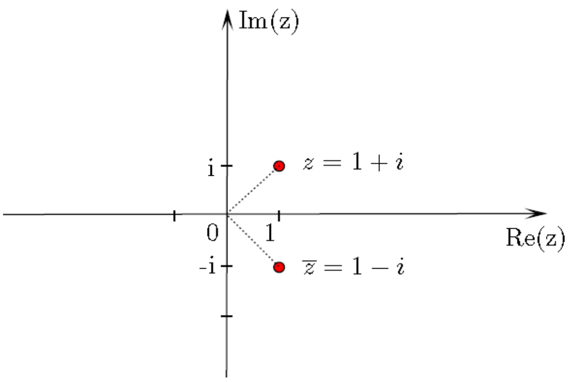
SPRZĘŻENIE LICZBY ZESPOLONEJ

Sprzężona liczba zespolona, to nic innego jak liczba zespolona z **przeciwnym znakiem** części urojonej.

Przykład:

Niech dana będzie liczba zespolona Z = 5+7i. Liczba sprzężona to liczba z przeciwnym znakiem przy części urojonej, więc. Z sprzężone to: 5-7i.

Dla zobrazowania przedstawmy sprzężenie liczby zespolonej na wykresie:



Jak widzimy sprzężona liczba zespolona Z jest symetrycznym odbiciem liczby z .

Z taką wiedzą można przechodzić do dzielenia liczb zespolonych.

Spróbujmy podzielić dwie liczby zespolone.

Niech dane będą 2 liczby zespolone:

Z = 3+4i

W = 6+8i

Wykonajmy dzielenie:

$\frac{3+4i}{6+8i}$. Hazyk tutaj polega na tym, że w mianowniku **nie może się pojawić jednostka urojona i.** Co robimy? **Mnożymy licznik i mianownik przez sprzężenie liczby z mianownika.** Więc mamy:

$\frac{(3+4i)(6-8i)}{(6+8i)(6-8i)}$. Licznik **wymnażamy, a w mianowniku pojawia się wzór skróconego mnożenia** **$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.** Po wymnożeniu licznika mamy 18-24i+24i-32i^2 = $\frac{50}{36-64i^2}$ więc $\frac{50}{100}$Finalnie otrzymujemy:

$\frac{1}{2}$. Jak widać w wyniku dzielenia liczb zespolonych może nam wyjść sama część rzeczywista, czyli liczba rzeczywista. Samo dzielenie liczb nie jest trudne, ale wymaga opanowania pojęcia sprzężenia liczby zespolonej.

Zróbmy jeszcze jeden przykład.

Mamy 2 liczby zespolone:

Z = 2+3i

W = 4+5i

Wykonajmy dzielenie tych liczb $\frac{Z}{W}$.

Obliczmy sprzężenie liczby W.

W sprzężone = 4-5i.

$$\frac{2+3i}{4+5i} = \frac{(2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}.$$

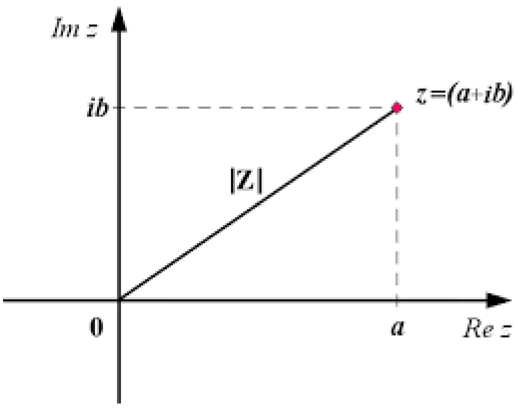
$\frac{23+2i}{16-25i^2}$, więc $\frac{23}{41} + \frac{2i}{41}$ zapiszmy w końcowej postaci:

$$\frac{23}{41} + \left(\frac{2}{41}\right) i.$$

Dobrze, gdy mamy już opanowane podstawowe działania na liczbach zespolonych, to można podnieść poprzeczkę i zapoznać się z **modułem liczby zespolonej**.

Jeśli naszkicujemy sobie płaszczyznę zespoloną i zaznaczymy na niej liczbę zespoloną

$Z = a + bi$ Oraz połączymy tą liczbę z początkiem układu współrzędnych, to uzyskamy prostą, teraz jeżeli poprowadzimy prostą prostopadłą do osi rzeczywistej, to uzyskamy trójkąt prostokątny.



Jak możemy zauważyć, że długość boku a to tak naprawdę część urojona, a długość boku b to tak naprawdę część rzeczywista. Łatwo można zauważyć, że |Z| można wyznaczyć z tw. Pitagorasa.

Przyjmijmy, że liczba zespolona Z jest w postaci algebraicznej $Z = a + bi$, wówczas moduł liczby zespolonej $|Z|$ = $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Moduł liczby zespolonej posiada kilka własności, które są intuicyjne.

1. $|Z| = \sqrt{Z}\cdot$ Z(sprzężone), $|Z|$= |z(sprzężone)| = $|Z|$
2. |Z*W| = $|Z| * |W|$, $\left|\frac{Z}{W}\right| = \frac{|Z|}{|W|}$,
3. |Z| -≥ | Re(Z)| -≥ Re(Z)
4. |Z| ≥ |Im(Z)| ≥ |Im(Z)|
5. $\big||Z| - |W|\big| \leq |Z + W| \leq |Z| + |W|$.

WNIOSEK

Dla każdej liczby naturalnej n i dowolnych liczb zespolonych Z, Z_1 ...... Z_n mamy:

1. $|Z^n| = |Z|^n$ i $|Z^{-n}| = |Z|^{-n}$ dla Z ≠ 0
2. $|\, Z, Z1 \ \dots\dots\ Zn \,| \leq$ $|Z_1|$ + $|Z_2|$ + $|Z_n|$.

To teraz spróbujmy wyznaczyć moduły liczb zespolonych na kilku przykładach.

$$Z = \frac{(2+i)^2}{(1+i)(1-2i)}$$

Zaczniemy od rozpisania wzoru skróconego mnożenia w liczniku i przemnożenia nawiasów w mianowniku.

$$Z = \frac{4 + 4i + i^2}{1-2i+i-2i^2}$$

Z = $\frac{3+4i}{3-i}$, trzeba wykonać dzielenie tych liczb zespolonych.

$$Z = \frac{(3+4i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$

$$Z = \frac{9+3i+12i+4i^2}{9-i^2}$$

$$Z = \frac{5+15i}{10}$$

$$Z = \frac{5}{10} + \frac{15}{10}i$$

Teraz podstawiamy do wzoru na moduł liczby zespolonej

$|Z| = \sqrt{a^2+b^2}, a = \frac{5}{10}, b = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Jak widać, samo obliczenie modułu nie jest trudne, ale trudniejsze jest samo sprowadzanie liczby do najprostszej postaci.

Zróbmy jeszcze kilka przykładów.

Wyznacz moduł liczby zespolonej Z = $\frac{3+4i}{2+5i}(1+2i)$.

Najpierw wykonajmy mnożenie:

$\frac{3+6i+4i+8i^2}{2+5i} = \frac{-5+10i}{2+5i}$. Teraz wykonamy dzielenie liczb:

Mnożymy przez sprzężenie:

$\frac{(-5+10i)\cdot(2-5i)}{(2+5i)\cdot(2-5i)} = \frac{-10+25i+20i-50i^2}{4-25i^2} = \frac{40+45i}{29} = \frac{40}{29} + \frac{45}{29}i.$

Podstawiamy do wzoru na moduł:

$|Z| = \sqrt{a^2+b^2}, a = \frac{40}{29}, b = \frac{45}{29}.$

$$\sqrt{\left(\frac{40}{29}\right)^2+\left(\frac{45}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{1600}{841}+\frac{2025}{841}} = \sqrt{\frac{3625}{841}} = \frac{5\sqrt{145}}{29}.$$

Nie zawsze musi wyjść ładna liczba.

Ostatni przykład:

Oblicz moduł liczby zespolonej $|Z| = \frac{(2+i)^3}{3+8i}$.

Rozpiszmy wzór skróconego mnożenia z licznika:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, podstawiając mamy:

$\frac{(2^3+3\cdot 2^2\cdot i + 3\cdot 2\cdot i^2 + i^3)}{3+8i} = \frac{8+12i+6i^2+i^3}{3+8i} = \frac{(2+11i)}{3+8i}$, teraz podziemy

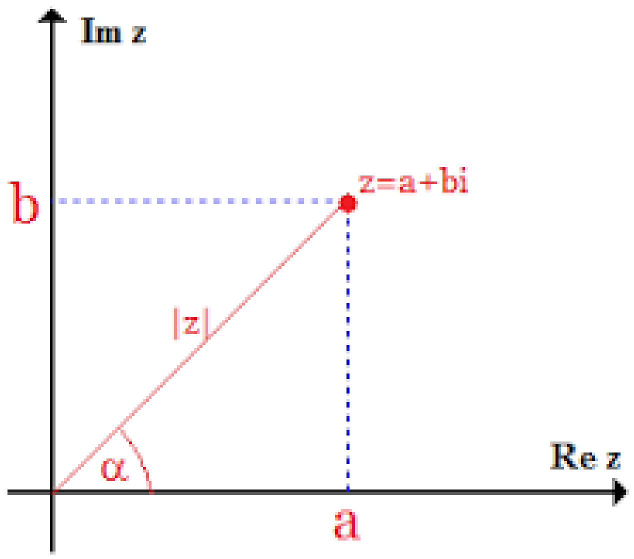
$$\frac{(2+11i)(3-8i)}{(3+8i)(3-8i)} = \frac{(2-16i+33i-88i^2)}{9-64i^2} = \frac{(100+17i)}{73} = \frac{100}{73}+\frac{17}{73}i.$$

Podstawmy do wzoru na moduł liczby zespolonej:

$$a = \frac{100}{73},\ b = \frac{17}{73},\ |Z| = \sqrt{\left(\frac{100}{73}\right)^2+\left(\frac{17}{73}\right)^2} = \sqrt{\frac{10000}{5329}+\frac{289}{5329}} = \sqrt{\frac{10289}{5329}} = \frac{\sqrt{10289}}{73}.$$

Znamy już pojęcie sprzężenia liczby zespolonej oraz modułu liczby zespolonej. Posiadając tą wiedzę możemy przejść do **PSTACI TRYGONOMETRYCZNEJ LICZBY ZESPOLONEJ.**

Jeżeli na płaszczyźnie zespolonej zaznaczymy liczbę zespoloną $Z = a + bi$ i poprowadzimy odcinek łączący ją z początkiem płaszczyzny zespolonej oraz poprowadzimy od niej prostą prostopadłą do osi rzeczywistej, to kąt α między dłuższą przyprostokątną i przeciwprostokątną **nazywamy argumentem liczby zespolonej i oznaczamy arg(z).**



W związku z tym możemy zapisać:

$\sin\alpha = \frac{b}{|Z|}$, oraz $\cos\alpha = \frac{a}{|Z|}$. W związku z tym $|Z|$ możemy zamienić na $\sqrt{a^2+b^2}$.

$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Więc liczbę zespoloną Z można zapisać w postaci:

$|Z| = (cos\alpha + isin\alpha)$. Jest to **POSTAĆ TRYGONOMETRYCZNA.**

Wyprowadzenie:

Wiemy, że $a = |Z|cos\alpha,\ b = |Z|sin\alpha$. Zatem możemy zapisać to w taki sposób:

$Z = a + bi = |Z|cos\alpha + (|Z|sin\alpha)i = |Z|\ (cos\alpha + isin\alpha)$.

Postać trygonometryczna będzie wykorzystywana do potęgowania i pierwiastkowania, ale można ją wykorzystywać też do dzielenia i mnożenia liczb zespolonych.

Zróbmy po przykładzie na wykorzystanie postaci trygonometrycznej do mnożenia i dzielenia.

W przypadku mnożenia dodajemy ze sobą moduły i argumenty sin i cos.

W przypadku dzielenia odejmujemy.

MNOŻENIE

Do mnożenia liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej wykorzystamy wzór:

$$Z \cdot W = |Z| \cdot |W|(\cos(\alpha 1 + \alpha 2) + i\sin(\alpha 1 + \alpha 2))$$

Przykład:

$$Z = 5\left(\cos\quad \frac{\pi}{6} + i\sin\quad \frac{\pi}{6}\right)$$

$W = 3\left(\cos\quad \frac{\pi}{4} + i\sin\quad \frac{\pi}{4}\right)$.

Mnożymy moduły i dodajemy wartości funkcji: $5 \cdot 3 = 15$, więc mamy:

$15\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$, idąc dal

$15\left(\cos\left(\frac{10}{24}\pi\right) + i\sin\left(\frac{10}{24}\pi\right)\right) = 15\left(\cos\quad \frac{5}{15}\pi + i\sin\quad \frac{5}{12}\pi\right)$ i to jest wynk.

DZIELENIE

Dla dzielenia wykorzystujemy wzór:

$\frac{Z}{W} = \frac{|Z|}{|W|}(\cos(\alpha 1 - \alpha 2) + i \sin(\alpha 1 - \alpha 2))$.

Dzielimy moduły i odejmujemy wartości funkcji:

$$\frac{Z}{W} = \frac{5}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{5}{3}\left(\cos\left(\frac{-2}{24}\pi\right) + i \sin\left(\frac{-2}{24}\pi\right)\right)$$
$$= \frac{5}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

I to jest wynik.

Naprawdę proste działania.

Proste przykłady zapisywania liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej:

Zapisz liczby zespolone w postaci trygonometrycznej:

$$|Z|(cos\alpha + isin\alpha)$$

$$Z = 1 + i\sqrt{3}$$

$$W = 1 + i$$

$$Z1 = -1 - i$$

$$W1 = -1 - i\sqrt{3}$$

Potrzebne nam rzeczy to tak naprawdę moduły tych liczb, oraz wartości funkcji sin i cos.

Krok po kroku:

1. Liczymy moduł
2. Wyliczamy wartości sin i cos.
3. Zapisujemy w postaci trygonometrycznej.

$$|Z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$cos\alpha = \frac{a}{|Z|} = \frac{1}{2}$$

$$sin\alpha = \frac{b}{|Z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$2\left(\cos \quad \frac{\pi}{6} + i \sin \quad \frac{\pi}{6}\right)$$

$$|W| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2}\left(\cos \quad \frac{\pi}{4} + i \sin \quad \frac{\pi}{4}\right)$$

$$|Z1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4}$$

Liczba Z1 znajduje się w III ćw. Mamy kąt ujemny, więc rozpiszmy ten kąt wzorami redukcyjnymi.

$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, mamy:

Obydwie funkcje zmienią znak, więc finalnie mamy:

$$\sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$|W1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$. Liczba W1 leży w III ćw. Więc znowu można rozpisać wzorem redukcyjnym

$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$. $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$. Funkcja cos zmieni wartość, a sin pozostanie bez zmian.

$-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, finalnie mamy:

$$2\left(-\cos\quad\frac{\pi}{3} + i\sin\quad\frac{\pi}{3}\right)$$

Przejdźmy teraz do rozwiązywania równań, w których liczby x i y będą liczbami rzeczywistymi.

Przykład 1.

$$(7 + 2i)x - (5 - 4i)y = -1 - i$$

Spróbujmy wyznaczyć liczby x i y.

Rozpiszmy lewą i prawą stronę:

$$L = 7x + 2xi,\ P = 5y - 4yi$$

Sortując elementy równania otrzymamy:

Zwróćmy uwagę na to, że po obu stronach **otrzymujemy liczby zespolone**.

$$(7x - 5y) + (2x + 4y)i = -1 - i$$

Gdy mam już taką postać, to **zawsze porównujemy części rzeczywiste i urojone**.

$$7x - 5y = -1$$

$$2x + 4y = -1$$

Otrzymujemy teraz układ równań:

$$7x - 5y = -1$$

$2x + 4y = -1$ //:2 (dzielimy to równanie na 2)

$$7x - 5y = -1$$

$x + 2y = -\frac{1}{2}$//*7 (pomnóżmy stronami przez 7)

$$7x - 5y = -1$$

$7x - 14y = -\frac{7}{2}$ (odejmijmy te równania od siebie)

$$(7x + 14y) - (7x - 5y) = -\frac{7}{2} + 1$$

$7x$ się skróci i dostaniemy:

$19y = -\frac{5}{2}$, $y = -\frac{5}{38}$. Teraz podstawmy y do drugiego równania:

$$x + 2 \cdot \left(-\frac{5}{38}\right) = -\frac{1}{2}$$

$x - \frac{5}{19} = -\frac{1}{2} = -\frac{9}{38}$. Więc rozwiązaniami równania są liczby $x = -\frac{9}{38}$, $y = -\frac{5}{38}$.

Kolejny przykład:

$(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$,

Mnożymy liczby x i y przez nawiasy:

$$x + 2xi + 3y - 5yi = 1 - 3i$$

$(x + 3y) + (2x - 5y)i = 1 - 3i$. Porównujemy części rzeczywiste do rzeczywistych i urojone do urojonych:

$$x + 3y = 1$$

$2x - 5y = -3$. Znowu tworzymy układ równań i go rozwiązujemy:

$$x + 3y = 1$$

$$2x - 5y = -3$$

Wyznaczmy x z pierwszego równania i obliczmy:

$$x = 1 - 3y$$

$$2(1 - 3y) - 5y = -3$$

$$2 - 6y - 5y = -3$$

$$-11y = -5$$

$$y = \frac{5}{11}$$

$$x = 1 - 3 \cdot \left(\frac{5}{11}\right)$$

$x = 1 - \frac{15}{11} = -\frac{4}{11}$, zatem rozwiązaniem są liczby $x = -\frac{4}{11}$, $y = \frac{5}{11}$.

W późniejszych działaniach poznamy jeszcze inne typy równań.

Zróbmy jeszcze parę przykładów z układów równań w zbiorze liczb zespolonych.

Przykład 1:

Rozwiąż układ równań, w którym liczby Z i W są zespolone.

$$(1 + i)z + (2 - i)w = 2 - 2i$$

$$(1 - i)z - (3 + i)w = -3 + 3i$$

Postępujemy tak samo jak z normalnym układem równań:

Wyliczmy Z i wstawmy do drugiego równania:

$Z = \frac{((2-2i)-(2-i)w)}{(1+i)}$, teraz wstawmy tą wartość do drugiego równania:

$(1-i)\left(\frac{(2-2i)-(2-i)w}{(1+i)}\right) - (3+i)w = -3+3i$ //* (1+i) mnożyy stronami przez (1+i)

$$(1-i)\Big(\big((2-2i)-(2-i)w\big)\Big) - (3+i)(1+i)w = -3+3i$$

$$(1-i)\big((2-2i)-(2-i)\big)w - (3+3i+i+i^2)w$$

$$(2-2i-2i+2i^2) - (2-i)w - (2+4i)w = -3+3i$$

$$(-4i) - (2+4i)w = -3+3i$$

$$(-4i) - (2-i)w - 2 + 4i = -3+3i$$

$$-(2+4i)w = -3+7i$$

$-(2+4i)w = -3+7i$ //:(-(2+4i)) dzielimy stronami

$$w = \frac{(3+7i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{6-12i+14i-28i^2}{4-16i^2}$$

$$w = \frac{(34-2i)}{20} = \frac{17}{10} + \frac{1}{10}i$$

$$z = \frac{(2-2i)-(2-i)\left(\frac{17}{10}+\frac{1}{10}\right)}{1+i}$$

$$z = \frac{(2-2i)-\left(\frac{35}{10}-\frac{15}{10}i\right)}{1+i}$$

$$z=\frac{(2-2i)-\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}i\right)}{1+i}$$

$$z=\frac{\left(2-\frac{7}{2}-2i+\frac{3}{2}i\right)}{1+i}=\frac{\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{1+i}=\frac{\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$z=\frac{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}i^2}{1-i^2}=\frac{-2+i}{2}=-1+\frac{1}{2}i$, zatem wynikim są liczby: $Z=-1+\frac{1}{2}i,\ W=\frac{17}{10}+\frac{1}{10}i$

W takich układach równań sporo trzeba wyliczyć.

Poznaliśmy równania, układy równań, postać trygonometryczną, sprzężenie liczby zespolonej oraz moduł liczby zespolonej. Znając te rzeczy możemy przejść do dwóch ostatnich działań jakie możemy wykonywać na liczbach zespolonych, czyli do potęgowania i pierwiastkowania.

Do podniesienia liczby zespolonej do n-tej potęgi będziemy się posługiwać wzorem:

$|Z|^n(\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha))$. Wzór ten nazywa się wzorem de Moivre'a.

Jak zwykle występujemy w nim moduł liczby zespolonej oraz postać trygonometryczna.

Chciałbym zwrócić uwagę na to, dlaczego kąt α mnożymy razy n, a nie całość podnosimy do n-tej potęgi. W tym celu wyprowadźmy ten wzór:

Weźmy sobie następujące warunki dwóch liczb zespolonych:

$$|Z|=5,\ \arg(z)=10°$$

$$|W|=7,\ \arg(z2)=130°$$

Nasze zadanie polega na obliczeniu dwóch rzeczy:

1. $|Z\cdot W|$
2. $\arg(Z\cdot W)$

Wymnóżmy te liczby korzystając ze wzoru na mnożenie liczb w postaci trygonometrycznej: $Z\cdot W=|Z|\cdot|W|(\cos(\alpha1+\alpha2)+i\sin(\alpha1+\alpha2))$

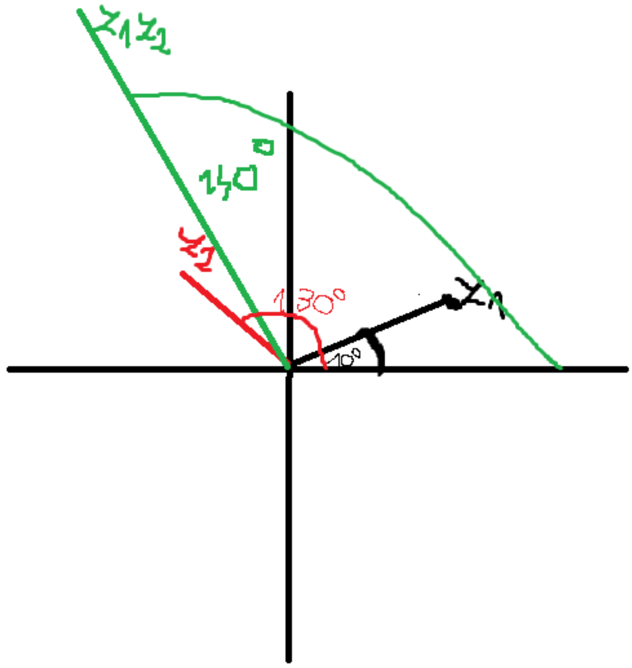
$$Z\cdot W=5(\cos 1\,0°+i\sin 1\,0°)\cdot 7(\cos 1\,30°+i\sin 1\,30°)$$
$$=35(\cos(10°+130°)+i\sin(10°+130°))$$

$$|Z\cdot W|=|Z|\cdot|W|=5\cdot 7=35$$

$$\arg(Z\cdot W)=\arg(Z)+\arg(W)=10°+130°$$

Po rozpisaniu pierwszej linijki widzimy, że moduły liczb się wymnożą, a wartości funkcji trygonometrycznych się dodadzą. Teraz, wzór de Moivre'a korzysta z faktów 1 i 2, bo n-razy mnożymy przez siebie taką samą liczbę oraz kąt α jest do siebie dodawany n-razy. Dlatego mamy $|Z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$

Przedstawmy sobie jeszcze te liczby na wykresie:



Z1 jest liczbą o warunkach: $|Z| = 5,\ \arg(Z) = 10°$

Z2 jest liczbą o warunkach: $|W| = 7,\ \arg(W) = 130°$

Z1Z2 jest wynikiem mnożenia tych liczb.

Zróbmy przykłady z potęgowania liczb zesolonych:

Przykład

$$\left(1 + \sqrt{3}i\right)^8$$

Pozwolę wypisać tutaj, co robimy krok po kroku:

1. Liczymy moduł liczby zespolonej:

$|Z| = \sqrt{1+3} = 2\ |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. Liczymy cosα i sinα

   $cos\alpha = \frac{a}{|Z|},\ sin\alpha = \frac{b}{|Z|},$

3. Zapisujemy liczbę Z w postaci trygonometrycznej

$$Z = |Z|(cos\alpha + isin\alpha)$$

$$Z = 2\left(\cos\quad\frac{\pi}{3} + i\sin\quad\frac{\pi}{3}\right)$$

4. Podstawiamy do wzoru de Moivre'a
$|Z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$, n-potęga,do której podnosimy liczbę zespoloną, α - wyliczony kąt.

$$Z^8 = 2^8\left(\cos 8\cdot\frac{\pi}{3} + i\sin 8\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$

Zostawmy już w takiej postaci.

Przykład 2.

$$(1-i)^{12}$$

Podpiszmy, że $Z = 1 - i$.

Wyliczmy potrzebne rzeczy:

$$|Z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$$

Liczba Z znajduje się w IV ćw. Układu współrzędnych stąd $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$

Zapisując naszą liczbę mamy:

$Z^{12} = 2^6\left(\cos\left(12\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(12\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\right)$, więc mamy $Z^{12} = 2^6(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi))$, teraz musimy skorzystać z okresowości funkcji trygonometrycznych:

Musimy dodać 2π albo jego wielokrotność:

$$Z^{12} = 2^6(\cos(-3\pi + 4\pi) + i\sin(-3\pi + 4\pi)) = 2^6(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$$

Ponieważ dodatnie okresowości nie powoduje nam zmiany funkcji, więc mamy:

$Z^{12} = 2^6(\cos\pi + i\sin\pi)$, ponieważ $\cos\pi = -1$, a $\sin\pi = 0$ finalnie otrzymujemy:

$Z^{12} = -2^6 = -64$ i to jest wynik.

Przykład 3.

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{80}$$

Podnieśmy liczbę $Z = -1 + \sqrt{3}i$ do 80 potęgi:

Liczymy potrzebne nam rzeczy:

$$|Z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha = \frac{\pi}{3}$$

Ponieważ nasza liczba znajduję się w II ćw. Układu współrzędnych, to

$\arg(z) = \frac{2}{3}\pi$, bo korzystamy ze wzorów redukcyjnych.

Kąt α można rozpisać jako $\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$, stąd $\arg(z) = \frac{2}{3}\pi$

Podstawiamy do wzoru:

$Z^{80} = 2^{80}\left(\cos\left(80 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(80 \cdot \frac{2}{3}\pi\right)\right) = 2^{80}\left(\cos\left(\frac{160}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{160}{3}\pi\right)\right)$.
Zostawię w takiej postaci.

Przejdźmy do ostatniego zagadnienia z liczb zespolonych, czyli pierwiastkowania.

Do pierwiastkowania będziemy posługiwać się wzorem:

$\sqrt[N]{|Z|}\left(\cos \quad \frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin \quad \frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$, gdzie k = 0,1,2....n

Zróbmy parę przykładów:

Przykład 1.

$\sqrt[3]{1+i}$.

Rozpiszę instrukcję krok po kroku:

1. Liczymy moduł liczby zespolonej
2. Wyznaczamy $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, a następnie wyznaczamy $\arg(Z)$

3. Podstawiamy wartości pod wzór, z czego stopień pierwiastka określa nam liczbę pierwiastków danej liczby zaczynając od k=0.

$$|Z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

Teraz możemy podstawiać wartości do wzoru:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos \quad \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \quad \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)$$

Teraz zrozummy, o co chodzi z liczbą pierwiastków. Liczba rozwiązań jest określana przez stopień pierwiastka, wiemy, że będą 3 pierwiastki i teraz za k będziemy podstawiać liczby od 0 do 2. Będą dokładnie 3 pierwiastki liczone od k=0.

Podstawiamy:

Dla k=0

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos \quad \frac{\frac{\pi}{4} + 0}{3} + i \sin \quad \frac{\frac{\pi}{4} + 0}{3}\right)$$

$\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos \quad \frac{\pi}{12} + i \sin \quad \frac{\pi}{12}\right)$, to jest pierwszy pierwiastek.

Teraz dla k=1 podstawiamy 1 za k, więc:

$$\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right)\right)$$

$$\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{9}{4}\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{9}{4}\pi}{3}\right)\right)$$

$\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos \quad \frac{9}{12}\pi + i\sin \quad \frac{9}{12}\pi\right)$, to jest drugi pierwiastek.

Teraz podstawiamy 2 za k, więc:

$$\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 2\cdot \pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 2\cdot \pi}{3}\right)\right)$$

$$\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}\right)\right)$$

$$\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{17}{4}\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{17}{4}\pi}{3}\right)\right)$$

$\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos \quad \frac{17}{12}\pi + i\sin \quad \frac{17}{12}\pi\right)$, to jest trzeci pierwiastek i na tym kończymy.

Podstawialiśmy po prostu liczby od 0 2, licząc od 0 mamy 3 pierwiastki dla k=0, k=1 i k=2.

Kolejny przykład

$$\sqrt[3]{2-2i}$$

Liczymy potrzebne rzeczy:

$$|Z| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$cos\alpha = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ sin\alpha \ = \ \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Liczba leży w IV ćwiartce. Musimy zatem użyć wzorów redukcyjnych. $\cos(2\pi - \alpha)\ \ \sin(2\pi-\alpha)$

Więc wyznaczając $\arg(z)$ podstawiamy $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \quad \frac{7}{4}\pi$, więc $\arg(z) \ = \ \frac{7}{4}\pi = \alpha$

Możemy podstawiać do wzoru:

$$\sqrt[3]{|Z|}\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$$

Dla k=0

$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\frac{7}{4}\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{7}{4}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)$, $\sqrt{2},\ bo\ \sqrt[3]{\sqrt{8}}=\left((2^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt{2}\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)$, pierwszy pierwiastek.

Dla k=1

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\frac{7}{4}+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{7}{4}+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\frac{7}{4}+2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{7}{4}+2\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\frac{15}{4}\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{15}{4}\pi}{3}\right)$$

$\sqrt{2}\cos\left(\frac{15}{12}\pi\right)+i\sin\left(\frac{15\pi}{12}\right)$ wartości skrócą się przez 3 więc mamy:

$\sqrt{2}\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)$, rozpiszmy za pomocą wzorów redukcyjnych $\cos(\pi-\alpha)\ \ \sin(\pi-\alpha)$

Podstawiając mamy: $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\ \ \sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$, cos zmienia znak, a sin pozostaje bez zmian $-\cos\ \ \frac{\pi}{4},\ \ \sin\ \ \frac{\pi}{4}$

Finalnie mamy:

$\sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, drugi pierwiastek.

Dla k=2

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{7}{4}+2\cdot 2\cdot\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{7}{4}+2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)\right)$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{23}{4}\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{23}{4}\pi}{3}\right)\right)$$

$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{23}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{23}{12}\pi\right)\right)$ trzeci pierwiastek. Koniec.

Teraz poobliczamy pierwiastki stopnia drugiego, bo owszem można używać powyższego wzoru, ale jest lepszy sposób.

Przykład 4

$\sqrt{3+4i}$ aby obliczyć taki pierwiastek to wykonujemy następujące rzeczy:

1. Zapisz liczbę $Z = x + yi$
2. Porównaj tą liczbę z całym pierwiastkiem

$$\sqrt{3+4i} = x + yi$$

3. Rozwiąż to równanie

$\sqrt{3+4i} = x + yi$ / $(\quad)^2$ podnosimy stronami do kwadratu, aby się pozbyć pierwiastka. W wyniku tego po prawej stronie otrzymamy wzór skróconego mnożenia:

$$3 + 4i = (x + yi)^2$$

$$3 + 4i = x^2 + 2xyi + y^2i^2$$

Podstawiamy $i^2 = -1$, więc otrzymujemy:

$3 + 4i = x^2 - y^2 + 2xyi$ (już po grupowaniu części rzeczywistej i urojonej)

Teraz porównujemy ze sobą części rzeczywiste i urojone:

$$3 = x^2 - y^2$$

$$4 = 2xy$$

Tworzymy układ równań i go rozwiązujemy, rozwiązaniami będą liczby x i y

$$3 = x^2 - y^2$$

$4 = 2xy$ z tego równania wyznaczmy np. X

$$3 = x^2 - y^2$$

$$2 = xy,\ \frac{2}{y} = x$$

Podstawiamy x do pierwszego równania:

$$3 = \left(\frac{2}{y}\right)^2 - y^2$$

$3 = \frac{4}{y^2} - y^2$ sprowadzamy do wspólnego mianownika

$3 = \frac{4}{y^2} - \frac{y^4}{y^2} /\cdot\ y^2$ mnożymy stronami przez y^2

$3y^2 = 4 - y^4$ przerzucamy wszystko na prawą stronę i otrzymujemy równanie dwukwadratowe:

$$0 = -y^4 - 3y^2 + 4$$

Robimy podstawienie $t = y^2$ **WAŻNE.** Teraz t jest rzeczywiste, więc rozwiązania ujemne odrzucamy.

$$0 = -t^2 - 3t + 4$$

Liczymy deltę:

$$\Delta = 9 - 4 \cdot (-1) \cdot 4$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = 5$$

Liczymy t1 i t2:

$$t1 = \frac{3-5}{2 \cdot (-1)} = \frac{-8}{-2} = 4 \in R$$

$$t2 = \frac{3+5}{2 \cdot (-1)} = \frac{8}{-2} = -4 \notin R$$

Mamy t, więc wracamy do podstawienia $t = y^2$

$4 = y^2 // \sqrt{\ }$

$$y = 2 \lor y = -2$$

Mamy y, to obliczamy x.

$$\frac{2}{y} = x$$

$x1 = 1$, $x2 = -1$

Otrzymaliśmy dwie pary liczb $x1 = 1,\ y1 = 2 \quad x2 = -1,\ y2 = -2$

Teraz wiemy, że liczba Z jest postaci x+yi, więc podstawiamy:

$$Z1 = 1 + 2i$$

$Z2 = -1 - 2i$ (Liczby zawsze będą miały przeciwne znaki)

Te dwie liczby są naszymi szukanymi pierwiastkami.

Kolejny przykład

$\sqrt{8 - 6i}$, ponownie zapisujemy, że $Z = x + yi$

$\sqrt{8-6i} = x + yi // (\quad)^2$

$$8 - 6i = (x + yi)^2$$

$$8 - 6i = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$$

$$8 - 6i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$8 = x^2 - y^2$$

$-6 = 2xy$ (z tego wyznaczamy np. x)

$-3 = xy \quad -\frac{3}{y} = x$ // wstawiamy do drugiego równania:

$$8 = \left(-\frac{3}{y}\right)^2 - y^2$$

$$8 = \frac{9}{y^2} - y^2$$

$8 = \frac{9}{y^2} - \frac{y^4}{y^2} // \cdot\, y^2$ (mnożymy stronami przez y^2)

$$8y^2 = 9 - y^4$$

$0 = -y^4 - 8y^2 + 9$ znowu powstało nam równanie dwukwadratowe, więc podstawiamy:

$t = y^2$ t musi być rzeczywiste

$$0 = -t^2 - 8t + 9$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot (-1) \cdot 9 = 64 + 36 = 100$$

$$\sqrt{\Delta} = 10$$

$$t1 = \frac{8 - 10}{-2} = 1 \in R$$

$$t2 = \frac{8 + 10}{-2} = -9 \notin R$$

Wracamy do podstawienia:

$$1 = y^2$$

$$y1 = 1 \lor y2 = -1$$

Obliczamy x-y:

$$-\frac{3}{y} = x$$

$$x1 = -3,\ x2 = 3$$

Zatem pierwiastkami są dwie liczby zespolone Z1 i Z2.

$$Z1 = -3 + i$$

$Z2 = 3 - i$ znowu są to liczby z przeciwnym znakiem.

MATERIAŁY POMOCNICZE

TABELA ZE ZNAKAMI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

α	I ćw	II ćw.	III ćw.	IV ćw.
$sin\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
$cos\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$

WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

STOPNIE	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
RADIANY	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2}{3}\pi$	2π
$sin\alpha$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

ZAPIS ARG(Z) W ZALEŻNOŚCI OD KĄTA α W ĆWIARTKACH

I ćw. $\arg(z) = \alpha$

II ćw. $\arg(z) = \pi - \alpha$

III ćw. $\arg(z) = \pi + \alpha$

IV ćw. $\arg(z) = 2\pi - \alpha$

WZORY REDUKCYJNE