MAT106 notater

Bjarte Mehus Sunde

May 31, 2016

Innhold

1 Grunnleggende

1.1 Potensregler

Regel 1 (Potensregler)**.**

1. $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$
3. $a^m + b^m = (a \cdot b)^m$
4. $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
6. $a^{(-m) = \dfrac{1}{a^m}}$
7. $a^0 = 1$
8. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

1.2 Kvadratsetningen

Teorem 1.1 (Kvadratsetningene).

1. kvadratsetning: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. kvadratsetning: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Kvadratsetning: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ *(også kalt konjugatsetningen)*

1.3 ln

Regel 2.

1. $ln\, ab = ln\, a + ln\, b$
2. $ln \frac{a}{b} = ln\, a - ln\, b$
3. $e^{ln\, a^k} = a^k$

1.4 Delbrøkoppspalting

Fremgangsmåte

1. Ved *polynomdivisjon* forenkler vi funksjonen til summen av et polynom og en rasjonal funksjon der telleren ar *lavere grad* enn nevneren.

2. Nevneren *faktoriseres*.

3. Ved *delbrøkoppspalting* omskriver vi den rasjonale funksjonen videre til en sum av delbrøker av delbrøker av følgende to typer:

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m}$$

Eksempel 1.1. Delbrøkoppspalt $\frac{3x+11}{x^2-x-6}$ Det første vi må gjøre er å faktorisere nevneren så mye som mulig for å få det på en form vi kan bruke.

$$\begin{aligned}
x^2 - x - 6 &= 0 \\
x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 6 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} \\
x &= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\
x = 3 \quad &\text{eller} \quad x = -2 \\
(x-3)&(x+2)
\end{aligned}$$

Dette gir

$$\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

der A og B er konstanter vi må bestemme. Vi multipliserer med faktorisert fellesnevner $(x-3)(x+2)$ på begge sider og forkorter:

$$\begin{aligned}
\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)}\cdot(x-3)(x+2) &= \frac{A}{x-3}\cdot(x-3)(x+2) + \frac{B}{x+2}\cdot(x-3)(x+2) \\
3x+11 &= A(x+2) + B(x-3)
\end{aligned}$$

Det er to ulike måter å løse likningen på. En metode som alltid virker, men ofte er mer arbeid. Den andre metoden er raskere, men vil ikke alltide virke. Vi skal bruke den raske metoden i dette eksempelet.

Det vi skal gjøre er å sette inn verdier for x for å finne A og B, vi bruker verdiene $x = -2$ og $x = 3$ som vi fant tidligere.

$$\begin{aligned}
x &= -2 \qquad 5 = A\cdot 0 + B\cdot(-5) \;\rightarrow\; B = -1 \\
x &= 3 \qquad 20 = A\cdot 5 + B\cdot 0 \;\rightarrow\; A = 4
\end{aligned}$$

$$\frac{3x+11}{x^2-x-6} = \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x+2}$$

Finner andre metoden her visst det skulle bli nødvendig å bruke den: http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcI

1.4.1 Heaviside cover-up method

En metode for delbrøkoppspalting. Kan ikke brukes hvisnoen av uttrykkene er kvadrert.

Eksempel 1.2.

$$\frac{s}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}$$

Heaviside cover-up metoden: Se hva s i nevner på brøken med A i må være for at den skal bli 0. Hold så over hele høyre side og $s-1$ på venstre side og sett inn for s. Dette er svaret for A. Gjenta for B. Løsning:

s for A må være 1

$$\frac{s}{\cancel{(s-1)}(s-2)} = \cancel{\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}}$$

$$s = 1 \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{1}{1-2} = -1$$

s for B må være 2

$$\frac{s}{(s-1)\cancel{(s-2)}} = \cancel{\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}}$$

$$s = 2 \qquad \rightarrow \qquad B = \frac{2}{2-1} = 2$$

Så

$$\frac{s}{(s-1)(s-2)} = \frac{-1}{s-1} + \frac{2}{s-2}$$

Eksempel 1.3.

$$\frac{1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}$$

$$\begin{aligned} s = 0 \qquad &\rightarrow \qquad A = \frac{1}{-1 \cdot -2} = \frac{1}{2} \\ s = 1 \qquad &\rightarrow \qquad B = \frac{1}{1 \cdot (1-2)} = -1 \\ s = 2 \qquad &\rightarrow \qquad C = \frac{1}{2 \cdot (2-1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

så

$$\frac{1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-2}$$

1.5 LHopitals regel

Regel 3. Anta at funksjonene $f(x)$ of $g(x)$ er deriverbare, og at $g'(x) \neq 0$ for alle x i et område rundt $x = c$ men $g'(c) = 0$ er tillat. Dersom grenseverdien

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

er et $\frac{0}{0}$ eller et $\frac{\infty}{\infty}$ uttrykk, vil

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

så lenge den siste grenseverdien eksisterer eller er ∞ eller $-\infty$.

1.6 Regneregler for n-fakultet

Notasjonen $n!$(n-fakultet) betyr produktet av $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ av heltallene fra 1 til n.

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}_{4!} \cdot 5 = 5 \cdot 4!$$

$$5! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3}_{3!} \cdot 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4 \cdot 3!$$

Vi definerer 0! til å være 1.

$$0! = 1$$

Utvidelse av paranteser:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$$(n+2)! = (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$$

Eksempel 1.4. Forenkl $\dfrac{(n+3)!}{(n+2)!}$

$$\frac{(n+3)!}{(n+2)!} = \frac{(n+3) \cdot \cancel{(n+2)!}}{\cancel{(n+2)!}} = n+3$$

Eksempel 1.5. Forenkl $\dfrac{7!}{6!}$

$$\frac{7!}{6!} = \frac{7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 7$$

1.7 Vekst av funksjoner

$$\text{Fakultet} > \text{Eksponentsial} > \text{Ploynom} > \text{Logaritme}$$

f.eks.

$$x! > e^x > x^2 > lnx$$

1.8 Binomialformelen

Formel 1.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Eksempel 1.6. Ekspander $(n+1)^4$

Begynner med å finne alle $\binom{n}{k}$, der $n = 4$. Bruker nCr knappen på kalkulatoren:

$$C(4,0) = 1 \quad C(4,1) = 4 \quad C(4,2) = 6 \quad C(4,3) = 4 \quad C(4,4) = 1$$

Så setter vi inn i formelen

$$\begin{aligned} &\underbrace{1 \cdot n^4 \cdot 1^0}_{k=0} + \underbrace{4 \cdot n^3 \cdot 1^1}_{k=1} + \underbrace{6 \cdot n^2 \cdot 1^2}_{k=2} + \underbrace{4 \cdot n^1 \cdot 1^3}_{k=3} + \underbrace{1 \cdot n^0 \cdot 1^4}_{k=4} \\ &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

1.9 Absoluttverdi

Løs likningen $|2x-3|-4=3$

$$\begin{aligned}
|2x-3|-4&=3\\
|2x-3|&=7\\
(2x-3)&=7\\
2x&=10\\
x&=5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|2x-3|-4&=3\\
|2x-3|&=7\\
-(2x-3)&=7\\
-2x+3&=7\\
-2x&=4\\
x&=-2
\end{aligned}$$

$$x=-2 \;\; eller \;\; x=5$$

2 Komplekse tall

2.1 Komplekse tall

Definisjon 2.1. La z være et komplekst tall. Realdelen til z skrives Re(z), og imaginærdelen til z skrives Im(z). Hvis $z = a + bi$, er altså

$$Re(z) \quad og \quad Im(z)$$

Vi må huske reglen

$$i^2 = -1$$

2.2 i

Regel 4 (Regneregler for i)**.**

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1$$

For å rekne i med høyere potens enn 4 må vi konvertere den til den nærmeste potensen som kan deles på 4.

Eksempel 2.1.

$$i^{99} = i^{96+3} = i^{(4\times24)+3} = i^3 = -i$$

2.3 Konjuglasjon

Når vi skal definere divisjon, trenger vi en operasjon som bytter fortegnet på imaginærdelen til et komplekst tall. Denne operasjonen dukker opp så ofte at den har fått et eget navn og en egen skrivemåte

Definisjon 2.2. Den *konjugerte* til et komplekst tall $z = a + bi$ er

$$\bar{z} = x - yi$$

Eksempel 2.2. La oss regne ut produktet av et komplekst tall z med det konjugerte tallet $\bar{z}$.
Setter vi inn $z = x + yi$, får vi

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + yi)(\overline{x + iy}) \\ &= (x + yi)(x - yi) \\ &= x^2 - (yi)^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Vi ser at z$\bar{z}$ alltid blir et reelt tall! Dessuten er z$\bar{z} \geq 0$ og z$\bar{z} = 0$ hvis og bare hvis $z = 0$

2.4 Divisjon

Definisjon 2.3. Hvis $z = x + yi$ er et komplekst tall og $c \neq 0$ er et reelt tall, definerer vi

$$\frac{x + yi}{c} = \frac{x}{c} + \frac{y}{c}i$$

Hvis $z_1 = x_1 + y_1 i$ og $z_2 = x_2 + y_2 i$, og $z_2 \neq 0$, så definerer vi

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}$$

siden dette blir et komplekst tall delt på et reelt tall forskjellig fra null.

Setning 2.1. For alle komplekse tall z og w gjelder følgende:

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

b) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c) $\overline{\overline{z}} = z$

2.5 Andregradsligninger

Alle andregradslikninger kan løses

Definisjon 2.4. En andregradsligning

$$ax^2 + bx + c = 0$$

der a, b og c er reelle tall, har som kjent løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Eksempel 2.3. Løs ligningen

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$

Andregradsformelen gir

$$z = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Nå vet vi at de to kvadratrøttene til -16 er $\pm\sqrt{-16} = \pm 4i$. Derfor blir

$$z = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Har funnet en metode som er mykje lettare og raskere enn ABC-formelen:

Eksempel 2.4. Løs ligningen

$$z^2 - 8z + 25 = 0$$

Skriver likningen på formen

$$a^2 - 2ab + b^2 = -25$$

Vi bestemmer at $a = z$ og $2ab = 8z$. Må finne b og sette in for b^2, det eneste leddet som mangler.

Vi har at $2ab = 8z$, setter inn $a = z$ og får $2zb = 8z$. Dette gir videre $b = \frac{8}{2} = 4$.

$$2ab = 8z = 2 \cdot \underbrace{z}_{a} \cdot \underbrace{4}_{b}$$

Det eneste du trenger å gjøre for å finne b er å dele tallet som ganges med z med 2. b^2 blir da

$$b^2 = 4^2$$

Setter b^2 inn på begge sider av ligningen og får

$$z^2 - 2 \cdot z \cdot 4 + 4^2 = 4^2 - 25$$

Bruker 2. kvadratsetning, skriver om og rekner ut

$$\begin{aligned}(z-4)^2 &= -9\\ z - 4 &= \pm\sqrt{-9}\\ z - 4 &= \pm 3i\\ z &= 4 \pm 3i\end{aligned}$$

Eksempel med rett føring

Eksempel 2.5.

$$\begin{aligned}z^2 + 10z + 30 &= 0\\ z^2 + 2 \cdot 5 \cdot z + 5^2 &= 5^2 - 30\\ (z+5)^2 &= -5\\ z &= \underline{\underline{-5 \pm i\sqrt{5}}}\end{aligned}$$

3 Geometrisk tolkning av komplekse tall

Definisjon 3.1. Et komplekst tall $z = yi$ med realdel 0 kaller vi et *imaginært tall*
Imaginærdelen til $a + yi$ er det reelle tallet y, og ikke det imaginære tallet yi

3.1 Vektoroperasjoner

Setning 3.1. l z og w være to komplekse tall og c et reelt tall. Betrakter vi z og w også som vektorer, gjelder følgende:

a) Summen av $z + w$ som komplekse tall er lik vektorsummen $z + w$ som vektor.

b) Differansen $z - w$ som to komplekse tall er lik vektordifferansen $z - w$ som vektor.

c) Produktet cz som tall er lik skalarproduktet cz som vektor.

3.2 Polarkoordinater

Definisjon 3.2 (Polarkoordinater)**.**

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\,cos\theta \qquad y = r\,sin\theta \qquad tan\theta = \frac{y}{x}$$

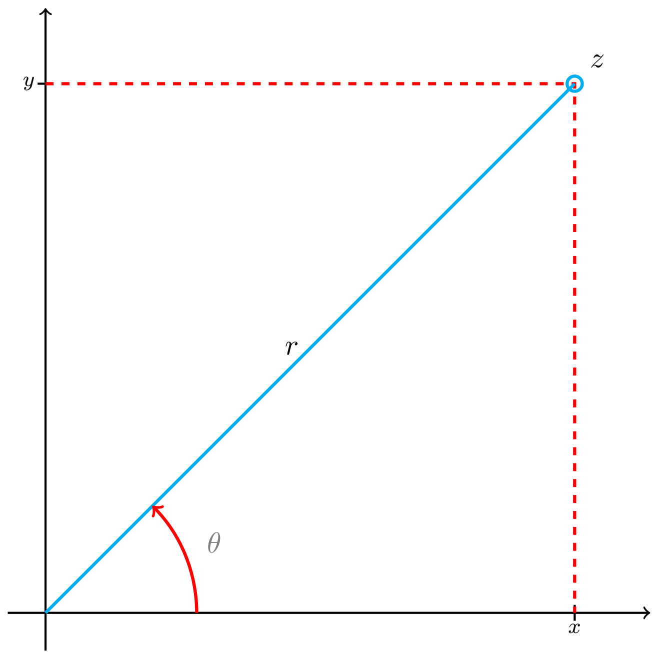


Figure 1: Polarkoordinater r og θ

Disse formlene gjelder også når x eller y er negative. Vi kan nå skrive $z = x + yi$ på følgende form

$$z = r\,cos\theta + (r\,sin\theta)i = r(cos\theta + i\,sin\theta)$$

Definisjon 3.3. Vi sier at

$$z = x + yi$$

er skrevet på kartesisk form, og at

$$z = r(cos\theta + i\, sin\theta)$$

er skrevet på polarform eller trigonometrisk form. Istede for denne formen kan vi og skrive

$$z = re^{\theta i}$$

Denne skrivemåten kalles noen ganger eksponentiell form eller rett og slett polarform.

Definisjon 3.4. Hvis z er et komplekst tall, så skriver vi $|z|$ for lengden til z. Dersom $z = a + bi$, er

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3.3 Multiplikasjon

Teorem 3.1. La z_1 være et komplekst tall med lengde r_1 og vinkel θ_1. La z_2 være et komplekst tall med lengde r_2 og vinkel θ_2. Da har produktet $z_1 z_2$ lengde $r_1 r_2$ og vinkel $\theta_1 + \theta_2$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

3.4 Divisjon

Teorem 3.2. La z_1 være et komplekst tall med lengde r_1 og vinkel θ_1. La z_2 være et komplekst tall med lengde r_2 og vinkel θ_2. Da har kvotienten $\frac{z_1}{z_2}$ lengde $\frac{r_1}{r_2}$ og $\theta_1 - \theta_2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

3.5 Den komplekse eksponentialfunksjonen

Definisjon 3.5. For et komplekst tall $x + iy$ setter vi

$$e^{x+iy} = e^x(cos\, y + i\, sin\, y)$$

Formel 2 (eulers formel)**.**

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\, sin\theta \tag{1}$$

Setning 3.2. For alle komplekse tall z_1 og z_2 gjelder

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

3.6 Potenser av komplekse tall

Teorem 3.3. La $z = re^{\theta i}$ være et komplekst tall og n et helt tall. Da er

$$z^n = r^n e^{n\theta i}$$

Altså har n-te potens z^n lengde r^n og vinkel $n\theta$.

Formel 3 (Moivers formel)**.**

$$(cos\theta + i\, sin\theta)^n = cos(n\theta) + i\, sin(n\theta) \tag{2}$$

3.6.1 Oppgaver med løsningsforslag

La $z = x + yi$ der $x = Re(z)$ og $y = Im(z)$. Husk også at $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

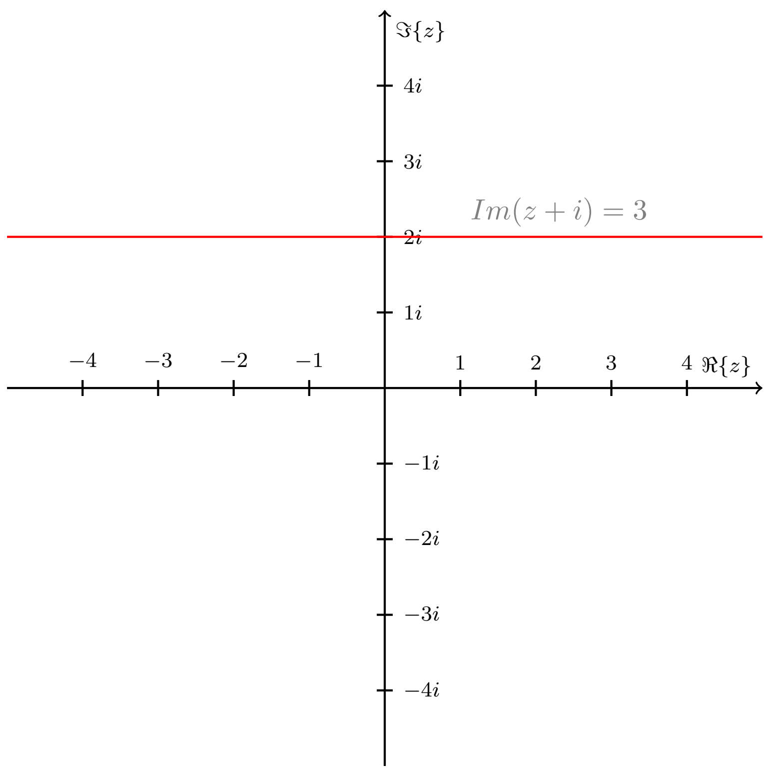
Skissér løsningsmmengden i det komplekse planet.

1)

$$Im(z + i) = 3$$

Løsning:

$$\begin{aligned} Im(z + i) &= 3 \\ Im(x + yi + i) &= 3 \\ Im(x + i(y + 1)) &= 3 \\ y + 1 &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned}$$



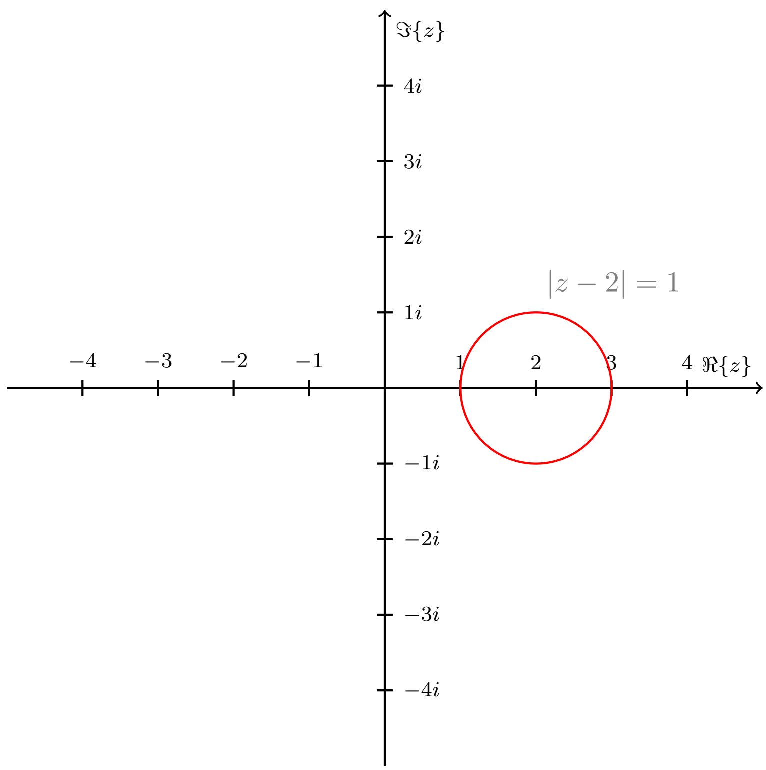
2)

$$|z-2|=1$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
|z-2| &= 1\\
|x+iy-2| &= 1\\
|x-2+iy| &= 1\\
\sqrt{(x-2)^2+y^2} &= 1\\
(x-2)^2+y^2 &= 1^2
\end{aligned}$$

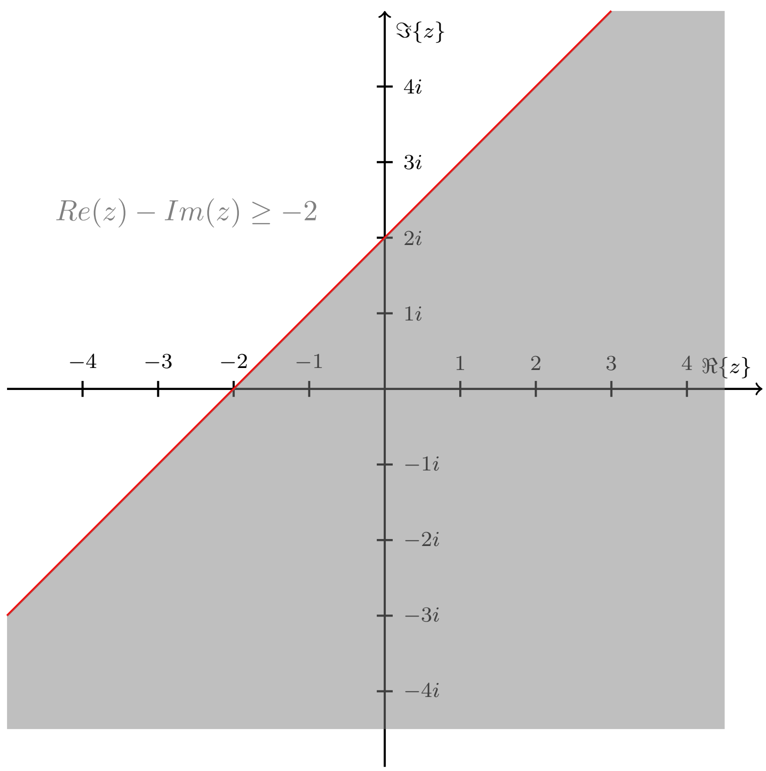
Dette er en sirkel med origo i $(2,0)$ og radius 1



3)

$$Re(z) - Im(z) \geq -2$$

$$\begin{aligned} Re(z) - Im(z) &\geq -2 \\ x - y &\geq -2 \\ x &\geq y - 2 \end{aligned}$$



3.7 Røtter av komplekse tall

Definisjon 3.6. Gitt et komplekst tall z. Vi sier at et tall w er en n-te rot til z hvis

$$w^n = z$$

Definisjon 3.7. Metoden for å løyse slike oppgaver

$$w_0 = \sqrt[n]{x+iy} = \sqrt[n]{re^{i\theta}} = (re^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta}{n}}$$
$$w_1 = w_0 e^{i\frac{2\pi}{n}}$$
$$w_2 = w_1 e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

Eksempel 3.1. Finn $\sqrt[3]{-8i}$:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0+(8)^2} = \sqrt{64} = 8$$

Siden $y = -8$ vet vi at vinkelen må vere

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$w_0 = \sqrt[3]{-8i} = (8e^{i\frac{3\pi}{2}})^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{3\pi}{2}\frac{1}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2(cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\,sin(\tfrac{\pi}{2})) = \underline{2i}$$

Kan ta en sjekk for å sjå at det stemmer

$$(2i)^3 = 2i \cdot 2i \cdot 2i = 4i^2 2i = -4 \cdot 2i = -8i$$

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$w_1 = w_0 e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(cos(\tfrac{7\pi}{6}) + i\,sin(\tfrac{7\pi}{6})\right) = \underline{-\sqrt{3}-i}, \;\; (-\sqrt{3}-i)^3 = -8i$$

$$w_2 = w_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i(\frac{7\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = 2\left(cos(\tfrac{11\pi}{6}) + i\,sin(\tfrac{11\pi}{6})\right) = \underline{\sqrt{3}-i}, \;\; (\sqrt{3}-i)^3 = -8i$$

$$w_0 = 2i \qquad w_1 = -\sqrt{3}-i \qquad w_2 = \sqrt{3}-i$$

3.8 Komplekse andregradslikninger

Setning 3.3. For alle komplekse tall a, b og c med $a \neq 0$ har ligningen

$$az^2 + bz + c = 0$$

alltid to komplekse løsninger, gitt ved formelen

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De to løsningene kan være like og kalles i så fall en dobbeltrot.

Eksempel 3.2. Løs ligningen

$$iz^2 + (1 - 3i)z + 2i - 1$$

Dette er en kompleks andregradsligning med koeffisienter

$$a = i, \;\; b = 1 - 3i, \;\; c = -1 + 2i$$

Starter med å regne ut $b^2 - 4ac$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (1 - 3i)^2 - 4i(-1 + 2i) \\ &= 1 - 6i + 9i^2 + 4i - 8i^2 \\ &= -2i \end{aligned}$$

Finn løysningen på $\pm\sqrt{-2i}$ ved å gjøre om til polarform

$$r = 2, \qquad \theta = \frac{3}{2}\pi$$

$$\pm\sqrt{-2i} = \pm(2e^{i\frac{3}{2}\pi})^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{2}(cos(\tfrac{3}{4}\pi) + i\,sin(\tfrac{3}{4}\pi)) = \pm(-1 + i)$$

Ligningen er nå

$$z = \frac{-1 + 3i \pm (-1 + i)}{2i}$$

Det positive fortegnet gir

$$z = \frac{-1 + 3i - 1 + i}{2i} = \frac{-1 + 2i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = 2 + i$$

Det negative fortegnet gir

$$z = \frac{-1 + 3i + 1 - i}{2i} = \frac{2i}{2i} = 1$$

Ligningen har de to løsningene

$$z = 2 + i \qquad og \qquad z = 1.$$

3.8.1 Oppgaver med løsningsforslag

1) Løs ligningen:

$$z^6 - 7z^3 - 8 = 0$$

Setter $z^3 = u$

$$u^2 - 7u - 8 = 0$$

Skriver om ligningen så eg kan bruke 2. Kvadratsetning på den

$$u^2 - 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot u + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 8 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(u - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$u - \frac{7}{2} = \pm\sqrt{\frac{81}{4}}$$

$$u = \frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}$$

$$u = 8 \qquad eller \qquad u = -1$$

Setter inn $u = z^3$ og løyser først for $u = 8$

$$z^3 = 8, \qquad r = 8, \qquad \theta = 2\pi$$

$$z_0 = (8e^{i2\pi})^{\frac{1}{3}} = 2e^{i\frac{2}{3}\pi} = 2(cos\tfrac{2}{3}\pi + i\, sin\tfrac{2}{3}\pi) = -1 + i\sqrt{3}$$
$$z_1 = z_0 e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i(\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi)} = 2e^{\frac{4}{3}\pi} = -1 - i\sqrt{3}$$
$$z_2 = z_1 e^{i\frac{2}{3}\pi} = 2e^{i2\pi} = 2$$

Løyser så for $u = -1$

$$z^3 = -1, \qquad r = 1, \qquad \theta = \pi$$

$$z_3 = \sqrt[3]{-1} = \left(e^{i\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_4 = z_3 e^{i\frac{2}{3}\pi} = e^{i\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi\right)} = e^{i\pi} = -1$$
$$z_5 = z_4 e^{i\frac{2}{3}\pi} = e^{i\left(\frac{2}{3}\pi + \pi\right)} = e^{i\frac{5}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3.9 Faktorisering

Teorem 3.4 (Alebraens fundamentalteorem)**.**
Ethvert polynom kan faktoriseres ved hjelp av komplekse førstegradsfaktorer. Mer nøyaktig, anta at

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

er et polynom av grad $n \geq 1$ med komplekse koeffisienter a_n og $a_n \neq 0$
Da finnes n komplekse tall $z_1, z_2, ..., z_n$ slik at

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)(z - z_n)$$

3.10 Visere

Alle komplekse tall kan skrives på formen

$$A\,e^{i\theta} = \underbrace{A\,cos\theta}_{Re(Ae^{i\theta})} + \underbrace{i\,A\,sin\theta}_{Im(Ae^{i\theta})} \qquad \theta\ [Radianer] \tag{3}$$

Alle sinusformede bølgefunksjoner kan skrives på formen.
(Husk $sin\theta = cos(\theta - \frac{\pi}{2})$)

$$v(t) = A\,cos(\overset{\overset{\text{vinkelfrekvens}}{\downarrow}}{\omega} t + \underset{\underset{\text{fasevinkel}}{\uparrow}}{\phi})$$

$$v(t) = Re\left(Ae^{i(\omega t+\phi)}\right) = Re\Big(\underbrace{Ae^{i\phi}}_{viser}\,e^{i\omega t}\Big)$$

Definisjon 3.8. Viser er den delen av spenningen på kompleks form som inneholder A og fasevinkel ϕ

$$\mathbf{V} = Ae^{i\phi}$$

I elektrofag bruker man gjerne fasen i grader og innfører ny skrivemåte for dette

$$Ae^{i\phi} \text{ skrives da } A\underline{/\phi^\circ}$$

Eksempel 3.3.

$$2\underline{/45^\circ} \text{ er en viser}$$

$$\text{Amplitude } 2,\ \text{Fasevinkel } 45^\circ$$

Vil ofte summere mange sinusformede funksjoner y_i med samme frekvens ω men ulik amlitude/fase

$$y_i = a_i e^{i\phi_i} e^{ie^{i\omega t}}$$
$$y_1 + y_2 + ... + y_n = \underbrace{(A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} + A_n e^{e^{i\phi_n}})}_{\text{Sum av viserene}} e^{i\omega t}$$

Trenger da å sumere

$$\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + ... + \mathbf{Y}_n \text{ for å finne dette}$$

Eksempel 3.4. Legg sammen funksjonene

$$y_1 = 20cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$y_2 = 40cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Uten visere:

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 &= 20\left(cos\omega t\, cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + sin\omega t\, sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&+ 40\left(cos\omega t\, cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - sin\omega t\, sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= 20\left(cos\omega t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + sin\omega t \cdot \frac{1}{2}\right) \\
&+ 40\left(cos\omega t \cdot \frac{1}{2} - sin\omega t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 37.32cos\omega t - 24.64sin\omega t = Acos(\omega t + \phi) = Acos\omega t\, cos\phi - Asin\omega t\, sin\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\, cos\phi &= 37.32 \\
A\, sin\phi &= 24.64 \\
(A\, cos\phi)^2 + (A\, sin\phi)^2 &= 37.32^2 + 24.64^2 = 2000 \\
A^2(cos^2\phi + sin^2\phi) &= 2000 \\
A^2 &= 2000 \\
A &= \underline{44.72} \\
\frac{A\, sin\phi}{A\, cos\phi} &= \frac{24.64}{37.32} \to tan\phi = 0.660 \to \phi = 0.584 \\
y_1 + y_2 &= \underline{\underline{44.72cos(\omega t + 0.584)}}
\end{aligned}$$

Ved visere:

$$\mathbf{Y}_1 = 20\underline{/-30^\circ} \qquad \mathbf{Y}_2 = 40\underline{/60^\circ}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_1 &= 20\,(cos(-30^\circ) + i\,sin(-30^\circ)) = 10\sqrt{3} - 10i \\
\mathbf{Y}_2 &= 40\,(cos(60^\circ) + i\,sin(60^\circ)) = 20 + 20\sqrt{3}i \\
\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 &= (10\sqrt{3} + 20) + (20\sqrt{3} - 10)i = 37.32 + 24.64i
\end{aligned}$$

$$A = \sqrt{37.32^2 + 24.64^2} = 44.72$$

$$tan\phi = \frac{24.64}{37.32} = 0.660 \rightarrow \phi = 33.43^\circ$$

$$\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 = 44.72\underline{/33.43^\circ}$$

4 Følger

Definisjon 4.1. En tallfølge er en oppstilling av tall i rekkefølge.

$$a_1, a_2, \ ..., a_n, \ ...$$

Følgen består av relle tall a_n, kalt leddene i følgen.

Hvis følgen har et endelig antall ledd er følgen endelig
Hvis følgen har et uendelig antall ledd er følgen uendelig

Eksempel 4.1. Følgen

$$1, 3, 9, 6, 5, 4, 2, 3$$

er endelig, mens partallene

$$2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...$$

danner en uendelig følge.

Vi bruker notasjonen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ for følgen $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Følgen av partall kan da skrives som $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$

Eksempel 4.2 (Div. følger)**.**

- Alle oddetallene $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$ er følgen
$$1, 3, 5, 7, ..., 2n-1, ...$$
- Brøkene $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ er følgen
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$$
- De samme brøkene, men med alternerende (vekslende) fortegn. $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, er følgen
$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ...$$
- $\left\{\frac{1}{10^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ er følgen
$$0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ...$$
- Husk at $n!$ er produktet av tallene opp til n, så $\left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ er følgen
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, ...$$
- $\left\{\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ er følgen
$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{20}, ...$$
- $\left\{sin\frac{n\pi}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ er følgen
$$1, 0, -1, 0, ...$$
- $\{1+(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ er følgen
$$0, 2, 0, 2, ...$$
- Primtallene er følgen
$$2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$$
- Desimalutvikling til π, avkortet til n desimaler, er følgen
$$3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, ...$$

Eksempel 4.3 (Følge gitt rekursivt).
Fibonacci-følgen er gitt slik:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ \ og\ \ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ \ for\ \ n \geq 3$$

Dette gir følgen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

Definisjon 4.2 (Begreper som beskriver følger).
En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kalles

- oppad begrenset dersom det finnes et tall M slik at $a_n \leq M$ for alle n
- nedad begrenset dersom det finnes et tall M slik at $a_n \geq -M$ for alle n
- begrenset dersom den er begrenset både nedad og oppad
- voksende dersom $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_{n+1} \leq ...$
- strengt voksende dersom $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{n+1} < ...$
- avtagende dersom $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_{n+1} \geq ...$
- strengt avtagende dersom $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_{n+1} > ...$
- monoton dersom den er enten voksende elle avtagende
- positiv dersom $a_n > 0$ for all n
- alternerende dersom leddene $a_1, a_3, ..., a_{2n-1}, ...$ har motsatt fortegn av leddene $a_2, a_4, ..., a_{2n}, ...$

4.1 Grenseverdi for følger

Definisjon 4.3. $\{a_n\}_{n+1}^{\infty}$ er en følge. Følgen konvergerer (mot L) dersom det finnes et tall L slik at vi kan få a_n så nær L vi ønsker ved å velge n tilstrekelig stor. Vi skriver da

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

og vi sier at følgen konvergerer mot L, og at L er følgen grenseverdi. Hvis følgen ikke konvergerer, sier vi at den divergerer.

Eksempel 4.4.

$$a_n = \frac{1}{n^2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Følgen konvergerer mot 0.

Eksempel 4.5.

$$a_n = n^2 \qquad \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$$

Følgen divergerer mot uendelig.

Eksempel 4.6.

$$a_n = (-1)^n \qquad a_n : 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...$$

$\lim_{n\to\infty} a_n$ eksisterer ikke. Følgen divergerer.

4.2 Divergens mot uendelig

Definisjon 4.4. Vi ser at tallfølgen $\{a_n\}_{n+1}^{\infty}$ divergerer mot uendelig dersom vi kan tvinge a_n til å bli så stor vi vil bare ved å kreve at n er tilstrekkelig stor, og skriver da

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Tilsvarende sier vi at følgen divergerer mot minus uendelig dersom vi kan tvinge a_n til å bli så negativ vi vil bare ved å kreve at n er tilstrekelig stor, og skriver da

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Eksempel 4.7.

$$a_n = n! \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Eksempel 4.8.

$$a_n = 1 - e^n \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

4.3 Regneregler for følger

Teorem 4.1. Hvis grensene $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ eksisterer, og c er en konstant, har vi:

1. $\lim_{n\to\infty} ca_n = cA$
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$
4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$, forutsatt at $B \neq 0$
5. $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A)$, forutsatt at funksjonen $f(x)$ er kontinuerlig i $x = A$

Teorem 4.2. La $f(x)$ være en funksjon med $f(n) = a_n$ for alle naturlige tall n. Hvis
$\lim_{n\to\infty} f(x) = L, \quad$ så er $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = L$

Teorem 4.3 (Skviseteoremet for følger)**.**
Hvis $a_n \leq b_n \leq c_n$ for alle n. og

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$$

er også $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

Eksempel 4.9. Vi skal vise at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n cos\, n}{n^2} = 0$$

Dette følger greit av skviseteoremet fordi

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n cos\, n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

og fordi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

Teorem 4.4 (Konvergens av begrensede monotone følger).
Enhver voksende følge som er oppad begrenset, konvergerer, og enhver avtagende følge som er nedead begrenset, konvergerer

Eksempel 4.10.

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

Følgen er avtagende $a_{n+1} < a_n$
Følgen er nedad begrenset $a_n > 1$
$\rightarrow$ Følgen konvergerer (mot 1)

Eksempel 4.11.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

5 Definisjon av rekke

Definisjon 5.1. En rekke er en sum av uendelig mange ledd:

$$\sum_{n=1}^{\infty} = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

Eksempel 5.1.

$$\text{Tallfølge: } a_n = \frac{1}{2^n} \qquad \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...$$

$$\text{Rekke: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$$

5.1 Summen av en rekke

Definisjon 5.2. Den N-te *delsummen* av en rekke er summen av de N første leddene:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Definisjon 5.3. Dersom tallfølgen $\{S_n\}$ er konvergent sier vi at rekken $\sum_{n=1}^{\infty}$ er konvergent. Hvis ikke sier vi at rekken divergerer.

5.2 Geometriske rekker

Definisjon 5.4. Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kalles en *geometrisk rekke* dersom hvert ledd etter det første er et fast multiplum av det foregående ledd, dvs. $a_{n+1} = a_n \cdot r$. Tallet r kalles *kvotienten*. Det generelle leddet kan skrives $a_n = ar^{n-1}$, der $a = a_1$ er det første leddet. Dette betyr at en geometrisk rekke er på formen

$$a + a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$$

Definisjon 5.5. Hvis $|r| < 1$ vil den geometriske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$ konvergere. summen er

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Rekken divergere hvis $|r| \geq 1$. For $r \neq 1$ har vi følgende uttrykk for delsummene:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a \cdot r^{n-1} = \frac{a(1-r^N)}{(1-r)}$$

Regel 5.

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_n = r^{n-1}$$

a er det første leddet!

Eksempel 5.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{1 \cdot \frac{1}{2}}_{a_1} \left(\overset{\overset{\text{r}}{\downarrow}}{\frac{1}{2}}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{1}}$$

5.2.1 Oppgaver med løsningsforslag

1)

Avgjør om rekken konvergerer, hvis den gjør det, finn summen.

$$16 + 8 + 4 + 2 + 1 + ...$$

$$a_1 = 16$$

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Sjekk og at r er lik for alle leddene. Sjekk så om rekken konvergerer:

$$|r| = \frac{1}{2} \qquad |r| < 1 \rightarrow \text{ Den konvergerer!}$$

Finner så summen til rekken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = 32$$

2)

I en geometrisk rekke er det andre leddet lik 6 og det tredje leddet lik 4. Avgjør om rekken konvergerer, og finn i så fall summen.

$$a_2 = 6 \;\; a_3 = 4$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{r} \rightarrow a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{6}{\frac{2}{3}} = 9$$

Sjekker om rekken konvergerer

$$|r| = \frac{2}{3} \qquad |r| < 1 \rightarrow \text{ Den konvergerer!}$$

Finner så summen til rekken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{9}{1-\frac{2}{3}} = 27$$

3)

I en geometrisk rekke er det tredje leddet lik 576 og det sjette leddet lik 243. Avgjør om rekken konvergerer, og finn i så fall summen.

$$a_3 = 576 \qquad a_6 = 243$$

Setter opp to ligninger med to ukjente:

$$a_1 \cdot r^2 = 576 \text{ og } a_1 \cdot r^5 = 243$$

Løyser første for a

$$a_1 = \frac{576}{r^2}$$

Setter den inn i den andre

$$\begin{aligned} a_1 \cdot r^5 &= 243 \\ \frac{576}{r^2} \cdot r^5 &= 243 \\ r &= \sqrt[3]{\frac{243}{576}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Sjekker om rekken konvergerer

$$|r| = \frac{3}{4} \qquad |r| < 1 \rightarrow \text{ Den konvergerer!}$$

Finner a:

$$a_2 = \frac{a_3}{r} = \frac{576}{\frac{3}{4}} = 768$$

$$a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{768}{\frac{3}{4}} = 1024$$

Finner til slutt summen av rekken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{1024}{1-\frac{3}{4}} = 4096$$

4)

I en konvergent geometrisk rekke med sum lik 4 er andre ledd lik -3. Bestem det første leddet i denne rekken.

$$1.\ \frac{a_1}{1-r} = 4 \qquad 2.\ r = \frac{a_2}{a_1} \qquad a_2 = -3$$

Skal først finne r. Snur på ligningen 1

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{1-r} &= 4 \\ a_1 &= 4(1-r) \end{aligned}$$

setter inn i ligning 2

$$\begin{aligned} r &= \frac{a_2}{a_1} \\ r &= \frac{-3}{4(1-r)} \\ 4r - r^2 &= -3 \\ r^2 - r &= \frac{3}{4} \\ r^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} r + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ left(r - \frac{1}{2} right)^2 &= 1 \\ r &= \frac{1}{2} \pm 1 \end{aligned}$$

$$r = -\frac{1}{2} \qquad \text{eller} \qquad r = \frac{3}{2}$$

For at rekken skal konvergere må vi velge $r = -\frac{1}{2}$, setter så inn i ligning 2 og løyser den:

$$\begin{aligned} r &= \frac{a_2}{a_1} \\ a_1 &= \frac{a_2}{r} \\ a_1 &= \frac{-3}{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{6}} \end{aligned}$$

5)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{5}{4^n}$$

$$a = a_0 = 5 \qquad a_1 = -\frac{5}{4}$$

$$r = \frac{a_1}{a_0} = \frac{-\frac{5}{4}}{5} = -\frac{1}{4}$$

summen er

$$\frac{5}{1-(-\frac{1}{4})} = 4$$

6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$$

Bruker divergenstesten for å sjå om rekka konvergerer:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-2n} = 0 \to Konvergerer$$

Skriver opp litt av rekka for å sjå etter mønster

$$e^0 + e^{-2} + e^{-4} + e^{-8} + ...$$

Ser at dette må være ei geometrisk rekke

$$a = a_1 = e^0 = 1$$

$$r = \frac{e^{-4}}{e^{-2}} = e^{-4-(-2)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Summen blir

$$\frac{1}{1-\frac{1}{e^2}} = \frac{e^2}{e^2-1}$$

5.3 Regneregler for rekker

Teorem 5.1 (Ledvis addisjon og multiplikasjon)**.** Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ og c er et reelt tall. Da er

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA, \text{ der c er n konstant}$$

Teorem 5.2. Hvis $a_n \leq b_n$ for alle n

1. Hvis begge rekkene konvergerer, er
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \leq B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2. Om $a_n > 0$ for alle n, og $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ konvergerer, er også $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

3. Om $a_n > 0$ for alle n, og $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer mot uendelig, vil også $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergere mot uendelig

5.4 Oppgaver med løsningsforslag

1)

Finn summen til $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$

Må bruke delbrøkoppspalting for å få eit uttrykk som er letter å jobbe med

$$
\begin{aligned}
n^2+5n+6 &= 0 \\
(n+\frac{5}{2})^2 &= \frac{1}{4} \\
n = -2 \quad n &= -3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(n+2)(n+3)} &= \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3} \\
1 &= A(n+3) + B(n+2) \\
n = -2 &\rightarrow A = 1 \\
n = -3 &\rightarrow B = -1
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+5n+6} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)
$$

$$
\begin{aligned}
S_k &= \left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{6}} \right) + ... + \left(\cancel{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1} \right) \\
S_k &= \frac{1}{3} - \frac{1}{k+1}
\end{aligned}
$$

Når $k \rightarrow \infty$ vil $S_k \rightarrow \frac{1}{3}$, så

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}
$$

6 Konvergenstesting og summering av rekker

Ikke alle rekker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er lette å summere. Det finnes allikevel måter å teste om en rekke er konvergent eller divergent uten å måtte beregne summen av rekken.

6.1 Divergenstesten

Teorem 6.1. Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en uendelig rekke og

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

divergerer rekken. Den divergerer også når grenseverdien ikke eksisterer

Eksempel 6.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$$

divergerer, $a_n = 2^n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Grenseverdie eksisterer ikke

Eksempel 6.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

divergerer fordi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 \neq 0$$

Eksempel 6.3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

er grensen av leddene lik null ved utregningen

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Divergenstesten gir ingen konklusjon. Derfor kan vi foreløpig ikke avgjøre om rekken konvergerer eller ikke. At leddene går mot 0 er en nødvendig betingelse for konvergens, men ikke tilstrekkelig. Vi skal snart se at denne rekken faktisk divergerer.

6.2 Leibniz-testen

Vi skal nå se på en test for rekker der leddene vekselvis er poisitve og negative. Disse rekkene er så vanlige at vi gir dem et navn:

Definisjon 6.1. En rekke kallesn *alternerende* dersom to påfølgende ledd alltid har motsatt fortegn. Alternerende rekker kan skrives på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

med alle $a_n > 0$ eller alle $a_n < 0$

Teorem 6.2 (Leibniz-testen)**.** Anta at $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ er en alternerende rekke. Hvis

- Alle a_n er positive.
- størrelsen $|a_n|$ på leddene er avtagende.

  $|a_n| > |a_2| > ... > |a_n| > |a_{n+1}| > ...,$
  $$a_{n+1} \leq a_n$$
- leddene går mot null, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$

er rekken konvergent. Hvis en rekke konvergerer ved denne testen, vil feilen E_N ved å avbryte summeringen etter N ledd oppfylle ulikheten

$$|E_N| > |a_{N+1}|$$

6.2.1 Oppgaver med løsningforslag

1. Konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0 \text{ for alle } n \geq 1$$

$$n+1 \geq n \Rightarrow \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Rekken konvergerer!

2. Konvergerer rekken $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{4}{(ln\, n)^2}$

$$a_n = \frac{4}{(ln\, n)^2} > 0 \text{ for alle } n \geq 2$$

$$\begin{aligned} &ln(n+1) \geq ln\, n \Rightarrow (ln(n+1))^2 \geq (ln\, n)^2 \\ &\qquad \Rightarrow \frac{1}{(ln(n+1))^2} \leq \frac{1}{(ln\, n)^2} \Rightarrow \frac{4}{(ln(n+1))^2} \leq \frac{4}{(ln\, n)^2} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{(ln\, n)^2} = 0$$

Rekken konvergerer!

6.3 P-rekke

Teorem 6.3. Rekken

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

konvergerer for $p > 1$ og divergerer for $p \leq 1$

6.4 Integraltesten

Det kan være vanskelig å overbevise seg om at rekker der leddene går mot null, likevel kan divergere. Dette eksempelet viser helt konkret at det skjer med rekken $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. La oss se på følgen av delsummer.

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

I samme koordinatsystem som grafen til $f(x) = \frac{1}{x}$, tegner vi bokser med høyden $a_n = \frac{1}{n}$ og linjestykket $[n, n+1]$ som grunnflate. Vi ser at arealet av boksene er større enn arealet under grafen.

$$S_n > \int_1^{N+1} f(x)dx = [lnx]_1^{N+1} = ln(N+1)$$

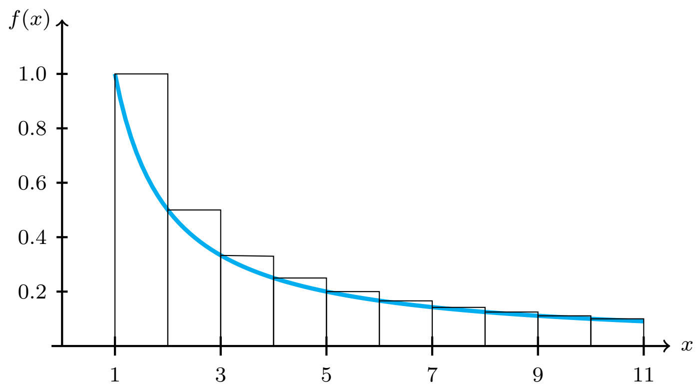


Figure 2: $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{10} > \int_1^{11} \frac{1}{x} dx$

Når vi lar $N \to \infty$, ser vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{N\to\infty} \geq \lim_{N\to\infty} ln(N+1) = \infty$$

så rekken divergerer.

Teorem 6.4. La $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke. Finn en funksjon $f : [1, \infty) \to \Re$, med $f(n) = a_n$. Anta at $f(x)$ er avtagende i det minste for $x \geq N$. Da konvergerer rekken $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hvis og bare hvis integralet $\int_N^{\infty} dx$ konvergerer. Hvis rekken konvergerer ved denne testen, vil feilen vi gjør ved å avbryte summeringen etter N ledd, oppfylle følgende ulikhet:

$$0 \leq E_N \leq \int\limits_N^{\infty} f(x)dx$$

Eksempel 6.4. Divergerer elle konvergerer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$$

Løser den med integraltesten

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x+4}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x+4}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[ln|x+4|\right]_1^b$$

$$\lim_{b\to\infty} (ln|b+4| - ln5) = \infty \to \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x+4}\,dx \text{ divergerer } \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} \text{ divergerer}$$

6.5 Sammenligningstesten

Teorem 6.5. La $\sum a_n$ være en positiv rekke som skal testes for konvergens.

1. Dersom du finner en positiv konvergent rekke $\sum b_n$ med $a_n \leq b_n$ konvergerer også rekken $\sum a_n$
2. Dersom vi finner en positiv divergent rekke $\sum b_n$ med $a_n \geq b_n$, divergerer også rekken $\sum a_n$

Setning 6.1.

1. Når du skal teste for **konvergens** skal du velge en b_n som er **større** enn a_n
2. Når du skal teste for **divergens** skal du velge en b_n som er **lavere** enn a_n

6.5.1 Oppgaver med løsningsforslag

Bruk sammenligningstesten for å finne ut om rekka divergerer elle konvergerer

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+30}$

Sammenligner med $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, som er en konvergent p-rekke, $p = 2 > 1$.

For $n \geq 1$ har vi:

$$n^2 + 30 \geq n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2+30} \leq \frac{1}{n^2}$$

Utifrå sammenligningstesetn konvergerer rekken

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n}$

Sammenligner med $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, som er en divergent p-rekke, $p = 1 \leq 1$

$$n^2 - n \leq n^2 \Rightarrow \frac{n}{n^2-1} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{n+2}{n^2-n} \geq \frac{n}{n^2-1} \geq \frac{1}{n}$$

Rekken diveregrer

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos^2 n}{n^{\frac{3}{2}}}$

Sammenligner med $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ som er en konvergent p-rekke, $p = \frac{3}{2} > 1$

$$0 \leq cos^2 n \leq 1 \Rightarrow \frac{cos^2 n}{n^{\frac{n}{3}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Rekken konvergerer

6.6 Grensesammenligningstesten

Teorem 6.6. La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være positive rekker.

1. Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer og at
$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty,$$
Da konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2. Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerer og at
$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \infty,$$
Da diveregerer også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

For å finne b_n for p-rekker, brukes denne metoden:

Finn b_n til $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$

For å finne b_n tar vi den dei leddene i teller og nevner med høgest potens for n og forenkler. Vi ser her at $\frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{n}{n^2 \cdot n^{\frac{1}{2}}} = \frac{n}{n^{2+\frac{1}{2}}} = \frac{n}{n^{\frac{5}{2}}}$

Vi tar no å trekker fra potensen til n i teller, både for n i teller og nevner. $\frac{n^{1-1}}{n^{\frac{5}{2}-1}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Denne skal vi bruke som b_n

$$b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

6.7 Forholdstesten

Definisjon 6.2 (Forholdstesten)**.** La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en rekke. Anta at grensen

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

eksisterer eller er ∞. Da gjelder:

1. Dersom $L < 1$, konvergerer rekken.
2. Dersom $L > 1$, divergerer rekken.
3. Dersom $L = 1$, gir testen ingen konklusjon, prøv noe annet.

Hvis rekken konvergerer ved punkt 1, og r er et tall slik at

$$1 > r \geq \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \qquad \text{for alle } n \geq N,$$

Vil feilen ved å avbryte summeringen etter N ledd oppfylle ulikheten

$$|E_N| \leq \frac{|a_{N+1}|}{1-r}$$

Eksempel 6.5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{n!}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0$$

Rekken konvergerer!

Eksempel 6.6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Kan ikke konkludere

Eksempel 6.7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \qquad a_n = \frac{2^n}{n^2}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} = 2$$

Rekken diveregerer

6.8 Rottesten

Teorem 6.7. La $\sum a_n$ være en rekke og se på grenseverdien

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

1. Dersom grenseverdien eksisterer og $L < 1$, konvergerer rekken $\sum a_n$ absolutt.
2. Dersom grenseverdien eksisterer (også $L = \infty$) og $L > 1$, divergerer rekken $\sum a_n$.
3. Dersom grenseverdien ikke eksisterer eller $L = 1$, gir testen ingen konklusjon.

6.9 Spesielle grenseverdier

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sinx}{x} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} tan^{-1}\,x = \frac{\pi}{2}$

6.10 Oppsumering

Table 1: Konvergenstester

Rekke(test)	**Brukes på**	**Konvergens om**	**Divergens om**	**Kommentar**
Geometriske rekker	$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$	$\lvert r\rvert < 1$ eller $a = 0$	$\lvert r\rvert \geq 1$ og $a \neq 0$	Hvis $\lvert r\rvert < 1$, er $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$
p-rekker	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	$p > 1$	$p \leq 1$	Nyttig for sammenligningstester
nte-leddstest	Alle rekker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Kan ikke brukes	$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$	Kan ikke brukes for å vise konvergens
Integraltest	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, der $a_= f(n)$ med f positiv, kontinuerlig, avtagende på $[N, \infty]$	$\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerer	$\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ divergerer	Brukes når du ser at du kan antiderivere f. Integralverdien er ikke summen av rekken.
Sammenligningstest	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n \geq 0$	$a_n \leq b_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer	$a_n \geq b_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerer	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er gitt, du velger $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
Grensesammenligningstest	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n > 0$	$0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, $b_n > 0$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer	$0 < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \infty$, $b_n > 0$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerer	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gitt, du velger $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Litt svakere enn *sammenligningstesten* , men enklere å bruke
Forholdstest	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n > 0$	$0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert < 1$	$1 < \lim\limits_{n\to\infty} \left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert \leq \infty$	God om $n!$ eller potenser an n dukker opp. Ingen konklusjon om $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
Rottest	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n > 0$	$0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} < 1$	$1 < \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} \leq \infty$	God om potenser ab n dukker opp. Litt sterkere enn *forholdstesten*, vanskeligere å bruke. Ingen konklusjon om $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$
Alternerende rekkers-test	Alternerende rekker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dvs. $\lvert a_n\rvert > \lvert a_{n+1}\rvert$	$\lvert a_n\rvert$ avtagende og $\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = 0$	Kan ikke brukes	Kan ikke brukes for å vise divergens

6.11 Tips for rekkefølge

1. Sjekk om rekken er geometrisk, p-rekke eller en (opplagt) teleskoprekke.

2. Sjekk med nte-leddstest (sparer ofte tid!).

3. Om alle ledd er positive:

   (a) Forsøk med *forholdstest*, spesielt hvis $n!$ eller potenser av n dukker opp. (Problem: enten er grensen vanskelig å beregne, eller gir testen 1 som svar og ingen konklusjon.)

   (b) Forsøk å sjekke (i hodet/på kladd) hva leddene i rekken "ligner på" for store n. Dette gir tips om en rekke $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ du kan bruke de to sammenligningstestene på. Bruk gjerne *grensesammenligningstesten* først (lettere). Om den ikke fungerer, kan kanskje *sammenligningstesten* gi svar

   (c) Bruk *integraltest* om du ser at leddene ligner på en funksjon du kan integrere. Brukes ofte når de andre testene ikke fungerer, f.eks. hvis trigonometriske funksjoner eller logaritmer dukker opp. Ubrukelig om $n!$ dukker opp.

   (d) Forsøk med *rottest*, spesielt hvis potenser av n dukker opp og *forholdstest* ikke ga svar. Denne kan likevel gi svar (men vi foretrekker å sjekke med *forholdstest* først, fordi den er lettere å bruke.)

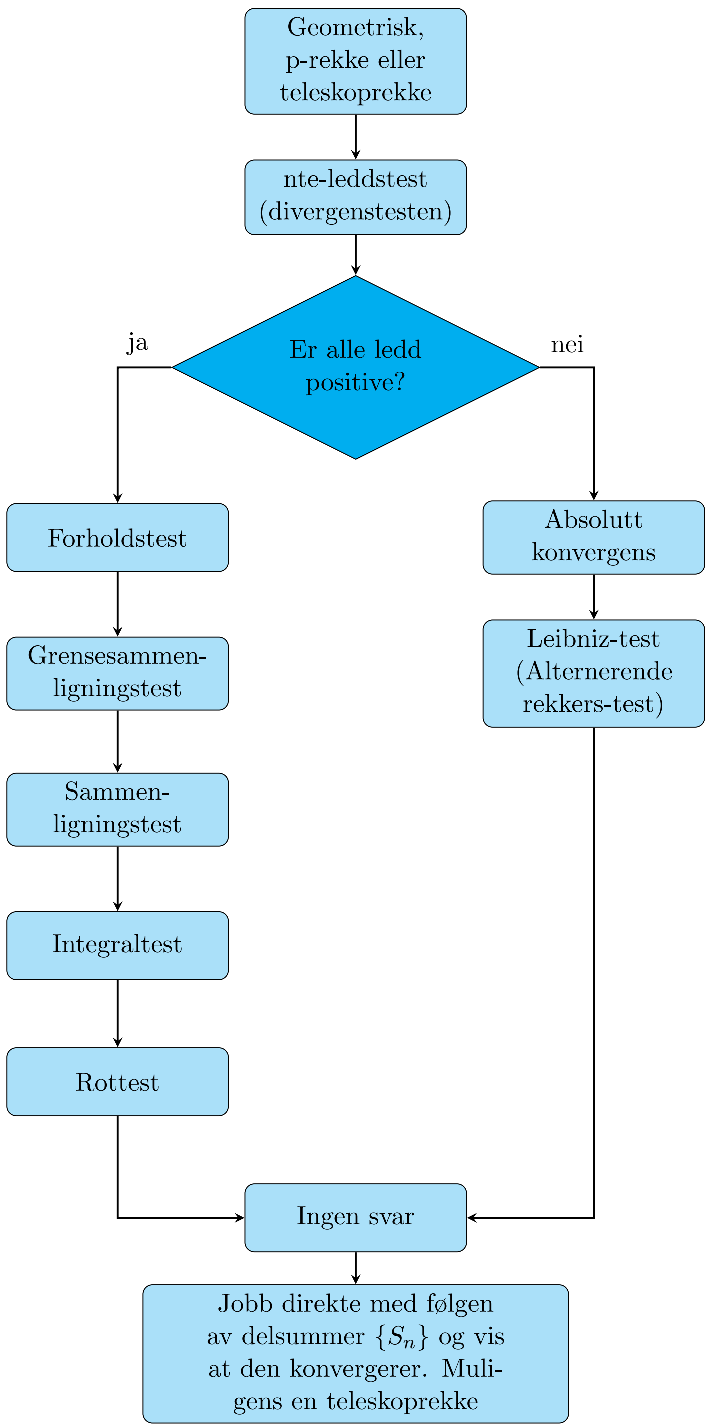
4. Om ikke alle ledd er positive:

   (a) Sjekk *absolutt konvergens* med en av testene over.

   (b) Om rekken er alternerende, bruk *Alternerende rekkers-test*

5. Fremdeles intet svar? Da må du nesten jobbe direkte med følgen av delsummer $\{S_n\}$ og vise at den konvergerer. Muligens er det en teleskoprekke, slik at S_n får et enkelt uttrykk, men du har oversett det så langt.

Lyder problemet "For hvilke x konvergerer rekken?" Start da med $forholdstest$. Bruk så andre tester i "grensepunktene" der denne ikke gir svar.


Geometrisk, p-rekke eller teleskoprekke
nte-leddstest (divergenstesten)
Er alle ledd positive?
ja
nei
Forholdstest
Grensesammen-ligningstest
Sammen-ligningstest
Integraltest
Rottest
Absolutt konvergens
Leibniz-test (Alternerende rekkers-test)
Ingen svar
Jobb direkte med følgen av delsummer $\{S_n\}$ og vis at den konvergerer. Muligens en teleskoprekke

7 Potensrekker

Definisjon 7.1 (Potensrekke)**.** En *potensrekke* omkring $x = a$ er en rekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + ...,$$

der x er en variabel, mens a og c_n er (reelle) konstanter. Vi kaller a og c_n for henholdsvis *sentrum* og *koeffisientene* til potensrekken.

En potensrekke omkring $x = 0$ har formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ...$$

Teorem 7.1. La

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

være en potensrekke. Da har vi tre muligheter

1. Potensrekken konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$.
2. Potensrekken konvergerer bare for $x = a$ (og er lik c_0 siden $(x-a)^n = 0$ når $x = a$).
3. Potensrekken konvergerer for alle x i et endelig intervall I (og $x = a$ er midtpunktet til dette intervallet).

Setning 7.1. Teste en potensrekke for konvergens

1. Bruk *forholdstesten* eller *rottesten* for å finne intervallet der rekken konvergerer absolutt. Ordinæt et åpent intervall

$$|x - a| < R \qquad \text{eller} \qquad a - R < x < a + R$$

2. Hvis intervallet av absolutt konvergens er endelig, test for konvergens eller divergens ved hvert endepunkt. Bruk sammenligningststen, Integraltesten, eller Leibniz-testen.

3. Hvis intervallet for absolutt konvergens er $a - R < x < a + R$, divergerer rekken for $|x - a| > R$ (den konvergerer ikke en gang betinget) fordi nte ledd ikke nærmer seg null for de verdiene av x.

7.0.1 Oppgaver med løsningsforslag

Finn konvergeringsintervallet til rekkene

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

   Bruker forholdstest

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3x-2)^{\cancel{n}+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{\cancel{(3x-2)^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3x-2)\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})} \right| = |3x-2| < 1$$

$$\begin{aligned} (3x-2) &< 1 \\ 3x &< 3 \\ x &< 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(3x-2) &< 1 \\ -3x+2 &< 1 \\ -3x &< 1 \\ x &> \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{3} < x < 1}}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

Ser at dette er ei geometrisk rekke med $r = \frac{x-2}{10}$. Slipper derfor å bruke forholdstesten. Skal løse likningen $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x-2}{10} \right| < 1$, fordi $|r| < 1$ er betingelsen for at ei geometrisk rekke konvergerer

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-2}{10}\right) &< 1 \\ x-2 &< 10 \\ x &< 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{x-2}{10}\right) &< 1 \\ -x &< 8 \\ x &> -8 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{-8 < x < 12}}$$

8 Taylor-rekker

Definisjon 8.1. La $f(x)$ være en funksjon som er uendelig mange ganger deriverbar i $x = a$.
Taylor-rekken til $f(x)$ i a definert ved

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots .$$

Maclurin-rekken til $f(x)$ er

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots .$$

som er *taylor-rekken* når $x = 0$.

8.1 Taylor-polynom

Delsummene til *Taylor-rekker* kalles *Taylor-polynomer*. Polynomer er enkle å regne med, siden de bare involverer addisjon og multiplikasjon. Datamaskinen kan finne tilnærminger til kompliserte funksjoner ved hjelp av *Taylor-polynomer*.

Definisjon 8.2. Anta at $f(x)$ er en funksjon som minst N ganger deriverbar i a. Da definerer vi *Taylor-polynomet* av N-te orden til $f(x)$ i a ved

$$P_N(x) = \overbrace{\underbrace{\underbrace{f(a)}_{P_0(x)} + f'(a)(x-a)}_{P_1(x)} + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2}^{P_2(x)} + \cdots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!}(x-a)^N$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

8.2 Kjente maclaurinrekker

1.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ for alle } x.$$

2.

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ for alle } x.$$

3.

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ for alle } x.$$

4.

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \text{ for } -1 < x \leq 1.$$

5.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ for } -1 < x < 1.$$

8.3 Nyttige følger

Oddetall $\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$

$$1, 3, 5, 7, \cdots, 2n+1, \cdots$$

Partall $\{2n\}_{n=0}^{\infty}$

$$0, 2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$$

$\{n!\}_{n=0}^{\infty}$

$$1, 1, 2, 6, 24, \cdots$$

$\{2n!\}_{n=0}^{\infty}$

$$2, 2, 4, 12, 48, \cdots$$

$\{3n!\}_{n=0}^{\infty}$

$$3, 3, 6, 18, 72, \cdots$$

$\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$

$$1, -1, 1, -1, \cdots$$

$\left\{(1+x)^{-n-1}\right\}_{n=0}^{\infty}$

$$(1+x)^{-1}, (1+x)^{-2}, (1+x)^{-3}, (1+x)^{-4}, \cdots$$

8.3.1 Oppgaver med løsningsforslag

1. Finn *Taylor-polynomet* til $f(x)$ av tredje grad, om x=a.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 2$$

Løsning:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(x)\frac{2}{x^3}, \qquad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

Setter inn $a = 2$

$$f(2) = \frac{1}{2}, \qquad f'(2) = -\frac{1}{4}, \qquad f''(2)\frac{1}{4}, \qquad f'''(2) = -\frac{3}{8}$$

Setter inn i formelen

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 \\
&= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)(x-2) + \frac{\frac{1}{4}}{2}(x-2)^2 + \frac{-\frac{3}{8}}{6}(x-2)^3 \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3}}
\end{aligned}$$

2. Finn *Maclaurin-rekken* til $f(x) = e^x$

Løsning:

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x \qquad f'''(x) = e^x$$

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 1 \qquad f'''(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad f^n(0) = 1$$

Maclurin-rekken til $f(x)$ er $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Så vi kan sette $f^n(0) = 1$ rett inn i formelen, og vi får

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

3. Finn *Maclaurin-rekken* til $f(x) = cos\, x$

   Løsning:

$$f(x) = cos\, x \qquad f'(x) = -sin\, x \qquad f''(x) = -cos\, x \qquad f'''(x) = sin\, x \qquad f^{(4)}(x) = cos\, x$$

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = 0 \qquad f''(0) = -1 \qquad f'''(0) = 0 \qquad f^{(4)}(0) = 1$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

4. Finn *Maclaurin-rekken* til $f(x) = sin\, x$

   Løsning:

$$f(x) = sin\, x \qquad f'(x) = cos\, x \qquad f''(x) = -sin\, x \qquad f'''(x) = -cos\, x \qquad f^{(4)}(x) = sin\, x$$

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = -1 \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

5. Finn *Maclaurin-rekken* til $f(x) = ln(1+x)$

   Løsning:

$$f(x) = ln(1+x) \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \qquad f^{(5)} = \frac{18}{(1+x)^5}$$

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(x) = -1$$
$$f'''(x) = 2 \qquad f^{(4)}(x) = -6 \qquad f^{(5)} = 18$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \underbrace{0}_{n=0} + \underbrace{x}_{n=1} \underbrace{-\frac{x^2}{2!}}_{n=2} \underbrace{+\frac{2!x^3}{3!}}_{n=3} \underbrace{-\frac{3!x^4}{4!}}_{n=4} + \cdots$$
$$x - \frac{x^2}{2!} + \frac{\cancel{2!}x^3}{3 \cdot \cancel{2}} - \frac{\cancel{3!}x^4}{4 \cdot \cancel{3!}} + \cdots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

6. Finn *Maclaurin-rekken* til $f(x) = e^{-x}$

   Løsning:

   Vi vet at $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ og kan derfor sette $-x$ for x

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

7. Finn *Maclaurin-rekken* til $f(x) = sin\left(\frac{x}{2}\right)$

   Løsning:

   Vi vet at $sin\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ og kan derfor sette inn $\frac{x}{2}$ for x

$$\begin{aligned} sin\left(\frac{2}{x}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 4!} - \cdots \end{aligned}$$

9 Trigonometriske rekker

9.1 Egenskaper til cosinus og sinus (jevn og odde)

9.1.1 Cosinus

Funksjonen $f(x) = \cos x$ er en **jevn** funksjon. Det vil si at den er symmetrisk om **y-aksen**.

Vi har at

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

og derfor er

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta \, d\theta = 0$$

Vi kan se at integralet må være 0 hvis vi ser på kurven $y = \cos x$ for $x = -\pi$ til $x = \pi$

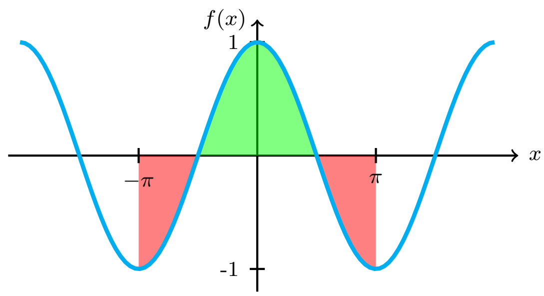


Figure 3: Integralet av $y = \cos x$ for $-\pi \leq x \leq \pi$

Den røde "negative" delen av grafen og den grønne "positive" delen av grafen blir kanselerer hverandre ut. Summen blir 0.

9.1.2 Sinus

Funksjonen $f(x) = \sin x$ er en **odde** funksjon. Det vil si at den er symmetrisk om **origo**. Vi har at

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

og derfor

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 0$$

Igjen ser vi hvorfor illustrert i grafen under.

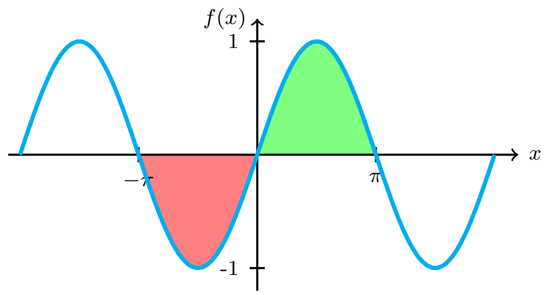


Figure 4: Integralet av $y = \sin x$ for $-\pi \leq x \leq \pi$

Igjen ser vi at den negative røde delen er like stor som den grønne positive delen. Summen blir 0.

9.2 Flere hele π for cosinus og sinus

9.2.1 Cosinus

Vi har funksjonen $y = \cos x$

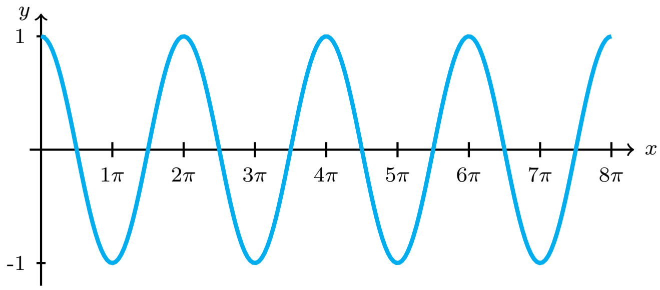


Figure 5: Kurven $y = \cos x$ for $0 \leq x \leq 8\pi$

$$\cos(2n\pi) = 1 \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \text{(alle heltall)}$$
$$\cos\left[(2n-1)\,\pi\right] = -1 \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \text{(alle heltall)}$$
$$\cos(n\pi) = (-1)^n \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \text{(alle heltall)}$$

9.2.2 Sinus

Vi har funksjonen $y = \sin x$

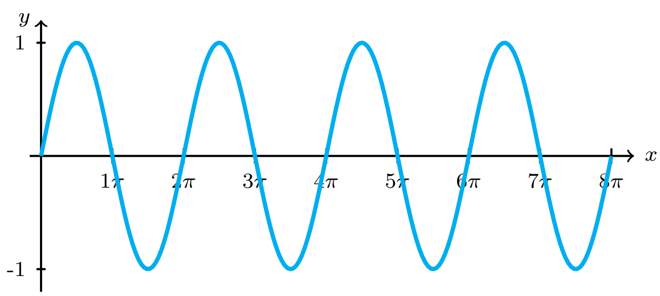


Figure 6: Kurven $y = \sin x$ for $0 \leq x \leq 8\pi$

Fra grafen (eller ved å bruke kalkulator), finner vi ut at:

$$\sin(n\pi) = 0 \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \text{(alle heltall)}$$
$$sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1} \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \text{(alle heltall)}$$

9.3 Noen nyttige integraler

De neste integralene kan vi finne ved å bruke delvis integrasjon. De blir brukt en del i Fourier-rekke oppgaver. Disse er også lagt ved på formelark.

1. $$\int t\cos(nt)\,dt = \frac{\cos(nt)}{n^2} + \frac{t\sin(nt)}{n} = \frac{1}{n^2}(\cos(nt) + nt\sin(nt))$$

2. $$\int t^2\cos(nt)\,dt = -2\frac{\sin(nt)}{n^3} + 2\frac{t\cos(nt)}{n^2} + \frac{t^2\sin(nt)}{n}$$

3. $$\int t\sin(nt)\,dt = \frac{\sin(nt)}{n^2} - \frac{t\cos(nt)}{n} = \frac{1}{n^2}(\sin(nt) - nt\cos(nt))$$

4. $$\int t^2\sin(nt)\,dt = 2\frac{\cos(nt)}{n^3} + 2\frac{t\sin(nt)}{n^2} - \frac{t^2\cos(nt)}{n}$$

9.4 Periodiske funksjoner

Definisjon 9.1. En funksjon $f(x)$ er **periodisk** med **perioden** T når

$$f(x+T) = f(x) \qquad \text{for alle verdier av x.}$$

Prinsipalperioden til $f(x)$ er den minste $T > 0$ for at dette skal gjelde.

Eksempel på periodeiske funksjoner
$f(x) = \sin x$

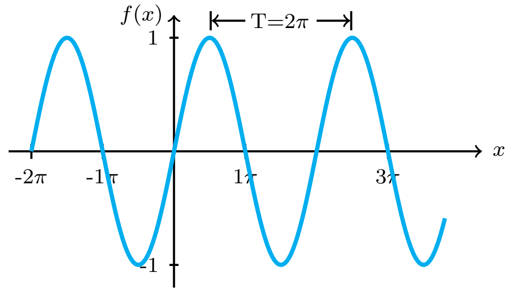


Figure 7: Kurven $y = \sin x$ med periode $= 2\pi$

For $f(x) = \sin x$, har vi: $f(x) = f(x + 2\pi)$. perioden er 2π

Firkantbølge, periode=4

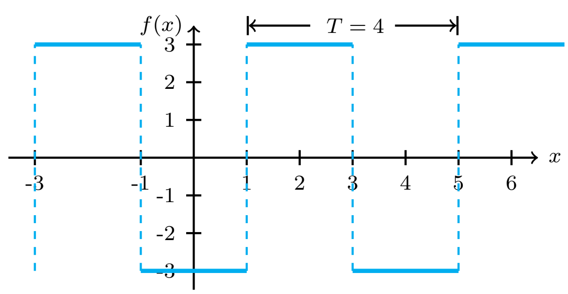


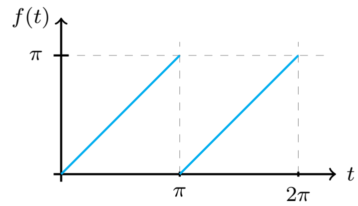
Figure 8: Periodisk firekant bølge funksjon

For denne funksjonene har vi:

$$f(x) = -3 \text{ for } -1 \leq x \text{ og } 3 \text{ for } 1 \leq x \leq 3$$
$$f(x) = f(x+4)$$

Eksempel 9.1. Lag en skisse av følgende funksjon

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{for} \quad 0 \leq t < \pi \\ t - \pi & \text{for} \quad \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$



9.5 Fourier-rekker

Definisjon 9.2. En trigonometrisk rekke med perioden T er en rekke på formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T} \right).$$

Definisjon 9.3. La f være en periodisk funksjon med perioden T, og la $L = \frac{T}{2}$. Da er fourierrekken til f

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

Her er

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx.$$

Vi skal tilnærme funksjoner definert på intervallet $[-\pi,\, \pi]$

Definisjon 9.4. En *trigonometrisk rekke* med perioden 2π er en rekke på formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Definisjon 9.5. La $f(x)$ være en funksjon definert for $x \in [-\pi,\, \pi]$. Forutsatt at integralet eksisterer, definer, definerer vi *Fourier-koeffisiente-ne* ved

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

Fourier-rekken til $f(x)$ er defienert som den trigonometriske rekken

$$Ff(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

der koeffisientene er gitt ved formelene ovenfor.

9.6 Fourier-rekker av jevne funksjoner

For en **jevn** funksjon $f(x)$, definert for $-L$ til L, har vi følgende nyttige snarvei.

Siden

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx$$

og $f(x)$ er jevn, betyr det at integralet vil ha verdi 0. (Som er forklart i 9.1.1).

Så for en Fourier Rekke for en jevn funksjon, har koeffisienten b_n verdi null.

$$b_n = 0$$

Så vi trnger berre å regne ut a_0 og a_n.

En **jevn** funksjon har bare **cosinus** ledd i sin Fourier ekspansjon.

Definisjon 9.6. Fourier-rekke til en **jevn** funksjon

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x) \, dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx,$$

$$Ff(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\cos(n\pi x)}{L}$$

9.7 Fourier-rekker av odde funksjoner

For en **odde** funksjon $f(x)$, definert for $-L$ til L, har vi følgende nyttige snarvei.

Siden

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx$$

Så **null koeffiesientene** i dette tilfellet er:

$$a_0 = 0 \quad \text{og} \quad a_n = 0$$

Så vi trenger berre å regne ut

$$b_n$$

En **odde** funksjon har bare **sinus** ledd i sin Fourier ekspansjon.

Definisjon 9.7. Fourier-rekke til en **odde** funksjon

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx$$

$$Ff(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx.$$

9.8 Halvperiodiske utvidelser

Vi tar for oss halvperiodiske utvidelser. Vi tenker oss at intervallet, 0 til L er en halv periode, og at vi har en funksjon $f(x)$ definert for x i dette intervallet. Uten tillegsopplysninger finnes ingen entydig måte å utvide $f(x)$ til en funksjon med perioden $T = 2L$. Om vi spesifiserer en symmetri - at resultatet skal være enten jevn eller en odde funksjon - blir utvidelsen veldefinert:

9.8.1 Jevn funskjon

La $f(x)$ være definert i intervallet $\langle 0, L\rangle$

$$Ff(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\cos(n\pi x)}{L}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx,$$

$$b_n = 0$$

9.8.2 Odde funskjon

La $f(x)$ være definert i intervallet $\langle 0, L\rangle$

$$Ff(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx.$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0$$

9.9 Konvergens for Fourier-rekker

Setning 9.1 (Fouriers setning)**.** La $f(x)$ være en periodisk funksjon med perioden T som er slik at både $f(x)$ og dens deriverte $f'(x)$ er stykkevis kontinuerlig. Da konvergerer Fourier-rekken $Ff(x)$ mot $f(x)$ i alle de punkter x der f er kontinuerlig

$$Ff(x) = f(x)$$

, og mot

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{n\to a^+} f(x) + \lim_{n\to a^-} f(x)\right]$$

forenklet notasjon

$$\frac{1}{2}\big(f(a^+) + f(a^-)\big)$$

i punkter der f er diskontinuerlig.

9.10 Oppgaver med løsningsforslag

1. La $f(x) = |x|$ for $\in [-\pi, \pi]$ med $f(x + 2\pi)$
   (a) Tegn en skisse av f for intervallet $[-3\pi, 3\pi]$
   (b) Regn ut Fourier-rekken til f
   (c) La
   $$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{for} \quad 0 < x < \pi \\ -1, & \text{for} \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$
   med $g(x + 2\pi) = g(x)$. Ved å differensiere Fourier-rekken i b) finn Fourier-rekken til g
   (d) Hva konvergerer Fourier-rekken av g til i $x = \pi$?
   (e) Bruk Fourier-rekken for g til å finne en rekke som representerer $\frac{\pi}{4}$

   Løsning:

   (a) Skisserer grafen.Ser at dette er en **jevn** grafe utifra symmetrien.

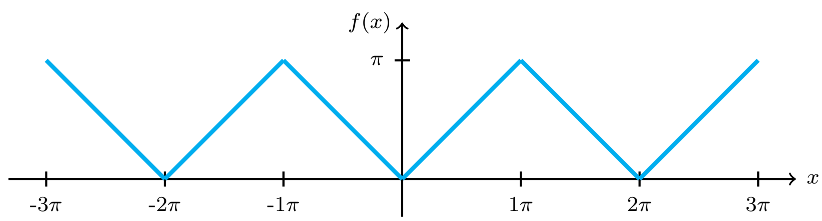


Figure 9: f for intervallet $[-3\pi, 3\pi]$

2. Siden f er **jevn**: $b_n = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \sin(nx)}{n} \right]_0^\pi = \frac{2}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] \\ &= \frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & \text{for n jevn} \\ \frac{-4}{n\pi}, & \text{for n odde} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ff(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [(-1)^n - 1] \cos(nx) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\text{n odde}}^{\infty} \frac{-2}{n^2} \cos(nx) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)}} \end{aligned}$$

3. Ignorerer $x = 0$

   Ser at

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(|x|) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

   og

$$\frac{df}{dx} = g.$$

   Derfor

$$\begin{aligned} Fg(x) &= \frac{d}{dx}\left[Ff(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)\right] \\ &= \underline{\underline{\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\sin((2k-1)x)}} \end{aligned}$$

4. Tegner en skisse av g

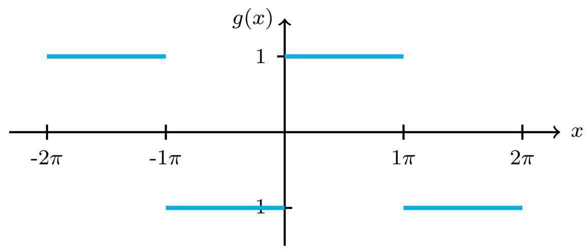


Figure 10: skisse av g

   nå,

$$Fg(\pi) = \frac{1}{2}\left(g(\pi^+) + g(\pi^-)\right) = \frac{1}{2}(-1+1) = \underline{\underline{0}}.$$

5. Finn en verdi av x for å sette inn i Fourier-rekken. Vi velger $x = \frac{\pi}{2}$, siden vi da får et sinus uttrykk som kan forenkles. $sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}$

$$\begin{aligned} Fg\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}(-1)^{k+1} \\ &= g\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \textit{av Fouriers teorem} \\ &= 1 \\ \frac{\pi}{4} &= \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots}} \end{aligned}$$

10 Deifferensligninger

Definisjon 10.1. En ligning mellom forskjellige generelle ledd i en følge kalles en *differensligning.*

Dersom en differensligning involverer $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-d}$, altså om den involverer $d+1$ etterfølgende ledd i følgen, sier vi at ligningen er en differensligning av orden d.

En differensligning av orden d er lineær med konstante koeffisienter dersom den er på formen

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \ldots + a_d y_{n-d=f(n)}$$

der høyre side er en funksjon av n (det vil si at f gir mening uten å tenke på følgen $\{y_n\}$).

En lineær differensligning med konstante koeffisienter er i tillegg homogen dersom høyre side f er lik null.

En differensligning av orden d trenger d startverdier for å bli entydig bestemt, vi må altså vite hva $y_0, y_1, \ldots, y_{d-1}$ er for å få en tallfølge til svar.

10.1 Karakteristisk ligning og homogene differensligninger av andre orden

Definisjon 10.2. La

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \ldots + a_d y_{n-d} = 0$$

være en homogen lineær differensligning. Da kalles ligningen

$$a_0 \lambda^d + a_1 \lambda^{d-1} + \ldots + a_{d-1} \lambda + a_d = 0$$

den karakteristiske ligningen til differensligningen.

Teorem 10.1. Den geometriske følgen $y_n = \lambda^n$ er en løsning til en homogen lineær differensliging med konstante koeffisienter hvis og bare hvis λ er en rot i den karakteristiske ligningen.

Teorem 10.2. Den generelle løsningen til en homogen lineær differensligning av andre orden, med konstante koeffisienter, avhenger av røttene til den karakteristiske ligningen og er gitt slik:

1. Dersom det er to ulike reelle røtter λ_1 og λ_2, er den generelle løsningen

$$y_n = A \cdot \lambda_1^n + B \cdot \lambda_2^n.$$

2. Dersom det er en dobbel reell rot λ, er den generelle løsningen

$$y_n = (A + B_n) \cdot \lambda^n.$$

3. Dersom det er komplekse løsninger $\lambda = re^{\pm i\theta}$, er den generelle løsningen

$$y_n = r^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta).$$

10.2 Inhomogene differensligninger

En lineær differensligning på formen

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \ldots + a_d y_{n-d} = f(n)$$

kalles *inhomogen* forutsatt at $f(n) \neq 0$. Å finne den generelle løsningen til slike differensligninger er en utregning i to separate steg:

- Vi bruker karakteristisk ligning for å finne den generelle løsningen til den tilhørende homogene differensligningen. Vi bruker notasjonen $y_n^{(h)}$ for denne følgen.
- Vi trenger en partikulær løsning til den inhomogene differensligningen. Den finner vi gjerne ved ubestemte koeffisienters metode. Vi bruker notasjonen $y_n^{(p)}$ for en slik partikulær løsning.

Den generelle løsningen til den inhomogene differensligningen er nå gitt ved

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)}.$$

Dersom det er oppgitt tilstrekkelig mange startverdier, utfører vi følgende steg til slutt:

- Vi bestemmer konstantene i den generelle løsningen ved å stille opp ligningsystemet gitt ved startverdiene.

Å løse den tilsvarende homogene differensligningen har vi allerede lært. Neste steg er å lete etter en partikulær løsning. Vi skal med utgangspunkt i uttrykket $f(n)$ tippe formen på $y_n^{(p)}$ og deretter bestemme koeffisienter ved regning. Dette kalles ofte *ubestemte koeffisienters metode*. Siden løsningen til den homogene ligningen kan påvirke hvordan vi tipper formen på partikulær løsning, er det viktig å gjøre stegene i riktig rekkefølge.

Vi setter opp en tabell som indikerer hvordan formen på partikulær løsning bør tippes:

$f(n)$	$y_n^{(p)}$
c	M
$an + b$	$Mn + N$
$an + bn + c$	$Mn^2 + Nn + P$
$a_r n^r + \ldots + a_1 n + a_0$	$M_r n^r + \ldots + M_1 n + M_0$
ak^n	Mk^n
$(an + b)k^n$	$(Mn + N)k^n$
$(a_r n^r + \ldots + a_1 n + a_0)k^n$	$(M_r n^r + \ldots + M_1 n + M_0)k^n$
$a \cos n\phi$	$M \cos n\phi + N \sin n\phi$
$a \sin n\phi$	$M \cos n\phi + N \sin n\phi$
$ak^n \cos n\phi$	$(M \cos n\phi + N \sin n\phi)k^n$
$ak^n \sin n\phi$	$(M \cos n\phi + N \sin n\phi)k^n$

Det finnes untakstilfeller:

Å øke graden

Dersom ledd i $f(n)$ passer inn i løsningen til den homogene $y_n^{(h)}$, multipliserer vi uttrykkene for $y_n^{(p)}$ i tabellen ovenfor med n. Gjenta om nødvendig.

Superposisjon

Hvis $f(n)$ er summen av flere typer ledd. danner vi formen på $y_n^{(p)}$, ved å summere de tilsvarende forslagene gitt i tabellen. Husk å endre navn på de ubestemte koeffisientene etter hvert ledd.

En lineær differensligning på formen $a_0y_n + a_1y_{n-1} + \ldots + a_dy_{n-d} = f(n)$

↓

Vi bruker karakteristisk ligning for å finne den generelle løsningen til den tilhørende homogene differensligningen. $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Vi bruker notasjonen $y_n^{(h)}$ for denne følgen. Røttene til den karakteristiske ligningen kan ha 3 løsninger

1. Dersom det er to ulike reelle røtter λ_1 og λ_2, er den generelle løsningen

$$y_n = A \cdot \lambda_1^n + B \cdot \lambda_2^n.$$

2. Dersom det er en dobbel reell rot λ, er den generelle løsningen

$$y_n = (A + B_n) \cdot \lambda^n.$$

3. Dersom det er komplekse løsninger $\lambda = re^{\pm i\theta}$, er den generelle løsningen

$$y_n = r^n(A \cos n\theta + B \sin n\theta).$$

↓

Finn den partikulære løsningen vha. ubestemte koeffisienters metode. Vi bruker $y_n^{(p)}$ for en slik partikulær løsning.

↓

Dersom ledd i $f(n)$ passer inn i løsningen til den homogene y_n^h, multipliserer vi utrykket vi fant for y_n^p med n. Gjenta om nødvendig.

↓

Hvis $f(n)$ er summen av flere typer ledd, danner vi formen på $y_n^{(p)}$ ved å summere de tilsvarende løsningene. Husk å endre navn på de ubestemte koeffisientene etter hvert ledd.

↓

Bestem koeffisientene til den partikulære løsningen. Sett løsningen for y_n^p inn i den innhomogene deifferensligningen og løs den. f.eks.

$$y_n^p = Mn + N \text{ og } y_n - 3y_{n-1} = 2n$$

Setter inn:

$$y_n^{(p)} - 3y_{n-1}^{(p)} = 2n$$

$$(Mn + N) - 3(M(n-1) + N) = 2n$$

↓

Den generelle løsningen til den inhomogene differensligningen er nå gitt ved

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)}$$

↓

Dersom det er gitt tilstrekkelig mange startverdier kan vi bestemme konstantene til den generelle løsningen.

↓

Finn konstantene i den homogene løsningen ved å stille opp ligningene med gitte startverdier. Løs ligningene.

11 Lineær algebra

11.1 Trappeform

Definisjon 11.1. I en rad kaller vi det første elementet som er forskjellig fra null, for det *ledende elementet*. En matrise er på *trappeform* dersom

1. Hver rad har en 1-er som ledende element eller består bare av nuller.
2. Eventuelle rader bestående bare av nuller er nederst i matrisen.
3. Hver blokk av matrsien som har en ledende 1-er i øverste høyre hjørne, består ellers bare av nuller.

11.2 Redusert trappeform

Definisjon 11.2. En matrise er på *redusert trappeform* dersom

1. Hver rad har en 1-er som ledende element eller består bare av nuller.
2. Eventuelle rader bestående bare av nuller er nederst i matrisen.
3. Hver blokk av matrsien som har en ledende 1-er i øverste høyre hjørne, består ellers bare av nuller.
4. Hver kolonne i matrisen som inneholder en ledende 1-er, består ellers bare av nuller.

11.3 Determinanter

11.3.1 2x2 matrise

Definisjon 11.3. Dterminten til en 2x2 matrise er

$$det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

11.3.2 3x3 matrise

Definisjon 11.4. Metode for å finne detrminanter i 3x3 matriser

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

For å finne determinanten må du velge en rekke eller en kolonne du vil bruke. Oftest lurt å ta den med flest nuller.

Eks. Velger øverste rad

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +\mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & -\mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_22 & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & +\mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Da er determinanten til A

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Det går an å velge både rekker og kolonner når du skal finne determinanaten.

Her er et eksempel der vi velger den midterste kolonnen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & -\mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_22 & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & +\mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & -\mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Da er determinanten til A

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

11.4 Singulær matrise

Definisjon 11.5. Hvis determinaneten til en kvadratisk matrise A er ulik null, har matrisen en invers.

$$det\,A \neq 0 \rightarrow \text{matrisen har en invers}$$

Hvis determinanten til matrisen A er lik null er matrisen singulær. Har ingen invers.

$$det\,A = 0 \rightarrow \text{matrisen er singulær}$$

11.5 Inverse matriser

Setning 11.1. Kofaktor matrisen til en 2x2 matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

For å finne kofakotrene til A må vi finne minorene til til matrisen. Hvis minorene ligger i et pluss minus felt er de lik kofakotorene.

$$C = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & +M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \mathbf{d} \end{bmatrix} = d, \qquad M_{12} = \begin{bmatrix} a & b \\ \mathbf{c} & d \end{bmatrix} = c$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} a & \mathbf{b} \\ c & d \end{bmatrix} = b, \qquad M_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & b \\ c & d \end{bmatrix} = a$$

Kofaktormatrisen til A blir derfor

$$C = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & +M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Definisjon 11.6. Den *adjungerte* matrisen til en kvadratisk matrise A er den transponerte av kofaktormatrisen.

$$\operatorname{adj} A = C^T$$

Teorem 11.1. En kvadratisk matrise A er invertibel hvis og bare hvis $A \neq 0$. I så fall er den inverse matrisen gitt ved formelen

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

.

11.5.1 Invers til 2x2 matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$det\, A = ad - bc, \qquad adj\, A = C^T = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{ab - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

11.5.2 Invers til 3x3 matrisen

Setning 11.2. Kofaktor matrisen til en 3x3 matrise

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

For å finne kofakotrene til A må vi finne minorene til til matrisen. Hvis minorene ligger i et pluss minus felt er de lik kofakotorene.

$$C = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Setning 11.3. Invers til 3x3 matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\text{adj}\, A = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}\, A$$

11.6 Pivot-element

Definisjon 11.7. Det første elementet i hver rekke som ikke er lik null i en matrise som er på trappeform er et pivot element. Den kolonnen med pivot-elementet blir kalt en pivot-kolonne.

Eksempel 11.1.

$$\begin{bmatrix} 3^* & 0 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11.7 Rang

Definisjon 11.8. Antall pivot-elementer i en matrise som er gjennomgått Gauss-eliminasjon. Rangen til en matrise A skrives: rang A.

$$\text{rang}(A^T) = \text{rang(A)}$$

Eksempel 11.2. Finn rangen til matrise A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{R_2 = R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1^* & 1 & -1 \\ 0 & -2^* & 5 \\ 0 & 0 & 1^* \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{rang A} = 3}}$$

11.8 Relaterte begreper

Teorem 11.2. La A være en kvadratisk matrise. Følgende påstander er ekvivalente:

1. Ligningssystemer $A\vec{x} = \vec{b}$ med A som koeffisientmatrise, har nøyaktig en løsning.
2. Kolonnene i A er lineært uavhengige vektorer.
3. Ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har nøyaktig en løsning.
4. Matrisen A er radekvivalent til identitetsmatrisen I.
5. Matrisen A er invertibel.
6. det $A \neq 0$.

11.9 Egenverdier og egenvektorer

Definisjon 11.9. La A være en kvadratisk matrise. En vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ kalles en egenvektor for A dersom $\vec{v} \neq \vec{0}$ og $A\vec{v}$ er parallell med $\vec{v}$:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Tallet λ kalles *egenverdien* for A tilhørende $\vec{v}$.

Eksempel 11.3. La 2×2-matrisen A være gitt som

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Om vi betrakter den tilhørende lineære transformasjonen fra planet på seg selv, kan vi se hva som skjer med følgende vektorer:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrisemultiplikasjon gir

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at verken $\vec{u}$ eller $\vec{w}$ er en egenvektoer, men

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ er egenvektor for } A \text{ med egenverdi } \lambda = 4.$$

Teorem 11.3. L A være en $n\,x\,n$-matrise. Egenverdien til A er løsningen på ligningen

$$det(A - \lambda I) = 0$$

For hver løsning λ_i til denne ligningen finnes de tilhørende egenvektorene som løsninger til ligningssystemet

$$(A - \lambda_i I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

11.10 Nullrommet

Definisjon 11.10. Finn en basis for nullrommet til A.

Basis for nullrommet til en matrise er mengden av alle x-vektorer som løser denne ligningen.

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

Vi kan bytte ut A med A på redusert trappeform.

$$\text{rref}(A)\vec{x} = \vec{0}$$

rref = Reduced Row-Echelon Form = redusert trappeform.

Eksempel 11.4. Finn en basis for nullrommet til A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Begynner med å finne matrise A på redusert trappeform. Hopper over utregningen.

$$\text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1^* & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi setter opp ligningen: $\text{rref}(A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at det kun er søyle x_1 og søyle x_3 som har pivot-elementer og er pivot-søyler. Derfor er x_2 og x_4 frie variabler. Vi setter de lik parameterene s og t.

$$x_2 = s, \qquad x_4 = t$$

Ganger ut ligningen og setter inn for x_2 og x_4

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 2s - t \\ x_3 + 2x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = -2t \end{aligned}$$

Setter opp x-vektoren

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s - t \\ s \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har nå funnet de to vektorene som utgjør basisen til nullrommet. Nullrommet til vektor A:

$$N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

11.11 Diagonalisering

Teorem 11.4. La A være en $n \times n$-matrise, og anta at den har n lineært uavhengige egenvektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$. La P være matrisen med de valgte egenvektorene som kolonner:

$$P = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \cdots | \vec{v}_n)$$

Da er P inverterbar, og

$$A = PDP^{-1}$$

der D er diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Elementene langs diagonalen er egenveridene λ_i, som svarer til egenvektorene $\vec{v}_i$.

Definisjon 11.11. En $n \times n$-matrise A kalles *diagonaliserbar* dersom den kan skrives på formen

$$A = PDP^{-1}$$

for en diagonal matrise D og en inverterbar matrise P.

Kan også omskrives

$$A = PDP^{-1} \iff AP = PD \iff D = P^{-1}AP$$

Setning 11.4. Fremgangsmåte for diagonalisering av en matrise A:

1. Finn egenverdiene til matrisen med ligningen $\det(A - \lambda I) = 0$.
2. Finn egenvektorene til hver egenverdi med ligningen $(A - \lambda_i I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

   Fremgangsmåte for den første egenverdien λ_1:

   (a) Løs $A - \lambda_1 I$ matrisen med gauss-eliminasjon.

   (b) Se hvilken søyler som er pivot-søyler i den nye matrisen for å finne den frie variabelen.

   (c) Sett opp ligningen fra matrisen og velg en passende verdi for den fire variabelen for å få en fin løsning.

   (d) Sett verdiene for variablene du fant inn i $\vec{v}_1$. F.eks.
   Du fant $x = 1$ og $y = 3$. Da blir $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3. Sett opp matrisen $P = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \cdots | \vec{v}_n)$ og matrisen $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$.

4. Sett prøve på svaret:

   Regn ut AP og PD. Hvis $AP = PD$, er diagonaliseringen korrekt.

Eksempel 11.5 (Diagonalisering av en 2x2-matrise).

$$\text{Diagonaliser matrisen } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

For å få til dette må vi først regne ut egenverdiene til A, så finne egenvektorene og velge to lineært uavhengige egenvektorer, og endelig stille opp matrisen av egenverdier.

Finner egenverdiene mha. den karakteristiske ligningen $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 3 \cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 :$$

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - 3\lambda - 10 &= 0 \\
\lambda^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}\lambda + \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= 10 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{49}{4} \Rightarrow \lambda - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{49}{4}} \\
\lambda &= \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} \\
\underline{\lambda_1 = 5} \quad &og \quad \underline{\lambda_2 = -2}
\end{aligned}$$

Skal nå finne egenvektorene ved å sette inn egenverdiene i ligningen $(A - \lambda_i I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$

Finner egenvektoren til $\lambda_1 = 5$:
Vi løser ligningsystemet $(A - 5I)\vec{v}_1 = 0$.
Utfører Gauss-eliminasjon på $A - 5I$:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 2-5 & 3 \\ 4 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1^* & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolonne 1 er en pivot-kolonne, derfor er y en fri variabel.

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \qquad \text{setter } y = 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Dermed er $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en egenvektor for A tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 5$.

Finner egenvektoren til $\lambda_2 = -2$:
Vi løser lignigsystemet $(A + 2I)\vec{v}_2 = 0$
Utfører Gauss-eliminasjon på $A + 2I$:

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 2+2 & 3 \\ 4 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1^* & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolonne 1 er en pivot-kolonne, derfor er y en fri variabel.

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{4}y &= 0 \qquad \text{setter } y = 4 \\ x + 3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Dermed er $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ en egenvektor for A tilhørende egenverdien $\lambda_2 = -2$.

Diagonaliserer:

Vi har funnet to egenvektorer tilhørende forskjellige egenverdier. de er dermed lineært uavhengige. Vi har nok egenvektorer til å diagonalisere. Matrisen P blir med disse valgene

$$P = (\vec{v}_1|\vec{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrisen av egenverdier blir

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Nå vet vi at disse matrisene oppfyller $D = P^{-1}AP$.

Setter prøve på svaret:

Vi kan regne ut AP og DP ved vanlig matrisemultiplikasjon:

$$AP = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$$
$$PD = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Vi fikk $AP = DP$. Derfor er diagonaliseringen korrekt.

11.12 Potenser av matriser

Teorem 11.5. Hvis $A = PDP^{-1}$ er en diagonaliserbar matrise, er potensene gitt ved

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Setning 11.5. Fremgangsmåte for å finne potenser av en matrise A. Finn A^k:

1. Begynn med å diagonalisere matrise A for å finne matrisene P og D.
2. Regn ut P^{-1}.
3. Løs ligningen $A^k = PD^kP^{-1}$.

Eksempel 11.6. Finn A^4 for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Du får oppgitt

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

som gir diagonaliseringen $A = PD^{-1}$. Dermed er $A^4 = PD^4P^{-1}$

For å regne ut dette produktet trenger vi den inverse til P. Hopper over utregningen.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

Vi finner A^4:

$$A^4 = PD^4P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 5^4 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4/7 & 3/7 & 0 \\ -1/7 & 1/7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 364 & 261 & 0 \\ 348 & 277 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

11.13 Symmetriske matriser og ortogonal diagonalisering

For symmetriske matriser fungerer diagonalisering spesielt godt. Husk at en matrise er symmetrisk dersom $A = A^T$. Hovedresultatet er at alle symmetriske matriser kan diagonaliseres, og at matrisen P kan velges til å være en ortogonal matrise. Husk at kolonnene i ortogonale matriser er enhetsvektorer som står vinkelrett på hverandre. Det er det samme som at $P^T P = I$ eller med andre ord $P^T = P^{-1}$.

Teorem 11.6. La $A = A^{-1}$ være en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da gjelder:

1. Alle egenverdiene til A er reelle tall.
2. Matrisen A har n lineært uavhengige vektorer, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.
3. Egenvektorer med ulik egenverdi står vinkelrett på hverandre.
4. Valget av egenvektorer kan modifiseres slik at vi får nye egenvektorer $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, der vektor $\vec{u}_i$ har lengde 1, og hvert par av vektorer står vinkelrett på hverandre.
5. Med dette valget av egenvektorer vil matrisen $P = (\vec{u}_1 | \ldots | \vec{u}_i)$ være ortogonal, altså ha egenskapen
$$P^{-1} = P^T.$$
6. Diagonaliseringen har dermed formen
$$A = PDP^T.$$

Definisjon 11.12. En $n \times n$-matrise A kalles *ortogonalt diagonaliserbar* dersom den kan skrives på formen
$$A = PDP^T$$
for en diagonal matrise D og en ortogonal matrise P.

Teoremet ovenfor sier at symmetriske matriser er ortogonalt diagonaliserbare.

Fremgangsmåten for å finne en ortogonal diagonalisering er i hovedtrekk den samme som ved ordinær diagonalisering. Forutsetningen er at matrisen A er symmetrisk. Vi finner egenverdier og egenvektorer til A som vanlig. Men merk at vi må justere egenvektorene slik at de blir enhetsvektorer og står parvis vinkelrett på hverandre for at matrisen P skal bli ortogonal. Egenvektorene må altså *normaliseres.* Dersom det er flere egenvektorer med samme egenverdi, må vi i tillegg passe på at de justerte egenvektorene står vinkelrett på hverandre. Fordelen med dette er at P kan inverteres ved å transponere, altså $P^{-1} = P^T$.

Setning 11.6. Fremgangsmåte for finne en ortogonal diagonalisering av den symmetriske matrisen A:

1. Finn egenverdiene til matrisen med ligningen $\det(A - \lambda I) = 0$.
2. Finn egenvektorene til hver egenverdi med ligningen $(A - \lambda_i I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Gjør egenvektorene $\vec{v}_n$ om til enhetsvektorer $\vec{u}_n$.

   Fremgangsmåte for den første egenverdien λ_1:

   (a) Løs $A - \lambda_1 I$ matrisen med gauss-eliminasjon.

   (b) Se hvilken søyler som er pivot-søyler i den nye matrisen for å finne den frie variabelen.

   (c) Sett opp ligningen fra matrisen og velg en passende verdi for den fire variabelen for å få en fin løsning.

   (d) Sett verdiene for variablene du fant inn i $\vec{v}_1$. F.eks.
   Du fant $x = 1$ og $y = 3$. Da blir $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   (e) Finn enehtesvektoern til $\vec{v}_1$: $\vec{u}_1 = \dfrac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|}$

3. Sett opp matrisene P og D som ortognalt diagonaliserer A:

$$P = (\vec{u}_1|\vec{u}_2|\cdots|\vec{u}_n), \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

4. Sett prøve på svaret:

   La oss sjekke at P er ortogonal. Vi gjør det ved å regne ut $P^T P$. Hvis $P^T P = I$ stemmer det.

   La oss sjekke diagonaliseringen ved å regne ut PDP^T. Hvis $PDP^T = A$ stemmer det.

11.14 Underrom av $\mathbb{R}^n$

Definisjon 11.13. Et *underrom* av $\mathbb{R}^n$ er en mengde av vektorer $H \subseteq \mathbb{R}^n$ med disse egenskapene:

- Nullvektor $\vec{0}$ ligger i H.
- Hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ begge ligger i H, ligger også summen $\vec{u} + \vec{v}$ i H.
- Hvis $\vec{u}$ ligger i H og k er et tall, ligger også produktet $k\vec{u}$ i H.

Definisjon 11.14. La $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. *Spennet* til vektorene $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ er det minste underrommet av $\mathbb{R}^n$ som inneholder alle disse vektorene. Vi skriver

$$\text{Spenn}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}.$$

Definisjon 11.15. En mengde vektorer $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ kalles *lineært uavhengig* dersom ligningen

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

bare har den trivielle løsningen $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (0, 0, \ldots, 0)$.

En mengde vektorer $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ kalles *lineært avhengig* dersom det finnes tall $a_1, a_2, \ldots, a_k$, der ikke alle er lik null, slik at

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_k\vec{v}_k = \vec{0}.$$

Setning 11.7. For å løse ligningen

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

kan vi bruke Gauss-eliminasjon på matrisen

$$(\vec{v}_1|\vec{v}_2|\ldots|\vec{v}_k)$$

med vektoren $\vec{v}_i$ som kolonner. Hvis vi da får ledende 1-ere i alle kolonner, finnes bare den trivielle løsningen, og vektorene er lineært uavhengige. Får vi derimot frie variabler, finnes ikke-trivielle løsninger, og vektorene er lineært avhengige.

Definisjon 11.16. En *basis* for et underrom H er en mengde lineært uavhengige vektorer $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ som utspenner $H, dvs.$

$$H = \text{Spenn}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}.$$

Eksempel 11.7. La H være underromet av $\mathbb{R}^4$ utspent av

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avgjør om disse vektorene er en basis fo H.

Vi løser ligningsystemet

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

for å avgjøre om det finnes ikke-trivielle løsninger. Den utvidede matrisen er

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 7 & -7 & 11 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi gjør Gauss-eliminasjon:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 7 & -7 & 11 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Den eneste løsningen til systemet er $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Dermed er vektorene lineært uavhengige. Vi konkluderer med at

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for underrommet H.

11.14.1 Kolonnerom

Definisjon 11.17. *Kolonnerommet* til en matrise

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

er underrommet $\mathrm{Kol}(A)$ av $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnevektorene fra A. Vi har

$$\mathrm{Kol}(A) = \mathrm{Spenn}\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right\}.$$

Eksempel 11.8. Finn en basis for kolonnerommet til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Løsning:

Kolonnerommet er

$$\mathrm{Kol(A)} = \mathrm{Spenn}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

For å undersøke om en av vektorene er overflødig, ser vi på det homogene ligningsystemet $A\vec{x} = 0 \Rightarrow x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = 0$.

Vi gjør Gauss-eliminasjon på A for å få den i redusert trappeform.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1^* & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Løsningen på ligningsystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ er

$$x_1 + x_3 = 0$$
$$x_2 + x_3 = 0$$

Siden søyle 3 ikke er en pivot-søyle er x_3 er en fri variabel, det vil si at den kan velges fritt. Vi velger $x_3 = 1$ og får:

$$x_1 + 1 = 0$$
$$x_1 = -1$$

$$x_2 + 1 = 0$$
$$x_2 = -1$$

Går vi tilbake til utgansgspunktet for ligningsystemet, nemelig $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = 0$, og setter inn disse tallene får vi

$$-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$$

Løst for $\vec{v}_3$ får vi

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Dermed er $\vec{v}_3$ overflødig. En basis for kolonnerommet til A er derfor

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}. \right\}$$

Teorem 11.7. Rangen til en matrise A er lik dimensjonen av kolonnerommet:

$$\operatorname{rang}(A) = \dim \operatorname{Kol}(A)$$

Eksempel 11.9. Finn basisvektor for kolonnerommet til matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -6 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -9 & -3 & 5 & -10 & -7 \end{bmatrix}$$

Vi vet nå at basisvektorene svarer til ledende 1-ere i redusert trappeform.
Derfor utfører vi Gauss-eliminasjon:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -6 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -9 & -3 & 5 & -10 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1^* & 1/3 & 0 & 5/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1^* & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Første og tredje kolonne er pivot-kolonner. Det betyr at første og tredje kolonne i matrisen A utgjør en basis for kolonnerommet:

$$\operatorname{Kol}(A) = \operatorname{Spenn} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

11.14.2 Radrom

Definisjon 11.18. *Radrommet* til en matrise

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

er underrommet Rad(A) av $\mathbb{R}^m$ utspent av radvektoren fra A. Vi har

$$\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Spenn}\left\{(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})\right\}.$$

Metoden for å finne en basis for radrommet er: Utfør Gauss-eliminasjon og bruk de radene som ikke bare består av nuller, som basis for radrommet.

Eksempel 11.10. Finn en basis for radrommet til matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -6 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -9 & -3 & 5 & -10 & -7 \end{bmatrix}$$

Matrisen på redusert trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 5/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dermed er

$$\left\{\left(1,\, \frac{1}{3},\, 0,\, \frac{5}{4},\, \frac{4}{3}\right),\, (0,\, 0,\, 1,\, 1,\, 1)\right\}$$

en basis for radrommet.

Teorem 11.8. Rangen til en matrise A er lik dimensjonen av radrommet:

$$\mathrm{rang}(A) = \dim \mathrm{Rad}(A)$$

11.15 Oppgaver med løsningsforslag

12 Laplace-transformasjon

Definisjon 12.1. Vi definerer Laplace-transformasjonen til f(t) ved

$$\mathscr{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{4}$$

dersom integralet eksisterer

Definisjon 12.2. Vi definerer den **inverse** Laplace-transformasjonen av $F(s)$ som $\mathscr{L}^{-1}$ med

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

slik at $F(s)$ er Laplace-transformasjonen av $f(t)$.

12.1 The step function

Definisjon 12.3. A function which has value 0 up to the time $t = a$ and thereafter has value K, is written

$$Ku(t-a) = \begin{cases} 0 & if \quad t < a \\ K & if \quad t > a \end{cases}$$

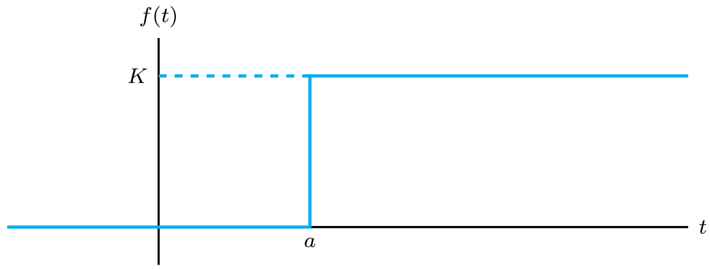


Figure 11: A step function occuring at $t = a$ when $a > 0$

Eksempel 12.1 (Shifted Unit Step Function)**.**

$$f(t) = u(t-3)$$

Ligningen betyr at $f(t)$ har verdi 0 når $t < 3$ og 1 når $t > 3$. Den ser slik ut

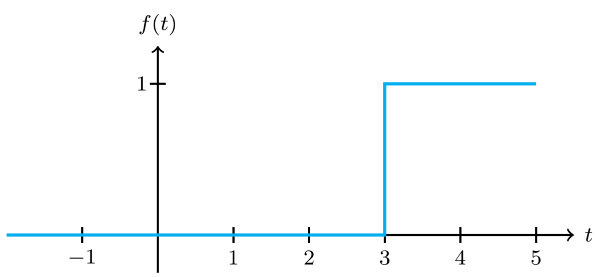


Figure 12: $f(t) = u(t-3)$

12.2 Firkant puls

Definisjon 12.4. En vanlig situasjon i en krets er å tilføre spenning til et gitt tidspunkt t=a og ta den vekk senere, t=b. Vi skriver en slik situasjon ved å bruke ”step function” slik

$$V(t) = K[u(t-a) - u(t-b)]$$

Denne spenningen har styrke K, i perioden (b-a).

Eksempel 12.2. Grafen til $V(t) = 0.9[u(t-1.2) - u(t-3.8)]$ er som følger. Perioden er $3.8 - 1.2 = 2.6$

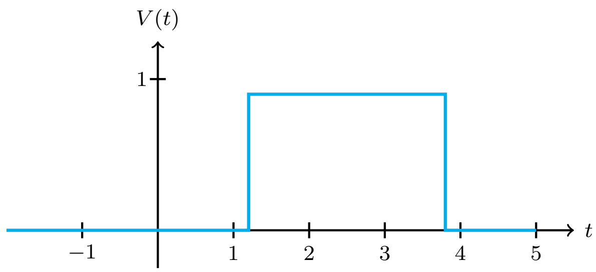


Figure 13: $V(t) = 0.9[u(t-1.2) - u(t-3.8)]$

Eksempel 12.3. Tegn grafen til

$$f(t) = 3t^2 \cdot [u(t) - u(t-2)] + 12 \cdot [u(t-2) - u(t-4)] + (4t - 28) \cdot [u(t-4) - u(t-7)]$$

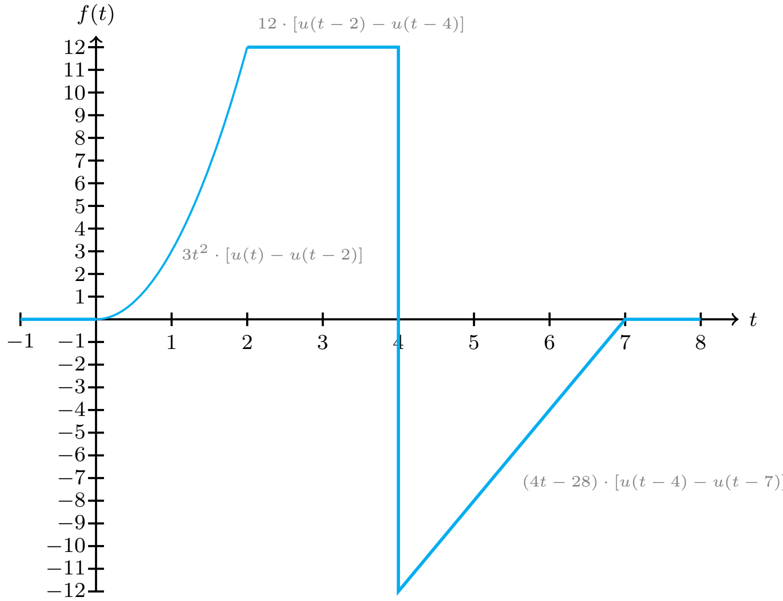


Figure 14: Grafen til $f(t)$

Table 2: Basisformler for Laplace-transformasjon

Type	**f(t)**	**F(s)**
impulse	$\delta(t)$	1
step	u(t)	$\frac{1}{s}$
ramp	t	$\frac{1}{s^2}$
exponential	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
sine	$sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
cosine	$cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
damped ramp	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
damped sine	$e^{-at}sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
damped cosine	$e^{-at}cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Definisjon 12.5 (Kjente resultater om laplacetransformer)**.**

1. $\mathscr{L}(1) = \dfrac{1}{s}, s > 0$
2. $\mathscr{L}(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
3. $\mathscr{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}, s > a$
4. $\mathscr{L}(t^n e^{at}) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$
5. $\mathscr{L}(sin(\alpha t)) = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}, s > 0$
6. $\mathscr{L}(cos(\alpha t)) = \dfrac{s}{s^2+\alpha^2}, s > 0$
7. $\mathscr{L}(e^{\beta t} sin(\alpha t)) = \dfrac{\alpha}{(s-\beta)^2+\alpha^2}, s > \beta$
8. $\mathscr{L}(e^{\beta t} cos(\alpha t)) = \dfrac{s-\beta}{(s-\beta)^2+\alpha^2}, s > \beta$
9. $\mathscr{L}(\delta(t)) = 1, \mathscr{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$
10. $\mathscr{L}(f') = s\mathscr{L} - f(0)$
11. $\mathscr{L}(f'') = s^2\mathscr{L}(f) - sf(0) - f'(0)$
12. $\mathscr{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s) = e^{-as}\mathscr{L}(f(t)), der\ u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$ er Heaviside-funksjonen
13. $\mathscr{L}(af + bg) = a\mathscr{L}(f) + b\mathscr{L}(g)$

13 Funksjoner av flere variabler

13.1 Gradient og retningsderivert

Definisjon 13.1 (Gradient)**.** La $f(x, y)$ være en deriverbar funksjon, og $\vec{i}$, $\vec{j}$ standardbasisen for $\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

gradienten til funksjonen. Om vi evaluerer i et punkt (a, b), får vi gradienten i punktet:

$$\nabla f\big|_{(a,b)} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(a,b)}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(a,b)}\vec{j}$$

Teorem 13.1 (Geomatrisk tolkning av gradienten)**.** La $f(x, y)$ være en funksjon slik at de partielt deriverte er kontinuerlige. Da gjelder disse egenskapene for gradienten i et punkt (a, b):

- Gradienten $\nabla f\big|_{(a,b)}$ er en normalvektor til nivåkurven for f gjennom punktet (a, b).
- Gradienten $\nabla f\big|_{(a,b)}$ peker i den bratteste retningen på grafen $z = f(x, y)$.
- Lengden av gradienten $\left|\nabla f\big|_{(a,b)}\right|$ er stigningstallet til grafen i den bratteste retningen.

Definisjon 13.2. La $f(x, y)$ være en funksjon i to variabler som er deriverbar i punktet (a, b), og la $\vec{u} = [u_1, u_2]$ være en retning gitt ved en enhetsvektor (altså er $u_1^2 + u_2^2 = 1$). Den *retningsderiverte* til f i punktet (a, b) og i retning u defineres som skalarproduktet

$$D_{\vec{u}}f(a, b) = \vec{u} \cdot \nabla\big|_{(a,b)}.$$

Dette angir altså hvor raskt funksjonsverdien endrer seg i retning bestemt av $\vec{u}$.

13.1.1 Ekstremalverdier for funksjoner i flere variabler

Definisjon 13.3 (Tangentplan)**.** La $f(x, y)$ være en funksjon som er deriverbar i (a, b). Da er ligningen for tangentplanet i punktet

$$z = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b)$$

Definisjon 13.4. Determinanten til Hesse-matrisen kalles *diskriminanten* og er gitt ved

$$\Delta = \det H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}(a,\, b) \cdot f_{yy}(a,\, b) - (f_{xy}(a,\, b))^2$$

Teorem 13.2 (Andrederiverttesten for funksjoner i to variabler)**.** La $f(x, y)$ være en funksjon slik at de partielt deriverte av andre orden er kontinuerlige. Et stasjonært punkt $(a,\, b)$ til f kan klassifiseres ut fra Hesse-matrisen etter følgende kriterier:

1. Når $\Delta > 0$ og $f_{xx}(a,\, b) < 0$, er $(a,\, b)$ et lokalt maksimum.
2. Når $\Delta > 0$ og $f_{xx}(a,\, b) > 0$, er $(a,\, b)$ et lokalt minimum.
3. Når $\Delta < 0$, er $(a,\, b)$ et sadelpunkt.
4. Når $\Delta = 0$, gir testen ingen informasjon; alle muligheter er fortsatt åpne.