

Tabelle 5: Fehler $E_{\xi,l}^S$ und experimentelle Konvergenzordnungen von Beispiel 5.2.1 auf einem SHISHKIN-Gitter mit einem quadratischen C^1 -Spline.

l	ε					
	10^{-4}		10^{-8}		10^{-12}	
	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S
2^7	1,30778804e-03		1,30774516e-03		1,30774515e-03	
2^8	4,16900675e-04	2,042910	4,16886151e-04	2,042913	4,16886150e-04	2,042913
2^9	1,31436959e-04	2,006244	1,31432294e-04	2,006245	1,31432293e-04	2,006245
2^{10}	4,05553242e-05	2,000488	4,05538767e-05	2,000489	4,05538765e-05	2,000489
2^{11}	1,22677460e-05	2,000033	1,22673074e-05	2,000033	1,22673074e-05	2,000033
2^{12}	3,64903824e-06	2,000393	3,64890769e-06	2,000393	3,64890768e-06	2,000393

Tabelle 6: Fehler $E_{\xi,l}^S$ und experimentelle Konvergenzordnungen von Beispiel 5.2.1 auf einem SHISHKIN-Gitter mit einem kubischen C^1 -Spline.

l	ε					
	10^{-4}		10^{-8}		10^{-12}	
	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S
2^7	3,42730693e-06		3,42784291e-06		3,42784297e-06	
2^8	3,59313544e-07	4,030148	3,59372253e-07	4,030136	3,59372259e-07	4,030136
2^9	3,59216368e-08	4,002432	3,59274814e-08	4,002433	3,59274820e-08	4,002433
2^{10}	3,42347985e-09	3,999210	3,42404397e-09	3,999206	3,42404402e-09	3,999206
2^{11}	3,13334361e-10	3,999655	3,13385876e-10	3,999656	3,13385881e-10	3,999656
2^{12}	2,77312168e-11	4,000279	2,77357827e-11	4,000278	2,77357831e-11	4,000278

auf einem SHISHKIN-Gitter und für das Konvektionsdiffusionsproblem

Beispiel 5.2.2.

$$-\varepsilon y'' - y' + 2y = e^{x-1}, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

sowohl auf einem SHISHKIN-, als auch auf einem BAKHVALOV-Gitter ermittelten Näherungslösungen. In den Tabellen 5, 6 und 7 können wir die erwartete gleichmäßige Konvergenz bezüglich ε für Beispiel 5.2.1 eines Reaktionsdiffusionsproblems erkennen. Die Tabellenwerte haben wir jeweils bis zu einer Genauigkeit abgebildet, welche Abweichungen zwischen den Fehlern und den experimentellen Konvergenzordnungen gerade noch erkennen lässt. Die Gitterparameter haben

Tabelle 7: Fehler $E_{\xi,l}^S$ und experimentelle Konvergenzordnungen von Beispiel 5.2.1 auf einem SHISHKIN-Gitter mit einem quintischen C^1 -Spline.

l	ε					
	10^{-4}		10^{-8}		10^{-12}	
	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S
2^7	1,76880e-07		1,76941e-07		1,76941e-07	
2^8	2,41681e-09	7,671380242	2,41792e-09	7,671178405	2,41792e-09	7,671178385
2^9	2,30583e-11	8,085617445	2,30707e-11	8,085483647	2,30707e-11	8,085483634
2^{10}	2,12506e-13	7,973662412	2,12624e-13	7,973631829	2,12624e-13	7,973631826
2^{11}	1,77297e-15	8,006052139	1,77396e-15	8,006043860	1,77396e-15	8,006043859
2^{12}	1,38895e-17	8,000317089	1,38974e-17	8,000306540	1,38974e-17	8,000306538

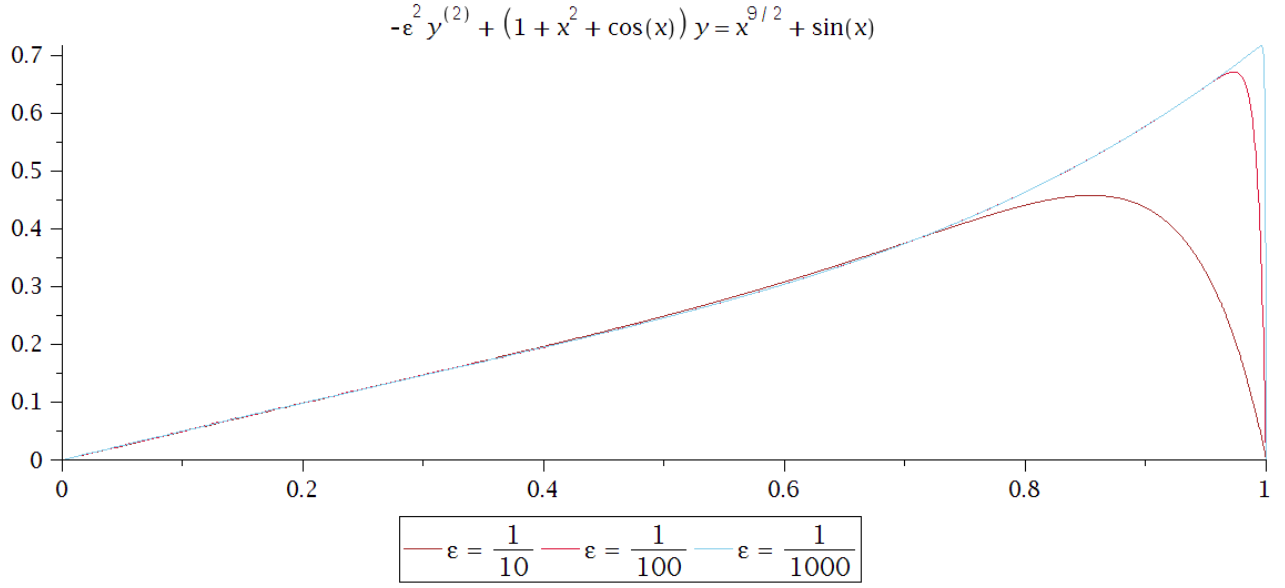


Abbildung 3: Die Graphen der Näherungslösungen von Beispiel 5.2.1 für $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}$ und 10^{-3} .

wir dabei wie folgt gewählt

$$q_0 = q_1 = \frac{1}{4},$$

$$\sigma_0 = \sigma_1 = \begin{cases} 2 & , \text{ für } k = 1, \\ 4 & , \text{ für } k = 2, \\ 8 & , \text{ für } k = 4, \end{cases}$$

Abbildung 3 enthält die Graphen der Näherungslösungen von Beispiel 5.2.1 für $k = 1, l = 2^{10}$ und $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$. Für unser Beispiel 5.2.2 eines Konvektionsdiffusionsproblems geben wir in den Tabellen 8, 9 und 10 Fehler und experimentelle Konvergenzordnungen auf einem SHISHKIN-Gitter und in den Tabellen 11, 12 und 13 auf einem BAKHVALOV-Gitter an. Für die Gitterparameter haben wir einheitlich $q = \frac{1}{2}$ und ebenfalls

$$\sigma = \begin{cases} 2 & , \text{ für } k = 1, \\ 4 & , \text{ für } k = 2, \\ 8 & , \text{ für } k = 4, \end{cases}$$

gewählt. Wir erkennen auch für das Konvektionsdiffusionsproblem 5.2.2 die gleichmäßige Konvergenz unseres Verfahrens auf beiden getesteten Gittern. In Abbildung 4 sind für dieses Beispiel die Graphen der Näherungslösungen für $k = 1, l = 2^{10}$ und $\varepsilon = 2^{-4}, 2^{-6}$ und $\varepsilon = 2^{-8}$ dargestellt.

6 Details zur Implementierung

Wir stellen knapp die Besonderheiten der für diese Arbeit erstellten Implementierung dar. Ein Teil der erstellten Java-Klassen findet sich im Anhang dieser Arbeit. Alle Klassen befinden sich auf dem Datenträger zu dieser Arbeit. Die Quelltexte sind zusätzlich zu den Ausführungen in

Tabelle 8: Fehler $E_{\xi,l}^S$ und experimentelle Konvergenzordnungen von Beispiel 5.2.2 auf einem SHISHKIN-Gitter mit einem quadratischen C^1 -Spline.

l	10^{-4}		10^{-8}		10^{-12}	
	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S
2^7	2,61101236e-3		2,61112350e-3		2,61112347e-3	
2^8	8,47926642e-4	2,009770278	8,47941203e-4	2,009815650	8,47941204e-4	2,009815631
2^9	2,66118965e-4	2,014116952	2,66121282e-4	2,014131670	2,66121282e-4	2,014131671
2^{10}	8,19128837e-5	2,004617031	8,19137910e-5	2,004612995	8,19137911e-5	2,004612995
2^{11}	2,47655656e-5	2,000883324	2,47660617e-5	2,000868343	2,47660617e-5	2,000868342
2^{12}	7,36765541e-6	2,000137043	7,36780535e-6	2,000136517	7,36780537e-6	2,000136517

Tabelle 9: Fehler $E_{\xi,l}^S$ und experimentelle Konvergenzordnungen von Beispiel 5.2.2 auf einem SHISHKIN-Gitter mit einem kubischen C^1 -Spline.

l	10^{-4}		10^{-8}		10^{-12}	
	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S
2^7	1,61052e-05		1,61005232e-05		1,61005440e-05	
2^8	1,72498e-06	3,9918920	1,72442359e-06	3,99195122	1,72442356e-06	3,99195355
2^9	1,71931e-07	4,0076757	1,71873911e-07	4,00770019	1,71873907e-07	4,00770020
2^{10}	1,63526e-08	4,0026564	1,63471224e-08	4,00265843	1,63471224e-08	4,00265840
2^{11}	1,49599e-09	4,0004151	1,49550268e-09	4,00040393	1,49550276e-09	4,00040384
2^{12}	1,32411e-10	4,0001537	1,32367138e-10	4,00015681	1,32367164e-10	4,00015658

Tabelle 10: Fehler $E_{\xi,l}^S$ und experimentelle Konvergenzordnungen von Beispiel 5.2.2 auf einem SHISHKIN-Gitter mit einem quintischen C^1 -Spline.

l	10^{-4}		10^{-8}		10^{-12}	
	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S	$E_{\xi,l}^S$	α_{2l}^S
2^7	1,6169109e-08		1,6151691e-08		1,6151689e-08	
2^8	1,7164950e-10	8,122364164	1,7144835e-10	8,122533501	1,7144833e-10	8,122533516
2^9	1,7852718e-12	7,935642192	1,7833550e-12	7,935471246	1,7833548e-12	7,935471230
2^{10}	1,6308097e-14	7,988721855	1,6290322e-14	7,988749633	1,6290320e-14	7,988749632
2^{11}	1,3671826e-16	7,997990666	1,3656573e-16	7,998033613	1,3656572e-16	7,998033598
2^{12}	1,0718135e-18	7,999148290	1,0706225e-18	7,999141097	1,0706224e-18	7,999140986

Tabelle 11: Fehler $E_{\xi,l}^B$ und experimentelle Konvergenzordnungen von Beispiel 5.2.2 auf einem BAKHVALOV-Gitter mit einem quadratischen C^1 -Spline.

l	ε					
	10^{-4}		10^{-8}		10^{-12}	
	$E_{\xi,l}^B$	α_{2l}^B	$E_{\xi,l}^B$	α_{2l}^B	$E_{\xi,l}^B$	α_{2l}^B
2^7	1,1955676e-4		1,1946969e-4		1,1766158e-4	
2^8	2,9877686e-5	2,000555421	2,9855690e-5	2,000566784	2,9853865e-5	1,978653693
2^9	7,4666603e-6	2,000533405	7,4612506e-6	2,000516565	7,4612475e-6	2,000428934
2^{10}	1,8667021e-6	1,999971356	1,8653845e-6	1,999944456	1,8653841e-6	1,999944112
2^{11}	4,6666142e-7	2,000043630	4,6633564e-7	2,000032415	4,6633556e-7	2,000032413
2^{12}	1,1666462e-7	2,000009117	1,1658325e-7	2,000008104	1,1658323e-7	2,000008104

Tabelle 12: Fehler $E_{\xi,l}^B$ und experimentelle Konvergenzordnungen von Beispiel 5.2.2 auf einem BAKHVALOV-Gitter mit einem kubischen C^1 -Spline.

l	ε					
	10^{-4}		10^{-8}		10^{-12}	
	$E_{\xi,l}^B$	α_{2l}^B	$E_{\xi,l}^B$	α_{2l}^B	$E_{\xi,l}^B$	α_{2l}^B
2^7	5,310000e-07		5,309599e-07		5,309600e-07	
2^8	3,327236e-08	3,996316	3,327502e-08	3,996092	3,327503e-08	3,996091
2^9	2,077951e-09	4,001091	2,078206e-09	4,001029	2,078208e-09	4,001028
2^{10}	1,298472e-10	4,000275	1,298643e-10	4,000262	1,298649e-10	4,000257
2^{11}	8,115872e-12	3,999924	8,116807e-12	3,999948	8,116949e-12	3,999930
2^{12}	5,072360e-13	4,000017	5,072712e-13	4,000083	5,073037e-13	4,000016

Tabelle 13: Fehler $E_{\xi,l}^B$ und experimentelle Konvergenzordnungen von Beispiel 5.2.2 auf einem BAKHVALOV-Gitter mit einem quintischen C^1 -Spline.

l	ε					
	10^{-4}		10^{-8}		10^{-12}	
	$E_{\xi,l}^B$	α_{2l}^B	$E_{\xi,l}^B$	α_{2l}^B	$E_{\xi,l}^B$	α_{2l}^B
2^7	1,5093778e-11		1,5077274e-11		1,5077272e-11	
2^8	5,8772570e-14	8,004595	5,8714233e-14	8,004450	5,8714237e-14	8,004449
2^9	2,3049360e-16	7,994272	2,3029656e-16	7,994074	2,3029713e-16	7,994070
2^{10}	8,9952675e-19	8,001345	8,9927385e-19	8,000517	8,9931042e-19	8,000462
2^{11}	3,5074299e-21	8,002608	3,5105642e-21	8,000914	3,5126502e-21	8,000115
2^{12}	1,3663398e-23	8,003954	1,3626609e-23	8,009133	1,3721001e-23	8,000030