

Robuste Optimierung

Martin Schmidt
Universität Trier

Sommersemester 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Robuste Optimierung	9
1.1 Einleitung	9
1.2 Warum robuste Optimierung?	10
2 Grundlagen der linearen und konischen Optimierung	18
2.1 Grundlegende Begriffe der linearen Optimierung	18
2.2 Dualität in der linearen Optimierung	19
2.3 Halbordnungen im \mathbb{R}^m und konvexe Kegel	22
2.4 Konische Optimierungsprobleme und Dualität	27
2.5 Geometrische Veranschaulichung des konisch primalen und dualen Problems	32
3 Robuste lineare Optimierung	39
3.1 Einleitung	39
3.2 Box-Unsicherheiten	46
3.3 Polyedrische Unsicherheitsmengen	48
3.4 Ellipsoidale Unsicherheiten	50
3.5 Konische Unsicherheiten	50
3.6 Robuste gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung	51
4 Robuste Modellierung von Zufallsungleichungen	52
5 Robuste kombinatorische Optimierung	57
5.1 Robuste binäre Optimierung	57
5.2 Robuste minimale aufspannende Bäume	63
5.3 Robuste kürzeste Wege	66
6 Robuste ganzzahlige Optimierung mit dem flexiblen Γ-Ansatz	68
6.1 Übertragung von Approximationsergebnissen für die $\{0, 1\}$ -Optimierung	68
6.2 Robuste ganzzahlige Optimierung	74
7 Robuste Netzwerkflüsse im flexiblen Γ-Ansatz	78

8 Robuste binäre Optimierung mit ellipsoidalen Unsicherheiten	86
8.1 Unkorrelierte Kosten	86
8.2 Korrelierte Kosten	92
9 Stochastische Optimierung	94
9.1 Ein einführendes Beispiel	94
9.2 Robuste oder stochastische Optimierung?	99
9.3 Einige Grundbegriffe der Stochastik	100
9.4 Zweistufige stochastische Probleme	101
9.5 Der Wert der vollständigen Information und der stochastischen Lösung	106
9.5.1 Definitionen	106
9.5.2 Beziehungen zwischen den Lösungsdefinitionen	108
9.6 Die L-Methode	109
9.6.1 Erzeugung von Optimalitätsschnitten	110
9.6.2 Erzeugung von Gültigkeitsschnitten	111
9.6.3 Terminierung nach endlich vielen Schritten	112
9.7 Ganzzahlige Probleme	116
10 Zweistufige robuste Optimierung	120
11 Light Robustness	123
11.1 Light Robustness im flexiblen Γ -Ansatz	123
11.2 Eine allgemeine “Light-Robustness”-Heuristik	125
12 Was Sie jetzt wissen sollten!	128
13 Die Mathematiker der Vorlesung	135

Algorithmenverzeichnis

1	Kruskals Algorithmus	63
2	2-Approximationsalgorithmus für das Knapsack-Problem	69
3	α -Approximationsalgorithmus für robuste ganzzahlige Optimierung	70
4	Die L-Methode	110
5	“Light-Robustness”-Heuristik	127

Abbildungsverzeichnis

1.1	Illustration von Beispiel 1.1(a)	14
1.2	Illustration von Beispiel 1.1(b)	14
1.3	Illustration von Beispiel 1.2	15
2.1	Der Lorentz-Kegel \mathbb{L}^3	24
2.2	Illustration des Steinersummen-Beispiels 2.11 im \mathbb{R}^2 mit $m = 4$ Bohrungen. Frage: An welchem Ort $x \in \mathbb{R}^2$ soll der Behälter (rotes Rechteck) aufgestellt werden?	25
2.3	Illustration des Beispiels 2.12 zur Kugelunsicherheit	26
2.4	Illustration des Kegels \mathcal{K} und des dualen Kegels \mathcal{K}_* aus Beispiel 2.16	30
2.5	Primal-duales Paar von konischen Problemen	34
5.1	Beispielinstanz der Bestimmung eines minimal aufspannenden Baums	58
5.2	Kantengewichte c_j und minimal aufspannender Baum	63
5.3	Kantenbezeichnungen und Unsicherheiten Δc_j	64
5.4	Minimal aufspannender Baum für $l = 8, \dots, 12$	64
5.5	Minimal aufspannender Baum für $l = 13$	64
5.6	Kantengewichte c_j und kürzester Weg	66
5.7	Kantenbezeichnungen und Unsicherheiten Δc_j	67
5.8	Kürzester Weg für $l = 8, \dots, 12$	67
5.9	Kürzester Weg für $l = 13$	67
7.1	Minimalkosten-Fluss-Problem mit Kosten c_{ij} (erster Wert in Klammern), Kapazitäten u_{ij} (zweiter Wert in Klammern) und Ein- bzw. Ausspeisungen b_i (oben) sowie genutzte Kapazität in der Lösung (unten)	79
7.2	Graphentransformation für das Minimalkosten-Fluss-Problem	81
7.3	Binäre Suche im Beweis von Satz 7.4	84
8.1	Ausgangsgraph des Kürzeste-Wege-Problems aus Beispiel 8.4	89
8.2	Nominal kürzester Weg (mit Länge 6) des Kürzeste-Wege-Problems aus Beispiel 8.4	90

8.3	Modifiziertes Kürzeste-Wege-Problem aus Beispiel 8.4 für $w = 0$	90
8.4	Lösung des Kürzeste-Wege-Problems aus Beispiel 8.4 für die modifizierte Instanz mit $w = 0$	91
8.5	Modifiziertes Kürzeste-Wege-Problem aus Beispiel 8.4 für $w > 0$	91
8.6	Lösung des Kürzeste-Wege-Problems aus Beispiel 8.4 für die modifizierte Instanz mit $w > 0$	91
9.1	Der Graph von $Q(x, 1)$ aus Beispiel 9.16	118
9.2	$\mathcal{K} \cap \mathbb{R}_+^2$ aus Beispiel 9.18.	119

Tabellenverzeichnis

1.1	Google Suchergebnisse zur robusten Optimierung	9
1.2	Produktionsdaten für Beispiel 1.3	15
1.3	Rohmaterialdaten für Beispiel 1.3	15
1.4	Ressourcendaten für Beispiel 1.3	15
5.1	Beispieldaten für das Rucksack-Problem	58
6.1	Eingabedaten für das Rucksackproblem; bereits in für Algorithmus 2 sortierter Reihenfolge	71
6.2	Robust optimale Lösungen	77
9.1	Variablen des Beispiels aus Abschnitt 9.1 zur stochastischen Optimierung	95

Vorwort

Dieses Skript basiert auf einer studentischen Mitschrift zu den Vorlesungen „Einführung in die Robuste Optimierung“ und „Robuste Optimierung“, die von Prof. Dr. Frauke Liers im Sommersemester 2014 an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg gehalten wurde.

Als Grundlage diente damals die Vorlesung „Robuste Optimierung“, die Frauke Liers 2008 zusammen mit Christoph Buchheim (heute TU Dortmund) an der Universität zu Köln gehalten hat. Einige Inhalte aus Kapitel 1 gehen zurück auf das Manuskript „Practical Robust Optimization“ von Dick den Hertog (Universität Tilburg) und Aharon Ben-Tal (Technion, Haifa). Vielen Dank an die genannten Personen, dass ich diese Inhalte nutzen darf. Insbesondere diese Teile sollen weder frei noch öffentlich zugänglich gemacht werden. Des Weiteren befinden sich Inhalte aus verschiedenen Publikationen, u. a. aus dem Buch *Robust Optimization* von Ben-Tal u. a. sowie der Dissertation „Robust Optimization“ von Sim, in diesem Skript.

Bei allen Fehlern in diesem Skript trifft die genannten Personen keinerlei Schuld. Ich habe sie nachträglich eingebaut, um ihr reflektiertes Nachdenken über den Stoff zu fördern. Bitte teilen Sie mir trotzdem alle Fehler, die Sie finden, mit, damit ich nicht vergesse, sie am Ende der Veranstaltung wieder zu korrigieren.

Zuletzt möchte ich Anna-Sophia Leuck und Madleen-Maria Popa für Ihre Hilfe bei der Zusammenstellung der Kurzbiografien der Mathematiker am Ende dieses Skripts bedanken.

*Martin Schmidt
Trier, im Sommersemester 2022*

Kapitel 1

Robuste Optimierung

1.1 Einleitung

Die robuste Optimierung hat sich in den letzten Jahrzehnten zu einem wichtigen Themengebiet innerhalb der mathematischen Optimierung entwickelt. Sucht man im Internet nach verschiedenen Begriffskombinationen, stößt man auf hohe Trefferzahlen. Die Suchmaschine Google lieferte im März 2016 und im April 2020 beispielsweise die in Tabelle 1.1 gelisteten Trefferzahlen. Daraus ist zwar nicht alles „robust“ im Sinne dieser Vorlesung, aber die hohen Trefferzahlen untermauern dennoch die Bedeutung dieses Themas – ganz zu Schweigen von der Entwicklung der Trefferzahlen.

Ein weiterer Beleg für die zunehmende Bedeutung der robusten Optimierung ist das Buch *The Optimization Edge* von Sashihara. In diesem Buch beschreibt der Autor acht Methoden für „great optimization“, wovon eine die robuste Optimierung ist.

In der Optimierung bestimmt man im Allgemeinen optimale Lösungen unter der Annahme, dass die Eingabedaten exakt bekannt sind. In der Praxis ist dies jedoch häufig nicht der Fall, da Unsicherheiten in den Parametern auftreten können. Einen Ausweg bietet die robuste Optimierung. Sie bezieht Toleranzen

Suchanfrage	Treffer 3/2016	Treffer 4/2020
„robust optimization“	245 000	589 000
„robust optimization“ logistics	45 000	163 000
„robust optimization“ „supply chain“	36 400	121 000
„robust optimization“ energy	89 200	296 000
„robust optimization“ engineering	138 000	484 000

Tabelle 1.1: Google Suchergebnisse zur robusten Optimierung

bzgl. gewisser unsicherer Parameter zusätzlich zu den Eingabedaten direkt in die Modellierung und Lösung der Optimierungsprobleme mit ein. In der Praxis sind diese Unsicherheiten unter anderem durch Mess-, Rundungs-, Schätz- und Implementierungsfehler oder durch unsichere Vorhersagen (wie z. B. Wettervorhersagen oder Preisentwicklungen) gegeben.

Zunächst kann man sich die Frage stellen, wo im Optimierungsproblem diese Unsicherheiten auftreten können. Wir betrachten dazu das Beispiel einer linearen Ungleichung $a^\top x \leq b$ mit $x, a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann sind sowohl additive als auch multiplikative Fehler denkbar:

1. Additiver Fehler $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ für x :

$$a^\top(x + \varepsilon) \leq b \iff a^\top x \leq b - a^\top \varepsilon.$$

Ein additiver Fehler führt also zu einer unsicheren rechten Seite.

2. Multiplikativer Fehler $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ für x :

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i (1 + \varepsilon_i) \leq b \iff \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i x_i \leq b, \quad \tilde{a}_i = a_i(1 + \varepsilon).$$

Durch einen multiplikativen Fehler entstehen also unsichere Koeffizienten auf der linken Seite.

Außerdem können natürlich auch Unsicherheiten in der Zielfunktion auftreten. Bei einem linearen Optimierungsproblem wäre demnach der Vektor c der Zielfunktion $c^\top x$ unsicher.

1.2 Warum robuste Optimierung?

In der Praxis gibt es bei Optimierungsproblemen häufig Unsicherheiten in den Parametern, d. h. in den Eingabedaten. Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem (LP)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \tag{1.1a}$$

$$\text{s.t. } a_i^\top x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{1.1b}$$

$$x \geq 0. \tag{1.1c}$$

Unsicherheiten können demnach bei den Werten $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^n$ auftreten. Eine Möglichkeit wäre es, das sogenannte *nominale Optimum* zu berechnen. Dabei ignoriert man die Unsicherheiten, löst das LP (1.1) für eine bestimmte nominale Eingabe und erhält so das nominale Optimum \bar{x} . Dabei entsteht jedoch das Problem, dass durch kleine Änderungen in den Eingabewerten das Optimum \bar{x} sehr teuer oder gar unzulässig werden kann. Eine Fallstudie hierzu wurde in Ben-Tal

u. a. (2009) auf Basis der **NETLIB** ([Netlib 2016](#)), einer im Netz verfügbaren Bibliothek mit realen und akademischen linearen Optimierungsproblemen, durchgeführt. Bei der Untersuchung der Ungleichung 372,

$$\begin{aligned} a^\top x &= -15.79081x_{826} - 8.598819x_{827} - 1.88789x_{828} - \dots + x_{880} - \dots \\ &\geq b = 23.387405, \end{aligned}$$

des PILOT4-Problems der **NETLIB** ergab sich nach Annahme einer Abweichung der Koeffizienten um 0.1 %, also

$$|a_i^{\text{real}} - a_i| \leq 0.001|a_i|,$$

dass das nominale Optimum die Ungleichung um bis zu 450 % verletzt. Die Untersuchung dieser Ungleichung ergab außerdem, dass in 50 % der Fälle, in der die Einträge a_j von a durch $(1 + \xi_j)a_j$ mit unabhängig und auf $[-0.001, 0.001]$ gleichverteilten „relativen Störungen“ ξ_j ersetzt wurden, eine Verletzung auftrat, d. h.

$$\text{Prob}(, \text{Verletzung} > 0) = \frac{1}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine starke Verletzung lag bei 18 %, d. h.

$$\text{Prob}(, \text{Verletzung} > 150\%) = \frac{18}{100}.$$

Im Mittel trat eine Verletzung von 125 % auf. Insgesamt gibt es 90 Probleme in der **NETLIB** Bibliothek. Bei 19 Problemen führte eine Abweichung von 0.01 % zu einer Verletzung von mindestens 5 % einiger Ungleichungen. Bei 13 dieser Probleme traten Verletzungen von mehr als 50 % und bei 6 Problemen von mehr als 100 % auf. Bei dem Problem PILOT4 verletzte das nominale Optimum einige Ungleichungen sogar um mehr als 210 000 %.

Unsicherheiten in den Eingabedaten führen also, in Bezug auf das nominale Optimum, oft zu starken Verletzungen der Nebenbedingungen, so dass ein nominales Optimum nach nur leichter Störung der Daten in der Praxis unbrauchbar wird.

Das Ziel dieser Vorlesung ist das Studium der robusten linearen, konischen und kombinatorischen Optimierung. Die grundlegende Idee wollen wir hier kurz anhand des LPs

$$\min_x \{c^\top x: Ax \leq b\}$$

skizzieren. Wie wir bereits herausgestellt haben, kann die Unsicherheit in den Daten (c, A, b) auftreten. Das grundlegende Paradigma der robusten Optimierung besteht jetzt darin, dass wir die eine Realisierung (c, A, b) der LP-Daten durch eine Menge von LP-Daten $(c, A, b) \in \mathcal{U}$ ersetzen, d. h., das unsichere LP als Menge

$$\{\min_x \{c^\top x: Ax \leq b\}: (c, A, b) \in \mathcal{U}\}$$

von LPs auffassen. Dabei ist die Struktur der Elemente dieser Menge, d. h. der LPs, zwar gleich, aber die Daten (c, A, b) der Elemente variieren in der sogenannten *Unsicherheitsmenge* \mathcal{U} .

Die offensichtliche Frage ist jetzt die der Definition von Zulässigkeit und Optimalität. Wir nennen einen Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ *robust zulässig*, falls $Ax^* \leq b$ gilt für alle $(c, A, b) \in \mathcal{U}$. Beziiglich der Optimalität von Punkten verfolgt die robuste Optimierung eine “worst-case Philosophie”. Das heißt, dass wir einen robust zulässigen Punkt x^* mit dem “garantierten” Zielfunktionswert

$$\sup \{c^\top x^* : (c, A, b) \in \mathcal{U}\}$$

bewerten. Die beste robust zulässige Lösung ist also die, die das Problem

$$\min_x \left\{ \sup_{(c, A, b) \in \mathcal{U}} c^\top x : Ax \leq b \text{ für alle } (c, A, b) \in \mathcal{U} \right\}$$

löst. Offensichtlich ist dieses Problem äquivalent zu

$$\min_{x, t} \{t : c^\top x \leq t, Ax \leq b \text{ für alle } (c, A, b) \in \mathcal{U}\}, \quad (1.2)$$

dem sogenannten *robusten Gegenstück*¹ des originalen Problems.

Als allgemeine Lektüre zur robusten Optimierung eignet sich insbesondere das Buch *Robust Optimization* von Ben-Tal u. a. – eines der bislang wenigen Lehrbücher zur robusten Optimierung. Generell gilt die robuste Optimierung als sehr junges Forschungsgebiet. Einen ersten wichtigen Beitrag zur Robustheit von Optimierungsproblemen lieferte Soyster (1973) im Jahr 1973 in einem Artikel, in dem er beschreibt, was heute gemeinhin als *robuste lineare Optimierung* bezeichnet wird. Allerdings wurde der „Preis der Robustheit“ im Allgemeinen als zu hoch eingeschätzt. Dies änderte sich wieder gegen Ende der 90er Jahre durch wichtige und systematisierende Beiträge von Dimitris Bertsimas², Aharon Ben-Tal³, Arkadi Nemirovski⁴, Melvin Sim⁵ und anderen Autoren. Außerdem sind in den letzten Jahren neue, weniger konservative, robuste Konzepte entstanden, die den oft kritisierten Preis der Robustheit reduzieren. Es muss allerdings auch nicht der Fall sein, dass der „Preis der Robustheit“ extrem groß ist. Er hängt immer von der konkreten Problemstellung ab – wir werden dies im Verlauf der Vorlesung noch genauer diskutieren. Als positives Beispiel vorab sei aber nochmal die NETLIB-Studie genannt: bei robuster Modellierung aller Probleme, d. h. bei einer “Immunsierung gegen Unsicherheit” für ein 0.1 %-Unsicherheitslevel ist der robuste

¹Engl.: *robust counterpart*

²Dimitris Bertsimas: <http://www.mit.edu/~dbertsim>

³Aharon Ben-Tal: <http://iew3.technion.ac.il/Home/Users/morbt.phtml>

⁴Arkadi Nemirovski: https://de.wikipedia.org/wiki/Arkadi_Nemirovski

⁵Melvin Sim: <http://bizfaculty.nus.edu/faculty-profiles/127-melvyn>

Zielfunktionswert nie mehr als um 1 % größer als der Zielfunktionswert der nominalen Lösung.

Es sei außerdem angemerkt, dass die robuste Optimierung nicht die einzige Möglichkeit ist, Unsicherheiten in den Eingabedaten zu adressieren. Weitere Techniken sind die folgenden:

Stochastische Optimierung: In der stochastischen Optimierung nimmt man an, dass die unsicheren Daten zufällig sind und einer gewissen Verteilung P folgen. Dem robusten Gegenstück entspricht dann in der stochastischen Optimierung das sogenannte *chance constrained* Problem

$$\min_{x,t} \{t: \text{Prob}_{(c,A,b) \sim P}\{c^\top x \leq t, Ax \leq b\} \geq 1 - \varepsilon\},$$

wobei $\varepsilon \ll 1$ die vorgegebene Toleranz und P die Verteilung der Daten (c, A, b) ist.

Das heißt, in der stochastischen Optimierung nutzt man Wahrscheinlichkeitsverteilungen und berechnet z. B. „optimale Erwartungswerte“. Nachteile ergeben sich dadurch, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen oft nicht bekannt oder die entstehenden Optimierungsprobleme sehr schwierig zu lösen sind. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass bei der robusten Optimierung keinerlei Wahrscheinlichkeitsverteilungen bekannt sein müssen. Eine ausführliche Einführung in die stochastische Optimierung findet man z. B. in Birge und Louveaux (2011).

Sensitivitätsanalyse: Die Sensitivitätsanalyse unterscheidet sich konzeptionell von der robusten und stochastischen Optimierung, da sie Sensitivitäten der Lösung in Bezug auf Änderungen der Eingabedaten ex-post untersucht, d. h. nachdem eine optimale nominale Lösung berechnet wurde. Es werden also keinerlei Unsicherheiten von vornherein in die Modellierung mit einbezogen, sondern „nur“ a posteriori die Auswirkung von (kleinen) Änderungen in den Daten untersucht. Eine gute Darstellung der Sensitivitätsanalyse von konvexen Optimierungsproblemen befindet sich in Boyd und Vandenberghe (2004).

Wir schließen dieses einleitende Kapitel mit drei Beispielen.

Beispiel 1.1. (a) Es sei die Situation aus Abbildung 1.1 gegeben. Die Punkte x^* und y^* seien beide optimal, jedoch ist y^* möglicherweise unzulässig. Man wähle daher x^* als Optimallösung. Das heißt, man versucht, wenn möglich, Lösungen zu vermeiden, bei denen eine unsichere Ungleichung bindet.

(b) Gegeben sei die Situation aus Abbildung 1.2. Es sei $x_2 - \xi x_1 \leq 1$ eine optimale Seitenfläche und $\xi \in [-0.1, 0.1]$ sei unsicher. Nehmen wir an, dass sich für $\xi = 0$ der Punkt $x^* = (x_1^*, x_2^*)^\top = (10, 1)^\top$ als optimale



Abbildung 1.1: Illustration von Beispiel 1.1(a)

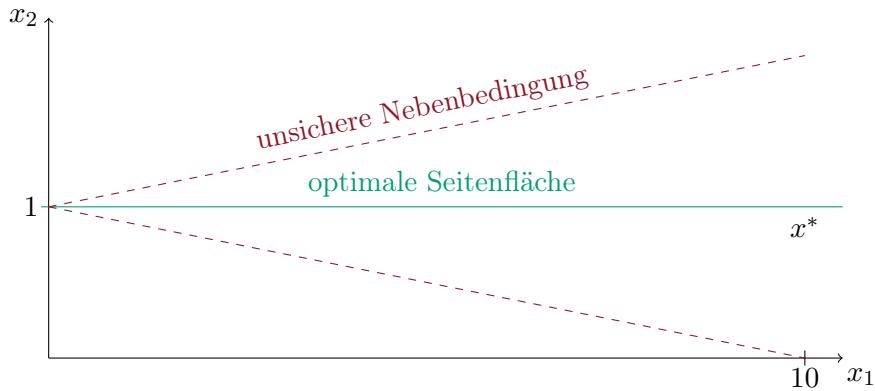


Abbildung 1.2: Illustration von Beispiel 1.1(b)

Lösung ergibt. Gilt allerdings $\xi = -0.1$, so ist der Punkt $(x_1^*, x_2^*)^\top = (10, 1)^\top$ aber (deutlich) unzulässig. Man beachte daher: Wenn möglich, weise Variablen mit unsicheren Koeffizienten niedrige Werte zu.

Beispiel 1.2. Gegeben sei $a^\top x \leq b$, wobei a unsicher und \bar{a} der Nominalwert ist. Weiterhin sei $a = \bar{a} + \rho\xi$ mit $\rho \in \mathbb{R}, \xi = (\xi_i)_{i=1}^n$ und $-1 \leq \xi_i \leq 1$ sei gleichverteilt für $i = 1, \dots, n$. Dann ist

$$a^\top x = (\bar{a} + \rho\xi)^\top x = \bar{a}^\top x + \rho\xi^\top x \leq b.$$

Nun sei die Ungleichung bindend in x^* . In zwei Dimensionen ergibt sich die Skizze aus Abbildung 1.3. Da ξ gleichverteilt ist, ist die Wahrscheinlichkeit für Unzulässigkeit 50 %. Bei k unsicheren, unabhängig gleichverteilten Ungleichungen erhält man als Wahrscheinlichkeit für Unzulässigkeit $1 - 1/2^k$, was bei $k = 10$ schon einem Wert von 0.999 liefert.

Beispiel 1.3 (Produktionsplanung). Die Produktion eines Pharmaunternehmens soll optimiert werden. Das Unternehmen produziert zwei Medikamente. Beide werden aus dem Wirkstoff A hergestellt. Dieser Wirkstoff wird aus zwei unterschiedlichen Rohmaterialien (I & II) gewonnen. Die Produktion unterliegt den in den Tabellen 1.2, 1.3 und 1.4 aufgeführten Restriktionen.

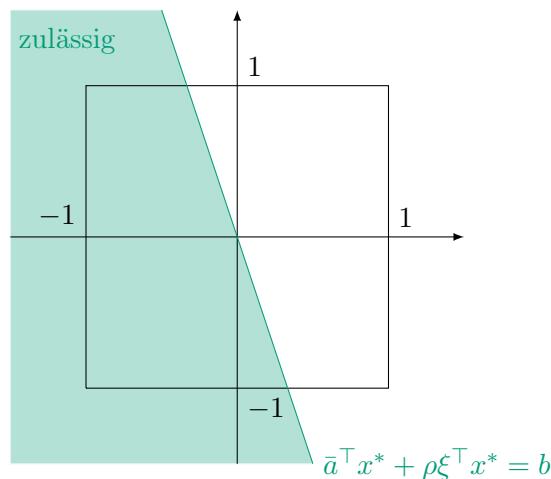


Abbildung 1.3: Illustration von Beispiel 1.2

Parameter	Einheit	Med. 1	Med. 2
Verkaufspreis	\$ pro 1000 Packungen	6200	6900
Inhalt von Wirkstoff A	g pro 1000 Packungen	0.5	0.6
Arbeitseinsatz	h pro 1000 Packungen	90	100
Maschineneinsatz	h pro 1000 Packungen	40	50
Betriebskosten	\$ pro 1000 Packungen	700	800

Tabelle 1.2: Produktionsdaten für Beispiel 1.3

Rohmaterial	Einkaufspreis (in \$ pro kg)	Inhalt von Wirkstoff A (in g pro kg)
Rohmaterial I	100.00	0.01
Rohmaterial II	199.90	0.02

Tabelle 1.3: Rohmaterialdaten für Beispiel 1.3

Budget (in \$)	Arbeitseinsatz (in Stunden)	Maschinen (in Stunden)	Lagerkapazität (in kg Rohmaterial)
100 000	2000	800	1000

Tabelle 1.4: Ressourcendaten für Beispiel 1.3

Das Ziel ist es, die Produktionsmengen von Medikament 1 und Medikament 2 so anzupassen, dass der Profit des Unternehmens maximiert wird. Dabei wird die Annahme getroffen, dass die Konzentration des Wirkstoffs A im Rohmaterial I um $\pm 5\%$, d. h. in $[0.0095, 0.0105]$ und im Rohmaterial II um $\pm 2\%$, d. h. in $[0.0196, 0.0204]$ schwankt. Als Variablen werden folgende Bezeichnungen verwendet:

Variable	Beschreibung
x_1	Menge Ankauf Rohmaterial I
x_2	Menge Ankauf Rohmaterial II
y_1	Produktionsmenge Medikament 1
y_2	Produktionsmenge Medikament 2

Damit ergibt sich das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c^\top x + d^\top y \\ \text{s.t.} \quad & Ax + Dy \leq b, \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0, \end{aligned}$$

wobei

$$c = \begin{pmatrix} 100 \\ 199.9 \end{pmatrix}$$

der Vektor der Einkaufskosten und

$$d = \begin{pmatrix} 700 - 6200 \\ 800 - 6900 \end{pmatrix}$$

der Vektor der Netto-Produktionskosten ist. Die Nebenbedingungsmatrizen und die rechte Seite sind gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.02 \\ 100.0 & 199.9 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 700 & 800 \\ 0 & 0 \\ 90 & 100 \\ 40 & 50 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 100\,000 \\ 1000 \\ 2000 \\ 800 \end{pmatrix}.$$

Als optimale nominale Lösung ergibt sich $-8819.656 \$$ mit den Ankaufsmengen $x_1 = 0$ und $x_2 = 438.789$ und den Produktionsmengen $y_1 = 17.552$ und $y_2 = 0$. Falls nun nicht genügend Wirkstoff A vorhanden wäre, müsste man die Produktion entsprechend reduzieren.

Wenn man annimmt, dass zu je 50 % Wahrscheinlichkeit die Konzentrationen extreme Werte im Bereich der angenommenen Schwankungen annehmen, werden die optimalen Lösungen Zufallsvariablen:

$$y_1 = \begin{cases} 17.552, & \text{nominaler Optimalwert,} \\ 17.201, & \text{um } 2\% \text{ verminderter Wert,} \end{cases}$$

mit je 50 % Wahrscheinlichkeit. Somit ergibt sich zu 50 % ein Profit von ca. 6929 \$. im Vergleich zu 8819.658 \$. Eine ex-post-Analyse würde also den Profit bedeutend schmälern. Direktes Integrieren der worst-case-Konzentration in die Modellierung ergibt allerdings einen garantierten Profit von 8294.567 \$. Der Aufwand der Modellierung von Unsicherheiten kann sich also lohnen. Die entsprechenden Methoden werden wir im Laufe der Vorlesung kennenlernen.

Zunächst wiederholen wir aber die für uns wichtigen Aspekte der linearen und konischen Optimierung.

Kapitel 2

Grundlagen der linearen und konischen Optimierung

Dieses Kapitel beruht auf den ersten beiden Kapiteln des Buches *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications* von Ben-Tal und Nemirovski.

2.1 Grundlegende Begriffe der linearen Optimierung

Wir betrachten im Folgenden das primale lineare Optimierungsproblem

$$\min_x \quad c^\top x \tag{2.1a}$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \geq b. \tag{2.1b}$$

Dabei sei $x \in \mathbb{R}^n$ der Variablenvektor, $c \in \mathbb{R}^n$ der Kostenvektor, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Nebenbedingungsmatrix und $b \in \mathbb{R}^m$ die rechte Seite.

Definition 2.1. • Das Problem (2.1) heißt *zulässig*, wenn die *zulässige Menge*

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\},$$

nicht leer ist. Ansonsten heißt das Problem *unzulässig*.

- Ein Punkt $x \in \mathcal{F}$ heißt *zulässig* für Problem (2.1).
- Das Problem (2.1) ist *nach unten beschränkt*, falls es entweder unzulässig ist oder ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $c^\top x > M$ für alle $x \in \mathcal{F}$ gilt.
- Falls Problem (2.1) nach unten beschränkt ist, so nennen wir den Wert

$$c^* := \inf_{x \in \mathcal{F}} c^\top x$$

optimalen Zielfunktionswert von Problem (2.1). Falls $\mathcal{F} = \emptyset$ gilt, so definieren wir $c^* := +\infty$. Analog definieren wir $c^* := -\infty$ falls Problem (2.1) nach unten unbeschränkt ist.

- Das Problem (2.1) heißt *lösbar*, wenn es zulässig sowie nach unten beschränkt ist und der optimale Zielfunktionswert angenommen wird, d. h. wenn ein $x^* \in \mathcal{F}$ existiert mit $c^\top x^* = c^*$. In diesem Fall nennen wir x^* die *optimale Lösung* des Problems.

Falls das lineare Optimierungsproblem (2.1) zulässig und nach unten beschränkt ist, ist es auch lösbar. Das ist bei nichtlinearen Problemen nicht immer der Fall. Als Gegenbeispiel sei das Problem

$$\min_{x \geq 1} \frac{1}{x}$$

angeführt, das zulässig ($\{x \in \mathbb{R}: x \geq 1\} \neq \emptyset$) und nach unten beschränkt (durch $M = 0$), aber nicht lösbar ist, da das Infimum nicht angenommen wird.

2.2 Dualität in der linearen Optimierung

Es sei

$$c^* := \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c^\top x: Ax \geq b\}.$$

Unser Ziel im Folgenden ist die Angabe von unteren Schranken für c^* .

Beispiel 2.2. Es sei folgendes Optimierungsproblem gegeben:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x_1 + x_2 + \cdots + x_{2020} \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + \cdots + 2020x_{2020} - 1 \geq 0, \\ & 2020x_1 + \cdots + x_{2020} - 100 \geq 0. \end{aligned}$$

Die Behauptung ist, dass $c^* \geq 101/2021$ gilt. Addiert man nämlich die beiden Nebenbedingungen, so ergibt sich

$$2021(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2019} + x_{2020}) - 101 \geq 0,$$

woraus direkt $c^* \geq 101/2021$ folgt. LP-Dualität ist nichts anderes als eine geschickte Verallgemeinerung dieses Tricks.

Allgemeiner wollen wir jetzt das duale Problem zum primalen Problem (2.1) untersuchen.

Motivation 2.3. Gegeben sei das primale lineare Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax \geq b.$$

Zur Konstruktion des zugehörigen dualen Problems gehen wir genau so vor wie im letzten Beispiel:

Kombiniere die Nebenbedingungen in $Ax \geq b$ derart linear, dass sich die Zielfunktion ergibt.

Jede dieser Linearkombinationen mit Koeffizienten $y \geq 0$ ergibt eine untere Schranke $b^\top y$ für $c^\top x^*$. Gesucht ist dann die beste untere Schranke, was uns direkt auf die Definition des *dualen Problems*

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} b^\top y \tag{2.2a}$$

$$\text{s.t. } y^\top A = c^\top, \tag{2.2b}$$

$$y \geq 0 \tag{2.2c}$$

führt. Natürlich kann man Gleichung (2.2b) transponieren und erhält so das äquivalente, aber vielleicht leichter zugängliche, Gleichungssystem $A^\top y = c$.

Satz 2.4 (Dualitätssatz für lineare Optimierungsprobleme). Es gelten die folgenden Aussagen.

1. Das duale Problem des dualen Problems ist das primale Problem.
2. *Schwache Dualität*: Für alle $y \geq 0$ mit $y^\top A = c^\top$, d. h. für alle dual zulässigen Punkte, gilt

$$b^\top y \leq c^\top x \quad \text{für alle } x \in \mathcal{F}.$$

3. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) Das primale Problem (2.1) ist zulässig und nach unten beschränkt.
- (b) Das duale Problem (2.2) ist zulässig und nach oben beschränkt.
- (c) Das primale Problem (2.1) ist lösbar.
- (d) Das duale Problem (2.2) ist lösbar.
- (e) Das primale Problem (2.1) und das duale Problem (2.2) sind beide zulässig.

4. *Starke Dualität*: Wenn

$$(a) \iff (b) \iff (c) \iff (d) \iff (e)$$

gilt, so gilt auch

$$b^\top y^* = c^\top x^*,$$

wobei x^* optimal für das primale Problem (2.1) und y^* optimal für das duale Problem (2.2) ist.

Beweis. Siehe Ben-Tal und Nemirovski (2001, Theorem 1.3.2). \square

Eine einfache Folgerung des Dualitätssatzes für LPs ist der Satz vom komplementären Schlupf.

Satz 2.5 (Notwendige und hinreichende Bedingungen für lineare Probleme). Sei x zulässig für das primale Problem (2.1) und y sei zulässig für das duale Problem (2.2). Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

1. x ist optimal für Problem (2.1) und y ist optimal für Problem (2.2).
2. $y_i(Ax - b)_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$.
3. Die Dualitätsslücke ist geschlossen, d. h. es gilt $c^\top x = b^\top y$.

Beweis. Die Äquivalenz zwischen 2. und 3. folgt aus

$$y^\top (Ax - b) = y^\top Ax - y^\top b = c^\top x - y^\top b$$

und der Tatsache, dass $y^\top (Ax - b) \geq 0$ für alle primal-dual zulässigen Paare (x, y) gilt. \square

Bemerkung 2.6. Sowohl das primale Problem (2.1) als auch das duale Problem (2.2) kann in polynomialer Zeit gelöst werden, z. B. mit der Ellipsoidmethode. Die Details kann man bei Ben-Tal und Nemirovski (2001, Kapitel 5) nachlesen. In der Praxis verwendet man aber in der Regel das Simplex-Verfahren (obwohl es im worst-case exponentielle Laufzeit hat) oder Innere-Punkte-Methoden. In der Praxis häufig verwendete LP-Löser sind

- CPLEX (kommerziell, aber frei für akademische Zwecke)¹ oder
- Gurobi (kommerziell, aber frei für akademische Zwecke)².

Wann immer es möglich ist, Optimierungsprobleme als LP zu formulieren, sollte man dies aus zwei guten Gründen tun: Erstens lassen sich diese Probleme heutzutage für viele Nebenbedingungen und Variablen effizient und

¹<http://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer>

²<https://www.gurobi.com>

zuverlässig lösen. Zweitens haben wir eine reiche Theorie der linearen Optimierungsprobleme, wie z. B. den starken Dualitätssatz.

Leider sind viele Probleme in der Praxis nichtlinear, so dass sie sich nicht (direkt) mithilfe von LP-Techniken lösen lassen. Der typische Weg, das allgemeine LP (2.1) hin zu nichtlinearen Optimierungsproblemen zu verallgemeinern besteht darin, entweder eine nichtlineare Zielfunktion oder nichtlineare Nebenbedingungen zuzulassen. Der letzte Aspekt verdient dabei etwas mehr Aufmerksamkeit. Bisher formulieren wir lineare Probleme mittels linearer Nebenbedingungen $g(x) \geq 0$ mit affin-linearen Funktionen $g(x) := Ax - b$. Eine Möglichkeit der Verallgemeinerung würde also darin bestehen, nichtlineare Funktionen g zuzulassen. Andererseits können wir uns aber auch dem Ungleichungssymbol \geq zuwenden und dem Problem durch eine andere Interpretation dieses Symbols Nichtlinearität hinzufügen.

Was im Moment vielleicht noch etwas esoterisch anmuten mag, konkretisieren wir in den folgenden Abschnitten.

2.3 Halbordnungen im \mathbb{R}^m und konvexe Kegel

Die lineare Nebenbedingung $Ax \geq b$ besteht aus einer Ungleichung zwischen Vektoren, die wir wie folgt auffassen:

$$a \geq b \iff a_i \geq b_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m.$$

Das wir das Symbol \geq derart auffassen, hat einen guten Grund, da wir so eine mit linearen Operatoren verträgliche Halbordnung erhalten:

Definition 2.7 (Halbordnung). Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^m$. Wenn \succeq derart definiert ist, dass die Axiome

- (H1) *Reflexivität*: $a \succeq a$,
 - (H2) *Antisymmetrie*: $a \succeq b, b \succeq a$ impliziert $a = b$,
 - (H3) *Transitivität*: $a \succeq b, b \succeq c$ impliziert $a \succeq c$,
- gelten, so spricht man bei \succeq von einer *Halbordnung*. Zusätzlich fordern wir für das Folgende die Axiome
- (H4) *Verträglichkeit mit linearen Operatoren*:

- (H4a) *Homogenität*: $a \succeq b, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ impliziert $\lambda a \succeq \lambda b$,
- (H4b) *Additivität*: $a \succeq b, c \succeq d$ impliziert $a + c \succeq b + d$.

Beispiel 2.8 (Halbordnungen). 1. (H1)–(H4) sind erfüllt für das Standard-“ \geq ” im \mathbb{R}^m .

2. (H1)–(H3) sind erfüllt für Mengeninklusionen.
3. (H1)–(H4) sind erfüllt für Matrizen A, B mit $A \succeq B$ genau dann, wenn die Matrix $A - B$ positiv semidefinit ist.

Ein signifikanter Teil der LP-Dualität ist begründet durch (H1)–(H4). Wir wollen nun Nichtlinearitäten zulassen und dabei möglichst viele der Ergebnisse der linearen Dualitätstheorie erhalten.

Es sei “ \succeq ” eine Ordnungsrelation, die (H1)–(H4) aus Definition 2.7 erfüllt. Ferner betrachten wir die Menge

$$\mathcal{K} := \{a \in \mathbb{R}^m : a \succeq 0\},$$

die den Zweck erfüllt, die \succeq -nichtnegativen Vektoren zu benennen. In diesem Fall legt Menge \mathcal{K} bereits eine Ordnung fest. Man interpretiert dabei

$$a \succeq b \iff a - b \succeq 0 \iff a - b \in \mathcal{K}.$$

Beweis. Die erste Äquivalenz lässt sich wie folgt beweisen:

1. Es sei $a \succeq b$. Wegen (H1) gilt $-b \succeq -a$. Mit (H4b) ist dann $a - b \succeq 0$.
2. Sei nun $a - b \succeq 0$. Addiere $b \succeq a$ und erhalte $a \succeq b$. \square

Man kann sich überlegen, dass die Menge \mathcal{K} nicht beliebig definiert gewählt sein darf. In den Übungen werden wir sehen, dass jeder sogenannte spitze konvexe Kegel eine Ordnungsrelation induziert, die die Axiome (H1)–(H4) erfüllt. Umgekehrt legt jede Ordnungsrelation \succeq , die Definition 2.7 erfüllt, einen spitzen, konvexen Kegel fest. Diese Ordnung bezeichnen wir dann mit $\geq_{\mathcal{K}}$:

$$a \geq_{\mathcal{K}} b \iff a - b \geq_{\mathcal{K}} 0 \iff a - b \in \mathcal{K}.$$

Definition 2.9 (Spitze konvexe Kegel). Die Menge $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^m$ ist ein *spitzer, konvexer Kegel*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

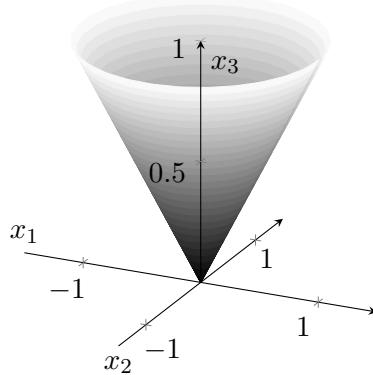
(K1) $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

(K2) \mathcal{K} ist abgeschlossen unter Addition, d. h. es gilt

$$a, a' \in \mathcal{K} \implies a + a' \in \mathcal{K}.$$

(K3) \mathcal{K} ist konisch, d. h. es gilt

$$a \in \mathcal{K}, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \implies \lambda a \in \mathcal{K}.$$

Abbildung 2.1: Der Lorentz-Kegel \mathbb{L}^3

(K4) \mathcal{K} ist spitz, d. h. es gilt

$$a \in \mathcal{K}, -a \in \mathcal{K} \implies a = 0.$$

Geometrisch bedeutet (K4), dass \mathcal{K} keine Gerade durch den Ursprung enthält.

Beispiel 2.10 (Kegel). 1. Die koordinatenweise Ordnungsrelation “ \geq ” im \mathbb{R}^m liefert den Kegel

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^m : x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, i = 1, \dots, m\} = \mathbb{R}_{\geq 0}^m,$$

d. h., \mathcal{K} ist der nicht-negative Orthant im \mathbb{R}^m . Dieser spezielle Kegel hat noch zwei weitere Besonderheiten: \mathcal{K} ist abgeschlossen und hat ein nichtleeres Inneres $\text{int}(\mathcal{K})$, d. h. es gibt ein $v \in \mathcal{K}$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass die ε -Kugel um v auch in \mathcal{K} liegt. Die letzte Eigenschaft erlaubt es uns zu definieren, dass $a > b$ genau dann gilt, wenn auch $a - b \in \text{int}(\mathcal{K})$ gilt. Halbordnungen mit genau diesen Eigenschaften sind die Halbordnungen, die wir im Folgenden betrachten wollen.

2. Lorentzkegel (auch „second order cone“ oder „ice cream cone“):

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^m &= \left\{ (x_1, \dots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m : x_m \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m-1}^2} \right\} \\ \iff \mathbb{L}^m &= \left\{ (x_1, \dots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m : x_m \geq \|(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})\|_2 \right\}, \end{aligned}$$

vgl. Abbildung 2.1.

3. Eine wichtige Rolle in der Optimierung nimmt auch der Kegel $S_{\geq 0}^m$ der positiv-semidefiniten symmetrischen $m \times m$ Matrizen ein, d. h. der Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, für die

$$A = A^\top \quad \text{und} \quad x^\top A x \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^m$$

gilt.

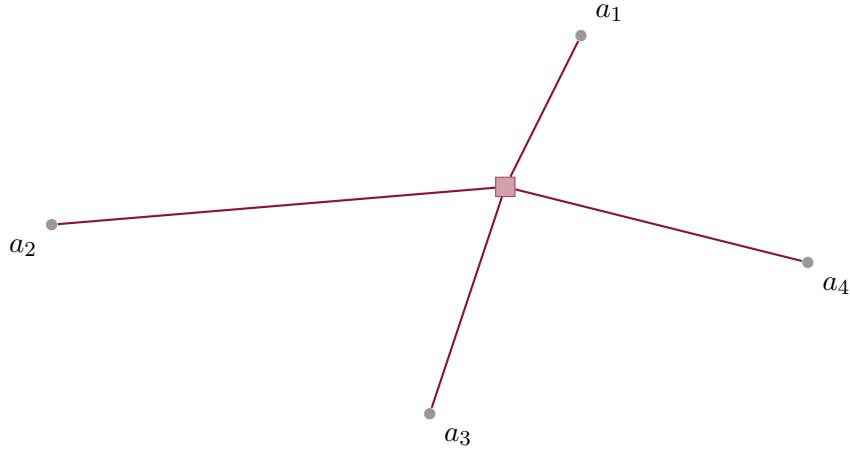


Abbildung 2.2: Illustration des Steinersummen-Beispiels 2.11 im \mathbb{R}^2 mit $m = 4$ Bohrungen. Frage: An welchem Ort $x \in \mathbb{R}^2$ soll der Behälter (rotes Rechteck) aufgestellt werden?

Es existieren viele Anwendungen der second-order-cone- oder der positiv-semidefiniten Optimierung. Die entsprechenden Klassen von Optimierungsproblemen werden SOCP (second-order-cone programming) und SDP (semidefinite programming) genannt. In dieser Vorlesung wird uns später eine Anwendung der second-order-cone-Optimierung bei der robusten linearen Optimierung mit ellipsoidalen Unsicherheiten begegnen. Bevor wir zur Einführung von allgemeinen konischen Optimierungsproblemen kommen, wollen wir zuerst mit zwei Beispielen illustrieren, dass der Lorentzkegel in natürlicher Weise bei der Modellierung vieler Probleme auftritt.

Beispiel 2.11 (Steinersummen). Es werden m Ölbohrungen an den Punkten $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ (hier: $n = 2$) durchgeführt. Frage: Wo sollte ein Sammelbehälter aufgestellt werden, so dass die Gesamtlänge der Ölrohre, die die $a_i, i = 1, \dots, m$, mit dem Behälter verbinden, minimal wird? Man kann sich dies grafisch am Beispiel von vier Bohrpunkten klarmachen; siehe Abbildung 2.2. Wir erhalten damit folgendes Optimierungsproblem:

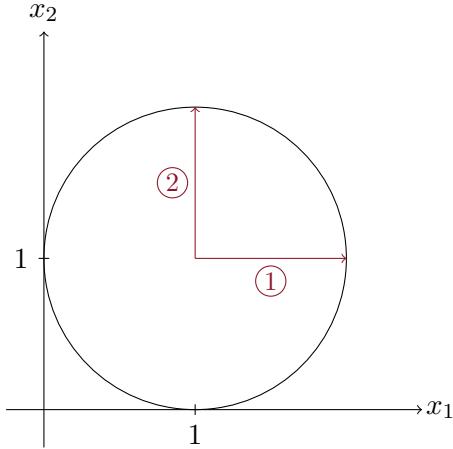


Abbildung 2.3: Illustration des Beispiels 2.12 zur Kugelunsicherheit

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \|x - a_i\|_2 \\
 \iff & \min_{t \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m t_i \quad \text{s.t.} \quad \|x - a_i\|_2 \leq t_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m \\
 \iff & \min_{t \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m t_i \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} x - a_i \\ t_i \end{pmatrix} \in \mathbb{L}^{n+1} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m. \\
 \iff & \min_{t \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m t_i \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} x \\ t_i \end{pmatrix} \geq_{\mathbb{L}^{n+1}} \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Dies ist ein sogenanntes Second-Order-Cone-Problem.

Beispiel 2.12 (Kugelunsicherheit). Wie bereits erwähnt, kommen Lorentzkegel auch bei der Robustifizierung linearer Ungleichungen mit ellipsoidalen Unsicherheitsmengen vor (dazu später mehr). Der Einfachheit halber betrachten wir hier zunächst Kugelunsicherheiten. Es sei dazu die lineare Ungleichung

$$x_1 + x_2 \geq 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

gegeben. Die Unsicherheit $(u_1, u_2)^\top$ der Daten $(1, 1)^\top$ sei nun derart gegeben, dass $\|(u_1, u_2)^\top\|_2 \leq 1$ gilt. Das heißt, zwei mögliche Realisierungen der unsicheren Ungleichung könnten

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 + x_2 \geq 0, \quad \text{vgl. ① in Abbildung 2.3,} \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 0, \quad \text{vgl. ② in Abbildung 2.3,}
 \end{aligned}$$

lauten. Wenn die Ungleichungen für alle Realisierungen dieser Unsicherheit erfüllt sein sollen, müssen wir

$$\min_{u \in \mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} 1+u_1 \\ 1+u_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\|_2 \leq 1$$

fordern, was äquivalent ist zu

$$x_1 + x_2 + \min_{u \in \mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\|_2 \leq 1.$$

Bekannterweise gilt $u^\top x = \|u\|_2 \|x\|_2 \cos(u, x)$. Dieser Ausdruck wird minimal, wenn $\cos(u, x) = -1$, also wenn $u = -x/\|x\|_2$ gewählt wird. Es ist dann

$$x_1 + x_2 - \frac{1}{\|x\|_2} x^\top x \geq 0,$$

was wiederum äquivalent ist zu

$$x_1 + x_2 \geq \|x\|_2.$$

Dies ist eine Second-Order-Cone-Nebenbedingung.

2.4 Konische Optimierungsprobleme und Dualität

Im Folgenden sei $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^m$ ein abgeschlossener, spitzer und konvexer Kegel mit nichtleerem Inneren. Dann nennen wir ein Optimierungsproblem der Form

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax - b \geq_{\mathcal{K}} 0$$

ein *konisches Optimierungsproblem*. Man beachte, dass sich im Vergleich zu den linearen Optimierungsproblemen nur die Definition der Halbordnung geändert hat.

Analog zur linearen Optimierung wollen wir den optimalen Zielfunktionswert des (primalen) konischen Optimierungsproblems nach unten beschränken. In der linearen Optimierung bestand unsere grundlegende Idee darin, die Nebenbedingungen mit einem nichtnegativen Vektor $y \geq 0$ linear zu kombinieren:

$$y^\top (Ax - b) \geq 0 \iff y^\top Ax \geq y^\top b.$$

Falls hierbei y so gewählt werden kann, dass

$$y^\top A = c^\top \implies c^\top x \geq y^\top b$$

gilt, hatten wir eine untere Schranke $y^\top b$ für den primalen Zielfunktionswert $c^\top x$ hergeleitet.

Bei der konischen Optimierung können wir grundsätzlich nach dem gleichen Schema vorgehen. Die noch offene Frage bei konischen Problemen lautet dann:

Mit welchen Vektoren y darf man die konischen Nebenbedingungen $Ax \geq_{\mathcal{K}} b$ multiplizieren, so dass die resultierende skalare Ungleichung

$$y^\top Ax \geq y^\top b$$

eine Folgerung aus der primalen konischen Zulässigkeit ist?

Beim einfachen Kegel $\mathcal{K} = \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ (d. h. bei LPs) sind dies offensichtlich alle $y \geq 0$, aber wie sieht die Situation für allgemeine Kegel aus?

Beispiel 2.13 (Der Lorentzkegel im \mathbb{R}^3). Wir wissen, dass nach Definition

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \geq_{\mathbb{L}^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}^3 \iff a_3 \geq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

gilt. Dies ist z. B. erfüllt für

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq_{\mathbb{L}^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2 \geq \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Gesucht sind nun also diejenigen $y \in \mathbb{R}^3$ mit

$$y^\top \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq y^\top \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wählt man zum Beispiel $y = (1, 1, 1/10)^\top \geq 0$, so erhält man

$$(1, 1, 1/10) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1.8,$$

was aber kleiner als 0 und damit ein Widerspruch ist. Das heißt, im konischen Fall sind nicht alle $y \geq 0$ möglich.

Was sind nun die verträglichen Vektoren y , so dass aus $Ax \geq_{\mathcal{K}} b$ die skalare Ungleichung $y^\top Ax \geq y^\top b$ folgt? Die Antwort lautet, dass y genau so gewählt sein muss, dass $y^\top a \geq 0$ für alle $a \in \mathcal{K}$, d. h. für alle $a \geq_{\mathcal{K}} 0$, gilt.

Der Grund ist der Folgende: Es gilt

$$Ax - b \in \mathcal{K} \iff Ax - b \geq_{\mathcal{K}} 0 \implies y^\top (Ax - b) \geq 0$$

wegen $y^\top a \geq 0$ für alle $a \in \mathcal{K}$. Weiter gilt dann für die y mit $y^\top A = c^\top$ die Äquivalenz

$$y^\top Ax \geq y^\top b \iff c^\top x \geq y^\top b.$$

Umgekehrt gilt: Sei y gegeben, so dass für alle x mit $Ax \geq_{\mathcal{K}} b$ die Ungleichung $y^\top Ax \geq y^\top b$ folgt. Dies ist aber äquivalent zu

$$y^\top (Ax - b) \geq 0 \iff y^\top a \geq 0$$

für alle $a \in \mathcal{K}$.

Diese Überlegungen führen uns direkt zur Definition des dualen Kegels.³

Definition 2.14 (Dualer Kegel). Für einen Kegel $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^m$ ist der *duale Kegel* \mathcal{K}_* definiert durch

$$\mathcal{K}_* := \left\{ y \in \mathbb{R}^m : y^\top a \geq 0 \text{ für alle } a \in \mathcal{K} \right\}.$$

Geometrisch gesehen besteht der duale Kegel also aus den Vektoren, die zu allen Elementen des primalen Kegels eine Winkel von höchstens 90° einschließen.

Satz 2.15. Es sei $K \subset \mathbb{R}^m$ eine nichtleere Menge. Dann gilt:

1. Die Menge

$$K_* = \{y \in \mathbb{R}^m : y^\top a \geq 0 \text{ für alle } a \in K\}$$

ist ein konvexer und abgeschlossener Kegel.

2. Wenn $\text{int}(K) \neq \emptyset$ gilt, dann ist K_* spitz.
3. Wenn K ein abgeschlossener, spitzer und konvexer Kegel ist, dann gilt $\text{int}(K_*) \neq \emptyset$.
4. Wenn K ein abgeschlossener, konvexer Kegel ist, dann ist auch K_* ein abgeschlossener, konvexer Kegel und es gilt $(K_*)_* = K$.
5. K ist ein abgeschlossener, spitzer und konvexer Kegel mit nichtleerem Inneren genau dann, wenn es K_* ist.

Beweis. Übung. □

Beispiel 2.16. Es sei

$$\mathcal{K} := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 - x_2 \geq 0\}$$

gegeben; siehe Abbildung 2.4. Man überzeugt sich leicht davon, dass \mathcal{K} ein Kegel ist. Offensichtlich sind alle $(y_1, y_2)^\top \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ im dualen Kegel \mathcal{K}_*

³Die Definition des dualen Kegels ist in der Literatur nicht einheitlich. In manchen Büchern wird der duale Kegel definiert als $\mathcal{K}_* := \{y \in \mathbb{R}^m : y^\top a \leq 0 \text{ für alle } a \in \mathcal{K}\}$. Dies ist an einigen Stellen aber gerade die Definition des sogenannten *polaren Kegels*.

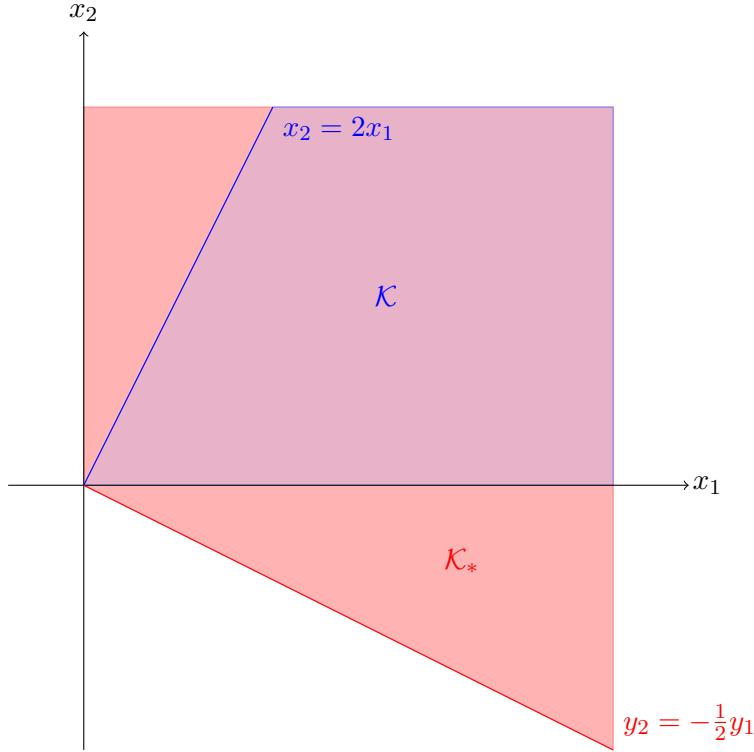


Abbildung 2.4: Illustration des Kegels \mathcal{K} und des dualen Kegels \mathcal{K}_* aus Beispiel 2.16

enthalten. Wir benötigen aber noch mehr: Gesucht sind die $(y_1, y_2)^\top$, so dass $y_1 x_1 + y_2 x_2 \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{K}$. Betrachten wir beispielsweise die Extremfälle $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{K}$ mit $2x_1 = x_2$, d. h., die ‘‘obere Seite’’. Es gilt

$$\begin{aligned} & y_1 x_1 + y_2 x_2 \geq 0 \\ \iff & x_1(y_1 + 2y_2) \geq 0 \\ \iff & y_1 + 2y_2 \geq 0 \\ \iff & y_2 \geq -\frac{1}{2}y_1. \end{aligned}$$

Wir erhalten also den ‘‘entgegengesetzten Extremfall’’, d. h., die ‘‘untere Seite’’ im dualen Kegel. Der duale Kegel ist ebenfalls in Abbildung 2.4 abgebildet. Punkte mit $y_1 < 0$ sind nicht in \mathcal{K}_* , da $(1, 0)^\top \in \mathcal{K}$.

Wir betrachten nun das (primale) konische Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \tag{2.3a}$$

$$\text{s.t. } Ax - b \geq_{\mathcal{K}} 0 \tag{2.3b}$$

und bilden dazu das konisch duale Problem.

Nach Konstruktion gilt für alle $y \in \mathcal{K}_*$ und alle primal zulässigen x die skalare Ungleichung

$$y^\top Ax \geq b^\top y.$$

Wählt man nun $y \in \mathcal{K}_*$ derart, dass $c^\top = y^\top A$ gilt, dann erhalten wir, exakt wie im LP-Fall, eine untere Schranke für das primale konische Problem (2.3). Das folgende *konisch duale Optimierungsproblem* bestimmt dann die beste dieser unteren Schranken:

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} b^\top y \tag{2.4a}$$

$$\text{s.t. } y^\top A = c^\top, \tag{2.4b}$$

$$y \geq_{\mathcal{K}_*} 0. \tag{2.4c}$$

Aufgrund der Konstruktion gilt der schwache Dualitätssatz für konische Optimierungsprobleme.

Satz 2.17 (Schwache Dualität für konische Probleme). Es seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ gegeben, so dass x zulässig für das primale Problem (2.3) und y zulässig für das duale Problem (2.4) ist. Dann gilt

$$c^\top x \geq b^\top y,$$

d. h., die Dualitätslücke $c^\top x - b^\top y$ ist nichtnegativ.

Beispiel 2.18 (Steinersummenproblem). Wir untersuchen jetzt das konisch duale Problem zum primalen Steinersummenproblem aus Beispiel 2.11. Das primale konische Problem lautete

$$\min_{t \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^m t_i \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} (x - a_1) \\ t_1 \\ \vdots \\ (x - a_m) \\ t_m \end{pmatrix} \in \mathbb{L}^3 \times \mathbb{L}^3 \times \cdots \times \mathbb{L}^3.$$

Wie wir in den Übungen sehen werden, ist der Lorentzkegel *selbstdual*, d. h. $\mathbb{L}_*^m = \mathbb{L}^m$. Für $\mathbb{L} := \mathbb{L}^3 \times \cdots \times \mathbb{L}^3$ ist der duale Kegel gegeben durch $\mathbb{L}_* = \mathbb{L}_*^3 \times \cdots \times \mathbb{L}_*^3$. (Auch davon werden wir uns in den Übungen überzeugen.) Das Duale findet man nun durch Linearkombinationen der Nebenbedingungen mit einem Element aus dem dualen Kegel. Es seien

$$\begin{pmatrix} y_i \\ s_i \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_*^3 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m$$

die Variablen des dualen Problems. Dann gilt aufgrund der Definition des dualen Kegels $y_i^\top x + s_i t_i \geq y_i^\top a_i$ für alle $i = 1, \dots, m$. Durch Summation aller Ungleichungen erhält man nun

$$\sum_{i=1}^m (y_i^\top x + s_i t_i) \geq \sum_{i=1}^m y_i^\top a_i. \quad (2.5)$$

Die linke Seite soll nun so linear kombiniert werden, so dass sie $\sum_{i=1}^m t_i$ ergibt:

$$\sum_{i=1}^m (y_i^\top x + s_i t_i) = \sum_{i=1}^m t_i.$$

Da diese Gleichung für alle primal zulässigen Elemente gelten muss, ist die einzige Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} s_i &= 1 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m y_i &= 0. \end{aligned}$$

Nun wählt man den Vektor, der die rechte Seite von (2.5) maximiert. Es ergibt sich damit das konisch duale Problem

$$\begin{aligned} \max_{y \in \mathbb{R}^{mn}} \quad & \sum_{i=1}^m a_i^\top y_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m y_i = 0, \\ & \|y_i\|_2 \leq 1 = s_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

2.5 Geometrische Veranschaulichung des konisch primalen und dualen Problems

Wir erarbeiten uns zunächst eine geometrische Interpretation des dualen Problems (2.4). Hier maximieren wir eine lineare Funktion $b^\top y$ über dem Schnitt der affinen Hyperebene $L_* := \{y \in \mathbb{R}^m : A^\top y = c\}$ mit dem Kegel \mathcal{K}_* .

Die Geometrie des primalen Problems (2.3) veranschaulichen wir uns wie folgt. Wir betrachten die Bilder $z = Ax - b \in \mathbb{R}^m$ für alle Variablen $x \in \mathbb{R}^n$. Wenn x den \mathbb{R}^n durchläuft, dann durchläuft z die affine Hyperebene

$$L := \{z = Ax - b : x \in \mathbb{R}^n\} = \text{im}(A) - b.$$

Demnach ist ein x primal zulässig, wenn für das zugehörige Bild $z \in \mathcal{K}$ gilt. Also haben wir es im primalen Problem auch mit dem Schnitt einer affinen Hyperebene und einem Kegel zu tun.

Wir nehmen nun an, dass $c^\top x$ dargestellt werden kann durch $z = Ax - b$:

$$c^\top x = d^\top(Ax - b) + \text{const} = d^\top z + \text{const} \quad (2.6)$$

mit passendem $d \in \mathbb{R}^m$. Dies ist möglich, falls $c \in \text{im}(A^\top)$, d. h. wenn es ein $d \in \mathbb{R}^m$ gibt mit $c = A^\top d$, da dann

$$c^\top x = (A^\top d)^\top x = d^\top Ax = d^\top(Ax - b) + d^\top b = d^\top z + \text{const}$$

für alle x gilt.

Falls die Bedingung (2.6) nicht erfüllt ist, ist das primale Problem (2.3) entweder unzulässig oder unbeschränkt.⁴ Betrachten wir also den interessanten Fall, d. h. den Fall, in dem $c \in \text{im}(A^\top)$ erfüllt ist. In diesem Fall können wir also das primale Problem äquivalent reformulieren zu

$$\begin{aligned} \min_{z \in \mathbb{R}^m} \quad & d^\top z \\ \text{s.t.} \quad & z \in L, \quad z \geq_{\mathcal{K}} 0, \end{aligned}$$

wobei $L = \text{im}(A) - b$ und d ein beliebiger Vektor mit $A^\top d = c$ ist. Damit sehen wir ein, dass die geometrische Struktur beider Probleme identisch ist: Wir optimieren in beiden Fällen eine lineare Funktion über dem Schnitt einer affinen Hyperebene mit einem Kegel. Im primalen Problem haben wir die Hyperebene L und den Kegel \mathcal{K} . Im dualen Problem haben wir die Hyperebene L_* und den dualen Kegel \mathcal{K}_* .

Es gilt aber sogar noch mehr: Die affinen Hyperebenen L und L_* sind nämlich orthogonal zueinander. Um dies einzusehen, beobachten wir zunächst, dass $L = \text{im}(A) - b$ eine Verschiebung des Vektorraums $\text{im}(A)$ um $-b$ ist. Außerdem ist L_* eine Verschiebung des Vektorraums

$$\{y: A^\top y = 0\} = \ker(A^\top)$$

um ein beliebiges y_0 , das das System $A^\top y_0 = c$ löst. Da $\text{im}(A)$ und $\ker(A^\top)$ orthogonal sind, folgt die Aussage.

Definition 2.19 (Strikte Zulässigkeit für konische Probleme). Das konische Optimierungsproblem (2.3) heißt *strikt zulässig*, wenn es einen zulässigen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ im Inneren $\text{int}(\mathcal{K})$ von \mathcal{K} gibt, d. h., wenn ein x mit $Ax - b >_{\mathcal{K}} 0$ existiert.

Unser Ziel ist jetzt der Beweis des starken Dualitätssatzes der konischen Optimierung. Hierfür benötigen wir aber zunächst den folgenden Trennungssatz.

⁴Das diese Aussage tatsächlich gilt, zeigen wir in den Übungen.

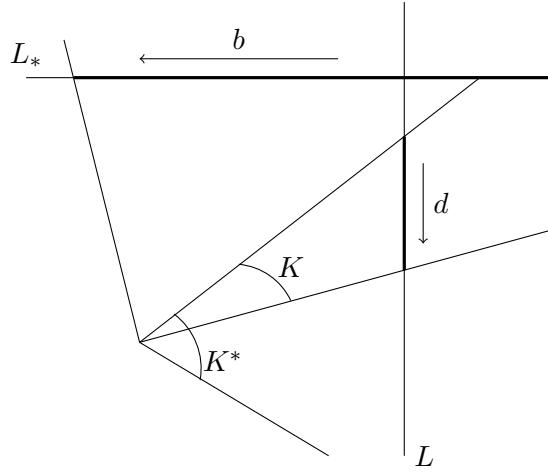


Abbildung 2.5: Primal-duales Paar von konischen Problemen

Satz 2.20 (Trennungssatz für konvexe Mengen). Es seien $S, T \neq \emptyset$, $S \cap T = \emptyset$, $S, T \subseteq \mathbb{R}^m$ und S, T konvex. Dann können S und T durch eine lineare Funktion getrennt werden, d. h. es gibt $0 \neq y \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\sup_{\lambda \in S} y^\top \lambda \leq \inf_{\lambda \in T} y^\top \lambda.$$

Satz 2.21 (Starker Dualitätssatz der konischen Optimierung). Es sei das primale konische Problem

$$\begin{aligned} c^* &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ \text{s.t. } & Ax - b \geq_{\mathcal{K}} 0 \end{aligned}$$

und das zugehörige konisch duale Problem

$$\begin{aligned} b^* &= \sup_{y \in \mathbb{R}^m} b^\top y \\ \text{s.t. } & y^\top A = c^\top, \\ & y \geq_{\mathcal{K}_*} 0 \end{aligned}$$

gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Das duale Problem ist ein konisches Optimierungsproblem und das duale Problem zum konisch dualen Problem ist äquivalent zum primalen Problem.
2. Es gilt

$$c^\top x - b^\top y \geq 0$$

für alle primal zulässigen x und alle dual zulässigen y .

3. Angenommen das primale konische Problem ist nach unten beschränkt und strikt zulässig. Dann ist das konisch duale Problem lösbar und es gilt $c^* = b^*$.
4. Angenommen das konisch duale Problem ist nach oben beschränkt und strikt zulässig, d. h. es gibt ein $y >_{\mathcal{K}_*} 0$ mit $A^\top y = c$. Dann ist das primale konische Problem lösbar und es gilt $c^* = b^*$.
5. Angenommen, mindestens eines der beiden Probleme ist beschränkt und strikt zulässig. Dann ist ein primal-duales Paar (x, y) ein Paar von optimalen Lösungen genau dann, wenn

$$b^\top y = c^\top x$$

oder genau dann, wenn

$$y^\top (Ax - b) = 0$$

gilt.

Beweis. Wir beweisen die Aussagen Schritt für Schritt:

1. Die erste Aussage folgt direkt aus der geometrischen Anschauung.
2. Die zweite Aussage ist der schwache Dualitätssatz 2.17.
3. Angenommen, das primale Problem (2.3) ist nach unten beschränkt und strikt zulässig mit optimalem Zielfunktionswert c^* . Zu zeigen ist dann, dass das duale Problem (2.4) lösbar ist mit $b^* = c^*$, wobei b^* der optimale duale Zielfunktionswert ist. Aus dem schwachen Dualitätssatz wissen wir bereits, dass $b^* \leq c^*$ gilt. Wir müssen also einen dual zulässigen Punkt y^* mit $b^\top y^* = b^* \geq c^*$ konstruieren.

Dazu betrachten wir die Menge

$$M := \{z = Ax - b : x \in \mathbb{R}^n, c^\top x \leq c^*\}$$

und analysieren zunächst den Fall $0 \neq c \in \mathbb{R}^n$. Es gilt $M \neq \emptyset$, da M ein affiner Raum geschnitten mit einem Halbraum ist. Außerdem sind M und $\text{int}(\mathcal{K})$ konvexe Mengen. Ferner gilt $M \cap \text{int}(\mathcal{K}) = \emptyset$. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es ein \bar{x} mit $c^\top \bar{x} \leq c^*$ und $\bar{z} = A\bar{x} - b >_{\mathcal{K}} 0$. Dann gilt aber auch $Ax - b >_{\mathcal{K}} 0$ für alle x hinreichend nahe an \bar{x} , was wiederum bedeutet, dass diese x zulässig für das primale Problem (2.3) sind. Da $c \neq 0$ gilt, existieren dann Punkte x hinreichend nahe an \bar{x} mit

$$c^\top x < c^\top \bar{x} \leq c^*.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von c^* , also gilt

$$M \cap \text{int}(\mathcal{K}) = \emptyset.$$

Wir dürfen also den Trennungssatz 2.20 auf $S = M$ und $T = \text{int}(\mathcal{K})$ anwenden und erhalten die Existenz eines Vektors $0 \neq y \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\sup_{\lambda \in M} y^\top \lambda \leq \inf_{\lambda \in \text{int}(\mathcal{K})} y^\top \lambda. \quad (2.7)$$

Damit ist $y^\top \lambda$ auf $\text{int}(\mathcal{K})$ nach unten beschränkt. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass das Innere $\text{int}(\mathcal{K})$ konisch ist, d. h. für $\lambda \in \text{int}(\mathcal{K})$ und $\mu > 0$ gilt $\mu\lambda \in \text{int}(\mathcal{K})$. Geometrisch bedeutet dies, dass mit jedem Element λ auch der gesamte Strahl $\mu\lambda, \mu \geq 0$, in $\text{int}(\mathcal{K})$ liegt. Da das Infimum auf der rechten Seite von (2.7) nach unten beschränkt ist, muss es also nichtnegativ sein. Es folgt also

$$y^\top \lambda \geq 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \text{int}(\mathcal{K}).$$

Damit folgt aber auch, dass $y^\top \lambda \geq 0$ für alle λ im Abschluss von $\text{int}(\mathcal{K})$, also auf \mathcal{K} , gilt. Damit haben wir gezeigt, dass $y \in \mathcal{K}_*$ gilt. Andererseits kann das Infimum einer linearen Funktion über einem Kegel nicht positiv sein und ist somit in unserem Fall 0. Insgesamt haben wir bisher also

$$\sup_{\lambda \in M} y^\top \lambda \leq 0$$

gezeigt. Unter Ausnutzung der Definition von M erhalten wir

$$(A^\top y)^\top x \leq y^\top b \quad (2.8)$$

für alle x für die $c^\top x \leq c^*$ gilt. Das bedeutet, dass die lineare Funktion $(A^\top y)^\top x$ nach oben beschränkt ist für alle x mit $c^\top x \leq c^*$. Das ist aber nur möglich, wenn

$$A^\top y = \mu c, \quad \mu \geq 0,$$

gilt, da man ansonsten eine Anstiegsrichtung finden würde. Wir zeigen jetzt, dass $\mu > 0$ gelten muss. Angenommen, es gelte $\mu = 0$, dann würde auch $A^\top y = 0$ gelten. Es folgt dann mit (2.8), dass $y^\top b \geq 0$ gilt. Wir wissen, dass das konische Problem (2.3) strikt zulässig ist, d. h., es gibt ein \bar{x} mit $A\bar{x} - b >_{\mathcal{K}} 0$. Da $0 \neq y \in \mathcal{K}_*$ ist folgt $y^\top (A\bar{x} - b) > 0$. Andererseits gilt aber

$$y^\top (A\bar{x} - b) = y^\top A\bar{x} - y^\top b = (A^\top y)^\top \bar{x} - y^\top b \leq 0,$$

was ein Widerspruch ist. Somit ist $\mu > 0$ und wir dürfen daher $y^* := y/\mu$ setzen. Dann gilt $y^* \geq_{\mathcal{K}_*} 0$, da $y \geq_{\mathcal{K}_*} 0$ und $1/\mu > 0$ gilt. Damit ist

$A^\top y^* = c$ wegen $A^\top y = \mu c$ und nach (2.8) gilt auch $c^\top x \leq b^\top y^*$ für alle x mit $c^\top x \leq c^*$. Damit ergibt sich, dass y^* zulässig für das konisch duale Problem (2.4) ist. Für den Zielfunktionswert gilt $b^* = b^\top y^* \geq c^*$, was zu zeigen war.

Es bleibt der Fall $c = 0$. Hier ist also $c^* = 0$, es ergibt sich $y^* = 0$ als dual zulässige Lösung mit Zielfunktionswert $0 \geq c^* = 0$.

4. Folgt mit 3. aus primal-dualer Symmetrie.

5. Es gilt $c^\top x - b^\top y = (A^\top y)^\top x - b^\top y = (Ax - b)^\top y$. \square

Korollar 2.22. 1. Für jedes primal-duale zulässige Paar (x, y) von Lösungen von Problem (2.3) und Problem (2.4) gilt

$$c^\top x - b^\top y = (Ax - b)^\top y,$$

d. h., die Dualitätslücke $c^\top x - b^\top y$ ist gleich dem Skalarprodukt aus dem primalen Schlupf $Ax - b$ und dem dualen Vektor y .

2. Sind beide Probleme (2.3) und (2.4) strikt zulässig, dann sind beide lösbar und die optimalen Zielfunktionswerte sind gleich.

Bei der konischen Dualität wird also (im Gegensatz zur linearen Optimierung) stets die strikte Zulässigkeit gefordert. Die konische Dualität ist im Allgemeinen also schwächer als die LP-Dualität. Im LP-Fall gilt: Sind Problem (2.1) und Problem (2.2) zulässig und beschränkt, so folgt deren Lösbarkeit. Bei der konischen Dualität ist das nicht unbedingt so.

Beispiel 2.23. Gegeben sei das folgende konische Problem:

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1 \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}^3 \\ \iff & \min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1 \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 1} \leq x_1 + x_2 \\ \iff & \min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1 \quad \text{s.t.} \quad 4x_1 x_2 \geq 1, x_1 + x_2 > 0. \end{aligned}$$

Die erste Äquivalenz entspricht der Definition des Lorentzkegels und die zweite Äquivalenz gilt, da es keine Lösung mit $x_1 + x_2 \leq 0$ geben kann. Geometrisch lässt sich die Situation wie folgt interpretieren: minimiere x_1 , so dass $x_2 \geq 1/(4x_1)$ oberhalb der Hyperebene liegt. Dies entspricht dem Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1 \quad \text{s.t.} \quad x_1 > 0, x_2 \geq \frac{1}{4x_1}.$$

Bei diesem Optimierungsproblem ist der Zielfunktionswert offensichtlich durch 0 beschränkt. Außerdem ist das Problem strikt zulässig, da z. B. $x = (1, 1)^\top$ im Inneren liegt. Dennoch wird der optimale Zielfunktionswert von keinem zulässigen Punkt angenommen; das Problem ist also nicht lösbar. Die Ursache lautet wie folgt: Das duale Problem ist gegeben durch⁵

$$\max_{y \in \mathbb{R}^3} -y_2 \quad \text{s.t.} \quad y_1 + y_3 = 1, \quad y_1 - y_3 = 0, \quad (y_1, y_2, y_3)^\top \in \mathbb{L}^3.$$

Dieses Optimierungsproblem besitzt nur den einen zulässigen Punkt $(0.5, 0, 0.5)$, der aber nicht im Inneren des Kegels liegt. Somit ist das duale Problem nicht strikt zulässig.

Ein konisches Optimierungsproblem kann also strikt zulässig und beschränkt, aber trotzdem unlösbar sein. Derartige Pathologien gibt es in der linearen Optimierung nicht. Weitere pathologische Beispiele untersuchen wir in den Übungen.

Wir schließen dieses Kapitel mit einer kurzen Liste von Lösern für konische Probleme:

- MOSEK (kommerziell)⁶,
- SeDuMi (open source)⁷.

Bei beiden Lösern handelt es sich um Innere-Punkte-Methoden. Im Allgemeinen gelten konische Probleme als schwerer als lineare Optimierungsprobleme, aber als immer noch gut lösbar. Neuere Entwicklungen zielen häufig darauf ab, gemischt-ganzzahlige SOCPs mit MILP-Methoden zu lösen, z. B. mittels CPLEX oder Gurobi.

⁵Die Herleitung dieses dualen Problems ist eine sinnvolle Übung zur Dualisierung von konischen Problemen.

⁶<https://www.mosek.com>

⁷<https://github.com/sqlp/sedumi>

Kapitel 3

Robuste lineare Optimierung

3.1 Einleitung

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax \geq b, \quad (3.1)$$

mit unsicherem (c, A, b) aus der Unsicherheitsmenge \mathcal{U} . Damit ist dieses Problem eine (evtl. unendlich große) Familie

$$\left\{ \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ c^\top x : Ax \geq b \right\} \right\}_{(c,A,b) \in \mathcal{U}}$$

von Optimierungsproblemen, wobei ein Element dieser Familie jeweils ein LP für eine Realisierung $(c, A, b) \in \mathcal{U}$ ist. Wir treffen zunächst ein paar grundlegende Annahmen.

1. *Offline-Entscheidungen*: Der Variablenvektor x muss festgelegt werden, bevor die Realisierung der unsicheren Parameter bekannt ist („here-and-now“ Entscheidungen). Gegenstand aktueller Forschung sind dynamische Versionen, in denen sich ein Teil der Variablen geeignet einstellen darf, *nachdem* die Realisierung bekannt ist („wait-and-see“ Entscheidungen), was sich im Allgemeinen allerdings schwieriger gestaltet. Für uns sind zunächst alle Entscheidungen „here-and-now“-Entscheidungen.
2. Die Unsicherheitsmenge \mathcal{U} ist kompakt.
3. $Ax \geq b$ sind „harte“ Ungleichungen, die von x erfüllt sein müssen, egal wie sich die Unsicherheit aus \mathcal{U} realisiert.

Definition 3.1 (Robustes Gegenstück). Das *robuste Gegenstück*¹ zum

¹Engl.: *robust counterpart*

LP (3.1) ist das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ c^*(x) := \sup_{(c, A, b) \in \mathcal{U}} \left\{ c^\top x : Ax \geq b \text{ für alle } (c, A, b) \in \mathcal{U} \right\} \right\}.$$

Definition 3.2 (Robuste Zulässigkeit und Optimalität). Ein Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt

1. *robust zulässig*, wenn x^* für alle Realisierungen $(c, A, b) \in \mathcal{U}$ zulässig ist;
2. *robust optimal*, wenn x^* robust zulässig und der Zielfunktionswert garantiert höchstens c^* ist.

Man kann sich den Begriff der robusten Zulässigkeit auch in einem Spiel vorstellen, in dem ein Spieler eine Strategie x derart wählt, so dass der Gegenspieler keine Strategie $(c, A, b) \in \mathcal{U}$ wählen kann, unter der x unzulässig wird. Dabei darf der Gegenspieler seine Strategie, d. h. die Realisierung der Unsicherheit, beliebig aus der Unsicherheitsmenge wählen. Außerdem darf der Gegenspieler für unterschiedliche Strategien x des ersten Spielers unterschiedliche Realisierungen der Unsicherheit wählen. Bei der Wahl der Strategie x ist daher dafür Sorge zu tragen, dass der Punkt zulässig bleibt, egal welche Strategie der Gegenspieler wählt. Man muss sich also gegenüber „dem schlimmsten Fall der Unsicherheit“ absichern.

Wir treffen nun o.B.d.A einige weitere Annahmen.

1. Die Kosten sind sicher. Falls $c \in \mathbb{R}^n$ unsicher ist, führen wir eine neue Variable $t \in \mathbb{R}$ ein und betrachten das Problem

$$\left\{ \min_{x, t} t \quad \text{s.t.} \quad c^\top x - t \leq 0, \quad Ax - b \geq 0 \right\}_{(c, A, b) \in \mathcal{U}}$$

mit sicherer Zielfunktion. Man beachte, dass die Menge \mathcal{U} jetzt nur noch im Raum der Nebenbedingungsdaten vorkommt.

2. Die rechte Seite b ist sicher. Falls b unsicher ist, führen wir eine zusätzliche Variable $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ ein und lösen das Problem

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^{n+1}} c^\top x \\ & \text{s.t.} \quad a_i^\top x - b_i x_{n+1} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \quad x_{n+1} = 1 \end{aligned}$$

für alle $(A, b) \in \mathcal{U}$.

Wir können also davon ausgehen, dass in den betrachteten Fällen die Unsicherheitsmenge \mathcal{U} ausschließlich Unsicherheiten bzgl. der Koeffizientenmatrix A modelliert.

Beobachtung 3.3. 1. Wir betrachten die Robustheit in Bezug auf \mathcal{U} für jede Ungleichung separat. Betrachte beispielsweise die Ungleichungen

$$\begin{aligned}x_1 + u_1 &\leq 0, \\x_2 + u_2 &\leq 0\end{aligned}$$

mit der Unsicherheitsmenge

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^2 : u_i \geq 0, i = 1, 2, u_1 + u_2 \leq 1\}.$$

Die Projektionen von \mathcal{U} auf die unsicheren Parameter der einzelnen Ungleichungen lauten:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 &= \{u \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u_1 \leq 1\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{u \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u_2 \leq 1\}.\end{aligned}$$

Im Allgemeinen betrachten wir jeweils die Projektionen \mathcal{U}_i für die Ungleichungen $a_i^\top x \geq b_i$. Es ist notwendig, für jede Ungleichung $a_i^\top x \geq b_i$ die Projektion \mathcal{U}_i als Unsicherheitsmenge zu wählen. Das heißt insbesondere, das in dieser Betrachtungsweise *keine* Korrelationen zwischen den \mathcal{U}_i beachtet werden (obwohl das eventuell der Intuition widerspricht).

2. Die Unsicherheitsmenge \mathcal{U} kann ersetzt werden durch ihre konvexe Hülle $\text{conv}(\mathcal{U})$. Betrachte hierzu den für \mathcal{U} robust zulässigen Punkt x . Weiter sei $(\hat{a}, \hat{b}) \in \text{conv}(\mathcal{U})$, d. h. es gilt

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \sum_j \lambda_j \begin{pmatrix} a^j \\ b^j \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \sum_j \lambda_j = 1$$

und geeignete gewählten $\lambda_j \in \mathbb{R}$ und $(a^j, b^j) \in \mathcal{U}$. Dann gilt

$$\hat{a}^\top x = \sum_j \lambda_j (a^j)^\top x \leq \sum_j \lambda_j b^j = \hat{b}.$$

Die Ungleichung gilt hierbei, da x zulässig für alle Realisierungen in \mathcal{U} ist. Damit ist x auch zulässig für alle Realisierungen in der konvexen Hülle $\text{conv}(\mathcal{U})$.

Zusammengefasst sei in diesem Kapitel also von jetzt an die Zielfunktion $c^\top x$ sicher, die rechte Seite b sicher, die Unsicherheiten betrachten wir immer getrennt für jede Ungleichung und die Unsicherheitsmengen \mathcal{U} sind immer konvex und kompakt.

Beispiel 3.4. Verschiedene äquivalente Modellierungen können zu unterschiedlich konservativen robustifizierten Ungleichungen führen. Um dieses Phänomen einzusehen betrachten wir die folgenden drei Modellierungen:

1. Modell 1:

- (a) $a_1x_1 + a_2x_2 \leq a_3$,
- (b) $a_4x_1 + a_5x_2 = a_6$,
- (c) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

2. Modell 2:

- (a) $a_1x_2 + a_2x_2 \leq a_3$,
- (b1) $a_4x_1 + a_5x_2 \leq a_6$,
- (b2) $-a_4x_1 - a_5x_2 \leq -a_6$,
- (c) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

3. Modell 3:

- (a) $a_1x_1 + a_2x_2 + s = a_3$,
- (b) $a_4x_1 + a_5x_2 = a_6$,
- (c) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s \geq 0$.

Diese drei nominalen Modelle sind offensichtlich äquivalent. Das stimmt allerdings nicht mehr, wenn es sich um unsichere Daten handelt. Es sei hierfür

$$(a_1, \dots, a_6) \in \mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \zeta \\ 2 + \zeta \\ 4 - \zeta \\ 4 + \zeta \\ 5 - \zeta \\ 9 \end{pmatrix} : -\rho \leq \zeta \leq \rho \right\}.$$

Ferner sei $\rho = 1/3$. Dann ist $x_1 = x_2 = 1$ zulässig für die Robustifizierung von Modell 1 und Modell 2, denn es gilt

$$\begin{aligned} (1 + \zeta) \cdot 1 + (2 + \zeta) \cdot 1 &\leq 4 - \zeta, \\ (4 + \zeta) \cdot 1 + (5 - \zeta) \cdot 1 &= 9, \end{aligned}$$

was korrekt ist für alle ζ mit $|\zeta| \leq 1/3$ ist. Die zweite Gleichung gilt sogar für alle ζ . Die Robustifizierungen von Modell 1 und Modell 2 sind somit äquivalent.

Wie sieht es nun mit der Robustifizierung von Modell 3 aus? Gilt $\rho > 0$, so kann $x_1 = x_2 = 1$ nicht zu einer robust zulässigen Lösung erweitert werden. Die Begründung lautet wie folgt: Falls x_1, x_2, s robust zulässig sind, muss

$$x_1 + 2x_2 + s + \zeta(x_1 + x_2) = 4 - \zeta$$

für ζ mit $|\zeta| \leq \rho$ gelten. Damit diese Gleichung erfüllt ist, muss $x_1 + x_2 = -1$ gelten. Dies stellt aber einen Widerspruch zu $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ dar und gilt insbesondere nicht für $x_1 = x_2 = 1$.

Die Robustifizierung von Modell 3 ist somit unzulässig! Der Grund hierfür ist, dass 3(a) konservativer als 1(a) und 2(a) ist. Zulässigkeit von 3(a) bedeutet, dass

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq a_3$$

erfüllt ist, falls es ein $s \geq 0$ gibt, so dass $a_1x_1 + a_2x_2 + s = a_3$. Die Schlupfvariable s ist das „Zertifikat“ für die Gültigkeit. Bei unsicherem $a \in \mathcal{U}$ sollte die Zulässigkeit von (x_1, x_2) für $a_1x_1 + a_2x_2 \leq a_3$ bedeuten, dass

$$\forall a \in \mathcal{U} \exists s \geq 0 : a_1x_1 + a_2x_2 + s = a_3.$$

Das bedeutet, dass es möglich sein sollte, dass sich s in Abhängigkeit von der Realisierung der a_i „günstig“ einstellen darf (in diesem Fall wäre s eine „wait-and-see“-Entscheidung). Die Robustifizierung von 3(a) lautet allerdings

$$a_1x_1 + a_2x_2 + s = a_3 \quad \text{für alle } a \in \mathcal{U}.$$

Das heißt aber, dass x_1, x_2 und s „here-and-now“ entschieden werden müssen, bevor die Realisierung der a_i bekannt ist. Wie wir aber gerade eingesehen haben, gibt es ein solches s nicht, woraus die Unzulässigkeit des robusten Gegenstücks folgt. Die Schlupf-Formulierung 3(a) ist also zu konservativ.

Es kann in der robusten Optimierung also durchaus sinnvoll sein, Gleichungsnebenbedingungen zu vermeiden. Dies kann in manchen Situationen durch die Elimination der Gleichungen oder durch eine alternative Modellierung erreicht werden. Man denke z. B. an Modelle, in denen eine produzierte Warenmenge einen Bedarf decken und die Kosten für die Produktion minimiert werden soll. In solchen, und vielen ähnlichen Situationen, kann die typischerweise verwendete Gleichungsrestriktion „produzierte Warenmenge = Bedarf“ äquivalent durch eine \geq -Bedingung ersetzt werden, da die Ungleichung aus Optimalitätsgründen in einer Lösung immer aktiv sein muss.

Bemerkung 3.5 (Affine Parametrisierung von \mathcal{U}). Wir betrachten

$$a^\top x - b \geq 0 \quad \text{für alle } (a, b) \in \mathcal{U}. \tag{3.2}$$

Es ist zwar nicht notwendig, aber oft sinnvoll, \mathcal{U} mittels

$$\begin{aligned} a &:= \bar{a} + P\zeta, \\ b &:= \bar{b} + p^\top \zeta \end{aligned}$$

mit geeignet gewählten *Nominalwerten* $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{b} \in \mathbb{R}$ und $P \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$, $p \in \mathbb{R}^\ell$, $\zeta \in \mathbb{R}^\ell$ zu parametrisieren. Der Vektor ζ heißt dann der *Perturbations-* oder *Störungsvektor*. Es gilt also

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} + P\zeta \\ \bar{b} + p^\top \zeta \end{pmatrix} : \zeta \in \mathcal{Z} \right\},$$

wobei \mathcal{Z} die Unsicherheitsmenge der Störung ζ ist. Offensichtlich ist dann (3.2) äquivalent zu

$$(\bar{a}^\top x - \bar{b}) + (P^\top x - p)^\top \zeta \geq 0 \quad \text{für alle } \zeta \in \mathcal{Z}.$$

Im Fall, dass wir die rechte Seite b als sicher auffassen, setzen wir einfach $p = 0 \in \mathbb{R}^\ell$.

Beispiel 3.6. Wir betrachten wieder $a^\top x - b \geq 0$ und es sei die Unsicherheitsmenge

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : a^l \leq a \leq a^u, b^l \leq b \leq b^u \right\}$$

gegeben. Für die Parametrisierung wählen wir nun $\bar{a} := (a^l + a^u)/2 \in \mathbb{R}^n$ und $\bar{b} := (b^l + b^u)/2 \in \mathbb{R}$, d. h. die Intervallmitten. Den Vektor p definieren wir als

$$p = \left(0, \dots, 0, \frac{b^u - b^l}{2} \right)^\top \in \mathbb{R}^\ell, \quad \ell = n + 1.$$

Außerdem setzen wir

$$P = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{a}_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{a}_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_i = \frac{a_i^u - a_i^l}{2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\mathcal{Z} = \{ \zeta : -1 \leq \zeta_i \leq 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, \ell = n + 1 \}.$$

Beispiel 3.7. Es sei b sicher und \mathcal{U} sei der Ellipsoid

$$\mathcal{U} = \left\{ a \in \mathbb{R}^n : (a - \bar{a})^\top Q(a - \bar{a}) \leq \rho^2 \right\},$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix ist. Damit ist \mathcal{U} nicht leer und konvex.² Weiter gelte

$$\zeta = Q^{\frac{1}{2}}(a - \bar{a}), \quad P = Q^{-\frac{1}{2}}$$

²Warum?

und damit

$$\mathcal{U} = \{a = \bar{a} + P\zeta : \zeta \in \mathcal{Z}\},$$

wobei \mathcal{Z} eine Kugel mit Radius ρ ist, d. h. es gilt

$$\mathcal{Z} = \{\zeta : \|\zeta\|_2 \leq \rho\}.$$

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass Q ähnlich zu einer Diagonalmatrix mit positiven Eigenwerten ist. Die Eigenvektoren sind die Richtungen der Hauptachsen. Die Längen der Hauptachsen entsprechen den Kehrwerten der Wurzeln aus den Eigenwerten.

Beispiel 3.8. Es seien Q , \bar{a} und ρ gegeben durch

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a} = \bar{a} \in \mathbb{R}^3, \quad \rho = 1.$$

Also verlaufen die Hauptachsen entlang Koordinaten e_1, e_2, e_3 . Weiter gilt

$$Q^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da $Q^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}} = Q$. Ebenso ist

$$Q^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da $Q^{-\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}} = E_3$. Damit gilt

$$\mathcal{U} = \left\{ Q^{-\frac{1}{2}}\zeta : \zeta \in \mathcal{Z} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \zeta : \zeta \in \mathcal{Z} \right\}$$

mit $\mathcal{Z} = \{\zeta : \|\zeta\|_2 \leq 1\}$.

Eine der wichtigsten Fragen der robusten Optimierung lautet:

Welche Unsicherheitsmengen und welche Robustifizierungen führen auf algorithmisch (gut) behandelbare Optimierungsprobleme?

Diese Frage werden wir im Folgenden für verschiedene Geometrien der Unsicherheitsmenge \mathcal{Z} der Störungen analysieren.

3.2 Box-Unsicherheiten

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir im Folgenden nur eine Ungleichung $a^\top x \geq b$ mit sicherer rechter Seite b und es gelte

$$\mathcal{Z} = \{\zeta : \|\zeta\|_\infty \leq \rho\}.$$

Das bedeutet, dass

$$\begin{aligned} & (\bar{a} + P\zeta)^\top x \geq b \quad \text{für alle } \zeta \text{ mit } \|\zeta\|_\infty \leq \rho \\ \iff & \min_{\{\zeta : \|\zeta\|_\infty \leq \rho\}} (\bar{a} + P\zeta)^\top x \geq b \\ \iff & \bar{a}^\top x + \min_{\{\zeta : \|\zeta\|_\infty \leq \rho\}} (P^\top x)^\top \zeta \geq b. \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \min_{\{\zeta : \|\zeta\|_\infty \leq \rho\}} (P^\top x)^\top \zeta &= \min_{\{\zeta : |\zeta_i| \leq \rho \forall i\}} \sum_i (P^\top x)_i \zeta_i \\ &= -\rho \sum_i |(P^\top x)_i| \\ &= -\rho \|P^\top x\|_1 \end{aligned}$$

aufgrund von

$$\zeta_i = \begin{cases} -\rho, & \text{falls } (P^\top x)_i \geq 0, \\ \rho, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das bedeutet

$$(\bar{a} + P\zeta)^\top x \geq b \quad \text{für alle } \zeta \text{ mit } \|\zeta\|_\infty \leq \rho \tag{3.3}$$

ist genau dann erfüllt, wenn x die Ungleichung

$$\bar{a}^\top x - \rho \|P^\top x\|_1 \geq b. \tag{3.4}$$

erfüllt.

Der Vorteil ist, dass (3.4) nur eine Ungleichung im Gegensatz zu unendlich vielen Ungleichungen in (3.3) ist. Diese eine Ungleichung ist zwar aufgrund der 1-Norm nicht mehr linear, kann aber leicht linearisiert werden. Zur Linearisierung geht man im Allgemeinen wie folgt vor. Offensichtlich gilt

$$|d_1| \leq d_0 \iff -d_0 \leq d_1 \leq d_0.$$

Somit ist

$$|d_1| + \dots + |d_k| \leq d_0$$

äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + \cdots + d_k &\leq d_0, \\ -d_1 + d_2 + \cdots + d_k &\leq d_0, \\ &\vdots \\ -d_1 - d_2 - \cdots - d_k &\leq d_0 \end{aligned}$$

von 2^k Ungleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^k \pm d_i \leq d_0$$

in k Variablen. Man beachte aber, dass die Größe dieser Modellierung exponentiell groß in k ist. Eine alternative Linearisierung erhält man durch Einführung zusätzlicher Variablen u_1, \dots, u_k und der zusätzlichen Ungleichungen

$$\begin{aligned} -u_i \leq d_i \leq u_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \sum_{i=1}^k u_i \leq d_0. \end{aligned}$$

Man erhält dann $2k + 1$ lineare Ungleichungen in $2k$ Variablen. Die Größe dieses Modells ist damit polynomiell in k , weshalb diese Linearisierung im Allgemeinen der ersten vorzuziehen ist.

Beobachtung 3.9. Robustifizierung einer linearen Ungleichung mit Box-
Unsicherheiten führt auf endlich viele lineare Ungleichungen mit endlich
vielen zusätzlichen kontinuierlichen Variablen. Mit anderen Worten: Im Fall
von Box-
Unsicherheiten ist ein robustifiziertes LP wieder ein (wenn auch
größeres) LP.

Der Term $\rho \|P^\top x\|_1$ in Ungleichung (3.4) kann als Sicherheitsterm für die Unsicherheit interpretiert werden. Es ist aber zu beachten, dass dieser Sicherheitsterm selber von den Variablen x abhängt, also nicht konstant ist.

Beispiel 3.10. Es sei $a_1x_1 + a_2x_2 \geq 2$ sowie

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} : |\zeta_1| \leq 1, |\zeta_2| \leq 3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} : \|\zeta\|_\infty \leq 1 \right\}, \\ P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P^\top \end{aligned}$$

gegeben. Durch die Einführung der linearen Abbildung P wird also die Störung normalisiert ($\|\zeta\|_\infty \leq 1$). Damit ergibt sich die robustifizierte Ungleichung

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \left| \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]_1 \right| - \left| \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]_2 \right| \\ = x_1 + 2x_2 - |x_1| - |3x_2| \geq 2. \end{aligned}$$

Hierbei entspricht $-|x_1| - |3x_2|$ dem Sicherheitsterm.

3.3 Polyedrische Unsicherheitsmengen

Gegeben sei jetzt

$$(\bar{a} + P\zeta)^\top x \geq b \quad \text{für alle } \zeta \text{ mit } D\zeta \geq d \quad (3.5)$$

mit geeigneter Matrix D und geeignetem Vektor d . Dies ist äquivalent zu

$$\bar{a}^\top x + \min_{\{\zeta: D\zeta \geq d\}} (P^\top x)^\top \zeta \geq b. \quad (3.6)$$

Weiter gilt aus Dualitätsgründen

$$\min_{\zeta} \left\{ (P^\top x)^\top \zeta : D\zeta \geq d \right\} = \max_y \left\{ d^\top y : D^\top y = P^\top x, y \geq 0 \right\}.$$

Daraus folgt, dass (3.6) äquivalent ist zu

$$\bar{a}^\top x + \max_y \left\{ d^\top y : D^\top y = P^\top x, y \geq 0 \right\} \geq b.$$

Falls die Ungleichung von einem zulässigen y (d. h. von einem $y \geq 0$ mit $D^\top y = P^\top x$) erfüllt ist, dann ist sie auch für das Maximum über die betrachteten y erfüllt. Somit gilt: Ein Punkt x erfüllt (3.5), wenn ein y existiert, so dass das Paar (x, y) die Bedingungen

$$\bar{a}^\top x + d^\top y \geq b, \quad D^\top y = P^\top x, \quad y \geq 0 \quad (3.7)$$

erfüllt. Die Idee der Ausnutzung von Dualitätstheorie ist ein Standardtrick der robusten Optimierung. Man beachte, dass es tatsächlich notwendig ist, dass dualisiert wird. Würde man in (3.6) das „min“ streichen, würde man eventuell nur eine Realisierung der Unsicherheit bestimmen, so dass die Ungleichung erfüllt ist. Diese könnte aber für dasjenige ζ , das die Zielfunktion minimiert, verletzt sein.

Diskussion 3.11. • Das System (3.7) ist ein System linearer Gleichungs- und Ungleichungsbedingungen.

- Ein LP mit einer robustifizierten linearen Ungleichung mit polyedrischer Unsicherheit ist wieder ein LP, d. h. nicht schwieriger im komplexitäts-theoretischen Sinn. Allerdings hat das robustifizierte LP mehr Variablen und Ungleichungen.³ Trotzdem ist es in der Praxis im Allgemeinen gut lösbar.
- Ist das Polyeder eine Box, ergibt sich dieselbe Reformulierung wie in Kapitel 3.2.

Beispiel 3.12. Es sei $a_1x_1 + a_2x_2 \geq 2$ für alle $(a_1, a_2) \in \mathcal{U}$ mit

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} : \zeta_1 + 3\zeta_2 \geq 0, 2\zeta_1 - \zeta_2 \geq 1 \right\}.$$

Damit ist

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = P^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Robustifizierung liefert

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 0y_1 + 1y_2 &\geq 2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ y &\geq 0, \end{aligned}$$

was wiederum äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + y_2 &\geq 2, \\ x_1 &= y_1 + 2y_2, \\ x_2 &= 3y_1 - y_2, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + 6y_1 - 2y_2 + y_2 &\geq 2, \\ x_1 &= y_1 + 2y_2, \\ x_2 &= 3y_1 - y_2, \\ y &\geq 0, \end{aligned}$$

was schließlich

$$\begin{aligned} 7y_1 + y_2 &\geq 2, \\ x_1 &= y_1 + 2y_2, \\ x_2 &= 3y_1 - y_2, \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

³Man überlege sich, wovon es abhängt, wie viele zusätzliche Gleichungen bzw. Ungleichungen und wie viele zusätzliche Variablen man erhält.

ergibt.

3.4 Ellipsoidale Unsicherheiten

Wir erinnern uns kurz an Beispiel 2.12: Es gelte $a_1x_1 + a_2x_2 \geq 0$ für alle $(a_1, a_2)^\top \in \mathcal{U}$, wobei

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} : \|\zeta\|_2 \leq 1 \right\}$$

ist. Die Geometrie der Störungsunsicherheit ist also eine Kugel. Dies führte auf die konische Nebenbedingung $x_1 + x_2 \geq \|x\|_2$ über dem Lorentzkegel. Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} & (\bar{a} + P\zeta)^\top x \geq b \quad \text{für alle } \zeta \text{ mit } \|\zeta\|_2 \leq \rho & (3.8) \\ \iff & \min_{\{\zeta: \|\zeta\|_2 \leq \rho\}} (\bar{a} + P\zeta)^\top x \geq b \\ \iff & \bar{a}^\top x + \min_{\{\zeta: \|\zeta\|_2 \leq \rho\}} (P\zeta)^\top x \geq b \\ \iff & \bar{a}^\top x + \min_{\{\zeta: \|\zeta\|_2 \leq \rho\}} \zeta^\top (P^\top x) \geq b. \end{aligned}$$

Der Kosinussatz $v^\top w = \|v\|\|w\|\cos(v, w)$ liefert, dass $v^\top w$ minimal wird, wenn $\cos(v, w) = -1$, also $w = -v$, gilt. Es ist also

$$\min_{\{\zeta: \|\zeta\|_2 \leq \rho\}} \zeta^\top (P^\top x) = -\frac{\rho}{\|P^\top x\|_2} (P^\top x)^\top (P^\top x) = -\rho \|P^\top x\|_2.$$

Damit folgt die Äquivalenz von (3.8) und

$$\bar{a}^\top x - \rho \|P^\top x\|_2 \geq b. \quad (3.9)$$

Beobachtung 3.13. Bei Ungleichung (3.9) handelt es sich um eine Ungleichung im Vergleich zu unendlich vielen Ungleichungen in (3.8). Allerdings ist (3.9) nicht mehr linear, sondern konisch. Wir haben also eingesehen, dass eine robustifizierte lineare Ungleichung mit ellipsoidaler Unsicherheit auf eine konische Ungleichung führt. Der Sicherheitsterm $\rho \|P^\top x\|_2$ hängt wieder von den Variablen x selber ab. Die robuste Formulierung (3.9) ist in der Praxis zwar etwas schwerer zu lösen als ein LP, aber als konische Ungleichung gilt sie immer noch als „gutartig“.

3.5 Konische Unsicherheiten

Gegeben sei

$$(\bar{a} + P\zeta)^\top x \geq b \quad \text{für alle } \zeta \text{ mit } D\zeta - d \in \mathcal{K}, \quad (3.10)$$

wobei \mathcal{K} ein abgeschlossener, spitzer, konvexer Kegel mit nichtleerem Inneren ist. Falls \mathcal{K} nicht als endlicher Schnitt affiner Halbräume (also nicht als polyedrischer Kegel) geschrieben werden kann, dann setzen wir voraus, dass der Unsicherheitskegel strikt zulässig ist, d. h., es existiert ein $\bar{\zeta}$ mit $D\bar{\zeta} - d \in \text{int}(\mathcal{K})$.

Analog zum Dualisierungstrick, den wir bei den polyedrischen Unsicherheiten in Abschnitt 3.3 angewendet haben gilt auch hier: Die Formulierung (3.10) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \min_{\{\zeta: D\zeta - d \in \mathcal{K}\}} (\bar{a} + P\zeta)^\top x \geq b \\ \iff & \bar{a}^\top x + \min_{\{\zeta: D\zeta - d \in \mathcal{K}\}} \zeta^\top (P^\top x) \geq b \\ \iff & \bar{a}^\top x + \max_y \{d^\top y: D^\top y = P^\top x, y \in \mathcal{K}_*\} \geq b \\ \iff & \bar{a}^\top x + d^\top y \geq b, \quad D^\top y = P^\top x, \quad y \in \mathcal{K}_*. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die zweite Umformung folgt aus dem starken Dualitätssatz der konischen Optimierung. Das „max“ in der letzten Umformung kann dann aus denselben Gründen wie in Kapitel 3.3 gestrichen werden.

Beobachtung 3.14.

- Das System (3.11) ist ein System linearer Gleichungen und Ungleichungen über dem dualen Kegel \mathcal{K}_* .
- Falls $\mathcal{K} = \mathbb{R}_{\geq 0}^m$, so handelt es sich um eine polyedrische Unsicherheitsmenge. In diesem Fall ist dann (3.11) das System linearer Gleichungen und Ungleichungen (3.7) aus Abschnitt 3.3.
- Im robusten Fall ist also ein konisches Optimierungsproblem (in mehr Variablen und Ungleichungen) zu lösen, was im Allgemeinen algorithmisch gut machbar ist.

3.6 Robuste gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung

Die robusten Gegenstücke dieses Kapitels können analog gebildet werden, wenn einige oder alle Variablen x ganzzahlig sein sollen, da Robustifizierungen, wie wir sie bisher behandelt haben, eine Familie unendlich vieler Optimierungsprobleme reformulieren, indem in Ungleichungen Optimierungsprobleme über den Unsicherheiten ζ gelöst werden. Diese bleiben kontinuierlich, unabhängig von der Struktur von x . Insbesondere darf auch der Dualisierungstrick angewendet werden. Für jedes zulässige x wird angenommen, dass ζ den schlimmsten Wert annimmt. Dafür ist unerheblich, ob x kontinuierlich oder (teilweise) ganzzahlig ist.

Kapitel 4

Robuste Modellierung von Zufallsungleichungen

Bisher haben wir uns mit Robustheit im folgenden Sinn befasst:

Falls wir annehmen können, dass die Parameter nicht mehr als 15 % schwanken, überleben wir in jedem Fall. Wir haben jedoch keine Ahnung, was bei 15.1 % passiert.

Das heißt, die Unsicherheitsmenge \mathcal{U} ist beschränkt aber unbekannt. Eine größere Sicherheit erlangt man in diesem Kontext durch Vergrößern der Unsicherheitsmenge \mathcal{U} .

In einigen Anwendungen müssen auch stochastische Modelle robustifiziert werden. Man betrachtet also Zufallsungleichungen der Form

$$(\bar{a} + P\zeta)^\top x \geq b, \quad (4.1)$$

wobei ζ zufällig ist und man ist mit der Aufgabe konfrontiert, dass die Ungleichung (4.1) mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \varepsilon$ erfüllt sein soll, wobei ein typischerweise kleines $\varepsilon \in (0, 1)$ vorgegeben ist. Formal haben wir also die Nebenbedingung

$$p(x) = \text{Prob} \left\{ \zeta: (\bar{a} + P\zeta)^\top x < b \right\} \leq \varepsilon.$$

Wir treffen zunächst die folgenden Annahmen: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\mathbb{E}(\zeta_\ell) = 0$ für alle $\ell = 1, \dots, L$. Weiter seien $|\zeta_\ell| \leq 1$ für alle $\ell = 1, \dots, L$ und die $\{\zeta_\ell\}_{\ell=1}^L$ seien unabhängige Zufallsvariablen.

Dann ist Ungleichung (4.1) äquivalent zu

$$\bar{a}^\top x - b \geq -(P\zeta)^\top x = \eta := -\zeta^\top (P^\top x), \quad (4.2)$$

wobei (unter obigen Annahmen) η eine zufällige Variable mit Mittelwert 0 ist. Für die Standardabweichung gilt

$$\sigma(\eta) = \sqrt{\sum_{\ell=1}^L (P^\top x)_\ell^2 \mathbb{E}(\zeta_\ell^2)} \leq \sqrt{\sum_{\ell=1}^L (P^\top x)_\ell^2}.$$

Die Ungleichung gilt aufgrund $|\zeta_\ell| \leq 1$. Die „sichere Variante“ von (4.1) erhält man dann durch die Annahme, dass η „nie“ größer ist als $\Omega\sigma(\eta)$. Die Größe Ω bezeichnet man hierbei auch als *Sicherheitsparameter*. Wir ersetzen also η durch $\Omega\sigma(\eta)$ in (4.2) und erhalten so das sichere Gegenstück

$$\bar{a}^\top x - b \geq \Omega \sqrt{\sum_{\ell=1}^L (P^\top x)_\ell^2} = \Omega \|P^\top x\|_2 \quad (4.3)$$

zu (4.1). Wenn Ω geeignet gewählt wird, erfüllt jede bzgl. (4.3) zulässige Lösung mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \varepsilon$ auch die Ungleichung (4.1).

Man beachte ferner, dass dies auch den „Ingenieursansatz“

Eine zufällige Variable ist „niemals“ größer als ihr Mittelwert plus drei mal die Standardabweichung.

abbildet, indem man $\Omega = 3$ wählt.

Hilfssatz 4.1. Es seien z_ℓ , $\ell = 1, \dots, L$, deterministische Koeffizienten und die $\zeta_\ell \in [-1, 1]$, $\ell = 1, \dots, L$, seien unabhängige Zufallsvariablen mit Mittelwert 0. Dann gilt

$$\text{Prob} \left\{ \zeta: \sum_{\ell=1}^L z_\ell \zeta_\ell > \Omega \sqrt{\sum_{\ell=1}^L z_\ell^2} \right\} \leq \exp \left(-\frac{\Omega^2}{2} \right)$$

für alle $\Omega \geq 0$.

Beweis. Bernsteinungleichung; siehe Lehrbücher zur Stochastik. □

Beispiel 4.2. Um einen Eindruck zu bekommen, wie sich unterschiedliche Werte für Ω auswirken, seien hier zwei Beispiele für Ω angeführt:

$$\begin{aligned} \Omega = 5.26 &\implies \text{Prob} \left\{ \zeta: \sum_{\ell=1}^L (P^\top x)_\ell \zeta_\ell \geq \Omega \sqrt{\sum_{\ell=1}^L (P^\top x)_\ell^2} \right\} \leq 10^{-6}, \\ \Omega = 7.44 &\implies \text{Prob} \left\{ \zeta: \sum_{\ell=1}^L (P^\top x)_\ell \zeta_\ell \geq \Omega \sqrt{\sum_{\ell=1}^L (P^\top x)_\ell^2} \right\} \leq 10^{-12}. \end{aligned}$$

Beobachtung 4.3. Falls $\mathbb{E}(\zeta) = 0$, ζ unabhängig und $|\zeta_\ell| \leq 1$ ist, dann ist (4.3) eine „sichere Approximation“ der Zufallsungleichung (4.1) mit

$$\text{Prob} \left\{ (\bar{a} + P\zeta)^\top x < b \right\} \leq \exp \left(-\frac{\Omega^2}{2} \right).$$

Mit $\Omega \geq \sqrt{2 \ln \frac{1}{\varepsilon}}$ in (4.3) ist die Wahrscheinlichkeit, dass (4.1) verletzt ist, kleiner oder gleich ε .

Beobachtung 4.4. Ungleichung (4.3) mit $\Omega = \rho$ ist von derselben Form wie das robuste Gegenstück einer linearen Ungleichung mit einer ellipsoidalen Unsicherheitsmenge.

- Wenn bekannt ist, dass Unsicherheiten in einem Ellipsoid variieren, dann ergibt die Modellierung aus Kapitel 3.4 eine zu 100 % erfüllte Ungleichung.
- Verwendet man stattdessen den oben erwähnten „Ingenieursansatz“, so ergibt sich eine analoge Ungleichung. Wenn Ungleichung (4.3) erfüllt ist, so ist die Zufallsungleichung mit Wahrscheinlichkeit

$$1 - \exp \left(-\frac{\Omega^2}{2} \right)$$

erfüllt.

- Für viele praktische Anwendungen lässt sich annehmen, dass $10^{-12} \approx 0$ gilt.

Der Vorteil von Ungleichung (4.3) ist, dass sich die Sicherheit durch Vergrößern von Ω vergrößern lässt. Das geht in der stochastischen Optimierung im Allgemeinen nicht, da auch Wahrscheinlichkeiten für unliebsame Ereignisse verringert werden müssen.

Beispiel 4.5 (Portfolioauswahl). Wir betrachten den folgenden Anwendungsfall eines Portfoliooptimierungsproblems.

- Es gibt 200 mögliche Wertpapiere.
- Anlage 200: Geld bei der Bank mit 5 % Zinsen.
- Die Gewinne r_ℓ für $\ell = 1, \dots, 199$ sind unabhängige Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ_ℓ und Werten in $[\mu_\ell - s_\ell, \mu_\ell + s_\ell]$.

- Es seien die Anlagen derart sortiert, dass

$$\begin{aligned}\mu_\ell &= 1.05 + 0.3 \cdot \frac{200 - \ell}{199} \quad \ell = 1, \dots, 199, \\ s_\ell &= 0.05 + 0.6 \cdot \frac{200 - \ell}{199} \quad \ell = 1, \dots, 199,\end{aligned}$$

gilt.

Unser Ziel ist es, 1 € derart auf die Anlage zu verteilen, dass der sogenannte *Value-at-Risk* (VaR) des Portfolios maximiert wird. Das Risiko soll hierbei höchstens $\varepsilon = 0.5\%$ betragen.

Sei y_ℓ das Kapital, das in Anlage ℓ investiert wird. Wir lösen also das unsichere LP

$$\begin{aligned}\max_{y,t} \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\ell=1}^{199} r_\ell y_\ell + r_{200} y_{200} \geq t, \\ & \sum_{\ell=1}^{200} y_\ell = 1, \\ & y_\ell \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, 200.\end{aligned}$$

Dabei sind die Gewinne r_ℓ unsicher: Es gilt $r_\ell = \mu_\ell + s_\ell \zeta_\ell$ für alle $\ell = 1, \dots, 199$ und $r_{200} = 1.05$, wobei ζ_ℓ unabhängige Zufallsvariablen mit Mittelwert 0 und Werten in $[-1, 1]$ sind. Mit $x := (y^\top, t)^\top \in \mathbb{R}^{201}$ lautet das unsichere LP

$$\begin{aligned}\max_{x \in \mathbb{R}^{201}} \quad & x_{201} \\ \text{s.t.} \quad & (\bar{a} + P\zeta)^\top x \geq 0, \\ & \sum_{\ell=1}^{200} x_\ell = 1, \\ & x_\ell \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, 200,\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\bar{a} &= (\mu_1, \dots, \mu_{199}, r_{200}, -1)^\top, \\ P &= (P_1, \dots, P_{199}), \\ P_\ell &= s_\ell(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top\end{aligned}$$

(mit der 1 an ℓ -ter Stelle in P_ℓ) gilt.

Wie wirken sich jetzt unterschiedliche Formen der Unsicherheit aus?

Box-Unsicherheit: Diese Variante ignoriert die Stochastik und modelliert nur Schwankung der ζ_ℓ in $[-1, 1]$. Es gilt also $\mathcal{Z} = \{\zeta : \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$.

Das robuste Gegenstück liefert die optimale Lösung über die worst-case Absicherung, bei der für alle Gewinne $r_\ell - s_\ell, \ell = 1, \dots, 199$, gilt. Da diese kleiner sind als die Festverzinsung bei der Bank, lässt man alles bei der Bank und streicht die 5 % Zinsen ein.

Sicherheitsparameter Ω für (4.3): Wir setzen

$$\Omega = \sqrt{2 \ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq 3.255,$$

um zu gewährleisten, dass die unsichere Ungleichung mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \varepsilon = 0.995$ erfüllt ist. Die Unsicherheitsmenge \mathcal{Z} ist dann ein Schnitt einer Kugel mit einer Box:

$$\mathcal{Z} = \{\zeta : \|\zeta\|_\infty \leq 1, \|\zeta\|_2 \leq 3.255\}.$$

Die Ungleichung kann mit den Methoden aus Kapitel 3.5 als konische Unsicherheitsmenge mit der dort angegebenen Reformulierung als konische Ungleichungen geschrieben werden.¹ Dies ergibt einen Profit von 12 % bei einem Risiko von 0.5 %.

¹Das gucken wir uns in den Übungen nochmal etwas genauer an.

Kapitel 5

Robuste kombinatorische Optimierung

5.1 Robuste binäre Optimierung

Wir betrachten jetzt das binäre Problem

$$\min_x \{c^\top x : x \in X \subseteq \{0,1\}^n\}. \quad (5.1)$$

Dabei gibt $X \subseteq \{0,1\}^n$ die Nebenbedingungen an. Viele kombinatorische Optimierungsprobleme können so modelliert werden. Beispiele hierfür sind das Problem der Bestimmung minimal aufspannender Bäume oder das Problem der Bestimmung kürzester Wege in einem Graphen. Dabei werden Binärvariablen für Kanten $e \in E$ in einem Graphen $G = (V, E)$ derart eingeführt, dass

$$x_e = \begin{cases} 1, & \text{falls } e \in E \text{ in der Lösung (d. h., im Weg, Baum, etc.)} \\ & \text{enthalten ist,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

gilt.

Beispiel 5.1 (Problem: Bestimmung minimaler Spannbäume). Allgemein wird ein Problem der folgenden Art betrachtet:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & x \text{ ist Weg, Tour, Baum, etc.} \\ & x \in \{0,1\}^n. \end{aligned}$$

In unserem Fall gilt nun Folgendes: Gegeben sei ein zusammenhängender, ungerichteter Graph mit Kantengewichten c_e ; vgl. Abbildung 5.1. Gesucht

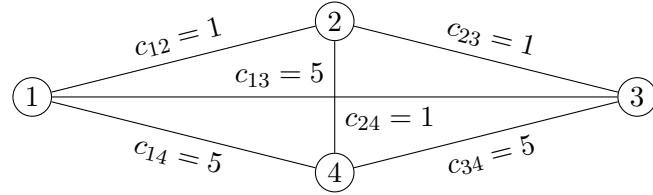


Abbildung 5.1: Beispielinstanz der Bestimmung eines minimal aufspannenden Baums

ist ein Subgraph mit minimalem Kantengewicht, der ein Baum ist und der alle Knoten verbindet. Das Problem lautet also

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & x \text{ ist aufspannender Baum,} \\ & x \in \{0, 1\}^n. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Problems sind binäre Vektoren, die (minimal) aufspannende Bäume definieren. In Abbildung 5.1 also z.B. $x = (x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34})^\top$ mit optimaler Lösung $x = (1, 0, 0, 1, 1, 0)^\top$.

Beispiel 5.2 (Binäre Modellierung des Rucksack-Problems¹). Die Aufgabe ist es, einen Rucksack derart zu packen, dass das Gesamtgewicht 20 kg nicht überschreitet. Dabei soll der Gesamtnutzen der eingepackten Objekte maximiert werden. Die Daten der einzupackenden Objekte sind in Tabelle 5.1 gegeben. Durch

Objekt	Nutzen a_j	Gewicht c_j (in kg)
1	5	2
2	3	7
3	8	10
4	4	5
5	5	5

Tabelle 5.1: Beispieldaten für das Rucksack-Problem

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Objekt } i \text{ eingepackt wird,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

¹Engl.: *knapsack*

seien Binärvariablen definiert. Wir erhalten somit das Problem

$$\begin{aligned} \max_x \quad & 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 5x_5 \leq 20, \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Für die robuste Betrachtung kombinatorischer Probleme treffen wir die folgenden Annahmen:²

- Die Unsicherheiten treten nur in den Kosten c_j auf, d. h., die c_j sind Zufallsvariablen in $[c_j, c_j + \Delta c_j]$, wobei $\Delta c_j \geq 0$ gilt. Wir betrachten also Box-Unsicherheiten bzgl. der Zielfunktionskoeffizienten.
- Es sind nur die Kosten unsicher, da die kombinatorische Problemstruktur (z. B. der Graph) erhalten bleiben soll. Die Kosten sind hier daher insbesondere *nicht* o. B. d. A. sicher.

Wir untersuchen nun folgenden flexiblen Ansatz: Es sei $\Gamma \in N := \{1, \dots, n\}$ gegeben. Wir möchten uns gegen Γ viele Abweichungen in den Kosten absichern, suchen also eine Lösung, die robust gegen Veränderungen von maximal Γ vielen Einträgen ist. Ist Γ groß gewählt so hat man zwar mehr Sicherheit, aber in der Regel auch schlechtere Optima. Auf der anderen Seite liefern kleine Γ zwar bessere Optima, bedeuten aber auch weniger Sicherheit.

Die robuste Formulierung von Problem (5.1) lautet demnach

$$\min_x \left\{ c^\top x + \max_{\{S \subseteq N: |S| \leq \Gamma\}} \sum_{j \in S} \Delta c_j x_j : x \in X \subseteq \{0, 1\}^n \right\}. \quad (5.2)$$

Beispiel 5.3.

- Das Kürzeste-Wege-Problem: unsichere Kantenlängen

- Das Problem des Handlungsreisenden (TSP): unsichere Weglängen, Wegdauern
- Das Netzwerk-Design-Problem: unsichere Kosten für den Bau einer neuen Verbindung

Ein typischer Ansatz zum Lösen des Problems besteht darin, eine endliche Menge möglicher Szenarien c_1, \dots, c_m zu betrachten und deren Maximum zu minimieren. Für zwei Szenarien c_1 und c_2 ergibt sich dann beispielsweise

$$\min_x \left\{ \max\{c_1^\top x, c_2^\top x\} : x \in X \right\}.$$

²Der restliche Teil dieses Abschnitts orientiert sich maßgeblich an der Dissertation von Sim (2004).

Dieses Problem kann allerdings NP-schwer sein, selbst wenn das ursprüngliche Problem (5.1) in Polynomialzeit lösbar ist.

Satz 5.4. Das Kürzeste-Wege-Problem mit zwei Szenarien ist NP-schwer.

Beweis. Siehe Kouvelis und Yu (1997). \square

Offensichtlich ist das robuste Gegenstück eines NP-schweren kombinatorischen Problems wieder NP-schwer. Der folgende Satz zeigt aber, dass polynomiell lösbarer kombinatorische Optimierungsprobleme auch zu polynomiell lösbarer robusten Gegenstücken führen.

Satz 5.5. Es seien o. B. d. A. $\Delta c_1 \geq \Delta c_2 \geq \dots \geq \Delta c_n \geq 0$. Dann ist die optimale Lösung von (5.2) gegeben durch

$$\min_{l=1,\dots,n+1} \left\{ \Gamma \Delta c_l + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^l (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j \right\} \right\}$$

mit $\Delta c_{n+1} = x_{n+1} = 0$. Man kann also das robuste Gegenstück (5.2) lösen, indem man $n+1$ nominale Probleme vom Typ (5.1) löst.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} & \min_x \left\{ c^\top x + \max_{\{S \subseteq N: |S| \leq \Gamma\}} \sum_{j \in S} \Delta c_j x_j : x \in X \right\} \\ &= \min_x \left\{ c^\top x + \max_{u \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \Delta c_j x_j u_j : u \in [0, 1]^n, \sum_{j=1}^n u_j \leq \Gamma, x \in X \right\} \\ &= \min_x \left\{ c^\top x + \max_{u \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \Delta c_j x_j u_j : u \leq 1, \sum_{j=1}^n u_j \leq \Gamma, u \geq 0, x \in X \right\}. \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Standardtrick an und dualisieren das Optimierungsproblem in den Variablen u (dafür sind die x_j nicht mehr variabel). In der aktuellen Situation lautet das primale Problem

$$\begin{aligned} & \max_{\tilde{x}} \quad \tilde{c}^\top \tilde{x} \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}, \\ & \tilde{x} \geq 0 \end{aligned}$$

und das entsprechende duale Problem ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{y}} \quad & \tilde{b}^\top \tilde{y} \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{y}^\top \tilde{A} \geq \tilde{c}^\top, \\ & \tilde{y} \geq 0, \end{aligned}$$

wobei hier

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}, \quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \Gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

und

$$\tilde{c}_j = \Delta c_j x_j \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n$$

sowie $\tilde{x} = u$ gilt.

Damit können wir in unserer Umformung fortfahren und erhalten

$$\begin{aligned} & \min_x \left\{ c^\top x + \max_u \sum_{j=1}^n \Delta c_j x_j u_j : u \leq 1, \sum_{j=1}^n u_j \leq \Gamma, u \geq 0, x \in X \right\} \\ &= \min_{x,y,\theta} \left\{ c^\top x + \Gamma \theta + \sum_{j=1}^n y_j : y_j + \theta \geq \Delta c_j x_j \forall j, y \geq 0, \theta \geq 0, x \in X \right\}. \end{aligned}$$

Unser nächster Schritt ist nun, die y_j in der Zielfunktion durch passend gewählte Nebenbedingungen zu ersetzen. Offensichtlich gilt für jede Optimallösung (x^*, y^*, θ^*) des letzten Problems

$$y_j^* = \max\{0, \Delta c_j x_j^* - \theta^*\} \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n.$$

Ersetzen wir nun so die y_j , so erhalten wir das äquivalente Problem

$$\min_{x,\theta} \left\{ c^\top x + \Gamma \theta + \sum_{j=1}^n \max\{0, \Delta c_j x_j - \theta\} : \theta \geq 0, x \in X \right\}.$$

Aus $x \in X \subseteq \{0,1\}^n$ und $\theta \geq 0$ folgt

$$\max\{0, \Delta c_j x_j - \theta\} = \max\{0, \Delta c_j - \theta\} x_j$$

und wir können das Problem wiederum äquivalent umformen zu

$$\min_{x,\theta} \left\{ c^\top x + \Gamma \theta + \sum_{j=1}^n \max\{0, \Delta c_j - \theta\} x_j : \theta \geq 0, x \in X \right\}.$$

Unser nächstes Ziel ist jetzt die Elimination von θ . Wir haben o. B. d. A. angenommen, dass $\Delta c_1 \geq \Delta c_2 \geq \dots \geq \Delta c_n \geq 0$ gilt. Zerlegen wir nun das Intervall $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ in die Intervalle

$$[0, \Delta c_n], [\Delta c_n, \Delta c_{n-1}], \dots, [\Delta c_1, \infty),$$

so erhalten wir

$$\sum_{j=1}^n \max\{0, \Delta c_j - \theta\} x_j = \begin{cases} \sum_{j=1}^{l-1} (\Delta c_j - \theta) x_j, & \text{für } \theta \in [\Delta c_l, \Delta c_{l-1}], \\ 0, & \text{für } \theta \in [\Delta c_1, \infty), \end{cases}$$

wobei l auf der rechten Seite die Werte $n+1, \dots, 2$ durchläuft. Somit erhalten wir das äquivalente Problem

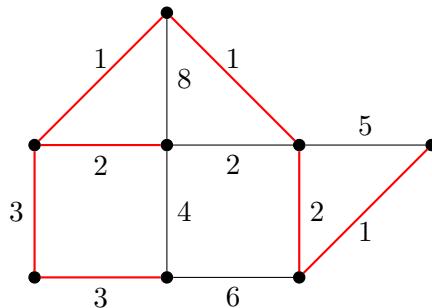
$$\begin{aligned} & \min_{x, \theta, l > 1} \left\{ c^\top x + \Gamma \theta + \sum_{j=1}^{l-1} (\Delta c_j - \theta) x_j : \theta \geq 0, \theta \in [\Delta c_l, \Delta c_{l-1}], x \in X \right\} \\ &= \min_{l > 1} \min_{x, \theta} \left\{ c^\top x + \Gamma \theta + \sum_{j=1}^{l-1} (\Delta c_j - \theta) x_j : \theta \geq 0, \theta \in [\Delta c_l, \Delta c_{l-1}], x \in X \right\}. \end{aligned}$$

Fixieren wir x und l , so ist die Zielfunktion linear in θ . Da wir somit eine lineare Zielfunktion über dem Intervall $[\Delta c_l, \Delta c_{l-1}]$ optimieren, wird das Minimum für $\theta = \Delta c_{l-1}$ oder für $\theta = \Delta c_l$ angenommen. Das äquivalente Problem lautet damit

$$\begin{aligned} & \min_{l > 1} \min \left\{ \Gamma \Delta c_l + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^{l-1} (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j \right\}, \right. \\ & \quad \left. \Gamma \Delta c_{l-1} + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^{l-1} (\Delta c_j - \Delta c_{l-1}) x_j \right\} \right\} \\ &= \min_{l > 1} \min \left\{ \Gamma \Delta c_l + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^l (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j \right\}, \right. \\ & \quad \left. \Gamma \Delta c_{l-1} + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^{l-1} (\Delta c_j - \Delta c_{l-1}) x_j \right\} \right\} \\ &= \min_{l=1, \dots, n+1} \left\{ \Gamma \Delta c_l + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^l (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Man beachte, dass wir im Beweis des Satzes explizit ausgenutzt haben, dass wir ein Problem für $X \subseteq \{0, 1\}^n$ lösen. Der Satz gilt demnach nicht für allgemeine ganzzahlige Probleme.

Abbildung 5.2: Kantengewichte c_j und minimal aufspannender Baum

5.2 Robuste minimale aufspannende Bäume

Wir betrachten jetzt das Beispielproblem der robusten Bestimmung minimal aufspannender Bäume. Dabei nehmen wir einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenkosten c_e für jede Kante $e \in E$ als gegeben an. Gesucht ist ein aufspannender Baum in G mit minimalen Gesamtkosten.

Algorithmus 1: Kruskals Algorithmus

Input: Ein zusammenhängender ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Gewichte c_e für alle $e \in E$.

Output: Ein aufspannender Baum T mit minimalem Gewicht.

- 1 Sortiere die Kanten, so dass $c_{e_1} \leq c_{e_2} \leq \dots \leq c_{e_m}$ mit $|E| = m$ gilt.
 - 2 Setze $T := (V(G), \emptyset)$.
 - 3 **for** $i = 1, \dots, m$ **do**
 - 4 Falls $T + e_i$ kreisfrei ist, setze $T := T + e_i$.
-

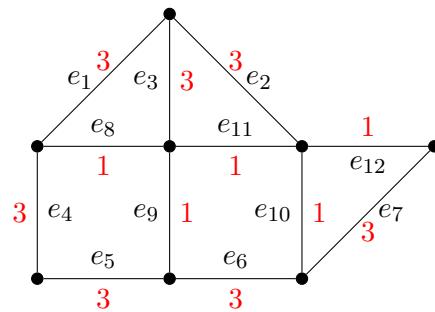
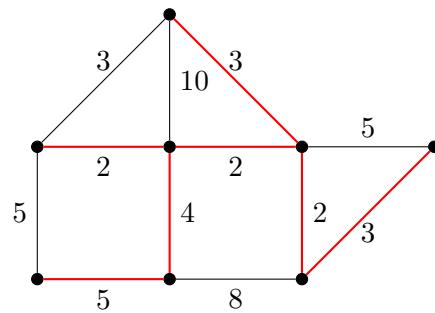
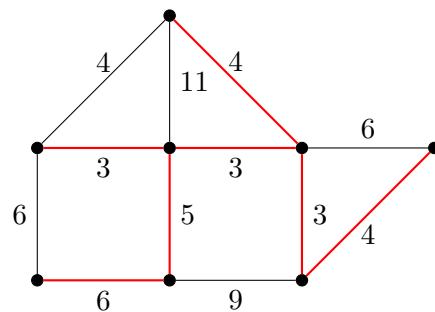
Es ist bekannt, dass das Problem

$$\min_x \{c^\top x : x \in \{0, 1\}^E \text{ ist aufspannender Baum}\}$$

der Bestimmung minimal aufspannender Bäume mithilfe des Algorithmus von Kruskal (vgl. Algorithmus 1) in polynomieller Zeit gelöst werden kann; siehe z. B. Korte und Vygen (2006).

Beispiel 5.6. Es sei der Graph aus Abbildung 5.2 mit zugehörigen Kantenkosten gegeben. In rot ist ein minimal aufspannender Baum mit Wert 13 eingezzeichnet.³ Weiter seien die Unsicherheiten Δc_j wie in Abbildung 5.3 gegeben. Wir wollen jetzt Satz 5.5 anwenden, um das gestellte Problem robust

³Man beachte, dass der minimale Spannbaum in diesem konkreten Beispiel nicht eindeutig ist.

Abbildung 5.3: Kantenbezeichnungen und Unsicherheiten Δc_j Abbildung 5.4: Minimal aufspannender Baum für $l = 8, \dots, 12$ Abbildung 5.5: Minimal aufspannender Baum für $l = 13$

zu optimieren. Dazu geben wir in Abbildung 5.3 zusätzlich an, in welcher Reihenfolge wir die Kanten nummerieren, um die Voraussetzung von Satz 5.5 zu erfüllen. Es ist also $\Delta c_1 = \dots = \Delta c_7 = 3$ und $\Delta c_8 = \dots = \Delta c_{12} = 1$.

Wir wählen $\Gamma = 5$. Mit Satz 5.5 folgt für $l = 1, \dots, 7$:

$$\begin{aligned} & \Gamma \Delta c_l + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^l (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j \right\} \\ &= \Gamma \Delta c_l + \min_{x \in X} c^\top x \\ &= 5 \cdot 3 + 13 = 28. \end{aligned}$$

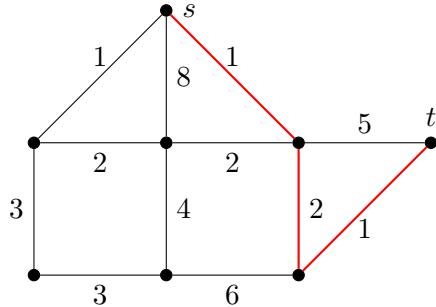
Für $l = 8, \dots, 12$ gilt

$$\begin{aligned} & \Gamma \Delta c_l + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^l (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j \right\} \\ &= \Gamma \Delta c_l + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^7 (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j + \sum_{j=8}^l (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j \right\} \\ &= \Gamma \Delta c_l + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^7 2x_j \right\} \\ &= 5 \cdot 1 + 21 = 26. \end{aligned}$$

Das heißt, das Problem der Bestimmung minimal aufspannender Bäume wird nochmal gelöst, wobei die Werte c_i für $i = 1, \dots, 7$ um 2 erhöht werden (vgl. Abbildung 5.4). Im Fall $l = 13$ (vgl. Abbildung 5.5) ergibt sich (mit $\Delta c_{13} = 0$):

$$\begin{aligned} & \Gamma \Delta c_l + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^7 (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j + \sum_{j=8}^{12} (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j \right\} \\ &= \Gamma \Delta c_l + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^7 3x_j + \sum_{j=8}^{12} x_j \right\} \\ &= 5 \cdot 0 + 28. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit für $l = 1, \dots, 7$ der Wert 28, für $l = 8, \dots, 12$ der Wert 26 und für $l = 13$ der Wert 28. Ein Vergleich der Gesamtkosten für alle l liefert also 26 als niedrigsten Wert und der zugehörige Spannbaum ist robust optimal.

Abbildung 5.6: Kantengewichte c_j und kürzester Weg

5.3 Robuste kürzeste Wege

Analog zu robust aufspannenden Bäumen können auch robust kürzeste Wege berechnet werden. Das Kürzeste-Wege-Problem ist in Polynomialzeit lösbar, z. B. mithilfe des Algorithmus von Dijkstra; vgl. z. B. Korte und Vygen (2006). Hierbei ist x definiert als der Weg in einem Graphen $G = (V, E)$. Die Variable x_e nimmt den Wert 1 an, falls die Kante e im Weg enthalten ist und 0 sonst.

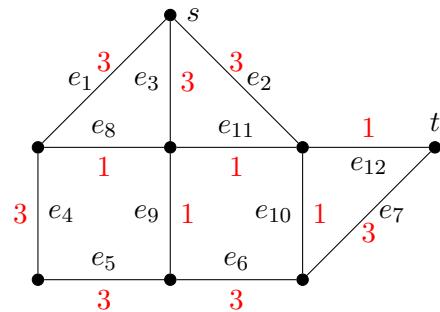
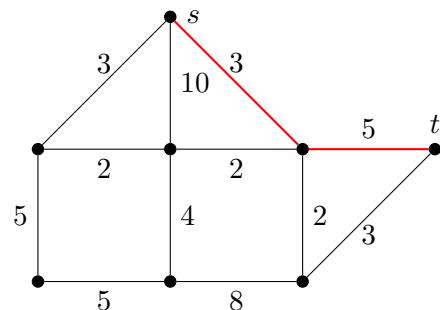
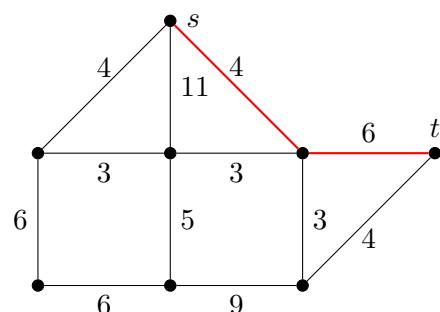
Beispiel 5.7. Es sei wieder der Graph mit Kantengewichten und Unsicherheiten wie in Beispiel 5.6 gegeben. In Abbildung 5.6 ist ein kürzester Weg von s nach t mit Länge 4 gegeben. Die Kantenummerierung erfolgt nach absteigender Unsicherheit, siehe Abbildung 5.7. Es ist also $\Delta c_1 = \dots = \Delta c_7 = 3$ und $\Delta c_8 = \dots = \Delta c_{12} = 1$. Ferner setzen wir wieder $\Gamma = 5$.

Für $l = 1, \dots, 7$ erhält man die Gesamtkosten

$$\Gamma \Delta c_l + \min_{x \in X} \{c^\top x\} = 5 \cdot 3 + 4 = 19.$$

Für $l = 8, \dots, 12$ löst man ein Kürzeste-Wege-Problem in einem Graphen, bei dem die Kantengewichte der Kanten 1 bis 7 um 2 erhöht werden (vgl. Abbildung 5.8). Als kürzesten Weg erhält man (e_2, e_{12}) mit Länge 8. Somit ergeben sich die Gesamtkosten aus $5 \cdot 1 + 8 = 13$.

Für $l = 13$ ist $\Delta c_{13} = 0$. Dadurch erhält man einen Graphen wie in Abbildung 5.9 dargestellt. Der kürzeste Weg (e_2, e_{12}) hat die Länge 10. Die daraus resultierenden Gesamtkosten von 10 sind also robust optimal.

Abbildung 5.7: Kantenbezeichnungen und Unsicherheiten Δc_j Abbildung 5.8: Kürzester Weg für $l = 8, \dots, 12$ Abbildung 5.9: Kürzester Weg für $l = 13$

Kapitel 6

Robuste ganzzahlige Optimierung mit dem flexiblen Γ -Ansatz

Wie schon in Kapitel 3.6 bemerkt, können die Konzepte der strikten robusten linearen Optimierung aus Kapitel 3 auch für lineare Probleme mit ganzzahligen Variablen genutzt werden.

Eine alternative Modellierung ist der flexible Ansatz aus Kapitel 5, mit dem man sich gegen Γ viele von Unsicherheiten betroffene Parameter absichert. Für weitere Details, die über den Stoff der Vorlesung hinausgehen, siehe Sim (2004).

Nun vertiefen wir diesen Ansatz zunächst für die $\{0, 1\}$ -Optimierung, mit der auch, wie wir bereits gesehen haben, kombinatorische Optimierungsprobleme modelliert werden können.

6.1 Übertragung von Approximationsergebnissen für die $\{0, 1\}$ -Optimierung

Wir betrachten wie in Kapitel 5.1 den Γ -Ansatz, bei dem im binären Problem

$$\min_x \left\{ c^\top x : x \in X \subseteq \{0, 1\}^n \right\} \quad (6.1)$$

maximal Γ viele Einträge in den Kosten unsicher sind. Für alle $j = 1, \dots, n$ betrachten wir wieder die Unsicherheiten $\Delta c_j \geq 0$ derart, dass die Kosten in $[c_j, c_j + \Delta c_j]$ liegen.

Wie in Kapitel 5.1 betrachten wir das zum nominalen Problem (6.1) gehörende

robuste Gegenstück

$$\min_x \left\{ c^\top x + \max_{\{S \subseteq N : |S| \leq \Gamma\}} \left\{ \sum_{j \in S} \Delta c_j x_j : x \in X \subseteq \{0, 1\}^n \right\} \right\}. \quad (6.2)$$

Definition 6.1 (α -Approximierbarkeit). Es sei $\alpha \geq 1$ gegeben. Ein Problem der Form (6.1) heißt α -approximierbar, wenn es einen Polynomialzeit-Algorithmus gibt, der für jede Instanz eine zulässige Lösung $x \in \{0, 1\}^n$ mit

$$c^\top x \leq \alpha c^\top x^*$$

berechnet, wobei x^* eine optimale Lösung für die betrachtete Instanz ist. Bei einem Maximierungsproblem anstelle eines Minimierungsproblems soll entsprechend

$$c^\top x \geq \frac{1}{\alpha} c^\top x^*$$

gelten.

Beispiel 6.2. Das Knapsack-Problem (vgl. Beispiel 5.2) ist NP-schwer (vgl. Garey und Johnson (1979)), d. h., wir können nicht erwarten einen Polynomialzeit-Algorithmus zu finden, der das Problem löst.

Algorithmus 2 findet allerdings immer eine Lösung, die mindestens den halben Wert des Optimums liefert. Hat man diese Tatsache einmal bewiesen, hat man also auch einen Beweis für den Satz, dass das Knapsack-Problem 2-approximierbar ist.

Algorithmus 2: 2-Approximationsalgorithmus für das Knapsack-Problem

Input: Eine Instanz des Knapsack-Problems wie in Beispiel 5.2 beschrieben

1 Sortiere die Indizes derart, dass

$$\frac{\text{Wert (Nutzen)}}{\text{Gewicht}} := \frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{a_n}$$

gilt. Beachte dabei, dass c_j den Wert (Nutzen) und a_j das Gewicht bezeichnet.

2 **for** $i = 1, \dots, n$ **do**

3 Füge Objekt i hinzu, wenn es die Gewichtsgrenze erlaubt.

4 Wenn die erzeugte Lösung schlechter ist als der größte Wert c_i , ersetze die bisherige Lösung durch $\{i\}$, falls es die Gewichtsgrenze erlaubt.

Beispiel 6.3. Das Problem des Handlungsreisenden¹ ist $3/2$ -approximierbar, wenn für die Kosten c die Dreiecksungleichung $c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik}$ für alle i, j, k gilt; vgl. Vazirani (2013).

Wir stellen uns nun die Frage, ob die Γ -robusten Gegenstücke von α -approximierbaren Problemen auch α -approximierbar sind. Die Antwort gibt uns der folgende Satz über Algorithmus 3.

Algorithmus 3: α -Approximationsalgorithmus für robuste ganzzahlige Optimierung

- 1 **for** $l = 1, \dots, n+1$ **do**
 - 2 Berechne eine α -Approximationslösung x^l des nominalen Problems
 - $$G^l = \Gamma \Delta c_l + \min_x \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^l (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j : x \in X \right\} \quad (6.3)$$
 - und setze
 - $$z^l = c^\top x^l + \max_{\{S \subset N : |S| \leq \Gamma\}} \sum_{j \in S} \Delta c_j x_j^l.$$
 - 3 Setze
 - $$k = \arg \min_{l=1, \dots, n+1} z^l.$$
 - 4 **return** $z := z^k$ und x^k .
-

Satz 6.4. Falls das Problem (6.1) α -approximierbar ist für beliebige Kosten c , dann ist auch das robuste Gegenstück (6.2) α -approximierbar.

Beweis. Es sei l derjenige Index, für den das Minimum in Satz 5.5 angenommen wird (d. h., bei exakter Lösung der $n+1$ nominalen Probleme) und es sei x^l die zugehörige α -Approximationslösung von Problem (6.3) in

¹Engl.: *traveling salesman problem (TSP)*

Objekt/Index	Gewichte a_i	Wert (Nutzen) c_i	Unsicherheiten Δc_i
1	12	200	150
2	6	100	60
3	6	75	50
4	4	50	5

Tabelle 6.1: Eingabedaten für das Rucksackproblem; bereits in für Algorithmus 2 sortierter Reihenfolge

Algorithmus 3. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 z &\leq z^l \\
 &= c^\top x^l + \max_{\{S \subseteq N : |S| \leq \Gamma\}} \sum_{j \in S} \Delta c_j x_j^l \\
 &= \min_{\theta \geq 0} \left\{ \Gamma \theta + c^\top x^l + \sum_{j=1}^n \max\{0, \Delta c_j - \theta\} x_j^l \right\} \quad (\text{s. Beweis v. Satz 5.5}) \\
 &\leq \Gamma \Delta c_l + c^\top x^l + \sum_{j=1}^l (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j^l \quad (\text{mit } \theta = \Delta c_l) \\
 &\leq \Gamma \Delta c_l + \alpha \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^l (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j \right\} \quad (\text{nach Voraussetzung}) \\
 &\leq \alpha \left(\Gamma \Delta c_l + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{j=1}^l (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j \right\} \right) \quad (\text{wegen } \alpha \geq 1) \\
 &= \alpha G^l \\
 &= \alpha z^*,
 \end{aligned}$$

wobei z^* der Zielfunktionswert der exakten Lösung des robusten Gegenstücks ist. \square

Beispiel 6.5 (Robuste Approximation des Rucksackproblems). Es seien die Daten für das Knapsack-Problem aus Tabelle 6.1 gegeben. Zudem sei die Gewichtsgrenze $b = 14$ gegeben. Wir haben also das Problem

$$\begin{aligned}
 \max_x \quad & 200x_1 + 100x_2 + 75x_3 + 50x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & 12x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 14, \\
 & x_i \in \{0, 1\} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, 4.
 \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst die 2-Approximation ohne Unsicherheit ($\Gamma = 0$). Es

gilt

$$\frac{\text{Wert}}{\text{Gewicht}} = \frac{c_1}{a_1} = \frac{200}{12} = \frac{c_2}{a_2} > \frac{c_3}{a_3} = \frac{c_4}{a_4} = \frac{150}{12},$$

d.h., eine mögliche Sortierung ist $(2, 1, 3, 4)$. Gemäß Algorithmus 2 packen wir Objekt 2 ein, Objekt 1 passt dann nicht mehr, Objekt 3 wird wieder eingepackt und Objekt 4 passt wieder nicht mehr. Das ergibt den Lösungsvektor $x^0 = (0, 1, 1, 0)^\top$ mit Zielfunktionswert 175. Im letzten Schritt von Algorithmus 2 setzen wir dann aber $x = (1, 0, 0, 0)^\top$, da Objekt 1 einen Wert $200 > 175$ besitzt und in den Rucksack passt.

Wir berechnen jetzt die robusten 2-Approximationen für $\Gamma = 1$. Dabei ist zu beachten, dass maximiert statt minimiert wird. Gemäß der Übung müssen wir daher für $l = 1, \dots, 5$ die Probleme

$$\max_x \left\{ c^\top x - \sum_{j=1}^l (\Delta c_j - \Delta c_l) x_j : x \in X \right\} \quad (6.4)$$

lösen. Außerdem setzen wir

$$z^l := c^\top x^l - \max_{\{S \subseteq N : |S| \leq \Gamma\}} \sum_{j \in S} \Delta c_j x_j^l \quad \text{für alle } l = 1, \dots, 5$$

und

$$z := \max\{z^1, \dots, z^5\}.$$

Es sei jetzt $l = 1$. Das Problem (6.4) entspricht in diesem Fall dem Problem (6.1) und wir können den oben berechneten Punkt $(1, 0, 0, 0)^\top$ mit Zielfunktionswert 200 als 2-Approximation nutzen. Damit ist $z^1 = 200 - 150 = 50$.

Für den Fall $l = 2$ lautet das Problem (6.4) wie folgt:

$$\begin{aligned} & \max_{x \in X} \left\{ c^\top x - (\Delta c_1 - \Delta c_2) x_1 \right\} \\ &= \max_{x \in X} \left\{ c^\top x - (150 - 60) x_1 \right\} \\ &= \max_{x \in X} \{110x_1 + 100x_2 + 75x_3 + 50x_4\}. \end{aligned}$$

Die Quotienten lauten demnach

$$\frac{110}{12}, \quad \frac{100}{6} = \frac{200}{12}, \quad \frac{75}{6} = \frac{150}{12}, \quad \frac{50}{4} = \frac{150}{12}$$

und eine gültige Sortierung ist $(2, 3, 4, 1)$. Durch Anwendung des Approximationsalgorithmus erhält man $x^2 = (0, 1, 1, 0)^\top$ mit dem zugehörigen Zielfunktionswert 175. Wir erhalten schließlich $z^2 = 175 - \max\{50, 60\} = 115$.

Für den Fall $l = 3$ lautet das Problem (6.4)

$$\begin{aligned} & \max_{x \in X} \left\{ c^\top x - (\Delta c_1 - \Delta c_3)x_1 - (\Delta c_2 - \Delta c_3)x_2 \right\} \\ &= \max_{x \in X} \left\{ c^\top x - (150 - 50)x_1 - (60 - 50)x_2 \right\} \\ &= \max_{x \in X} \{100x_1 + 90x_2 + 75x_3 + 50x_4\} \end{aligned}$$

Die Quotienten lauten demnach

$$\frac{100}{12}, \quad \frac{90}{6} = \frac{180}{12}, \quad \frac{75}{6} = \frac{150}{12}, \quad \frac{50}{4} = \frac{150}{12}$$

und ein gültige Sortierung ist $(2, 3, 4, 1)$. Die Anwendung des Approximationsalgorithmus liefert uns die Lösung $x^3 = (0, 1, 1, 0)^\top$ und wir erhalten schließlich $z^3 = 175 - \max\{50, 60\} = 115$.

Es sei jetzt $l = 4$. Das Problem (6.4) lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} & \max_{x \in X} \left\{ c^\top x - (\Delta c_1 - \Delta c_4)x_1 - (\Delta c_2 - \Delta c_4)x_2 - (\Delta c_3 - \Delta c_4)x_3 \right\} \\ &= \max_{x \in X} \left\{ c^\top x - (150 - 5)x_1 - (60 - 5)x_2 - (50 - 5)x_3 \right\} \\ &= \max_{x \in X} \{55x_1 + 45x_2 + 30x_3 + 50x_4\}. \end{aligned}$$

Die Quotienten lauten demnach

$$\frac{55}{12}, \quad \frac{45}{6} = \frac{90}{12}, \quad \frac{30}{6} = \frac{60}{12}, \quad \frac{50}{4} = \frac{150}{12}.$$

Eine gültige Sortierung lautet $(4, 2, 3, 1)$ und der Approximationsalgorithmus liefert die Lösung $x^4 = (0, 1, 0, 1)^\top$. Schließlich erhalten wir $z^4 = 150 - \max\{60, 5\} = 90$.

Zuletzt betrachten wir den Fall $l = 5$. Das Problem (6.4) lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} & \max_{x \in X} \left\{ c^\top x - \Delta c_1 x_1 - \Delta c_2 x_2 - \Delta c_3 x_3 - \Delta c_4 x_4 \right\} \\ &= \max_{x \in X} \{50x_1 + 40x_2 + 25x_3 + 45x_4\}. \end{aligned}$$

Die Quotienten lauten

$$\frac{50}{12}, \quad \frac{40}{6} = \frac{80}{12}, \quad \frac{25}{6} = \frac{50}{12}, \quad \frac{45}{4} = \frac{135}{12}$$

mit gültiger Sortierung $(4, 2, 3, 1)$. Wir erhalten als Approximationslösung $x^5 = (0, 1, 0, 1)^\top$ mit $z^5 = 150 - \max\{60, 5\} = 90$.

Insgesamt haben wir also

$$\max\{50, 115, 115, 90, 90\} = 115.$$

Die robuste Lösung $z = (0, 1, 1, 0)^\top$ mit Wert 115 ist also eine 2-Approximationslösung für $\Gamma = 1$. Dies entspricht sogar der Optimallösung, wie wir in einem späteren Beispiel sehen werden.

6.2 Robuste ganzzahlige Optimierung

Wir betrachten das gemischt-ganzzahlige lineare Optimierungsproblem (MIP oder MILP)

$$\min_x \quad c^\top x \tag{6.5a}$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \leq b, \tag{6.5b}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, k, \tag{6.5c}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \tag{6.5d}$$

für $k \leq n$. Angenommen, es existieren Boxunsicherheiten für $c \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, d. h. es gilt:

1. Jeder perturbierte Koeffizient c_j ist eine beschränkte, symmetrische Zufallsvariable aus $[c_j - \Delta c_j, c_j + \Delta c_j]$ mit $\Delta c_j \geq 0$.
2. Jeder Eintrag a_{ij} ist eine beschränkte, symmetrische Zufallsvariable aus $[a_{ij} - \Delta a_{ij}, a_{ij} + \Delta a_{ij}]$ mit $\Delta a_{ij} \geq 0$.

Wir sichern uns gegen Γ_i Abweichungen in Zeile $i = 0, \dots, m$ ab, wobei der Index $i = 0$ für die Zielfunktion steht und wieder $\Gamma_i \subseteq N = \{1, \dots, n\}$ gilt.

Das robuste Gegenstück zu Problem (6.5) im flexiblen Γ -Ansatz lautet dann

$$\min_x \quad c^\top x + \max_{\{S_0 \subseteq N : |S_0| \leq \Gamma_0\}} \sum_{j \in S_0} \Delta c_j |x_j| \tag{6.6a}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \max_{\{S_i \subseteq N : |S_i| \leq \Gamma_i\}} \sum_{j \in S_i} \Delta a_{ij} |x_j| \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{6.6b}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, k, \tag{6.6c}$$

$$x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.6d}$$

Satz 6.6. Das robuste Gegenstück (6.6) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \min_{x,z,p,y} \quad & c^\top x + z_0 \Gamma_0 + \sum_{j=1}^n p_{0j} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + z_i \Gamma_i + \sum_{j=1}^n p_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & z_0 + p_{0j} \geq \Delta c_j y_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ & z_i + p_{ij} \geq \Delta a_{ij} y_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \\ & p_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, m, \\ & y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & z_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, m, \\ & -y_j \leq x_j \leq y_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ & x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, k, \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Beweis. Für festes x gilt

$$\begin{aligned} & \max_{\{S_0 \subseteq N : |S_0| \leq \Gamma_0\}} \sum_{j \in S_0} \Delta c_j |x_j| \\ &= \max_{\alpha_{0j}} \left\{ \sum_{j=1}^n \Delta c_j |x_j| \alpha_{0j} : \sum_{j=1}^n \alpha_{0j} \leq \Gamma_0, \alpha_{0j} \in [0, 1], j = 1, \dots, n \right\} \\ &= \max_{\alpha_{0j}} \left\{ \sum_{j=1}^n \Delta c_j |x_j| \alpha_{0j} : \sum_{j=1}^n \alpha_{0j} \leq \Gamma_0, \alpha_{0j} \leq 1, \alpha_{0j} \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}. \end{aligned}$$

Dualisiert man dieses LP in n Variablen und $2n+1$ Nebenbedingungen (siehe Beweis von Satz 5.5), so erhält man

$$\begin{aligned} \min_{z_0, p_{0j}} \quad & z_0 \Gamma_0 + \sum_{j=1}^n p_{0j} \\ \text{s.t.} \quad & z_0 + p_{0j} \geq \Delta c_j |x_j|, \quad j = 1, \dots, n, \\ & z_0 \geq 0, \\ & p_{0j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

So kann man auch bei den Nebenbedingungen, d. h. für $i = 1, \dots, m$, verfahren und wir erhalten, dass sich

$$\max_{\{S_i \subseteq N : |S_i| \leq \Gamma_i\}} \sum_{j \in S_i} \Delta a_{ij} |x_j|$$

ersetzen lässt durch

$$\begin{aligned} \min_{z_i, p_{ij}} \quad & z_i \Gamma_i + \sum_{j=1}^n p_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & z_i + p_{ij} \geq \Delta a_{ij} |x_j|, \quad j = 1, \dots, n, \\ & z_i \geq 0, \\ & p_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Also ist (6.6) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \min_{x, z, p} \quad & c^\top x + z_0 \Gamma_0 + \sum_{j=1}^n p_{0j} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + z_i \Gamma_i + \sum_{j=1}^n p_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & z_0 + p_{0j} \geq \Delta c_j |x_j|, \quad j = 1, \dots, n, \\ & z_i + p_{ij} \geq \Delta a_{ij} |x_j|, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \\ & p_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, m, \\ & z_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, m, \\ & x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, k, \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ersetzt man nun für alle Indizes j die Variablen $|x_j|$ durch $-y_j \leq x_j \leq y_j$ mit weiteren Variablen $y_j \geq 0$, so erhält man die Behauptung. \square

Korollar 6.7. Die Γ -robuste Formulierung eines MIPs ist wieder ein MIP.

Beispiel 6.8 (Γ -robustes Rucksackproblem). Es sei

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{wenn Objekt } i \text{ nicht eingepackt wird,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Gewicht von Objekt i ist gegeben durch a_i und der Nutzen durch c_i . Das Maximalgewicht sei b . Das Rucksackproblem kann man dann wie folgt formulieren:

$$\max_x \left\{ c^\top x : a^\top x \leq b, x \in \{0, 1\}^n \right\}.$$

Für $n = 4$ Objekte seien nun die folgenden Werte gegeben wie in Beispiel 6.5: $b = 14$, $a_1 = 12$, $a_2 = 6$, $a_3 = 6$, $a_4 = 4$, $c_1 = 200$, $c_2 = 100$, $c_3 = 75$, $c_4 = 50$. Es kommen also die zulässigen Punkte $x = (1, 0, 0, 0)$ mit Nutzen 200, $x = (0, 1, 1, 0)$ mit Nutzen 175, $x = (0, 1, 0, 1)$ mit Nutzen 150 und $x = (0, 0, 1, 1)$ mit Nutzen 125 infrage.

Zulässige Punkte	$\Gamma = 1$	$\Gamma = 2$	$\Gamma = 3$
(1, 0, 0, 0)	200	50	50
(0, 1, 1, 0)	175	115	65
(0, 1, 0, 1)	150	90	85
(0, 0, 1, 1)	125	75	70

Tabelle 6.2: Robust optimale Lösungen

Durch eventuelle Transportschäden kann es an jedem Gegenstand zu einem Wertverlust Δc_j kommen. Dabei tritt eine Beschädigung bei bis zu Γ_0 -vielen Objekten ein. Das führt zur robusten Modellierung

$$-\min_x \left\{ -c^\top x + \max_{\{S \subseteq N: |S| \leq \Gamma_0\}} \sum_{j \in S} \Delta c_j x_j : x \in \{0, 1\}^n, \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \right\}.$$

Mit Satz 6.6 ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} & -\min_{x, z_0, p_{0j}} -c^\top x + z_0 \Gamma_0 + \sum_{j=1}^n p_{0j} \\ \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, \\ & z_0 + p_{0j} \geq \Delta c_j x_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ & p_{0j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & z_0 \geq 0, \\ & x \in \{0, 1\}^n, \end{aligned}$$

was wieder ein MIP ist.

Setze nun $\Delta c_1 = 150$, $\Delta c_2 = 60$, $\Delta c_3 = 50$, $\Delta c_4 = 5$. Für die zulässigen Punkte gilt nun: Für $\Gamma_0 = 1$ ist $(0, 1, 1, 0)$ optimal und $(1, 0, 0, 0)$ am schlechtesten.

Kapitel 7

Robuste Netzwerkflüsse im flexiblen Γ -Ansatz

Gegeben sei ein (evtl. gerichteter) Graph $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $u_{ij} > 0$ und Kosten $c_{ij} > 0$ für alle $(i, j) \in E$ sowie mit Ein- bzw. Auspeisungen $b_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in V$. Ferner gelte $\sum_{i \in V} b_i = 0$. Für $b_i > 0$ heißt i Quelle und für $b_i < 0$ heißt i Senke. Wir betrachten nun folgendes Minimalkosten-Fluss-Problem:

$$\min_x \quad \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \tag{7.1a}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} = b_i, \quad i \in V, \tag{7.1b}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in E. \tag{7.1c}$$

Man beachte, dass bzgl. der Flüsse keine Ganzzahligkeit gefordert wird.

Beispiel 7.1. Es sei der Graph aus Abbildung 7.1 (oben) gegeben. Ein optimaler Fluss mit Kosten 44 ist in Abbildung 7.1 (unten) gegeben. Hierbei geben die Pfeile die Flussrichtung an. Die in der Lösung ungenutzte Kante ist gestrichelt eingezeichnet.

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^{|E|}$ die Menge der zulässigen Lösungen von (7.1), d. h. die Menge der Flüsse, die die Flusserhaltung erfüllen und die Kapazitätsgrenzen einhalten. Die robuste Version des Minimalkosten-Fluss-Problems (7.1) im flexiblen Γ -Ansatz lautet dann

$$z^* = \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \max_{\{S \subseteq E: |S| \leq \Gamma\}} \sum_{(i,j) \in S} \Delta c_{ij} x_{ij} \right\}. \tag{7.2}$$

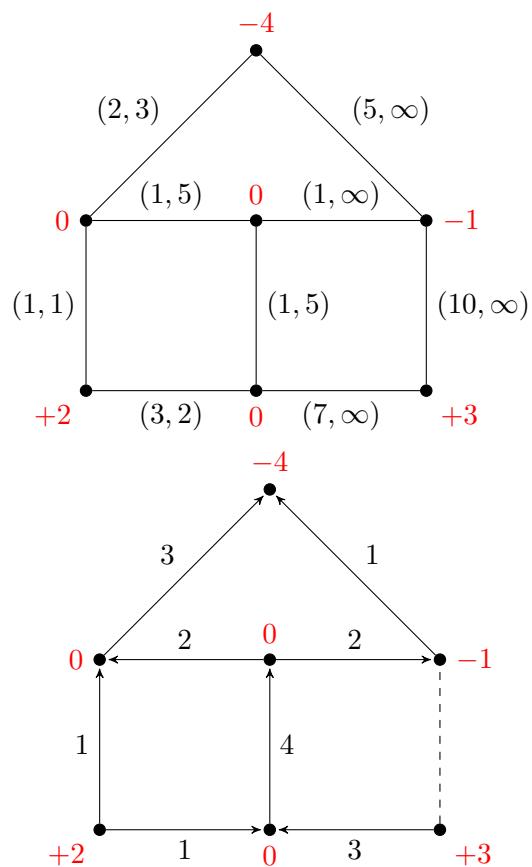


Abbildung 7.1: Minimalkosten-Fluss-Problem mit Kosten c_{ij} (erster Wert in Klammern), Kapazitäten u_{ij} (zweiter Wert in Klammern) und Ein- bzw. Ausspeisungen b_i (oben) sowie genutzte Kapazität in der Lösung (unten)

Wir wollen diese robuste Version von Problem (7.1) durch Lösen von möglichst nur polynomiell vielen nominalen Problemen vom Typ (7.1) lösen. Geht das mit den Techniken aus dem letzten Abschnitt 6.2?

Prinzipiell könnte man wie folgt vorgehen: Problem (7.1) hat die Form eines MIPs (auch wenn es keine ganzzahligen Variablen enthält), das mithilfe von Satz 6.6 robustifiziert werden könnte. Das robuste Netzwerkflussproblem ließe sich dann als ein LP mit mehr Variablen exakt lösen. Das Problem ist, dass dieses resultierende Problem kein reines Flussproblem mehr ist, wir aber weiterhin die für Flüsse bekannten kombinatorischen Algorithmen nutzen möchten.

Im Folgenden geben wir ein Polynomialzeit-Verfahren an, mit dessen Hilfe das robuste Gegenstück (7.2) mit einem a priori festgelegten Fehler von höchstens $\varepsilon > 0$ gelöst werden kann.

Da x_{ij} nicht binär ist, kann Satz 5.5 nicht verwendet werden. Allerdings kann man die Beweisidee übernehmen, d. h. man dualisiert

$$\max_{\{S \subseteq E : |S| \leq \Gamma\}} \sum_{(i,j) \in S} \Delta c_{ij} x_{ij}$$

und erhält daraus $z^* = \min_{\theta \geq 0} z(\theta)$ mit

$$z(\theta) = \Gamma\theta + \min_{x \in X, y \geq 0} \left\{ c^\top x + \sum_{(i,j) \in E} y_{ij} : y_{ij} + \theta \geq \Delta c_{ij} x_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \right\}.$$

Man beachte hierbei, dass im Beweis von Satz 5.5 bis zu dieser Reformulierung des Problems noch keinerlei Ganzzahligkeitsannahme ausgenutzt wurde.

Satz 7.2. Für jedes $\theta \geq 0$ kann $z(\theta)$ durch Lösen eines Minimalkosten-Fluss-Problems (7.1) berechnet werden.

Beweis. Man geht analog zum Beweis von Satz 5.5 vor: Sei θ fest und man setze $y_{ij} = \max\{\Delta c_{ij} x_{ij} - \theta, 0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z(\theta) &= \Gamma\theta + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{(i,j) \in E} \max\{\Delta c_{ij} x_{ij} - \theta, 0\} \right\} \\ &= \Gamma\theta + \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{(i,j) \in E} \Delta c_{ij} \max\left\{x_{ij} - \frac{\theta}{\Delta c_{ij}}, 0\right\} \right\}. \end{aligned}$$

Wir konstruieren nun aus dem gegebenen Graphen $G = (V, E)$ einen neuen Graphen, indem wir jede Kante $(i, j) \in E$ wie in Abbildung 7.2 ersetzen. Wir beweisen jetzt die folgende Behauptung: Eine optimale Lösung des

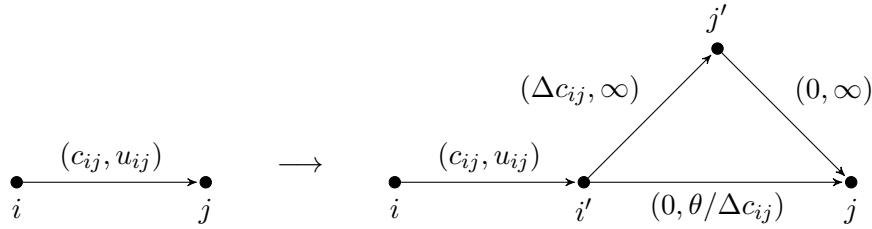


Abbildung 7.2: Graphentransformation für das Minimalkosten-Fluss-Problem

Minimalkosten-Fluss-Problems (7.1) im so transformierten Graphen liefert die optimale Lösung von

$$\min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \sum_{(i,j) \in E} \Delta c_{ij} \max \left\{ x_{ij} - \frac{\theta}{\Delta c_{ij}}, 0 \right\} \right\}. \quad (7.3)$$

Sei dazu x optimal für (7.3). Wir unterscheiden für eine Kante $(i, j) \in E$ nun zwei Fälle:

1. Es sei zunächst $x_{ij} - \theta/\Delta c_{ij} \leq 0$, d. h. es gilt $\max\{x_{ij} - \theta/\Delta c_{ij}, 0\} = 0$. Dann ist die billigste Variante, den Fluss über $(i, i') \rightarrow (i', j)$ zu schicken, da hierfür die Kapazität auf der Kante (i', j) ausreicht. Die Kosten hierfür sind $c_{ij}x_{ij}$.
2. Jetzt sei $x_{ij} - \theta/\Delta c_{ij} > 0$. Dann schicke den Fluss $\theta/\Delta c_{ij}$ über $(i, i') \rightarrow (i', j)$ und den Rest $x_{ij} - \theta/\Delta c_{ij}$ über $(i, i') \rightarrow (i', j') \rightarrow (j', j)$. Letzteres geht immer, da die Kapazitäten auf dem Weg $(i', j') \rightarrow (j', j)$ unendlich sind. Die Kosten hierfür sind $c_{ij}x_{ij} + \Delta c_{ij}(x_{ij} - \theta/\Delta c_{ij})$.

In beiden Fällen stimmen die Kosten mit denen in der Zielfunktion von (7.3) überein. Also kann $z(\theta)$ durch das Lösen des Minimalkosten-Fluss-Problems im so wie oben konstruierten Graphen ausgewertet werden. \square

Satz 7.3. Die Funktion $z : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:

1. z ist konvex.
2. Für $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ gilt $|z(\theta_1) - z(\theta_2)| \leq |E| \cdot |\theta_1 - \theta_2|$, d. h. z ist Lipschitzstetig mit Lipschitz-Konstante $|E|$.

Beweis. 1. Es seien (x^1, y^1) und (x^2, y^2) die entsprechenden optimalen Lösungen für $\theta = \theta_1$ bzw. $\theta = \theta_2$. Dann ergibt eine Überprüfung durch Einsetzen, dass

$$(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, \lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2)$$

und $\theta = \lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2$ die Nebenbedingungen für die Auswertung der Funktion z erfüllen. Somit ist

$$\begin{aligned} & \lambda z(\theta_1) + (1 - \lambda)z(\theta_2) \\ &= \Gamma(\lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2) + c^\top (\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \\ &\quad + \sum_{(i,j) \in E} (\lambda y_{ij}^1 + (1 - \lambda)y_{ij}^2) \\ &\geq z(\lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2), \end{aligned}$$

da $z(\lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2)$ qua Definition minimal ist.

2. Die wesentliche Idee ist es nun, $z(\theta)$ über den Lagrange-Ansatz zu berechnen. Die grobe Idee dieses Ansatzes lautet wie folgt (vgl. dazu beispielsweise Lemaréchal (2001)): Wir fordern dabei nur von einem Teil der Nebenbedingungen, dass sie erfüllt sind und für den restlichen Teil bestrafen wir die Verletzung der Ungleichungen

$$y_{ij} + \theta \geq \Delta c_{ij}x_{ij}.$$

Das heißt, bestrafte falls

$$\Delta c_{ij}x_{ij} - y_{ij} - \theta > 0,$$

gilt. Dies realisiert man vermöge eines Strafterms der Form

$$\sum_{ij} r_{ij}(\Delta c_{ij}x_{ij} - y_{ij} - \theta) \quad \text{mit } r_{ij} \geq 0,$$

der zusätzlich mit in die Zielfunktion aufgenommen wird. Für jedes $r_{ij} \geq 0$ ergibt die Lösung des resultierenden Problems eine untere Schranke für das Originalproblem.¹ Das Ziel ist also jetzt, die beste dieser unteren Schranken zu finden, d. h., wir maximieren über r_{ij} . Wir erhalten also

$$\begin{aligned} z(\theta) &= \max_{r \geq 0} \min_{x \in X, y \geq 0} \left\{ \Gamma\theta + c^\top x + \sum_{(i,j) \in E} y_{ij} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(i,j) \in E} r_{ij}(\Delta c_{ij}x_{ij} - y_{ij} - \theta) \right\} \\ &= \max_{r \geq 0} \min_{x \in X, y \geq 0} \left\{ \left(\Gamma - \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} \right) \theta + c^\top x \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(i,j) \in E} y_{ij}(1 - r_{ij}) + \sum_{(i,j) \in E} r_{ij}\Delta c_{ij}x_{ij} \right\}. \end{aligned}$$

¹ Warum?

Es ist

$$\min_{y_{ij} \geq 0} \{y_{ij}(1 - r_{ij})\}$$

nach unten unbeschränkt für $r_{ij} > 1$ und 0 für $0 \leq r_{ij} \leq 1$. Wir betrachten also o. B. d. A. im Folgenden nur noch Werte $r_{ij} \in [0, 1]$ und erhalten so

$$z(\theta) = \max_{0 \leq r_{ij} \leq 1} \min_{x \in X} \left\{ \left(\Gamma - \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} \right) \theta + c^\top x + \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} \Delta c_{ij} x_{ij} \right\}.$$

Aus $r_{ij} \in [0, 1]$ für alle $(i, j) \in E$ und $0 \leq \Gamma \leq |E|$ folgt

$$-|E| \leq \Gamma - \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} \leq |E|.$$

Sei jetzt o. B. d. A. $\theta_1 > \theta_2 \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(\Gamma - \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} \right) \theta_1 &= \left(\Gamma - \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} \right) (\theta_2 + (\theta_1 - \theta_2)) \\ &\leq \left(\Gamma - \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} \right) \theta_2 + |E|(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} z(\theta_1) &= \max_{0 \leq r_{ij} \leq 1} \min_{x \in X} \left\{ \left(\Gamma - \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} \right) \theta_1 + c^\top x + \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} \Delta c_{ij} x_{ij} \right\} \\ &\leq \max_{0 \leq r_{ij} \leq 1} \min_{x \in X} \left\{ \left(\Gamma - \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} \right) \theta_2 + c^\top x + \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} \Delta c_{ij} x_{ij} \right\} \\ &\quad + |E|(\theta_1 - \theta_2) \\ &= z(\theta_2) + |E|(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$z(\theta_1) \geq z(\theta_2) - |E|(\theta_1 - \theta_2)$$

und somit folgt die Behauptung mit

$$-|E||\theta_1 - \theta_2| \leq z(\theta_1) - z(\theta_2) \leq |E||\theta_1 - \theta_2|. \quad \square$$

Jetzt können wir uns unserem Hauptresultat widmen.

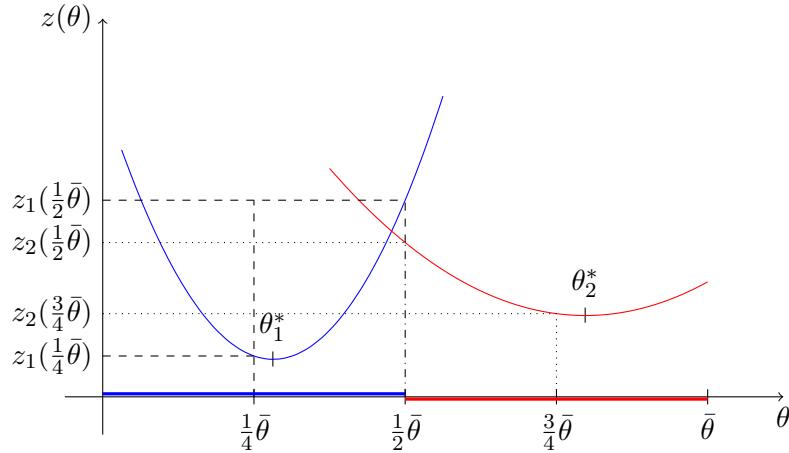


Abbildung 7.3: Binäre Suche im Beweis von Satz 7.4

Satz 7.4. Sei $\varepsilon > 0$ ein vorgegebener Fehler. Man kann für das robuste Gegenstück (7.2) eine Lösung $\bar{x} \in X$ mit einem durch $\varepsilon > 0$ nach oben beschränkten Fehler berechnen, d. h.

$$c^\top \bar{x} + \max_{\{S \subseteq E : |S| \leq \Gamma\}} \sum_{(i,j) \in S} \Delta c_{ij} \bar{x}_{ij} \leq z^* + \varepsilon,$$

wobei z^* der Optimallösung entspricht, indem man

$$3 + 2 \left\lceil \log_2 \left(|E| \frac{\bar{\theta}}{\varepsilon} \right) \right\rceil$$

Probleme der Form (7.1) löst, wobei

$$\bar{\theta} = \max \{u_{ij} \Delta c_{ij} : (i, j) \in E\}$$

ist.

Beweis. Nach Satz 7.3 ist die Funktion $z(\theta)$ konvex. Sei $\theta^* \geq 0$ eine Optimallösung von $\min_{\theta \geq 0} z(\theta)$, d. h. $z^* = z(\theta^*)$. Dabei gilt $\theta^* \in [0, \bar{\theta}]$.

Es wird nun eine binäre Suche verwendet, d. h. wir berechnen zunächst $z(0)$, $z(\bar{\theta}/4)$, $z(\bar{\theta}/2)$, $z(3\bar{\theta}/4)$ und $z(\bar{\theta})$; vgl. Abbildung 7.3.

- Im Fall $z(\bar{\theta}/4) \leq z(\bar{\theta}/2)$ liegt $\theta^* \in [0, \bar{\theta}/2]$.
- Im Fall $z(\bar{\theta}/2) \geq z(3\bar{\theta}/4)$ liegt $\theta^* \in [\bar{\theta}/2, \bar{\theta}]$.
- In allen anderen Fällen liegt θ^* im Intervall $[\bar{\theta}/4, 3\bar{\theta}/4]$.

In dem entsprechenden Intervall werden nun die beiden Teilintervalle wieder halbiert und die Prozedur entsprechend wiederholt. In jedem Schritt sind also zwei weitere Berechnungen nötig. Nach k Schritten gilt

$$|z(\theta) - z(\theta^*)| \leq |E| \cdot |\theta - \theta^*| \leq |E| \frac{\bar{\theta}}{2^k}$$

aufgrund von Satz 7.3 (2. Teil), im entsprechenden Intervall. Nach

$$\left\lceil \log_2 \left(|E| \frac{\bar{\theta}}{\varepsilon} \right) \right\rceil$$

Schritten gilt also $|z(\theta) - z(\theta^*)| \leq \varepsilon$. Somit ist die angegebene Anzahl von Problemen der Form (7.1) zu lösen. \square

Kapitel 8

Robuste binäre Optimierung mit ellipsoidalen Unsicherheiten

Wir betrachten wieder das binäre Problem

$$\min_x \{c^\top x : x \in X\} \quad (8.1)$$

mit $X \subseteq \{0, 1\}^n$. Unsicherheiten seien in diesem Kapitel wieder nur in den Koeffizienten der Zielfunktion vorhanden.

Für weitere Details zur robusten binären Optimierung mit ellipsoidalen Unsicherheiten siehe Sim (2004).

8.1 Unkorrelierte Kosten

Mit ellipsoidalen Unsicherheiten

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in \mathbb{R}^n : \left\| \left(\frac{u_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{u_n}{\sigma_n} \right) \right\|_2 \leq r \right\}$$

sei

$$\xi(x) = \max_{u \in \mathcal{U}} u^\top x = r \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 x_j^2},$$

denn $u^\top x = \|u\|_2 \|x\|_2 \cos(u, x)$ wird maximal, wenn $\cos(u, x) = 1$, also wenn u parallel zu x ist; vgl. Abschnitt 3.4. Die maximale Länge in \mathcal{U} ist r .

Da wir $x \in \{0, 1\}^n$ annehmen, gilt $x_j^2 = x_j$ für alle $j = 1, \dots, n$ und

$$\xi(x) = r \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 x_j^2} = r \sqrt{\sum_{j=1}^n \tilde{\sigma}_j x_j} = r \sqrt{\tilde{\sigma}^\top x} \quad \text{mit } \tilde{\sigma} = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)^\top.$$

Wir wollen nun das robuste Gegenstück

$$z^* = \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + r\sqrt{\tilde{\sigma}^\top x} \right\} \quad (8.2)$$

lösen. Sei dazu im Folgenden

$$\mathcal{W} = \{\tilde{\sigma}^\top x : x \in \{0, 1\}^n\}, \quad f(w) = r\sqrt{w}$$

und

$$g(w) = \begin{cases} f'(w) = \frac{1}{2}r\frac{1}{\sqrt{w}} & \text{für } w \in \mathcal{W} \setminus \{0\}, \\ r\frac{1}{\sqrt{\sigma}} & \text{für } w = 0 \end{cases}$$

mit $\bar{\sigma} = \min_j \sigma_j^2$. Mit den Methoden aus Kapitel 3 würden wir zur Lösung des robusten Gegenstücks (8.2) ein ganzzahliges Optimierungsproblem über dem Lorentzkegel lösen. Ein alternatives Lösungsverfahren liefert der folgende Satz.

Satz 8.1. Sei

$$z(w) = \min_{x \in X} \left\{ (c + g(w)\tilde{\sigma})^\top x \right\} + r\sqrt{w} - wg(w). \quad (8.3)$$

Dann gilt $z^* = \min_{w \in \mathcal{W}} z(w)$, d. h. man kann das robuste Gegenstück (8.2) lösen, indem man $|\mathcal{W}|$ Probleme der nominalen Form (8.1) löst.

Beweis. Es sei x^* eine optimale Lösung des robusten Gegenstücks (8.2) und sei $w^* = \tilde{\sigma}^\top x^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z^* &= c^\top x^* + r\sqrt{\tilde{\sigma}^\top x^*} \\ &= c^\top x^* + f(w^*) \\ &= (c + g(w^*)\tilde{\sigma})^\top x^* - (g(w^*)\tilde{\sigma})^\top x^* + f(w^*) \\ &= (c + g(w^*)\tilde{\sigma})^\top x^* + f(w^*) - g(w^*)w^* \\ &\geq \min_{x \in X} \{(c + g(w^*)\tilde{\sigma})^\top x\} + f(w^*) - g(w^*)w^* \\ &= z(w^*) \\ &\geq \min_{w \in \mathcal{W}} z(w), \end{aligned}$$

d. h. es gilt $z^* \geq \min_{w \in \mathcal{W}} z(w)$.

Für $w \in \mathcal{W}$ sei x_w eine Optimallösung von (8.3). Dann gilt

$$\begin{aligned} z(w) &= (c + g(w)\tilde{\sigma})^\top x_w + f(w) - wg(w) \\ &= c^\top x_w + f(\tilde{\sigma}^\top x_w) + g(w)(\tilde{\sigma}^\top x_w - w) - (f(\tilde{\sigma}^\top x_w) - f(w)) \\ &\geq c^\top x_w + f(\tilde{\sigma}^\top x_w), \end{aligned}$$

wobei für die letzte Ungleichung noch

$$g(w)(\tilde{\sigma}^\top x_w - w) - (f(\tilde{\sigma}^\top x_w) - f(w)) \geq 0$$

zu zeigen ist. Für $w > 0$ gilt wegen der Konkavität von f

$$\begin{aligned} f'(w)(\tilde{\sigma}^\top x_w - w) &\geq f(\tilde{\sigma}^\top x_w) - f(w) \\ \iff g(w)(\tilde{\sigma}^\top x_w - w) - (f(\tilde{\sigma}^\top x_w) - f(w)) &\geq 0 \end{aligned}$$

und für $w = 0$ gilt

$$\begin{aligned} g(0)\tilde{\sigma}^\top x_w &= r \frac{1}{\sqrt{\tilde{\sigma}}} \tilde{\sigma}^\top x_w = r \sum_{j=1}^n \sqrt{\tilde{\sigma}_j} \frac{\sqrt{\tilde{\sigma}_j}}{\sqrt{\tilde{\sigma}}} x_{w_j} \\ &\geq r \sum_{j=1}^n \sqrt{\tilde{\sigma}_j} x_{w_j} \stackrel{x_w \in \{0,1\}^n}{=} r \sum_{j=1}^n \sqrt{\tilde{\sigma}_j x_{w_j}} \\ &\geq r \sqrt{\tilde{\sigma}^\top x_w} = f(\tilde{\sigma}^\top x_w) - f(0). \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$z(w) \geq c^\top x_w + f(\tilde{\sigma}^\top x_w) \geq \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + f(\tilde{\sigma}^\top x) \right\} = z^*$$

für alle $w \in \mathcal{W}$. Insbesondere gilt $\min_{w \in \mathcal{W}} z(w) \geq z^*$ und damit folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 8.2. Der Beweis von Satz 8.1 lässt sich auf beliebige konkave Funktionen f verallgemeinern.

Im Allgemeinen liefert Satz 8.1 keine polynomielle Reduktion, da \mathcal{W} exponentielle Größe haben kann. Das Vorgehen hat jedoch polynomiell viele Schritte, wenn alle σ_j gleich sind, d. h. wenn $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = s > 0$ gilt und damit

$$\xi(x) = r\sqrt{\tilde{\sigma}^\top x} = rs\sqrt{e^\top x} = rs\|x\|_2$$

mit $e = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$. Hierbei wurde wieder $x_j^2 = x_j$ für alle $j = 1, \dots, n$ ausgenutzt. Es ergibt sich dann ein Polynomialzeitverfahren, falls das nominale Problem (8.1) in Polynomialzeit lösbar ist.

Korollar 8.3. Sei $\tilde{\sigma} = (s^2, \dots, s^2)^\top$, d. h. es gilt $\sigma_j = s$ für alle $j = 1, \dots, n$. Dann ist

$$z^* = \min_{w \in \{0,1,\dots,n\}} z(s^2 w).$$

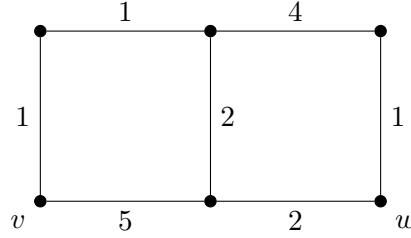


Abbildung 8.1: Ausgangsgraph des Kürzeste-Wege-Problems aus Beispiel 8.4

Beweis. Es gilt

$$\mathcal{W} = \left\{ \tilde{\sigma}^\top x : x \in \{0, 1\}^n \right\} = \{0, s^2, \dots, ns^2\}$$

Also folgt die Behauptung aus Satz 8.1. \square

Im Fall des letzten Korollars kann man $z(s^2w)$ wie folgt berechnen:

Es gilt $\bar{\sigma} = \min_j \sigma_j^2 = s^2$. Also ist für $w = 0$:

$$\begin{aligned} z(0) &= \min_{x \in X} (c + g(0)\tilde{\sigma})^\top x + r\sqrt{0} - 0 \cdot g(0) \\ &= \min_{x \in X} \left(c + \frac{r}{s} es^2 \right)^\top x \\ &= \min_{x \in X} (c + rse)^\top x. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Für $w > 0$ gilt

$$\begin{aligned} z(s^2w) &= \min_{x \in X} (c + g(s^2w)\tilde{\sigma})^\top x + r\sqrt{s^2w} - s^2wg(s^2w) \\ &= \min_{x \in X} \left(c + \frac{1}{2}r \frac{1}{s\sqrt{w}} es^2 \right)^\top x + rs\sqrt{w} - s^2w \frac{1}{2}r \frac{1}{s\sqrt{w}} \\ &= \min_{x \in X} \left(c + \frac{rs}{2\sqrt{w}} e \right)^\top x + \frac{rs}{2}\sqrt{w}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Beispiel 8.4 (Kürzeste Wege). Es sei der Graph aus Abbildung 8.1 gegeben. Dann ist der (nominal) kürzeste Weg von v nach w in Abbildung 8.2 abgebildet. Wir betrachten nun eine ellipsoidale Unsicherheit mit $r = 1$ und $\sigma_j = 2/3$ für alle j . Es gilt also $s = 2/3$. Wir suchen eine robust optimale Lösung. Mit den gegebenen Daten gilt also

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in \mathbb{R}^7 : \sqrt{\sum_{j=1}^7 \left(\frac{3}{2}u_j \right)^2} \leq 1 \right\} = \left\{ u \in \mathbb{R}^7 : \|u\|_2 \leq \frac{2}{3} \right\} \tag{8.6}$$

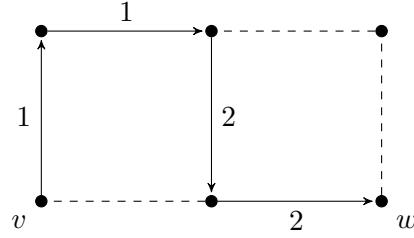


Abbildung 8.2: Nominal kürzester Weg (mit Länge 6) des Kürzeste-Wege-Problems aus Beispiel 8.4

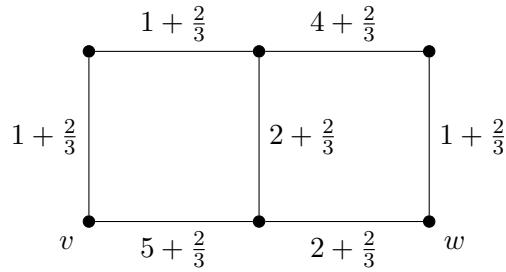


Abbildung 8.3: Modifiziertes Kürzeste-Wege-Problem aus Beispiel 8.4 für $w = 0$

und

$$\xi(x) = rs\sqrt{e^\top x}.$$

Somit lautet das robuste Gegenstück (8.2) in diesem konkreten Fall

$$z^* = \min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \frac{2}{3}\sqrt{e^\top x} \right\},$$

wobei X die Menge aller Wege von v nach w beschreibt. Nach Korollar 8.3 gilt

$$z^* = \min_{w \in \{0,1,\dots,7\}} z\left(\frac{4}{9}w\right).$$

Nach (8.4) gilt

$$z(0) = \min_{x \in X} \left(c + \frac{2}{3}e \right)^\top x.$$

Es muss also ein kürzester Weg für modifizierte Kosten berechnet werden; siehe Abbildung 8.3 für die modifizierte Instanz und Abbildung 8.4 für die zugehörige Lösung. Die Länge des kürzesten Weges ist $z(0) = 8 + 1/3$. Gemäß (8.5) gilt für $w > 0$

$$z\left(\frac{4}{9}w\right) = \min_{x \in X} \left(c + \frac{1}{3\sqrt{w}}e \right)^\top x + \frac{\sqrt{w}}{3}.$$

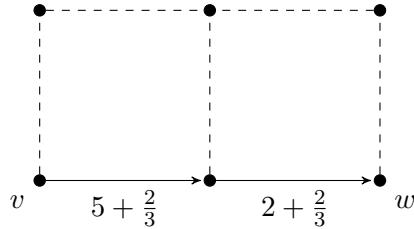


Abbildung 8.4: Lösung des Kürzeste-Wege-Problems aus Beispiel 8.4 für die modifizierte Instanz mit $w = 0$

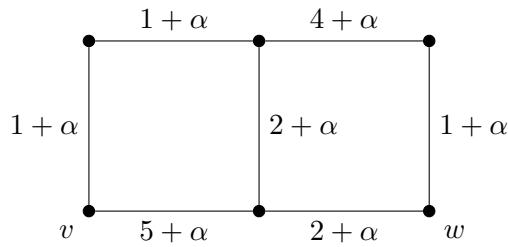


Abbildung 8.5: Modifiziertes Kürzeste-Wege-Problem aus Beispiel 8.4 für $w > 0$

Es werden also wieder kürzeste Wege berechnet, wobei die Kosten aller Kanten um den Wert $\alpha := 1/(3\sqrt{w})$ erhöht sind; vgl. Abbildung 8.5. Wegen $\alpha \leq 1/2$ erhalten wir für alle $w > 0$ den in Abbildung 8.6 eingezeichneten kürzesten Weg. Es gilt also

$$z\left(\frac{4}{9}w\right) = 6 + \frac{4}{3\sqrt{w}} + \frac{\sqrt{w}}{3}$$

für $w = 1, \dots, 7$. Dies ist eine Funktion in Abhängigkeit von $w > 0$ und ihre Ableitung lautet

$$\frac{1}{6\sqrt{w}} \left(\frac{-4}{w} + 1 \right),$$

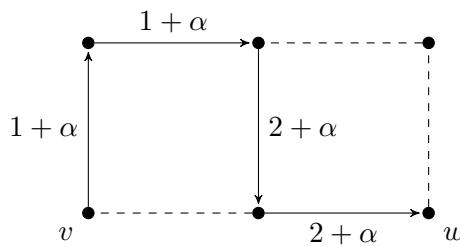


Abbildung 8.6: Lösung des Kürzeste-Wege-Problems aus Beispiel 8.4 für die modifizierte Instanz mit $w > 0$

d. h. die Funktion ist monoton fallend für $w < 4$ und monoton steigend für $w > 4$. Das Minimum wird also bei $w = 4$ angenommen. Somit ist

$$z^* = \min \left\{ z(0), z\left(\frac{4}{9} \cdot 4\right) \right\} = \min \left\{ 8 + \frac{1}{3}, 7 + \frac{1}{3} \right\} = 7 + \frac{1}{3}.$$

Den robust optimalen Weg erhält man also für $w = 4$.

8.2 Korrelierte Kosten

Wir wollen nun Unsicherheiten untersuchen, bei denen die Koeffizienten der Zielfunktion korreliert sind. Solche Probleme treten z. B. bei der Verkehrsplanung auf, da die Stauwahrscheinlichkeiten einzelner Straßen nicht unabhängig voneinander sind.

Dazu betrachten wir die Kovarianzmatrix $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^n$ der Zufallsvariablen $\Delta c_j, j = 1, \dots, n$, deren Einträge gegeben sind durch

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E} [(\Delta c_i - \mathbb{E}[\Delta c_i])(\Delta c_j - \mathbb{E}[\Delta c_j])].$$

Das heißt, dass die Kovarianzmatrix insbesondere symmetrisch ist und die Diagonaleinträge σ_{ii} gerade die Varianz der Zufallsvariablen Δc_i beschreiben. Anschaulich sind die Einträge der Matrix für $i \neq j$ wie folgt zu interpretieren:

- $\sigma_{ij} > 0$: Δc_i und Δc_j bewegen sich tendenziell in die gleiche Richtung.
- $\sigma_{ij} < 0$: Δc_i und Δc_j bewegen sich tendenziell entgegengesetzt.
- $\sigma_{ij} = 0$: Es besteht keine Korrelation.

Es sei jetzt die Unsicherheitsmenge

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in \mathbb{R}^n : \sqrt{u^\top \Sigma^{-1} u} \leq r \right\}$$

gegeben. Falls die Variablen unkorreliert sind, ergibt sich

$$\Sigma = \text{diag} [\sigma_i^2]_{i=1}^n,$$

d. h. Σ ist eine Diagonalmatrix mit Einträgen σ_i^2 auf der Diagonalen. Wie in Abschnitt 8.1 gilt dann also

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{\sigma_i^2}} \leq r \right\}.$$

Beispiel 8.5. Es sei $n = 2$ und Δc_1 und Δc_2 seien negativ korreliert mit

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{bmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^\top \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}} \leq r \right\} \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{\frac{4}{3}(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2)} \leq r \right\}.\end{aligned}$$

Durch den Term $u_1 u_2$ wird die Ellipse \mathcal{U} im positiven Quadranten kleiner, d. h. die Unsicherheit wird dort geringer.

Für eine beliebige Kovarianzmatrix Σ und

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in \mathbb{R}^n : \sqrt{u^\top \Sigma^{-1} u} \leq r \right\}$$

gilt $\xi(x) = r\sqrt{x^\top \Sigma x}$. Das robuste Gegenstück lautet dann (vgl. Übung)

$$\min_{x \in X} \left\{ c^\top x + r\sqrt{x^\top \Sigma x} \right\}. \quad (8.7)$$

Satz 8.6. Das robuste Gegenstück (8.7) kann NP-schwer sein, auch wenn das nominale Problem (8.1) polynomiell lösbar ist für alle Vektoren c .

Diese Aussage beweisen wir nicht in der Vorlesung. Beispiele für die Aussage sind das Kürzeste-Wege- oder das Minimal-Spannbaum-Problem; vgl. Sim (2004).

Kapitel 9

Stochastische Optimierung

9.1 Ein einführendes Beispiel

Ein Bauer muss entscheiden, was er anbaut, und hat die Wahl zwischen Weizen, Mais und Zuckerrüben. Die Einschränkungen an seine Entscheidung sind die folgenden:

- Insgesamt verfügt er über 500 ha Land.
- Er selber benötigt 200 t Weizen und 240 t Mais als Viehfutter. Diese Mengen kann er entweder selbst anbauen oder einkaufen. Etwaige Überschüsse kann er verkaufen.
- Der Verkaufspreis ist 170 € t^{-1} für Weizen und 150 € t^{-1} für Mais.
- Der Einkaufspreis ist jeweils 40 % höher als der Verkaufspreis, also 238 € t^{-1} für Weizen und 210 € t^{-1} für Mais.
- Der Verkaufspreis von Zuckerrüben liegt bei 36 € t^{-1} . Allerdings gilt er aufgrund einer EU-Quote nur bis 6000 t. Alles darüber kann nur für 10 € t^{-1} verkauft werden.
- Die Pflanzkosten betragen 150 € ha^{-1} Weizen, 230 € ha^{-1} Mais und 260 € ha^{-1} Zuckerrüben.
- Die Erträge sind erfahrungsgemäß 2.5 t ha^{-1} Weizen, 3 t ha^{-1} Mais und 20 t ha^{-1} Zuckerrüben.

Wir wollen das Problem zunächst ohne Zufall bzw. Unsicherheit modellieren. Hierbei verwenden wir die in Tabelle 9.1 aufgelisteten Variablen. Das

Variable	Bedeutung
x_1	Fläche für Weizen (ha)
x_2	Fläche für Mais (ha)
x_3	Fläche für Zuckerrüben (ha)
y_1	gekaufter Weizen (t)
y_2	gekaufter Mais (t)
w_1	verkaufter Weizen (t)
w_2	verkaufter Mais (t)
w_3	verkaufte Zuckerrüben (t) zu hohem Preis
w_4	verkaufte Zuckerrüben (t) zu niedrigem Preis

Tabelle 9.1: Variablen des Beispiels aus Abschnitt 9.1 zur stochastischen Optimierung

zugehörige lineare Problem lautet

$$\min_{x,y,w} \begin{pmatrix} 150 \\ 230 \\ 260 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 238 \\ 210 \\ -170 \\ -150 \\ -36 \\ -10 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \quad (9.1a)$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \quad (\text{bewirtschaftete Fläche}) \quad (9.1b)$$

$$2.5x_1 + y_1 - w_1 \geq 200, \quad (\text{benötigter Weizen}) \quad (9.1c)$$

$$3x_2 + y_2 - w_2 \geq 240, \quad (\text{benötigter Mais}) \quad (9.1d)$$

$$20x_3 - w_3 - w_4 \geq 0, \quad (\text{Zuckerrüben}) \quad (9.1e)$$

$$w_3 \leq 6000, \quad (\text{EU-Quote}) \quad (9.1f)$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0. \quad (9.1g)$$

Die Optimallösung lautet $x_1 = 120$, $x_2 = 80$, $x_3 = 300$, $y_1 = y_2 = 0$, $w_1 = 100$, $w_2 = 0$, $w_3 = 6000$, $w_4 = 0$. Damit ergibt sich ein erzielter Gewinn von $118\,600 \text{ €}$.¹

In der Realität ist dieses Problem natürlich stark von Unsicherheiten geprägt. So hat insbesondere das in der Zukunft unbekannte Wetter im Allgemeinen einen großen Einfluss auf die Erträge. Wir unterscheiden die folgenden drei Szenarien:

Normales Jahr: Erträge wie bisher.

¹Man beachte, dass in Problem (9.1) die Kosten minimiert werden anstelle den Gewinn zu maximieren. Das der erzielte Gewinn also $118\,600 \text{ €}$ beträgt heißt, dass der optimale Zielfunktionswert von Problem (9.1) $-118\,600$ ist.

Gutes Jahr: Erträge 20 % höher.

Schlechtes Jahr: Erträge 20 % niedriger.

Wir nehmen außerdem an, dass die Wahrscheinlichkeit für jedes dieser Szenarien 1/3 ist. Unter diesen Annahmen wollen wir die Kosten nun robust optimieren. Dazu nehmen wir den schlechtesten Fall an:

$$\min_{z=(x,y,w)} c^\top z \quad (9.2a)$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \quad (9.2b)$$

$$2x_1 + y_1 - w_1 \geq 200, \quad (9.2c)$$

$$2.4x_2 + y_2 - w_2 \geq 240, \quad (9.2d)$$

$$16x_3 - w_3 - w_4 \geq 0, \quad (9.2e)$$

$$w_3 \leq 6000, \quad (9.2f)$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0. \quad (9.2g)$$

Hierbei bezeichnet c den Zielfunktionskoeffizienten aus (9.1). Die Optimallösung lautet in diesem Fall $x_1 = 100$, $x_2 = 25$, $x_3 = 375$, $y_1 = 0$, $y_2 = 180$, $w_1 = w_2 = 0$, $w_3 = 6000$, $w_4 = 0$, womit sich ein erzielter Gewinn von 59 950 € ergibt.

Wir vergleichen nun die worst-case-Lösung mit der nominalen Lösung. Setzen wir die nominale Lösung in das worst-case-Modell (9.2) ein, stellen wir fest, dass sie für die schlechteren Erträge unzulässig ist. Betrachte dazu z. B. die Nebenbedingung (9.2d),

$$2.4x_2 + y_2 - w_2 \geq 240,$$

für die sich mit der Nominallösung

$$2.4 \cdot 80 + 0 - 0 = 192 < 240$$

ergibt. Wenn wir die Entscheidung über die Anbauflächen $x_1 = 120$, $x_2 = 80$, $x_3 = 300$ der nominalen Lösung festsetzen, können wir die restlichen Variablen y_i , w_i neu berechnen, indem wir erneut über diese optimieren. Wir erhalten damit $y_2 = 48$, $w_1 = 40$, $w_3 = 4800$, $y_1 = w_2 = w_4 = 0$ und es ergibt sich ein erzielter Gewinn von 55 120 €.

Die Variablen in diesem Beispiel können wir daher wie folgt unterscheiden:

- Der Bauer muss stets zuerst die x -Variablen festlegen. Diese Variablen nennt man daher *Variablen 1. Stufe*. Insbesondere müssen diese Variablen entschieden werden, bevor sich die Unsicherheit realisiert.
- Die y - und w -Variablen können später festgelegt werden, wenn keine Unsicherheit mehr besteht bzw. wenn sich die Unsicherheit bereits realisiert hat. Daher nennt man diese Variablen auch *Variablen 2. Stufe*.

Wir nutzen diese Interpretation jetzt aus, um zu berechnen, wie gut die robuste Lösung im Mittelwert ist.

Wir betrachten dazu zuerst ein nominales Jahr und setzen daher die Werte der Variablen 1. Stufe $x_1 = 100$, $x_2 = 25$, $x_3 = 375$ der robusten Lösung in das nominale Problem (9.1) ein. Die Variablen 2. Stufe (y_i , w_i) werden dann neu bestimmt vermöge des Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \min_{y,w} \quad & 118.250 + \begin{pmatrix} 238 \\ 210 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -170 \\ -150 \\ -36 \\ -10 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & y_1 - w_1 \geq -50, \\ & y_2 - w_2 \geq 165, \\ & w_3 + w_4 \leq 7500, \\ & w_3 \leq 6000, \\ & y_i, w_j \geq 0 \quad \text{für } i = 1, 2, j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Die Optimallösung ist $y_1 = 0$, $y_2 = 165$, $w_1 = 50$, $w_2 = 0$, $w_3 = 6000$, $w_4 = 1500$. Damit ergibt sich ein erzielter Gewinn von 86 600 €.

Jetzt betrachten wir ein gutes Jahr und setzen dazu wieder die robuste Lösung in das nominale Problem (9.1) ein, wobei wir zusätzlich die Erträge in (9.1) gemäß eines guten Jahres anpassen, d. h. um 20 % erhöhen. Anschließend optimieren wir wieder über die Variablen y und w der zweiten Stufe. Das resultierende LP hat die Optimallösung $y_1 = 0$, $y_2 = 150$, $w_1 = 100$, $w_2 = 0$, $w_3 = 6000$, $w_4 = 3000$ und es ergibt sich ein erzielter Gewinn von 113 250 €.

Der erwartete Gewinn (in €) mit der robusten Lösung ist dann

$$\frac{59\,950 + 86\,600 + 113\,250}{3} = 86\,600.$$

Die analoge Berechnung für die nominale Lösung 1. Stufe $x = (120, 80, 300)^\top$ ergibt einen erwarteten Gewinn 107 240 €. Die robuste Lösung führt also im Erwartungswert zu einem deutlich schlechteren Ergebnis als die nominale Lösung im Erwartungswert.

Es kann also durchaus sinnvoll sein, den Erwartungswert direkt zu modellieren. Hierfür verwenden wir je einen Satz der y - und w -Variablen 2. Stufe pro

Szenario und bilden den Mittelwert in der Zielfunktion:

$$\min_{x,y,w} \quad \begin{pmatrix} 150 \\ 230 \\ 260 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 238 \\ 210 \\ -170 \\ -150 \\ -36 \\ -10 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ w_{11} \\ w_{12} \\ w_{13} \\ w_{14} \end{pmatrix} \right. \quad (9.3a)$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 238 \\ 210 \\ -170 \\ -150 \\ -36 \\ -10 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ w_{21} \\ w_{22} \\ w_{23} \\ w_{24} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 238 \\ 210 \\ -170 \\ -150 \\ -36 \\ -10 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} y_{31} \\ y_{32} \\ w_{31} \\ w_{32} \\ w_{33} \\ w_{34} \end{pmatrix} \right) \quad (9.3b)$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \quad (9.3c)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad (9.3d)$$

Gutes Jahr:

$$3x_1 + y_{11} - w_{11} \geq 200, \quad (9.3e)$$

$$3.6x_2 + y_{12} - w_{12} \geq 240, \quad (9.3f)$$

$$24x_3 - w_{13} - w_{14} \geq 0, \quad (9.3g)$$

$$w_{13} \leq 6000, \quad (9.3h)$$

$$y_{11}, y_{12}, w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14} \geq 0, \quad (9.3i)$$

Nominales Jahr:

$$2.5x_1 + y_{21} - w_{21} \geq 200, \quad (9.3j)$$

$$3x_2 + y_{22} - w_{22} \geq 240, \quad (9.3k)$$

$$20x_3 - w_{23} - w_{24} \geq 0, \quad (9.3l)$$

$$w_{23} \leq 6000, \quad (9.3m)$$

$$y_{21}, y_{22}, w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{24} \geq 0, \quad (9.3n)$$

Schlechtes Jahr:

$$2x_1 + y_{31} - w_{31} \geq 200, \quad (9.3o)$$

$$2.4x_2 + y_{32} - w_{32} \geq 240, \quad (9.3p)$$

$$16x_3 - w_{33} - w_{34} \geq 0, \quad (9.3q)$$

$$w_{33} \leq 6000, \quad (9.3r)$$

$$y_{31}, y_{32}, w_{31}, w_{32}, w_{33}, w_{34} \geq 0. \quad (9.3s)$$

Die Variablen x der 1. Stufe müssen für alle Szenarien gleich gewählt werden, daher gibt es für diese nicht für jedes Szenario eine Kopie. Die y - und w -Variablen 2. Stufe können aber für jedes Szenario einzeln optimiert werden, weshalb es für jedes Szenario eine Kopie des entsprechenden Vektors gibt.

Der Doppelindex an den y - und w -Variablen ist dabei so zu verstehen, dass der erste Index das Szenario bezeichnet und der zweite Index die gleiche Bedeutung hat wie bisher.

Die Optimallösung von der zweistufigen Modellierung (9.3) ist $x = (170, 80, 250)^\top$, $w_{13} = 6000$, $w_{23} = 5000$, $w_{33} = 4000$, ... Damit ergibt sich ein erzielter Gewinn von 108 390 €, was größer ist als 107 240 €. Letzteres war der Erwartungswert auf Basis der nominalen Lösung für die Variablen 1. Stufe.

Die Differenz $108\,390 - 107\,240 = 1150$ (jeweils in €) nennt man den *Wert der stochastischen Lösung* (VSS)².

Bemerkung 9.1. Mit der stochastischen Lösung $x = (170, 80, 250)^\top$ erzielt der Landwirt langfristig, d. h. im Erwartungswert, den größten Gewinn.

Wäre das Wetter vorher bekannt gewesen, wäre der erwartete Gewinn

$$\frac{59\,950 + 118\,600 + 167\,667}{3} = 115\,406.67 \text{ €},$$

gewesen. Die drei Werte im Zähler erhält man dabei, wenn man das jeweilige LP mit entsprechend angepassten Ertragsdaten optimiert. Die Differenz $115\,406.67 - 108\,390 = 7016.67$ (jeweils in €) heißt *erwarteter Wert der vollständigen Information*.

9.2 Robuste oder stochastische Optimierung?

Bei der Behandlung von Optimierungsproblemen unter Unsicherheiten kann bzw. muss man grundsätzlich die Entscheidung treffen, ob man die Unsicherheiten mittels robuster oder stochastischer Optimierung adressieren möchte. Typischerweise tendiert man zur robusten Optimierung, wenn

- der Anwender risikoscheu ist,
- die Anwendung sicherheitskritisch ist und/oder
- die Verteilung der Zufallsvariablen unbekannt ist.

Zur stochastischen Optimierung tendiert man dahingegen, wenn beispielsweise

- die Verteilung der Zufallsvariablen bekannt ist und/oder
- die Lösungen oft verwendet werden, so dass die Betrachtung des Erwartungswerts sinnvoll ist.

²Engl.: *value of stochastic solution*

9.3 Einige Grundbegriffe der Stochastik

Wir betrachten *Zufallsvariablen* ξ mit Werten in \mathbb{R}^k . Die Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ der möglichen Realisierungen der Zufallsvariablen heißt *Ereignisraum*. Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt *Ereignis*. Die *Wahrscheinlichkeit* $P : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(P1) $P(A) \in [0, 1]$ für alle Ereignisse $A \subseteq \Omega$,

(P2) $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$,

(P3) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ für alle Ereignisse $A_1, A_2 \subseteq \Omega$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Als *diskrete Zufallsvariablen* bezeichnen wir Zufallsvariablen ξ mit endlich vielen oder abzählbar vielen möglichen Werten $\xi_k, k \in K$. Sie können beschrieben werden durch eine Funktion

$$f(\xi_k) = P(\xi = \xi_k) \quad \text{mit} \quad \sum_{k \in K} f(\xi_k) = 1.$$

Der *Erwartungswert* der Zufallsvariablen ξ ist dann

$$\mathbb{E}[\xi] := \sum_{k \in K} f(\xi_k) \xi_k = \sum_{k \in K} P(\xi = \xi_k) \xi_k.$$

Stetige Zufallsvariablen werden durch ihre *Dichtefunktion* $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

beschrieben. Der *Erwartungswert* ist dann

$$\mathbb{E}[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Für eine beliebige Zufallsvariable ξ definiert man

- die *Varianz* von ξ als

$$\text{Var}(\xi) := \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}[\xi])^2] = \mathbb{E}[\xi^2] - \mathbb{E}[\xi]^2,$$

- das *r-te Moment* von ξ (für $r \in \mathbb{N}$) als

$$\bar{\xi}^{(r)} := \mathbb{E}[\xi^r],$$

- das *α -Quantil* von ξ (für $\alpha \in [0, 1]$) als

$$\min \{x \in \mathbb{R} : P(\xi \leq x) \geq \alpha\}.$$

Beispiel 9.2 (Verteilungen). Wir stellen nun exemplarisch einige wichtige Verteilungen vor.

1. Die diskrete Gleichverteilung $\mathcal{U}[1, n]$:

Es ist $\Omega = \{1, \dots, n\}$ und $P(\xi = i) = 1/n$ für alle $i = 1, \dots, n$. In diesem Fall gilt

$$\mathbb{E}[\xi] = \frac{n+1}{2} \quad \text{und} \quad \text{Var}(\xi) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

2. Die stetige Gleichverteilung $\mathcal{U}[0, a]$:

Es ist $\Omega = [0, a]$ mit der Dichtefunktion $f(x) = 1/a$. In diesem Fall gilt

$$\mathbb{E}[\xi] = \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad \text{Var}(\xi) = \frac{a^2}{12}.$$

3. Die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

Es ist $\Omega = (-\infty, \infty)$ mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

In diesem Fall gilt $\mathbb{E}[\xi] = \mu$ und $\text{Var}(\xi) = \sigma^2$.

Für eine detaillierte Behandlung der Grundlagen der Stochastik siehe beispielsweise Bauer (2002).

9.4 Zweistufige stochastische Probleme

Ein zweistufiges stochastisches lineares Problem (mit festem Rekurs) ist ein Optimierungsproblem der Form

$$\min_{x,y} c^\top x + \mathbb{E} \left[\min_{y(\omega)} q(\omega)^\top y(\omega) \right] \tag{9.4a}$$

$$\text{s.t. } Ax = b, \tag{9.4b}$$

$$x \geq 0, \tag{9.4c}$$

$$T(\omega)x + Wy(\omega) = h(\omega), \tag{9.4d}$$

$$y(\omega) \geq 0. \tag{9.4e}$$

Hierbei seien $c \in \mathbb{R}^{n_1}$, $b \in \mathbb{R}^{m_1}$, $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$. Die *Rekursmatrix* $W \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ sei unabhängig von den Zufallsvariablen. Im Gegensatz dazu hängen $T(\omega) \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$, $q(\omega) \in \mathbb{R}^{n_2}$ und $h(\omega) \in \mathbb{R}^{m_2}$ von $\omega \in \Omega$ ab. Die Daten c, A, b sind die Daten erster Stufe und $q(\omega)$, $T(\omega)$ und $h(\omega)$ sind die Daten zweiter

Stufe. Wir betrachten $\xi = (q, T, h)$ als Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{R}^ℓ mit $\ell = n_2 + m_2 n_1 + m_2$. Das bedeutet insbesondere, dass ein Zufallsereignis ω mehrere Zufallsvariablen $\xi = \xi(\omega)$ beeinflusst.

Im Fall stetiger Zufallsvariablen ξ reicht es, dass die Bedingungen

$$T(\omega)x + Wy(\omega) = h(\omega), \quad y(\omega) \geq 0 \quad (9.5)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 erfüllt sind. Wenn ξ aber endlich ist, d. h. nur endlich viele Werte annehmen kann, müssen die Bedingungen (9.5) für alle $\omega \in \Omega$ erfüllt sein.

Wir leiten im Folgenden das sogenannte *äquivalente deterministische Problem*³ her. Für fixiertes x und gegebene Realisierung von ω setzen wir

$$Q(x, \xi(\omega)) := \min_{y \geq 0} \left\{ q(\omega)^\top y : Wy = h(\omega) - T(\omega)x \right\}$$

und

$$\mathcal{Q}(x) := \mathbb{E}[Q(x, \xi)].$$

Die Funktion \mathcal{Q} heißt *Rekursfunktion*. Mit diesen Notationen ist das originale zweistufige stochastische Problem (9.4) offensichtlich äquivalent zu

$$\min_x \quad c^\top x + \mathcal{Q}(x) \quad (9.6a)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b, \quad (9.6b)$$

$$x \geq 0. \quad (9.6c)$$

Im Beispiel aus Abschnitt 9.1 sind $\mathcal{Q}(x)$ die erwarteten Kosten, ohne Pflanzkosten, bei gegebener Aufteilung x der Ackerfläche. Probleme der Form (9.4) werden somit in zwei Stufen gelöst:

1. **Stufe:** Bestimme x unter Unsicherheit, d. h. die Realisierung von ξ ist nicht bekannt. Dann tritt das Zufallsereignis ein.
2. **Stufe:** Bestimme y mit dem Ziel, den „Schaden“ durch das Zufallsereignis so weit wie möglich auszugleichen.

Wenn ξ endlich ist, kann das Problem (9.4) wie in Beispiel aus Abschnitt 9.1 gelöst werden, d. h. durch Lösen eines linearen deterministischen Problems. Dieses wird aber schnell zu groß.

Beispiel 9.3 (Planung eines Telekommunikationsnetzes). Es sei ein Telekommunikationsnetz mit 86 Knoten gegeben. Der Datenverkehr an den Knoten sei unbekannt und kann jeweils 5 verschiedene Werte annehmen.

³Engl.: *deterministic equivalent problem (DEP)*

Dann ist die Zahl der Szenarien $5^{86} = 1.29 \cdot 10^{60}$. Dies entspricht ungefähr der Anzahl aller Atome im Universum. Das deterministische lineare Problem ist also viel zu groß.

Die Idee ist es daher, mit dem äquivalenten Problem (9.6) zu arbeiten. Dafür ist es aber notwendig, die Funktion $\mathcal{Q}(x)$ zu verstehen.

Wir nehmen im Folgenden an, dass $Q(x, \xi(\omega)) > -\infty$ für alle x und alle $\omega \in \Omega$ gilt. Das heißt, wir nehmen an, dass das äquivalente deterministische Problem nach unten beschränkt ist. Ferner definieren wir⁴

$$\mathcal{K}_1 := \{x : Ax = b, x \geq 0\}, \quad \mathcal{K}_2 := \{x : \mathcal{Q}(x) < \infty\}.$$

Dabei bedeutet $x \in \mathcal{K}_2$, dass für x fast immer (also mit Wahrscheinlichkeit 1) ein zulässiges $y(\omega)$ existiert. Wir betrachten im Folgenden diskret verteilte Zufallsvariablen.

Bemerkung 9.4. Falls ξ diskret verteilt und endlich ist, kann gezeigt werden, dass \mathcal{K}_2 ein konvexes Polyeder ist. Einen Beweis findet man in Birge und Louveaux (2011, Kapitel 3.1).

Satz 9.5. Die Funktion $Q(x, \xi(\omega))$ ist

- (a) stückweise linear und konvex in (T, h) ,
- (b) stückweise konkav in q und
- (c) stückweise linear und konvex in x für $x \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$.

Beweis. Für die Konvexität in (a) und (c) genügt es zu zeigen, dass

$$f(b) := \min_{y \geq 0} \{q^\top y : Wy = b\}$$

konvex in b ist. Sei $b = \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2$ für $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ und $\lambda \in (0, 1)$. Sei außerdem y_i^* , $i = 1, 2$, eine optimale Lösung des Problems

$$\min_{y \geq 0} \{q^\top y : Wy = b_i\}.$$

Dann ist $y^* = \lambda y_1^* + (1 - \lambda)y_2^*$ eine zulässige Lösung des Problems

$$\min_{y \geq 0} \{q^\top y : Wy = b\}.$$

Somit gilt

$$f(b) \leq q^\top (\lambda y_1^* + (1 - \lambda)y_2^*) = \lambda f(b_1) + (1 - \lambda)f(b_2),$$

⁴ Auch wenn die Notation ähnlich anmutet, haben diese Mengen nichts mit Kegeln zu tun.

d. h. f ist konvex. Die Konkavität in (b) zeigt man analog.⁵

Die stückweise Linearität folgt aus der endlichen Zahl optimaler Basen von linearen Problemen und wird detaillierter in den Übungen behandelt. \square

Korollar 9.6. Sei ξ eine diskret verteilte und endliche Zufallsvariable. Dann ist \mathcal{Q} eine stückweise lineare und konvexe Funktion auf $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$.

Beweis. Falls ξ nur endlich viele Werte ξ_1, \dots, ξ_k mit $p_i := P(\xi = \xi_i)$, $i = 1, \dots, k$, annehmen kann, gilt

$$\mathcal{Q}(x) = \mathbb{E}[\mathcal{Q}(x, \xi)] = \sum_{i=1}^k p_i Q(x, \xi_i)$$

mit $p_i > 0$ für alle i . Die Behauptung folgt nun aus der stückweisen Linearität und Konvexität der Funktionen $Q(x, \xi_i)$, vgl. Satz 9.5. \square

Bemerkung 9.7. Für stetige Zufallsvariablen gilt ein ähnliches Resultat:

- (a) Wenn das zweite Moment $\bar{\xi}^{(2)}$ endlich ist, ist $\mathcal{Q}(x)$ konvex und Lipschitzstetig.
- (b) Wenn das zweite Moment $\bar{\xi}^{(2)}$ endlich ist, dann ist \mathcal{K}_2 abgeschlossen und konvex.

Wie im folgenden Beispiel kann in manchen Fällen die Rekursfunktion analytisch bestimmt und explizit angegeben werden.

Beispiel 9.8 (Das Rosenverkäuferproblem). Ein Rosenverkäufer kauft morgens Rosen ein und versucht sie im Lauf des Tages wieder zu verkaufen. Im Folgenden sei

- c der Kaufpreis einer Rose,
- q der Verkaufspreis einer Rose und
- r der Rückgabepreis am Ende eines Tages,

wobei $q > c > r$ gilt. Es sei ξ die Anzahl der verkauften (bzw. potentiell verkaufbaren) Rosen. Die Verteilung von ξ sei bekannt und gegeben durch $F(t) = P(\xi \leq t)$. Die Verteilung F habe eine Dichtefunktion f , d. h. es gilt

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(z) dz.$$

⁵Wer möchte, darf Teil (b) des Satzes gerne als Übungsaufgabe verstehen.

Wie viele Rosen sollte der Verkäufer morgens kaufen? Das zu lösende Problem lautet

$$\max_x \{-cx + Q(x) : x \geq 0\}$$

mit $Q(x) = \mathbb{E}[Q(x, \xi)]$ und

$$Q(x, \xi(\omega)) = \begin{cases} qx, & \text{falls } x \leq \xi(\omega), \\ q\xi(\omega) + r(x - \xi(\omega)), & \text{falls } x \geq \xi(\omega). \end{cases}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, z) f(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^x (qz + r(x - z)) f(z) dz + \int_x^{\infty} qx f(z) dz \\ &= (q - r) \int_{-\infty}^x z f(z) dz + rx \int_{-\infty}^x f(z) dz + qx \int_x^{\infty} f(z) dz. \end{aligned}$$

Falls $\lim_{t \rightarrow -\infty} tF(t) = 0$ ist, gilt mit partieller Integration

$$\int_{-\infty}^x z f(z) dz = xF(x) - \int_{-\infty}^x F(z) dz.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} Q(x) &= (q - r)x F(x) - (q - r) \int_{-\infty}^x F(z) dz + rx F(x) + qx(1 - F(x)) \\ &= qx - (q - r) \int_{-\infty}^x F(z) dz. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist konkav⁶ und differenzierbar bzgl. x . Somit ist auch die Funktion $-cx + Q(x)$ konkav und differenzierbar. Das Maximum kann also mit der Ableitung berechnet werden oder ist $x = 0$. Wir erhalten für jeden stationären Punkt x^*

$$0 = -c + Q'(x^*) = -c + q - (q - r)F(x^*)$$

und somit

$$F(x^*) = \frac{q - c}{q - r} \quad \text{bzw.} \quad x^* = F^{-1}\left(\frac{q - c}{q - r}\right).$$

Sei hier $c = 1.50 \text{ €}$, $q = 2.50 \text{ €}$, $r = 0.20 \text{ €}$ und es sei $\xi \sim \mathcal{N}(65, 8)$ normalverteilt. Dann ist $x^* = 63.686$. Da es sich bei x um eine Anzahl von Blumen handelt, ist also $x^* = 64$ oder $x^* = 63$ zu wählen.

⁶Warum?

9.5 Der Wert der vollständigen Information und der stochastischen Lösung

9.5.1 Definitionen

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die folgenden zwei Größen:

1. Den Nutzen, das Zufallsereignis vorher zu kennen und
2. den Nutzen der stochastischen Optimierung.

Es sei

$$z(x, \xi(\omega)) = c^\top x + \min_{y \geq 0} \{q(\omega)^\top y : Wy = h(\omega) - T(\omega)x\}$$

der Wert der Zielfunktion des zweistufigen stochastischen Problems (9.4) für gegebenes x und gegebenes Zufallsereignis $\omega \in \Omega$. Ferner sei

$$\xi(\omega) = (q(\omega)^\top, T_1(\omega), \dots, T_{m_2}(\omega), h(\omega)^\top)^\top.$$

die Realisierung der unsicheren Variable für das Zufallsereignis (das Szenario) ω . Wir setzen jetzt

$$z(x, \xi(\omega)) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } x \notin \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2, \\ -\infty, & \text{falls das Minimum nach unten unbeschränkt ist,} \end{cases}$$

und treffen die folgende Annahme: Für alle $\omega \in \Omega$ existiert ein x mit $z(x, \xi(\omega)) < \infty$.

Für ein Szenario $\omega \in \Omega$ sei nun $\bar{x}(\xi(\omega))$ eine optimale Lösung und

$$z(\bar{x}(\xi(\omega)), \xi(\omega)) = \min_x \{z(x, \xi(\omega)) : Ax = b, x \geq 0\}$$

ist der entsprechende Zielfunktionswert von $\bar{x}(\xi(\omega))$ für Szenario ω .

Szenarioansatz: Wir bestimmen für verschiedene Szenarien $\omega \in \Omega$ die optimale Lösung $\bar{x}(\xi(\omega))$ und den zugehörigen Zielfunktionswert $z(\bar{x}(\xi(\omega)), \xi(\omega))$.

Wait-and-See-Lösung: Wir nehmen an, wir können für jedes Szenario ω die beste Lösung $\bar{x}(\xi(\omega))$ ausrechnen. Bei der wait-and-see-Lösung warten wir jeweils auf das Ereignis ω und berechnen dann $\bar{x}(\xi(\omega))$. Wir nehmen an, wir kennen die Verteilung der Szenarien und bilden den Erwartungswert \mathbb{E}_ξ . Es ergibt sich

$$\text{WS} := \mathbb{E}_\xi[z(\bar{x}(\xi), \xi)] = \mathbb{E}_\xi \left[\min_{x \in \mathcal{K}_1} z(x, \xi) \right].$$

Here-and-Now-Lösung: Wir setzen

$$\text{RP} := \min_{x \in \mathcal{K}_1} \mathbb{E}_\xi[z(x, \xi)].$$

Die Entscheidung muss vor dem Zufallsereignis getroffen werden. Dies ist das zweistufige stochastische Problem (9.4) (auch *Rekursproblem* genannt) aus Abschnitt 9.4.

Der Unterschied zwischen der Wait-and-see-Lösung WS und der Here-and-now-Lösung RP besteht darin, dass Erwartungswert und Minimumsbildung vertauscht sind.

Definition 9.9. Der Wert

$$\text{EVPI} := \text{RP} - \text{WS}$$

heißt *Wert der vollständigen Information*⁷.

Dieser Wert gibt an, wie nützlich es ist, die Zufallsereignisse vorher zu kennen.

Erwartungswertproblem: Wir definieren

$$\text{EV} := \min_{x \in \mathcal{K}_1} z(x, \mathbb{E}_\xi[\xi]).$$

Hier wird nur das Szenario betrachtet, das dem Erwartungswert entspricht (“erwartetes Szenario”). Sei $\bar{x}(\mathbb{E}[\xi])$ die optimale Lösung dieses Problems. Typischerweise ist es keine gute Idee, eine Entscheidung unter Unsicherheiten auf Basis des Erwartungswertproblems zu treffen. Insbesondere gibt es keinen guten Grund, zu erwarten, dass die Erwartungswertlösung $\bar{x}(\mathbb{E}[\xi])$ nahe an der Lösung des Rekursproblems liegt.

Wir definieren jetzt den erwarteten Nutzen der Erwartungswertlösung als

$$\text{EEV} := \mathbb{E}_\xi[z(\bar{x}(\mathbb{E}[\xi]), \xi)].$$

Definition 9.10. Der Wert

$$\text{VSS} := \text{EEV} - \text{RP}.$$

heißt *Wert der stochastischen Lösung*.

Dieser Wert gibt den Nutzen an, den die Verwendung der Methoden der stochastischen Optimierung bringt.

⁷Engl.: *expected value of perfect information*

9.5.2 Beziehungen zwischen den Lösungsdefinitionen

Satz 9.11. Es gilt $WS \leq RP$ und demnach $EVPI \geq 0$.

Beweis. Es sei x^* eine optimale Lösung in RP. Für jedes $\omega \in \Omega$ gilt

$$z(\bar{x}(\xi(\omega)), \xi(\omega)) \leq z(x^*, \xi(\omega)),$$

da $\bar{x}(\xi(\omega))$ nach Definition optimal für $\xi(\omega)$ ist. Somit gilt

$$WS = \mathbb{E}_\xi[z(\bar{x}(\xi), \xi)] \leq \mathbb{E}_\xi[z(x^*, \xi)] = RP$$

und es folgt die Behauptung. \square

Satz 9.12. Es gilt $RP \leq EEV$ und demnach $VSS \geq 0$.

Beweis. Es sei $\bar{x}(\mathbb{E}[\xi])$ eine Optimallösung von EV. Diese ist zulässig für RP. Somit ist $RP \leq \mathbb{E}_\xi[z(\bar{x}(\mathbb{E}[\xi]), \xi)] = EEV$. \square

Satz 9.13. Es seien q und T unabhängig von ξ . Dann gilt $EV \leq WS$.

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$f(\omega) := \min_{x \in \mathcal{K}_1} z(x, \xi(\omega)).$$

Nach Definition gilt

$$WS = \mathbb{E}[f(\xi)] \quad \text{und} \quad EV = f(\mathbb{E}[\xi]).$$

Wir zeigen, dass f konvex ist, denn dann folgt

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

aus der Jensenschen Ungleichung. Die Funktion f hängt nur von h ab, da q und T fest sind. Es gilt

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \min_{x \in \mathcal{K}_1} z(x, \xi(\omega)) \\ &= \min_{x, y} \{c^\top x + q^\top y : Ax = b, x \geq 0, Wy + Tx = h(\omega), y \geq 0\} \\ &= \max_{\sigma, \pi} \{\sigma^\top b + \pi^\top h(\omega) : A^\top \sigma + T^\top \pi \leq c, W^\top \pi \leq q\}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung erhält man durch Dualisieren.⁸ Der Epigraph $\text{epi}(f)$ ist also der Durchschnitt der Epigraphen der linearen Funktionen $\sigma^\top b + \pi^\top h(\omega)$, da die dualen Nebenbedingungen nicht von ω abhängen. Somit ist $\text{epi}(f)$ eine konvexe Menge und damit ist auch f konvex. \square

⁸Wer immer noch nicht genug davon hat, der darf den letzten Schritt gerne als Übungsaufgabe nutzen.

Mit Beispielen und Anwendungen der behandelten Lösungsbegriffe befassen wir uns in den Übungen.

9.6 Die L-Methode

Wir betrachten jetzt endliche Zufallsvariablen ξ mit K möglichen Werten und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_K . Das zweistufige stochastische Problem (9.4) aus Abschnitt 9.4 kann dann szenarioexpandiert geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c^\top x + \sum_{k=1}^K p_k q_k^\top y_k \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \\ & T_k x + Wy_k = h_k, \quad k = 1, \dots, K, \\ & y_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Für große Zahlen K ist das Lösen dieses linearen Problems im Allgemeinen nicht möglich; vgl. Beispiel 9.3. Als algorithmische Alternative betrachten wir die L-Methode⁹, die auf dem Modell (9.6), d. h. auf

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

basiert. Die Idee der L-Methode besteht in einer linearen äußeren Approximation dieses Problems. Die wesentlichen Bestandteile sind die folgenden:

1. Ersetze $\mathcal{Q}(x)$ durch eine neue reelle Variable θ :

$$\begin{aligned} \min_{x,\theta} \quad & c^\top x + \theta \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \\ & \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Füge *Gültigkeitsschnitte* hinzu, d. h. lineare Ungleichungen, die x auf den Bereich \mathcal{K}_2 beschränken. Man beachte hierbei, dass \mathcal{K}_2 konvex ist, da ξ endlich ist; vgl. Bemerkung 9.4.
3. Füge *Optimalitätsschnitte* hinzu, d. h. lineare Ungleichungen, die θ nach unten beschränken. Hierbei beachte man, dass $\mathcal{Q}(x)$ stückweise linear und konvex ist gemäß Korollar 9.6.

⁹Engl.: *L-shaped algorithm*

Die Ungleichungen in 2. und 3. werden nur „bei Bedarf“ erzeugt und hinzugefügt; vgl. Algorithmus 4. Dieser Algorithmus liefert offensichtlich eine korrekte

Algorithmus 4: Die L-Methode

1 Setze $v = 0$ und initialisiere das LP \mathcal{L} als

$$\begin{aligned} \min_{x, \theta} \quad & c^\top x + \theta \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \quad x \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- 2 Setze $v \leftarrow v + 1$ und löse das Problem \mathcal{L} . Falls θ nicht nach unten beschränkt ist, setze $\theta^v = -\infty$ und löse \mathcal{L} ohne θ .
 - 3 **if** \mathcal{L} ist unzulässig **then**
 - 4 **return** „Problem (9.4) ist unzulässig.“
 - 5 Sei (x^v, θ^v) die gefundene Optimallösung (evtl. mit $\theta^v = -\infty$).
 - 6 **if** $x^v \notin \mathcal{K}_2$ **then**
 - 7 Füge einen Gültigkeitsschnitt zu \mathcal{L} hinzu, der x^v abschneidet, und gehe zu Schritt 2.
 - 8 **if** $\theta^v < Q(x^v)$ **then**
 - 9 Füge einen Optimalitätsschnitt zu \mathcal{L} hinzu, der (x^v, θ^v) abschneidet, und gehe zu Schritt 2.
 - 10 **else**
 - 11 **return** „ x^v ist optimal.“
-

Lösung, falls er terminiert. Es bleibt also noch Folgendes zu beweisen:

- Schritt 6: Man kann entscheiden, ob $x^v \in \mathcal{K}_2$ gilt und anderenfalls einen Gültigkeitsschnitt berechnen.
- Schritt 8: Man kann entscheiden, ob $\theta^v \geq Q(x^v)$ gilt und anderenfalls einen Optimalitätsschnitt berechnen.
- Der Algorithmus terminiert nach endlich vielen Schritten.

9.6.1 Erzeugung von Optimalitätsschnitten

Löse für das x^v aus Schritt v für alle $k = 1, \dots, K$ das lineare primale Problem

$$Q(x^v, \xi^k) = \min_{y \geq 0} \{ q_k^\top y : Wy = h_k - T_k x^v \}$$

und das zugehörige duale Problem

$$\max_{\pi} \{ (h_k - T_k x^v)^\top \pi : W^\top \pi \leq q_k \}.$$

Sei π_k^v die Optimallösung des dualen Problems. Dann gilt

$$Q(x^v, \xi^k) = (h_k - T_k x^v)^\top \pi_k^v.$$

Es gilt nun für alle $x \in \mathcal{K}_2$

$$\begin{aligned} Q(x, \xi^k) &= \min_y \{q_k^\top y : Wy = h_k - T_k x, y \geq 0\} \\ &= \max_\pi \{(h_k - T_k x)^\top \pi : W^\top \pi \leq q_k\} \\ &\geq (h_k - T_k x)^\top \pi_k^v, \end{aligned}$$

da π_k^v die Nebenbedingung des dualen Problems erfüllt, also zulässig ist für x , aber eventuell nicht optimal.

Wir bilden nun die Erwartungswerte

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x^v) &= \mathbb{E}[Q(x^v, \xi)] = \sum_{k=1}^K p_k Q(x^v, \xi^k) = \sum_{k=1}^K p_k (h_k - T_k x^v)^\top \pi_k^v, \\ \mathcal{Q}(x) &= \mathbb{E}[Q(x, \xi)] = \sum_{k=1}^K p_k Q(x, \xi^k) \geq \sum_{k=1}^K p_k (h_k - T_k x)^\top \pi_k^v. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\theta \geq \sum_{k=1}^K p_k (h_k - T_k x)^\top \pi_k^v$$

eine gültige lineare Ungleichung für alle zulässigen (x, θ) und (x^v, θ^v) ist gültig genau dann, wenn es diese Ungleichung erfüllt. Die Ungleichung ist somit der einzige zu testende Kandidat für einen Optimalitätsschnitt.

9.6.2 Erzeugung von Gültigkeitsschnitten

Wir wollen entscheiden, ob $x^v \in \mathcal{K}_2$ liegt. Wenn nicht, suchen wir eine lineare Ungleichung, die für alle $x \in \mathcal{K}_2$ gilt, aber von x^v verletzt wird. Zur Erinnerung:

$$\mathcal{K}_2 = \{x : \mathcal{Q}(x) < \infty\} = \{x : \forall k = 1, \dots, K \exists y \geq 0 \text{ mit } Wy = h_k - T_k x\}.$$

Wir betrachten für alle $k = 1, \dots, K$ das lineare Problem

$$w_k = \min_{y, v^+, v^-} e^\top v^+ + e^\top v^- \tag{9.7}$$

$$\text{s.t. } Wy + Iv^+ - Iv^- = h_k - T_k x^v, \tag{9.8}$$

$$y, v^+, v^- \geq 0. \tag{9.9}$$

Dabei ist $e = (1, \dots, 1)^\top$ und I die Einheitsmatrix – jeweils in passender Dimension. Falls $w_k = 0$ ist für alle $k = 1, \dots, K$ ist, existiert für alle k ein $y \geq 0$ mit $Wy = h_k - T_k x^v$, d. h. es ist $x \in \mathcal{K}_2$.

Sei andernfalls $w_k > 0$ für ein k . Dann betrachten wir die optimale Lösung π^v des dualen Problems

$$\max_{\pi} \{(h_k - T_k x^v)^\top \pi : W^\top \pi \leq 0, -e \leq \pi \leq e\}.$$

Es gilt somit

$$(h_k - T_k x^v)^\top \pi^v = w_k > 0.$$

Andererseits folgt aus $W^\top \pi^v \leq 0$ offensichtlich $(\pi^v)^\top W y \leq 0$ für alle $y \geq 0$. Da für $x \in \mathcal{K}_2$ ein $y \geq 0$ existiert mit $W y = h_k - T_k x$, gilt also

$$(h_k - T_k x)^\top \pi^v \leq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{K}_2.$$

Also ist $(h_k - T_k x)^\top \pi^v \leq 0$ eine lineare Ungleichung, die von x^v verletzt wird, aber für alle $x \in \mathcal{K}_2$ gilt.

Wir testen also $k = 1, \dots, K$ bis zum ersten Mal $w_k > 0$ gilt und berechnen dann die neue Ungleichung.

9.6.3 Terminierung nach endlich vielen Schritten

Bei den betrachteten dualen Problemen hängt nur die Zielfunktion von x^v ab. Für jedes k müssen also nur endlich viele Basislösungen betrachtet werden, d. h. es gibt nur endlich viele Gültigkeits- und endlich viele Optimalitätsschnitte, die alle höchstens einmal erzeugt werden müssen.

Warum ist die L-Methode dem direkten Lösen von

$$\begin{aligned} \min_{x, (y_k)_{k=1}^K} \quad & c^\top x + \sum_{k=1}^K p_k q_k^\top y_k \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \\ & T_k x + W y_k = h_k, \quad k = 1, \dots, K, \\ & y_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

vorzuziehen?

- Das Lösen von K kleinen LPs ist deutlich schneller als das Lösen eines K -mal größeren linearen Problems.
- Meistens wird nur ein kleiner Teil aller möglichen Schnitte hinzugefügt.
- Es sind viele Tricks zur Beschleunigung bekannt.

Beispiel 9.14 (Optimalitätsschnitte). Wir betrachten das Problem

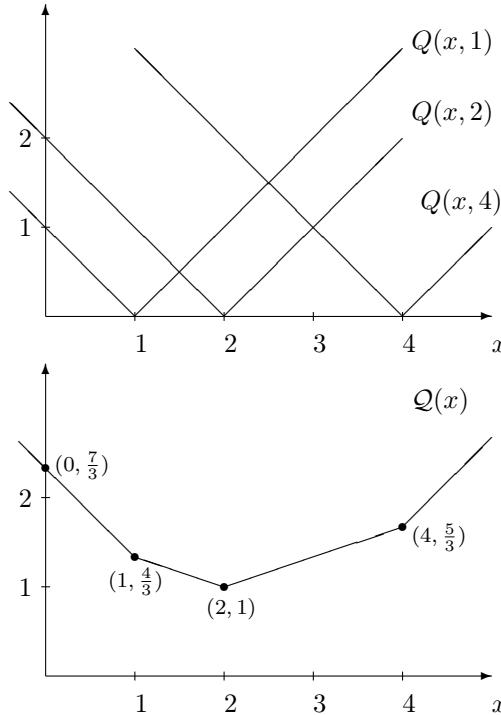
$$\min_x \{\mathbb{E}_\xi[Q(x, \xi)] : 0 \leq x \leq 10\}$$

mit

$$Q(x, \xi) = \min_y \{y: y \geq x - \xi, y \geq \xi - x\} = \min_y \{y = |x - \xi|\} = |x - \xi|.$$

Dabei sei $\xi = 1, 2, 4$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/3$. Dann ist also

$$z(x) = Q(x) = \frac{1}{3}(Q(x, 1) + Q(x, 2) + Q(x, 4)).$$



Wir bringen zunächst $Q(x, \xi)$ in LP-Standardform

$$\begin{aligned} Q(x, \xi) &= \min_{y, s_1, s_2} y \\ \text{s.t. } & y - x - s_1 = -\xi, \\ & y + x - s_2 = \xi, \\ & y, s_1, s_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dann gilt $q^\top = (1, 0, 0)^\top$,

$$W = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h(\omega) = \begin{pmatrix} -\xi(\omega) \\ \xi(\omega) \end{pmatrix}$$

Das duale lineare Problem

$$\begin{aligned} \max_\pi & \pi^\top (h(\omega) - Tx) \\ \text{s.t. } & \pi^\top W \leq q^\top \end{aligned}$$

lautet somit

$$\max_{\pi_1, \pi_2} \pi_1(x - \xi) + \pi_2(\xi - x) \quad (9.10a)$$

$$\text{s.t. } \pi_1 + \pi_2 \leq 1, \quad (9.10b)$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0. \quad (9.10c)$$

Falls $x \geq \xi$ gilt, ist $\pi = (1, 0)^\top$ die optimale Lösung von (9.10). Ansonsten ist $\pi = (0, 1)^\top$ optimal.

Das Problem in Schritt 1 der L-Methode ist

$$\min_{\theta, x} \{\theta : 0 \leq x \leq 10\}. \quad (9.11)$$

Wir erzeugen nun Optimalitätsschnitte (vgl. Schritt 8):

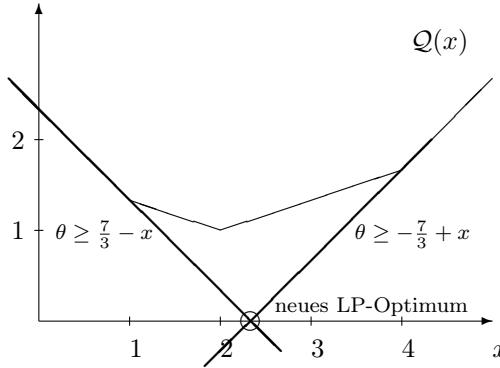
Sei am Anfang $x^1 = 0$ und $\theta^1 = -\infty$ (vgl. Schritt 2). Wir lösen nun (9.10) für $x = x^1$ und $\xi = 1, 2, 4$. Die optimalen Lösungen sind $\pi^1 = \pi^2 = \pi^3 = (0, 1)^\top$ wegen $x < \xi$. Ein Optimalitätsschnitt ist also

$$\begin{aligned} \theta &\geq \sum_{k=1}^K p_k (h_k - Tx)^\top \pi^k \\ &= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} -1+x \\ 1-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2+x \\ 2-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4+x \\ 4-x \end{pmatrix} \right]^\top \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{7}{3} - x. \end{aligned}$$

Die Ungleichung $\theta \geq 7/3 - x$ wird zu den Nebenbedingungen von (9.11) hinzugefügt. In der nächsten Iteration ist $x^2 = 10$, $\theta^2 = -23/3$. Es ist nun $\pi = (1, 0)^\top$ eine optimale Lösung von (9.10), da $x^2 > \xi$ für $\xi \in \{1, 2, 4\}$ ist. Somit erhalten wir als Optimalitätsschnitt

$$\begin{aligned} \theta &\geq \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} -1+x \\ 1-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2+x \\ 2-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4+x \\ 4-x \end{pmatrix} \right]^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}(-1+x - 2+x - 4+x) = -\frac{7}{3} + x. \end{aligned}$$

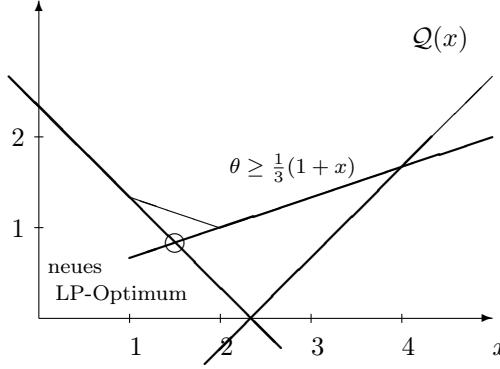
Die Ungleichung $\theta \geq -7/3 + x$ wird zu den Nebenbedingungen von (9.11) hinzugefügt, weil sie durch (θ^2, x^2) verletzt wird.



In der nächsten Iteration erhalten wir $x^3 = 7/3$ und $\theta^3 = 0$. Dann ist $\pi = (1, 0)^\top$ optimale Lösung von (9.10) für $k = 1, 2$ wegen $x^3 > 1$ und $x^3 > 2$ und $\pi = (0, 1)^\top$ ist optimal für $k = 3$ wegen $x^3 < 4$. Somit erhalten wir als Optimalitätsschnitt

$$\begin{aligned}\theta &\geq \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} -1+x \\ 1-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2+x \\ 2-x \end{pmatrix} \right]^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4+x \\ 4-x \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}(-1+x-2+x+4-x) = \frac{1}{3}(1+x).\end{aligned}$$

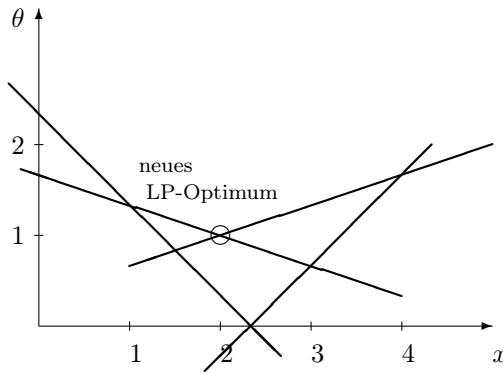
Die Ungleichung $\theta \geq 1/3(1+x)$ wird von $(\theta^3, x^3) = (0, 7/3)$ verletzt. Wir fügen sie deshalb zu den Nebenbedingungen von (9.11) hinzu.



In der nächsten Iteration erhalten wir $x^4 = 3/2$ und $\theta^4 = 5/6$. Dann ist $\pi = (1, 0)^\top$ optimale Lösung von (9.10) für $k = 1$ wegen $x^4 > 1$ und $\pi = (0, 1)^\top$ ist optimal für $k = 2, 3$ wegen $x^4 < \xi$ für $\xi \in \{2, 4\}$. Somit erhalten wir als Optimalitätsschnitt

$$\begin{aligned}\theta &\geq \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1+x \\ 1-x \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} -2+x \\ 2-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4+x \\ 4-x \end{pmatrix} \right]^\top \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}(-1+x+2-x+4-x) = \frac{1}{3}(5-x).\end{aligned}$$

Die Ungleichung $\theta \geq 1/3(5-x)$ wird von $(5/6, 3/2)^\top$ verletzt. Wir fügen sie deshalb zu den Nebenbedingungen von (9.11) hinzu.



In der nächsten Iteration erhalten wir $x^5 = 2$ und $\theta^5 = 1$. Die alte Lösung von (9.10) bleibt optimal und somit auch der berechnete Schnitt. Dieser wird also nicht von $(\theta^5, x^5)^\top$ verletzt. Der Algorithmus stoppt nun, d. h. $x^5 = 2$ ist die optimale Lösung mit $\mathcal{Q}(x^5) = \theta^5 = 1$.

Man beachte, dass der im letzten Schritt berechnete Schnitt nicht eindeutig ist, da für $k = 2$ alle zulässigen Lösungen von (9.10) optimal sind. (Mit anderen Worten: In $x = 2$ hat die Funktion $\mathcal{Q}(x)$ unendlich viele Subgradienten.)

9.7 Ganzzahlige Probleme

Analog zu Abschnitt 9.4 ist ein zweistufiges stochastisches gemischt-ganzzahliges Problem (mit festem Rekurs) ein Optimierungsproblem der Form

$$\min_x \quad c^\top x + \mathbb{E} \left[\min_y q(\omega)^\top y(\omega) \right] \quad (9.12a)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b, \quad (9.12b)$$

$$T(\omega)x + Wy(\omega) = h(\omega), \quad (9.12c)$$

$$x \geq 0, \quad (9.12d)$$

$$y(\omega) \geq 0, \quad (9.12e)$$

$$x_i \in \mathbb{Z} \quad \text{für } i \in I_1, \quad (9.12f)$$

$$y_i(\omega) \in \mathbb{Z} \quad \text{für } i \in I_2. \quad (9.12g)$$

Wie zuvor sei

$$Q(x, \xi(\omega)) := \min_y \left\{ q(\omega)^\top y : Wy = h(\omega) - T(\omega)x, y \geq 0, y_i \in \mathbb{Z} \text{ für } i \in I_2 \right\}$$

und

$$\mathcal{Q}(x) := \mathbb{E}[Q(x, \xi)].$$

Das zu (9.12) äquivalente Problem ist dann

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \\ & x_i \in \mathbb{Z} \text{ für } i \in I_1. \end{aligned}$$

Korollar 9.6 gilt jetzt aber leider nicht mehr:

Satz 9.15. Die Funktion $\mathcal{Q}(x)$ ist im Allgemeinen weder konvex noch stetig. Dies ist auch ohne Zufallsvariablen der Fall.

Wir beweisen diesen Satz durch Angabe eines Gegenbeispiels.

Beispiel 9.16 (Gegenbeispiel als Beweis von Satz 9.15). Es sei nur eine Variable $x \geq 0$ (ohne Ganzzahligkeitsforderung) gegeben mit dem Problem zweiter Stufe

$$\begin{aligned} Q(x, \xi) = \min_{y_1, y_2} \quad & 2y_1 + y_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 \geq x - \xi, \\ & y_2 \geq \xi - x, \\ & y \geq 0, \\ & y \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

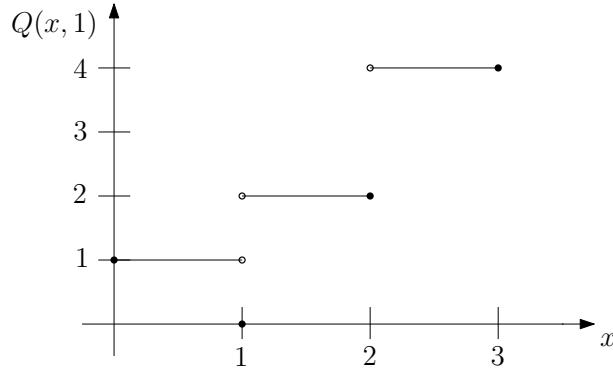
Es sei $\xi = 1$. Dann gilt:

- Für $x \leq 1$ ist $y = (0, \lceil 1 - x \rceil)^\top$ optimal. Es ist also $Q(x, 1) = \lceil 1 - x \rceil$, vgl. Abbildung 9.1.
- Für $x \geq 1$ ist $y = (\lceil x - 1 \rceil, 0)^\top$ optimal. Es ist also $Q(x, 1) = 2\lceil x - 1 \rceil$.

Somit ist $Q(x, 1)$ weder stetig noch konvex. Falls $\xi = 1$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt, ist $\mathcal{Q}(x) = Q(x, 1)$ für alle $x \geq 0$, d. h. auch $\mathcal{Q}(x)$ ist weder stetig noch konvex.

Satz 9.17. Die Menge $\mathcal{K}_2 = \{x: \mathcal{Q}(x) < \infty\}$ ist im Allgemeinen nicht konvex.

Als Beweis geben wir wieder ein Gegenbeispiel an.

Abbildung 9.1: Der Graph von $Q(x, 1)$ aus Beispiel 9.16

Beispiel 9.18 (Gegenbeispiel als Beweis von Satz 9.17). Es seien $x_1, x_2 \geq 0$ die Variablen der ersten Stufe und es seien

$$-y_1 + y_2 \leq \xi - x_1, \quad (9.14a)$$

$$y_1 + y_2 \leq 2 - x_2, \quad (9.14b)$$

$$y_1, y_2 \geq 0, \quad (9.14c)$$

$$y \in \mathbb{Z}^2 \quad (9.14d)$$

die Nebenbedingungen der zweiten Stufe. Es sei wieder $\xi = 1$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

1. Falls $x_2 > 2$ gilt, ist das Problem (9.14) unzulässig. Es gilt also $\mathcal{Q}(x) = \infty$ und somit $x \notin \mathcal{K}_2$.
2. Falls $2 \geq x_2 > 1$ gilt, ist $y_1 + y_2 \leq 2 - x_2$ wegen der Ganzzahligkeit von y nur zulässig für $y = (0, 0)^\top$. Somit gilt $\mathcal{Q}(x) < \infty$ genau dann, wenn $x_1 \leq 1$ ist.
3. Es sei jetzt $0 < x_2 \leq 1$. Dann ist $y_1 + y_2 \leq 2 - x_2$ nur für die Punkte $y = (1, 0)^\top$, $y = (0, 1)^\top$ und $y = (0, 0)^\top$ erfüllt. Somit gilt $\mathcal{Q}(x) < \infty$ genau dann, wenn $x_1 \leq 2$ ist.
4. Zuletzt sei $0 = x_2$. Dann ist $y_1 + y_2 \leq 2 - x_2$ nur für die Punkte $y = (1, 0)^\top$, $y = (0, 1)^\top$, $y = (1, 1)^\top$, $y = (2, 0)^\top$, $y = (0, 2)^\top$ und $y = (0, 0)^\top$ erfüllt. Somit gilt $\mathcal{Q}(x) < \infty$ genau dann, wenn $x_1 \leq 3$ ist.

Es ist also

$$\mathcal{K}_2 \cap \mathbb{R}_+^2 = ([0, 1] \times (1, 2]) \cup ([0, 2] \times (0, 1]) \cup ([0, 3] \times \{0\}).$$

Diese Menge ist nicht konvex; vgl. Abbildung 9.2. Offensichtlich ist auch \mathcal{K}_2 nicht konvex. Das bedeutet, dass die L-Methode für ganzzahlige Variablen auf der zweiten Stufe nicht angewandt werden kann.

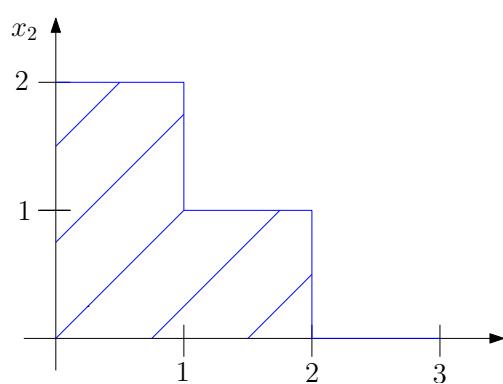


Abbildung 9.2: $\mathcal{K} \cap \mathbb{R}_+^2$ aus Beispiel 9.18.

Kapitel 10

Zweistufige robuste Optimierung

In der robusten zweistufigen Optimierung gibt es, analog zur zweistufigen stochastischen Optimierung, Variablen erster Stufe („here and now“) und Variablen zweiter Stufe („wait and see“), die abhängig von der Realisierung der Unsicherheit sind.

Wir betrachten ein zweistufiges robustes Optimierungsproblem mit unsicheren Nebenbedingungen und konvexer Unsicherheitsmenge \mathcal{U} :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & A_1(u)x_1 + A_2(u)x_2(u) \leq b \quad \text{für alle } u \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Hierbei sei $x = (x_1^\top, x_2(u)^\top)^\top$ und wir interpretieren die beiden Teile dieses Vektors wie folgt:

- x_1 sind Variablen erster Stufe und damit unabhängig von u .
- $x_2(\cdot)$ sind Variablen zweiter Stufe und dürfen sich abhängig von u „günstig“ einstellen. Sie unterliegen also nicht einer worst-case-Betrachtung, sondern korrigieren den Schaden der ersten Stufe soweit wie möglich. Es bezeichnet hierbei $x_2(\cdot)$ eine beliebige Funktion in u .

Das justierbare (oder zweistufige) unsichere Problem

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \in \{y : \forall u \in \mathcal{U} \exists x_2 : A_1(u)y + A_2(u)x_2 \leq b\} \end{aligned}$$

ist schon für leichte Spezialfälle ein NP-schweres Problem.

Beispiel 10.1. Wir betrachten das zweistufige Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2(u)} \quad & x_1 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - u^\top x_2(u) \geq 0, \\ & x_2(u) \geq Bu, \\ & x_2(u) \leq Bu. \end{aligned}$$

Zulässige Lösungen auf der ersten Stufe sind

$$\left\{ x_1 : x_1 \geq u^\top Bu \text{ für alle } u \in \mathcal{U} \right\}.$$

Diese Menge beschreibt einen Strahl in \mathbb{R} . Den linken Randpunkt des Strahls zu bestimmen ist allerdings äquivalent zur Maximierung der quadratischen Funktion $u^\top Bu$ über $u \in \mathcal{U}$, was das Problem im Allgemeinen NP-schwer macht.

Der Unterschied zur strikten Robustheit liegt darin, dass bei strikter Robustheit

$$\exists(x_1, x_2) \forall u \in \mathcal{U} : A_1(u)x_1 + A_2(u)x_2 \leq b$$

gefordert wird, wohingegen wir bei justierbarer Robustheit

$$\exists x_1 \forall u \in \mathcal{U} \exists x_2 : A_1(u)x_1 + A_2(u)x_2 \leq b$$

fordern.

Aufgrund der Schwierigkeit des Problems werden oft Bedingungen an die Funktion $x_2(\cdot)$ gestellt, um das Problem besser handhabbar zu machen. Ein möglicher Ansatz hierfür ist die affine Adaptivität (oder affine Justierbarkeit). Dabei wird die Annahme getroffen, dass sich $x_2(u)$ darstellen lässt als

$$x_2(u) = Qu + q.$$

Das heißt, $x_2(u)$ ist affin-lineär in der Unsicherheit mit passend gewählter Matrix Q und passend gewähltem Vektor q .

Das Optimierungsproblem wird dann zu

$$\min_{x_1, Q, q} c^\top (x_1 + Qu + q) \tag{10.1a}$$

$$\text{s.t. } A_1(u)x_1 + A_2(u)(Qu + q) \leq b \quad \text{für alle } u \in \mathcal{U}. \tag{10.1b}$$

Dieses Problem ist nur noch einstufig in den Variablen (x_1, Q, q) . Diese Variablen müssen entschieden werden, bevor sich die Unsicherheit $u \in \mathcal{U}$ realisiert.

Das Problem (10.1) ist aber nun quadratisch in der Unsicherheit u und damit im Allgemeinen wieder NP-schwer.

Eine weitere Einschränkung, die getroffen werden kann, ist die Annahme eines festen Rekurses. Das bedeutet, es wird angenommen, dass $A_2(u) = A_2$ unabhängig von u ist. Dann erhalten wir das Problem

$$\min_{x_1, Q, q} \quad c^\top(x_1 + Qu + q) \tag{10.2a}$$

$$\text{s.t.} \quad A_1(u)x_1 + A_2Qu + A_2q \leq b \quad \text{für alle } u \in \mathcal{U}. \tag{10.2b}$$

Dabei ist der zweite Term A_2Qu der Nebenbedingungen linear in Q und der dritte Term A_2q ist linear in q . Das Problem (10.2) hat nun die Form

$$\begin{aligned} \min_{x_1, Q, q} \quad & c^\top(x_1 + Qu + q) \\ \text{s.t.} \quad & [A_1(u) \quad A_2 \quad A_2] \begin{pmatrix} x_1 \\ Qu \\ q \end{pmatrix} \leq b \quad \text{für alle } u \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Demnach ist (10.2) ein unsicheres lineares Optimierungsproblem und kann mit den Methoden aus früheren Kapiteln (vgl. Kapitel 3) robustifiziert werden.

Weitere Informationen zur justierbaren Robustheit finden Sie in Ben-Tal u. a. (2004), Ben-Tal u. a. (2009) und Yanikoglu u. a. (2019).

Kapitel 11

Light Robustness

Die in diesem Kapitel vorgestellte “light robustness” entstand während des EU-Projekts ARRIVAL; vgl. Fischetti und Monaci (2009). Beim Konzept der “light robustness” bestimmt man zunächst ein nominales Optimum und daraufhin eine möglichst robuste Lösung, deren Kosten nicht zu stark ansteigen. Dieses Konzept ähnelt dabei sehr der zweistufigen stochastischen Optimierung.

Wir betrachten hierzu folgendes LP:

$$z^* = \min_x \sum_{j \in N} c_j x_j \quad (11.1a)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{für alle } i \in M, \quad (11.1b)$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{für alle } j \in N. \quad (11.1c)$$

Dabei sind die Koeffizienten von A unsicher in $[a_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ und es sei $|N| = n$ sowie $|M| = m$.

11.1 Light Robustness im flexiblen Γ -Ansatz

In Zeile i seien maximal Γ_i viele Koeffizienten unsicher. Das robuste Gegenstück lautet dann

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j + \beta(x, \Gamma_i) \leq b_i,$$

wobei

$$\beta(x, \Gamma_i) = \max_{\{S \subseteq N : |S| \leq \Gamma_i\}} \sum_{j \in S} \hat{a}_{ij} x_j$$

ist. Dieses robuste Gegenstück kann als LP mit mehr Variablen formuliert werden; vgl. Kapitel 6.

Die wesentliche Idee der “light robustness” ist jetzt die Folgende:

Finde eine möglichst robuste Lösung mit Kosten kleiner oder gleich $(1 + \delta)z^$, wobei δ vorher festgelegt wird.*

Man erhält daher das LP

$$\min_{x, \gamma} \sum_{i \in M} w_i \gamma_i \quad (11.2a)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in N} a_{ij} x_j + \beta(x, \Gamma_i) - \gamma_i \leq b_i \quad \text{für alle } i \in M, \quad (11.2b)$$

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{für alle } i \in M, \quad (11.2c)$$

$$\sum_{j \in N} c_j x_j \leq (1 + \delta)z^*, \quad (11.2d)$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{für alle } j \in N \quad (11.2e)$$

$$\gamma_i \geq 0 \quad \text{für alle } i \in M. \quad (11.2f)$$

Die Interpretation lautet wie folgt: γ_i sind Schlupfvariablen ähnlich der Variablen zweiter Stufe in der stochastischen Optimierung. Es gilt $\gamma_i > 0$, falls die robustifizierte Ungleichung i verletzt ist, d. h., die γ_i beschreiben den “Robustheitsgrad” der Lösung. Außerdem begrenzt (11.2d) die Kosten der neuen Lösung auf $(1 + \delta)z^*$. Es gilt:

- $\delta = 0$: Unter allen nominal optimalen Lösungen versucht man eine möglichst robuste zu finden.
- $\delta = \infty$: Die Kosten spielen keine Rolle.

Aus (11.2a)–(11.2c) erhält man

$$0 \leq \gamma_i \leq \beta(x, \Gamma_i) \quad \text{für alle } i \in M.$$

Die Gewichte in (11.2a) können dazu verwendet werden, um unterschiedliche Skalierungen der Ungleichungsnebenbedingungen auszugleichen. Die

LP-Modellierung von (11.2) erfolgt analog zu Kapitel 6:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i \in M} w_i \gamma_i \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in N} a_{ij} x_j + \Gamma_i z_i + \sum_{j \in N} p_{ij} - \gamma_i \leq b_i \quad \text{für alle } i \in M, \\
 & z_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij} x_j \quad \text{für alle } i \in M, j \in N, \\
 & z_i \geq 0 \quad \text{für alle } i \in M, \\
 & p_{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } i \in M, j \in N, \\
 & \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{für alle } i \in M, \\
 & \sum_{j \in N} c_j x_j \leq (1 + \delta) z^*, \\
 & \gamma_i \geq 0 \quad \text{für alle } i \in M, \\
 & x_j \geq 0 \quad \text{für alle } j \in N.
 \end{aligned}$$

11.2 Eine allgemeine ‘‘Light-Robustness’’-Heuristik

Wir diskutieren jetzt einen Ansatz, mit dem die bisher skizzierte Idee der ‘‘light robustness’’ heuristisch adressiert werden kann.

Es sei x^* optimal für das nominale Problem. Ferner sei

$$L_i^* = \sum_{j \in N} (a_{ij} + \hat{a}_{ij}) x_j^* - b_i.$$

Dann ist L_i^* die maximale Verletzung der Ungleichung i in Bezug auf x^* . Es sei nun

$$U = \{i \in M : L_i^* > 0\}.$$

Wir treffen jetzt die folgende Annahme:

Eine Lösung, bei der der Unterschied ‘‘rechte Seite minus linke Seite’’ groß ist, ist ‘‘robuster’’ als andere Lösungen.

Daraus leiten wir das Ziel ab, eine Lösung zu finden, die den minimalen

Schlupf maximiert:

$$\max_{\sigma, s, x} \sigma \quad (11.3a)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in N} a_{ij} x_j + s_i = b_i \quad \text{für alle } i \in M, \quad (11.3b)$$

$$\sigma \leq \frac{s_i}{L_i^*} \quad \text{für alle } i \in U, \quad (11.3c)$$

$$\sum_{j \in N} c_j x_j \leq (1 + \delta) z^*, \quad (11.3d)$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{für alle } j \in N, \quad (11.3e)$$

$$s_i \geq 0 \quad \text{für alle } i \in M. \quad (11.3f)$$

Dabei beschreibt σ den minimalen Schlupf und $\sigma \leq s_i/L_i^*$ die Normalisierung des Schlupfs der einzelnen Zeilen. Das Problem (11.3) hat im Allgemeinen verschiedene Optima. Es wird nur der kleinste Schlupf maximiert, somit fehlt im Allgemeinen die Balancierung aller Slacks. Sei dazu s^* Teil eines Optimums von (11.3). Wir definieren den mittleren Schlupf

$$s_{\text{avg}} = \frac{1}{|U|} \sum_{i \in U} \frac{s_i^*}{L_i^*}$$

und den minimalen Schlupf

$$s_{\min} = \min \left\{ \frac{s_i^*}{L_i^*} : i \in U \right\}.$$

Löse nun

$$\min_{t, s, x} \sum_{i \in U} t_i \quad (11.4a)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in N} a_{ij} x_j + s_i = b_i \quad \text{für alle } i \in M, \quad (11.4b)$$

$$\sum_{j \in N} c_j x_j \leq (1 + \delta) z^*, \quad (11.4c)$$

$$\frac{s_i}{L_i^*} + t_i \geq s_{\text{avg}} \quad \text{für alle } i \in U, \quad (11.4d)$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{für alle } j \in N, \quad (11.4e)$$

$$\frac{s_i}{L_i^*} \geq s_{\min} \quad \text{für alle } i \in U, \quad (11.4f)$$

$$t_i \geq 0 \quad \text{für alle } i \in U, \quad (11.4g)$$

$$s_i \geq 0 \quad \text{für alle } i \in M. \quad (11.4h)$$

Dabei gilt $t_i \geq 0$, falls der normalisierte Schlupf kleiner ist als s_{avg} .

Algorithmus 5: “Light-Robustness”-Heuristik

- 1 Löse das nominale LP ([11.1](#)).
 - 2 Maximiere den minimalen Schlupf durch Lösen von ([11.3](#)).
 - 3 Balanciere die Slacks durch Lösen von ([11.4](#)).
-

Kapitel 12

Was Sie jetzt wissen sollten!

1. Wo können Unsicherheiten in einem linearen Optimierungsproblem auftauchen?
2. Was hat das mit dem Unterschied von additiven oder multiplikativen Fehlern zu tun?
3. Was war der Sinn der Studie zu den gestörten Problemen aus der NETLIB-Bibliothek?
4. Wie haben wir ein robustes Optimierungsproblem mithilfe einer Unsicherheitsmenge definiert?
5. Was ist ein robust zulässiger Punkt?
6. Was ist mit „Worst-Case-Philosophie“ gemeint?
7. Was bedeutet „garantierter“ Zielfunktionswert?
8. Wie lautet das robuste Gegenstück und wie leitet man es her?
9. Was ist der Unterschied zwischen robuster und stochastischer Optimierung?
10. Was ist der Unterschied zwischen robuster (und stochastischer) Optimierung und Sensitivitätsanalysen?
11. Was wissen Sie über bindende unsichere Ungleichungsnebenbedingungen?
12. Was wissen Sie über Variablen mit unsicheren Koeffizienten?
13. Wie sieht ein LP aus?
14. Was ist die zulässige Menge? Was ist ein zulässiger Punkt? Wann nennt man das Problem zulässig?

15. Wann ist ein LP nach unten beschränkt?
16. Wie definieren wir den optimalen Zielfunktionswert?
17. Wann nennt man ein LP lösbar?
18. Wann ist ein LP lösbar und ist das bei allgemeinen Optimierungsproblemen genauso? (Gegenbeispiel?)
19. Wie leitet man Dualität für LPs her?
20. Wie lautet das duale LP?
21. Was sagt der schwache Dualitätssatz für LPs?
22. Können Sie den schwachen Dualitätssatz für LPs beweisen?
23. Was sagt der starke Dualitätssatz für LPs?
24. Was sagt der Satz vom komplementären Schlupf? Wie ist der Zusammenhang zum starken Dualitätssatz?
25. Was ist eine Halbordnung?
26. Was ist ein Kegel? Wann nennt man ihn konvex und wann spitz?
27. Warum gucken wir uns das überhaupt an?
28. Welcher Kegel gehört zum Standard „ \geq “ im \mathbb{R}^m ?
29. Was ist der Lorentzkegel?
30. Was haben Kugelunsicherheiten mit SOCPs zu tun?
31. Was geht bei der Herleitung von Dualität im konischen Fall schief, was bei LPs noch geklappt hat?
32. Was ist der duale Kegel?
33. Können Sie ein Bild malen zum dualen Kegel?
34. Welche theoretischen Resultate kennen Sie in diesem Kontext?
35. Wie lautet das konisch duale Problem?
36. Was sagt der schwache Dualitätssatz der konischen Optimierung?
37. Können Sie ihn beweisen?
38. Dualisieren Sie das Steinersummenproblem! (Was war das nochmal?)
39. Wie ist der geometrische Zusammenhang des konisch primalen und dualen Problems?
40. Was ist strikte Zulässigkeit bei konischen Problemen?

41. Welchen Trennungssatz für konvexe Mengen haben wir gebraucht? Und wo? Und warum?
42. Was sagt der starke Dualitätssatz der konischen Optimierung?
43. Was geht schief, wenn wir nicht die strikte Zulässigkeit fordern?
44. Was bezeichnen wir mit Offline-Entscheidungen? Was sind here-and-now und was sind wait-and-see Entscheidungen?
45. Warum nehmen wir an, dass die Unsicherheitsmenge kompakt sein soll?
46. Wie definieren wir das robuste Gegenstück?
47. Was ist robuste Zulässigkeit?
48. Was ist robuste Optimalität?
49. Warum dürfen wir annehmen, dass die Zielfunktion sicher ist?
50. Warum dürfen wir annehmen, dass die rechte Seite sicher ist?
51. Was hat es mit unkorrelierten Unsicherheiten für unterschiedliche Ungleichungen auf sich?
52. Was wissen Sie über die konvexe Hülle der Unsicherheitsmenge?
53. Was geht schief, wenn sie ihr Modell mit Ungleichungen mithilfe von Schlupfvariablen umschreiben als ein Modell mit Gleichungen? Was hat das mit here-and-now vs. wait-and-see Entscheidungen zu tun?
54. Was ist eine affine Parametrisierung der Unsicherheitsmenge?
55. Was ist ein Nominalwert und was ein Störungsvektor?
56. Wie lässt sich eine lineare Ungleichung mit Box-UNSicherheitsmenge umformulieren, so dass man ein algorithmisch behandelbares Problem erhält?
57. Wie lässt sich eine lineare Ungleichung mit polyedrischer Unsicherheitsmenge umformulieren, so dass man ein algorithmisch behandelbares Problem erhält?
58. Wie lässt sich eine lineare Ungleichung mit ellipsoidaler Unsicherheitsmenge umformulieren, so dass man ein algorithmisch behandelbares Problem erhält?
59. Wie lässt sich eine lineare Ungleichung mit konischer Unsicherheitsmenge umformulieren, so dass man ein algorithmisch behandelbares Problem erhält?
60. Was ist der Unterschied von robuster linear und robuster gemischt-ganzzahlig linearer Optimierung?

61. Was ist eine Zufallsungleichung?
62. Welche Annahmen an die unsicheren Daten treffen wir zur Behandlung von Zufallsungleichungen? Warum?
63. Was ist die 6σ -Regel? Können Sie sie herleiten?
64. Wie lautet die „sichere Approximation“ der Zufallsungleichung (auch in Abhängigkeit von ε)?
65. Was war die Take-Home-Message des Beispiels zur Portfolio-Optimierung in diesem Kontext?
66. Wie lautet ein (sicheres) binäres Problem?
67. Was modelliert dabei in der kombinatorischen Optimierung typischerweise $X \subseteq \{0, 1\}^n$?
68. Was ist das Problem der Bestimmung minimaler Spannbäume?
69. Was ist das Rucksack-Problem?
70. Welche Annahmen treffen wir jetzt bezüglich dessen, wo im Problem unsichere Parameter auftreten dürfen? Warum? Was ist der Unterschied zur allgemeinen robusten linearen Optimierung?
71. Was ist die Γ -Robustifizierung des binären Problems? Welche Rolle spielt der Parameter Γ ?
72. Wie kann man das Γ -robuste Gegenstück lösen?
73. Auf welchen Algorithmus zum Lösen der Probleme vom nominalen Typ verlassen wir uns beim Problem der Berechnung robust minimaler aufspannender Bäume?
74. Auf welchen Algorithmus zum Lösen der Probleme vom nominalen Typ verlassen wir uns beim Problem der Berechnung robust kürzester Wege?
75. Wann nennt man ein binäres Problem α -approximierbar?
76. Wie schwer ist eigentlich das Knapsack-Problem?
77. Kennen Sie einen 2-Approximationsalgorithmus für das Knapsack-Problem?
78. Kennen Sie einen Approximationsalgorithmus für das Traveling-Salesman-Problem (TSP)?
79. Kann man das robuste Gegenstück eines binären Problems α -approximieren, wenn es für das nominale Problem einen α -Approximationsalgorithmus gibt? Falls ja, wie geht das?
80. Wie sieht eigentlich ein allgemeines (nominales) MIP aus?

81. Wenn wir das jetzt robust betrachten wollen im Γ -Ansatz – welche Annahmen treffen wir dann bzgl. der Unsicherheit?
82. Jetzt haben wir also ein MIP und nehmen den Γ -Ansatz. Wie lautet dann das robuste Gegenstück?
83. Kann man das wieder als MIP formulieren? Falls ja, wie?
84. Was ist ein (gerichteter) Graph?
85. Was ist das Min-Cost-Flow-Problem?
86. Wie lautet das Γ -robustifizierte Min-Cost-Flow-Problem?
87. Warum kann ich nicht einfach den Satz von Sim anwenden?
88. Wenn das also nicht geht, was mache ich dann?
89. Was ist „binäre Suche“?
90. Wie modellieren wir ellipsoidale Unsicherheiten bei robusten binären Problemen?
91. Wie lautet der „Sicherheitsterm“? Wie kommt man darauf?
92. Wie kann man das robuste Gegenstück lösen für robuste binäre Probleme mit ellipsoidale Unsicherheiten, indem man nur Probleme vom Typ des nominalen Problems löst?
93. Liefert uns das jetzt direkt ein Polynomialzeitverfahren?
94. Unter welcher zusätzlichen Annahme kriegt man ein Polynomialzeitverfahren, wenn das nominale Problem in Polynomialzeit lösbar ist?
95. Was geht schief, wenn man jetzt korrelierte Kosten hat? Welchen Zusammenhang gibt es zwischen bilinearen – und damit nichtkonvexen – Termen und korrelierten Unsicherheiten?
96. Was sind Variablen 1. Stufe?
97. Was sind Variablen 2. Stufe?
98. Was ist der Wert der stochastischen Lösung?
99. Was ist der Wert der vollständigen Information?
100. Wann nehme ich jetzt eigentlich ein Modell der stochastischen Optimierung und wann ein Modell der robusten Optimierung?
101. Was ist eine Zufallsvariable?
102. Was ist ein Ereignisraum? Was ist ein Ereignis?
103. Was ist eine Wahrscheinlichkeit?

104. Was ist eine diskrete Zufallsvariable? Wie ist ihr Erwartungswert definiert?
105. Was ist eine stetige Zufallsvariable? Wie ist ihr Erwartungswert definiert? Was hat das mit einer Dichtefunktion zu tun und was ist das?
106. Was ist die Varianz?
107. Was ist das r -te Moment?
108. Was ist ein α -Quantil?
109. Was ist eine diskrete Gleichverteilung?
110. Was ist eine stetige Gleichverteilung?
111. Was ist eine Normalverteilung?
112. Wie lautet ein zweistufiges, stochastisches und lineares Optimierungsproblem mit festem Rekurs? Was heißt „mit festem Rekurs“?
113. Was ist das äquivalente deterministische Problem?
114. Was ist die Rekursfunktion?
115. Was hat es mit \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 auf sich?
116. Was wissen Sie über \mathcal{K}_2 ?
117. Was wissen wir über die Funktion $Q(x, \xi(\omega))$ wenn ξ eine diskret verteilte und endliche Zufallsvariable ist?
118. Welchen Einfluss hat das dann auf $Q(x)$
119. Wie sieht das alles im Fall von stetigen Zufallsvariablen aus?
120. Was bezeichnen wir mit „Szenarioansatz“?
121. Wie definieren wir formal die Wait-and-See-Lösung WS?
122. Wie definieren wir formal die Here-and-Now-Lösung RP?
123. Warum nennen wir das dann RP?
124. Wie ist der Wert der vollständigen Information (EVPI) formal definiert?
125. Was ist das Erwartungswertproblem?
126. Was ist der erwartete Nutzen der Erwartungswertlösung?
127. Wie ist der Wert der stochastischen Lösung formal definiert?
128. Was wissen Sie über den Zusammenhang dieser Lösungsbegriffe?
129. Was ist die Grundidee der L-Methode und was haben Gültigkeits- und Optimalitätsschnitte damit zu tun?

130. Wie erzeugt man Optimalitätsschnitte?
131. Wie erzeugt man Gültigkeitsschnitte?
132. Warum terminiert das Verfahren nach endlich vielen Schritten?
133. Was geht im Fall von ganzzahligen Variablen alles schief?
134. Wie ist das Setting in der zweistufigen robusten Optimierung?
135. Können Sie anhand eines Beispiels erklären, warum das in der Regel schwere Probleme sind?
136. Welchen Unterschied gibt es zwischen strikter und justierbarer Robustheit?
137. Was ist affine Justierbarkeit?
138. Wie modelliert man festen Rekurs?
139. Was ist die allgemeine Idee hinter dem Light-Robustness-Ansatz?
140. Wie sieht die Modellierung des Light-Robustness-Ansatzes für den flexiblen Γ -Ansatz aus? Wie sieht das entsprechende LP aus?
141. Welche Interpretation haben die Extremfälle für δ ?
142. Wie funktioniert die Light-Robustness-Heuristik?

Kapitel 13

Die Mathematiker der Vorlesung

Dimitris Bertsimas



Leben

- ★ 3. Oktober 1962 in Athen, Griechenland
- 1985 Bachelor-Abschluss in Elektrotechnik von der Nationalen Technischen Universität Athen in Griechenland
- 1987 Master-Abschluss in Operations Research am Massachusetts Institute of Technology (MIT)
- 1988 Promotion in Operations Research und Angewandter Mathematik am MIT
- 1988–1992 Assistenzprofessor für Managementwissenschaften an der Sloan School of Management, MIT
- 1992–1993 außerordentlicher Professor für Operations Research an der Sloan School of Management, MIT
- 2006–heute Co-Direktor des Operations Research Center am MIT

- Hat zahlreiche Preise erhalten, darunter den Harold-Lardner-Preis

Werk

- Publikationen in Optimierung, Operations Research und Statistik mit Anwendungen im Gesundheitssystem, Finanzsystem, Management und Transport

Edsger Wybe Dijkstra



Leben

- * 11. Mai 1930 in Rotterdam, Niederlande
- † 6. August 2002 in Neunen, Niederlande
- ab 1948 Studium der Mathematik und Physik an der Universität Leiden
- 1951 Bachelor-Abschluss
- Programmierkurs an der University of Cambridge
- Studium in Leiden und Teilzeitarbeit am Mathematischen Centrum in Amsterdam
- 1956 Master-Abschluss und Vollzeitarbeit am Mathematischen Centrum
- 1959 wird als erster Programmierer der Niederlande bezeichnet
- 1959 Doktorarbeit an der Universität von Amsterdam
- 1962 Professor an der Technischen Hochschule Eindhoven
- 1972 Turing Award
- 1984 Schlumberger Centennial Chair in Computer Sciences an der University of Texas at Austin

Werk

- Dijkstra-Algorithmus

Joseph Bernard Kruskal



Leben

- * 29. Januar 1928 in New York City
- † 19. September 2010 in Princeton, New Jersey
- 1948 Bachelor of science in Mathematics an der University of Chicago
- 1949 Master of science in Mathematics an der University of Chicago
- 1954 Promotion an der Princeton University
- 1958 Assistenzprofessor an der University of Michigan
- 1959–1993 Arbeit bei Bell Labs
- Mitglied der American Statistical Association

Werk

- Kruskal-Algorithmus

Joseph-Louis de Lagrange



Leben

- * 25. Januar 1736 in Turin
- † 10. April 1813 in Paris
- Brachte sich innerhalb eines Jahres das gesamte Wissen eines vollständig ausgebildeten Mathematikers seiner Zeit bei
- Erhielt mit 19 Jahren einen Lehrstuhl für Mathematik an der Königlichen Artillerieschule in Turin
- 1757 Mitbegründer der Turiner Akademie
- 1766 Direktor der Königlich-Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin (als Nachfolger von Euler)
- 1787 Pensionär der Académie des sciences in Paris
- 1801 auswärtiges Mitglied der Göttinger Akademie der Wissenschaften
- 1808 auswärtiges Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Werk

- Lagrange-Polynom
- Lagrange-Multiplikatoren
- Lagrange-Formalismus in der Mechanik

Rudolf Otto Sigismund Lipschitz



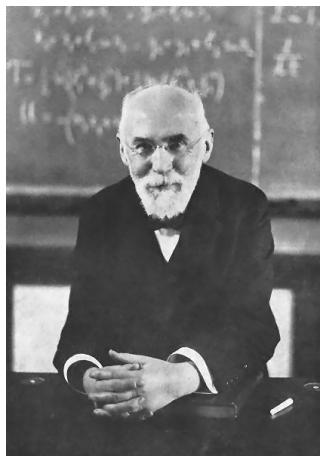
Leben

- ★ 14. Mai 1832 in Königsberg
- † 7. Oktober 1903 in Bonn
- 1847 Studium der Mathematik an der Universität Königsberg
- 1853 Promotion an der Universität Berlin
- ab 1857 Privatdozent in Berlin
- ab 1862 außerordentlicher Professor an der Universität Breslau
- 1874/75 Rektor der Universität Bonn
- 1883 Mitglied der Leopoldina

Werk

- Lipschitz-Stetigkeit
- Lipschitz-Konstante

Hendrik Antoon Lorentz



Leben

- ★ 18. Juli 1853 in Arnhem, Niederlande
- † 4. Februar 1928 in Haarlem, Niederlande
- 1870–1871 Studium der Mathematik und Physik an der Universität Leiden
- 1875 Promotion
- 1878 Professor für theoretische Physik an der Universität Leiden
- 1902 Nobelpreis für Physik für die Erklärung des Zeeman-Effekts
- 1903 Mitglied der Académie des Sciences
- 1905 Mitglied der Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften
- 1906 Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen und der National Academy of Sciences
- 1919 Forschung im Wasserbau und Mitwirkung am Zundersee-Projekt in Niederlande

Werk

- Elektronentheorie der Elektrizitätsleitung
- Lorentz-Kontraktion
- Lorentzkegel

Melvyn Sim



Leben

- 1995 Bachelor of Engineering am National University of Singapore
- 1996 Master of Engineering am National University of Singapore
- 2000 Master of Science in Computational Engineering am Singapore-MIT-Alliance
- 2004 Promotion am Massachusetts Institute of Technology, USA
- 2004–2011 Assistant und Associate Professor am National University of Singapore
- ab 2005 Mitglied der Singapore-MIT-Alliance
- ab 2007 Forschung bei NUS Risk Management Institute
- 2011 Faculty Outstanding Researcher Award (NUS)
- ab 2012 Professor am National University of Singapore

Werk

- Γ -Robustheit

Allen L. Soyster



Leben

- ★ 1. Oktober 1943 in Philipsburg, PA
- 1965 Bachelor in Industrial Engineering an der Penn State Universität
- 1967 Master in Operations Research an der Cornell Universität
- 1973 Ph.D. in Operations Research an der Carnegie Mellon Universität
- 1981–1996 Abteilungsleiter Industrial Engineering an der Penn State Universität
- 1997–2006 Dekan der Ingenieurwissenschaften an der Northeastern Universität in Boston
- 2004–2005 Präsident des Institute of Industrial Engineers
- 2006–2010 Direktor der Ingenierausbildung der National Science Foundation
- 2006 Bernard M. Gordon Prize for Innovation in Engineering and Technology Education
- seit 2011 Professor und Dekan der Ingenieurwissenschaften an der Northwestern Universität
- 2013 Frank and Lillian Gilbreth Lifetime Achievement Award
- Fellow der World Federation of Productivity Science und des Institute of Industrial Engineers

Werk

- Autor und Co-Autor von über 80 Publikationen in den Bereichen Produktions- und Fertigungssystemen, mathematische Programmierung und Optimierung
- 1973 “Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming”; das erste Paper zur robusten Optimierung

Jacob Steiner



Leben

- ★ 18. März 1796 in Utzenstorf
- † 1. April 1863 in Bern
- lernt erst mit 14 schreiben
- 1818 Umzug nach Heidelberg um Mathematik zu studieren
- ab Winter 1820/21 lebt er in Berlin und ist als Privatlehrer tätig
- ab 1827 (Ober-)Lehrer an der Gewerbeakademie
- 1832 Ehrendoktor der Albertus-Universität Königsberg
- ab 1834 ausserordentlicher Professor an der Universität von Berlin und ordentliches Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften
- 1854 Mitglied der Académie des sciences

Werk

- Steinerbäume
- Steinersummen
- Veröffentlichungen in Mechanik und Geometrie

Index

- Γ-Ansatz, 57
- α-Approximierbarkeit, 67
- r -tes Moment, 98
- Additivität, 20
- affine Justierbarkeit, 119
- affine Parametrisierung, 41
- Antisymmetrie, 20
- chance constraint, 11
- Dichtefunktion, 98
- Dualitätssatz für lineare Optimierungsprobleme, 18
- Ereignis, 98
 - raum, 98
- Erwarteter Wert der vollständigen Information, 97
- Erwartungswert, 98
 - problem, 105
- Gültigkeitsschnitte, 107
- Halbordnung, 20
- Here-and-Now-Lösung, 105
- Homogenität, 20
- Kegel
 - dualer, 27
 - ice cream cone, 22
 - Lorentz-, 22, 26
 - polarer, 27
 - second order cone, 22
 - spitzer, konvexer, 21
- Knapsack-Problem, 56, 67
- Γ-robustes, 74
- 2-Approximationsalgorithmus, 67
- Robuste Approximation, 69
- konisches Optimierungsproblem, 25
 - duales, 29
- Kruskals Algorithmus, 61
- Kürzeste Wege, 87
- L-Methode, 107, 108
- Lagrange-Ansatz, 80
- Lorentzkegel, 22, 26
- MILP, 72
- Min-Cost-Flow-Problem, 76
- Minimal aufspannender Baum, 55, 61
- Minimalkosten-Fluss-Problem, 76
- MIP, 72
- nominales Optimum, 8
- Nominalwert, 42
- optimale Lösung, 17
- Optimalitätsschnitte, 107
- Perturbationsvektor, 42
- Problem
 - duales, 18
 - lösbar, 17
 - unzulässig, 16
 - zulässig, 16
- Problem des Handlungsreisenden, 68
- Quantil
 - α-, 98
- Reflexivität, 20
- Rekurs
 - funktion, 100
 - matrix, 99
 - problem, 105

- robust optimal, 38
robust zulässig, 10, 38
robuste ganzzahlige Optimierung, 72
robustes Gegenstück, 10, 37
Rosenverkäuferproblem, 102
Satz vom komplementären Schlupf, 19
Schwache Dualität, 18
 für konische Probleme, 29
SDP, 23
selbstdual, 29
Sensitivitätsanalyse, 11
Sicherheitsparameter, 51
SOCP, 23
starker Dualitätssatz, 18
 der konischen Optimierung, 32
Steinersummen, 23, 29
Stochastische Optimierung, 11, 92
 zweistufige, 99
Strikte Zulässigkeit für konische Probleme, 31
Störungsvektor, 42
Szenarioansatz, 104
Transitivität, 20
traveling salesman problem, 68
Trennungssatz für konvexe Mengen, 32
TSP, 68
Unsicherheitsmenge, 10
 Box-, 44
 ellipsoidale, 48, 84
 konische, 48
 polyedrische, 46
Value-at-Risk, 53
Variablen 1. Stufe, 94
Variablen 2. Stufe, 94
Varianz, 98
Verteilung, 99
 -Normal, 99
 diskrete Gleich-, 99
 stetige Gleich-, 99
Wahrscheinlichkeit, 98
Wait-and-See-Lösung, 104
Wert der vollständigen Information, 105
Wert der stochastischen Lösung, 97, 105
Zielfunktionswert
 optimaler, 17
Zufallsvariable, 98
 diskrete, 98
 stetige, 98
zulässige Menge, 16
zweistufige robuste Optimierung, 118
äquivalentes deterministische Problem, 100

Literatur

- Bauer, H. (2002). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 5., durchgesehene und verbesserte Auflage. Walter de Gruyter.
- Ben-Tal, A., A. Goryashko, E. Guslitzer und A. Nemirovski (2004). „Adjustable robust solutions of uncertain linear programs“. In: *Mathematical Programming* 99.2, S. 351–376. DOI: [10.1007/s10107-003-0454-y](https://doi.org/10.1007/s10107-003-0454-y).
- Ben-Tal, A., L. El Ghaoui und A. Nemirovski (2009). *Robust Optimization*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press. URL: <http://press.princeton.edu/titles/9099.html>.
- Ben-Tal, A. und A. Nemirovski (2001). *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. Bd. 2. MPS-SIAM Series on Optimization. SIAM. DOI: [10.1137/1.9780898718829](https://doi.org/10.1137/1.9780898718829).
- Birge, J. R. und F. Louveaux (2011). *Introduction to stochastic programming*. Springer Science & Business Media. DOI: [10.1007/978-1-4614-0237-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0237-4).
- Boyd, S. und L. Vandenberghe (2004). *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, S. xiv+716.
- Fischetti, M. und M. Monaci (2009). „Light Robustness“. In: *Robust and Online Large-Scale Optimization: Models and Techniques for Transportation Systems*. Hrsg. von R. K. Ahuja, R. H. Möhring und C. D. Zaroliagis. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 61–84. DOI: [10.1007/978-3-642-05465-5_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-05465-5_3).
- Garey, M. R. und D. S. Johnson (1979). *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman und Company, San Francisco.
- Korte, B. und J. Vygen (2006). *Combinatorial Optimization*. Third. Bd. 21. Algorithms and Combinatorics. Theory and algorithms. Berlin: Springer-Verlag, S. xvi+597. DOI: [10.1007/3-540-29297-7](https://doi.org/10.1007/3-540-29297-7).
- Kouvelis, P. und G. Yu (1997). *Robust discrete optimization and its applications*. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.
- Lemaréchal, C. (2001). „Lagrangian Relaxation“. In: *Computational Combinatorial Optimization: Optimal or Provably Near-Optimal Solutions*. Hrsg. von M. Jünger und D. Naddef. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 112–156. DOI: [10.1007/3-540-45586-8_4](https://doi.org/10.1007/3-540-45586-8_4).
- Netlib (2016). <http://www.netlib.org/lp>.

- Sashihara, S. (2011). *The Optimization Edge*. New York, NY, USA: McGraw-Hill.
- Sim, M. (2004). „Robust Optimization“. Diss. Massachusetts Institute of Technology.
- Soyster, A. L. (1973). „Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming“. In: *Operations Research* 21.5, S. 1154–1157. DOI: [10.1287/opre.21.5.1154](https://doi.org/10.1287/opre.21.5.1154).
- Vazirani, V. V. (2013). *Approximation Algorithms*. Springer Science & Business Media.
- Yanikoglu, I., B. Gorissen und D. den Hertog (2019). „A Survey of Adjustable Robust Optimization“. In: *European Journal of Operational Research* 277, S. 799–813. DOI: [10.1016/j.ejor.2018.08.031](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.08.031).