Patrik Jansson

Prop	FOL
$\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, F, T$	samma
Name Nam	+ predikat
	+ kvantorer $(\forall, \exists)$

Två utvidgningar från Prop → FOL

FOL = Första Ordningens Logik

Patrik Jansson

Prop

$\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, F, T,$

Name Nam $\longmapsto$

FOL(Dom)

samma

String

Pred Nam [Dom]

Exempel på predikat

Domän	Predikat
Heltal	Prime(n), $\underbrace{\text{Less}(a,b)}_{a<b}$, Delbar(a,b)
Släkt	Barn(b,f), Man(x)
⋮	

DSL → δσλ DSLsofMath

Prop

$\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, F, T$

FOL(Dom)

Patrik Jansson

samma

+ kvantorer ($\forall, \exists$)

Exempel på kvantorer

$\forall x. \exists y. \, Barn(x, y)$ Dom = Släkt

$\forall n. \, Prime(n) \Rightarrow \exists s. (n < s) \,\&\, Prime(s)$

Dom = Heltal

FOL (Dom)

kvantorer ($\forall, \exists$) + predikat

$$\forall x.\ \exists y.\ \underbrace{Barn(x, y)}_{FOL}$$

$\boxed{Dom = Släkt}$

$Barn : Dom \to Dom \to FOL$

$$\forall n.\ Prime(n) \Rightarrow \exists s.\ \overbrace{(n < s)}^{FOL} \,\&\, Prime(s)$$

Dom = Heltal

$Prime : Dom \to FOL$

$(<) : Dom \to Dom \to FOL$

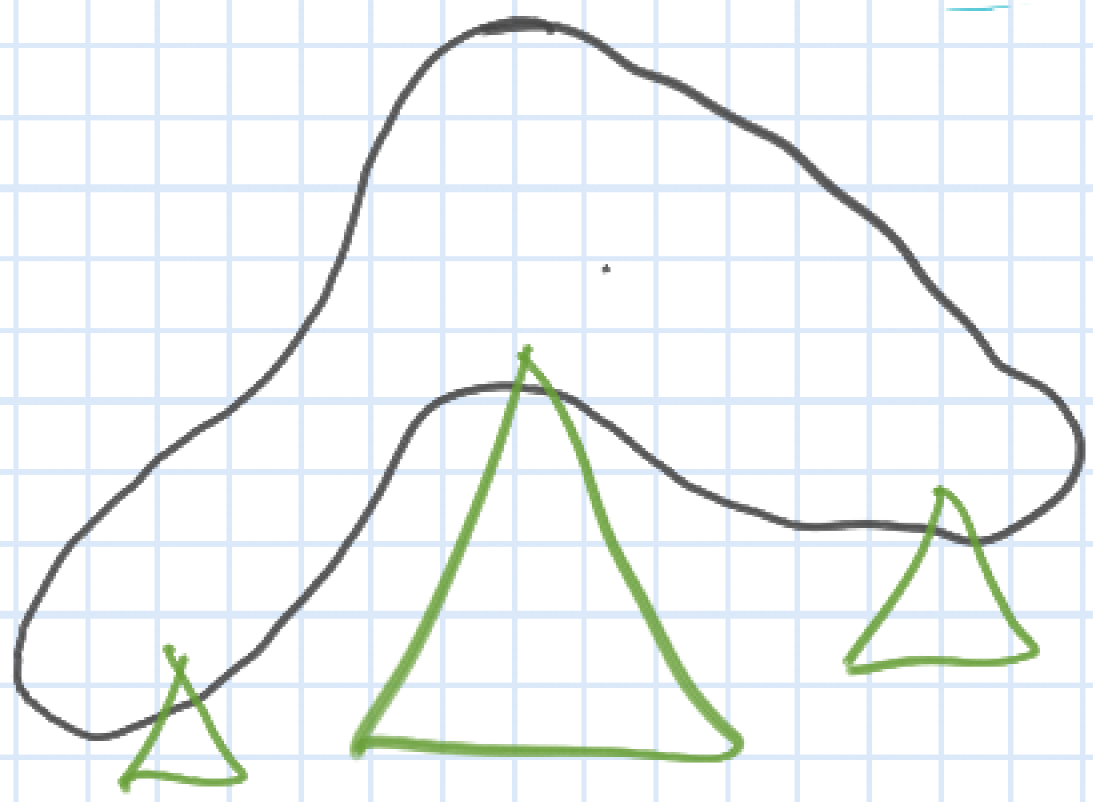
DSL → δσλ
DSLsofMath

FOL (Dom) | Prop + kvantorer $(\forall, \exists)$ + Predikat

"domän-variabler"

```
data FOL where
  And :: FOL -> FOL -> FOL
   ⋮
  Not :: FOL -> FOL
  Forall :: DVar -> FOL -> FOL
  Exists :: DVar -> FOL -> FOL
  Pred :: Nam -> [Dom] -> FOL
```

DVar = String



```
data Dom where
  Var :: DVar -> Dom
  Add :: Dom -> Dom -> Dom
  Mul :: Dom -> Dom -> Dom
  Con :: ℕ -> Dom
```

Tolka FOL-syntax

$$\forall x . \forall y . \quad x + y = y + x$$

FOL

$$(+) : Dom \to Dom \to Dom$$

$$(=) : Dom \to Dom \to FOL$$

Pred "=" [Add x y, Add y x]

where x = Var "x" ; y = Var "y"

Dom

FOL

Typade kvantorer

"syntaktiskt socker" = kan översättas bort

$$\forall x : A.\ B(x) \equiv \forall x.\ A(x) \Rightarrow B(x)$$

$$\exists x : A.\ B(x) \equiv \exists x.\ A(x) \land B(x)$$

Dom = Heltal $\boxed{x : N}$ $N(x) = x \geq 0$

Negation & kvantorer

"de Morgan"

$$\neg(\forall x.\ P(x)) \equiv \exists x.\ \neg P(x)$$

$P(a) \,\&\, P(b) \,\&\, P(c) \,\&\, \ldots$ | $\ldots$ Dom $= \{a, b, c \ldots\}$

$$\neg(A \land B) \equiv (\neg A) \lor (\neg B)$$

$$\neg(\exists x.\ Q) \equiv \forall x.\ \neg Q$$

$$\neg(A \lor B) \equiv (\neg A) \land (\neg B)$$

Övning: $\neg(\forall x{:}A.\ B(x))$

$\neg(\exists x{:}A.\ B(x))$

$$\underset{\text{typ}}{x:A} \equiv \underset{\text{mängd}}{x \in A} \equiv \overset{\text{predikat}}{A(x)}$$

Proof by contradiction

$$\boxed{\frac{\neg P \Rightarrow (Q \wedge \neg Q)}{P}}$$

Variants: $\dfrac{\neg P \Rightarrow \bot}{P}$ $\dfrac{\neg\neg P}{P}$

fritt val av Q

Till exempel $P = \neg R(r) =$ "r är irrationellt"

så att $\neg P = \neg\neg R(r) = R(r)$

$$\boxed{\frac{R(r) \Rightarrow (Q \wedge \neg Q)}{\neg R(r)}}$$

"Antag att r är rationellt. Visa både Q och ¬Q. Då måste antagandet varit falskt."

"$\sqrt{3}$ är irrationellt"

Största gemensamma delare

Dom = $\mathbb{R}^+$

$x = \frac{t}{n}$

vilket på enklast form

$(r = \sqrt{3}) \equiv (r^2 = 3)$

$R(x) \equiv \exists t : \mathbb{Z}.\ \exists n : \mathbb{N}^+.\ \underbrace{t = x \cdot n}\ \wedge\ \underbrace{\gcd(t, n) = 1}_{Q}$

Bevisa $\boxed{\neg R(r)}$. Antag $R(r)$.

Vi vet $t = r \cdot n$ $\quad t^2 = r^2 \cdot n^2 = 3 \cdot n^2$

faktor 3 $\quad \exists k.\ t = 3 \cdot k$ $\quad 3 \cdot \gcd(k, l) \neq 1$ $\quad \boxed{\neg Q}$

$3^2 \cdot k^2 = 3 \cdot n^2 \iff 3 \cdot k^2 = n^2$ $\quad \exists l.\ n = 3 \cdot l$

3

$\gcd(t, n) = \gcd(3 \cdot k, 3 \cdot l)$

QED

Proof by cases

$$\boxed{\frac{A \vee B \qquad A \Rightarrow C \qquad B \Rightarrow C}{C}}$$

Specialfall: $B = \neg A$ $\qquad A \vee \neg A$

$$\boxed{\frac{A \Rightarrow C \qquad \neg A \Rightarrow C}{C}}$$

$\neg R(\sqrt{3})$

$\neg R(\sqrt{2})$

$\neg R(\sqrt{p})$

Proof by cases

$$\boxed{\frac{A \Rightarrow C \qquad \neg A \Rightarrow C}{C}}$$

$$\boxed{(a^b)^c = a^{b \cdot c}}$$

"Det finns två irrationella tal p & q så att p^q är rationellt"

$$C = \boxed{\exists p . \exists q . \neg R(p) \wedge \neg R(q) \wedge R(p^q)}$$

låt $p = r = q$

$p = r = \sqrt{2}$

$$? \quad R(p^q) \equiv R(r^r) = \underbrace{R\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}_{A}$$

Antag A. Då gäller C med $p = q = r = \sqrt{2}$

Antag $\neg A \equiv \neg R(r^r)$. $x = r^r$. Testa $p = x$, $q = r$

$p^q = x^r = (r^r)^r = r^{r \cdot r} = r^2 = 2$

C gäller med $p = x = r^r$ & $q = r$

Proof by cases. QED.