Stærðfræðigreining 4
Mismunaaðferðir - Bútaaðferð

Björn Thor Stefánsson

Hildur Gunnarsdóttir

Jökull Ari Haraldsson

Rebekka Lára Rósantsdóttir

19. nóvember 2024

Efnisyfirlit

Sögulegur Inngangur

Mismunaaðferðir eru meðal helstu tólanna sem við höfum til að leysa hlutafleiðujöfnur tölulega og byggjast þær á þeirri hugmynd að nálga afleiður með mismunum á fallgildum. Mikil þróun í tölulegum lausnum hlutafleiðujafna átti sér stað um miðbik síðustu aldar þegar tölvur komu fram á sjónarsvið, en þessi aðferð á rætur að rekja til aftur Eulers á átjándu öld, en hann notaði mismunaaðferðir til að leysa venjulegar afleiðujöfnur. Þökk sé hversu auðvelt er að skilja og framkvæma hugmyndina sem liggur að baki mismunaaðferða þá hefur hún aldrei fallið úr gildi. Í gegnum aldirnar hefur hún haldið áfram að þróast og ýmis afbrigði sprottið fram. Enn þann dag í dag eru mismunaaðferðir notaðar í verkfræði, vísindum og víðar.

Snemma á átjándu öld, nokkrum áratugum eftir að Newton fann upp á örsmæðareikningi, sýndi Brooke Taylor að hægt væri að nálga fall með

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R_1(x) \quad \text{þ.e.} \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

með umritun, sem sagt nálgun á afleiðu með mismun fallgilda. Þetta nýtti sér Leonhard Euler nokkrum árum seinna til að leysa ýmsar venjulegar afleiðujöfnur úr eðlisfræði. Euler hafði mikinn áhuga á straumfræði og hönnun skipa, þar sem afleiðujöfnur leika stórt hlutverk. Erfitt gat reynst að reikna út nákvæma lausn, en þá nýtti Euler sér mismunanálgun Taylors og strjálunaraðferðir til þess að einfalda afleiðujöfnur niður í strjál, línuleg kerfi.

Árið 1860 gaf George Boole út bókina *A Treatise on the Calculus of Finite Differences* sem varð fljótt undirstöðurit í þessari fræði, og var notuð sem kennslubók lengi vel. Fjallaði hún um mismunaaðferðir í tengslum við heildun, línulegar afleiðujöfnur og fleira. Þessi bók, ásamt annari bók sem Boole gaf út um afleiðujöfnur, lagði grunninn að þeirri miklu reiknigetu sem tölvur nútímans búa yfir.

Árið 1910 reyndi Lewis Fry Richardson að gera veðurspá með tölulegri lausn á afleiðujöfnum. Þetta var nýtt af nálinni, þar sem í þá daga byggðist veðurspár aðallega á því að rýna í gögn og finna mynstur. Ekki gat Richardson nýtt sér tölvur í verkefnið, heldur settist hann niður með blað og blýant og fór að reikna. Markmiðið var að spá fyrir um veðrið sex klukkutíma fram í tímann. Því miður tókst það ekki, nema hvað að þegar tilraunin hans var skoðuð seinna, kom í ljós að ef ekki fyrir einfalda villu, þá var lausnin hans merkilega góð. Richardson varð brautryðjandi í notkun mismunaaðferða til að spá fyrir um veður.

Með tilkomu tölva um miðja tuttugustu öld gjörbreyttist landslagið í tölulegri greiningu og spruttu ýmsar nýjar aðferðir fram, hver þeirra nákvæmari og stöðugri en sú sem kom á undan. Ein þessara nýjunga var bútaaðferðin, þar sem hugyndin er að búta stærri fyrirbæri niður í smærri hluta og nálga óþekkta fallið á því, en hún var fundin upp og þróuð víðsvegar um heiminn á tuttugustu öld, sérstaklega í Sovétríkjunum og Bandaríkjunum í sambandi við geimvísindi og flugvélaverkfræði. Einnig þróuðu Kínverjar bútaaðferð upp á eigin spýtur við hönnun á stíflum, og hafa bútaaðferðir verið notaðar til að leysa hlutafleiðujöfnur í ýmsum öðrum sviðum, svo sem skipagerð, varmafræði og rafsegulfræði. Í þessu verkefni ætlum við að nýta reiknigetu tölva og mismunaaðferðir til að leysa bylgjujöfnuna, og bútaaðferð til að leysa Helmholtz jöfnu.

Mismunaaðferðir fyrir bylgjujöfnuna

Lítum á bylgjujöfnu

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a^2 u(x,t), & 0 < x < L,\ 0 < t \leq T, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L, \\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

þar sem $c > 0$, a^2 eru fastar og föllin φ, ψ eru gefin að neðan. Bylgjujafnan að ofan lýsir streng með upphafsstöðu $\phi(x)$ og upphafshraða $\psi(x)$ en strengurinn er með dempun þegar $a^2 \neq 0$. Í þessu verkefni ætlum við að finna nálgunarlausn á þessari jöfnu með því að nota mismunaaðferð. Við höfum eftirfarandi skiptingu á x-ás:

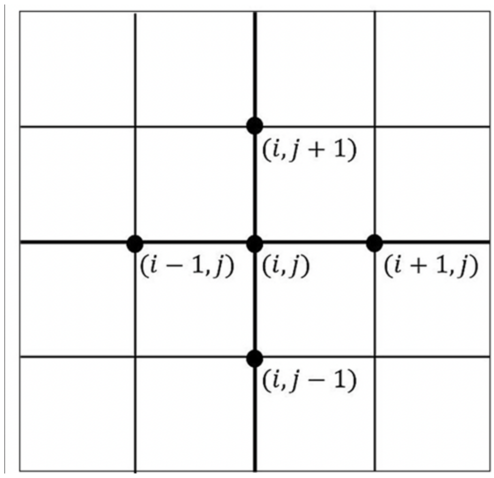
$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_{N+1} = L,$$

þannig að $x_j = (j-1)h$, $j = 1, \ldots, N+1$ þar sem $h = L/N$. Við veljum eftirfarandi skiptingu á t-ás:

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_M < t_{M+1} = T,$$

þannig að $t_\alpha = (\alpha - 1)\tau$, $\alpha = 1, \ldots, M+1$, og $\tau = T/M$. Við höfum þar með net með punkta (x_j, t_α) með $j = 1, \ldots, N+1$ og $\alpha = 1, \ldots, M+1$.

Eftirfarandi mynd sýnir hugmyndina, þar sem maður getur hugsað sér að láréttu strikin séu x-ás en lóðréttar tímaás.



Við notum σ-fallið til þess að breyta tvívíðu númeringu netsins (j, α) yfir í einvíða númeringu. Nánar tiltekið, ef við höfum net með hnútpunkta (x_j, t_α) með $1 \leq j \leq N+1$ og $1 \leq \alpha \leq M+1$, þá skilgreinum við fallið $\sigma(j, \alpha)$ sem skilar l, samsvarandi vísi í einvíðu númeringunni. Formúlan fyrir σ er gefin með

$$l = \sigma(j, \alpha) = j + (\alpha - 1)(N + 1)$$

.

Við ritum nálgunargildi $u(x_j, t_\alpha)$ með $c_{j,\alpha}$.
Við höfum eftirfarandi nálgunarformúlur:

$$\begin{cases} c_{j,\alpha+1} = 2(1-s)c_{j,\alpha} - c_{j,\alpha-1} + s(c_{j+1,\alpha} + c_{j-1,\alpha}) + a^2\tau^2 c_{j,\alpha}, & j = 2,\dots,N; \alpha = 2,\dots,M \\ c_{j,2} = \tau\psi_j + (1-s)\varphi_j + \frac{s}{2}(\varphi_{j+1} + \varphi_{j-1}) + \frac{a^2\tau^2}{2}\varphi_j, & j = 2,\dots,N \\ c_{j,1} = \varphi_j, & j = 1,\dots,N+1 \\ c_{1,\alpha} = c_{N+1,\alpha} = 0, & \alpha = 2,\dots,M+1 \end{cases}$$

þar sem $s := \frac{\tau^2 c^2}{h^2}$.
Heildarfjöldi punkta í netinu er $P = (M+1) \times (N+1)$. Við reiknum nálgunargildi með því að leysa jöfnuhneppið $A\vec{c} = \vec{b}$ þar sem A er $P \times P$ fylki, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ eru vigra í $\mathbb{R}^P$, og stakið c_σ í lausnarvigrinum $\vec{c}$ er nálgunargildi fyrir $u(x_j, t_\alpha)$. Við notum svo andhverfu σ-fallsins til að skila nálgunargildum c á fylkjaformi.

I. MATLAB-forrit

Hér er MATLAB-forrit sem reiknar nálgunargildi $u(x_j, t_\alpha)$ með því að nota nálgunarjöfnurnar hér að ofan.

```
function WEq = WaveEquation(N, M, a)
        % Skilgreinum fastastærðir.
        c = 1;
        L = 1;
        T = 1;

        % Reiknum skrefstærðir fyrir lengd x og tíma t:
        h = L / N; % Skrefstærð í rúmi.
        tau = T / M; % Skrefstærð í tíma.
        s = (c^2 * tau^2) / h^2; % Stærðin s reiknuð skv. formúlu.

        % Skilgreinum fylkið fyrir (x,t) í R^2:
        WEq = zeros(M+1, N+1);

        % Setjum upphafsskilyrði, byrjum á jaðrinum:
        % Jaðarskilyrði fyrir t=0 / alpha = 1:
        for j = 1:N+1 % Fyrir öll x gildi.
            x = (j-1) * h; % Reiknum x gildi frá skrefstærð.
            WEq(1, j) = Verk_1.phi(x); % Gefið skilyrði.
        end

        % Önnur jaðarskilyrði eru nú þegar 0 skv. zeros().

        % Reiknum nú innri punkta:
        % Innri punktar fyrir fyrsta tímaskref fyrir öll x, alpha = 2.
        for j = 2:N % Sleppum tíma t=0 og
            WEq(2, j) = tau * Verk_1.psi((j-1)*h) + (1-s)*Verk_1.phi((j-1)*h) + ...
                        0.5*s*(Verk_1.phi(j*h) + Verk_1.phi((j-2)*h)) + ...
                        (a^2 * tau^2 * 0.5 * Verk_1.phi((j-1)*h));
        end

        % Restin af innri punktum fyrir bylgjujöfnuna:
        for alpha = 3:M+1 % Sjá alpha=1,2 ofar í kóða.
            for j = 2:N % j=1,j=N+1 er jaðarskilyrði 0 og við sleppum því þá.
                WEq(alpha, j) = 2*(1-s)*WEq(alpha-1, j) - WEq(alpha-2, j) + ...
                                s*(WEq(alpha-1, j+1) + WEq(alpha-1, j-1)) + ...
                                (a^2 * tau^2 * WEq(alpha-1, j));
```

```
        end
    end
    % Teiknum graf.
    x = 0:L/N:(L/N)*(N); % Gildisvigur fyrir staðsetningu.
    t = 0:T/M:(T/M)*(M); % Gildisvigur fyrir tíma.

    [X, T] = meshgrid(x, t); % Búum til rist fyrir grafið.
    mesh(X, T, WEq) % Teiknum rist.
    surf(X, T, WEq, 'EdgeColor', 'none', "FaceAlpha",0.75); % Teiknum flöt á rist.
    xlabel('x'); % Merkjum x ás.
    ylabel('t'); % Merkjum y ás (tíma ásinn).
    zlabel('u(x,t)'); % Merkjum z ás (lausnargildi).
    title("Töluleg Lausn á bylgjujöfnu fyrir a^2=" + num2str(a^2), "FontSize", 12);
    colormap("turbo") % Veljum litablöndu.
end
```

Og gefin upphafsgildisföll:

```
function y = phi(x)
    y = x * (1 - x);
end

function y = psi(x)
    y = x;
end
```

II. Uppbygging fylkjajöfnu

Í verkefninu leysum við jöfnuhneppið $A\vec{c} = \vec{b}$ tölulega. Vigurinn $\vec{c}$ geymir sjálf c gildin okkar sem eru nálganirnar okkar að rétta fallinu, vigurinn $\vec{b}$ inniheldur upplýsingarnar handan við jöfnunarmerkið í nálgunarformúlunum, og fylkið A hýsir stuðlana fyrir framan öll c-gildin. Jöfnurnar fjórar í nálgunarformúlunum segja til um hvernig við smíðum kerfið. Efsta jafnan,

$$c_{j,\alpha+1} + c_{j,\alpha}(-2(1-s) - a^2\tau^2) + c_{j,\alpha-1} - sc_{j+1,\alpha} - sc_{j-1,\alpha} = 0 \quad j = 2, \ldots, N; \alpha = 2, \ldots, M,$$

lýsir innri punktunum, og sjáum við að það eru samtals fimm stuðlar sem lýsa sambandi innri punktana við aðliggjandi punkta. Það er að segja, í línu l í fylkinu A þar sem c_l er innri punktur, þá eru fimm gildi frábrugðin núlli. Öll hin gildin í línunni eru núll. Eins er $\vec{b}$ gildið í þeirri línu núll. Að vísu lýsir þessi jafna ekki öllum innri punktunum, því næst-neðsta línan í kerfinu er lýst með jöfnunni

$$c_{j,2} = \tau\psi_j + (1-s)\varphi_j + \frac{s}{2}(\varphi_{j+1} + \varphi_{j-1}) + \frac{a^2\tau^2}{2}\varphi_j, j = 2, \ldots, N.$$

Það sést á því að hér er $\alpha = 2$, en í efstu jöfnunni er minnsta α-gildið 3. Ef lína m í kerfinu er lýst með þessari jöfnu, þá eru öll gildin í m-tu línu fylkis A jafnt og núll nema í dálki m, en þá er gildið 1. Í m-tu línu vigursins $\vec{b}$ er gildið hægri hlið jöfnunnar að ofan. Snúum okkur að jöfnu

$$c_{j,1} = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, N+1.$$

Hér er tíminn í öðrum jaðrinum, $\alpha = 1$, sem sagt þessi jafna lýsir neðri mörkum kerfisins. Þá segir upphafsskilyrðið okkar að fallið er jafnt φ, svo við höfum einfaldlega að stakið í $\vec{b}$ sé φ_j og öll stökin í fylkinu A eru núll nema hornalínustakið, sem er 1. Síðasta jafnan,

$$c_{1,\alpha} = c_{N+1,\alpha} = 0, \quad \alpha = 2, \ldots, M+1,$$

lýsir hegðun kerfisins á vinstri- og hægri köntunum. Hér er öll línan einfaldlega núll nema hornalínustakið í A, sem er 1.

III. Prófunarkeyrsla

Nú setjum við $N = 4$, $M = 6$ og $a = 0$ og veljum $\varphi(x) = x(1-x)$ og $\psi(x) = x$. Mynd 1 sýnir tölulega lausn okkar með MATLAB-forritinu úr I.

```
>> Keyrsla_1

WEq =

         0    0.1875    0.2500    0.1875         0
         0    0.2014    0.3056    0.2847         0
         0    0.1721    0.3056    0.2647         0
         0    0.1256    0.2281    0.1451         0
         0    0.0688    0.0682   -0.0020         0
         0   -0.0188   -0.1226   -0.1171         0
         0   -0.1442   -0.2648   -0.1826         0
```

Mynd 1: *Tölulega nálguð lausn á bylgjujöfnunni fyrir $N = 4$ og $M = 6$.*

Þessu ber saman við gefna lausn í verkefnalýsingunni.

IV. Bein lausn

Við vinnum ennþá með sömu föll og fasta og voru gefin í III, nema nú er $N = 20$ og $M = 40$. Bein lausn á bylgjujöfnunni er:

$$u_a(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \frac{\psi_n}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{1}$$

þar sem φ_n og ψ_n eru Fourier-sínus-stuðlar fallanna ϕ og ψ.
Finnum sínus-Fourier stuðla fallanna $\varphi(x) = x(1-x)$ og $\psi(x) = x$ með oddstæðri framlengingu á bilið $[-L; L]$. Fáum:

$$\begin{aligned}
b_{n\varphi} &= \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) \sin\Big(n\frac{\pi}{L}x\Big) dx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L (x - x^2) \sin\Big(n\frac{\pi}{L}x\Big) dx \\
&= -\frac{2}{L}\Big[(x-x^2)\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) L}{n\pi}\Big]_0^L + \frac{2L}{Ln\pi}\int_0^L (1-2x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx \\
&= -2\frac{L(1-L)(-1)^n}{n\pi} + \frac{2L}{n^2\pi^2}\Big[(1-2x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Big]_0^L + \frac{4L}{n^2\pi^2}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx \\
&= \frac{2L(L-1)(-1)^n n^2\pi^2}{n^3\pi^3} - \frac{4L^2}{n^3\pi^3}\Big[\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Big]_0^L \\
&= \frac{2L(L-1)(-1)^n n^2\pi^2 - 4L^2(-1)^n + 4L^2}{n^3\pi^3} \\
&= \frac{2L((-1)^n((L-1)n^2\pi^2 - 2L) + 2L)}{n^3\pi^3}
\end{aligned}$$

og

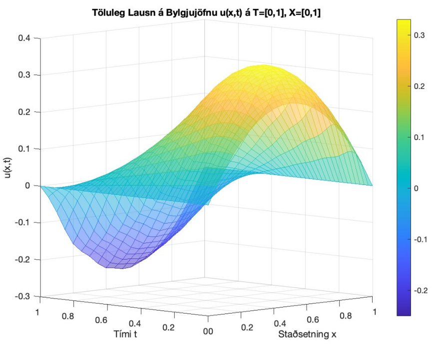
$$
\begin{aligned}
b_{n\psi} &= \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x)\sin\Big(n\frac{\pi}{L}x\Big)dx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L x\sin\Big(n\frac{\pi}{L}x\Big)dx \\
&= -\frac{2L}{Ln\pi}\Big[x\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\Big]_0^L + \frac{2L}{Ln\pi}\int_0^L \cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}L(-1)^n \\
&= \frac{2L(-1)^{n+1}}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

Tafla 1 ber saman fylkið WEq við beinu lausnina (1). Efri gildin í hverjum reit töflunnar eru samsvarandi nálgunargildi reiknuð með WEq og neðri gildin eru gildi lausnarinnar $u_a(x,t)$ í samsvarandi punktum (x,t).

Tafla 1: *Comparison of WEq matrix with direct solution*

t/z	$x = 0.1$	$x = 0.25$	$x = 0.5$	$x = 0.75$	$x = 1$
$t = \tau$	0.0919 0.0919	0.1931 0.1931	0.2619 0.2619	0.2056 0.2056	0 0.0000
$t = 5\tau$	0.0879 0.0875	0.2031 0.2031	0.2969 0.2969	0.2656 0.2656	0 0.0000
$t = 10\tau$	0.0750 0.0750	0.1880 0.1875	0.3125 0.3125	0.3026 0.3124	0 0.0000
$t = 20\tau$	0.0500 0.0500	0.1250 0.1250	0.2387 0.2499	0.1277 0.1250	0 0.0000
$t = 40\tau$	-0.0754 -0.0900	-0.1893 -0.1875	-0.2500 -0.2500	-0.1870 -0.1875	0 -0.0000

Mynd 2 sýnir þrívítt graf af tölulegu lausninni WEq.



Mynd 2: *Töluleg Lausn á Bylgjujöfnu*

V. Orkuvarðveisla

Skilgreinum orku E með

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dx, \tag{2}$$

þar sem u er beina lausnin gefin í (2). Nú ætlum við að sýna að E er gefin með

$$E = \frac{L}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(\varphi_n^2 + \frac{\psi_n^2 L^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{3}$$

Athugum að orkan E er óháð t, hún er fasti. Til þess að leiða þessa formúlu út byrjum við á því að finna hlutafleiðurnar af u, rifjum upp að formúlan fyrir u er

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \frac{\psi_n}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right))\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Þá eru hlutafleiðurnar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\varphi_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + \frac{\psi_n L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right)\frac{n\pi}{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Bigg)$$

og

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + \frac{\psi_n L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right)\frac{n\pi}{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Bigg),$$

þar sem við tökum afleiðu inn fyrir summuna, en það má því hún er samleitin í jöfnum mæli. Nú snúum við okkur að orkuformúlunni, en hún er heildi í x-breytunni. Þar koma þessar hlutafleiður fram í öðru veldi. Aftur nýtum við samleitni í jöfnum mæli til þess að skipta á heildinu og summunni, en með þessu getum við skoðað hvert n í summunni fyrir sig. Lítum á eitt ótiltekið n. Þá fæst að

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{1}{2}\int_0^L \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin^2(\frac{n\pi}{L}x)\left(-\varphi_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + \frac{\psi_n L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right)^2 \\
&+ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(\varphi_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + \frac{\psi_n L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right)^2 \cos^2(\frac{n\pi}{L}x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(\varphi_n^2 \sin^2(\frac{n\pi}{L}t) - \varphi_n\psi_n\frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + \frac{\psi_n^2 L^2}{n^2\pi^2}\cos^2(\frac{n\pi}{L}t)\right)\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)L}{4n\pi}\right]_0^L \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(\varphi_n^2 \cos^2(\frac{n\pi}{L}t) + \varphi_n\psi_n\frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + \frac{\psi_n^2 L^2}{n^2\pi^2}\sin^2(\frac{n\pi}{L}t)\right)\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)L}{4n\pi}\right]_0^L \\
&= \frac{L}{4}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(\varphi_n^2(\cos^2(\frac{n\pi}{L}t) + \sin^2(\frac{n\pi}{L}t)) + \frac{\psi_n^2 L^2}{n^2\pi^2}(\cos^2(\frac{n\pi}{L}t) + \sin^2(\frac{n\pi}{L}t))\right) \\
&= \frac{L}{4}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(\varphi_n^2 + \frac{\psi_n^2 L^2}{n^2\pi^2}\right).
\end{aligned}$$

Þetta gildir fyrir sérhvert n í óendanlegu summunni, svo við höfum að lokum að formúlan fyrir orkuna er

$$E = \frac{L}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\varphi_n^2 + \frac{\psi_n^2 L^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

Nú ætlum við að skoða orkuvarðveisluna fyrir tölulegu lausnina sem er reiknum með WEq. Við diffrum E (3) m.t.t. t og notum bylgjujöfnuna (c = 1, a = 0), þ.e.a.s.

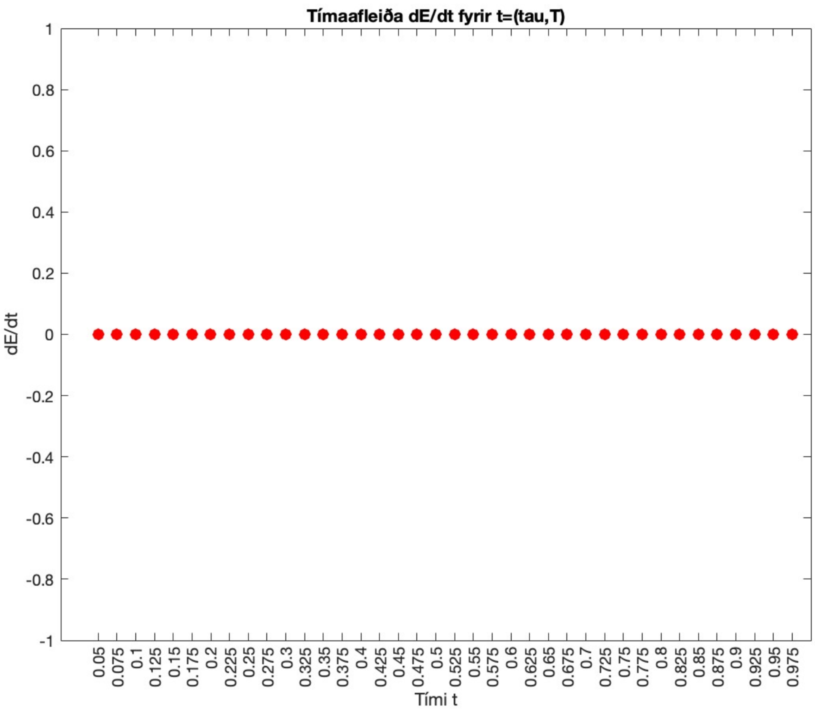
$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)\frac{\partial u}{\partial t}(L,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) \end{aligned} \tag{4}$$

Við notum síðan niðurstöðu (4) til þess að sýna að $\frac{dE}{dt} = 0$, þar sem lausnin u er reiknuð með WEq fyrir skilyrðunum úr IV. Við notum "forward difference"misnunarkvóta til þess að nálga $\frac{\partial u}{\partial t}$ og $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Þá verður nálgunin okkar á tímaafleiðu orkunnar

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{c(L,t) - c(L-h,t)}{h} \cdot \frac{c(L,t-\tau) - c(L,t+\tau)}{2\tau} - \frac{c(0,t) - c(h,t)}{h} \cdot \frac{c(0,t+\tau) - c(0,t-\tau)}{2\tau}. \tag{5}$$

Mynd 3 sýnir $\frac{dE}{dt}$ fyrir $t \in (\tau, T)$.



Mynd 3: *Tímaafleiða orkunnar sem fall af tíma*

VI.

Hér endurtökukm við liði IV og V fyrir eftirfarandi skilyrði:

$$\varphi(x) = x(1-x), \quad \psi(x) = x, \quad a^2 \neq 0 \tag{6}$$

Fáum að beina lausnin er gefin með

$$u_a(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos\left(t\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} - a^2} \right) + \frac{\psi_n}{\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} - a^2}} \sin\left(t\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} - a^2} \right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{7}$$

og a getur verið þvertala þ.a. $a^2 < 0$. Við ætlum að leysa verkefnið þegar $a^2 = 10$ og $a^2 = -10$. Tafla 2 ($a^2 = 10$) og Tafla 3 ($a^2 = -10$) að neðan ber saman fylkið WEq við beinu lausnina (7). Efri gildin í hverjum reit töflunnar eru samsvarandi nálgunargildi reiknuð með WEq og neðri gildin eru gildi lausnarinnar $u_a(x,t)$ í samsvarandi punktum (x,t)

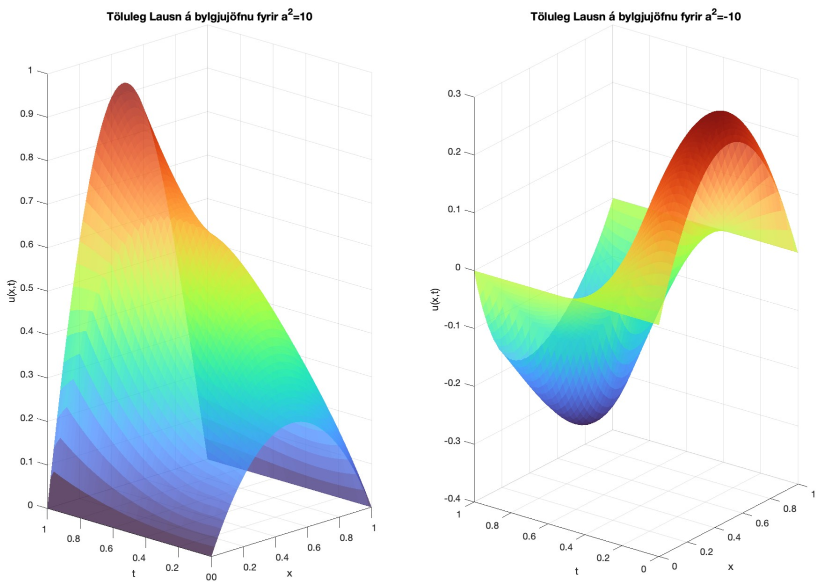
t/z	$x = 0.1$	$x = 0.25$	$x = 0.5$	$x = 0.75$	$x = 1$
$t = \tau$ c(x,t):	0.0922	0.1937	0.2627	0.2062	0
$t = \tau$ $u_a(x,t)$:	0.0922	0.1937	0.2627	0.2062	0
$t = 5\tau$ c(x,t):	0.0949	0.2184	0.3178	0.2824	0
$t = 5\tau$ $u_a(x,t)$:	0.0945	0.2184	0.3179	0.2825	0
$t = 10\tau$ c(x,t):	0.1021	0.2497	0.4014	0.3774	0
$t = 10\tau$ $u_a(x,t)$:	0.1020	0.2492	0.4015	0.3875	0
$t = 20\tau$ c(x,t):	0.1528	0.3674	0.6210	0.4177	0
$t = 20\tau$ $u_a(x,t)$:	0.1528	0.3674	0.6332	0.4147	0
$t = 40\tau$ c(x,t):	0.3383	0.6994	0.9249	0.6168	0
$t = 40\tau$ $u_a(x,t)$:	0.3227	0.6999	0.9218	0.6140	0

Tafla 2: $a^2 = 10$

t/z	$x = 0.1$	$x = 0.25$	$x = 0.5$	$x = 0.75$	$x = 1$
$t = \tau$ $c(x,t)$:	0.0916	0.1925	0.2611	0.2050	0
$t = \tau$ $u_a(x,t)$:	0.0916	0.1925	0.2611	0.2050	0.0000
$t = 5\tau$ $c(x,t)$:	0.0810	0.1883	0.2764	0.2492	0
$t = 5\tau$ $u_a(x,t)$:	0.0806	0.1883	0.2764	0.2491	0.0000
$t = 10\tau$ $c(x,t)$:	0.0507	0.1324	0.2321	0.2347	0
$t = 10\tau$ $u_a(x,t)$:	0.0507	0.1319	0.2321	0.2442	0.0000
$t = 20\tau$ $c(x,t)$:	-0.0155	-0.0308	-0.0132	-0.0603	0
$t = 20\tau$ $u_a(x,t)$:	-0.0154	-0.0306	-0.0027	-0.0626	-0.0000
$t = 40\tau$ $c(x,t)$:	-0.0948	-0.1848	-0.1881	-0.1235	0
$t = 40\tau$ $u_a(x,t)$:	-0.1076	-0.1831	-0.1877	-0.1237	-0.0000

Tafla 3: $a^2 = -10$

Mynd 4 sýnir þrívítt graf af tölulegu lausninni WEq fyrir $a^2 = 10$ & $a^2 = -10$.



Mynd 4: *Tölulega lausnin þegar* $a^2 = -10$ *(vinstri) og* $a^2 = 10$ *(hægri)*

Athugum að:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx = \frac{a^2}{2}\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}^2 dx + \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)\frac{\partial u}{\partial t}(L,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) \tag{8}$$

Nú er allt fyrir utan heildið í formúlunni að ofan eins og áður, svo við þurfum aðeins að leysa heildið

$$\int_0^L \frac{\partial u^2}{\partial t} dx.$$

Við gerum það tölulega með Riemann-summu kassanálgun, en þar sem við höfum skipt heildisbilinu upp í punkta $x_1 < \cdots < x_{N+1}$, þá er hún

$$\int_{x_1}^{x_{N+1}} \partial_t u^2(x)\, dx = \sum_{j=1}^{N} \partial_t u^2(x_j)h,$$

þar sem h er lengd x-bútanna. Við vitum ekki fallið $\partial_t u^2$, svo við nálgum það með

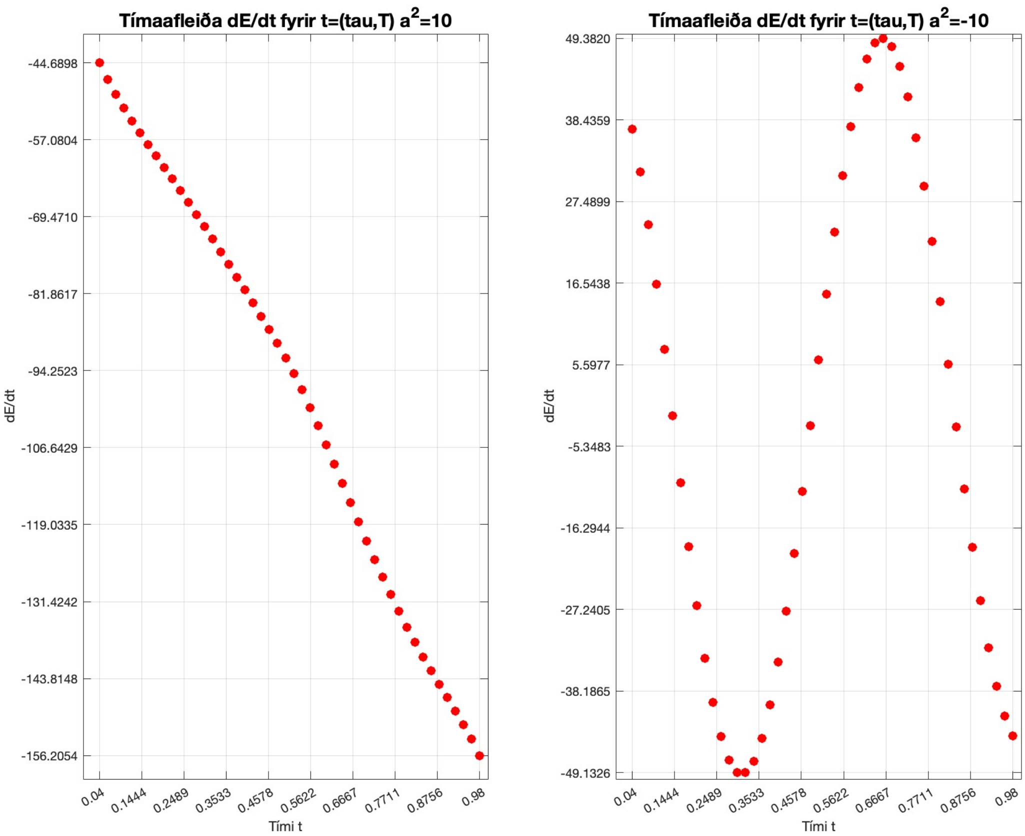
$$\frac{\partial u^2}{\partial t} \approx \frac{c^2(x, t-\tau) - c^2(x, t+\tau)}{2\tau}.$$

Þá verður nálgunin á heildinu okkar

$$\int_0^L \frac{\partial u^2}{\partial t} dx \approx \frac{1}{2\tau}\sum_{j=1}^{N}\Big[c^2(x_j, t-\tau) - c^2(x_j, t+\tau)\Big]h.$$

Nú notum við niðurstöðu (8) til þess að reikna $\frac{dE}{dt}$, þar sem lausnin u er reiknuð með WEq fyrir skilyrðunum úr IV. Við notum "forward difference"misnunarkvóta til þess að nálga $\frac{\partial u}{\partial t}$ og $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Mynd 5 sýnir $\frac{dE}{dt}$ fyrir $t \in (\tau, T)$.



Mynd 5: *Tímaafleiða orkunnar þegar* $a^2 = -10$ *(vinstri) og* $a^2 = 10$ *(hægri)*

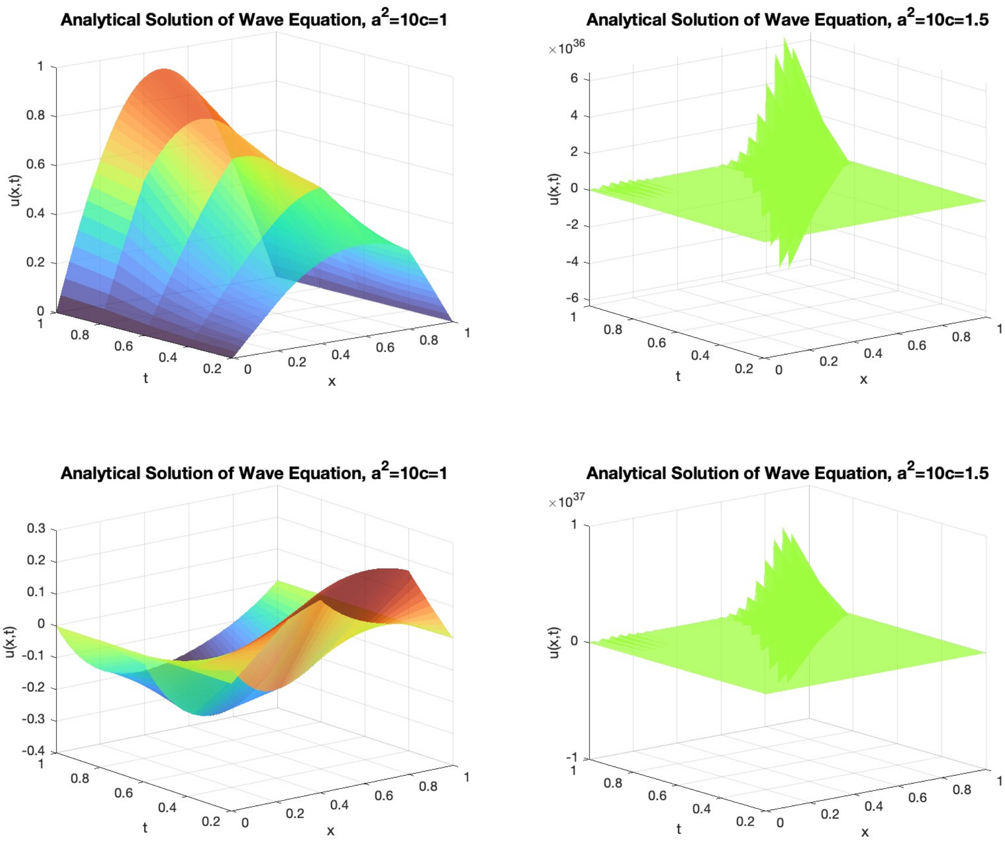
VII. Til gamans

Nú prófum við forritið með því að leysa verkefnið þegar $L = 1$, $T = 1$, $N = 50$, $M = 50$ og mismunandi gildi fyrir a. Mynd 6 sýnir lausnina þegar $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$. Athugum að tölulegur stöðugleiki krefst þess að $s \leq 1$.

Þetta fæst með von Neumann stöðugleikaaðferðinni, en hún hjálpar manni að segja til um hvenær töluleg lausn er stöðug og hvenær ekki. Tvö meginhugtök liggja hér undir; samræmi og stöðugleiki. Samræmi þýðir einfaldlega að tölulega lausnin nálgist þá réttu, og stöðugleiki þýðir að villur magnist ekki eftir því sem við bútum kerfið upp. Samkvæmt greininni *Stability of Numerical Schemes for PDE's* frá MIT, 1999 eftir Rodolpho R. Rosales, sem tekur fyrir bylgjujöfnuna í einni rúmvídd, þá er tölulega lausnin stöðug svo lengi sem ákveðin tala G, sem kallast vaxtarþáttur, er ekki stærri en 1, þ.e.

$$||G|| \leq 1.$$

Þessi vaxtarþáttur er einmitt $s = \frac{c^2\tau^2}{h^2}$ í þessu dæmi samkvæmt öðru riti, í þetta skipti frá Háskólanum í Münster. Því ef vaxtarþátturinn er stærri en 1, þá magnast villur upp eftir því sem við bútum kerfið niður í smærri bita. En ef þátturinn er minni en 1, þá gerist það ekki, og kerfið helst stöðugt.



Mynd 6: *Töluleg lausn á byljujöfnunni. Efri myndir:* $a^2 = 10$ *og neðri:* $a^2 = -10$. *Vinstri myndir hafa* $c = 1$ *og hægri* $c = 1.5$. *Þar sem* $s = \frac{c^2\tau^2}{h^2}$ *þá er* $s > 1$ *á hægri myndunum og virkar aðferðin þá ekki.*

Helmholtz jafna og bútaaðferð

Skilgreinum opið mengi D með

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L_1,\ 0 < y < L_2\}.$$

Lítum á eftirfarandi jaðargildiverkefni

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = 0, & (x,y) \in D, \\ u(x,0) = w(x), \quad u(x,L_2) = v(x), & 0 \le x \le L_1, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(L_1,y) = 0, & 0 < y < L_2, \end{cases}$$

þar sem Δ er Laplace-virkinn $\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$, og λ^2 er jákvæður fasti. Föll w og v eru gefin neðan.

Við ætlum að leysa verkefnið með bútaaðferð. Veljum N þ.a. við höfum eftirfarandi skiptingu á x-ás:

$$0 = x_1 < \cdots < x_{N+1} = L_1,$$

og h er skilgreint með

$$h = \frac{L_1}{N}.$$

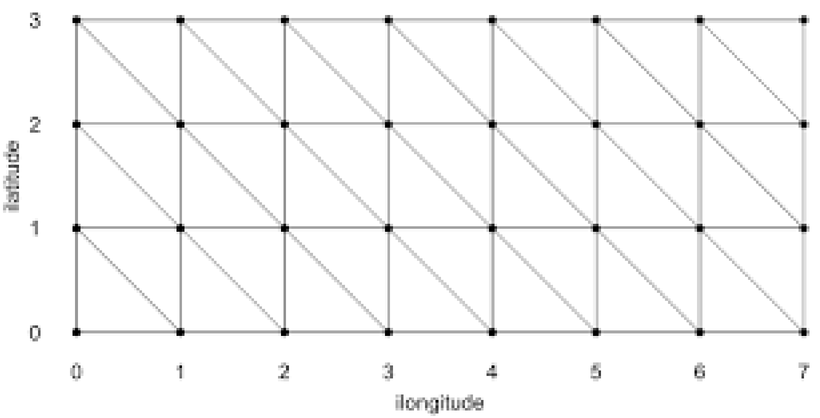
Veljum M þ.a. við höfum eftirfarandi skiptingu á y-ás:

$$0 = y_1 < \cdots < y_{M+1} = L_2,$$

og k er skilgreint með

$$k = \frac{L_2}{M}.$$

Við erum því að nota rétthyrnda þríhyrninga með skammhliðar h og k fyrir svæðið D til að finna nálgunargildi á u með bútaaðferðinni. Eftirfarandi mynd er dæmi um hvernig megi skipta ferhyrningslaga svæði í rétthyrnda þríhyrningsbúta.



I. MATLAB-forrit

Við ætum að skrifa MATLAB-forrit sem reiknar nálgunargildi $\vec{c}$ með því að leysa jöfnuhneppið

$$A\vec{c} = \vec{b}$$

þar sem A er $P \times P$ fylki, með $P = (M+1)(N+1)$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ eru vigrar í $\mathbb{R}^P$. Stakið c_l í lausnarvigrinum $\vec{c}$ er nálgunargildi fyrir $u(x_j, y_p)$.

Við skiptum D í þríhyrninga með skammhliðar h og k. Höfum aftur $\alpha = \sigma(j,p)$ þar sem α er vísir í einvíðri númeringu netsins. Reiknum nálgunarjöfnur fyrir innri punktana eins og sýnidæmi 6.5.4. í EdBook með $q(x) = -\lambda^2$. Þá ákvarðast fylkjastök A af eftirfarandi nálgunarjöfnum fyrir innri punkta:

$$\begin{aligned}
A(\sigma(j,p), \sigma(j,p)) &= \frac{2}{hk}(k^2 + h^2) - \frac{hk\lambda^2}{3} \\
A(\sigma(j,p), \sigma(j+1,p-1)) &= -\frac{hk\lambda^2}{9} \\
A(\sigma(j,p), \sigma(j-1,p+1)) &= -\frac{hk\lambda^2}{9} \\
A(\sigma(j,p), \sigma(j,p-1)) &= -\frac{h}{k} - \frac{hk\lambda^2}{9} \\
A(\sigma(j,p), \sigma(j,p+1)) &= -\frac{h}{k} - \frac{hk\lambda^2}{9} \\
A(\sigma(j,p), \sigma(j-1,p)) &= -\frac{k}{h} - \frac{hk\lambda^2}{9} \\
A(\sigma(j,p), \sigma(j+1,p)) &= -\frac{k}{h} - \frac{hk\lambda^2}{9}
\end{aligned}$$

Hér verður vigurinn $\vec{b} = 0$, þar sem $f(x) = 0$ í samræmi við sýnidæmið.
Skoðum nú punktana sem eru á toppinum og botninum. Þá gildir $u(x,0) = w(x)$ og $u(x, L_2) = v(x)$. Þar með fæst:

$$A(\sigma(j,0), \sigma(j,0)) = 1, \quad A(\sigma(j, M+1), \sigma(j, M+1)) = 1.$$

Hér er $b(\sigma(j,0)) = w(j)$ og $b(\sigma(j, M+1)) = v(j)$
Skoðum nú punktana sem eru á vinstri og hægri jaðrinum (ath. ekki hornin). Þá gildir $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(L_1, y) = 0$. Reiknum nálgunarjöfnur fyrir punktana eins og sýnidæmi 6.5.6. í edbook með $q(x) = -\lambda^2$. Þá ákvarðast fylkjastök A af eftirfarandi nálgunarjöfnum fyrir punktana:

Vinstri hlið:

$$A(\sigma(0,p),\sigma(0,p)) = \frac{1}{hk}(k^2+h^2) - \frac{hk\lambda^2}{6}$$
$$A(\sigma(0,p),\sigma(0,p-1)) = \frac{-h}{2k} - \frac{hk\lambda^2}{18}$$
$$A(\sigma(0,p),\sigma(0+1,p-1)) = -\frac{hk\lambda^2}{9}$$
$$A(\sigma(0,p),\sigma(0+1,p)) = \frac{-k}{h} - \frac{hk\lambda^2}{9}$$
$$A(\sigma(0,p),\sigma(0,p+1)) = \frac{-h}{2k} - \frac{hk\lambda^2}{18}$$

Hægri hlið:

$$A(\sigma(N+1,p),\sigma(N+1,p)) = \frac{1}{hk}(k^2+h^2) - \frac{hk\lambda^2}{6}$$
$$A(\sigma(N+1,p),\sigma(N+1,p-1)) = \frac{-h}{2k} - \frac{hk\lambda^2}{18}$$
$$A(\sigma(N+1,p),\sigma(N,p+1)) = -\frac{hk\lambda^2}{9}$$
$$A(\sigma(N+1,p),\sigma(N,p)) = \frac{-k}{h} - \frac{hk\lambda^2}{9}$$
$$A(\sigma(N+1,p),\sigma(N+1,p+1)) = \frac{-h}{2k} - \frac{hk\lambda^2}{18}$$

Hér er kóðinn til að leysa þetta:

```
function out = w(x,L1)
        %out = 4*x .* (x - L1).^3;
        out = x.^2 - L1
    end
     function out = v(x,L1)
         %out = x.^2 .* (x - L1).^2;
         out = x + L1^2
     end
    function HZ = HelmHoltz(L1, L2, h, k, lambda)
        N = L1/h; % Reiknum fjölda bila fyrir x.
        M = L2/k; % Reiknum fjölda bila fyrir y.
        % Athuga hvort inntak sé rétt.
        if (h ~= L1/N || k ~= L2/M)
            disp("ERROR: Wrong Input");
            return
        end
        % Skilgreinum fylkið A og vigurinn b.
        P = (N+1)*(M+1);
        A = zeros(P,P);
```

```
b = zeros(P,1);

% Vörpun sigma í A
s = @(j,p) j + (p-1)*(N+1);
% Innri punktar fengnir frá jöfnu.
for p=2:M
    for j=2:N
        A(s(j,p), s(j,p))     = (2/(h*k))*(k^2 + h^2) - (h*k*lambda^2)/3;
        A(s(j,p), s(j+1,p-1)) = - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(j,p), s(j-1,p+1)) = - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(j,p), s(j,p-1))   = -h/k - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(j,p), s(j,p+1))   = -h/k - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(j,p), s(j-1,p))   = -k/h - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(j,p), s(j+1,p))   = -k/h - (h*k*lambda^2)/9;
        b(s(j,p)) = 0;
    end
end

% Efri mörk og neðri mörk
for j=1:N+1
    % Neðri mörk
    A(s(j,1),s(j,1)) = 1;
    b(s(j,1)) = Verk_2.w(j*h,L1);
    % Efri mörk
    A(s(j,M+1),s(j,M+1)) = 1;
    b(s(j,M+1)) = Verk_2.v(j*h,L1);
end

% Vinstri mörk
for p=2:M
    A(s(1, p),s(1, p))     = (1/(h*k))*(k^2 + h^2) - (h*k*lambda^2)/6;
    A(s(1, p),s(1, p-1)) = -h/(2*k) - (h*k*lambda^2)/18;
    A(s(1, p),s(2, p-1))   = -(h*k*lambda^2)/9;
    A(s(1, p),s(2, p))     = -k/h - (h*k*lambda^2)/9;
    A(s(1, p),s(1, p+1)) = -h/(2*k) - (h*k*lambda^2)/18;
    b(s(1, p))   = 0;
end

% Hægri mörk
for p=2:M
    A(s(N+1,p), s(N+1,p))     = (1/(h*k))*(k^2 + h^2) - (h*k*lambda^2)/6;
```

```
        A(s(N+1,p), s(N+1,p-1)) = -h/(2*k) - (h*k*lambda^2)/18;
        A(s(N+1,p), s(N,p+1))   = - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(N+1,p), s(N,p))     = -k/h - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(N+1,p), s(N+1,p+1)) = -h/(2*k) - (h*k*lambda^2)/18;
        b(s(N+1,p))      = 0;
    end

    A = sparse(A); % Breytum í sparse fyrir skilvirkni.
    c = A \ b; % Leysum Ac = b jöfnuna.

    % Skilgreinum fylkið HZ og vörpum gildum c -> HZ.
    HZ = zeros(M+1,N+1);
    for i=1:length(c)
        x = mod(i,N+1) + 1;
        y = idivide(int32(i-1),int32(N+1)) + 1;
        HZ(y,x) = c(i);
    end

    % Teiknum graf.
    x = 0:h:L1;
    y = 0:k:L2;
    [X,Y] = meshgrid(x,y);
    mesh(X,Y,HZ);
    surf(X,Y,HZ);
    colormap("parula")
    xlabel("Staðsetning x")
    ylabel("Staðsetning y")
    zlabel("u(x,y)")
    title("Lausn á HelmHoltz jöfnunni fyrir Lambda=" + num2str(lambda))
end
```

II. Prófunarkeyrsla

Nú látum við $\lambda = \frac{1}{2}$, $L_1 = L_2 = 1$, $k = \frac{1}{6}$, $h = \frac{1}{5}$ og veljið w, v eins og hér

$$w(x) = w_0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad v(x) = v_0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Niðurstaðan okkar fyrir $w_0 = 1, \quad v_0 = 5$ er:

```
>> Verk_2.HelmHoltz(1,1,1/5,1/6,1/2)

ans =

    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
    1.7130    1.7114    1.7119    1.7121    1.7123    1.7126
    2.4137    2.4114    2.4120    2.4124    2.4127    2.4131
    3.0974    3.0949    3.0956    3.0960    3.0963    3.0968
    3.7594    3.7572    3.7578    3.7581    3.7585    3.7588
    4.3951    4.3936    4.3941    4.3943    4.3945    4.3947
    5.0000    5.0000    5.0000    5.0000    5.0000    5.0000
```

Mynd 7: *Niðurstöður prófunarkeyrslu*

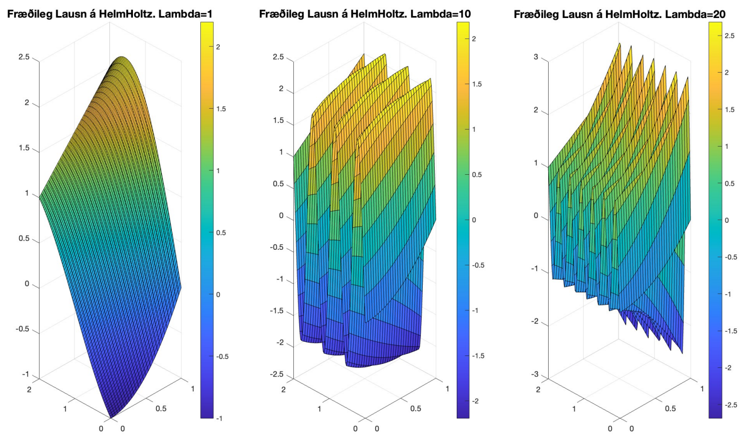
Þetta er sama niðurstaða og lausnin sem var gefin í verkefnalýsingunni.

III. Bein lausn

Nú ætlum við að bera forritið okkar á móti beinni lausn. Veljum föllin w og v eins og í III, setjum $L1 = 1$, $L2 = 2$, $k = h = \frac{1}{20}$, og $\lambda = 1$ og 10. Beina lausnin er gefin með eftirfarandi falli:

$$u_e(x, y) = \frac{v_0 - w_0 \cos(\lambda L_2)}{\sin^2(\lambda L_2)} \cos(\lambda(L_2 - y)) + \frac{w_0 - v_0 \cos(\lambda L_2)}{\sin^2(\lambda L_2)} \cos(\lambda y)$$

Reiknum lausnin u_e með aðskilnaði breytistærða. Mynd (8) sýnir þrívíða mynd af $u(x, y)$ sem við reiknuðum út og af lausninni u_e á tvívíða svæðinu D fyrir $\lambda = 1$ og 10.



Mynd 8: *Fræðileg lausn á Helmholtz jöfnunni fyrir* $\lambda = 1, 10, 20$

Sjáum að með stærra lambda verður bylgjulendin styttri og tíðnin því hærri.

IV. Teikning

Veljum föllin w og v eins og hér:

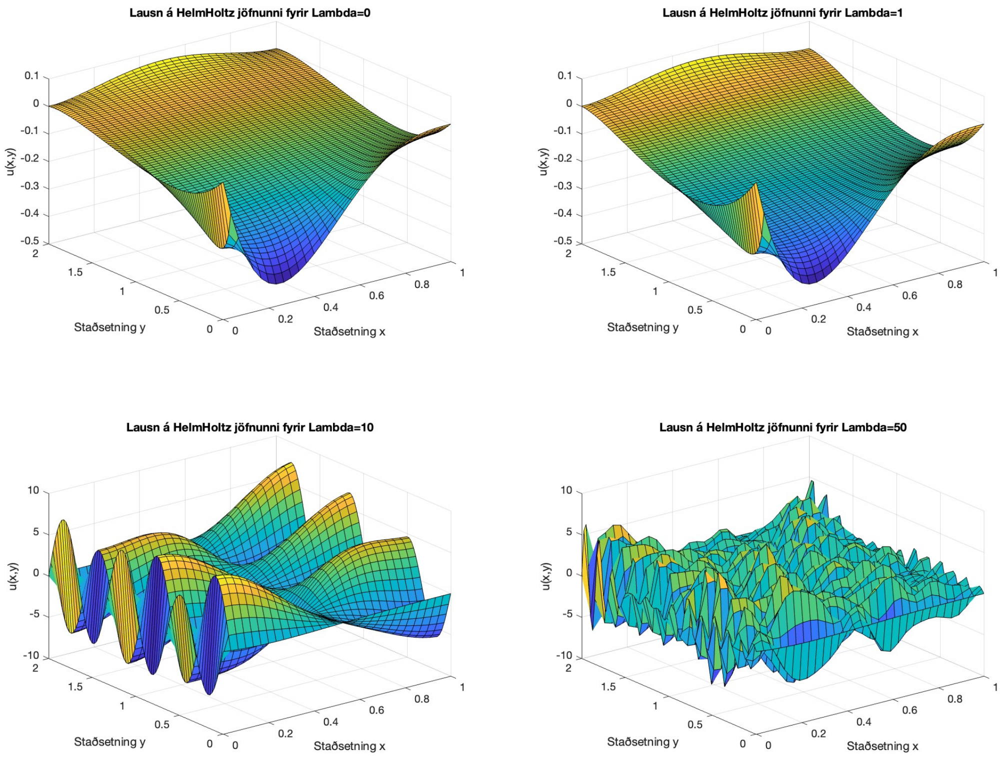
$$w(x) = 4x(x - L_1)^3, \quad 0 \leq x \leq L_1,$$

$$v(x) = x^2(x - L_1)^2, \quad 0 \leq x \leq L_1.$$

Setjum:

$$L_1 = 1, \quad L_2 = 2, \quad h = \frac{1}{30}, \quad k = \frac{1}{40}.$$

Mynd 9 sýnir graf lausnarinnar $u(x, y)$ þegar $\lambda = \{0, 1, 10, 50\}$.

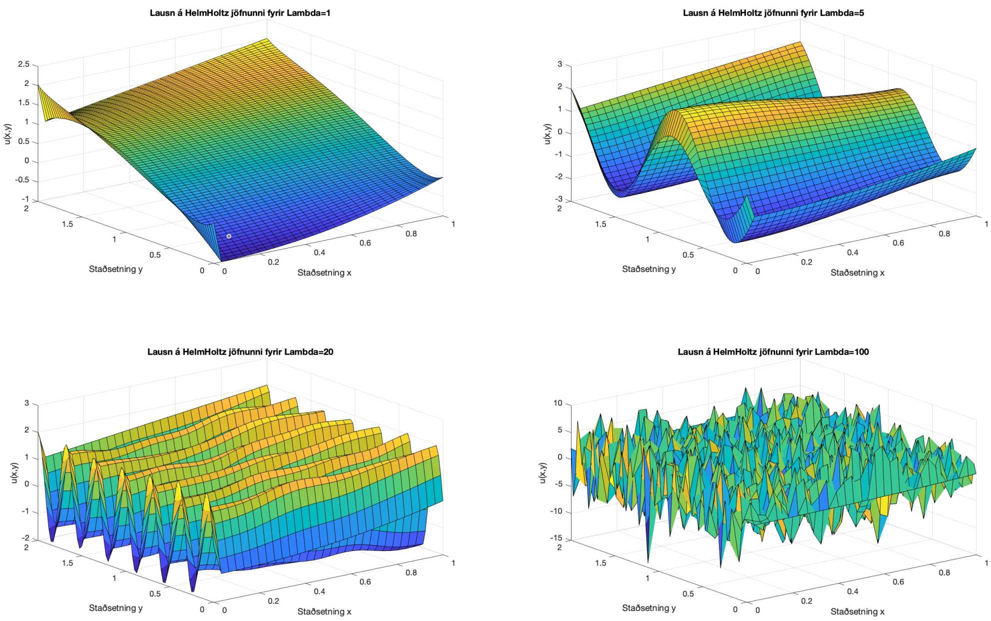


Mynd 9: *Töluleg lausn á HelmHolz jöfnunni með gefnum upphafsföllum og* $\lambda = 1, 5, 20, 50$.

V. Til gamans

Við völdum $\lambda =$, $w = x^2 - L_1$ og $v = x + L_1^2$.

Mynd 10 sýnir þrívíða mynd af $u(x, y)$. Þetta eru sambærilegar niðurstöður og fengust í seinasta lið.



Mynd 10: *Til Gamans, töluleg lausn á HelmHoltz jöfnunni með okkar upphafsföllum og* $\lambda = 1, 5, 20, 100$.

Viðbætur:

Kóðaklasar:

Verkefni 1:

```
classdef Verk_1
    methods (Static)
        % Gefin upphafsskilyrðisföll.
        function y = phi(x)
            y = x * (1 - x);
        end

        function y = psi(x)
            y = x;
        end

        function WEq = WaveEquation(N, M, a)
            % Skilgreinum fastastærðir.
            c = 1;
            L = 1;
            T = 1;

            % Reiknum skrefstærðir fyrir lengd x og tíma t:
            h = L / N; % Skrefstærð í rúmi.
            tau = T / M; % Skrefstærð í tíma.
            s = (c^2 * tau^2) / h^2; % Stærðin s reiknuð skv. formúlu.

            % Skilgreinum fylkið fyrir (x,t) í R^2:
            WEq = zeros(M+1, N+1);

            % Setjum upphafsskilyrði, byrjum á jaðrinum:
            % Jaðarskilyrði fyrir t=0 / alpha = 1:
            for j = 1:N+1 % Fyrir öll x gildi.
                x = (j-1) * h; % Reiknum x gildi frá skrefstærð.
                WEq(1, j) = Verk_1.phi(x); % Gefið skilyrði.
            end

            % Önnur jaðarskilyrði eru nú þegar 0 skv. zeros().

            % Reiknum nú innri punkta:
            % Innri punktar fyrir fyrsta tímaskref fyrir öll x, alpha = 2.
```

```
    for j = 2:N % Sleppum tíma t=0 og
        WEq(2, j) = tau * Verk_1.psi((j-1)*h) + (1-s)*Verk_1.phi((j-1)*h) + ...
                   0.5*s*(Verk_1.phi(j*h) + Verk_1.phi((j-2)*h)) + ...
                   (a^2 * tau^2 * 0.5 * Verk_1.phi((j-1)*h));
    end

    % Restin af innri punktum fyrir bylgjujöfnuna:
    for alpha = 3:M+1 % Sjá alpha=1,2 ofar í kóða.
        for j = 2:N % j=1,j=N+1 er jaðarskilyrði 0 og við sleppum því þá.
            WEq(alpha, j) = 2*(1-s)*WEq(alpha-1, j) - WEq(alpha-2, j) + ...
                           s*(WEq(alpha-1, j+1) + WEq(alpha-1, j-1)) + ...
                           (a^2 * tau^2 * WEq(alpha-1, j));
        end
    end
    % Teiknum graf.
    x = 0:L/N:(L/N)*(N); % Gildisvigur fyrir staðsetningu.
    t = 0:T/M:(T/M)*(M); % Gildisvigur fyrir tíma.

    [X, T] = meshgrid(x, t); % Búum til rist fyrir grafið.
    mesh(X, T, WEq) % Teiknum rist.
    surf(X, T, WEq, 'EdgeColor', 'none', "FaceAlpha",0.75); % Teiknum flöt á rist.
    xlabel('x'); % Merkjum x ás.
    ylabel('t'); % Merkjum y ás (tíma ásinn).
    zlabel('u(x,t)'); % Merkjum z ás (lausnargildi).
    title("Töluleg Lausn á bylgjujöfnu fyrir a^2=" + num2str(a^2), "FontSize", 12);
    colormap("turbo") % Veljum litablöndu.
end

function u = analytical(L, T, c, N, nbilx, nbilt)
    % Stikar
    x = 0:L/nbilx:L;
    % Llinspace(0, L, nbilx); % Vegalengd
    t = 0:T/nbilt:T;
    %linspace(0,T,nbilt); % Tími

    % Upphafsgildi
    phi = @(x) x.*(1-x);
    xi = @(x) x;
    % Skilgreinum fylkið u
    u = zeros(length(t), length(x));
```

```
    for n = 1:N
        % Reiknum sínus stuðla fyrir phi og xi.
        b_nphi = 2/(L) * integral(@(x)phi(x).*sin(n*pi*x/L), 0, L);
        b_nxi = 2/(L) * integral(@(x)xi(x).*sin(n*pi*x/L), 0, L);

        for i = 1:length(t)
            % Fourier röð
            termContribution = (b_nphi * cos(n*pi*c*t(i)/L) + (b_nxi/ (n * pi)) * sin
            u(i,:) = u(i,:) + termContribution;
        end
    end

    % Teiknum graf.
    [X, T] = meshgrid(x, t);
    mesh(X, T, u)
    surf(X, T, u, 'EdgeColor', 'none');
    xlabel('x');
    ylabel('t');
    zlabel('u(x,t)');
    title('Lausn á bylgjujöfnu');
    colormap("turbo")
    colorbar;
end

function u = analytical_modified(L, T, a, N, nbilx, nbilt)
    % Skilgreinum x gildi og t gildi.
    x = 0:L/nbilx:L;
    t = 0:T/nbilt:T;

    % Upphafsgildisföll
    phi = @(x) x.*(1-x);
    xi = @(x) x;
    % Skilgreinum fylkið u (lausnarfylki)
    u = zeros(length(t), length(x));

    for n = 1:N
        % Reiknum sínus stuðla fyrir phi og xi.
        b_nphi = 2/(L) * integral(@(x)phi(x).*sin(n*pi*x/L), 0, L);
        b_npsi= 2/(L) * integral(@(x)xi(x).*sin(n*pi*x/L), 0, L);

        % Nálgum Fourier röð með hlutsummu.
```

```
        for i = 1:length(t)
            term = t(i) * sqrt((n^2 * pi^2)/L^2 - a^2);
            termContribution = (b_nphi * cos(term) + ...
            (b_npsi / sqrt((n^2 * pi^2)/L^2 - a^2)) * sin(term)) * ...
            sin(n*pi*x/L);
            u(i,:) = u(i,:) + termContribution;
        end
    end

    % Teiknum graf.
    [X, T] = meshgrid(x, t);
    mesh(X, T, u)
    surf(X, T, u, 'EdgeColor', 'none');
    xlabel('x');
    ylabel('t');
    zlabel('u(x,t)');
    title('Lausn á bylgjujöfnu');
    colormap("turbo")
    colorbar;
end

function Edt = E_partial_difft(N, M, a)
    T = 1;
    L = 1;
    tau = T/M;
    h = L/N;

    L_idx = N + 1;
    t_idx = 2:M-1; % Þar sem við tökum opna bilið (tau,T)

    WEq = Verk_1.WaveEquation(N, M, a);
    % 1: Hægri mörk
    right_boundary = (WEq(t_idx, L_idx) - WEq(t_idx, L_idx - 1)) / h;
    % 2: Tímaliður hægri mörk
    dt_right = (WEq(t_idx + 1, L_idx) - WEq(t_idx - 1, L_idx)) / (2*tau);
    % 3: Vinstri mörk
    left_boundary = (WEq(t_idx, 1) - WEq(t_idx, 2)) / h;
    % 4: Tímaliður vinstri mörk
    dt_left = (WEq(t_idx + 1, 1) - WEq(t_idx - 1, 1)) / (2*tau);

    % Liður VI
```

```
        % Nálgum summuna með hlutsummu.
        int_u2 = 0;
        for j = 1:N
            int_u2 = int_u2 + (WEq(t_idx-1,j).^2 + WEq(t_idx+1,j).^2);
        end
        int_u2 = (a^2 / (4 * tau)) * int_u2; % Margfölum fasta við.

        % Reiknum hlutafleiðu orkuvarðveislujöfnunnar m.t.t. tíma.
        Edt = int_u2 + (right_boundary .* dt_right) - (left_boundary .* dt_left);

        % Teiknum upp Edt.
        plot(t_idx*(T/M),Edt, "or", "MarkerSize", 7, "MarkerFaceColor", "r")
        title("Tímaafleiða dE/dt fyrir t=(tau,T) a^2=" + num2str(a^2))
        xlabel("Tími t")
        ylabel("dE/dt")
        % Stillum ásana.
        xt = linspace(min(t_idx*(T/M)), max(t_idx*(T/M)), 10);
        yt = linspace(min(Edt), max(Edt), 10);
        xticks(xt);
        yticks(yt);
        grid on;
    end
  end
end
```

Verkefni 2:

```
classdef Verk_2
    methods (Static)
        % gefin upphafsföll.
        function out = w(x,L1)
            out = 4*x .* (x - L1).^3;
            %out = x.^2 - L1 Til gamans verkefni
        end
         function out = v(x,L1)
             out = x.^2 .* (x - L1).^2;
             %out = x + L1^2 Til gamans verkefni
         end
        function HZ = HelmHoltz(L1, L2, h, k, lambda)
            N = L1/h; % Reiknum fjölda bila fyrir x.
            M = L2/k; % Reiknum fjölda bila fyrir y.
```

```
% Athuga hvort inntak sé rétt.
if (h ~= L1/N || k ~= L2/M)
    disp("ERROR: Wrong Input");
    return
end
% Skilgreinum fylkið A og vigurinn b.
P = (N+1)*(M+1);
A = zeros(P,P);
b = zeros(P,1);

% Vörpun sigma í A
s = @(j,p) j + (p-1)*(N+1);
% Innri punktar fengnir frá jöfnu.
for p=2:M
    for j=2:N
        A(s(j,p), s(j,p))     = (2/(h*k))*(k^2 + h^2) - (h*k*lambda^2)/3;
        A(s(j,p), s(j+1,p-1)) = - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(j,p), s(j-1,p+1)) = - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(j,p), s(j,p-1))   = -h/k - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(j,p), s(j,p+1))   = -h/k - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(j,p), s(j-1,p))   = -k/h - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(j,p), s(j+1,p))   = -k/h - (h*k*lambda^2)/9;
        b(s(j,p)) = 0;
    end
end

% Efri mörk og neðri mörk
for j=1:N+1
    % Neðri mörk
    A(s(j,1),s(j,1)) = 1;
    b(s(j,1)) = Verk_2.w(j*h,L1);
    % Efri mörk
    A(s(j,M+1),s(j,M+1)) = 1;
    b(s(j,M+1)) = Verk_2.v(j*h,L1);
end

% Vinstri mörk
for p=2:M
    A(s(1, p),s(1, p))     = (1/(h*k))*(k^2 + h^2) - (h*k*lambda^2)/6;
    A(s(1, p),s(1, p-1)) = -h/(2*k) - (h*k*lambda^2)/18;
    A(s(1, p),s(2, p-1))   = -(h*k*lambda^2)/9;
```

```
        A(s(1, p),s(2, p))     = -k/h - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(1, p),s(1, p+1)) = -h/(2*k) - (h*k*lambda^2)/18;
        b(s(1, p))   = 0;
    end

    % Hægri mörk
    for p=2:M
        A(s(N+1,p), s(N+1,p))     = (1/(h*k))*(k^2 + h^2) - (h*k*lambda^2)/6;
        A(s(N+1,p), s(N+1,p-1)) = -h/(2*k) - (h*k*lambda^2)/18;
        A(s(N+1,p), s(N,p+1))   = - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(N+1,p), s(N,p))     = -k/h - (h*k*lambda^2)/9;
        A(s(N+1,p), s(N+1,p+1)) = -h/(2*k) - (h*k*lambda^2)/18;
        b(s(N+1,p))      = 0;
    end

    A = sparse(A); % Breytum í sparse fyrir skilvirkni.
    c = A \ b; % Leysum Ac = b jöfnuna.

    % Skilgreinum fylkið HZ og vörpum gildum c -> HZ.
    HZ = zeros(M+1,N+1);
    for i=1:length(c)
        x = mod(i,N+1) + 1;
        y = idivide(int32(i-1),int32(N+1)) + 1;
        HZ(y,x) = c(i);
    end

    % Teiknum graf.
    x = 0:h:L1;
    y = 0:k:L2;
    [X,Y] = meshgrid(x,y);
    mesh(X,Y,HZ);
    surf(X,Y,HZ);
    colormap("parula")
    xlabel("Staðsetning x")
    ylabel("Staðsetning y")
    zlabel("u(x,y)")
    title("Lausn á HelmHoltz jöfnunni fyrir Lambda=" + num2str(lambda))
end

function HZa = HelmHoltz_analytical(L1, L2, h, k, lambda)
    N = L1/h;  % Fjöldi bila á x.
```

```
            M = L2/k;  % Fjöldi bila á y.
            x = 0:h:L1;  % x gildi.
            y = 0:k:L2;  % y gildi.

            % Reiknum v_0 og w_0 fyrir öll x gildi.
            v_0 = Verk_2.v(x, L1);  % v_0 (N+1)x1 vigur.
            w_0 = Verk_2.w(x, L1);  % w_0 (N+1)x1 vigur.

            % Reiknum nú jöfnuna í bútum.
            % Byrjum á því að reikna term_1 og term_2.
            term_1 = (v_0 - w_0 .* cos(lambda * L2)) ./ sin(lambda * L2)^2;  % (N+1)x1
            term_2 = (w_0 - v_0 .* cos(lambda * L2)) ./ sin(lambda * L2)^2;  % (N+1)x1

            % Skilgreinum fylkið HZa.
            HZa = zeros(M+1, N+1);

            % Stingum nú lausninni inn fyrir punkta (x,y) í HZa.
            for x_idx = 1:N+1
                HZa(:, x_idx) = term_1(x_idx) * cos(lambda * (L2 - y)) + ...
                term_2(x_idx) * cos(lambda * y);
            end

            % Teiknum graf.
            [X,Y] = meshgrid(x, y);
            surf(X,Y,HZa);
            colormap("parula");
            colorbar();
            view(-45.5,10)
            title("Fræðileg Lausn á HelmHoltz. Lambda=" + ...
            num2str(lambda), "fontsize", 14)
        end
    end
end
```