Практическая работа №2

“Моделирование многоканальной системы с ожиданием”

Тема: Колл-центр
Выполнил: ***Гаджиев Саид М3304***

1. Описание модели

Рассматриваем систему, в которой заявки поступают по пуассоновскому потоку с интенсивностью λ (заявок/час) и обслуживаются экспоненциально с параметром μ (обслуживаний/час) на один канал. Система имеет n каналов, а длина очереди не ограничена. При поступлении заявки, если хотя бы один канал свободен, заявка сразу берётся в обслуживание. Если все n каналов заняты, заявка заходит в очередь до освобождения одного из каналов.

Основные предположения:

- Прибывающие заявки независимы.
- Время между поступлениями и время обслуживания распределено экспоненциально.
- Система находится в устойчивом состоянии, если коэффициент загрузки ρ = λ/(n·μ) < 1.

В нашем примере для колл-центра выбраны следующие исходные данные:

- **λ = 10 заявок/час**
- **μ = 3 заявки/час**
- **n = 4 канала**

2. Формулы для расчётов

1. **Интенсивность загрузки системы (ρ):**

$$\rho = \frac{\lambda}{n \cdot \mu}$$

Для устойчивости системы требуется ρ<1.

2. **Вероятность простоя системы (P_0):**

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n! \cdot (1-\rho)}\right]^{-1}$$

3. **Вероятность ожидания (Pw):**

$$P_w = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n! \cdot (1-\rho)} \cdot P_0$$

4. **Среднее число заявок в очереди (Lq):**

$$L_q = \frac{P_w \cdot \rho}{1-\rho}$$

5. **Среднее время ожидания в очереди (Wq):**

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

6. **Среднее время пребывания заявки в системе (W):**

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

7. **Коэффициент загрузки системы:**
   Это непосредственно ρ.

3. Расчёты для исходных данных (λ = 10, μ = 3, n = 4)

1. **Вычислим загрузку:**

$$\rho = \frac{10}{4 \cdot 3} = \frac{10}{12} \approx 0.833$$

2. **Промежуточная величина:**

$$a = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{3} \approx 3.333$$

3. **Вычислим сумму для P_0:**

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{a^k}{k!} = 1 + 3.333 + \frac{3.333^2}{2} + \frac{3.333^2}{6} \approx 1 + 3.333 + 5.556 + 6.173 \approx 16.062$$

4. **Вычислим последний член:**

$$\frac{a^4}{4! \cdot (1-\rho)} \approx \frac{123.456}{24 \cdot 0.167} \approx 30.864$$

5. **Вероятность простоя:**

$$P_0 = \frac{1}{16.062+30.864} \approx \frac{1}{46.926} \approx 0.021$$

6. **Вероятность ожидания:**

$$P_w \approx 30.864 \cdot 0.021 \approx 0.657$$

7. **Среднее число заявок в очереди:**

$$L_q \approx \frac{0.657 \cdot 0.833}{0.167} \approx 3.285$$

8. **Среднее время ожидания:**

$$W_q \approx \frac{3.285}{10} \approx 0.328 \text{ часа} \approx 19.7 \text{ минут}$$

9. **Среднее время пребывания в системе:**

$$W = 0.328 + \frac{1}{3} \approx 0.328 + 0.333 \approx 0.662 \text{ часа} \approx 39.7 \text{ минут}$$

10. **Коэффициент загрузки:**

$$p \approx 0.833$$

4. Анализ изменения характеристик

Для анализа влияния количества каналов n и интенсивности обслуживания μ можно варьировать эти параметры и наблюдать, как изменяются W_q (среднее время ожидания) и L_q (среднее число заявок в очереди).

Представленный ниже код: Вычисляет показатели для заданных параметров. Строит графики зависимости среднего времени ожидания (Wq) и длины очереди (Lq) от количества каналов. Анализирует влияние изменения интенсивности обслуживания (μ).

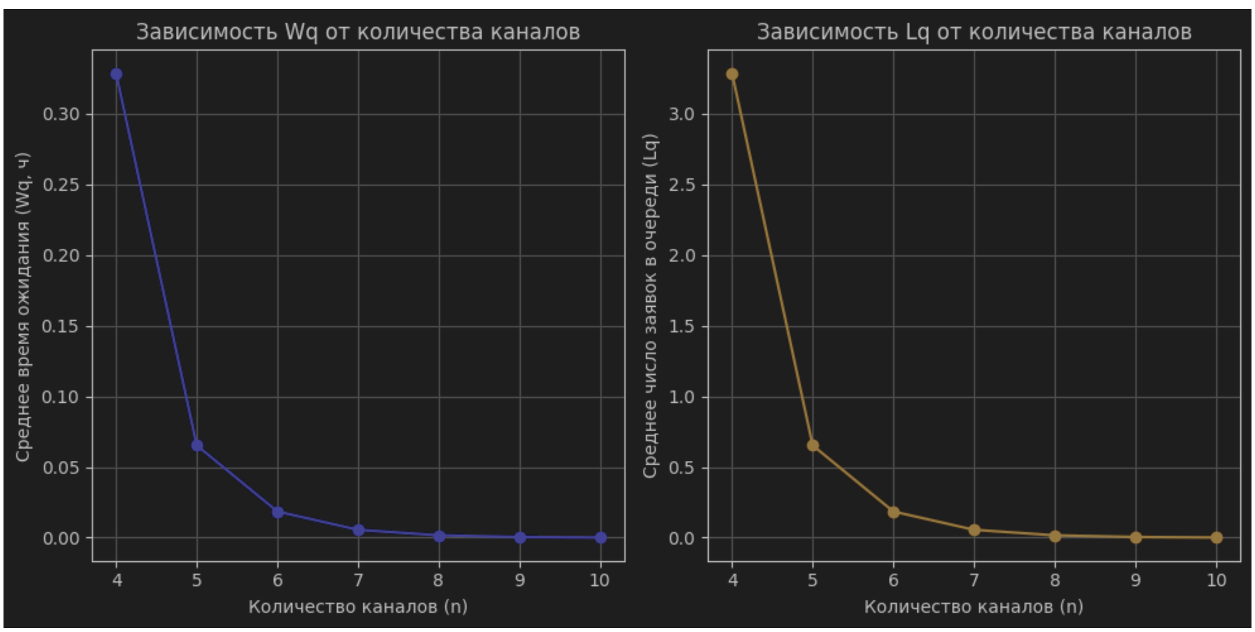
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

def mmn_queue_metrics(lam, mu, n):
    """
    Расчет характеристик многоканальной системы M/M/n.

    lam : интенсивность входящего потока заявок (λ)
    mu  : интенсивность обслуживания на один канал (μ)
    n   : количество каналов
    """
    # Коэффициент загрузки системы
    rho = lam / (n * mu)
```

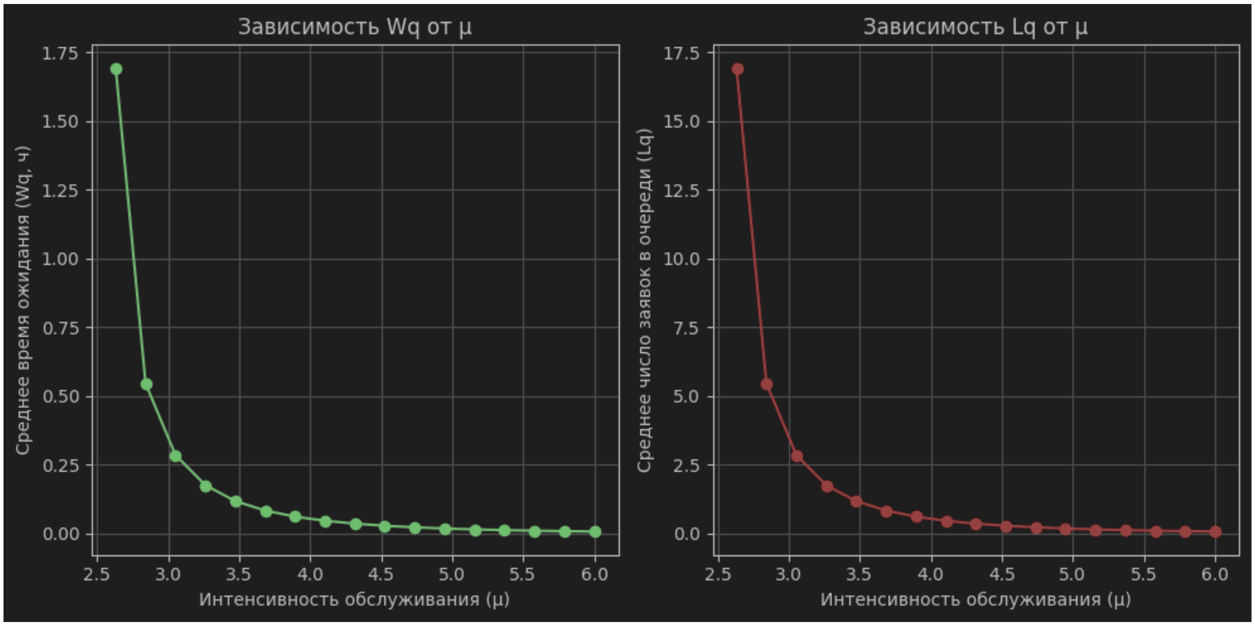
```python
    if rho >= 1:
        print("Система неустойчива (ρ >= 1)")
        return None
    # Вычисление P0
    sum_terms = sum([(lam/mu)**k / math.factorial(k) for k in 
range(n)])
    term_n = (lam/mu)**n / (math.factorial(n) * (1 - rho))
    P0 = 1.0 / (sum_terms + term_n)
    # Вероятность того, что заявка будет ждать в очереди
    P_wait = term_n * P0
    # Среднее число заявок в очереди
    Lq = (P_wait * rho) / (1 - rho)
    # Среднее время ожидания заявки в очереди
    Wq = Lq / lam
    # Среднее время пребывания заявки в системе
    W = Wq + 1/mu
    return P0, P_wait, Lq, Wq, W, rho

# Исходные параметры
lam = 10  # интенсивность входящего потока заявок (заявок/час)
mu = 3    # интенсивность обслуживания (заявок/час на канал)
n = 4     # количество каналов

# Расчет характеристик системы
results = mmn_queue_metrics(lam, mu, n)
if results:
    P0, P_wait, Lq, Wq, W, rho = results
    print("Основные характеристики системы:")
    print(f"P0 (вероятность простоя)             = {P0:.4f}")
    print(f"P(wait) (вероятность ожидания)         = {P_wait:.4f}")
    print(f"Lq (среднее число заявок в очереди)    = {Lq:.4f}")
    print(f"Wq (среднее время ожидания, ч)         = {Wq:.4f}")
    print(f"W  (среднее время в системе, ч)        = {W:.4f}")
    print(f"Коэффициент загрузки (ρ)               = {rho:.4f}")

# Построение графиков зависимости Wq и Lq от количества каналов n
n_values = np.arange(1, 11)
Wq_values = []
Lq_values = []
for n_val in n_values:
    metrics = mmn_queue_metrics(lam, mu, n_val)
    if metrics is not None:
        _, P_wait_val, Lq_val, Wq_val, _, _ = metrics
        Wq_values.append(Wq_val)
        Lq_values.append(Lq_val)
```

```python
    else:
        Wq_values.append(np.nan)
        Lq_values.append(np.nan)

plt.figure(figsize=(10,5))

plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(n_values, Wq_values, marker='o', linestyle='-',
color='blue')
plt.xlabel("Количество каналов (n)")
plt.ylabel("Среднее время ожидания (Wq, ч)")
plt.title("Зависимость Wq от количества каналов")
plt.grid(True)

plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(n_values, Lq_values, marker='o', linestyle='-',
color='orange')
plt.xlabel("Количество каналов (n)")
plt.ylabel("Среднее число заявок в очереди (Lq)")
plt.title("Зависимость Lq от количества каналов")
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()

# Анализ влияния интенсивности обслуживания mu (при n = 4)
mu_values = np.linspace(2, 6, 20)
Wq_mu_values = []
Lq_mu_values = []
for mu_val in mu_values:
    metrics = mmn_queue_metrics(lam, mu_val, n)
    if metrics is not None:
        _, P_wait_val, Lq_val, Wq_val, _, _ = metrics
        Wq_mu_values.append(Wq_val)
        Lq_mu_values.append(Lq_val)
    else:
        Wq_mu_values.append(np.nan)
        Lq_mu_values.append(np.nan)

plt.figure(figsize=(10,5))

plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(mu_values, Wq_mu_values, marker='o', linestyle='-',
color='green')
plt.xlabel("Интенсивность обслуживания (μ)")
```

```python
plt.ylabel("Среднее время ожидания (Wq, ч)")
plt.title("Зависимость Wq от μ")
plt.grid(True)

plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(mu_values, Lq_mu_values, marker='o', linestyle='-',
color='red')
plt.xlabel("Интенсивность обслуживания (μ)")
plt.ylabel("Среднее число заявок в очереди (Lq)")
plt.title("Зависимость Lq от μ")
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
Основные характеристики системы:
P0 (вероятность простоя)            = 0.0213
P(wait) (вероятность ожидания)        = 0.6577
Lq (среднее число заявок в очереди)    = 3.2886
Wq (среднее время ожидания, ч)        = 0.3289
W  (среднее время в системе, ч)       = 0.6622
Коэффициент загрузки (ρ)              = 0.8333
```





5. Анализ результатов и рекомендации

Анализ при фиксированном μ (3 заявки/час):

- При увеличении количества каналов (n) наблюдается уменьшение как среднего времени ожидания W_q, так и среднего числа заявок в очереди L_q. Это свидетельствует о том, что добавление дополнительных операторов (каналов) способствует снижению задержек и уменьшению очереди, что особенно важно в условиях высокой загрузки (ρ ≈ 0.833).

Анализ при фиксированном n (4 канала):

- Увеличение интенсивности обслуживания (μ) приводит к снижению W_q и L_q. Более быстрый сервис уменьшает вероятность образования длинных очередей и времени ожидания, улучшая общую эффективность системы.

Возможные рекомендации по оптимизации системы:

- Увеличение числа каналов: При росте интенсивности входящего потока (λ) целесообразно добавить дополнительные каналы, чтобы избежать переполнения очереди.
- Улучшение качества обслуживания: Повышение скорости обслуживания (увеличение μ) позволяет снизить задержки и повысить удовлетворённость клиентов.
- Балансировка затрат и эффективности: Оптимальное число операторов должно обеспечивать требуемый уровень сервиса без избыточных затрат.

Заключение

Выполненное моделирование позволяет оценить ключевые характеристики многоканальной системы с ожиданием, выявить влияние изменения числа каналов и интенсивности обслуживания на показатели системы.