Университет ИТМО
Физико-технический мегафакультет
Физический факультет

Группа М3304	К работе допущен
Студент Гаджиев Саид	Работа выполнена 1.12.2024
Преподаватель Шоев В.И.	Отчет принят

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №5 (IBM.2)

Управляемые гейты и Квантовые алгоритмы

1. Цель работы.

   Самостоятельная разработка квантовых схем. Получение навыков применения управляемых 2-х и 3-х кубитных гейтов и создания квантовых алгоритмов на их основе.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

   1. Построить многокубитные квантовые цепи
   2. Зарегистрировать результаты моделирования цепочек
   3. Сравнить данные моделирований с теоретическими распределениями

3. Объект исследования.

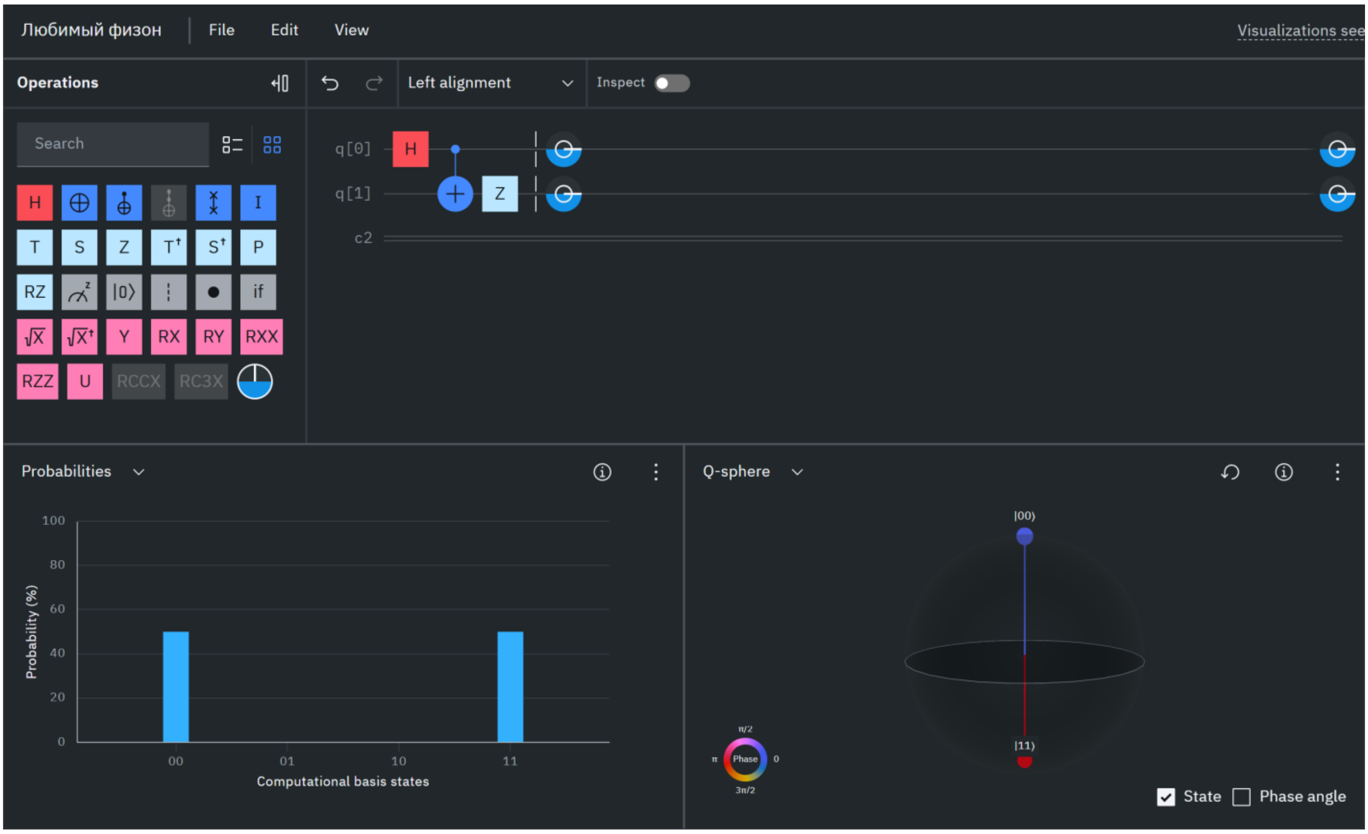
   Квантовый компьютер, распределение вероятности однокубитных и многокубитных цепей.

4. Метод экспериментального исследования.

   Внедрение вентилей в построение схем, проведение моделирований.

5. Выполнение упражнения №3:

1. Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из двух кубитов $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$. Выполните симуляцию работы схемы. Получите математическое обоснование результата.



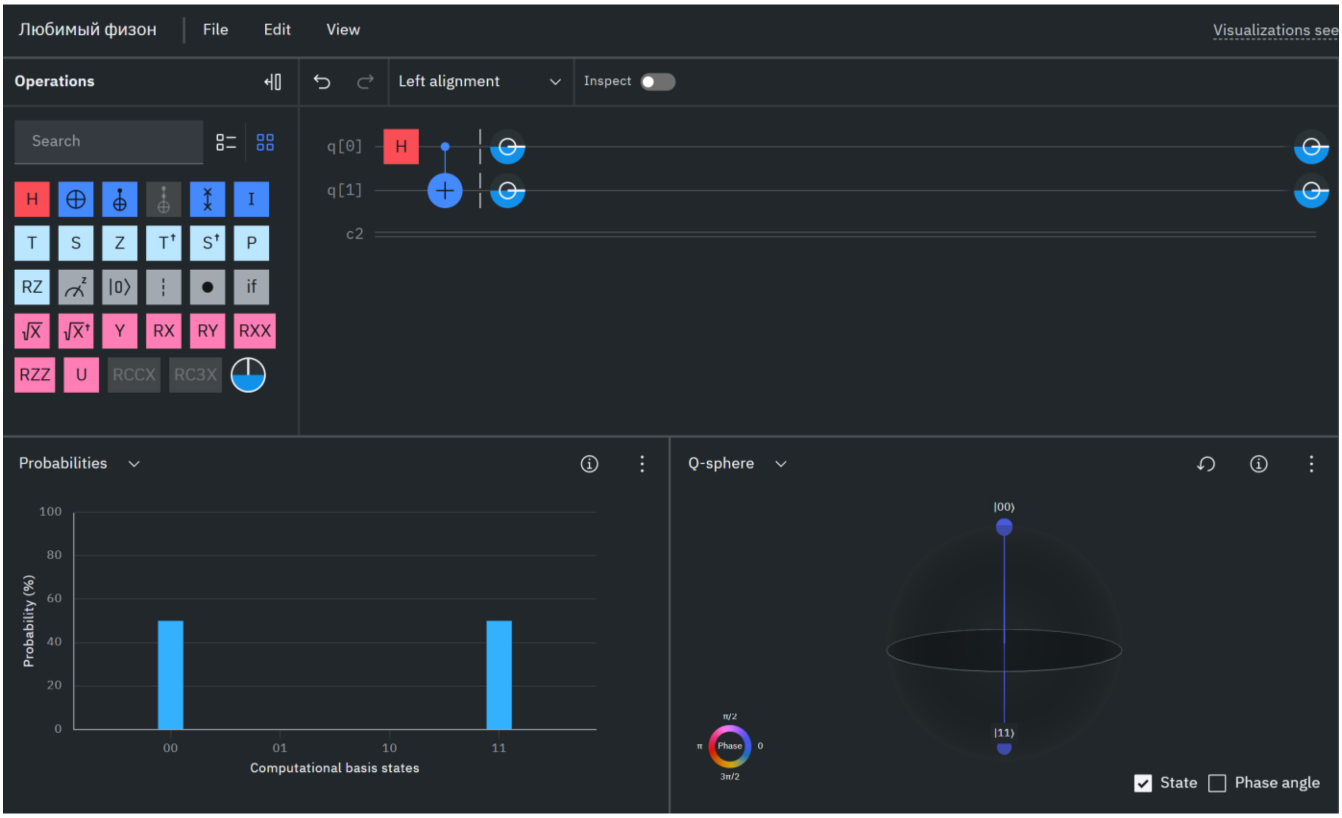
	Frequency (quantity)	
Shots	$\|11\rangle$	$\|00\rangle$
1024	508	516

	Frequency (out of 1)	
Shots	$\|11\rangle$	$\|00\rangle$
1024	0.4960	0.5039

Использован квантовый регистр из двух кубитов и классический регистр из двух битов. Применен Hadamard-гейт к первому кубиту для создания суперпозиции $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Применен CNOT-гейт, чтобы связать состояния первого и второго кубитов. Это создает запутанное состояние $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.

Применен Z-гейт ко второму кубиту, чтобы изменить фазу $|11\rangle$, получив $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$.

2. Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из двух кубитов $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(|00\rangle+|11\rangle)$. Выполните симуляцию работы схемы. Получите математическое обоснование результата



	Frequency (quantity)	
Shots	$\|11\rangle$	$\|00\rangle$
1024	490	534

	Frequency (out of 1)	
Shots	$\|11\rangle$	$\|00\rangle$
1024	0.4785	0.5214

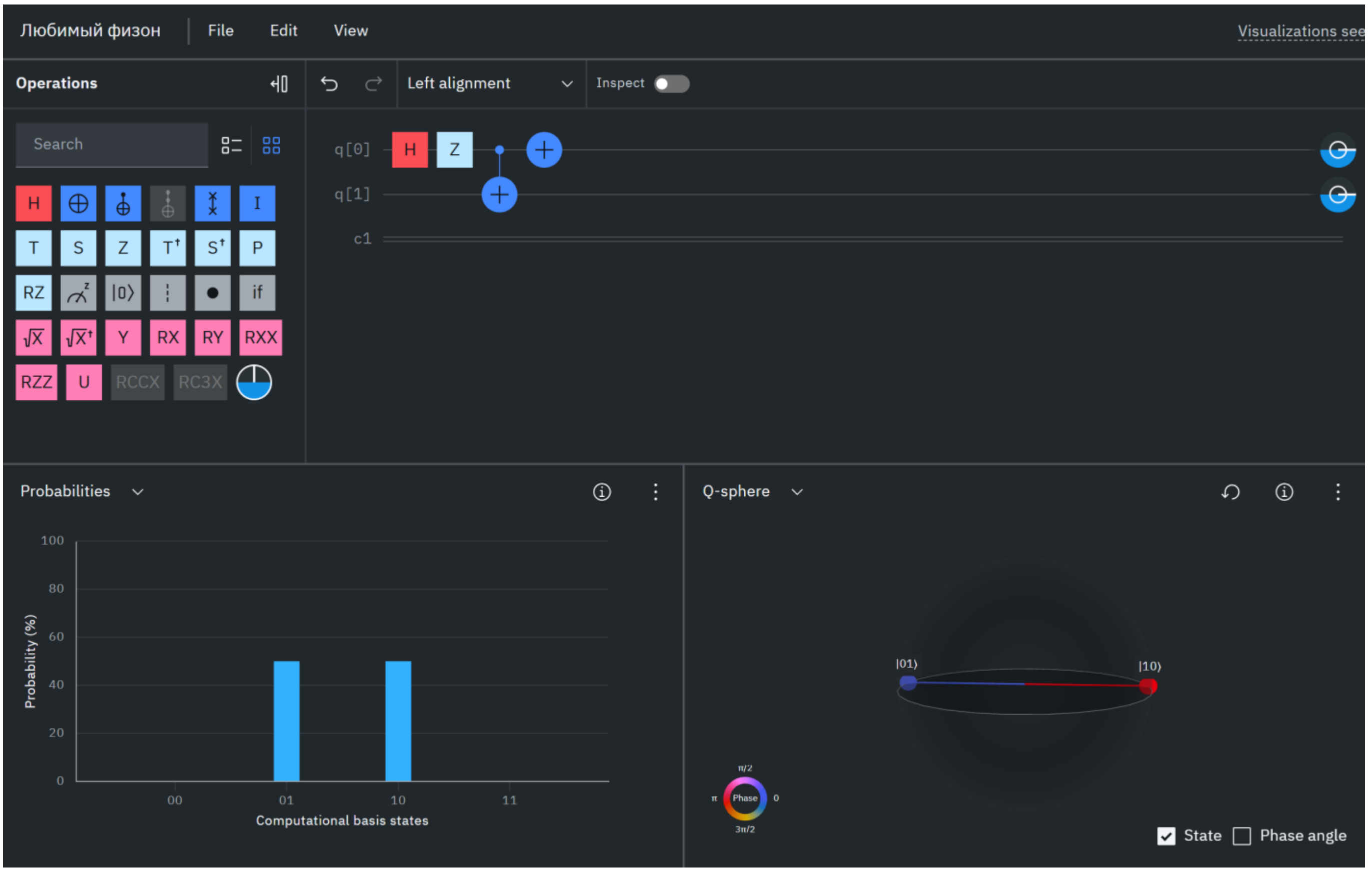
H-гейт на первом кубите переводит его в суперпозицию:

$$|0\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

CNOT-гейт, где первый кубит — управляющий, а второй — управляемый, переносит состояние в:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

3. Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из двух кубитов $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(|01\rangle - |10\rangle)$. Выполните симуляцию работы схемы. Получите математическое обоснование результата



	Frequency (quantity)	
Shots	|01⟩	|10⟩
1024	520	504

	Frequency (out of 1)	
Shots	|01⟩	|10⟩
1024	0.5078	0.4922

1. H-гейт (Hadamard) на q[0]

Переводит первый кубит q[0] из состояния $|0\rangle$ в суперпозицию:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

После этого состояние всей системы:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

2. Z-гейт на q[0]

Применение Z-гейта к первому кубиту q[0] изменяет фазу $|1\rangle$ на -1:

$$Z|0\rangle = |0\rangle, \quad Z|1\rangle = -|1\rangle$$

Таким образом, состояние превращается в:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle)$$

3. CNOT-гейт

q[0] является управляющим кубитом, а q[1] — управляемым. Применение CNOT переворачивает второй кубит q[1], если q[0] находится в состоянии $|1\rangle$:

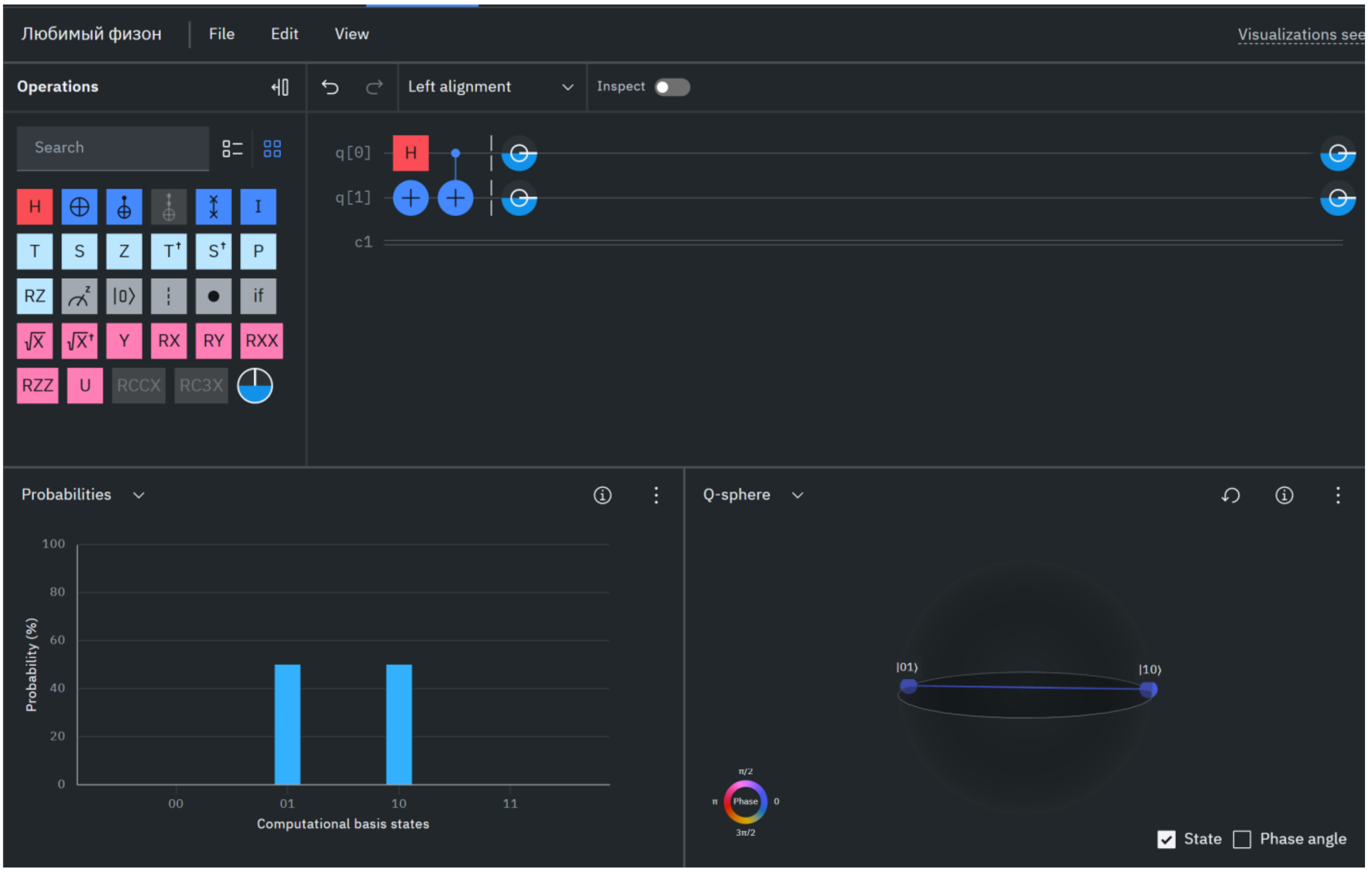
$$CNOT(|00\rangle) = |00\rangle$$

$$CNOT(|10\rangle) = |11\rangle$$

После применения CNOT состояние системы будет:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

4. Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из двух кубитов $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Выполните симуляцию работы схемы. Получите математическое обоснование результата



	Frequency (quantity)	
Shots	$\|01\rangle$	$\|10\rangle$
1024	510	514

	Frequency (out of 1)	
Shots	$\|01\rangle$	$\|10\rangle$
1024	0.4980	0.5019

1. Начальное состояние: $|q_0, q_1\rangle = |0\rangle|1\rangle = |01\rangle$
2. После Hadamard-гейта на q[0]]:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

Система принимает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle.$$

После раскрытия тензорного произведения:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle).$$

3. После CNOT-гейта (контрольный q[0], управляемый q[1]):
   - $|01\rangle$ остаётся неизменным
   - $|11\rangle$ преобразуется в $|10\rangle$

Таким образом, состояние становится:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle).$$

5. Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из двух кубитов в соответствии с вариантами задания приведенными в таблице 2. Выполните симуляцию работы схемы. Получите математическое обоснование результата.

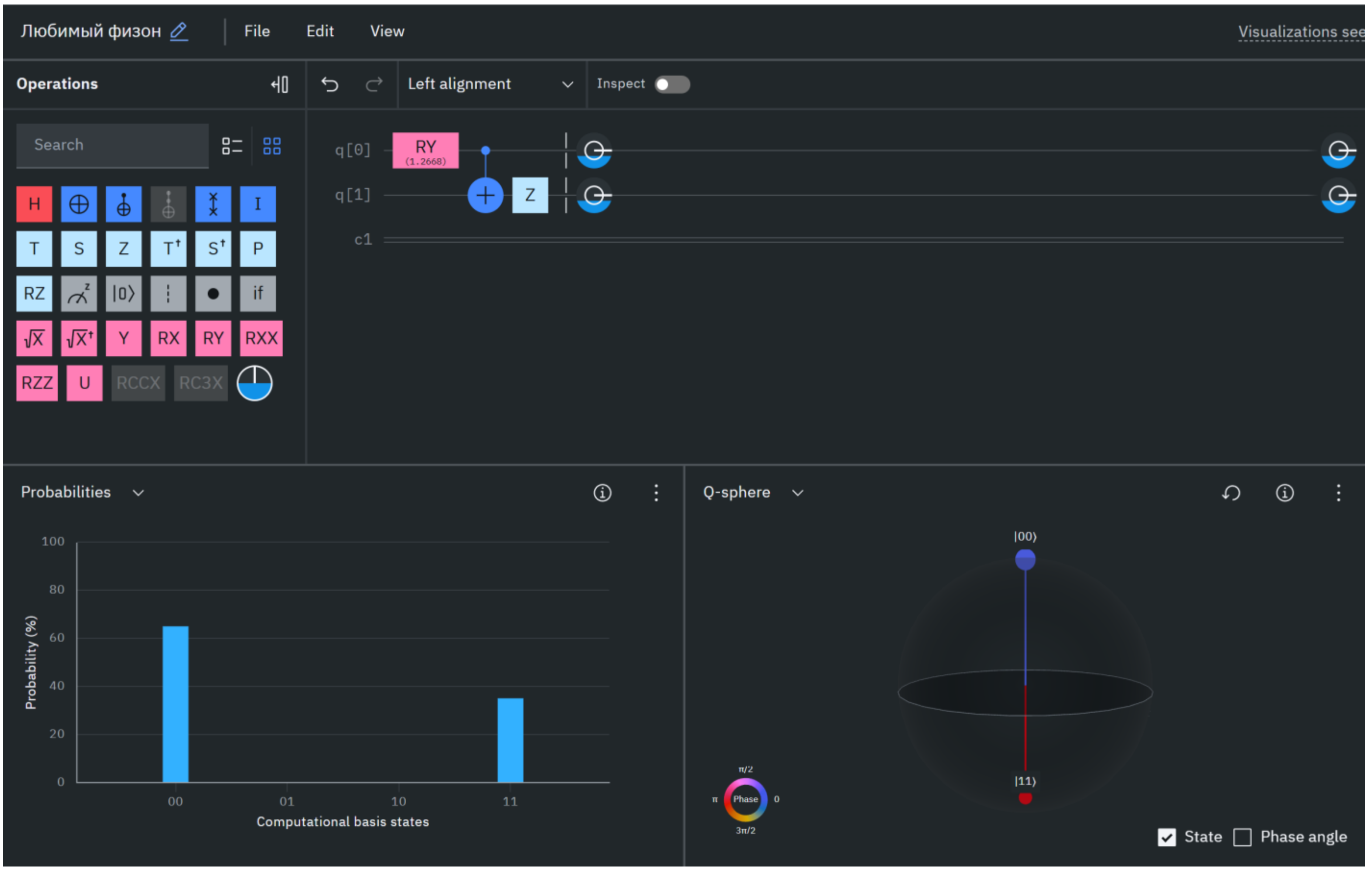
Вариант №7:

Состояние кубитов: $\boldsymbol{a\,|\,00\rangle\ -\ b\,|\,11\rangle}$

$\boldsymbol{|a|^2 = 65}$

$\boldsymbol{|b|^2 = 35}$

$$\theta = 2arccos(\sqrt{0.65}) \approx\ 1{,}2668 \text{ радиан}$$



	Frequency (quantity)	
Shots	|00⟩	|11⟩
1024	674	350

	Frequency (out of 1)	
Shots	|00⟩	|11⟩
1024	0.6582	0.3418

1. **RY-гейт** на первом кубите:

$$RY(\theta)|0\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle.$$

Параметр θ подбирается так, чтобы $cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0.65$ и $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0.35$ Используем:

$$\theta = 2\arccos(\sqrt{0.65}).$$

После применения RY на первом кубите получаем:

$$\psi_1 = a|0\rangle + b|1\rangle.$$

2. **CNOT-гейт**:
   Если первый кубит в состоянии $|1\rangle$, второй кубит также переходит в состояние $|1\rangle$.
   Результат:
$$\psi_2 = a|00\rangle + b|11\rangle.$$

3. **Z-гейт на втором кубите**:
   Знак у компоненты $|11\rangle$ меняется на минус:
$$\psi = a|00\rangle - b|11\rangle.$$

6. Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из трех кубитов $a|010\rangle + b|111\rangle$ в соответствии с вариантами заданий, приведенными в таблице 2. Выполните симуляцию работы схемы. Получите математическое обоснование результата.

Вариант №7:

Состояние кубитов: $\boldsymbol{a} \mid \mathbf{00}\rangle - \boldsymbol{b} \mid \mathbf{11}\rangle$

$|\boldsymbol{a}|^2 = \mathbf{65}$

$|\boldsymbol{b}|^2 = \mathbf{35}$

$$\theta = 2arccos(\sqrt{0.65}) \approx 1{,}2668 \text{ радиан}$$

	Frequency (quantity)	
Shots	$\|010\rangle$	$\|111\rangle$
1024	666	358

	Frequency (out of 1)	
Shots	$\|010\rangle$	$\|111\rangle$
1024	0.6504	0.3496

Мы начинаем с трех кубитов, все из которых изначально находятся в состоянии $|0\rangle$. То есть, изначальное состояние системы:

$$|\psi_{\text{init}}\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle = |000\rangle.$$

На первом кубите (q[0]) применяется RY(θ)-гейт с углом θ = 1.2668. Этот гейт изменяет состояние первого кубита с |0⟩ в суперпозицию между состояниями |0⟩ и |1⟩. Согласно формуле для RY-гейта:

$$RY(\theta)|0\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle.$$

Подставляем значение θ = 1.2668:

$$RY(1.2668)|0\rangle = \sqrt{0.65}|0\rangle + \sqrt{0.35}|1\rangle.$$

Таким образом, после применения RY-гейта состояние первого кубита q[0] будет равно:

$$|\psi_0\rangle = \sqrt{0.65}|0\rangle + \sqrt{0.35}|1\rangle.$$

После этого наше общее состояние будет:

$$|\psi\rangle = (\sqrt{0.65}|0\rangle + \sqrt{0.35}|1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle = \sqrt{0.65}|0,0,0\rangle + \sqrt{0.35}|1,0,0\rangle.$$

Затем применяется X-гейт (гейт NOT) на втором кубите q[1]. X-гейт изменяет состояние |0⟩ на |1⟩, так что:

$$X|0\rangle = |1\rangle.$$

Таким образом, состояние второго кубита q[1] становится |1⟩, и система переходит в состояние:

$$|\psi\rangle = \sqrt{0.65}|0,1,0\rangle + \sqrt{0.35}|1,1,0\rangle.$$

После этого применяется CNOT-гейт между кубитами q[0] (контрольный) и q[2] (цель). Этот гейт изменяет состояние целевого кубита q[2] в зависимости от состояния контрольного кубита q[0]:

Если q[0]=|0⟩, состояние q[2] не изменяется.
Если q[0]=|1⟩, состояние q[2]] инвертируется.

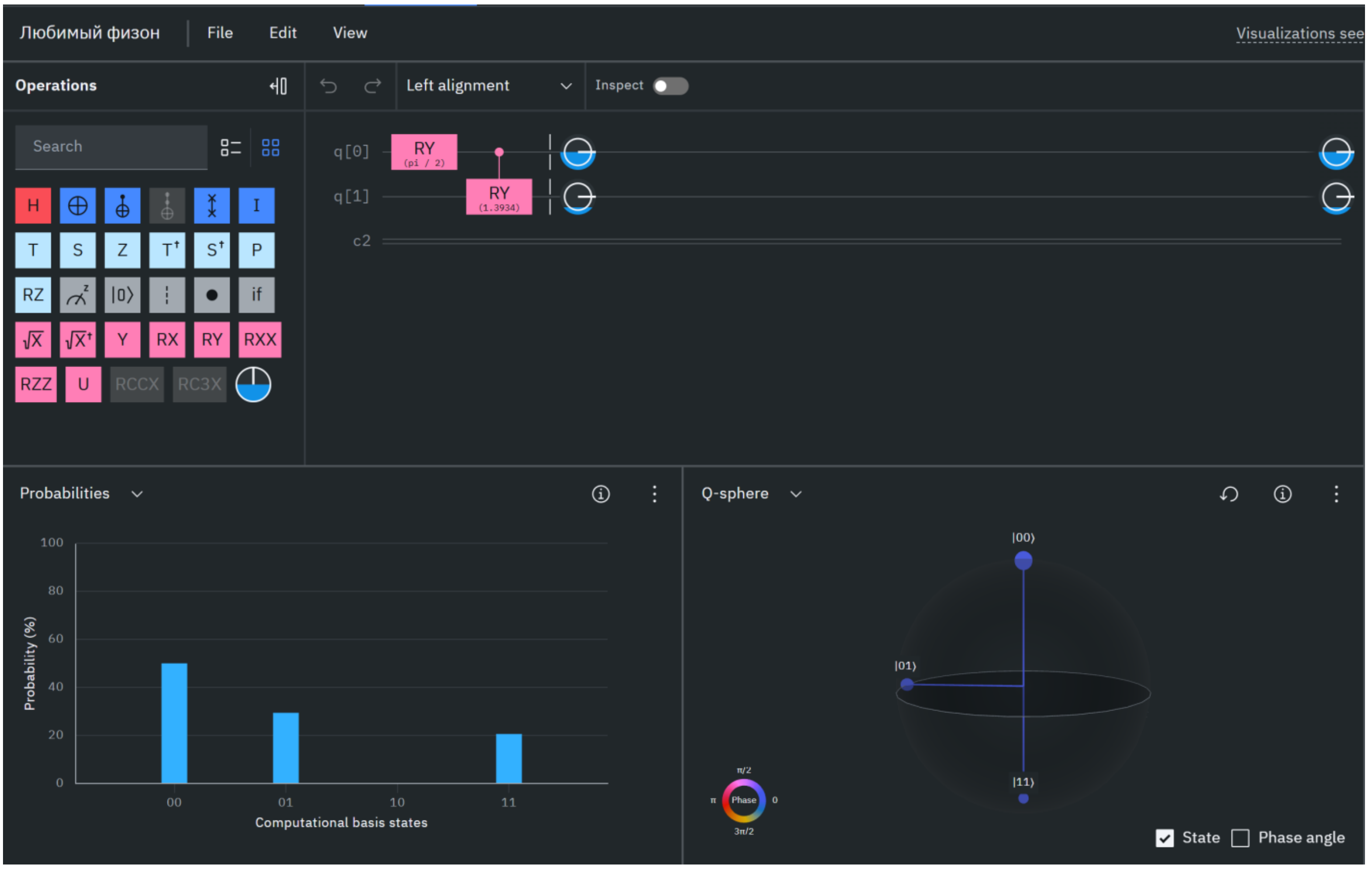
После применения CNOT, если первый кубит q[0] равен |1⟩, состояние третьего кубита q[2] изменяется на |1⟩. Таким образом, получаем:

$$|\psi\rangle = \sqrt{0.65}|0,1,0\rangle + \sqrt{0.35}|1,1,1\rangle.$$

7. Соберите схему для получения запутанного состояния квантовой системы из двух кубитов $\alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|11\rangle$, в соответствии с вариантами заданий, 49 приведенными в таблице 3. Выполните симуляцию работы схемы. Получите математическое обоснование результата.

Вариант №7:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{|\alpha|^2 = 50} \\ \boldsymbol{|\beta|^2 = 35} \\ \boldsymbol{|\gamma|^2 = 15} \end{array}\right\} \text{sum} = 100$$



	Frequency (quantity)		
Shots	|01⟩	|11⟩	|00⟩
1024	333	216	475
	Frequency (out of 1)		
Shots	|01⟩	|11⟩	|00⟩
1024	0.3252	0.2109	0.4639

Амплитуды α, β, γ связаны с вероятностями через:

$$|\alpha|^2 = 0.5, \quad |\beta|^2 = 0.35, \quad |\gamma|^2 = 0.15.$$

Соответствующие **амплитуды** (корни из вероятностей):

$$\alpha = \sqrt{0.5}, \quad \beta = \sqrt{0.35}, \quad \gamma = \sqrt{0.15}.$$

Численные значения:

$$\alpha \approx 0.7071, \quad \beta \approx 0.5916, \quad \gamma \approx 0.3873.$$

В начальный момент кубиты находятся в состоянии |00⟩:

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle.$$

Сначала **RY-гейт** применяется к первому кубиту q[0], который поворачивает его на угол θ_2 и приводит к состоянию:

$$\mathrm{RY}(\theta_2)|0\rangle = \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)|1\rangle.$$

Параметр θ_2 подбирается так, чтобы амплитуда |00⟩ равнялась α:

$$\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) = \alpha \implies \theta_2 = 2\arccos(\alpha).$$

Подставляя α=√0.5:

$$\theta_2 = 2\arccos(\sqrt{0.5}) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Затем на кубит q[1] применяется **управляемый RY-гейт** с параметром θ_1, который действует, если первый кубит находится в состоянии |1⟩. Этот гейт поворачивает второй кубит, распределяя амплитуды между |01⟩ и |11⟩. Гейт задается как:

$$\mathrm{CRY}(\theta_1)|0\rangle = |0\rangle, \quad \mathrm{CRY}(\theta_1)|1\rangle = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)|1\rangle.$$

Угол θ_1 выбирается так, чтобы амплитуда |01⟩ была равна β, а амплитуда |11⟩ была равна γ. Условие:

$$\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}, \quad \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}.$$

Находим $\sqrt{\beta^2+\gamma^2}$:

$$\sqrt{\beta^2+\gamma^2} = \sqrt{0.35+0.15} = \sqrt{0.5}.$$

Тогда:

$$\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{\gamma}{\sqrt{0.5}} = \frac{0.3873}{0.7071} \approx 0.5477,$$

$$\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{\beta}{\sqrt{0.5}} = \frac{0.5916}{0.7071} \approx 0.8321.$$

Из этих значений находим угол θ_1:

$$\frac{\theta_1}{2} = \arcsin(0.5477) \implies \theta_1 \approx 2 \cdot 0.575 \approx 1.15\,\text{рад}.$$

После применения RY и CRY гейтов схема приводит к состоянию:

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|11\rangle.$$

С подставленными значениями амплитуд:

$$|\psi\rangle \approx 0.7071|00\rangle + 0.5916|01\rangle + 0.3873|11\rangle.$$

После измерения кубитов в базисе {|00⟩, |01⟩, |10⟩, |11⟩}, распределение вероятностей будет приближаться к:

$$P(|00\rangle) \approx 0.5,$$

$$P(|01\rangle) \approx 0.35,$$

$$P(|11\rangle) \approx 0.15,$$

$$P(|10\rangle) = 0.$$

6. Выполнение упражнения №4:

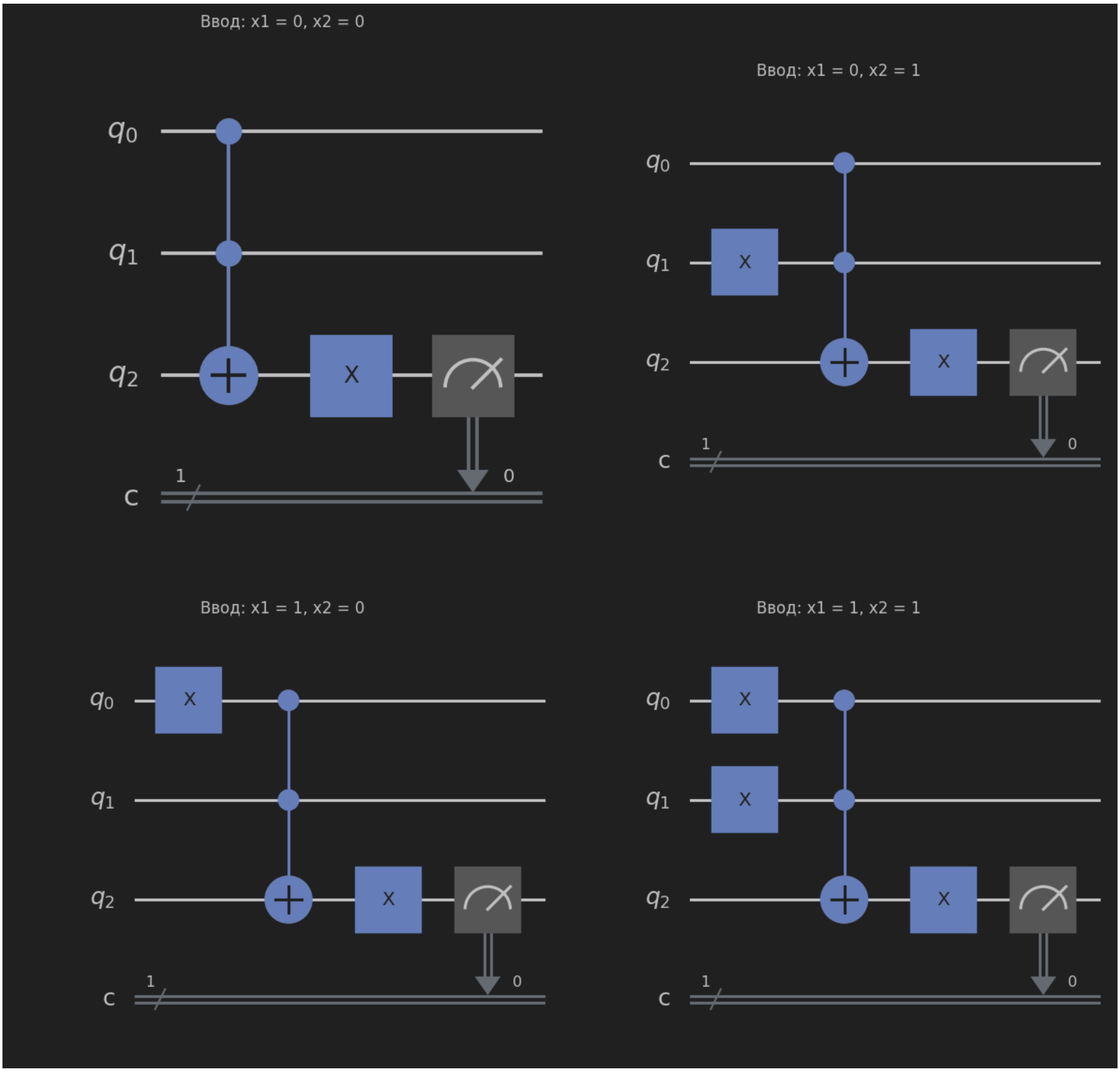
Вариант №7

Реализуйте функцию f(x1, x2) = NOT(x1 AND x2). Выполните симуляцию. Получите математическое обоснование результата.

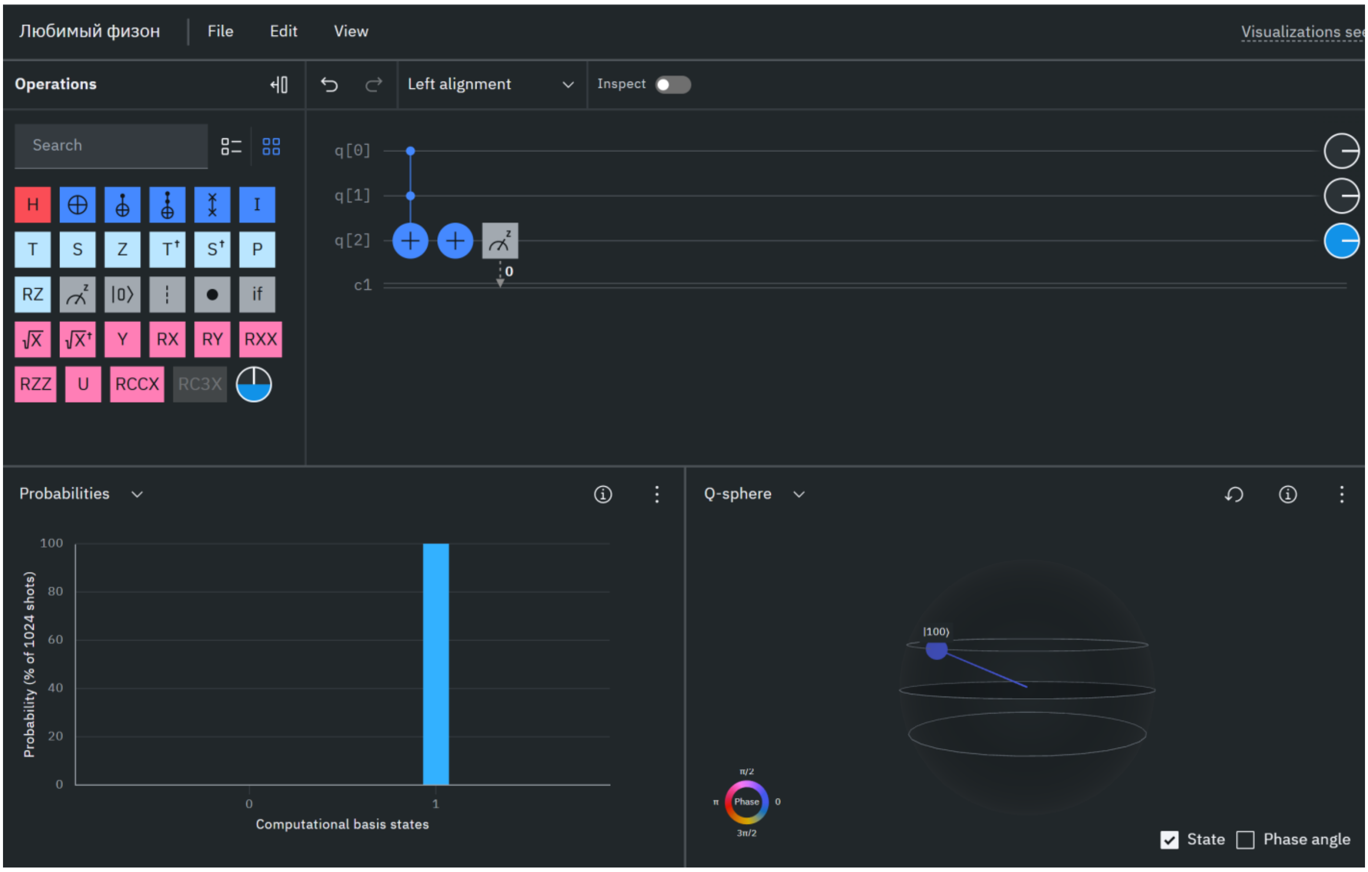
Постановка задачи:

Функция NAND (NOT AND) принимает два булевых входа x_1 и x_2 и возвращает 0 только тогда, когда оба входа равны 1. В остальных случаях результат равен 1.

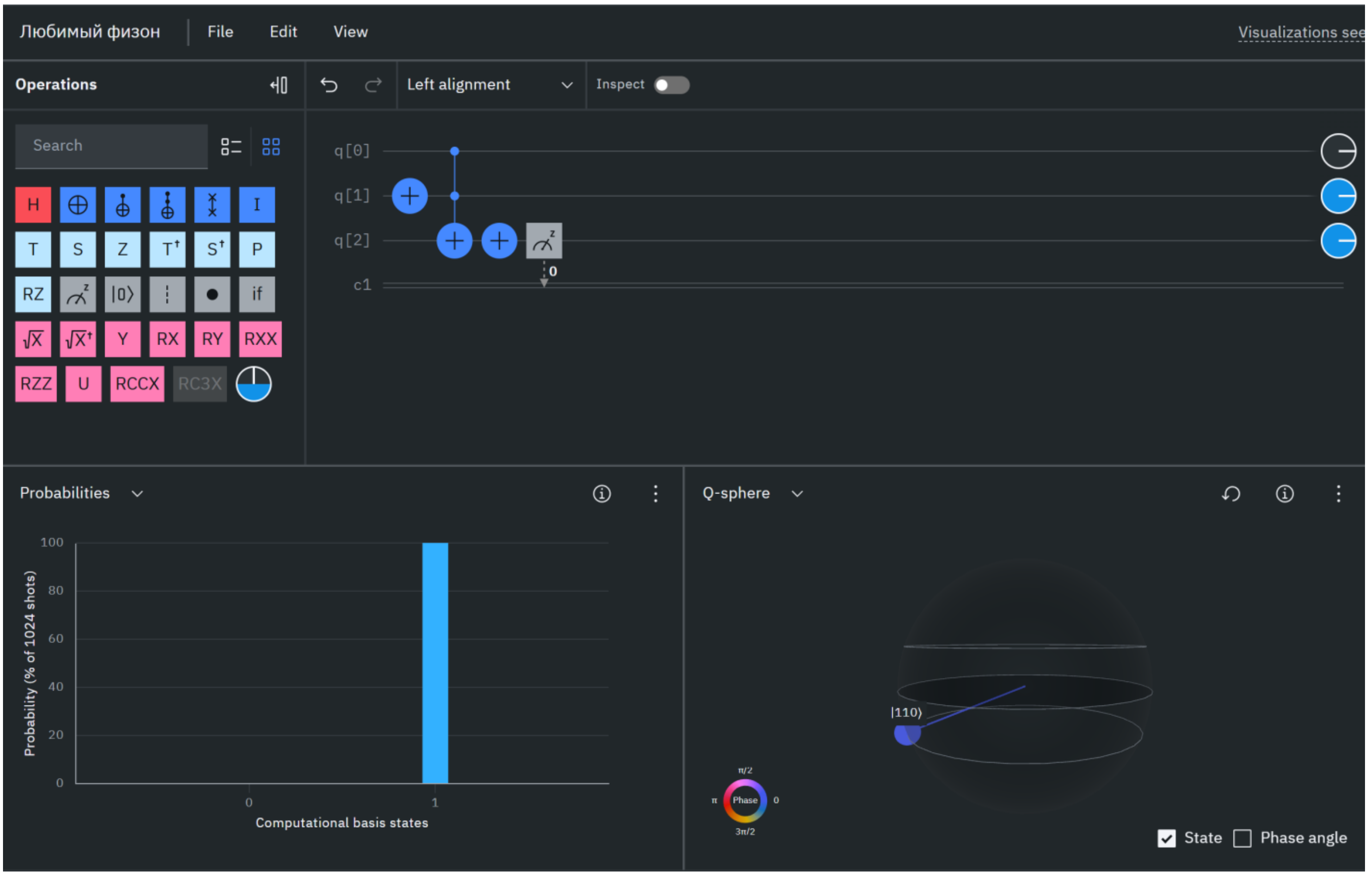
x_1	x_2	x_1AND x_2	NOT(x_1AND x_2)
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



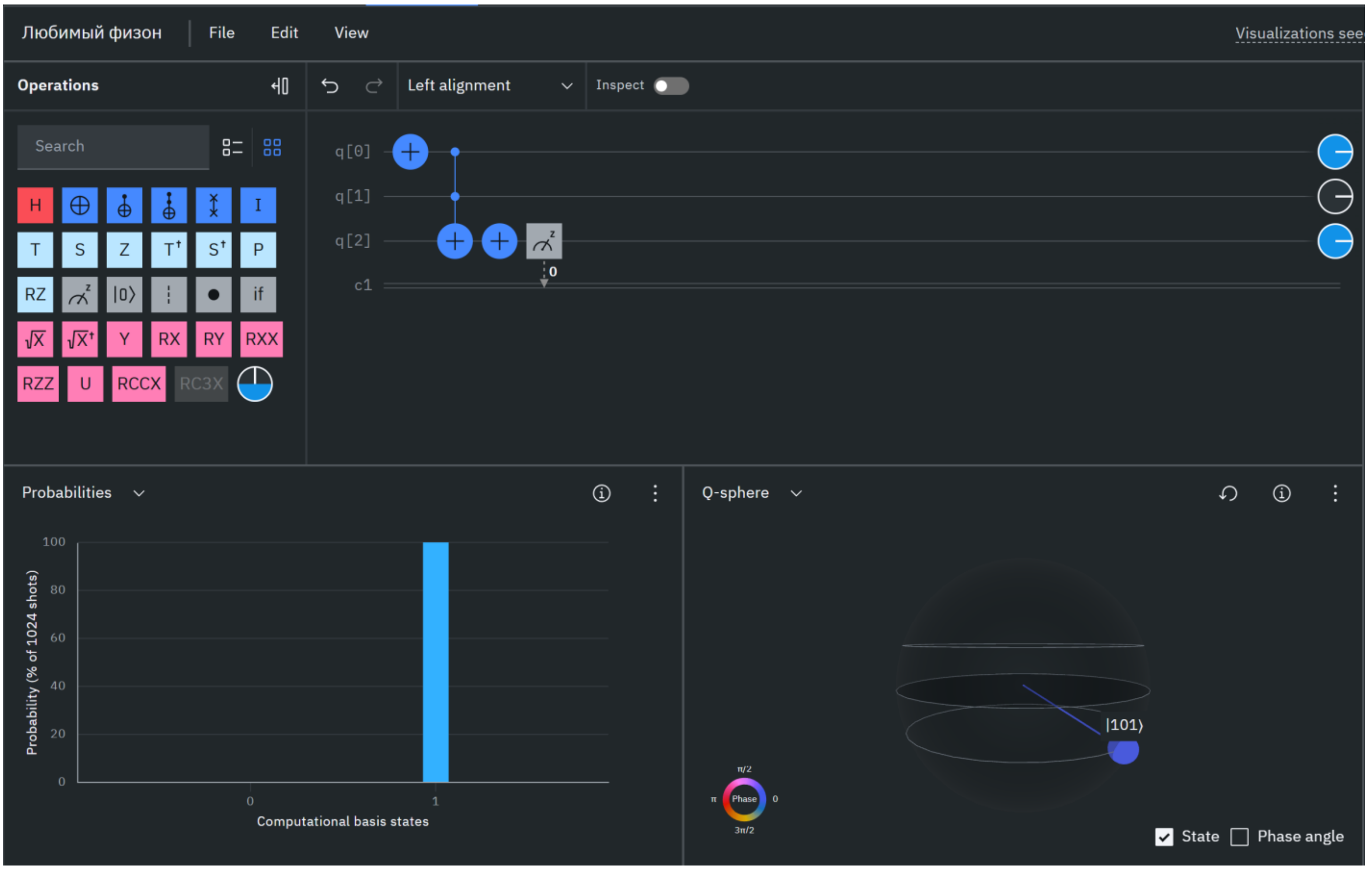
Ввод: $x_1 = 0,\ x_2 = 0$



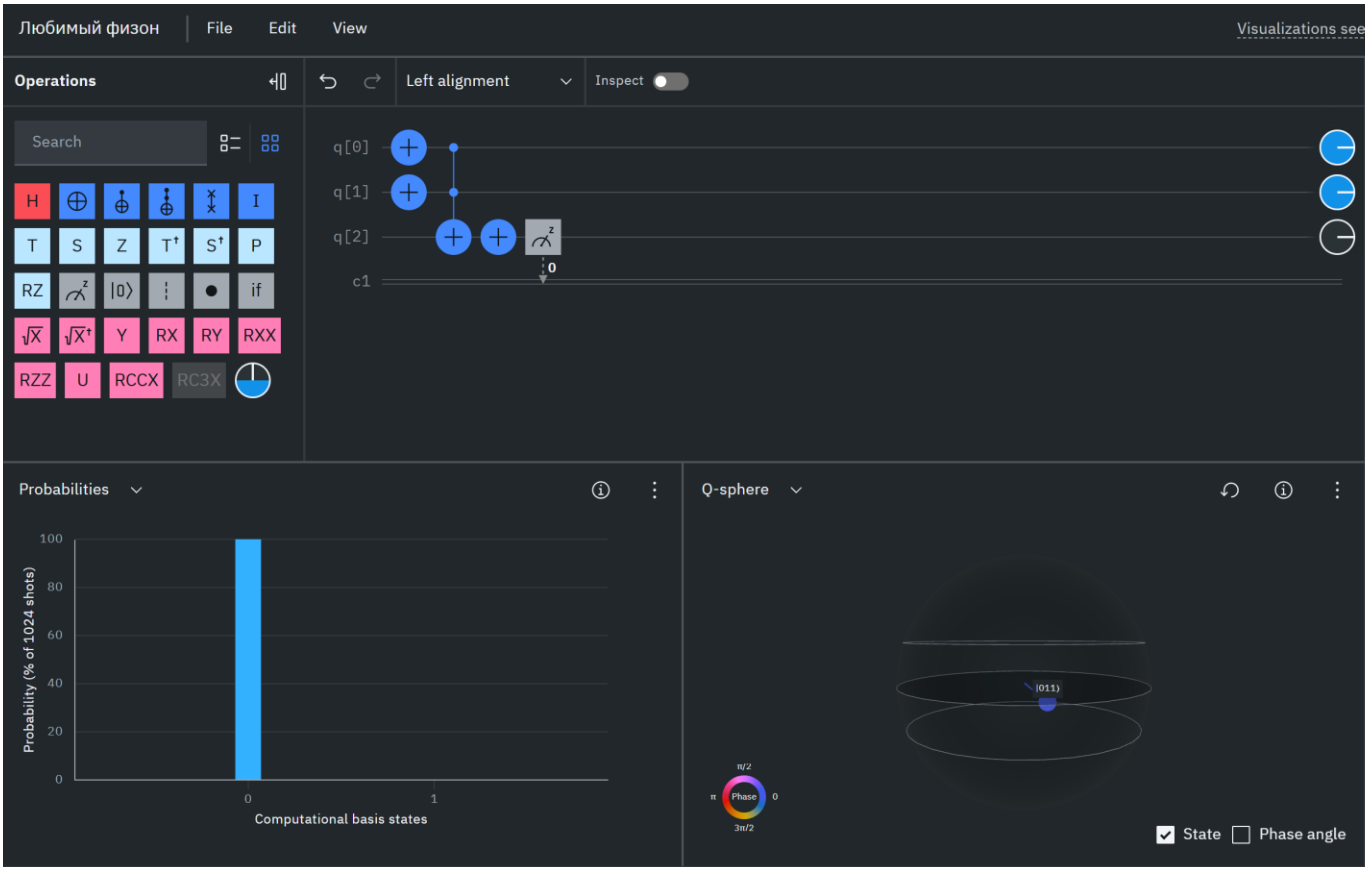
Ввод: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$



Ввод: $x_1 = 1, x_2 = 0$



Ввод: $x_1 = 1, x_2 = 1$



Toffoli-гейт (или **CCX-гейт**) — это трехкубитный вентиль, который выполняет операцию **X** на третьем кубите **только в случае, если оба входных кубита равны 1**. Формально его поведение можно описать следующим образом:

$$|x_1, x_2, x_3\rangle \to |x_1, x_2, x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2)\rangle$$

Где:

$\oplus$ — операция **XOR** (исключающее ИЛИ).

x_1, x_2 — входные кубиты.

x_3 — третий кубит, который изменяется только в случае, если оба входных кубита x_1 и x_2 равны 1.

Т. е. Toffoli-гейт инвертирует третий кубит, если оба входных кубита равны 1.

Для реализации функции f(x_1, x_2)= $\neg$ ($x_1 \wedge x_2$), можно использовать Toffoli-гейт следующим образом:

1. Инициализируем входные кубиты x_1 и x_2, а также третий кубит x_3, который будет хранить результат.
2. Применим Toffoli-гейт, который выполнит операцию $x_1 \wedge x_2$ и инвертирует x_3 только в случае, если оба входных кубита равны 1.
3. Затем применим дополнительный **X**-гейт (NOT-гейт) к x_3, чтобы инвертировать результат, т. е. преобразовать x_3 в $\neg$ ($x_1 \wedge x_2$).

Формально:

- Входные кубиты: |x1, x2⟩
- Третий кубит, инициализированный в состоянии |0⟩, для хранения результата.

После применения Toffoli-гейта результат будет:

$$|x_1, x_2, x_3\rangle \to |x_1, x_2, x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2)\rangle$$

Затем мы применяем X-гейт к x_3, чтобы инвертировать результат:

$$|x_1, x_2, x_3\rangle \to |x_1, x_2, \neg(x_1 \wedge x_2)\rangle$$

Таким образом, на выходе третий кубит будет содержать значение $\neg$ ($x_1 \wedge x_2$), что является правильным результатом для данной функции.

Обобщая всё выше сказанное:

1.  **Toffoli-гейт** выполняет операцию $x_1 \wedge x_2$ для двух входных кубитов, изменяя третий кубит в случае, если оба входных кубита равны 1.
2.  **X-гейт** применяется для инвертирования результата операции $\wedge$, что дает точную реализацию функции $\neg$ ($x_1 \wedge x_2$).

Вывод:

В этой работе рассмотрел как с помощью Toffoli-гейта и X-гейта можно реализовать логическую функцию f(x_1, x_2)= $\neg$ ($x_1 \wedge x_2$) на квантовом компьютере. Я доказал, что схема корректно работает для всех возможных значений входных кубитов и соответствует логическому действию NAND.