Álgebra Lineal

Taller 1

Martín Steven Hernández Ortiz
mahernandezor@unal.edu.co

13 de noviembre de 2024

5. Dar condiciones sobre el parámetro α, para que el sistema:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(\alpha^2-5)\,z=\alpha \end{cases}$$

Para un mejor desarrollo del punto, primero se va a convertir el sistema de ecuaciones a su matriz aumentada, para después realizar parcialmente la eliminación de *Gauss*, ya que no sabemos si el valor de α nos favorezca para que el pivote sea 1.

$$\text{Base}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \alpha^2-5 & \alpha \end{array}\right) \sim F_2-F_1 \mapsto F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha^2-5 & \alpha \end{array}\right)$$

$$\sim F_3-F_1 \mapsto F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 \end{array}\right)$$

Desde este punto podemos deducir, mediante la sustitución hacia atrás, que:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ y+2z=1 \\ (\alpha^2-4)\,z=\alpha-2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x&=1+\frac{3\alpha-6}{\alpha^2-4}, \\ y&=1-\frac{2\alpha-4}{\alpha^2-4} \text{ y} \\ z&=\frac{\alpha-2}{\alpha^2-4} \end{aligned}$$

(a) No tenga solución.
Tomando a $\alpha=-2$, podemos ver que en la 3^{ra} ecuación del sistema se tiene: $0x+0y+0z=-4$. Haciendo el sistema de ecuaciones inconsistente y por definición, no se tiene ninguna solución o que el conjunto solución es $\emptyset$.

(b) Tenga infinitas soluciones (dar la solución general).
Se debe tomar que $\alpha=2$, para que en la 3^{ra} ecuación del sistema se tenga: $0x+0y+0z=0$. Lo cual se puede interpretar como que x, y y z tienen infinitas soluciones, sin embargo x y y se pueden explicar en terminos de z.

$$\begin{aligned} y&=1-2z \\ x&=2+z-y \\ &=1+3z \end{aligned}$$

Obteniendo el conjunto solución

$$\{(1+3z,1-2z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$$

(c) Tenga solución única (dar la solución).
Si se toma $\alpha = 0$, en la matriz del sistema de ecuaciones se podría modificar de tal forma que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right) \sim F_3 + F_1 \mapsto F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim -\frac{1}{5}F_3 \mapsto F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Realizando sustitución hacia atrás obtenemos

$$\begin{cases} x + y - z = 2 & x = 2 + z - y = 1 \\ y + 2z = 1 & y = 1 - 2z = 1 \\ z = 0 & z = 0 \end{cases}$$

Siendo el conjunto solución: $\{(1, 1, 0)\}$

El cual podemos verificar en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 + 1 - 0 = 2 = 2 \\ 1 + 2\,(0) = 1 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

6. Si al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \pi & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2 - b & b \end{array}\right)$$

- Es el sistema consistente cuando a = b = 0? En caso de serlo, es la solución única?
Tomando a $a = b = 0$, tendriamos la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \pi & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por la 4^{ta} fila o ecuación podemos ver el sistema de ecuaciones que va a tener infinitas soluciones. Y por ende, el sistema va a ser consistente.

- Es el sistema consistente cuando a = 1 y b = 0? En caso de serlo, es la solución única?
Si $a = 1 y b = 0$, tendríamos la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \pi & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obteniendo que el sistema es consistente y tiene infinitas soluciones. Ya que la 4^{ta} ecuación del sistema implica que las variables del sistema pueden tener infinitas soluciones.

- Es el sistema consistente cuando a = 0 y b = 1? En caso de serlo, es la solución única?
Si $a = 0 y b = 1$, tendríamos la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \pi & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se va ver que el sistema de ecuaciones va a ser inconsistente, ya que en la 4^{ta} ecuación del sistema se va a tener que los variables con coeficiente de 0, va a ser igual a un número diferente a 0.

- Si b = 2 y a $\neq$ 0, qué puede decirse del conjunto solución?
  Si $a \neq 0$ y $b = 2$, tendriamos:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \pi & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \frac{1}{2}F_4 \mapsto F_4 \\ F_3 - F_4 \mapsto F_3 \\ F_2 + F_4 \mapsto F_2 \\ F_1 - 4F_4 \mapsto F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & \pi & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como $\alpha \neq 0$ podemos usarlo como denominador en una fracción:

$$\sim \frac{1}{2}F_2 \mapsto F_2 \left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\pi}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \frac{1}{\alpha}F_3 \mapsto F_3 \\ F_1 + F_3 \mapsto F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 - \frac{6}{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\pi}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Apartir de la matriz expandida podemos realizar sustitución hacia atrás y obtener el conjunto solución:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 4 - \dfrac{6}{\alpha} \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + \dfrac{pi}{2}x_4 + 0x_5 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = -\dfrac{6}{\alpha} \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\alpha + 9\pi - 6}{\sqrt{2}\alpha} \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = \dfrac{\alpha - 3\pi}{\alpha} \\ x_4 = -\dfrac{6}{\alpha} \\ x_5 = 1 \end{array}$$

$$\left\{ \left(\frac{\alpha + 9\pi - 6}{\sqrt{2}\alpha}, x_2, \frac{\alpha - 3\pi}{\alpha}, -\frac{6}{\alpha}, 1 \right) \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aunque pareciera que se podría obtener una única solución, por x_2 el conjunto solución termina teniendo infinitos elementos.

8. Justifique POR QUÉ cada una de las siguientes afirmaciones son VERDADERAS

   (a) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución única, su sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado también tiene solución única.
   Primero bozquejemos los sistemas preguntados como sistemas de ecuaciones $m \times n$

$$S_1 = \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \cdots + a_{2n}x_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \cdots + a_{mn}x_{mn} = b_m \end{cases} \qquad S_h = \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_{1n} = 0 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \cdots + a_{2n}x_{2n} = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \cdots + a_{mn}x_{mn} = 0 \end{cases}$$

   Como sabemos que la implicación presentada: 'soluciónes de $S_1 = 1$' $\Rightarrow$ 'soluciones de $S_h = 1$'; es una tautolgía por la hipotesis del problema, Además, cabe aclarar, que por definición de un sistema de ecuaciones homogéneo este siempre va a tener almenos una o infinitas soluciones. Siendo la primera, y trivial, solución donde todas las variables simplemente sean 0: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n = 0$.
   Tambien, analizando que el sistema de ecuaciones S_1 solo tenga una solución implica que no tenga ningún elemento libre. Concluyendo que, con esta información de los sistemas, la única solución de S_h sería la trivial. Ya que al no tener ningún elemento libre en ambos sistemas solo puede existir la solución trivial para S_h. Dado que cada valor tiene que tomar un valor fijo. Y, los únicos valores que resuelven a S_h es la solución trival: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n = 0$.

   (b) Un sistema de ecuaciones lineales con 14 variables y 10 ecuaciones no tiene solución única.
   Esta afrimación es bastante directa y sencilla de explicar, ya que, se divide entre el caso donde el sistema es consistente y en el caso contrario.

   Caso 1. *Sistema consistente*

En este caso al pasar el sistema de ecuaciones a su matriz expandida y escalonar esta matriz para realizar el método de *Gauss*, se va a poder ver que se cuenta con 10 o menos pivotes para las variables del sistema. Consecuentemente, se va a contar con algunas variables libres o con infinitas soluciones, pero con las cuales podrían ser definidas en terminos de estas variables libres.

Caso 2. *Sistema inconsistente*

En el caso que el sistema sea inconsistente, ya sea porqué se tenga que en la matriz expandida del sistema una fila de coeficientes 0 para todas las variables y un valor diferente a 0 como termino independiente. O, el sistema cuente con incongruencias entre las ecuaciones. En general, por definición, no se va a tener ninguna solución para el sistema.

(g) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 100 variables y 300 ecuaciones puede tener solución única.
Esta afrimación es bastante sencilla, ya que por definición, un sistema de ecuaciones homogéneo va a tener cómo mínimo una solución. Esta solución va a ser la solución trivial, el cual para el sistema propuesto sería: $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{98} = x_{99} = x_{100} = 0$. Además, como la pregunta solo pide explicar la existencia de esta respuesta trivial, no es necesario analizar más información sobre este sistema.

(h) Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 10 variables y 7 ecuaciones tiene infinitas soluciones.
Dado a que el sistema es consistente, al contar con un número mayor de variables que de variables al momento de escribir la matriz expandida del sistema y escalonarla, se va a tener 10 o menos pivotes. Cabe aclarar que, el número de pivotes puede ser menor a 10, a causa de que puede que existan filas en la matriz donde los coeficientes sean 0. De igual forma, al no poder tener un pivote en cada variable en la forma escalonada de la matriz expandida, se va a tener que las variables sin pivote van a ser variables libres o variables con infinitas soluciones.

9. Justifique POR QUÉ cada una de las siguientes afirmaciones son FALSAS

(a) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución, cualquier otro sistema de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes también tiene solución.
Esta proposición es bastante simple de demostrar falsa mediante un contra ejemplo. Consideremos S_1 y S_2, sistemas de ecuaciones lineales asociados. Definidos como:

$$S_1 = \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$$

Las matrices expandidas de cada sistema de ecuaciones lineales es

$$M_{S_1,S_2} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 10 & 10 \end{array}\right) \sim \frac{1}{2}F_2 \mapsto F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Despues de una simple operación entre filas, se puede ver que S_1 va a tener infinitas soluciones mientras que S_2, al ser un sistema inconsistente, no va a tener solución alguna.

(b) Un sistema de ecuaciones lineales tiene solución siempre que su sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado tenga solución.
Esta proposición es algo curiosa, ya que la implicación que tiene es bastante parecida, y igual de erronea, a otras en el ambito de las matemáticas como: «Si una función es continua, es derivable». Donde aunque suena bastante, si no es que completamente, correcto, el caso es totalmente lo contrario. Igualmente, por definición el sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado a otro sistema siempre va a tener una solución, la solución trivial donde todas las variables van a ser igual a 0. Sin embargo, esto no implica que el sistema de ecuaciones lineales tenga una solución. Un contra–ejemplo para esta proposición es:

$$S_{\text{base}} = \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases} \qquad S_h = \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Donde S_{base} es un sistema de ecuaciones lineales inconsistente y por ende sin soluciones. Pero S_h, el sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado, tiene como mínimo la solución la dupla: $(0, 0)$.

(c) El tipo de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales y el del sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado siempre es el mismo.
Esta proposición no es tan sencilla de ver que es falsa, sin embargo, solo es necesario describir un contra–ejemplo para mostrar que la proposición es falsa. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales S_1 y su sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado S_h:

$$S_1 = \begin{cases} x_1 + x_3 = 10 \\ x_2 + x_3 = 20 \\ \quad\quad x_3 = 30 \end{cases} \qquad S_h = \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\quad x_3 = 0 \end{cases}$$

Podemos convertir a S_1 a su matriz expandida y obtener su conjunto solución.

$$M_{S_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} F_1 - F_3 \mapsto F_1 \\ F_2 - F_3 \mapsto F_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

$$\{(-20, -10, 30)\}$$

Ahora, podemos tomar la tupla $-20, -10, 30$ y verificar si es una solución para S_h, y concluir si S_1 y S_h tienen el mismo conjunto solución:

$$\begin{cases} (-20) + (30) = 0 \\ (-10) + (30) = 0 \\ \quad\quad\quad (30) = 0 \end{cases}$$

Solo es necesario evaluar la 3$^{\text{ra}}$ ecuación del sistema para verificar que, no, el conjunto solucíón de un sistema de ecuaciónes lineales y el sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado **no siempre** es el mismo.

(d) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 27 variables y 13 ecuaciones puede no tener solución.
Esta proposición es explicitamente falsa por faltar a la definición de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Ya que como **mínimo** se debe tener una solución para un sistema homogéneo, y este va a ser donde todas sus variables son 0.