Álgebra Lineal

Taller 1

Martín Steven Hernández Ortiz
mahernandezor@unal.edu.co

12 de noviembre de 2024

5. Dar condiciones sobre el parámetro α, para que el sistema:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+\left(\alpha^2-5\right)z=\alpha \end{cases}$$

Para un mejor desarrollo del punto, primero se va a convertir el sistema de ecuaciones a su matriz aumentada, para después realizar parcialmente la eliminación de *Gauss*, ya que no sabemos si el valor de α nos favorezca para que el pivote sea 1.

$$\text{Base}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \alpha^2-5 & \alpha \end{array}\right) \sim F_2 - F_1 \mapsto F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha^2-5 & \alpha \end{array}\right)$$

$$\sim F_3 - F_1 \mapsto F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 \end{array}\right)$$

Desde este punto podemos deducir, mediante la sustitución hacia atrás, que:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ y+2z=1 \\ \left(\alpha^2-4\right)z=\alpha-2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 1+\frac{3\alpha-6}{\alpha^2-4}, \\ y &= 1-\frac{2\alpha-4}{\alpha^2-4} \text{ y} \\ z &= \frac{\alpha-2}{\alpha^2-4} \end{aligned}$$

(a) No tenga solución.
Tomando a $\alpha=-2$, podemos ver que en la 3$^{\text{ra}}$ ecuación del sistema se tiene: $0x+0y+0z=-4$. Haciendo el sistema de ecuaciones inconsistente y por definición, no se tiene ninguna solución o que el conjunto solución es $\emptyset$.

(b) Tenga infinitas soluciones (dar la solución general).
Se debe tomar que $\alpha=2$, para que en la 3$^{\text{ra}}$ ecuación del sistema se tenga: $0x+0y+0z=0$. Lo cual se puede interpretar como que x, y y z tienen infinitas soluciones, sin embargo x y y se pueden explicar en terminos de z.

$$\begin{aligned} y &= 1-2z \\ x &= 2+z-y \\ &= 1+3z \end{aligned}$$

Obteniendo el conjunto solución

$$\{(1+3z, 1-2z, z)\,|z\in\mathbb{R}\}$$

(c) Tenga solución única (dar la solución).
Si se toma $\alpha = 0$, en la matriz del sistema de ecuaciones se podría modificar de tal forma que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right) \sim F_3 + F_1 \mapsto F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim -\frac{1}{5}F_3 \mapsto F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Realizando sustitución hacia atras obtenemos

$$\begin{cases} x + y - z = 2 & x = 2 + z - y = 1 \\ y + 2z = 1 & y = 1 - 2z = 1 \\ z = 0 & z = 0 \end{cases}$$

Siendo el conjunto solución: $\{(1, 1, 0)\}$

El cual podemos verificar en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 + 1 - 0 = 2 = 2 \\ 1 + 2\,(0) = 1 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

6. Si al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \pi & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2 - b & b \end{array}\right)$$

- Es el sistema consistente cuando a = b = 0? En caso de serlo, es la solución única?
  Tomando a $a = b = 0$, tendriamos la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \pi & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Por la 4^{ta} fila o ecuación podemos ver el sistema de ecuaciones que va a tener infinitas soluciones. Y por ende, el sistema va a ser consistente.

- Es el sistema consistente cuando a = 1 y b = 0? En caso de serlo, es la solución única?
  Si $a = 1 y b = 0$, tendríamos la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \pi & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Obteniendo que el sistema es consistente y tiene infinitas soluciones. Ya que la 4^{ta} ecuación del sistema implica que las variables del sistema pueden tener infinitas soluciones.

- Es el sistema consistente cuando a = 0 y b = 1? En caso de serlo, es la solución única?
  Si $a = 0 y b = 1$, tendríamos la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \pi & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  Se va ver que el sistema de ecuaciones va a ser inconsistente, ya que en la 4^{ta} ecuación del sistema se va a tener que los variables con coeficiente de 0, va a ser igual a un número diferente a 0.

- Si b = 2 y a $\neq$ 0, qué puede decirse del conjunto solución?
Si $a \neq 0$ y $b = 2$, tendriamos:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \pi & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \frac{1}{2}F_4 \mapsto F_4 \\ F_3 - F_4 \mapsto F_3 \\ F_2 + F_4 \mapsto F_2 \\ F_1 - 4F_4 \mapsto F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & \pi & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \frac{1}{2}F_2 \mapsto F_2 \left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\pi}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Si b = 1 y a $\neq$ 0, qué puede decirse del conjunto solución?
- Si a $\neq$ 0, dé un valor de b (diferente de 0), en caso de que exista, para que el sistema sea consistente.
- Si a $\neq$ 0, para que valores de b el sistema tiene infinitas soluciones?
- Si a $\neq$ 0, para que valores de b el sistema tiene solución única?
- Si a $\neq$ 0, para que valores de b el sistema es inconsistente?

8. Justifique POR QUÉ cada una de las siguientes afirmaciones son VERDADERAS:
   (a) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución única, su sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado también tiene solución única.
   (b) Un sistema de ecuaciones lineales con 14 variables y 10 ecuaciones no tiene solución única.
   (c) Un sistema de ecuaciones lineales con 27 variables y 13 ecuaciones puede no tener solución.
   (d) Un sistema de ecuaciones lineales con 100 variables y 300 ecuaciones puede tener solución única.
   (e) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 10 variables y 7 ecuaciones tiene infinitas soluciones.
   (f) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 14 variables y 10 ecuaciones no tiene solución única.
   (g) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 100 variables y 300 ecuaciones puede tener solución única.
   (h) Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 10 variables y 7 ecuaciones tiene infinitas soluciones.
   (i) Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 14 variables y 10 ecuaciones no tiene solución única.
   (j) Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 100 variables y 300 ecuaciones puede tener solución única.

9. Justifique POR QUÉ cada una de las siguientes afirmaciones son FALSAS
   (a) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución, cualquier otro sistema de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes también tiene solución
   (b) Un sistema de ecuaciones lineales tiene solución siempre que su sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado tenga solución.
   (c) El tipo de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales y el del sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado siempre es el mismo
   (d) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 27 variables y 13 ecuaciones puede no tener solución.
   (e) Un sistema de ecuaciones lineales con 10 variables y 7 ecuaciones tiene infinitas soluciones
   (f) Un sistema de ecuaciones lineales con 20 variables y 20 ecuaciones tiene solución única.
   (g) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 20 variables y 20 ecuaciones tiene solución única
   (h) Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 20 variables y 20 ecuaciones tiene solución única.