



Álgebra Lineal Taller 1

Martín Steven Hernández Ortiz

mahernandezor@unal.edu.co

11 de noviembre de 2024

5. Dar condiciones sobre el parámetro α , para que el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (\alpha^2 - 5)z = \alpha \end{cases}$$

Para un mejor desarrollo del punto, primero se va a convertir el sistema de ecuaciones a su matriz aumentada, para después realizar parcialmente la eliminación de *Gauss*, ya que no sabemos si el valor de α nos favorezca para que el pivote sea 1.

$$\begin{aligned} \text{Base} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \alpha^2 - 5 & \alpha \end{array} \right) &\sim F_2 - F_1 \mapsto F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha^2 - 5 & \alpha \end{array} \right) \\ &\sim F_3 - F_1 \mapsto F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 4 & \alpha - 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Desde este punto podemos deducir, mediante la sustitución hacia atrás, que:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ y + 2z = 1 \\ (\alpha^2 - 4)z = \alpha - 2 \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= 1 + \frac{3\alpha - 6}{\alpha^2 - 4}, \\ y &= 1 - \frac{2\alpha - 4}{\alpha^2 - 4} \text{ y} \\ z &= \frac{\alpha - 2}{\alpha^2 - 4} \end{aligned}$$

(a) No tenga solución.

(b) Tenga infinitas soluciones (dar la solución general).

Solo es necesario que $\alpha = 2$, para que en la 3^{ra} ecuación del sistema se tenga: $0x + 0y + 0z = 0$. Lo cual se puede interpretar como que x , y y z tienen infinitas respuestas, sin embargo x y y se pueden explicar en terminos de z .

$$\begin{aligned} y &= 1 - 2z \\ x &= 2 + z - y \\ &= 1 + 3z \end{aligned}$$

Obteniendo el conjunto solución

$$\{(1 + 3z, 1 - 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

(c) Tenga solución única (dar la solución).

Si se toma $\alpha = 0$, en la matriz del sistema de ecuaciones se podría modificar de tal forma que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array} \right) \sim F_3 + F_1 \mapsto F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim -\frac{1}{5}F_3 \mapsto F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Realizando sustitución hacia atrás obtenemos

$$\begin{cases} x + y - z = 2 & x = 2 + z - y = 1 \\ y + 2z = 1 & y = 1 - 2z = 1 \\ z = 0 & z = 0 \end{cases}$$

Siendo el conjunto solución: $\{(1, 1, 0)\}$

El cual podemos verificar en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 + 1 - 0 = 2 = 2 \\ 1 + 2(0) = 1 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

6. Si al escalar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, se obtiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \pi & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2 - b & b \end{array} \right)$$

- Es el sistema consistente cuando $a = b = 0$? En caso de serlo, es la solución única?
- Es el sistema consistente cuando $a = 1$ y $b = 0$? En caso de serlo, es la solución única?
- Es el sistema consistente cuando $a = 0$ y $b = 1$? En caso de serlo, es la solución única?
- Si $b = 2$ y $a \neq 0$, qué puede decirse del conjunto solución?
- Si $b = 1$ y $a \neq 0$, qué puede decirse del conjunto solución?
- Si $a \neq 0$, dé un valor de b (diferente de 0), en caso de que exista, para que el sistema sea consistente.
- Si $a \neq 0$, para que valores de b el sistema tiene infinitas soluciones?
- Si $a \neq 0$, para que valores de b el sistema tiene solución única?
- Si $a \neq 0$, para que valores de b el sistema es inconsistente?

8. Justifique POR QUÉ cada una de las siguientes afirmaciones son VERDADERAS:

- Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución única, su sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado también tiene solución única.
- Un sistema de ecuaciones lineales con 14 variables y 10 ecuaciones no tiene solución única.
- Un sistema de ecuaciones lineales con 27 variables y 13 ecuaciones puede no tener solución.
- Un sistema de ecuaciones lineales con 100 variables y 300 ecuaciones puede tener solución única.
- Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 10 variables y 7 ecuaciones tiene infinitas soluciones.
- Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 14 variables y 10 ecuaciones no tiene solución única.
- Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 100 variables y 300 ecuaciones puede tener solución única.
- Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 10 variables y 7 ecuaciones tiene infinitas soluciones.
- Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 14 variables y 10 ecuaciones no tiene solución única.

- (j) Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 100 variables y 300 ecuaciones puede tener solución única.

9. Justifique POR QUÉ cada una de las siguientes afirmaciones son FALSAS

- (a) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución, cualquier otro sistema de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes también tiene solución
- (b) Un sistema de ecuaciones lineales tiene solución siempre que su sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado tenga solución.
- (c) El tipo de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales y el del sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado siempre es el mismo
- (d) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 27 variables y 13 ecuaciones puede no tener solución.
- (e) Un sistema de ecuaciones lineales con 10 variables y 7 ecuaciones tiene infinitas soluciones
- (f) Un sistema de ecuaciones lineales con 20 variables y 20 ecuaciones tiene solución única.
- (g) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 20 variables y 20 ecuaciones tiene solución única
- (h) Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 20 variables y 20 ecuaciones tiene solución única.