

# PIDR : Tomographie et rétroprojection filtrée

Abel Quérou  
Elève ingénieur en 2ème année  
à Télécom Nancy

Pierre-Arnaud Blanc  
Elève ingénieur en 2ème année  
à Télécom Nancy

Jean-Baptiste Bellet  
chercheur-encadrant PIDR  
Institut Elie Cartan de Lorraine

**Résumé**—La tomographie est un moyen efficace de sonder la matière sans l'endommager, ce qui est très utile dans beaucoup de domaines. L'objet à étudier est déplacé (rotation, translation verticale) à l'intérieur d'un faisceau de rayonnement pénétrant. Une partie de l'énergie sera absorbée et chaque traversée du faisceau donne un point, formant ainsi l'image d'une superposition de sinusoides, appelée "sinogramme", inexploitable directement. Une transformation mathématique, dite de Radon, est nécessaire pour revenir à la forme de l'objet initial. Dans notre étude, nous avons appliqué une « rétroprojection filtrée » d'abord sur des exemples théoriques (disque) et l'avons ensuite implémentée en Matlab, puis en langage C. Enfin, notre code fut appliqué sur les fantômes de Shepp-Logann et nous avons obtenus un PNSR de 12,56.

**Mots-clés** : tomographie, transformée de Radon, rétroprojection filtrée, Matlab

## I. INTRODUCTION

**Contexte général** : La tomographie, qui veut dire étymologiquement "dessiner une coupe" en grec, est une technique permettant d'obtenir des images de coupes d'objets ou d'êtres vivants à partir d'un rayonnement, habituellement des rayons X. Son histoire est intimement liée à celle de l'imagerie médicale, qui va se développer à partir de 1896 avec l'utilisation des rayons X. Mais les simples radiographies sont limitées, car elles ne prennent pas en compte la structure tridimensionnelle du corps humain. Pour pallier ce problème, le scanner est créé en 1971 par Godfrey Hounsfield et ses collègues à l'EMI Group de Londres (les producteurs des Beatles). Cette avancée majeure de l'imagerie médicale n'a pu aboutir que par la remise au goût du jour des travaux du mathématicien austro-hongrois Johann Radon en 1917 sur la théorie de la transformée qui porte maintenant son nom. Cette théorie trouvera donc son application 60 ans plus tard. La tomographie est un moyen très efficace de sonder la matière sans l'endommager. C'est pour cela qu'elle est utilisée aussi bien en médecine en imagerie médicale, en archéologie et en lutherie pour l'étude d'artéfacts et d'objets fragiles, en industrie pétrochimique pour l'étude du sous-sol ou bien dans le domaine nucléaire pour l'étude d'éléments radioactifs non manipulables ou confinés. Les applications de la tomographie sont donc plurielles et importantes, ce qui a entraîné des études multiples, avec de nombreuses retombées.

**Problématique** : La tomographie nécessite donc une partie logicielle destinée à procéder à une reconstruction tridimensionnelle de l'objet étudié. En effet, l'image obtenue lors d'une

tomographie n'est pas directement exploitable : elle est formée d'une superposition de sinusoides, appelée sinogramme. En théorie, le sinogramme est obtenu après une transformée de Radon de l'objet d'étude. Pour que l'image soit lisible et exploitable par un être humain, il est nécessaire de faire une reconstruction. Il existe plusieurs méthodes différentes de reconstruction, mais nous nous intéresserons ici uniquement à la rétro-projection filtrée.

**Approche proposée** : Le but de ce Projet Interdisciplinaire ou de Découverte de la Recherche (PIDR) est, après avoir effectué une recherche bibliographique sur la tomographie et les méthodes de reconstructions mathématiques existantes, d'établir une reconstruction d'une image en 2D, en commençant par l'image des fantômes de Shepp-Logan. C'est une image d'un modèle humain créée par L. Shepp et B.F. Logan en 1974, qui sert de test pour les algorithmes de reconstructions.

Notre méthode de rétro-projection filtrée, qui sera codée en langage Matlab, se déroule en quatre étapes : (i) on applique une transformée de Fourier à l'image de départ, (ii) on filtre le résultat, (iii) on applique une transformée de Fourier inverse et (iv) finalement on réalise la rétroprojection. En plus des résultats de notre code, nous présenterons une application sur un disque. Dans un second temps, nous avons converti ce programme en C, un langage compilé, pour gagner du temps calcul, car la complexité temporelle du code est assez importante, parce que le nombre de données devient très élevé dès que l'image devient importante.

## II. EXPLICATION THÉORIQUE

### A. Principe physique pour acquérir l'image tomographique

Lorsqu'on envoie des rayons X à travers un objet, ce dernier atténue une partie de l'énergie reçue. Cette atténuation est linéaire, nous permettant d'avoir une formule simple de l'intensité reçue ( $I$ ) par rapport à l'intensité émise ( $I_0$ ) en intégrant l'atténuation linéaire sur une droite  $D$  :

$$I = I_0 \cdot \exp\left(-\int_D f(x, y) dv\right)$$

. L'intensité reçue donne une mesure intégrale de la « densité » des différentes couches traversées par le faisceau de rayonnement lors de sa traversée de l'objet. S'il s'agit d'un corps humain, par exemple, cette densité va varier selon que le faisceau traverse des masses osseuses, du tissu mou ou des

cavités. On cherche donc à reconstruire  $f(x, y)$  en tout point de l'espace pour obtenir la coupe de l'objet étudié.

Comme chaque mesure correspond à une droite  $D$ , le dispositif d'acquisition doit faire un balayage angulaire de l'objet à étudier pour obtenir l'ensemble des mesures permettant de reconstituer l'objet d'étude.

insérer ici des images de balayage si possible

### B. Transformée de Radon

La transformée de Radon, qui correspond à l'opérateur des projections de  $f$ , donc de l'image que l'on obtient après une radiographie, forme une image appelée sinogramme (Fig.1).

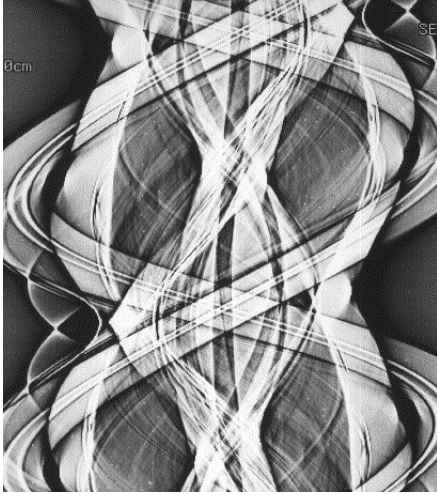


FIGURE 1. Exemple de sinogramme

La transformée de Radon s'exprime par la relation suivante :

$$R[f](u, \theta) = p_\theta(u) = \int_{D_\theta} f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) dv$$

en posant  $p = x \cos \theta + y \sin \theta$  et  $q = -x \sin \theta + y \cos \theta$ , on peut aussi écrire la transformée de Radon de la manière suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(p \cos \theta - q \sin \theta, p \sin \theta + q \cos \theta) \delta q$$

### A VERIFIER, NOTAMMENT SIGNE

**calcul à la main de la transformée de Radon d'un**

**disque :** Soit  $S$  la surface du disque unité, défini par la relation :

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\text{soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon } (|x| > 1 \vee |y| > 1) \end{cases} \end{cases}$$

Nous avons donc :  $R(\theta, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 + q^2 \delta q$  la transformée de Radon de ce disque. On trouve facile que :

$$p^2 + q^2 = 1 \rightarrow q = \pm \sqrt{1 - p^2}$$

d'où par linéarité de l'intégrale dans la formule de la transformée de Radon :

$$R(\theta, p) = \int_{-\infty}^{-\sqrt{1-p^2}} f(x, y) \delta q + \int_{-\sqrt{1-p^2}}^{+\sqrt{1-p^2}} p^2 + q^2 \delta q + \int_{+\sqrt{1-p^2}}^{+\infty} p^2 + q^2 \delta q$$

l'intégrale est paire, donc elle est égale à deux fois l'intervalle de définition, ce qui donne après simplification :

$$R(\theta, p) = \begin{cases} 2\sqrt{1-p^2} & \text{si } |p| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

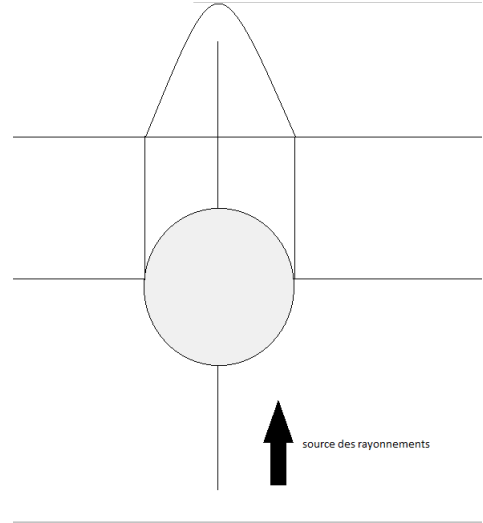


FIGURE 2. transformée de Radon d'un disque et sa projection

### C. La rétroprojection filtrée

## III. RÉSULTAT DE NOS CODES

### A. notre code en langage Matlab

1) la génération de données : Nous avons utilisé dans un premier temps comme objets d'étude les images d'un modèle humain appelées les fantômes de Shepp-Logan. Créées par ces derniers en 1974, qui servent de test pour les algorithmes de reconstructions (Fig.2).



FIGURE 3. Fantômes de Shepp-Logan tels que générés par Matlab

Pour modéliser la phase rayonnement pour obtenir le sinogramme sur lequel nous allons travailler pour la rétroprojection filtrée, nous avons appliqué la fonction Matlab de transformée de Radon. Cette fonction permet de choisir l'angle du rayonnement simulé ainsi que le nombre de mesures en faisant varier le pas de discrétisation. En sortie de la transformée de Radon, nous obtenons une matrice R qui regroupe l'ensemble des mesures récoltées par angle de rayonnement simulé et un vecteur xp qui regroupe l'angle choisi pour chaque colonne. Le sinogramme ainsi obtenu est le suivant (Fig.3) :

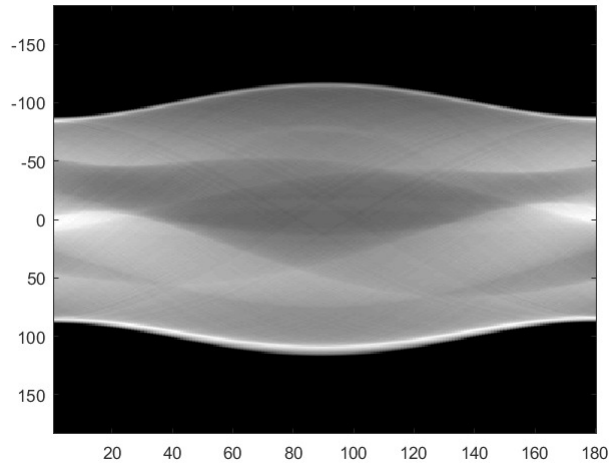


FIGURE 4. Sinogramme des fantômes de Shepp-Logan

2) *rétroprojection discrète* : **Filtre de l'image** : La première étape consiste à appliquer une transformée de Fourier à la matrice R résultante de la transformée de Radon de Matlab. Ensuite nous avons ensuite créé et utilisé un filtre de Ram-Lak (Fig.4). Ce filtre a trois avantages majeurs : (i)il est simple à implémenter (deux rampes) et (ii)s'effectue rapidement, donc

on gagne en temps de calcul pour la reconstruction, et qu'il (iii)atténue efficacement le bruit sans trop lisser l'image.

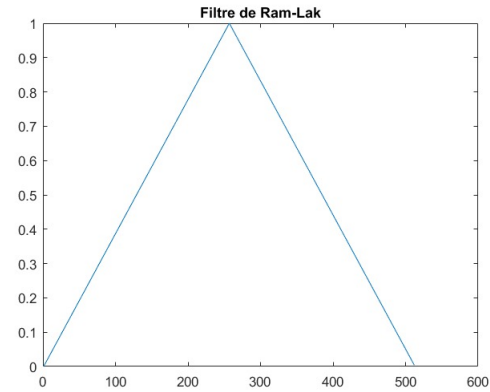


FIGURE 5. filtre de Ram-Lak

On applique le filtre à la matrice R par multiplication et appliquons au résultat une transformée de Fourier inverse.

**rétroprojection** : On crée une matrice B de la taille de R qui recueillera l'image résultat. En bouclant sur les colonnes de R, donc chaque angle de mesure, on détermine les projections  $u$  avec la formule suivante :  $u = (((x - R_x)/2) * \cos(rad) - ((y - R_y)/2) * \sin(rad)) + x_{offset}$  avec  $(x, y)$  les points de B,  $R_x$  et  $R_y$  la taille de R,  $rad$  l'angle en radian de l'axe de projection et  $x_{offset}$  le décalage. Pour être sûr que les projections  $u$  soient entières, nous appliquons une interpolation de Taylor. Nous utilisons finalement une LUT pour restreindre les valeurs résultats dans l'ensemble  $[0;255]$ . On rappelle qu'une Look-Up Table (LUT) est utilisée en traitement d'image pour établir une correspondance entre les valeurs des points et les couleurs affichées.

L'image ci-après (Fig.5) montre que nous avons bien obtenu un résultat du fantôme de départ. Il nous faut maintenant évaluer sa qualité.

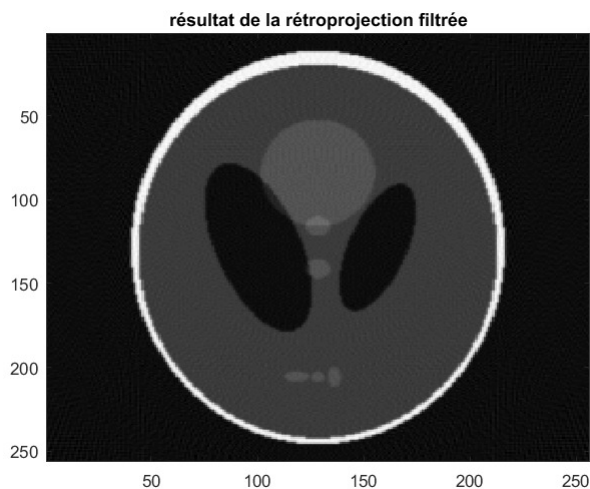


FIGURE 6. Résultat de la rétroprojection filtrée obtenus suite à notre code Matlab

3) *quantification et évaluation des résultats*: Pour évaluer les images obtenus, nous avons utilisés le ratio PSNR (Peak Signal to Noise Ratio), qui se calcule de la manière suivante :  $PSNR = 10 \cdot \log_{10}(\frac{d^2}{EQM})$  où  $EQM$  est l'erreur quadratique moyenne qui s'obtient par la formule suivante :  $EQM = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} (I_0(i, j) - I_f(i, j))^2$  où  $I_0$  est l'image originale et  $I_f$  l'image finale. Ce ratio est la manière classique d'évaluer en traitement de l'image les distorsions par rapport à l'image d'origine. Plus ce ratio augmente, plus l'image est de bonne qualité.

Ainsi nous pouvons faire varier la qualité de l'image résultante de la rétroprojection en modifiant la taille de l'image en pixels ou le pas angulaire des rayonnements simulés.

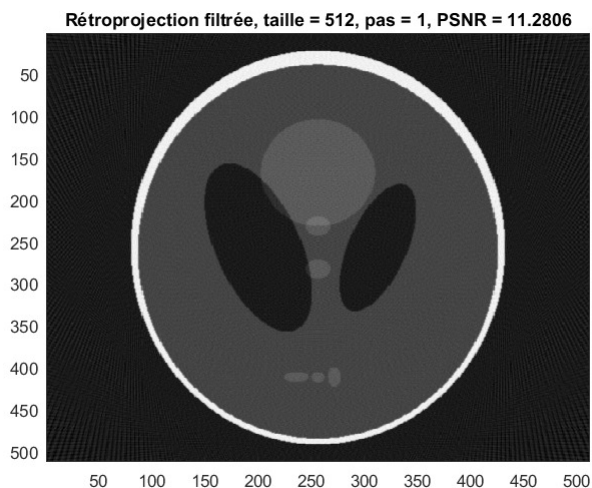


FIGURE 7. Résultat taille=512 pas=1

Pour la Fig.6, avec une pas angulaire de 1 et une image à 512 pixels, on observe une image assez proche de l'original,

avec un  $PSNR = 11.26$ . Cette image est tout à fait interpretable par un humain, à la différence du sinogramme.

**3.1 : influence du pas** : Observons maintenant l'influence du pas angulaire dans les figures suivantes :

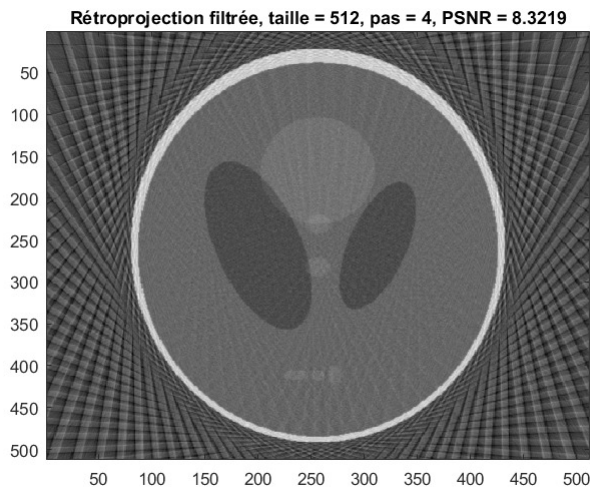


FIGURE 8. Résultat taille=512 pas=4

Ici l'image de la Fig.7 a un pas angulaire de 4. Des lignes parasites dues à un trop grand pas angulaire apparaissent. Le PSNR diminue à 8.32.

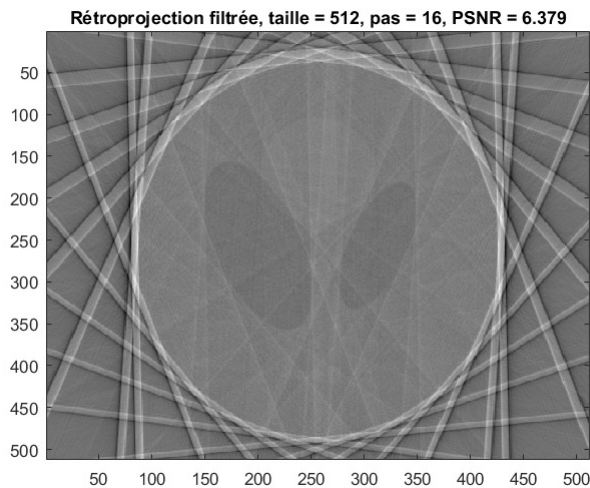


FIGURE 9. Résultat taille=512 pas=16

En augmentant encore le pas angulaire jusqu'à 16, on observe que l'image de la Fig.8 devient quasiment inexploitable, qu'elle perd nettement en contraste et que les lignes parasites sont encore plus nettes. Le PSNR chute à 6.37.

**3.2 influence de la taille** : Observons maintenant l'influence de la taille sur sa qualité.

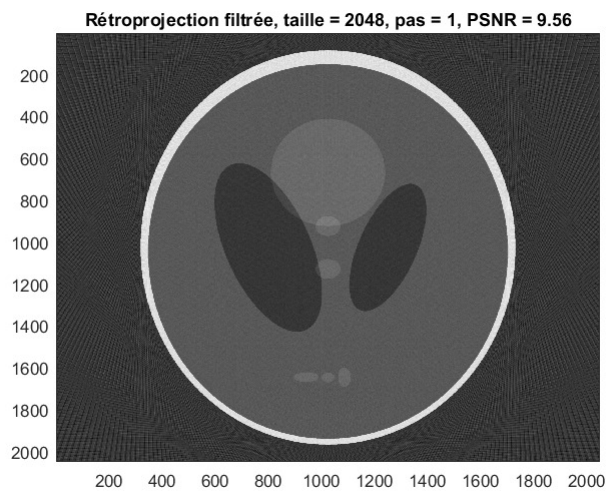


FIGURE 10. Résultat taille=2048 pas=1

Cette image (Fig.9) a un pas angulaire de 1 comme la Fig.6, mais à une taille plus grande de 2048 pixels. Le PSNR de 9.56 est plus bas que la Fig.6, mais cela s'explique par le fait qu'on a augmenté la taille de l'image, sans pour autant diminuer le pas angulaire, aboutissant pour un même pas angulaire à un résultat moins efficace.

**Optimisation en fonction de la taille et du pas :**  
Pour voir l'influence de ces paramètres, nous avons calculé le PSNR sur 1000 images, de taille allant de 1 pixels à 1000, avec un pas variant lui aussi.

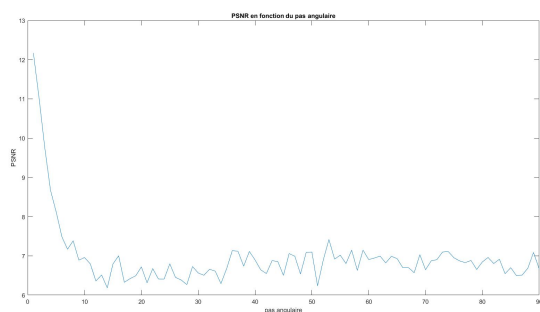


FIGURE 11. PSNR en fonction du pas

La Fig.10 montre la variation du PSNR d'une image de 256 pixels en fonction du pas angulaire. On remarque qu'il diminue drastiquement jusqu'à 10 rad, puis qu'il se stabilise.

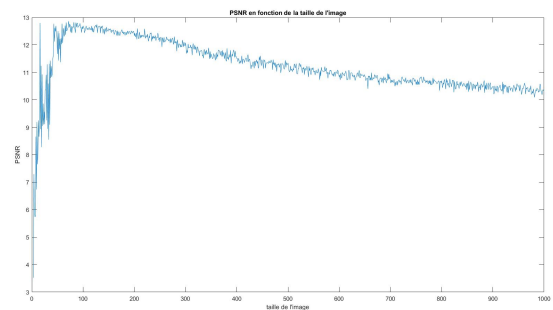


FIGURE 12. PSNR en fonction de la taille

La Fig.11 permet d'observer que le PSNR diminue légèrement avec l'augmentation de la taille de l'image pour un pas fixe de 1. Pour les images les plus petites, le PSNR n'a pas de réel signification, car les images sont tellement petites que la variation angulaire n'a plus de sens.

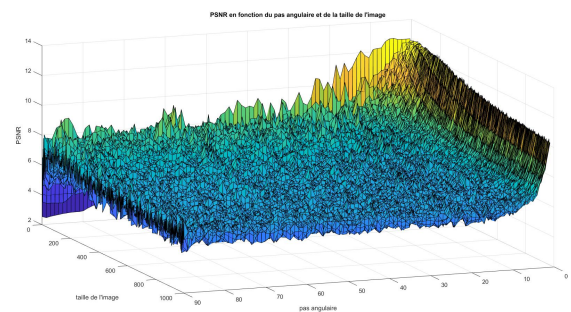


FIGURE 13. PSNR en fonction de la taille et du pas

Enfin nous avons fait un graphe (Fig.12) qui étudie la variation des deux paramètres à la fois. Pour plus de lisibilité, cette figure se trouve également en annexe.

Le pas angulaire semble donc être le paramètre le plus sensible sur la qualité du rendu. Dès qu'on prend un pas angulaire supérieur à 1 radian, l'image se dégrade très rapidement.

#### B. Notre code en langage C

Le code que nous avons écrit en langage C est équivalent algorithmiquement au code Matlab. Notre plus grande difficulté fut de remplacer des fonctions pré-établies dans Matlab par des bibliothèques équivalentes.

#### A COMPLETER, notamment temps de calcul

#### IV. CONCLUSION

Comme expliqué dans cet article, nous avons appliqué une « rétroprojection filtrée » d'abord sur des exemples théoriques (disque) et l'avons ensuite implémentée en Matlab, puis en langage C. Enfin, notre code fut appliqué sur les fantômes de Shepp-Logann en faisant varier le pas angulaire et la dimension de l'image. Les PSNR varient pour un pas de 1 radian entre 12.41 pour une image de 64 pixels et 9.56 pour une image de 2048 pixels et varient pour une image à 512 pixels entre 11.28 pour un pas de 1 et 6.1 pour un pas de 64

radian. On remarque aussi que le pas angulaire joue beaucoup plus sur l'interprétation humaine de l'image résultante que la dimension de l'image. Les temps de calculs sont prohibitifs dès que les dimensions des images calculées deviennent très importantes. En effet, pour un test sur 1000 images de 1 à 1000 pixels avec un pas variant de 1 à 90, il nous a fallu près de 8h pour effectuer l'ensemble des calculs (rétroprojection+PSNR). Notre code doit être optimisé si l'on veut l'appliquer à des images conséquentes et reste à tester sur des sinogrammes d'acquisition d'objets d'études réels.

L'étude de la tomographie et de la rétroprojection filtrée fut instructive pour nous lors de la réalisation de ce PIDR.

### A compléter

### REMERCIEMENT

Nous tenons à remercier notre encadrant PIDR, M. Bellet, qui a été présent durant ces 5 mois d'étude pour répondre à nos questions, nous conseiller sur certains choix à prendre. Son expertise dans le domaine de la tomographie a su nous orienter lors de la quinzaine de réunions téléphoniques que nous avons eu les mercredis de cette année. Le sujet qu'il nous a proposé fut riche d'enseignement et instructif pour nous deux.

Nous tenons à remercier également M. Bombardier, professeur de Traitement Numérique de l'Image à Télécom Nancy en deuxième année, car son cours fut particulièrement utile par comprendre les traitements que nous avons dû effectuer sur nos images et analyser nos images résultantes.

### RÉFÉRENCES

- [1] F.Dubois, *Reconstruction des images tomographiques par rétroprojection filtrée*, CHU Saint Etienne, Revue de l'ACOMEN, vol 4, numéro 2 Saint Etienne, France : 1998
- [2] Blanc JY, Clément B, Von der Hardt P, *Fuel bundle examination techniques for the Phebus Fission Product Test*, IAEA TCM on behaviour of LWR Core Materials under Accident Conditions. Dimitrovgrad, Russia : 9-13 Oct., 1995 ([http://www.iaea.org/inis/collection/NCLCollectionStore/\\_Public/28/023/28023810.pdf](http://www.iaea.org/inis/collection/NCLCollectionStore/_Public/28/023/28023810.pdf))
- [3] Isabelle BLOCH, *Reconstruction d'images de tomographie*, Télécom ParisTech France (Isabelle.Bloch@enst.fr)
- [4] Pol Grasland-Mongrain, *Le principe de la tomographie* France : 1 Mai 2014, (<http://polgm.free.fr/petitescuriesdunet/index.php?post/2014/04/Le-principe-de-tomographie>)
- [5] Irène Buvat, *Reconstruction tomographique* France : Mars 2011, (file:///C:/Users/Pierre-Arnaud/Downloads/DESMNRecon\_2011.pdf)
- [6] L.Desbat, *Le scanner médical, la tomographie* TIMC-IMAG, UJF : 2004
- [7] Matteo Frigo, Steven G.Johnson, *FFTW*, version 3.3.6-pl1 15 Janv. 2017 (<http://www.fftw.org/fftw3.pdf>)
- [8] Pham Trong Tồn, tuteur : Dr.Nguyen Dinh Thuc, *La transformation de Radon et son application en traitement de la radiographie pulmonaire* Ho Chi Minh ville, Vietman : Juillet 2004
- [9] Irène Buvat, *Rétroprojection filtrée et reconstruction itérative*, U494 INSERM, Paris Paris, France : 8 Janv. 2002 (<http://www.guillemet.org/irene/course/APRAMENrecon.pdf>)



PSNR en fonction du pas angulaire et de la taille de l'image

