铺垫

0.2.2 序列和多元组

序列（sequence）是某些元素或成员按某种顺序排成的一个列表。通常把它写在一对圆括号内指明它为一个序列。例如，序列 7,21,57 可写为

$$(7,21,57)$$

在集合中可不考虑元素的顺序，但在序列中要考虑元素的顺序。因此，（7,21,57）和（57,7,21）是两个不同的序列。类似地，在集合中元素是否重复无关紧要，而在序列中元素是否重复却很重要。例如序列（7,7,21,57）与前两个序列都不相同，而集合 {7,21,57} 与 {7,7,21,57} 是相同的集合。

与集合一样，序列也可以是有穷序列或者无穷序列。通常把有穷序列称为**多元组**（tuple）。k 个元素的序列称为 **k 元组**（k-tuple）。例如，（7,21,57）为一个 3 元组。2 元组也称为**有序对**（ordered pair）。

集合与序列可以作为其他集合或序列的元素。例如，A 的**幂集**（power set）为 A 的所有子集的集合。设 A 为集合 {0,1}，则 A 的幂集为集合 {∅,{0},{1},{0,1}}。元素为 0 和 1 的所有有序对组成的集合为 {(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)}。

0.2.4 图

无向图（undirected graph）简称为**图**（graph），是由一个点的集合以及连接其中某些点的线段组成的。这些点称为**结点**（node）或**顶点**（vertex），线段称为**边**（edge），如图 0-5所示。

顶点的**度**（degree）是以这个顶点为端点的边的数目。在图 0-5（a）中所有顶点的度都为 2。在图 0-5（b）中所有顶点的度都为 3。任何两个顶点

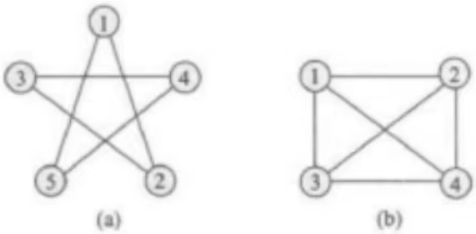

图 0-5 图的例子

之间至多有一条边。在某些情况下，允许图中含有始点和终点相同的边，并称其为**自环**（self-loop）。

设图 G 包含顶点 i 和顶点 j，有序对（i,j）表示连接 i 和 j 的边。在无向图中不考虑 i 和 j 的顺序，因此有序对（i,j）和（j,i）表示同一条边。由于顶点的顺序是无关紧要的，所以有时用二元集合来表示无向边，写为 $\{i,j\}$。如果 G 的顶点集为 V、边集为 E，则记为 $G=(V,E)$。可以用一个图形或更形式化地指定 V 和 E 来描述一个图。例如，图 0-5(a) 中图的形式化描述为

$$(\{1,2,3,4,5\},\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)\})$$

图 0-5（b）中图的形式化描述为

$$(\{1,2,3,4\},\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\})$$

通常可用图表示数据。例如：顶点为城市、边为连接城市的高速公路，或者顶点为人、边为连接他们的友情。有时为了方便，给图的顶点或边作标记，这样的图称作**标定图**（labeled graph）。图 0-6 画出一张图，它的顶点为城市。如果两个城市之间有直达航班，则它们之间有一条边，并且标上直达飞行的最低票价（美元）。

如果图 G 的顶点集为图 H 的顶点集的子集，则称 G 为 H 的**子图**（subgraph）。如图

如果图 G 的顶点集为图 H 的顶点集的子集，则称 G 为 H 的**子图**（subgraph）。如图 0-7 所示，G 的边均为 H 在对应顶点上的边。图 0-7 表示图 H 和子图 G。

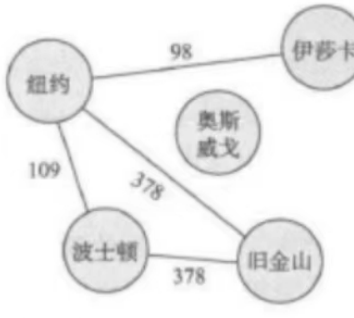

图 0-6　城市之间直达飞行的最低票价

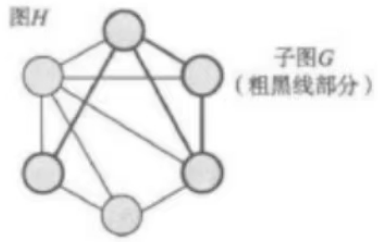

图 0-7　图 G（粗黑线部分）是 H 的子图

图中的**路径**（path）是由边连接的顶点序列。**简单路径**（simple path）是没有顶点重复的路径。如果每一对顶点之间都有一条路径，则称这个图为**连通图**（connected graph）。如果一条路径的起点和终点相同，则称这个图为一个**圈**（cycle）。如果一个圈包含至少 3 个顶点，并且除起点和终点之外没有顶点重复，则称它是一个**简单圈**（simple cycle）。**树**（tree）是连通且没有简单圈的图，如图 0-8 所示。有时专门指定树的一个顶点，把它称为这棵树的**根**（root）。一棵树中度数为 1 的顶点称为这棵树的**树叶**（leaf）。

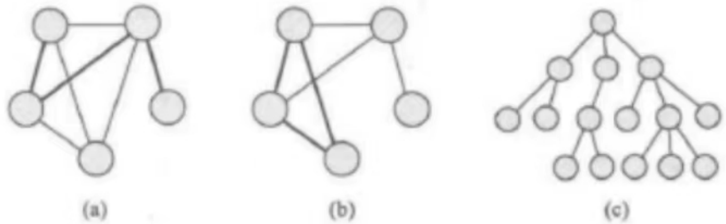

图 0-8　(a) 图中的一条路径，(b) 图中的一个圈，(c) 一棵树

在**有向图**（directed graph）中线段被箭头所替换，如图 0-9 所示。从一个顶点引出的箭头数为这个顶点的**出度**（outdegree），指向一个顶点的箭头数为这个顶点的**入度**（indegree）。

在有向图中，用有序对 (i,j) 表示从 i 到 j 的边。有向图 G 的形式化描述为 (V,E)，其中 V 为顶点集，E 为边集。图 0-9 中表示的有向图的形式化描述为

$$(\{1,2,3,4,5,6\},\{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3)\})$$

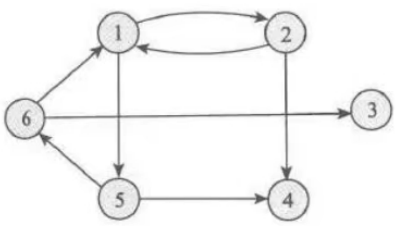

图 0-9　一个有向图

所有箭头的方向都与其前进的方向一致的路径称为**有向路径**（directed path）。如果从每一个顶点到另一个顶点都有一条有向路径，则称这个有向图为**强连通图**（strongly connected graph）。有向图是描述二元关系的便利方式。设 R 为一个二元关系，它的定义域为 $D\times D$，则标定图 $G=(D,E)$ 表示 R，其中 $E=\{(x,y)\mid xRy\}$。

例 0.8　表示例 0.6 中给出的关系的有向图如图 0-10 所示。■

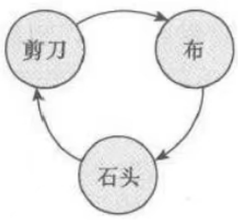

图 0-10　表示打败关系的有向图