

Vorlesung „Grundlagen der Robotik“

Prof. Dr.-Ing. Jozef Suchý

Stand: 26. 07. 2010

1. Einführung
 - 1.1 Historischer Rückblick
 - 1.2 Grundbegriffe
 - 1.3 Robotertypen
 - 1.4 Anwendungen von Robotern
 - 1.5 Zeitschriften zum Thema Robotik
 - 1.6 Konferenzen zum Thema Robotik
 - 1.7 Literatur zum Studium
2. Die Roboterkinematik
 - 2.1 Rotationsmatrizen
 - 2.2 Homogene Matrizen
 - 2.3 Quaternionen
 - 2.4 *Denavit-Hartenberg*-Transformation
3. Das direkte Problem der Robotik
4. Das Problem der inversen Kinematik

Anhang 1: Kinematische Gleichungen für den Stanford-Manipulator
5. Koordinatensysteme und Transformationen in der Roboterprogrammiersprache
6. Kinematik der Geschwindigkeiten
 - 6.1 Verwendung der *Jacobi*-Matrix in der Statik eines Manipulators
 - 6.2 Das Ellipsoid der Manipulationsfähigkeit
7. Dynamik der Roboter
8. Bahnplanung eines Roboters
 - 8.1 Einführung
 - 8.2 Bahnplanung in Gelenkkoordinaten
 - 8.3 Bahnplanung in Gelenkvariablen mit Splines
 - 8.4 Bahnplanung im kartesischen Raum (operational space)
9. Zulagen
 - 9.1 Physikalische Gesetzmäßigkeiten
 - 9.2 Die Ableitung der *Lagrange-Euler*-Dynamik

1. Einführung

1.1 Historischer Rückblick

Der Name „**Roboter**“ wurde von dem tschechischen Dramatiker *Karel Čapek* übernommen (Rossum's Universal Robots, 1921).

1. Ende der 1940-er Jahre: nukleare Industrie

Argonne National Laboratories

Master-Slave Konstruktion für Manipulation mit nuklearem Material.

- Wiederholen der Bewegungen des Masters (ein Mensch)
- Krafrückführung
- Mechanische Verbindung zwischen Master und Slave.
- später (1950-er Jahre) elektrische und hydraulische Antriebe.

2. Die Mitte der 1950-er Jahre:

- *George C. Devol* – Patent für Programmierung der Roboter (mechanisch)
- *Devol* und *Joseph F. Engelberger* gründen 1959 die Firma **Unimation Inc.**

3. H. A. Ernst (1962): rechnergesteuerte mechanische Hand MH-1.

- zum ersten Mal das adaptive Verhalten
- rechnergesteuert
- 6 Freiheitsgrade
- Rechner **TX-0**
- später: Kamera

4. Tomovic, Boni (1962):

- eine Hand mit Drucksensoren

5. USA 1963:

- Die Firma **AMF** (USA) produziert den kommerziellen Roboter **VERSATRAN**

6. Ende 1960-er Jahre – Stanford University, Artificial Intelligence Lab. :

- Stanford-Arm (*Victor Scheinmann*)
- Sensorik (TV-Kamera, Mikrofone)
- Forschung auf dem Gebiet der Kinematik und Dynamik von Robotern.
- Forschung auf dem Gebiet der Steuerung und Regelung von Robotern.

7. Japan (1968) – Firma Kawasaki Heavy Industries :

- eine Lizenz von **Unimation**.

8. USA (1968):

- der schreitende LKW für die US-Army.
- der Boston-Arm

9. Firma Cincinnati Milacron (USA, 1974):

- Roboter **T 3** (The Tomorrow's Tool), Tragfähigkeit 50 kg.

10. Mitte der 1970-er Jahre, Charles Stark Draper Lab. (M.I.T.), Stanford university, JPL, USA:

- Forschung auf dem Gebiet der automatischen Montage.
- Einführung der gezielten Nachgiebigkeit für Fügen (**RCC**)
- Krafrückführung
- Regelung unter Ausnutzung der Roboterdynamik

1.2 Grundbegriffe der Robotik

Manipulator

- besteht aus steifen Körpern verbunden durch Gelenke.
- besteht aus dem **Arm**, dem **Handgelenk** und dem **Endeffektor**.

Arm

- ist für die so genannte Grobbewegung verantwortlich.

Handgelenk

- ist für die so genannte dexterity (das Geschick) verantwortlich.

Endeffektor

- führt die Aufgabe aus.

Antriebe

- realisieren die Bewegungen der Gelenke.
- elektrische, hydraulische oder pneumatische Antriebe.

Sensorik

- interne (proprioceptive)
- externe (heteroceptive)

Steuerungssystem

- ist für die Steuerung des Roboters verantwortlich.

Gelenk

- rotatorisch (Drehgelenk)
- prismatisch

Gelenkvariable

- Gelenkposition oder Gelenkgeschwindigkeit (translatorische oder rotatorische).

Freiheitsgrad

- die Zahl der freien Bewegungen im kartesischen Raum
- im übertragenen Sinn – die Zahl der Gelenke

Freiheitsgrad eines Roboters

Allgemein: Der Freiheitsgrad (FHG) eines festen Körpers im dreidimensionalen Raum ist durch die Koordinaten von drei Punkten gegeben, die nicht auf einer Linie liegen:

$$P_1 : \quad (x_1, y_1, z_1)$$

$$P_2 : \quad (x_2, y_2, z_2)$$

$$P_3 : \quad (x_3, y_3, z_3)$$

Insgesamt sind das 9 Koordinaten. Sie sind nicht ganz frei zu wählen, weil sie durch die Bedingung des festen Körpers beschränkt sind. Anders gesagt heißt das, dass die Entfernungen zwischen jeden zwei Punkten konstant bleiben. Sie sind r_1 , r_2 und r_3 . Damit

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r_1^2$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = r_2^2$$

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = r_3^2$$

Die Zahl der Koordinaten minus der Zahl der Beschränkungen ergibt den Freiheitsgrad des Körpers. Diese 6 FHG können in der Regel folgendermaßen zugeordnet werden:

3 FHG für die Lage des Körpers

3 FHG für die Orientierung des Körpers

Weil der Roboter oft mit Körpern arbeitet, sollte so etwas auch für ihn gelten. Mit einem Roboter sollte es möglich sein, seinen Greifer oder seine Hand auch in eine beliebige Lage und Orientierung zu bringen. Das ist nur mit einer ausreichenden Zahl von Gelenken möglich. Man unterteilt die stationären Roboter grob in zwei Gruppen:

Serielle Roboter (Kinematik)

Parallele Roboter (Kinematik)

Serielle Roboter können nur zwei Arten von Gelenken haben, die sich jeweils nur mit einem FHG (Freiheit) auszeichnen:

Drehgelenke

Schubgelenke

Für Freiheitsgrad 6 muss ein serieller Roboter genau 6 Gelenke mit je einer Freiheit haben.

Parallele Roboter können auch Gelenke mit mehreren Freiheiten haben, z. B. Kardangelenke, Kugelgelenke.

In vielen Fällen gilt die **Grübler-Formel**:

$$F = 6 \cdot (n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i$$

Hier bedeuten:

F Freiheitsgrad des Roboters

n Zahl der Glieder inklusive des festen Teil

g Zahl der Gelenke

f_i Beweglichkeit (Freiheitsgrad, Freiheiten) des i -ten Gelenks.

So gilt für einen Roboter mit 6 Achsen (Gelenken):

$$F = 6 \cdot (7 - 6 - 1) + \sum_{i=1}^6 1 = 0 + 6 = 6$$

Für einen seriellen Roboter mit nur 3 Achsen gilt:

$$F = 6 \cdot (4 - 3 - 1) + \sum_{i=1}^3 1 = 0 + 3 = 3$$

Für einen planaren Roboter, d.h. für einen Roboter in einer Ebene gilt:

$$F = 3 \cdot (n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i$$

Punkt zu Punkt (point-to-point) Bewegung

- wichtig ist nur der Startpunkt und der Zielpunkt, nicht die Zwischenpunkte.

Bewegung auf einer Trajektorie

- auf der Raumkurve, alle Punkte sind wichtig.

Genauigkeit

- ist der Unterschied zwischen der **errechneten Position** und der **gemessenen Position**. Der Unterschied entsteht durch die ungenaue Kenntnis der Parameter a_i , α_i , d_i und θ_i , aber auch wegen Nachgiebigkeiten und Losen z. B. in den Gelenken.

Reproduzierbarkeit

- ist die Fähigkeit, die vorherige Position wieder zu erreichen.
Sie ist nicht nur von der Mechanik ab, sondern auch von der Sensorik und den Reglern abhängig. Reproduzierbarkeit > Genauigkeit, in der Regel 1 / 10. Die Genauigkeit hängt im allgemeinen von der Position ab.

Grobbewegung (gross motion)

- Anfahren eines vorgegebenen Zielpunktes. Man kann einen geradlinigen oder einen optimierten Weg wählen.

Feinbewegung (fine motion)

- schließt sich an die Grobbewegung an.
- Bewegung mit hoher Genauigkeit und Überschwungsfreiheit in Zielnähe.

Teach and play

Arbeitsumgebung

Strukturierte Arbeitsumgebung

- ist sehr gut bekannt.
- es sind keine oder wenige externe Sensoren notwendig.
- der Roboter ist fest programmiert.
- niedriger Grad der Autonomie (Beispiel: Schweißen kleiner Teile).

Nichtstrukturierte Arbeitsumgebung

- ist nur wenig oder nicht bekannt.
- es werden mehrere und / oder leistungsfähige Sensoren benötigt.
- hoher Grad der Autonomie (Serviceroboter für Reinigung einer Halle, in der sich Menschen bewegen).

Definition des Roboters (durch Robot Institute of America – RAI):

A robot is a reprogrammable multi-functional manipulator designed to move materials, parts, tools or specialised devices, through variable programmed motions for the performance of a variety of tasks.

Robotik ist interdisziplinär

Robotik arbeitet mit Regelungs- und Steuerungstechnik, Informatik, Mechanik, Maschinenbau, Mathematik, Elektronik, Sensorik, Antriebstechnik, Mikromechanik und weiteren zusammen. Die Gesamtheit dieser Disziplinen wird als **Mechatronik** bezeichnet.

Robotik ist eine der wichtigsten Anwendungen der **Mechatronik**.

1.3 Robotertypen

Stationäre Roboter

- verschiedene Typen der Kinematik (auch seriell oder parallel).
- unterschiedliche Anzahl der Freiheitsgrade.
- adaptive oder nichtadaptive.

Mobile Roboter

- schreitende oder hüpfende Roboter (1-beinig, zweibeinig, vier- oder sechsbeinige Roboter).
- rollende Roboter (die meisten mobilen Roboter).
- fliegende Roboter.
- schwimmende Roboter.

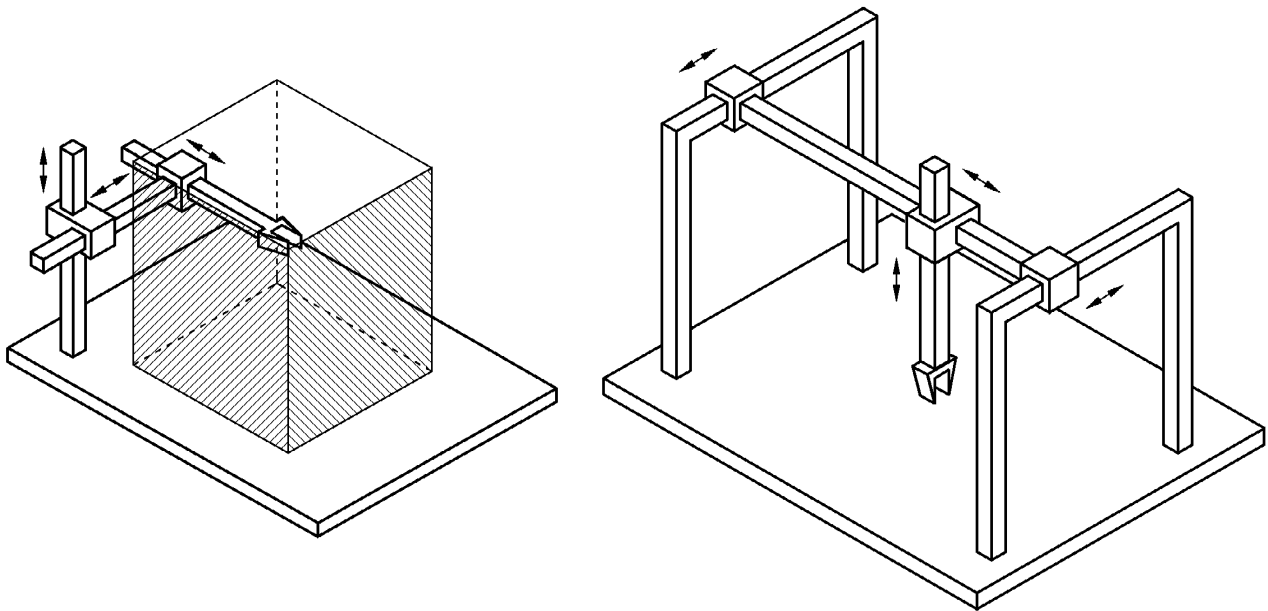
Andere Klassifizierung:

- Industrieroboter, Service-Roboter, Ernteroboter, Tauch-Roboter usw.

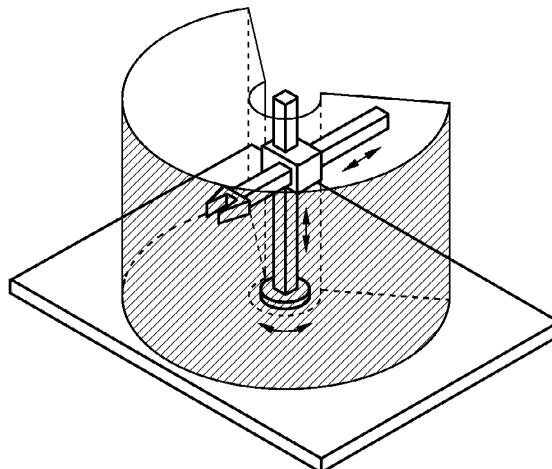
Geläufige Typen der Kinematik von seriellen Robotern

Den Typ der Kinematik beurteilt man nach den ersten drei Achsen. Man unterscheidet:

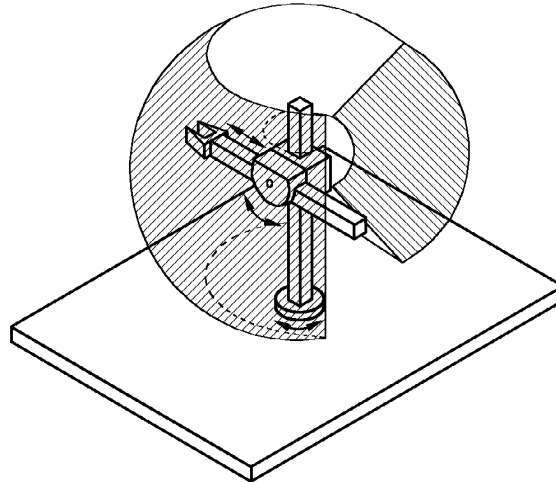
- a) Kartesische Kinematik (drei Schubgelenke)



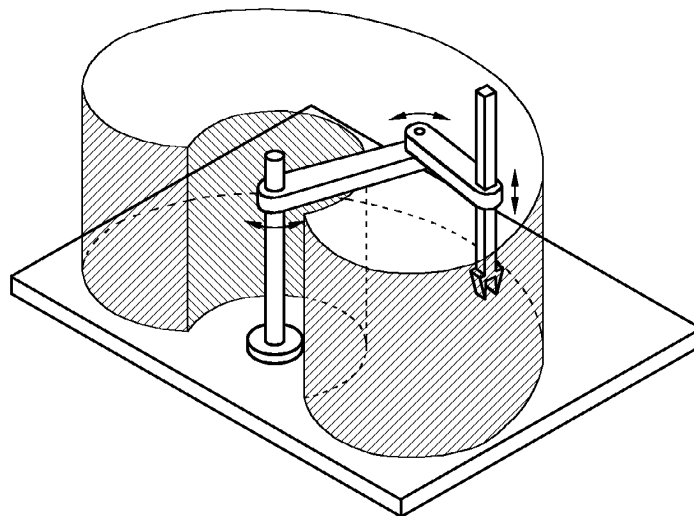
- b) Zylindrische Kinematik (ein Drehgelenk, zwei Schubgelenke)



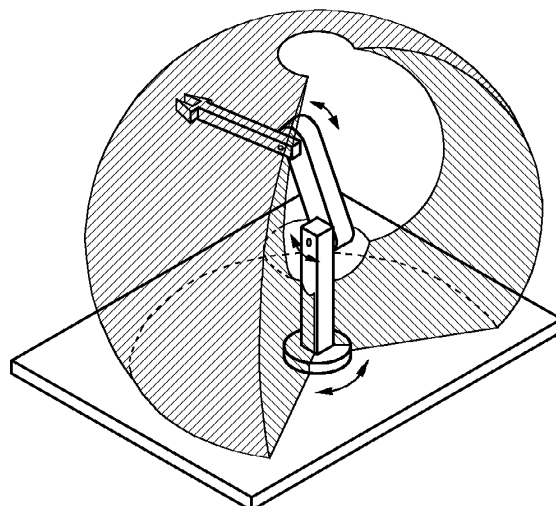
c) Sphärische Kinematik (zwei Drehgelenke, ein Schubgelenk)



d) SCARA (selective compliance assembly robot arm) – spezielle Kinematik



e) Anthropomorphe Kinematik (Drehkinematik) – drei Drehgelenke



Parallele Roboter

1.4 Anwendungen von Robotern

Klassen der Automatisierung der ereignisdiskreten Prozesse

1. Feste Automatisierung (hard automation)

- sehr große Serien, kleine Variabilität der Produkte.
- Einzweckmaschinen verwendet.
- nicht programmierbar (z. B. Füllung von Flaschen in der Getränkeindustrie).

2. Programmierbare Automatisierung

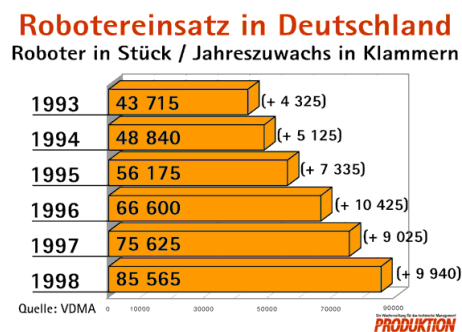
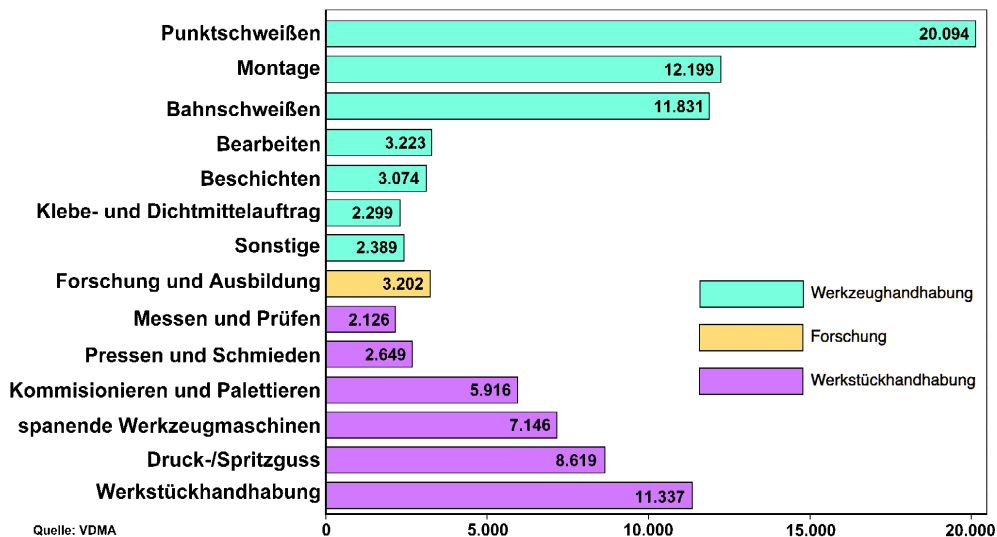
- mittlere Serien und / oder höhere Variabilität der Produkte.
- Maschinen sind programmierbar in bestimmten Grenzen.

3. Flexible Automatisierung – Aufgabengebiet der Roboter

- kleine Serien und / oder höhere Variabilität der Produkte.
- die Zeit der Umprogrammierung ist noch kürzer als in 2.

Anwendung der industriellen Robotik:

- In der Hauptsache in der Flexiblen Automatisierung /siehe auch Grafik)



1. Manipulation

- Palettierung
- Werkzeugwechsel
- Sortieren von Teilen
- Verpackung u.a.

2. Messen

- Inspektion
- Konturabtasten
- Detektierung von Fehlern u.a.

3. Bearbeitung

- Lichtbogenschweißen, Punktschweißen
- Lackieren
- Fräsen und Bohren
- Kleben und Abdichten
- Entgraten und Schleifen
- Montage von mechanischen und elektrischen Baugruppen
- Bestückung von Leiterplatten
- Schrauben
- Schneiden mit Laser- und Wasserstrahl
- Verdrahtung u.a.

1.5 Zeitschriften zum Thema Robotik

- International Journal of Robotics Research. M.I.T. Press, USA
- IEEE Transactions on Robotics and Automation, USA
- IEEE Robotics and Automation Magazine
- Journal of Robotic Systems
- International Journal of Robotics and Intelligent Systems
- Robotics and Autonomous Systems
- Advanced Robotics
- The Industrial Robot
- Robotersysteme, Bundesrepublik Deutschland (wird nicht mehr veröffentlicht)
- IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics
- IEEE Transactions on Automatic Control
- IEEE / ASME Transactions on Mechatronics
- AUTOMATICA (IFAC)
- Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control
- International Journal of Control, Francis, U.K.
- Mechanism and Machine Theory
- IEEE Control System Magazine

1.6 Konferenzen zum Thema Robotik

- IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)
- IEEE / RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)
- IFAC Symposium on Robot Control (SyRoCo)
- International Conference on Advanced Robotics (ICAR)
- International Symposium on Measurement and Control in Robotics (ISMCR)
- Robotics in Alpe-Adria-Region (RAAD) u. a.

1.7 Literatur zum Studium

1. *Fu, K. S., Gonzales, R. C. und Lee, C. S. G.*: ROBOTICS - Control, Sensing, Vision, and Intelligence. McGraw-Hill Inc., 1987
2. *McKerrow, P. J.*: Introduction to Robotics. Addison-Wesley Publishing Company, Sydney, 1991
3. *Sciavicco, L. und Siciliano, B.*: Modelling and Control of Robot Manipulators. McGraw-Hill Inc., 1996
4. *Stadler, W.*: Analytical Robotics and Mechatronics. McGraw-Hill Inc., 1996
5. *Spong, M. W. und Vidyasagar, M.*: Robot Dynamics and Control. John Wiley & Sons, 1987.
6. *Craig, J. J.*: Introduction to Robotics. Addison-Wesley Inc., 1986
7. *Paul, R. P.*: Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control. The Computer Control of Robot Manipulators. The M.I.T. Press, 1983
8. *Weber, W.*: Industrieroboter. Methoden der Steuerung und Regelung. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2002.

2. Die Roboterkinematik

2.1 Rotationsmatrizen

Die Darstellung der Orientierung und der Lage hat in der Robotik eine sehr große Bedeutung und findet vielfältige Anwendung. Die Repräsentation der Lage ist verhältnismäßig einfach, was aber nicht für die Orientierung gilt. Deshalb muss man sich mit der Repräsentation der Orientierung etwas eingehender beschäftigen.

Wir werden uns zuerst also der Repräsentation der Orientierung zuwenden, dann der Repräsentation der Lage (Verschiebung). Danach verbinden wir beide Repräsentationen in einer so genannten homogenen 4×4 Transformationsmatrix. Diese Matrix wird für die Koordinatentransformation am Roboter verwendet.

Die hier vorgestellte Methodik ist auch in der Computer-Graphik üblich.

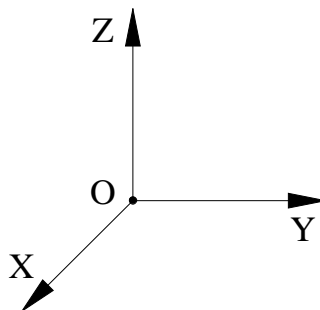
Verwendete Bezeichnungen

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad \vec{p}^T = [p_x \quad p_y \quad p_z], \quad \vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}$$

Vektoren werden in der Regel mit kleinen Buchstaben und Pfeil, Matrizen mit großen Buchstaben bezeichnet.

Der positive Sinn für einen Winkel wird im Gegenuhrzeigersinn sein.

Es werden nur rechthändige Koordinatensysteme (KS) verwendet, sie werden z. B. wie folgt bezeichnet: **KS O – XYZ**.



Für die Bezeichnung trigonometrischer Funktionen werden folgende Kurzformen verwendet:

$$\cos \theta = c \theta, \quad \cos(\theta_1 + \theta_2) = c(\theta_1 + \theta_2) = c_{12}$$

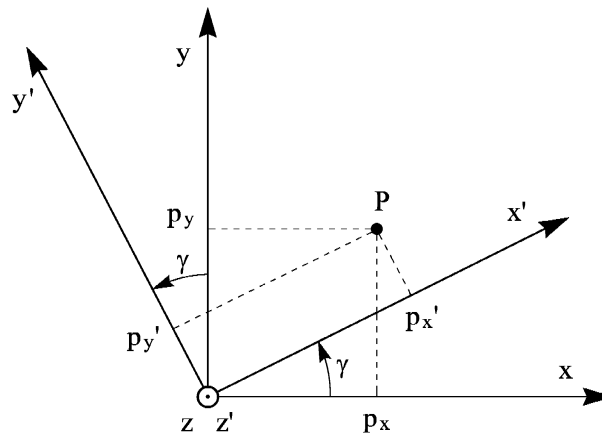
$$\sin \theta = s \theta, \quad \sin(\theta_2 + \theta_3) = s(\theta_2 + \theta_3) = s_{23}$$

Weil die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist, werden zwei Arten der Matrixmultiplikation unterschieden:

Multiplikation von rechts: Nachmultiplikation

Multiplikation von links: Vormultiplikation

Elementare Rotation über die Hauptachsen – zuerst Rotation um Achse Z und um den Winkel γ



$$p_x = p_{x'} \cos \gamma - p_{y'} \sin \gamma$$

$$p_y = p_{x'} \sin \gamma + p_{y'} \cos \gamma$$

$$p_z = p_{z'}$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x'} \\ p_{y'} \\ p_{z'} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{p} = R(Z, \gamma) \vec{p}'$$

$$R(Z, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R(Z, \gamma) = R_{Z, \gamma}$$

In ähnlicher Weise für X und Y

$$R(X, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

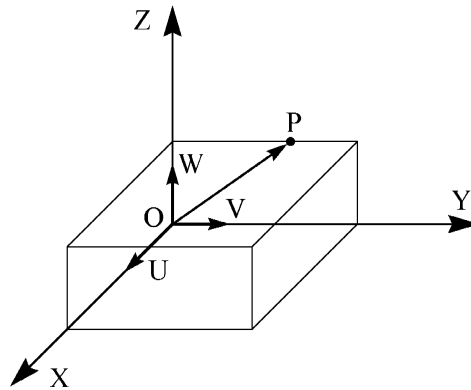
$$R(Y, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Eine allgemeine Herleitung der Rotationsmatrix

Zwei Koordinatensysteme werden im Weiteren verwendet:

1. Ein globales festes Koordinatensystem (Referenz-KS, Welt-KS), das **KS O – XYZ**.
2. Ein **KS O – UVW**, mit dem sich bewegenden Körper verbunden. Dieses KS hat also den selben Anfang, ist aber mit Hinsicht auf das **KS O – XYZ** allgemein gedreht (rotiert).

Wir werden den Punkt P in beiden KS betrachten. Der Vektor, der diesen Punkt definiert, sei \vec{p} .



Im **KS** $O - XYZ$ ist der Punkt P (durch Vektor \vec{p} definiert):

$$\vec{p} = \vec{p}_{XYZ} = p_x \vec{i}_x + p_y \vec{j}_y + p_z \vec{k}_z = [p_x, p_y, p_z]^T = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Im **KS** $O - UVW$:

$$\vec{p} = \vec{p}_{UVW} = p_u \vec{i}_u + p_v \vec{j}_v + p_w \vec{k}_w = [p_u, p_v, p_w]^T$$

Es gilt:

$$p_x = \vec{i}_x \cdot \vec{p} \quad , \quad p_y = \vec{j}_y \cdot \vec{p} \quad , \quad p_z = \vec{k}_z \cdot \vec{p}$$

Der Operator „Punkt“ bezeichnet das Skalarprodukt.

Setzt man jetzt für $\vec{p} \Rightarrow \vec{p}_{UVW}$:

$$p_x = \vec{i}_x \cdot \vec{p} = \vec{i}_x \cdot \vec{i}_u p_u + \vec{i}_x \cdot \vec{j}_v p_v + \vec{i}_x \cdot \vec{k}_w p_w$$

$$p_y = \vec{j}_y \cdot \vec{p} = \vec{j}_y \cdot \vec{i}_u p_u + \vec{j}_y \cdot \vec{j}_v p_v + \vec{j}_y \cdot \vec{k}_w p_w$$

$$p_z = \vec{k}_z \cdot \vec{p} = \vec{k}_z \cdot \vec{i}_u p_u + \vec{k}_z \cdot \vec{j}_v p_v + \vec{k}_z \cdot \vec{k}_w p_w$$

In der Matrix-Form:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{i}_x \cdot \vec{i}_u & \vec{i}_x \cdot \vec{j}_v & \vec{i}_x \cdot \vec{k}_w \\ \vec{j}_y \cdot \vec{i}_u & \vec{j}_y \cdot \vec{j}_v & \vec{j}_y \cdot \vec{k}_w \\ \vec{k}_z \cdot \vec{i}_u & \vec{k}_z \cdot \vec{j}_v & \vec{k}_z \cdot \vec{k}_w \end{bmatrix}}_{\vec{p}_{XYZ} = \quad \quad \quad R} \cdot \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

Umgekehrt gemacht:

$$p_u = \vec{i}_u \cdot \vec{p} \quad p_v = \vec{j}_v \cdot \vec{p} \quad p_w = \vec{k}_w \cdot \vec{p}$$

und $\vec{p} = \vec{p}_{xyz}$:

$$p_U = \vec{i}_U \cdot \vec{i}_x p_x + \vec{i}_U \cdot \vec{j}_y p_y + \vec{i}_U \cdot \vec{k}_z p_z$$

$$p_V = \vec{j}_V \cdot \vec{i}_x p_x + \vec{j}_V \cdot \vec{j}_y p_y + \vec{j}_V \cdot \vec{k}_z p_z$$

$$p_W = \vec{k}_W \cdot \vec{i}_x p_x + \vec{k}_W \cdot \vec{j}_y p_y + \vec{k}_W \cdot \vec{k}_z p_z$$

In der Matrix-Form:

$$\begin{bmatrix} p_U \\ p_V \\ p_W \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{i}_U \cdot \vec{i}_x & \vec{i}_U \cdot \vec{j}_y & \vec{i}_U \cdot \vec{k}_z \\ \vec{j}_V \cdot \vec{i}_x & \vec{j}_V \cdot \vec{j}_y & \vec{j}_V \cdot \vec{k}_z \\ \vec{k}_W \cdot \vec{i}_x & \vec{k}_W \cdot \vec{j}_y & \vec{k}_W \cdot \vec{k}_z \end{bmatrix}}_{\vec{p}_{UVW} = R^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Der Vergleich von R und R^{-1} ergibt:

$$R^{-1} = R^T$$

oder

$$R R^T = R^T R = I_3, \det(R R^T) = \det R \cdot \det R^T = 1 \Rightarrow \det R = 1 \text{ oder } -1.$$

Hier haben wir die folgende Eigenschaft der Determinanten verwendet:

$$\det R = \det R^T.$$

Das skalare Produkt ist

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} ist.

Für die Einheitsvektoren \vec{a} und \vec{b} :

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1,$$

also

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \alpha$$

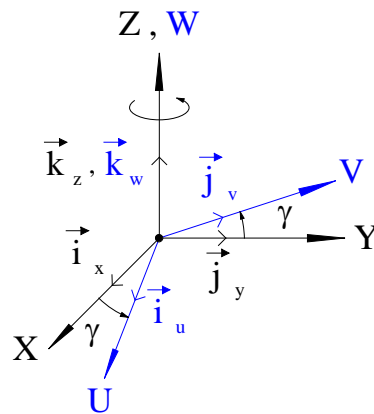
Es ergibt sich daraus, dass sich also in R und R^{-1} Richtungskosinusse befinden.

Auf diese Weise lassen sich auch vorherige einfachere Fälle der Rotation um die Hauptachsen darstellen:

1. Für die elementare Rotation, z. B. $R(Z, \gamma)$ mit $\vec{k}_z = \vec{k}_w$ und $\vec{k}_z, \vec{k}_w \perp \vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_u, \vec{i}_v$

$$R_{Z,\gamma} = \begin{bmatrix} \vec{i}_x \cdot \vec{i}_u & \vec{i}_x \cdot \vec{j}_v & \vec{i}_x \cdot \vec{k}_w \\ \vec{j}_y \cdot \vec{i}_u & \vec{j}_y \cdot \vec{j}_v & \vec{j}_y \cdot \vec{k}_w \\ \vec{k}_z \cdot \vec{i}_u & \vec{k}_z \cdot \vec{j}_v & \vec{k}_z \cdot \vec{k}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \cos(90^\circ + \gamma) & 0 \\ \cos(90^\circ - \gamma) & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{Z,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2. Keine Rotation (Nullrotation) – alle Einheits-Vektoren zueinander senkrecht oder identisch:

$$\vec{i}_X \cdot \vec{i}_U = \vec{j}_Y \cdot \vec{j}_V = \vec{k}_X \cdot \vec{k}_U = 1$$

sonst sind alle anderen Skalarprodukte = 0:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{3 \times 3}$$

Die Interpretation der Spalten der Rotationsmatrix:

Die 3×3 Rotationsmatrix hat eine interessante Struktur.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = [\vec{n}, \vec{s}, \vec{a}]$$

Im KS O – UVW :

$$\vec{i}_U = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{k}_W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix} = \vec{n}, \quad R \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix} = \vec{s}, \quad R \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} = \vec{a}$$

Man kann sehen, dass die Spalten der Rotationsmatrix die Haupteinheitsvektoren des KS – UVW im KS – XYZ repräsentieren. \vec{n} , \vec{s} , und \vec{a} sind durch die Rotationsmatrix R rotierte Vektoren \vec{i}_U , \vec{j}_V und \vec{k}_W . Weil sich bei der Rotation die Längen der Vektoren nicht ändern, bleibt die

Länge der rotierten Einheitsvektoren 1, also

$$1. \quad \vec{n} \cdot \vec{n} = \vec{s} \cdot \vec{s} = \vec{a} \cdot \vec{a} = 1$$

oder

$$2. \quad \|\vec{n}\| = \|\vec{s}\| = \|\vec{a}\| = 1$$

Die Einheitsvektoren \vec{n} , \vec{s} , und \vec{a} stehen zueinander senkrecht, weil sie im Prinzip die Einheitsvektoren \vec{i}_u , \vec{j}_v und \vec{k}_w im KS O – XYZ sind, deshalb

$$3. \quad \vec{n} \cdot \vec{s} = \vec{n} \cdot \vec{a} = \vec{s} \cdot \vec{a} = 0$$

und

$$4. \quad \vec{n} \times \vec{s} = \vec{a}, \quad \vec{s} \times \vec{a} = \vec{n}, \quad \vec{a} \times \vec{n} = \vec{s}$$

Interpretationen der Rotationsmatrix

1. Die Rotationsmatrix kann als Rotationstransformation der Koordinaten des gedrehten KS in das ursprüngliche feste KS verstanden werden. Beide KS haben den gemeinsamen Ursprung. Durch die inverse Matrix $R^{-1} = R^T$ kann man die Koordinaten vom festen KS zum gedrehten KS umrechnen.
2. Man kann den Ausdruck $R \vec{p}$ auch anders interpretieren als Rotation des Vektors \vec{p} um eine bestimmte Achse und um einen bestimmten Winkel. Diese Interpretation wird in vereinfachter Situation der Rotation um eine Hauptachse deutlich gemacht.
3. Repräsentation eines Objekts (Festkörpers): Mit einem Objekt kann man ein KS verbinden, in dem dieses Objekt beschrieben werden kann. Dreht sich dieses Objekt um den Ursprung des KS, dann dreht sich mit ihm auch sein KS. Dieses kann KS also stellvertretend für das Objekt stehen.
4. Repräsentation des Koordinatensystems: Weil die Säulen der Matrix R des gedrehten KS die Einheitsvektoren des gedrehten KS sind, repräsentiert die Rotationsmatrix R eindeutig dieses KS.

Komposition von Rotationen

$$\vec{p} = \text{nach Rotation von } \vec{p}' \text{ durch } R_1$$

$$\vec{p}' = \text{nach Rotation von } \vec{p}'' \text{ durch } R_2$$

$$\vec{p}'' = \text{der ursprüngliche Vektor}$$

$$\vec{p}' = R_2 \vec{p}''$$

$$\vec{p} = R_1 \vec{p}'$$

$$\vec{p} = R_1 \vec{p}' = R_1 \cdot (R_2 \vec{p}'') = R_1 R_2 \vec{p}''$$

Zwei Rotationen werden also durch die Multiplikation der entsprechenden Rotationsmatrizen zusammengelegt.

Die Regeln für Nach- und Vormultiplizieren bei der Komposition der Rotationen:

1. Rotiert das KS $O - UVW$ um eine der Hauptachsen des KS $O - XYZ$, dann mit der Rotationsmatrix vormultiplizieren.
2. Rotiert das KS $O - UVW$ um seine eigene Hauptachse, dann nachmultiplizieren.

Abkürzungen:

$$\cos \alpha = c \alpha \quad \text{und} \quad \sin \alpha = s \alpha$$

Beispiel: Drei Rotationen um die Hauptachsen des KS $O - XYZ$ nacheinander

1. Rotation um X , Winkel $\alpha - R(X, \alpha)$
2. Rotation um Z , Winkel $\gamma - R(Z, \gamma)$
3. Rotation um Y , Winkel $\beta - R(Y, \beta)$

$$R = R(Y, \beta) \cdot R(Z, \gamma) \cdot R(X, \alpha) = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

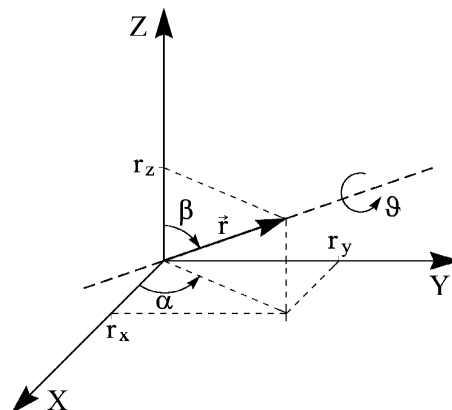
$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & s\beta s\alpha - c\beta s\gamma c\alpha & c\beta s\gamma + s\beta c\alpha \\ s\gamma & c\gamma c\alpha & c\gamma s\alpha \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma c\alpha + c\beta s\alpha & c\beta c\alpha - s\beta s\gamma s\alpha \end{bmatrix}$$

Bezeichnung:

$R_1^0 \Rightarrow$ vom 1. KS zum 0. KS (Referenz-KS)

1.KS in 0. KS repräsentiert

Rotation um eine allgemeine Achse (durch Koordinatenanfang):



Die Achse – wird durch den Einheitsvektor $\vec{r} = [r_x \ r_y \ r_z]^T$ repräsentiert
 – ϑ ist der Winkel der Rotation

Idee:

- die Achse \vec{r} durch Transformationen mit der Z -Achse identisch machen
- um die Z -Achse drehen um ϑ
- die Achse Z zurück zu \vec{r} transformieren

1. Rotation um die Z-Achse um den Winkel $-\alpha$: $R(Z, -\alpha)$
2. Rotation um die Y-Achse um den Winkel $-\beta$: $R(Y, -\beta)$
3. Rotation um die Z-Achse um Winkel ϑ : $R(Z, \vartheta)$
4. Rotation um die Y-Achse um Winkel $+\beta$: $R(Y, +\beta)$
5. Rotation um die Z-Achse um Winkel α : $R(Z, \alpha)$

$$R(\vec{r}, \vartheta) = R(Z, \alpha) \cdot R(Y, \beta) \cdot R(Z, \vartheta) \cdot R(Y, -\beta) \cdot R(Z, -\alpha)$$

$$\sin \alpha = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \quad \cos \alpha = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \quad \cos \beta = \frac{r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}$$

$$R(\vec{r}, \vartheta) = \begin{bmatrix} r_x^2 (1 - \cos \vartheta) + \cos \vartheta & r_x r_y (1 - \cos \vartheta) - r_z \sin \vartheta & r_x r_z (1 - \cos \vartheta) + r_y \sin \vartheta \\ r_x r_y (1 - \cos \vartheta) + r_z \sin \vartheta & r_y^2 (1 - \cos \vartheta) + \cos \vartheta & r_y r_z (1 - \cos \vartheta) - r_x \sin \vartheta \\ r_x r_z (1 - \cos \vartheta) - r_y \sin \vartheta & r_y r_z (1 - \cos \vartheta) + r_x \sin \vartheta & r_z^2 (1 - \cos \vartheta) + \cos \vartheta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Das inverse Problem:

Gegeben ist die Rotationsmatrix R , die Aufgabe ist es, den Vektor \vec{r} und den Winkel ϑ zu berechnen.

1. Der Winkel ϑ (Sp ist die Spur einer Matrix):

$$\text{Sp}(R) = r_{11} + r_{22} + r_{33} = \underbrace{(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)}_1 (1 - \cos \vartheta) + 3 \cos \vartheta = 1 + 2 \cos \vartheta$$

$$\vartheta = \arccos \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right)$$

2. Der Vektor \vec{r} :

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin \vartheta} \cdot \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Ansatz:

$$r_{32} - r_{23} = r_y r_z (1 - \cos \vartheta) + r_x \sin \vartheta - r_y r_z (1 - \cos \vartheta) + r_x \sin \vartheta = 2 r_x \sin \vartheta$$

$$r_x = \frac{1}{2 \sin \vartheta} (r_{32} - r_{23})$$

Die minimale Repräsentation der Orientierung

Rotations-Matrizen: 9 Parameter, sechs Nebenbedingungen für ihre Spalten

$R(\vec{r}, \vartheta)$: 4 Parameter = 3 für die Achse, 1 für den Winkel

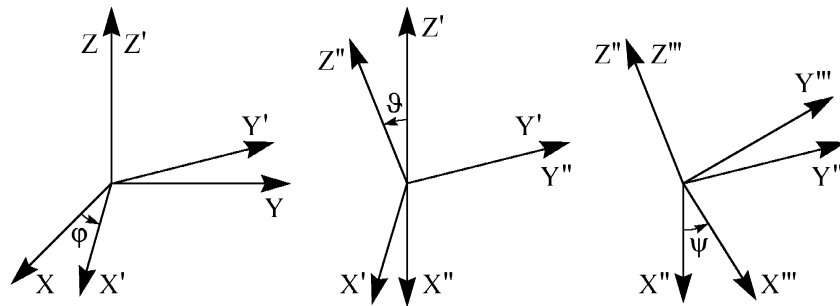
Bedingung für die Achse: $\|\vec{r}\| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = 1$

Es bleiben also nur 3 unabhängige Parameter.

Euler-Winkel: Sie entsprechen der minimalen Darstellung der Orientierung, wobei sie nur drei unabhängige Parameter brauchen.

Es gibt insgesamt 12 unterschiedliche Sätze für *Euler*-Winkel, zwei von ihnen werden öfter verwendet:

1. $(Z Y Z)(\varphi, \vartheta, \psi)$



a) Rotation um Z um φ – $R(Z, \varphi)$

b) Rotation um Y' um ϑ – $R(Y', \vartheta)$

c) Rotation um Z'' um ψ – $R(Z'', \psi)$

$$R_{\text{EUL}} = R(Z, \varphi) R(Y', \vartheta) R(Z'', \psi)$$

$$= \begin{bmatrix} c\varphi c\vartheta c\psi - s\varphi s\psi & -c\varphi c\vartheta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\vartheta \\ s\varphi c\vartheta c\psi + c\varphi s\psi & -s\varphi c\vartheta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\vartheta \\ -s\vartheta c\psi & s\vartheta s\psi & c\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Es ist wieder ein inverses Problem möglich:

$$\varphi = \text{atan2}(r_{23}, r_{13}) = \arctan \frac{s\varphi s\vartheta}{c\varphi s\vartheta}$$

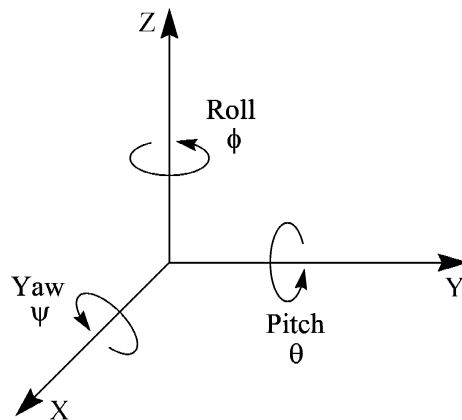
$$\vartheta = \text{atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \rightarrow \vartheta \in (0, \pi)$$

$$\psi = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31})$$

Noch eine Lösung für $(0, -\pi)$

2. R P Y -Winkel – Flugtechnik

R – roll P – pitch Y – yaw



- a) Rotation um X um ψ – $R(X, \psi)$ – yaw
- b) Rotation um Y um ϑ – $R(Y, \vartheta)$ – pitch
- c) Rotation um Z um φ – $R(Z, \varphi)$ – roll

$$R_{RPY} = R(Z, \varphi) \cdot R(Y, \vartheta) \cdot R(X, \psi)$$

$$= \begin{bmatrix} c\varphi c\vartheta & c\varphi s\vartheta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\vartheta c\psi + s\varphi s\psi \\ s\varphi c\vartheta & s\varphi s\vartheta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\vartheta c\psi - c\varphi s\psi \\ -s\vartheta & c\vartheta s\psi & c\vartheta c\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad \varphi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11})$$

$$\vartheta = \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right)$$

$$\psi = \text{atan2}(r_{32}, r_{33})$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \quad \varphi = \text{atan2}(-r_{21}, -r_{11})$$

$$\vartheta = \text{atan2}\left(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right)$$

$$\psi = \text{atan2}(-r_{32}, -r_{33})$$

Homogene Koordinaten

$$\begin{array}{ccc} 3 \times 1 & & 4 \times 1 \\ p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} & p' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ w \end{bmatrix} & \begin{array}{l} p_x = \frac{p'_x}{w} \\ p_y = \frac{p'_y}{w} \\ p_z = \frac{p'_z}{w} \end{array} \end{array}$$

w ist ein Skalierungsfaktor – wichtig z. B. in der Computergraphik.
In der Robotik ist $w = 1$ (außer Bildverarbeitung)

2.2 Homogene Transformationsmatrizen

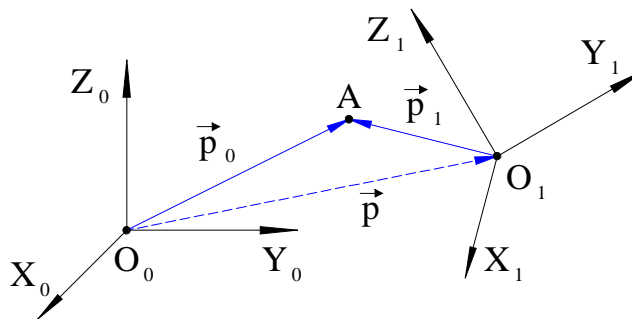
Darunter versteht man 4×4 -Matrizen, die außer der Rotation auch die Verschiebung (Translation) und andere Arten der geometrischen Transformationen repräsentieren können.

$$T = \left[\begin{array}{c|c} R_{3 \times 3} & \vec{p}_{3 \times 1} \\ \hline \vec{f}_{1 \times 3} & w_{1 \times 1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{Rotations-} & \text{Positions-} \\ \text{matrix} & \text{vektor} \\ \hline \text{Perspektiv-} & \text{Skalierungs-} \\ \text{transformation} & \text{faktor} \end{array} \right]$$

Robotik: $\vec{f} = [0 \ 0 \ 0]$

$$w = 1$$

Homogene Transformationsmatrizen arbeiten mit homogenen Vektoren.



$$\begin{bmatrix} \vec{p}_0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} \vec{p}_1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Translation ist einbezogen:

Wenn

$$R = I_3 \quad \text{und} \quad A \equiv O_1 (\vec{p}_1 = \vec{0})$$

dann

$$\vec{p}_0 = \vec{p}$$

\vec{p} : die Verschiebung beider Koordinatensysteme

T : besteht aus Rotation (R) und Verschiebung (\vec{p})

In der Robotik ist also (außer Bildverarbeitung):

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} R^T & -R^T \vec{p} \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right]$$

Errechnen von T^{-1}

$T \cdot T^{-1} = I \Rightarrow$ Vergleichen der Terme auf beiden Seiten

Spezialfälle:

Die reine Verschiebung: $T = \left[\begin{array}{c|c} I & \vec{p} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$

Die reine Rotation: $T = \left[\begin{array}{c|c} R & 0_{3 \times 1} \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right]$

Die reine Skalierung: $T = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & s \end{array} \right] \quad T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ - \\ s \\ y \\ - \\ s \\ z \\ - \\ s \end{bmatrix}$

Die lokale Skalierung: $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \\ 1 \end{bmatrix}$

Komposition der homogenen Transformationsmatrizen

Ähnlich wie bei den Rotationsmatrizen:

$$T_1 = \left[\begin{array}{c|c} R_1 & \vec{p}_1 \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \right], \quad T_2 = \left[\begin{array}{c|c} R_2 & \vec{p}_2 \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \right]$$

$$T_1 T_2 = \left[\begin{array}{c|c} R_1 & \vec{p}_1 \\ \hline \vec{0}^T & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} R_2 & \vec{p}_2 \\ \hline \vec{0}^T & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} R_1 R_2 & R_1 \vec{p}_2 + \vec{p}_1 \\ \hline \vec{0}^T & 1 \end{array} \right]$$

Die Interpretation der homogenen Matrix ist ähnlich wie die der Rotationsmatrix:

1. Die Homogene Matrix transformiert Punkte (Vektoren) aus einem verschobenen und gedrehten KS in das ursprüngliche KS, T^{-1} führt die umgekehrte Transformation aus.
2. Die Homogene Matrix verschiebt und dreht Vektoren (Verschiebung um \vec{p} und Drehen mit der Rotationsmatrix R).
3. Die Homogene Matrix repräsentiert die Lage und Orientierung der Objekte.

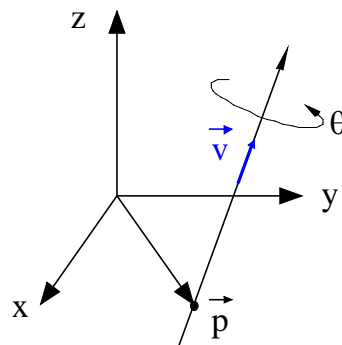
4. Die Homogene Matrix repräsentiert ein KS, das in Beziehung zu dem ursprünglichen KS verschoben (um Vektor \vec{p}) und gedreht (mit der Rotationsmatrix R) ist.

Auch für die Vor- und Nachmultiplikation gelten gleiche Regeln:

1. Dreht und / oder verschiebt man um die Hauptachse des ursprünglichen KS, dann wird mit der homogenen Matrix vormultipliziert (von links multipliziert).
2. Dreht und / oder verschiebt man um die Hauptachse des transformierten KS, dann wird mit der homogenen Matrix nachmultipliziert (von rechts multipliziert).

Rotation um eine beliebige Achse, die nicht durch den Anfang des Koordinatensystems verläuft

Für die Entwicklung dieser Möglichkeit verwendet man wieder die so genannte Konjunktion, also die Transformation vom Typ $N^{-1} T N$. Das nächste Bild zeigt die neue Situation.



Man möchte also über eine Achse drehen, die durch einen Punkt geht, der durch den Vektor \vec{p} gegeben ist. Hierbei führt diese Achse nicht durch den Anfang des Koordinatensystems. Diese Verschiebung der Achse vom Anfang des Koordinatensystems um \vec{p} wird durch die folgende Transformationsmatrix gegeben:

$$\begin{bmatrix} I & \vec{p} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Diese repräsentiert eine reine Verschiebung und keine Rotation. Die inverse Matrix dazu ist

$$\begin{bmatrix} I & -\vec{p} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Man schiebt die Rotationsachse durch die zweite Transformationsmatrix in den Koordinatenanfang, man rotiert um diese Achse um den Winkel θ und am Ende schiebt man die Rotationsachse wieder zurück durch die erste Rotationsmatrix:

$$\begin{bmatrix} I & \vec{p} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\vec{p} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & (I-R)\vec{p} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Wahl des Vektors \vec{p} vom Anfang des Koordinatensystems zu einem Punkt auf der Rotationsachse ist dabei beliebig. Wählt man nämlich einen anderen Punkt dieser Achse wie

$$\vec{p}' = \vec{p} + \lambda \vec{v},$$

wobei \vec{v} der Vektor in der Drehachse und λ ein beliebiger Skalar ist, dann gilt für den Verschiebungsanteil $(I - R) \vec{p}$:

$$\begin{aligned} (I - R) \vec{p}' &= (I - R) (\vec{p} + \lambda \vec{v}) = (I - R) \vec{p} + \lambda (I - R) \vec{v} = \\ &= (I - R) \vec{p} + \lambda (\vec{v} - R \vec{v}) = (I - R) \vec{p} + \lambda (\vec{v} - \vec{v}) = (I - R) \vec{p} \end{aligned}$$

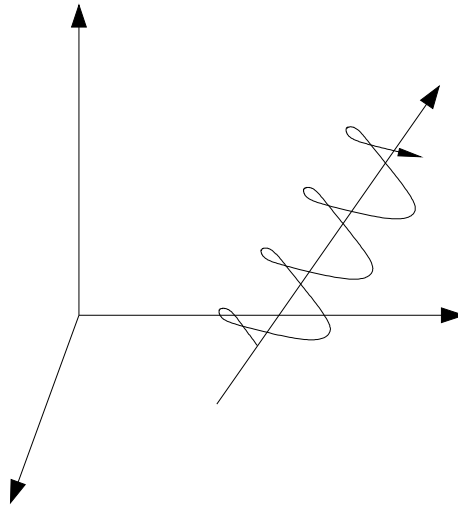
weil für den Vektor \vec{v} der Drehachse gilt

$$R \vec{v} = \vec{v} ,$$

\vec{v} ist der Eigenvektor, der dem Eigenwert 1 entspricht.

Theorem von Chasles (1830)

Dieses Theorem war eines der wichtigsten Resultate auf dem Gebiet der Kinematik. Es sagt aus, dass die Bewegungen aller festen Körper im 3-dimensionalen Raum, mit Ausnahme der reinen Verschiebungen, äquivalent der endlichen Schraubbewegung sind, d. h. der Rotation über die Achse und der Verschiebung über diese Achse.



Wenn diese Achse durch den Koordinatenanfang führt, dann ist diese Schraubbewegung durch die folgende Transformationsmatrix beschrieben:

$$\begin{bmatrix} R(\theta, \vec{v}) & \frac{\theta}{2\pi} p \vec{v} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Hier repräsentiert $R(\theta, \vec{v})$ eine 3×3 Rotationsmatrix, welche die Rotation um den Vektor \vec{v} den Winkel θ beschreibt. Die Zahl p ist der so genannte Gewindegang (engl. **pitch**). Es ist der Weg entlang der Achse pro Umdrehung. Bei einer Achse, die nicht durch den Koordinatenanfang führt, braucht man einen Vektor \vec{u} zu einem Punkt an der Drehachse (siehe oben).

Dann gilt nach den früheren Ausführungen:

$$\begin{bmatrix} I & \vec{u} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(\theta, \vec{v}) & \frac{\theta}{2\pi} p \vec{v} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\vec{u} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \frac{\theta}{2\pi} p \vec{v} + (I - R) \vec{u} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Wieder entsteht die Frage, wie man aus einer bekannten Matrix

$$T = \begin{bmatrix} R & \vec{t} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

eine Matrix gewinnt, welche die Form der Schraubbewegung deutlich macht, also die Matrix oben. Aus dem Vergleich der beiden Matrizen sieht man, dass dafür gelten muss:

$$(I - R)\vec{u} + \frac{\theta}{2\pi} p \vec{v} = \vec{t}.$$

Aus dieser Gleichung kann man den Wert des Gewindegangs oder aber auch andere Größen berechnen:

$$p = \frac{\theta}{2\pi} \vec{v} \cdot \vec{t}.$$

Extra Beschränkung:

Man muss \vec{u} so wählen, dass gilt $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$. Aus diesem Grund muss auch $R\vec{u} \perp \vec{v}$ sein, also

$$\vec{v} \cdot R\vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Aus der Gleichung oben ergibt sich

$$\vec{v} \cdot (I - R)\vec{u} = \vec{v} \cdot \left(\vec{t} - \frac{\theta}{2\pi} p \vec{v} \right)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot R\vec{u} = \vec{v} \cdot \left(\vec{t} - \frac{\theta}{2\pi} p \vec{v} \right)$$

$$0 = 0 - 0 = \vec{v} \cdot \left(\vec{t} - \frac{\theta}{2\pi} p \vec{v} \right) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{t} = \frac{\theta}{2\pi} p \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{\theta}{2\pi} p$$

$$p = \frac{2\pi}{\theta} (\vec{v} \cdot \vec{t})$$

Weiter muss man noch den Vektor \vec{v} und den Winkel θ finden.

2.3 Quaternionen

Quaternionen sind geeignet für die Repräsentation der Rotation.

Eine Quaternion ist eine Vierer-Gruppe (Vierer-Tupel) der angeordneten reellen Zahlen

$$s, a, b, c \quad \text{also} \quad (s, a, b, c)$$

Die vier Zahlen können auch mit vier Einheiten $+1, i, j, k$ verbunden werden:

$$s + i a + j b + k c \quad \text{oder} \quad s + a i + b j + c k$$

Eigenschaften der Einheiten:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$i j = k \quad j i = -k$$

$$j k = i \quad k j = -i$$

$$k i = j \quad i k = -j$$

$$q, Q = [s + \vec{v}] = s + a i + b j + c k = (s, a, b, c)$$

Der skalare Anteil: s

Der vektorielle Anteil: $\vec{v} = a i + b j + c k$

Die konjugierte Quaternion: $Q_1 = s - a i - b j - c k = s - (a i + b j + c k)$

Die Norm einer Quaternion: $s^2 + a^2 + b^2 + c^2$

Kehrwert einer Quaternion: $Q^{-1} = \frac{s - (a i + b j + c k)}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2}$

Einheitsquaternion: $s + a i + b j + c k$, wo $s^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Spezielle Fälle: $(s, 0, 0, 0)$ reelle Zahlen

$(s, a, 0, 0)$ komplexe Zahlen

$(0, a, b, c)$ Vektoren in 3D

Operationen: Addition, Subtraktion
addieren oder subtrahieren der entsprechenden Anteile

Multiplizieren:

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= (s_1 + a_1 i + b_1 j + c_1 k)(s_2 + a_2 i + b_2 j + c_2 k) = (s_1 + \vec{v}_1)(s_2 + \vec{v}_2) \\ &= s_1 s_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + s_1 \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \end{aligned}$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \vec{v}_1 & & \\ \vec{v}_2 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

wobei die Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 hier als Zeilenvektoren verstanden sind.

Das Produkt der Multiplikation von zwei Vektoren ausgedrückt wie Quaternionen ist wieder eine komplette Quaternion:

$$Q_1 = [0 + \vec{v}_1]$$

$$Q_2 = [0 + \vec{v}_2]$$

$$Q_1 \cdot Q_2 = -\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

Repräsentation der Rotation:

$\text{Rot}(\vec{n}, \theta)$ – Rotation um den Vektor \vec{n} und um den Winkel θ .

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad - \text{Einheitsvektor: } n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

$$Q = \text{Rot}(\vec{n}, \theta) = \cos \frac{\theta}{2} + \vec{n} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad - \text{Einheitsquaternion}$$

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + i n_x \sin \frac{\theta}{2} + j n_y \sin \frac{\theta}{2} + k n_z \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \|Q\| = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \underbrace{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)}_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1$$

Beispiel: Zusammenlegen von Rotationen:

Rotation um 90° um k , danach folgt die Rotation um 90° um j .

$$(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ)(\cos 45^\circ + k \sin 45^\circ) = \dots \quad \left(\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\dots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}i \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i+j+k}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \dots \quad (jk = i)$$

$$\dots = \cos 60^\circ + \frac{i+j+k}{\sqrt{3}} \sin 60^\circ = \text{Rot} \left(\frac{i+j+k}{\sqrt{3}}, 120^\circ \right)$$

Drehen eines Vektors:

\vec{r} : der zu drehende Vektor.

Q : Quaternion, welche die Rotation repräsentiert.

\vec{r}' : der Vektor, den man durch die Rotation erhält.

Dann

$$\vec{r}' = Q \vec{r} Q^{-1}$$

wobei \vec{r} als Quaternion mit $s = 0$, $\vec{v} = \vec{r}$ repräsentiert wird.

Zwei Rotationen:

$$\vec{r}'' = Q_2 Q_1 \vec{r} Q_1^{-1} Q_2^{-1}$$

Nachteil der Quaternionen:

Man kann nur die Rotation beschreiben und nicht die Translation.

Zusammenhang zwischen den Quaternionen und Rotationsmatrizen

1. $Q = (s, x, y, z)$ ist eine Einheitsquaternion, d. h. $s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Welche Rotationsmatrix entspricht ihr?

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2sz & 2xz + 2sy \\ 2xy + 2sz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2sx \\ 2xz - 2sy & 2yz + 2sx & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{bmatrix}$$

2. Gegeben sei die Rotationsmatrix. Welche Quaternion entspricht ihr?

$$s = \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\text{Sp } R + 1}$$

$$ix + jy + kz = \sin \frac{\theta}{2} \cdot \vec{r},$$

wobei \vec{r} der Einheitsvektor der Drehachse ist. Die Komponenten dieses Vektors werden nach bekannter Weise berechnet (siehe die Rotation um eine allgemeine Achse).

2.4 Denavit-Hartenberg-Transformation

Ein Roboter besteht aus festen Körpern $\begin{pmatrix} \text{link } i \\ \text{Arm } i \\ \text{Glieder } i \end{pmatrix}$, die durch Gelenke verbunden sind.

Mit jedem Arm (i) ist ein KS (i) verbunden.

Ein Punkt ist fest mit dem Arm i verbunden ausgedrückt im KS ($i-1$):

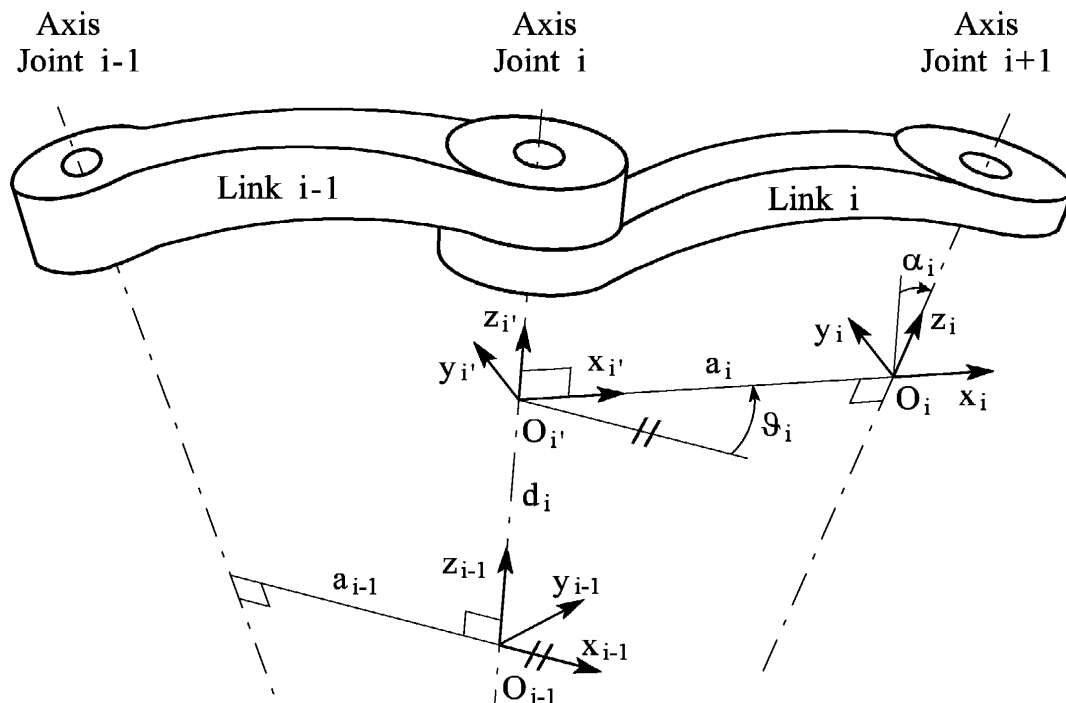
$$\vec{p}_{i-1} = T \cdot \vec{p}_i$$

Die Bezeichnung von T ist in diesem Fall:

$$T: {}^{i-1}A_i$$

Die Regeln für das Errechnen von ${}^{i-1}A_i$ haben *Denavit* und *Hartenberg* 1955 für kinematische Mechanismen vorgeschlagen.

Arm (i) – KS



z. B. ein 6-Freiheitsgrad-Roboter hat die folgenden Koordinatensysteme gegeben durch die Dreitupel der Vektoren:

$$(\vec{x}_0 \vec{y}_0 \vec{z}_0), (\vec{x}_1 \vec{y}_1 \vec{z}_1), \dots, (\vec{x}_6 \vec{y}_6 \vec{z}_6)$$

Drei Regeln (Repräsentation von *Denavit* und *Hartenberg*):

1. \vec{z}_{i-1} liegt entlang der Achse des i -ten Armes (ist aber mit dem i -ten Arm fest verbunden).
2. \vec{x}_i ist senkrecht zu \vec{z}_{i-1} und zeigt von \vec{x}_i weg (nicht zu \vec{x}_i hin).
3. \vec{y}_i – rechtshändiges KS
 - a) KS (O) – \vec{x}_0, \vec{y}_0 beliebig orientiert, \vec{z}_0 liegt in der 1. Achse
 - b) KS (n) – \vec{x}_n senkrecht zur Achse \vec{z}_{n-1}

Die Regeln nach *Sciavicco* und *Siciliano*:

1. \bar{z}_i in der Achse des Gelenkes $i + 1$ wählen.
2. O_i bei der Überschneidung der Achse \bar{z}_i und der gemeinsamen Senkrechten von \bar{z}_{i-1} und $z_i - O'_i$ in der Überschneidung der Senkrechten mit \bar{z}_{i-1} wählen.
3. Achse \bar{x}_i entlang der gemeinsamen Senkrechten in der Richtung von i zum $i + 1$ Gelenk.
4. \bar{y}_i – rechtshändiges KS

Spezialfälle: (siehe auch oben für **KS (O)** und **KS (n)**)

- c) parallele nachfolgende Achsen – Normale nicht eindeutig definiert.
- d) sich schneidende Achsen – \bar{x}_i beliebig.
- e) das Drehgelenk – nur die Richtung von \bar{z}_{i-1} möglich.

Denavit-Hartenberg-Parameter:

- a_i : die Entfernung zwischen O_i und O'_i .
- d_i : die Koordinate von O'_i entlang z_{i-1} .
- α_i : der Winkel zwischen \bar{z}_{i-1} und \bar{z}_i um die Achse \bar{x}_i positiv im Gegenuhrzeigersinn.
- $q_i, \mathcal{G}_i(\theta_i)$: der Winkel zwischen \bar{x}_{i-1} und \bar{x}_i positiv im Gegenuhrzeigersinn.

Veränderliche Parameter:

- $\theta_i(\mathcal{G}_i)$: im Falle eines Drehgelenkes
- d_i : im Falle eines Schubgelenkes

Transformation ${}^{i-1}A_i$ (*Denavit-Hartenberg*-Matrix):

1. Verschiebung um d_i in der Richtung von \bar{z}_{i-1}
2. Rotation um die Achse \bar{z}_{i-1} um $\mathcal{G}_i(\theta_i)$
3. Verschiebung des KS (i') um a_i entlang \bar{x}'_i
4. und Rotation um den Winkel α_i um die Achse \bar{x}'_i

1. und 2.:

$${}^{i-1}A_{i'} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. und 4.:

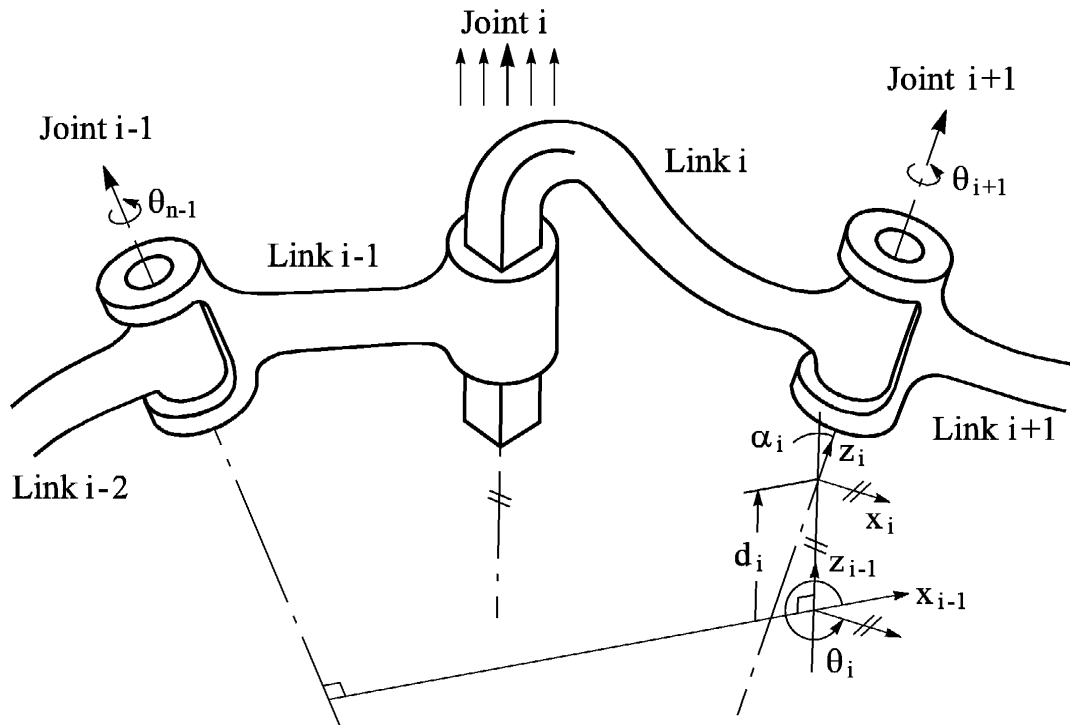
$${}^{i'}A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denavit-Hartenberg-Matrix für Drehgelenke:

$$A_i(\theta_i) = A_i = {}^{i-1}A_i = {}^{i-1}A_r \cdot {}^rA_i =$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\theta_i) & \vec{p}(\theta_i) \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Denavit-Hartenberg-Matrix für Schubgelenke ($i=n$):



$$A_i(d_i) = A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(d_i) & \vec{p}(d_i) \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Mit A_i -Matrizen kann man eine homogene Matrix 4×4 für den gesamten Roboter konstruieren oder aber von einem beliebigem Arm i :

$${}^0T_i = T_i = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot \dots \cdot {}^{i-1}A_i = {}^0A_1(q_1) \cdot {}^1A_2(q_2) \cdot \dots \cdot {}^{i-1}A_i(q_i)$$

$${}^0T_n = T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot \dots \cdot {}^{n-2}A_{n-1} \cdot {}^{n-1}A_n = {}^0A_1(q_1) \cdot {}^1A_2(q_2) \cdot \dots \cdot {}^{n-1}A_n(q_n)$$

$$q_i = \theta_i \quad \text{oder} \quad d_i$$

Ergänzungen:

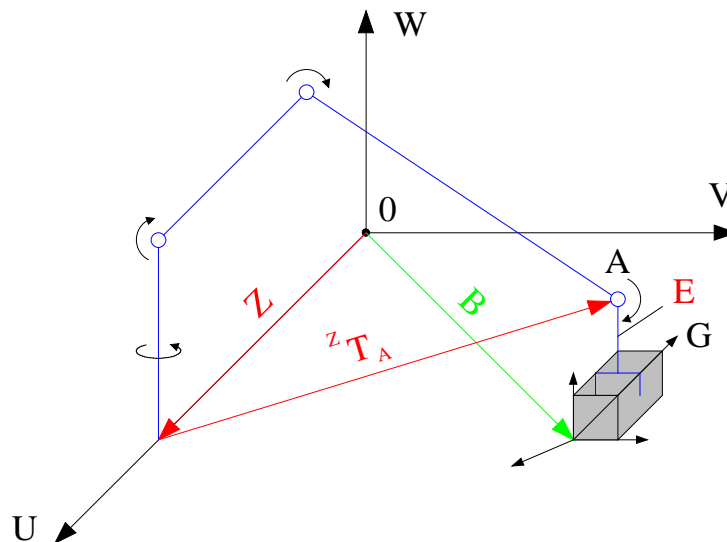
1. Das 0-te KS kann, aber muss aber nicht das Weltkoordinatensystem (Referenz-KS) sein. Ist das nicht der Fall, dann verwendet man noch die Transformation Z zwischen KS (0) und Welt-KS.

2. Das Instrument kann in der Regel eine andere Platzierung als in KS (6) haben.

Bezeichnet man die Transformation vom KS des Instrumentes KS (6) als E, dann kann man schreiben:

$${}^{\text{ref}} T_{\text{tool}} = Z \cdot T \cdot E$$

Wie man die homogene Transformationsmatrix T verwendet, kann man dem nächsten Beispiel entnehmen. Es geht um einen Roboter, der mit den Gegenständen auf einem Fließband arbeitet. Der Roboter befindet sich gerade in der Position, wo er den Gegenstand gegriffen hat.



Jetzt kann man die Lage und die Orientierung dieses Gegenstandes auf zwei Arten durch T-Matrizen repräsentieren:

Auf der einer Seite ist seine Position (Lage und Orientierung) durch die Repräsentation des Gegenstandes gegeben, d.h. die Position des Fließbands, die Position des Gegenstandes (seines Koordinatensystems) auf dem Fließband und die Position des Gegenstandes in seinem Schwerpunkt. Die ist für das erfolgreiche Greifen wichtig.

Auf der anderen Seite kann man die Position des Gegenstandes über den Roboter beschreiben: Die Position des Roboters im Welt-Koordinatensystem, die Position des Roboterflansches im Basis-Koordinatensystem des Roboters, die Position des Greifers im Koordinatensystem des Flansches und die Position des Gegenstandes im Koordinatensystem des Greifers. Das führt zu einer Transformationsgleichung:

$$Z \cdot {}^Z T_A \cdot E = \text{CONV}(t) \cdot B \cdot G$$

Hier ist

U, V, W Welt-KS, Z-Basis-KS

CONV Transformation vom Transportband zum Weltkoordinatensystem als Funktion der Zeit.

B Transformation des Gegenstandes auf dem Transportband zum Koordinatensystem des Laufbandes.

G Transformation des Koordinatensystems im Schwerpunkt des Gegenstandes zum Koordinatensystem des Gegenstandes.

Z Transformation des Koordinatensystems des Roboters zum Weltkoordinatensystem.

${}^Z T_A$ Transformation des Koordinatensystems des Roboterflansches zum Koordinatensystem des Roboters.

E Transformation des Koordinatensystems des Greifers zum Koordinatensystem des Flansches.

Hätten wir kein Fließband, wäre diese Transformationsgleichung einfacher:

$$Z \cdot {}^Z T_A \cdot E = B \cdot G$$

Die beschriebenen Koordinatentransformationen beschreiben zugleich die entsprechenden Koordinatensysteme.

Würde das Fließband anhalten, wobei sich der Roboter in der Greifposition über dem Gegenstand befindet, kann man z. B. aus der oberen Gleichung berechnen:

$$B = \text{CONV}^{-1} \cdot Z \cdot {}^Z T_A \cdot E \cdot G^{-1}$$

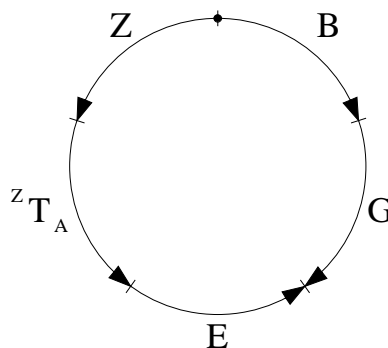
Oder aber es gilt für ${}^Z T_A$ bei der Durchführung einer Greifoperation:

$${}^Z T_A = Z^{-1} \cdot \text{CONV} \cdot B \cdot G \cdot E^{-1}$$

Für die Zeitableitung von ${}^Z T_A$ gilt

$$\frac{d {}^Z T_A}{dt} = Z^{-1} \cdot \frac{d(\text{CONV})}{dt} \cdot B \cdot G \cdot E^{-1}$$

Die Transformationsgleichung kann man auch mit Hilfe eines einfachen Graphen lösen:



Für die Lösung dieser Probleme muss man allerdings noch wissen, wie man die Transformation über den Roboter berechnet $({}^Z T_A)$.

3. Das direkte Problem der Robotik

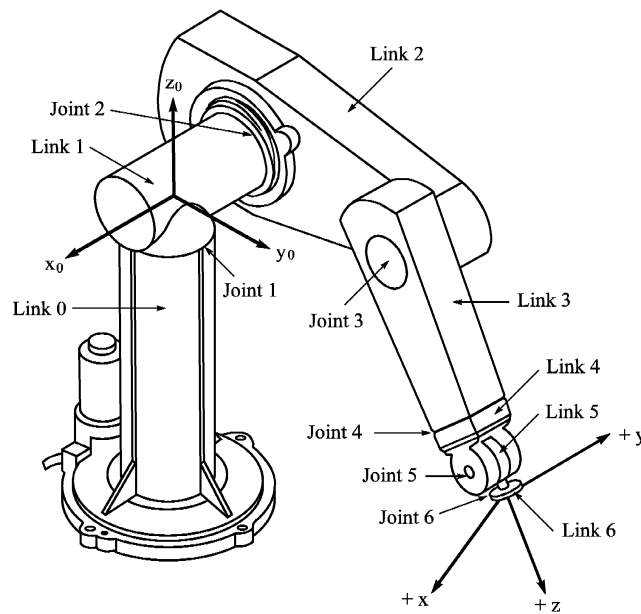
Das direkte Problem der Robotik besteht in der Berechnung der Matrix T , also die Lage und Orientierung des Endeffektors, wenn die Gelenkvariablen, d.h. Gelenkwinkel und Gelenkwege gegeben sind. Dieses Verfahren ist verhältnismäßig einfach, kann aber aufwendig sein.

Verfahren

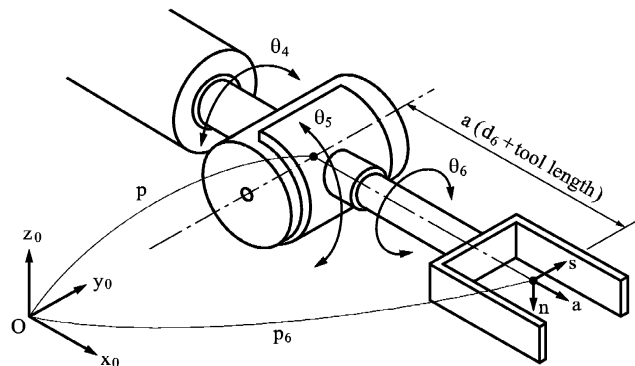
1. Die (festen und beweglichen) Koordinatensysteme definieren.
2. Die *Denavit-Hartenberg*-Parameter feststellen.
3. Die Tabelle der Parameter zusammenstellen.
4. Die *Denavit-Hartenberg*-Matrizen ausrechnen.
5. Die *Denavit-Hartenberg*-Matrizen in korrekter Reihenfolge multiplizieren.
6. Eventuell das neue Referenz-Koordinatensystem oder das Tool-Koordinatensystem beifügen.

Die Form der homogenen Matrix T ist also:

$$T = \begin{bmatrix} \bar{n} & \bar{s} & \bar{a} & \bar{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Das Hand-KS ist mit dem Greifer verbunden und wie folgt definiert:



\vec{n}

x (normal)

 \vec{s} (\vec{o}) – zu den Greiferfingern senkrecht

y (sliding)

 \vec{a} – der Zutrittsvektor, parallel zu den Greiferfingern

z (approach)

Die Parameter d_i , a_i , α_i und θ_i – Konstruktionsparameter des Herstellers.

θ_i oder d_i – begrenzt durch Anschläge.

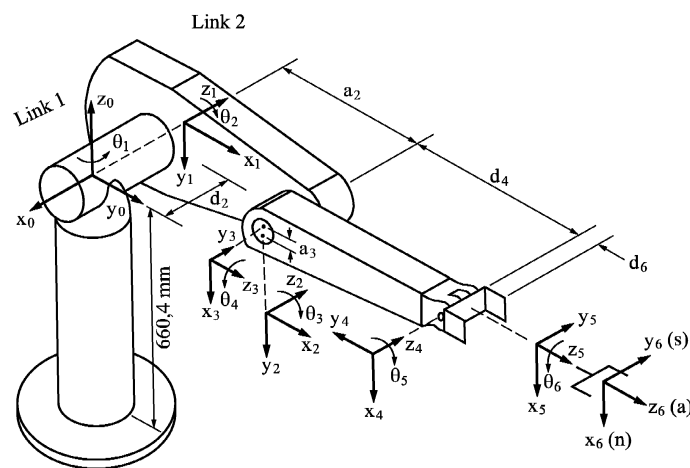
z. B. PUMA: θ_1 von -160° bis 160°

θ_2 von -225° bis 45°

usw.

Multiplizieren von 6 (n) Matrizen – ist umständlich

Kompromiss: je 3 und dann beide zusammen: PUMA



$$T_1 = {}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \cdot {}^2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & c_1 s_{23} & a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1 c_{23} - d_2 s_1 \\ s_1 c_{23} & c_1 & s_1 s_{23} & a_2 s_1 c_2 + a_3 s_1 c_{23} + d_2 c_1 \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & -a_2 s_2 - a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j) \quad , \quad c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$$

$$T_2 = {}^3 A_4 \cdot {}^4 A_5 \cdot {}^5 A_6$$

$$= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 s_6 & c_4 s_5 & d_6 c_4 c_5 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & d_6 s_4 s_5 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & d_6 c_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = T_1 T_2 = {}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \cdot {}^2 A_3 \cdot {}^3 A_4 \cdot {}^4 A_5 \cdot {}^5 A_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Das Vorgehen heißt: Das Problem der direkten Kinematik

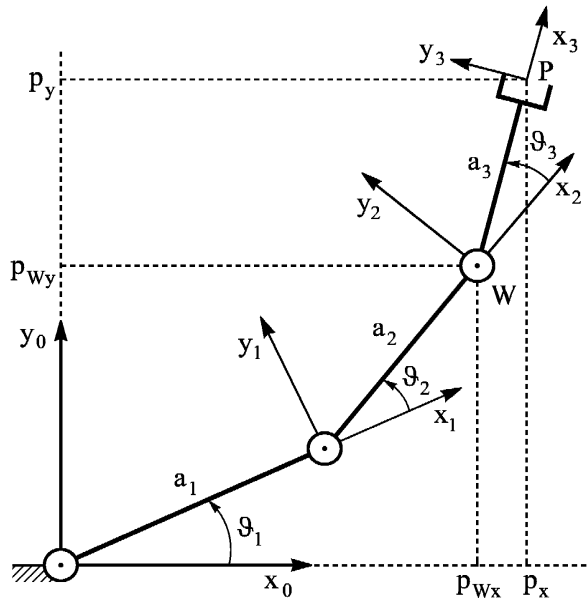
Resultat: Bekannte Transformation von KS (6) zu KS (0).

Man kennt die Orientierung und Position des Instruments (End-Effektors) im KS (0) oder aber auch in einem anderen Koordinatensystem, z. B. in KS (6).

→ siehe das Verfahren.

Beispiele:

Der planare Arm mit 3 Freiheitsgraden, 3 parallele Achsen, 4 KS



Denavit-Hartenberg-Parameter:

Arm	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	a_1	0	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} c_i &= \cos \vartheta_i \\ s_i &= \sin \vartheta_i \end{aligned}$$

$$T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 c_2 - s_1 s_2 & -c_1 s_2 - s_1 c_2 & 0 & a_2 c_1 c_2 - a_2 s_1 s_2 + a_1 c_1 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 & -s_1 s_2 + c_1 c_2 & 0 & a_2 s_1 c_2 + a_2 c_1 s_2 + a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_2 c_{12} + a_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_2 s_{12} + a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{12} c_3 - s_{12} s_3 & -c_{12} s_3 - s_{12} c_3 & 0 & a_3 c_{12} c_3 - a_3 s_{12} s_3 + a_2 c_{12} + a_1 c_1 \\ s_{12} c_3 + c_{12} s_3 & -s_{12} s_3 + c_{12} c_3 & 0 & a_3 s_{12} c_3 + a_3 c_{12} s_3 + a_2 s_{12} + a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der 3. Freiheitsgrad – Orientierung

Hier: 3 Bewegungsfreiheiten
3 Freiheitsgrade } keine Redundanz

z. B. 8 Bewegungsfreiheiten eines Roboters
6 Freiheitsgrade } Redundanz

Redundanz – für das Vermeiden bzw. Umgehen der Hindernisse.

Man spricht manchmal über die folgende Einteilung der einzelnen Achsen:

Die ersten 3 Freiheitsgrade: Position

Die letzten 3 Freiheitsgrade: Orientierung

Diese Formulierung sollte man aber nicht ganz genau nehmen, sondern vielmehr als eine Tendenz.

In der Praxis:

Die Spezifikation der Orientierung ist mit homogenen 4×4 -Matrizen unangenehm, weil in diesem Fall die Anschaulichkeit fehlt. Deshalb werden öfter andere Möglichkeiten verwendet:

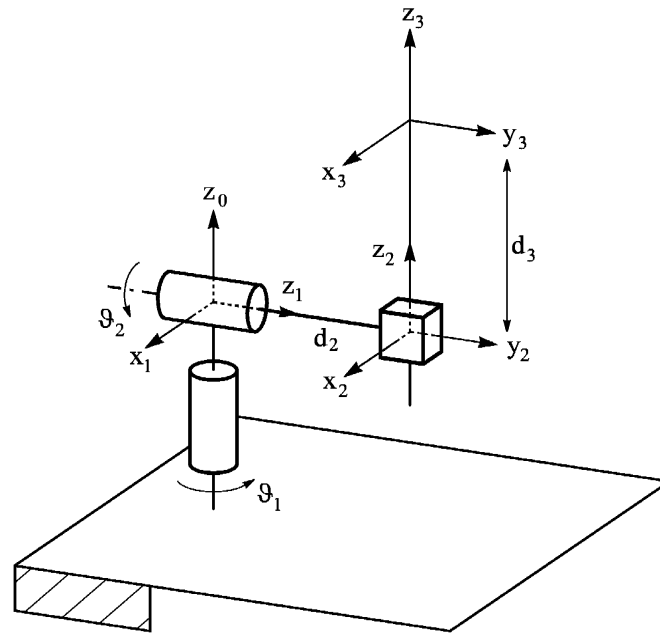
1. *Eulersche Winkel Z Y Z*
2. *Eulersche R P Y*-Winkel
3. eventuell eine andere Repräsentation der Rotation.

Dann kann man schreiben, indem man diese minimalen Repräsentationen der Rotation in die Rotationsmatrizen umrechnet:

$$1. \quad T = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & p_x \\ & R_{EUL} & & p_y \\ & & & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$2. \quad T = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & p_x \\ & R_{RPY} & & p_y \\ & & & p_z \\ \hline & 0^T & & 1 \end{array} \right]$$

Der sphärische Arm



Glied	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	ϑ_1
2	0	$+\frac{\pi}{2}$	d_2	ϑ_2
3	0	0	d_3	0

$${}^{i-1}A_i(\vartheta_i) = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i \cdot c\alpha_i & c\vartheta_i \cdot s\alpha_i & a_i \cdot c\theta_i \\ s\vartheta_i & c\vartheta_i \cdot c\alpha_i & -c\vartheta_i \cdot s\alpha_i & a_i \cdot s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

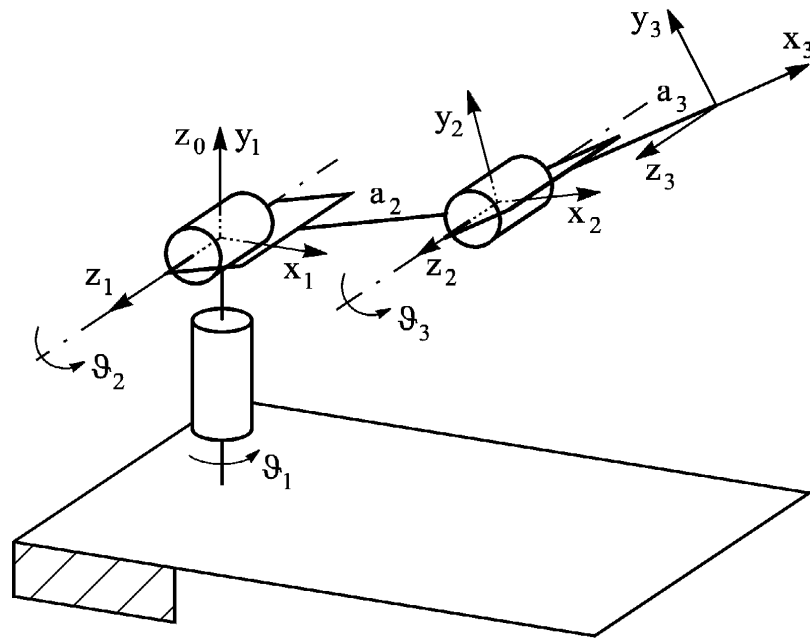
$${}^0A_1(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2(\vartheta_2) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3(d_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

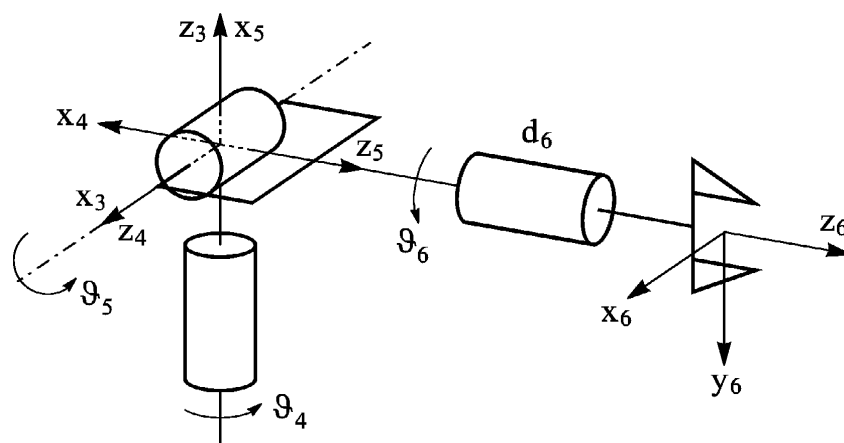
$$T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Anthropomorpher Arm



Glied	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\frac{\pi}{2}$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

Sphärisches (eigentlich antropomorphes) Handgelenk



Glied	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
4	0	$\frac{\pi}{2}$	0	ϑ_4
5	0	$\frac{\pi}{2}$	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6

$$T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 c_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jetzt, wo man die Bedeutung der *Denavit-Hartenberg*-Parameter genau kennt, kann man auch die Begriffe „absolute Genauigkeit“ und „Reproduzierbarkeit (Wiederholgenauigkeit)“ diskutieren:

Absolute Genauigkeit

- ist der Unterschied zwischen der **errechneten Position** und der **gemessenen Position**.
Der Unterschied entsteht durch die ungenaue Kenntnis der Parameter a_i , α_i , d_i , und θ_i , aber auch wegen Nachgiebigkeiten und Losen (Spiel) z. B. in Gelenken.

Reproduzierbarkeit (Wiederholgenauigkeit)

- ist die Fähigkeit, die vorherige Position zu erreichen.
Sie hängt nicht nur von der Mechanik ab sondern auch von der Sensorik und den Reglern.

Die Reproduzierbarkeit (Wiederholgenauigkeit) ist in der Regel mindestens $1/10$ der absoluten Genauigkeit.

Die (absolute) Genauigkeit hängt im Allgemeinen von der Position ab.

Wenn man über die Genauigkeit der Roboter spricht, meint man in der Regel eben die Wiederholgenauigkeit. Ein Orientierungswert dafür ist bei vielen typischen Robotern 0,1 mm. Einige Roboter, z. B. diejenigen mit einer sehr guten und steifen Mechanik, erreichen auch bessere Werte. Der Roboter RX 90 der Firma Stäubli hat einen Wert der Wiederholgenauigkeit von 0,05 mm.

4. Das Problem der inversen Kinematik

Die inverse Kinematik stellt ein schwierigeres Problem als die direkte Kinematik dar.

1. Die Lage und Orientierung in 3D-Raum ist bekannt.
2. Die Gelenkkoordinaten werden ermittelt.

Methode der Lösung: Trigonometrische Gleichungen (TG)

Die TG gewinnt man durch das Vergleichen der spezifizierten Position und Orientierung in der Form homogener Matrizen mit den Elementen der Matrix.

$$T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6$$

Verföhrung: Die Funktionen \cos und \arccos sowie \sin und \arcsin zu verwenden ist nicht empfehlenswert!

1. $\cos \varphi = \cos (-\varphi)$ – nicht eindeutig definierter Winkel.
2. Dividieren durch $\sin \varphi$ ist häufig der Fall in dieser Situation. In der Nähe $\varphi = 0$ sind die errechneten Werte nicht genau.
3. Wenn $\varphi = 0$ oder $\varphi = 180^\circ$, ist die Situation von 2. unlösbar.

Die Funktion atan 2: wird statt \cos verwendet

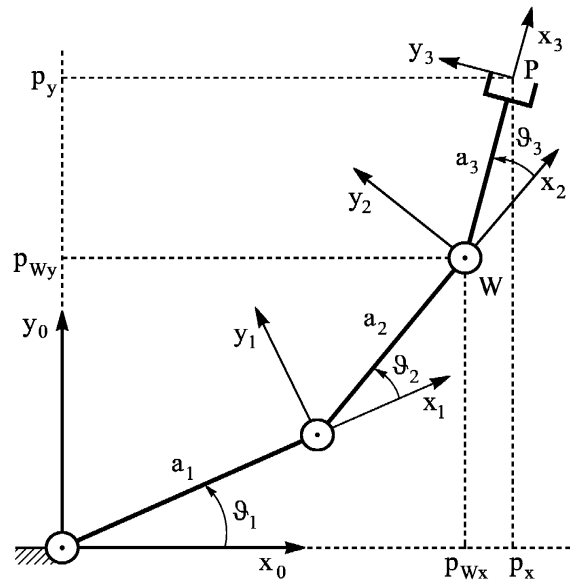
1. Es handelt sich im Prinzip um Arkustangens.
2. Die Funktion atan 2 hat zwei Argumente, y und x .
3. Die Funktion atan 2 beurteilt die Vorzeichen und auf der Basis errechnet sie Winkel im Intervall $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.
4. Die Funktion atan 2 detektiert Situationen, wo x oder y gleich Null sind und behandelt sie entsprechend.

Klassen der Methoden:

1. Algebraische Methoden
2. Geometrische Methoden

Die Methoden verlangen Erfahrung, Einsicht und Intuition. Es geht nicht um Algorithmen im strengen Sinne des Wortes, weil man nicht immer ein Resultat bekommt. Ein Algorithmus sollte resultativ sein, dass heißt, nach Verwendung eines Algorithmus müsste entweder ein Ergebnis oder aber eine Aussage über die Nichtlösbarkeit zur Verfügung stehen.

Der planare Arm



Die Position und Orientierung – p_x, p_y, ϕ (Winkel mit x -Achse) sind gegeben.

Gesucht werden $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$.

Die Gleichungen:

$$\phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3$$

$$\left. \begin{aligned} p_{wx} &= p_x - a_3 \underbrace{\overbrace{c\phi}^{c_{123}}} = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ p_{wy} &= p_y - a_3 \underbrace{\overbrace{s\phi}^{s_{123}}} = a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{aligned} \right\} \text{ von der T-Matrix}$$

Jetzt kommt die Intuition

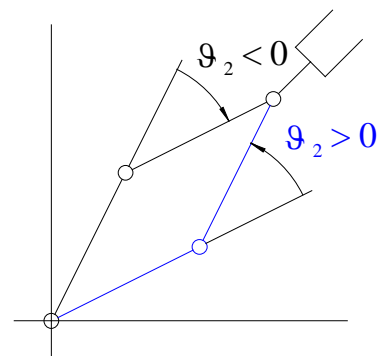
$$p_{wx}^2 + p_{wy}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2$$

$$c_2 = \frac{p_{wx}^2 + p_{wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}$$

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$$

+ Position Ellbogen unten

– Position Ellbogen oben



$$\vartheta_2 = \text{atan2}(s_2; c_2)$$

Weiter $\vartheta_2 \rightarrow$ für p_{wx}, p_{wy} in die Gleichungen einsetzen:

$$a_1 c_1 + a_2 c_1 c_2 - a_2 s_1 s_2 = p_{wx}$$

$$a_1 s_1 + a_2 s_1 c_2 + a_2 s_2 c_1 = p_{wy}$$

oder, weil c_2 und s_2 bekannt sind

$$(a_1 + a_2 c_2) c_1 - a_2 s_2 s_1 = p_{wx}$$

$$a_2 s_2 \cdot c_1 + (a_1 + a_2 c_2) s_1 = p_{wy}$$

Zwei lineare Gleichungen mit zwei Veränderlichen c_1, s_1 :

$$a_1 c_1 + a_2 c_1 c_2 - a_2 s_1 s_2 = p_{wx}$$

$$a_1 s_1 + a_2 s_1 c_2 + a_2 s_2 c_1 = p_{wy}$$

$$(a_1 + a_2 c_2) c_1 - a_2 s_2 \cdot s_1 = p_{wx} \quad / \quad (a_1 + a_2 c_2)$$

$$a_2 s_2 \cdot c_1 + (a_1 + a_2 c_2) s_1 = p_{wy} \quad / \quad a_2 s_2$$

$$(a_1 + a_2 c_2)^2 c_1 - a_2 s_2 (a_1 + a_2 c_2) s_1 = (a_1 + a_2 c_2) p_{wx}$$

$$a_2^2 s_2^2 c_1 + (a_1 + a_2 c_2) \cdot a_2 s_2 s_1 = a_2 s_2 p_{wy}$$

$$c_1 [a_2^2 s_2^2 + (a_1 + a_2 c_2)^2] = (a_1 + a_2 c_2) p_{wx} + a_2 s_2 p_{wy}$$

$$c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{wx} + a_2 s_2 p_{wy}}{p_{wx}^2 + p_{wy}^2}$$

$$\begin{aligned} a_2^2 s_2^2 + (a_1 + a_2 c_2)^2 &= a_2^2 s_2^2 + a_1^2 + 2 a_1 a_2 c_2 + a_2^2 c_2^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 c_2 = p_{wx}^2 + p_{wy}^2 \end{aligned}$$

Hier wurde für den letzten Schritt eine der Gleichungen von oben verwendet.

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{wy} - a_2 s_2 p_{wx}}{p_{wx}^2 + p_{wy}^2}$$

ähnlich

$$c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{wx} + a_2 s_2 p_{wy}}{p_{wx}^2 + p_{wy}^2}$$

$$\vartheta_1 = \text{atan2}(s_1, c_1)$$

Den letzten Winkel bekommt man aus der Kenntnis des Orientierungswinkel (dieser ist beim inversen Problem immer bekannt) und der Winkel ϑ_1 und ϑ_2 .

$$\vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2$$

Der verwendete Trick:

Die Wahl eines geeigneten Punktes in der Struktur, welcher die Errechnungen einfacher macht. Diese Vorgehensweise wird auch in komplizierteren Fällen verwendet.

Schneiden sich z. B. die letzten drei Achsen (die drei Orientierungsachsen) in einem Punkt (sphärisches Handgelenk), dann wählt man diesen Punkt.

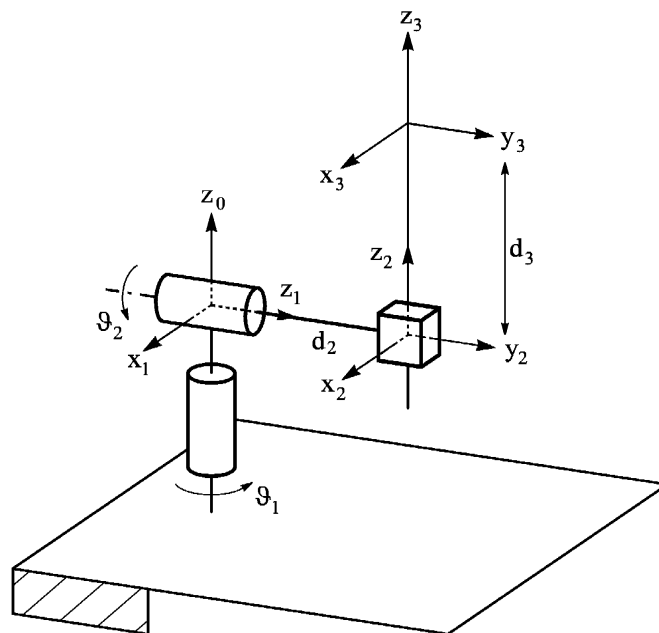
Dann sind die Position und die Orientierung durch \vec{p} und $R = [\vec{n}, \vec{o}, \vec{a}]$ gegeben:

$$\vec{p}_w = \vec{p} - d_6 \vec{a}$$

Im Falle eines nichtredundanten Manipulators (*Pieper 1968*):

1. Errechne die Handgelenkposition $\vec{p}_w = f(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$
2. Errechne die inverse Kinematik als $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$
3. Errechne ${}^0R_3(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$
4. Errechne ${}^3R_6(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) = {}^0R_3^T R = {}^0R_3^{-1} ({}^0R_1 {}^1R_2 {}^2R_3 {}^3R_4 {}^4R_5 {}^5R_6)$
5. Errechne die inverse Kinematik für die Orientierung $\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6$

Der sphärische Arm



\vec{p}_w – der Anfang des 3. KS

$$T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3$$

Separation der Variablen:

$$({}^0A_1)^{-1} \cdot T = {}^1A_2 \cdot {}^2A_3$$

Bei näherer Untersuchung sieht man, dass der Vergleich der Elemente der 4. Spalten auf den beiden Seiten der letzten Gleichung ausreichend ist (deshalb schreibt man den Rotationsanteil der Matrix nicht):

$$T = \left[\begin{array}{c|c} R & \begin{matrix} p_{wx} \\ p_{wy} \\ p_{wz} \end{matrix} \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \right]$$

$$({}^0A_1)^{-1} \cdot T = \left[\begin{array}{cccc} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \overbrace{\left[\begin{array}{c|c} R & \begin{matrix} p_{wx} \\ p_{wy} \\ p_{wz} \end{matrix} \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \right]}^T = \left[\begin{array}{c|c} R & \begin{matrix} c_1 p_{wx} + s_1 p_{wy} \\ -p_{wz} \\ -s_1 p_{wx} + c_1 p_{wy} \end{matrix} \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \right]$$

$${}^1A_2 \cdot {}^2A_3 = \left[\begin{array}{c|c} R & \begin{matrix} d_3 s_2 \\ -d_3 c_2 \\ d_2 \end{matrix} \\ \hline 0^T & 1 \end{array} \right]$$

Also:

$$\left[\begin{array}{c} c_1 p_{wx} + s_1 p_{wy} \\ -p_{wz} \\ -s_1 p_{wx} + c_1 p_{wy} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} d_3 s_2 \\ -d_3 c_2 \\ d_2 \end{array} \right]$$

$$\Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow$$

$$f(\vartheta_1) \qquad \qquad \qquad f(\vartheta_2, d_3)$$

1. ϑ_1 wird aus der durch direkten Vergleich erhaltenen Gleichung berechnet:

$$-s_1 p_{wx} + c_1 p_{wy} = d_2$$

Für die Lösung dieser Gleichung verwendet man die folgende Substitution:

$$t = \tan \frac{\vartheta_1}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad s_1 = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\sin 2\vartheta = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad \sin \vartheta = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$$

$$\cos 2\vartheta = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \quad \Rightarrow \quad \cos \vartheta = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

Aus der letzten trigonometrischen Gleichung bekommt man die quadratische Gleichung:

$$(d_2 + p_{wy}) t^2 + 2 p_{wx} t + d_2 - p_{wy} = 0$$

$$t = \frac{-p_{wx} \pm \sqrt{p_{wx}^2 + p_{wy}^2 - d_2^2}}{d_2 + p_{wy}}$$

$$\frac{\vartheta_1}{2} = \text{atan} 2 \left(-p_{wx} \pm \sqrt{p_{wx}^2 + p_{wy}^2 - d_2^2}, d_2 + p_{wy} \right) \Rightarrow \vartheta_1 = 2 \text{atan} 2 (\dots)$$

2. Dividieren der zwei ersten Komponenten der ursprünglichen vektoriellen Gleichung (siehe oben):

$$\frac{p_{wx} c_1 + p_{wy} s_1}{-p_{wz}} = \frac{d_3 s_2}{-d_3 c_2}$$

$$\vartheta_2 = \text{atan} 2 (p_{wx} c_1 + p_{wy} s_1, p_{wz})$$

3. Quadrieren der zwei ersten Komponenten und Summe bilden:

$$p_{wx} c_1 + p_{wy} s_1 = d_3 s_2$$

$$-p_{wz} = -d_3 c_2$$

$$(p_{wx} c_1 + p_{wy} s_1)^2 = d_3^2 s_2^2$$

$$p_{wz}^2 = d_3^2 c_2^2$$

$$d_3 = \sqrt{(p_{wx} c_1 + p_{wy} s_1)^2 + p_{wz}^2}, \quad d_3 > 0$$

Algebraische Methode nach Paul:

$$T = T_6 = {}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \cdot {}^2 A_3 \cdot {}^3 A_4 \cdot {}^4 A_5 \cdot {}^5 A_6$$

1. Folgende Gleichungen werden betrachtet:

$$({}^0 A_1)^{-1} \cdot T = {}^1 T_6 = {}^1 A_2 \cdot {}^2 A_3 \cdot {}^3 A_4 \cdot {}^4 A_5 \cdot {}^5 A_6$$

$$({}^1 A_2)^{-1} \cdot ({}^0 A_1)^{-1} \cdot T = {}^2 T_6$$

$$({}^2 A_3)^{-1} \cdot ({}^1 A_2)^{-1} \cdot ({}^0 A_1)^{-1} \cdot T = {}^3 T_6$$

⋮

$$({}^4 A_5)^{-1} \cdot ({}^3 A_4)^{-1} \cdot ({}^2 A_3)^{-1} \cdot ({}^1 A_2)^{-1} \cdot ({}^0 A_1)^{-1} \cdot T = {}^5 T_6 = {}^5 A_6$$

2. Zur Verfügung stehen durch den Vergleich der nichttrivialen Terme in jeder dieser Matrixgleichungen 12 einfache Gleichungen.

Bevorzugt werden die Gleichungen, die an der rechten Seite Null oder eine Konstante ergeben, oder aber wo die einfachsten Terme stehen.

3. Einer der vier Typen der trigonometrischen Funktionen wird gelöst.
4. Bei der nächsten Gleichung zu 2. übergehen.

Stanford Manipulator – Methode von R. Paul

$${}^0A_1 = A_1, {}^1A_2 = A_2, \dots, {}^5A_6 = A_6, T = T_6, \vec{o} = \vec{s}$$

$$A_1^{-1} \cdot T = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Funktionen f_{11} , f_{12} und f_{13} werden zu jeder Säule der T-Matrix verwendet.

$$f_{11} = c_1 x + s_1 y, \quad x = n_x, o_x, a_x, p_x, \quad y = n_y, o_y, a_y, p_y$$

$$f_{12} = -z, \quad z = n_z, o_z, a_z, p_z$$

$$f_{13} = -s_1 x + c_1 y$$

Also:

$$A_1^{-1} \cdot T = \begin{bmatrix} f_{11}(\vec{n}) & f_{11}(\vec{o}) & f_{11}(\vec{a}) & f_{11}(\vec{p}) \\ f_{12}(\vec{n}) & f_{12}(\vec{o}) & f_{12}(\vec{a}) & f_{12}(\vec{p}) \\ f_{13}(\vec{n}) & f_{13}(\vec{o}) & f_{13}(\vec{a}) & f_{13}(\vec{p}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es handelt sich um die Gleichung (A1.11) am Ende von Anhang 1.

Es gibt keine konstanten (trivialen) Terme außer (3,4). Daraus bekommt man:

$$f_{13}(\vec{p}) = d_2$$

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_2 \quad (\text{trigonometrische Gleichung für } \theta_1)$$

Eine Möglichkeit der Lösung: Substitution

$$\left. \begin{aligned} p_x &= r \cos \phi \\ p_y &= r \sin \phi \end{aligned} \right\} \text{Für } r \text{ und } \phi$$

Diese Substitution ist für zwei beliebige reelle Zahlen immer möglich. Dabei ist:

$$r = +\sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad \text{und} \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{p_y}{p_x} \right)$$

$$-\sin \theta_1 \cdot r \cdot \cos \phi + \cos \theta_1 \cdot r \cdot \sin \phi = d_2$$

$$\cos \theta_1 \cdot \sin \phi - \sin \theta_1 \cos \phi = \frac{d_2}{r}$$

$$\sin(\phi - \theta_1) = \frac{d_2}{r}$$

Weil

$$\frac{d_2}{r} > 0$$

ist, gilt für 0

$$0 < \theta_1 - \phi < \pi$$

$$\cos(\phi - \theta_1) = \sqrt{1 - \sin^2(\phi - \theta_1)} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{d_2}{r}\right)^2}$$

$$\theta_1 = \phi + \theta_1 - \phi = \phi - (\phi - \theta_1)$$

$$\phi - \theta_1 = \tan^{-1} \frac{\frac{d_2}{r}}{\pm \sqrt{\frac{r^2 - d_2^2}{r^2}}} = \tan^{-1} \frac{d_2}{\pm \sqrt{r^2 - d_2^2}}$$

$$\boxed{\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{p_y}{p_x} \right) \mp \tan^{-1} \frac{d_2}{\sqrt{r^2 - d_2^2}}}$$

Damit ist θ_1 bekannt und die linke Seite von $A_1^{-1} \cdot T$ jetzt definiert! Wir suchen auf der anderen (rechten) Seite die einfachsten Terme. In unserem Fall sind das (1,4) und (2,4).

$$\begin{aligned} s_2 d_3 &= c_1 p_x + s_1 p_y \\ -c_2 d_3 &= -p_z \end{aligned} \quad \left(\Rightarrow d_3 = \sqrt{(c_1 p_x + s_1 p_y)^2 + p_z^2} \right)$$

d_3 – ist jetzt Gelenkvariable, $d_3 > 0$ und deshalb

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{c_1 p_x + s_1 p_y}{p_z}$$

Aus der Gleichung $A_1^{-1} \cdot T = {}^1T_6$ kann man wahrscheinlich nichts mehr gewinnen, deshalb sollte man mit der folgenden Gleichung fortfahren, also

$$A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \cdot T = {}^2T_6$$

Nach (A1.10 - Paul):

$$\begin{bmatrix} f_{21}(\bar{n}) & f_{21}(\bar{o}) & f_{21}(\bar{a}) & f_{21}(\bar{p}) \\ f_{22}(\bar{n}) & f_{22}(\bar{o}) & f_{22}(\bar{a}) & f_{22}(\bar{p}) \\ f_{23}(\bar{n}) & f_{23}(\bar{o}) & f_{23}(\bar{a}) & f_{23}(\bar{p}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & 0 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ s_5 s_6 & s_5 s_6 & c_5 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wobei:

$$f_{21} = c_2 (c_1 x + s_1 y) - s_2 z$$

$$f_{22} = -s_1 x + c_1 y$$

$$f_{23} = s_2 (c_1 x + s_1 y) + c_2 z$$

Durch Vergleich der Terme (3,4)

$$s_2 (c_1 p_x + s_1 p_y) + c_2 p_z = d_3$$

Damit ist auf der linken Seite alles bekannt. Wir haben also d_3 !

Prinzipiell könnte man jetzt von (1,3) und (2,3) die Lösung für θ_4 finden:

$$c_4 s_5 = c_2 (c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z$$

$$s_4 s_5 = -s_1 a_x + c_1 a_y + d_2$$

Ist $\theta_5 < 0$, dann ist $s_5 < 0$. Die Vorzeichen werden umgekehrt sein, also

$$\theta_4 = : \theta_4 + 180^\circ$$

$\theta_5 = 0$: Der unbestimmte Fall. Der Wert von θ_4 wird beibehalten so wie er vorher war.

Aus der Gleichung kann man jetzt wahrscheinlich nichts mehr gewinnen.

Wir fahren mit der nächsten Gleichung fort, wobei wir eine überspringen, weil sie keine nützlichen Gleichungen anbietet:

$$\underbrace{A_4^{-1} \cdot A_3^{-1} \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}}_{f_{41}, f_{42}, f_{43}} \cdot T = {}^4 T_6$$

$$\begin{bmatrix} f_{41}(\vec{n}) & f_{41}(\vec{o}) & f_{41}(\vec{a}) & \overbrace{f_{41}(\vec{p})}^{=0} \\ f_{42}(\vec{n}) & f_{42}(\vec{o}) & f_{42}(\vec{a}) & 0 \\ f_{43}(\vec{n}) & f_{43}(\vec{o}) & f_{43}(\vec{a}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & s_5 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & -c_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^4T_6$$

$$f_{41} = c_4 \left[c_2 (c_1 x + s_1 y) - s_2 z \right] + s_4 \left[-s_1 x + c_1 y \right]$$

$$f_{42} = -s_2 (c_1 x + s_1 y) - c_2 z$$

$$f_{43} = s_4 \left[c_2 (c_1 x + s_1 y) - s_2 z \right] + c_4 \left[-s_1 x + c_1 y \right]$$

θ_5 : aus (1,3) und (2,3)

$$\theta_5 = \tan^{-1} \frac{c_4 \left[c_2 (c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z \right] + s_4 \left[-s_1 a_x + c_1 a_y \right]}{s_2 (c_1 a_x + s_1 a_y) - c_2 a_z}$$

θ_6 : aus (1,2) und (2,2) oder aus (1,1) und (2,1)

Anhang 01: Kinematische Gleichungen für den Stanford-Manipulator

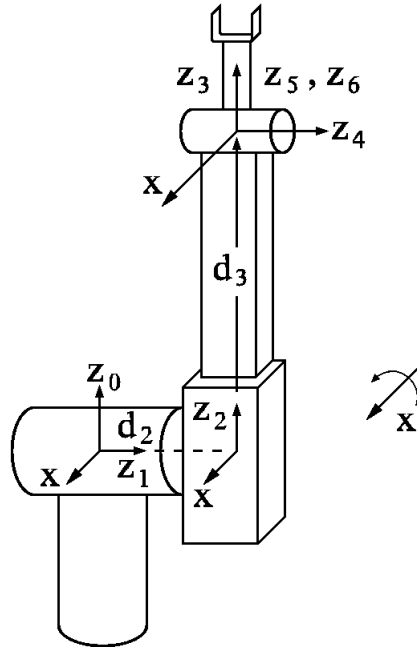


Bild A 01.01: Koordinatensysteme des Stanford-Manipulators (*Scheinman*)

In Bild A 01.01 ist der Stanford-Manipulator (*Scheinman*) mit Koordinatensystemen dargestellt, welche den einzelnen Verbindungen zugeordnet sind. Dabei wollen wir folgende Kurzformen für den Sinus und Cosinus des Winkels θ verwenden:

$$\sin \theta_i = s_i \quad \cos \theta_i = c_i$$

$$\sin(\theta_i + \theta_j) = s_{ij} \quad \cos(\theta_i + \theta_j) = c_{ij}$$

Die Parameter sind in Tabelle A 01.01 aufgeführt.

Link	Variable	α	a	d	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
1	θ_1	-90°	0	0	0	-1
2	θ_2	90°	0	d ₂	0	1
3	d ₃	0°	0	d ₃	1	0
4	θ_4	-90°	0	0	0	-1
5	θ_5	90°	0	0	0	1
6	θ_6	0°	0	0	1	0

Tabelle A 01.01 Link-Parameter für den Stanford-Manipulator

Die A-Transformationen für den Stanford-Manipulator sind folgende:

$$(A1.1) \quad A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A1.2) \quad A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A1.3) \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A1.4) \quad A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A1.5) \quad A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A1.6) \quad A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Ergebnisse der A-Transformationen, beginnend bei Link 6 und zurückgerechnet zum Ausgangspunkt, sind:

$$(A1.7) \quad A_6 = {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A1.8) \quad {}^4T_6 = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & s_5 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & -c_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A1.9) \quad {}^3T_6 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & 0 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A1.10) \quad {}^2T_6 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & 0 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A1.11) \quad {}^1T_6 = \begin{bmatrix} c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6 & & & \\ s_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_2 s_5 c_6 & \dots & & \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & & & \\ 0 & & & \\ -c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) - s_2 s_5 s_6 & c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5 & s_2 d_3 & \\ -s_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) - c_2 s_5 s_6 & s_2 c_4 s_5 - c_2 c_5 & -c_2 d_3 & \\ \dots & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A1.12) \quad T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit (A1.13):

$$n_x = c_1 \left[c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6 \right] - s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6)$$

$$n_y = s_1 \left[c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6 \right] + c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6)$$

$$n_z = -s_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_2 s_5 c_6$$

$$o_x = c_1 \left[-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6 \right] - s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6)$$

$$o_y = s_1 \left[-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6 \right] + c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6)$$

$$o_z = s_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_2 s_5 s_6$$

$$a_x = c_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5$$

$$a_y = s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5$$

$$a_z = -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5$$

$$p_x = c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2$$

$$p_y = s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2$$

$$p_z = c_2 d_3$$

In der Reihenfolge der Berechnung der rechten drei Spalten von T_6 benötigen wir 10 Transzendentalfunktionsaufrufe, 30 Multiplikationen und 12 Additionen.

Die erste Spalte von T_6 erhält man als Vektorkreuzprodukt der 2. und 3. Spalte.

Wenn die Gelenkkoordinaten bekannt sind, erhält man die Position und Orientierung des Greifers bei der Auswertung der Gleichungen, um T_6 zu erhalten.

5. Koordinatensysteme und Transformationen in eine Roboterprogrammiersprache

AL – (Assembly Language) ist die Sprache, die an der Stanford University in den achtziger Jahren des 20. Jahrhunderts entwickelt wurde.
Sie wurde zum Vorbild einiger Programmiersprachen in der Robotik, z. B. VAL I, VAL II (Puma, Stäubli)

Rotation

ROT – Datentyp für Rotation

ROT r1, r2, r3, r4;

r1 \leftarrow ROT(xhat, 90*deg);

VECTOR v;

v \leftarrow r1*zhat;

r2 \leftarrow ROT (yhat, 45*deg);

r3 \leftarrow r2*r1

nilrot – eine vordeklarierte Rotation

nilrot \leftarrow ROT(zhat, 0*deg);

FRAME ein neuer Datentyp für Koordinatensysteme

Zwei Anteile: Position des KS-Anfanges (Vektor) ; Orientierung des KS

Vordeklarierte KS:

Station – Referenzkoordinatensystem

arm – die momentane Position und Orientierung des Manipulators

park – die Ruheposition und -orientierung

barm

Deklaration einer veränderlichen Frame:

FRAME f1, f2;

f 1 \leftarrow FRAME((ROT(zhat,90*deg), 2*xhat*inches);

KS f1 ist durch Rotation und Translation gegeben

xhat – Einheitsvektor x

zhat – Einheitsvektor z

Allgemeine Transformation

TRANS t1, t2, t3, t4, t5;

t1 \leftarrow TRANS(ROT(xhat, 30*deg), 2*zhat*inches);

v2 \leftarrow t2*(xhat*inches);

t3 \leftarrow t2*t1;

t5 \leftarrow INV(t1); – inverse Matrix zu t1

Beispiel eines Bewegungsbefehls

MOVE arm TO park

6. Kinematik der Geschwindigkeiten

$$\vec{p}(t) = \begin{bmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_z(t) \end{bmatrix} \quad \text{Position der Hand (geeignet definiert) als Funktion der Zeit.}$$

$$\vec{\Lambda}(t) = \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \theta(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} \quad \text{Orientierung der Hand, z. B. als RPY-Winkel (Rotation um } x, y, z \text{). Es wird also nicht die Rotationsmatrix verwendet.}$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \vec{p}(t) \\ \vec{\Lambda}(t) \end{bmatrix} \quad \text{Der Vektor der Position und Orientierung.}$$

Es ist klar, dass dieser Vektor von Gelenkkoordinaten \vec{q} abhängt, also

$$\begin{bmatrix} \vec{p}(t) \\ \vec{\Lambda}(t) \end{bmatrix} = \vec{f}(\vec{q}) \quad \vec{f}(\vec{q}) \quad \text{Vektorfunktion, die aus dem direkten Problem hervorgeht.}$$

Betrachtet am Beispiel: Drei-Glied planarer Arm

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = \vec{f}(\vec{q}) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(q_1, q_2, q_3) \\ f_2(q_1, q_2, q_3) \\ f_3(q_1, q_2, q_3) \end{bmatrix}$$

Allgemein gilt

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1(q_1, q_2, \dots, q_6) \\ f_2(q_1, q_2, \dots, q_6) \\ \vdots \\ f_6(q_1, q_2, \dots, q_6) \end{bmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_6 \end{bmatrix}$$

Die Jacobi Matrix wird dann wie folgt definiert:

$$\frac{d\vec{f}(\vec{q})}{d\vec{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial q_1} & \frac{\partial f_6}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_6}{\partial q_6} \end{bmatrix}$$

Wenn wir etwas über die Geschwindigkeiten des Endeffektors wissen wollen, dann errechnet man die Ableitung nach der Zeit:

Bezeichnung: $\dot{\vec{p}}(t) = \vec{v}(t)$
 $\dot{\vec{\Lambda}}(t) = \vec{\Omega}(t)$

Durch das Ableiten der oberen Gleichung:

$$\dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} \vec{v}(t) \\ \vec{\Omega}(t) \end{bmatrix} = \frac{d\vec{f}(\vec{q})}{d\vec{q}} \cdot \frac{d\vec{q}}{dt} = J(q)\dot{\vec{q}}$$

$$\frac{d\vec{f}(\vec{q})}{d\vec{q}} \quad - \text{Jacobi-Matrix eines Manipulators, Jacobian.}$$

$$\dot{\vec{q}} \quad - \text{Vektor der Gelenkgeschwindigkeiten.}$$

1. „Direkte“ Aufgabe der Geschwindigkeitskinematik

gegeben: Gelenkgeschwindigkeiten (gemessen!)

errechnet: kartesische Geschwindigkeiten

2. „Inverse“ Aufgabe der Geschwindigkeitskinematik

gegeben: kartesische Geschwindigkeiten

errechnet: Gelenkgeschwindigkeiten

$$\dot{\vec{q}} = J^{-1}(\vec{q}) \begin{bmatrix} \vec{v}(t) \\ \vec{\Omega}(t) \end{bmatrix} \quad \text{unter der Bedingung, dass } J \text{ nicht singulär ist.}$$

Es kann gezeigt werden, dass die allgemeine Form einer *Jacobi*-Matrix für rotatorische Gelenke wie folgt aussieht:

$$J(\vec{q}) = \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \times {}^0\vec{p}_6 & \vec{z}_1 \times {}^1\vec{p}_6 & \cdots & \vec{z}_5 \times {}^5\vec{p}_6 \\ \vec{z}_0 & \vec{z}_1 & \cdots & \vec{z}_5 \end{bmatrix}$$

$${}^i\vec{p}_6 = \vec{p}_6 - \vec{p}_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 5$$

$$\vec{p}_6 = \vec{p}$$

\vec{z}_i sind die Einheitsvektoren in einzelnen Achsen, $i = 0, 1, \dots, 5$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{p}}(t) \\ \dot{\vec{\Lambda}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

Aus der Form der *Jacobi*-Matrix und der Formel

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{p}}(t) \\ \dot{\vec{\Omega}}(t) \end{bmatrix} = J(\vec{q}) \cdot \dot{\vec{q}}$$

ergibt sich für einen Roboter mit Drehgelenken:

$$\dot{\vec{p}}(t) = \dot{q}_1 (\vec{z}_0 \times {}^0\vec{p}_6) + \dot{q}_2 (\vec{z}_1 \times {}^1\vec{p}_6) + \dots + \dot{q}_6 (\vec{z}_5 \times {}^5\vec{p}_6) = \vec{\omega}_0 \times {}^0\vec{p}_6 + \vec{\omega}_1 \times {}^1\vec{p}_6 \dots$$

$$\dot{\vec{\Lambda}}(t) = \dot{q}_1 \vec{z}_0 + \dot{q}_2 \vec{z}_1 + \dot{q}_3 \vec{z}_2 + \dot{q}_4 \vec{z}_3 + \dot{q}_5 \vec{z}_4 + \dot{q}_6 \vec{z}_5 = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 + \dots + \vec{\omega}_5$$

Aus diesen Gleichungen sieht man die physikalische Bedeutung, nämlich wie jedes Gelenk mit seinen Winkelgeschwindigkeiten oder einfach Geschwindigkeiten zur Geschwindigkeit und zur Winkelgeschwindigkeit beiträgt. Die Beiträge jedes Gelenks in den beiden Fällen sind offensichtlich.

Aus der Physik weiß man:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{hier} \quad \vec{\omega} = \dot{q}_i \vec{z}_{i-1}$$

Im Fall des prismatischen Gelenkes sieht die *i*-te Spalte der *Jacobi*-Matrix folgendermaßen aus:

$$\begin{bmatrix} \vec{z}_{i-1} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

Hier:

\vec{z}_{i-1} – Einheitsvektoren entlang der *i*-ten Achse des Roboters.

${}^{i-1}\vec{p}_6$ – die Position der Hand vom *i* – 1-tem KS, ausgedrückt im Basis-KS.

Die Form der *Jacobi*-Matrix im Basis-KS ist sehr kompliziert.

Verbesserung: Als KS ein anderes KS nehmen, z. B. im Handgelenk.

Singuläre Positionen eines Manipulators hängen eng mit der *Jacobi*-Matrix zusammen.

Singuläre Position:

- ist eine Position, bei der sich wenigstens ein Freiheitsgrad verliert (effektiv), z. B.: identische Rotationsachsen. In dem Fall ist die Determinante der *Jacobi*-Matrix gleich Null, man kann also die inverse *Jacobi*-Matrix nicht eindeutig errechnen.

Aus diesem Grund kann man die singulären Positionen berechnen, indem man die Determinante der *Jacobi* Matrix gleich Null setzt.

Singuläre Positionen:

- sind ein wichtiges Problem der Robotik. Deshalb ist es wichtig, diese Positionen zu erkennen.

Die *Jacobi*-Matrix wird häufig im Zusammenhang mit kleinen Bewegungen (Position und Orientierung) verwendet, wobei \vec{x} = Vektor 6×1 der kartesischen Lage und Orientierung ist:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = J(\vec{q}) \cdot \frac{d\vec{q}}{dt}$$

$$d\vec{x} = J(\vec{q}) d\vec{q}$$

$$\Delta \vec{x} \approx J(\vec{q}) \Delta \vec{q}$$

→ differentielle Kinematik

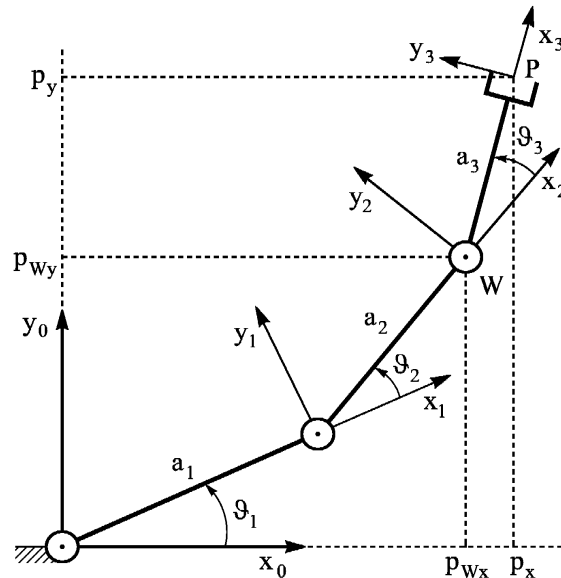
Im Prinzip darf man mit diesem Ansatz auch die inverse Aufgabe lösen:

$$d\vec{q} = J^{-1} d\vec{x}$$

$$\vec{q} = \int_0^x J^{-1} d\vec{x} + \vec{q}(0)$$

In diesem Fall würden aber die singulären Konfigurationen ein Problem sein.

Beispiel 06-01: Der planare Arm



Die *Denavit-Hartenberg*-Matrizen für den planaren Arm wurden früher in der folgenden Form errechnet:

$$A_i(\vartheta_i) = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3, \vartheta_i = q_i$$

Die *Jacobi*-Matrix hat in diesem Falle die Dimension 6×3 , wobei die Dimension 3 den drei Freiheitsgraden x , y und ϕ in der Ebene entspricht.

Faktisch ist die *Jacobi*-Matrix nur 3×3 .

$$J(\vec{q}) = \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \times (\vec{p} - \vec{p}_0) & \vec{z}_1 \times (\vec{p} - \vec{p}_1) & \vec{z}_2 \times (\vec{p} - \vec{p}_2) \\ \vec{z}_0 & \vec{z}_1 & \vec{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a)

$$\vec{z}_0 \times (\vec{p} - \vec{p}_0) = \vec{z}_0 \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i}(-p_y) + \vec{j}p_x + \vec{k} \cdot 0$$

oder

$$\vec{z}_0 \times \vec{p} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{z}_1 \times (\vec{p} - \vec{p}_1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 s_{12} + a_3 s_{123} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(-a_2 s_{12} - a_3 s_{123}) + \vec{j}(+a_2 c_{12} + a_3 c_{123}) = \begin{bmatrix} -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} \\ a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$\vec{z}_2 \times (\vec{p} - \vec{p}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_3 c_{123} \\ a_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{i}(-a_3 s_{123}) + \vec{j}(a_3 c_{123}) = \begin{bmatrix} -a_3 s_{123} \\ a_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die konkrete Form der *Jacobi*-Matrix 6×6 :

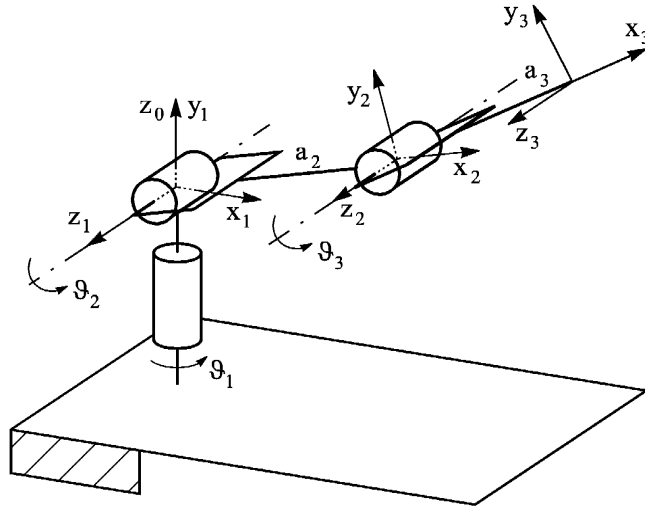
$$J = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wenn wir nur 3 Freiheitsgrade akzeptieren, also die drei Null-Zeilen weglassen, erhalten wir:

$$J = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \end{bmatrix}$$

Beispiel 06-02: Der anthropomorphe Arm

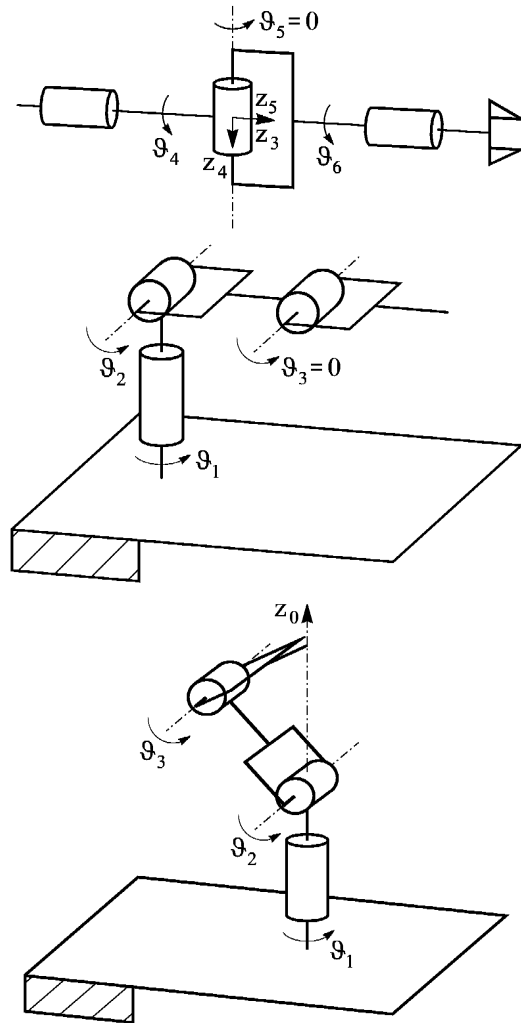


$$\bar{p}_0 = \bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 \\ a_2 s_1 c_2 \\ a_2 s_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{p}_3 = \bar{p} = \begin{bmatrix} c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

$$\bar{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -c_1 (a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 c_1 s_{23} \\ c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1 (a_2 c_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ 0 & a_2 c_2 + a_3 c_{23} & a_3 c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Beispiel 06-03: Der anthropomorphe Arm – Singularitäten



$$\det(J) = a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) = 0, \quad a_2, a_3 \neq 0$$

Entweder: $s_3 = 0 \Rightarrow \theta_3 = 0, \quad \theta_3 = \pi$

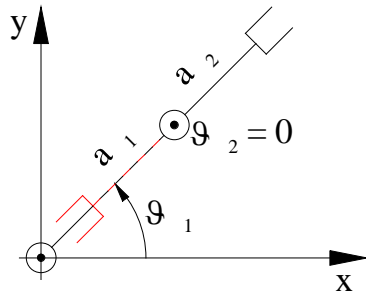
oder: $a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0$

Dieser letzte Ausdruck kommt zwei mal in der Manipulator Matrix T vor:

$$T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 c_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aus der Form dieser Matrix geht hervor, dass die ersten zwei Einträge der vierten Spalte, nämlich p_x und p_y verschwinden, d. h. $p_x = p_y = 0$. Das entspricht der Situation, wenn der Endpunkt auf der z_0 Achse liegt. Diese Achse ist also das Kontinuum der singulären Lagen. Die Singularität dieser Art nennt man **Schulter-Singularität**.

Beispiel 06-04: Der planare Arm mit zwei Achsen



$$f_1 = a_1 c_1 + a_2 c_{12}$$

$$f_2 = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det J &= -a_1 a_2 s_1 c_{12} - a_2^2 s_{12} c_{12} + a_1 a_2 c_1 s_{12} + a_2^2 s_{12} c_{12} \\ &= a_1 a_2 (c_1 s_{12} - s_1 c_{12}) = a_1 a_2 (s_{12} c_1 - s_1 c_{12}) \\ &= a_1 a_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta_1) = a_1 a_2 \sin \vartheta_2 \end{aligned}$$

Bedingung der Singularität:

$$\det J = a_1 a_2 \sin \vartheta_2 = 0 \Rightarrow \vartheta_2 = 0 \text{ oder } \vartheta_2 = \pi$$

Entkopplung der Singularitäten

Wenn man bei einem 6-FHG-Roboter den Bezugspunkt vom Greifer (Endeffektor) zum Handgelenk verschiebt, vereinfacht sich dadurch die Form der *Jacobi*-Matrix stark. Die Vektoren \vec{p}_3 , \vec{p}_4 , \vec{p}_5 und \vec{p} sind jetzt identisch und deshalb verschwinden die Vektoren $\vec{p} - \vec{p}_3$, $\vec{p} - \vec{p}_4$ und $\vec{p} - \vec{p}_5$, dadurch auch die Vektoren $\vec{z}_i \times (\vec{p} - \vec{p}_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Die *Jacobi*-Matrix kann man als eine Blockmatrix schreiben:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

J_{12} wird in diesem Fall also verschwinden, deshalb

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

und

$$\det(J) = \det(J_{11}) \cdot \det(J_{22}) = 0 \Rightarrow \det(J_{11}) = 0 \vee \det(J_{22}) = 0.$$

Man kann also extra die Singularitäten für den Arm und das Handgelenk errechnen.

Bemerkung

Bezeichnen wir mit \vec{V} den 6×1 Vektor der kartesischen Geschwindigkeiten:

$$\dot{\vec{X}}(t) = \vec{V}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\vec{p}}(t) \\ \dot{\vec{\Lambda}}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{dann} \quad \vec{V}(t) = J(\vec{q}) \cdot \dot{\vec{q}}.$$

Wie sieht das mit der Gleichung für die Beschleunigungen aus?

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{V}} = J(\vec{q}) \cdot \dot{\vec{q}} + J(\vec{q}) \cdot \ddot{\vec{q}} \quad \text{das direkte Problem}$$

$$\ddot{\vec{q}} = J^{-1}(\vec{q}) \cdot \left[\dot{\vec{V}} - J(\vec{q}) \cdot \dot{\vec{q}} \right] = J^{-1}(\vec{q}) \cdot \left[\vec{a} - J(\vec{q}) \cdot \dot{\vec{q}} \right]$$

6.1 Verwendung der *Jacobi-Matrix* in der Statik eines Manipulators

Die Situation: Im Endpunkt eines Endeffektors (Greifers) wirkt eine räumliche Kraft und ein räumliches Moment. Es geht im Allgemeinen um zwei 3×1 -Vektoren

$$\vec{F}_1 = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix},$$

die zu einem 6×1 -Vektor \vec{F} zusammengefasst werden können:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Gegen diese äußeren Kräfte und Momente wirken Momente in n Gelenken. Für einen Gelenkarm mit sechs Achsen sind diese Momente im Vektor $\vec{\tau}$ zusammengefasst:

$$\vec{\tau}^T = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6]$$

Im Gelenkraum gilt für die virtuelle Arbeit:

$$\tau_1 dq_1 + \tau_2 dq_2 + \dots + \tau_6 dq_6 = \vec{\tau}^T d\vec{q},$$

wobei

$$d\vec{q} = [dq_1, dq_2, dq_3, dq_4, dq_5, dq_6]^T.$$

Im kartesischen Raum gilt für die virtuelle Arbeit:

$$F_x dp_x + F_y dp_y + F_z dp_z + M_x d\psi + M_y d\theta + M_z d\phi = \vec{F}^T d\vec{X},$$

wobei

$$d\vec{X} = [dp_x, dp_y, dp_z, d\psi, d\theta, d\phi]^T.$$

Unter idealen Bedingungen (keine Verluste) sollten die beiden virtuellen Arbeiten im Gleichgewicht sein, also

$$\vec{\tau}^T d\vec{q} = \vec{F}^T d\vec{X}$$

Weil

$$d\vec{X} = J d\vec{q}$$

gilt, gilt auch

$$\vec{\tau}^T d\vec{q} = \vec{F}^T J d\vec{q}.$$

Die Gleichungen gelten für beliebige $d\vec{q}$, deshalb:

$$\vec{\tau}^T = \vec{F}^T J$$

und endgültig

$$\vec{\tau} = J^T \vec{F}$$

Die Interpretation:

Die kartesischen Kräfte und Momente am Ende des Manipulators werden zu den äquivalenten Gelenkmomenten durch eine transponierte *Jacobi*-Matrix umgerechnet.

Oder:

Wollen wir mit dem Endeffektor mit dem Vektor

$$\vec{F} = \left[\vec{F}_1^T, \vec{M}^T \right]$$

auf die Arbeitsumgebung einwirken, dann muss der Roboter dafür die Momente

$$\vec{\tau} = J^T \vec{F}$$

entwickeln.

6.2 Das Ellipsoid der Manipulationsfähigkeit

Die Menge der Geschwindigkeiten ist untersucht, für diese gilt im Gelenkraum:

$$\dot{\vec{q}}^T \dot{\vec{q}} = 1 \quad - \text{Kugel mit dem Radius } 1$$

Man fragt sich, welche operationellen Geschwindigkeiten im kartesischen Raum entsprechen dieser Verteilung der Gelenkgeschwindigkeiten.

$$\vec{V} = J \dot{\vec{q}} \quad \text{und} \quad \vec{V}^T = \dot{\vec{q}}^T J^T,$$

davon

$$\dot{\vec{q}} = J^{-1} \vec{V} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{q}}^T = \vec{V}^T (J^T)^{-1}.$$

Setzt man die Ausdrücke für $\dot{\vec{q}}$ und $\dot{\vec{q}}^T$ in die Gleichung der Kugel oben:

$$\vec{V}^T (J^T)^{-1} J^{-1} \vec{V} = 1 \quad \text{oder} \quad \vec{V}^T (J J^T)^{-1} \vec{V} = 1$$

Es geht um die Gleichung eines Ellipsoids, das die entsprechenden Geschwindigkeiten im operationellen Raum repräsentiert.

Dieses Ellipsoid hat mehrere Achsen (6). Entlang der längsten Achse kann sich der Manipulator mit der höchsten Geschwindigkeit bewegen, entlang der kürzesten mit der niedrigsten Geschwindigkeit. Sind die Achsen alle gleich lang, erhält man eine Kugel. Die Geschwindigkeiten in allen Richtungen sind dann gleich groß. Das charakterisiert die Manipulationsfähigkeit.

Die Richtungen der Achsen des Ellipsoids sind durch Eigenvektoren von $J J^T$ gegeben, die Länge durch so genannte singuläre Werte σ_i :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(J J^T)}, \quad \lambda_i(J J^T) \quad - \text{Eigenwerte der Matrix } J J^T.$$

Ein globales Maß für die Manipulationsfähigkeit ist das Volumen des Ellipsoids, das proportional zu folgender Größe ist:

$$w(\vec{q}) = \sqrt{\det(J(\vec{q}) J^T(\vec{q}))}$$

Für den Fall, wenn die *Jacobi*-Matrix quadratisch ist:

$$w(\vec{q}) = |\det J(\vec{q})|$$

$w(\vec{q})$ ist immer > 0 und nur in der Singularität $= 0$.

Ähnlich wird die Menge der Momente im Gelenkraum untersucht, für die gilt:

$$\vec{\tau}^T \vec{\tau} = 1 \quad \vec{\tau} = J^T \vec{F}, \quad \vec{\tau}^T = \vec{F}^T J$$

und im operationellen Raum:

$$\vec{F}^T (J(\vec{q}) J^T(\vec{q})) \vec{F} = 1$$

Das ist die Gleichung des Ellipsoids der Kraft-Manipulationsfähigkeit.

Seine Interpretation ist ähnlich wie bei den Geschwindigkeiten. Die Matrix $J J^T$ ist die inverse Matrix zu $(J J^T)^{-1}$, deshalb sind die Hauptachsen dieselben. Die Längen sind aber die Kehrwerte der ursprünglichen Längen.

Die Energieerhaltung sagt aus, je größer die Kraft, desto kleiner die Geschwindigkeit.

Im Falle des planaren Roboters mit zwei Freiheitsgraden gilt:

$$|\det J| = a_1 a_2 |s_2|$$

Der Ausdruck ist max., wenn

$$\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \vartheta_2 = -\frac{\pi}{2}$$

ist und $a_1 a_2$ Maximalwert hat. Bei

$$a_1 + a_2 = \text{konst.}$$

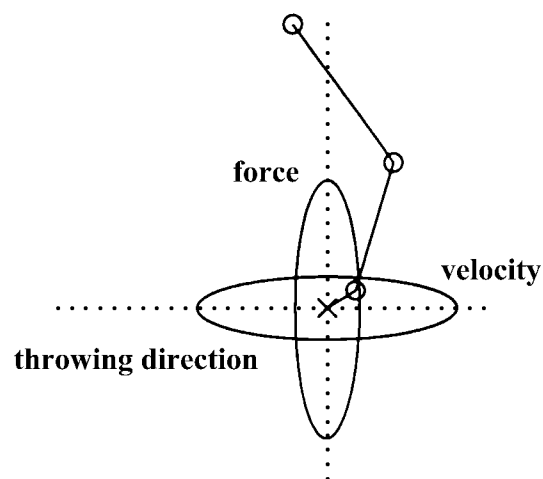
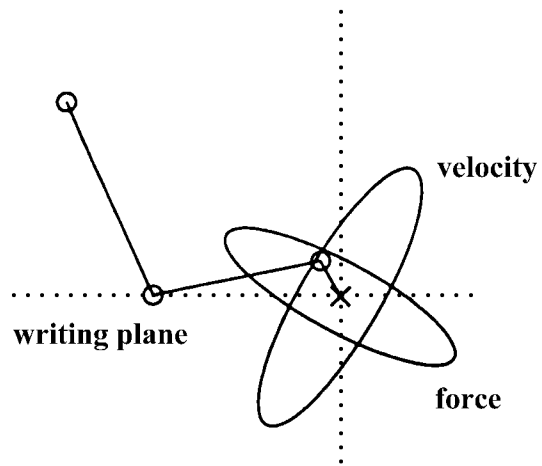
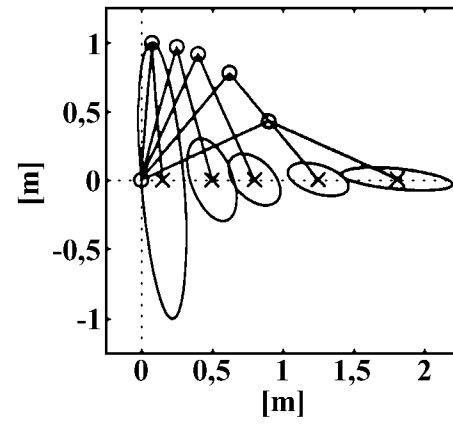
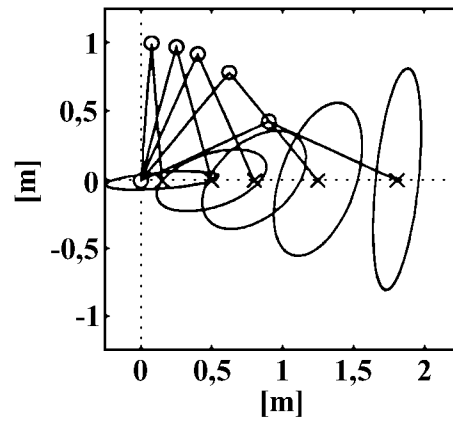
gilt das für $a_1 = a_2$.

Die Manipulationsfähigkeit dieses einfachen Manipulators ist also am höchsten für gleiche Längen der Teilarme und in den Konfigurationen, in welchen der Winkel

$$\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$$

oder aber

$$\vartheta_2 = \frac{-\pi}{2}.$$



7. Dynamik der Roboter

Das Wort „Dynamik“:

Wird im selben Sinn verwandt wie in der Regelungstheorie.

Es geht um das Modell der Regelstrecke.

In der Mechanik spricht man von Dynamik (das dynamische Modell) in dem Fall, wenn außer den Lagen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen auch Massen, Kräfte und Momente in den Gleichungen auftreten.

Regelstrecke:

– hier das mechanische System mit mehreren Freiheitsgraden (Mehrkörpersystem).

Es ist durch physikalische Gesetze begründet, dass es sich um ein System 2. Ordnung handelt (das *Newton'sche* Gesetz, $F = m \cdot a = m \ddot{x}$).

Weil es bei einem Roboter um mehrere mechanische Körper geht, wird die Beschreibung vektoriell sein und weil die Körper aufeinander wirken, wird das System der Gleichungen der 2. Ordnung gekoppelt.

Darüber hinaus werden die Gleichungen nicht linear sein.

Zwei Aufgaben:

1. Die direkte Dynamik (forward dynamics)
 2. Die inverse Dynamik (inverse dynamics)
1. Die Kräfte und Momente sind gegeben. Die dynamischen Gleichungen werden gelöst, um die Beschleunigung, Geschwindigkeiten und Winkel / Wege zu bekommen.
Diese werden integriert. Daraus ergeben sich Geschwindigkeiten und verallgemeinerte Koordinaten (Gelenkvariablen).
 2. Die verallgemeinerten Koordinaten (q_i) und die erste und zweite Ableitung davon sind gegeben und die verallgemeinerten Kräfte / Momente werden errechnet.

Drei Methoden der Ableitung der dynamischen Gleichungen:

1. *Lagrange-Euler*-Gleichungen
2. *Newton-Euler*-Gleichungen
3. nach *d'Alembert* (das *d'Alembert'sche* Prinzip).

Die Lagrange-Euler-Formulierung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (n = \text{Zahl der Freiheitsgrade})$$

L = *Lagrange'sche* Funktion, $L = K - P$

P = potenzielle Energie

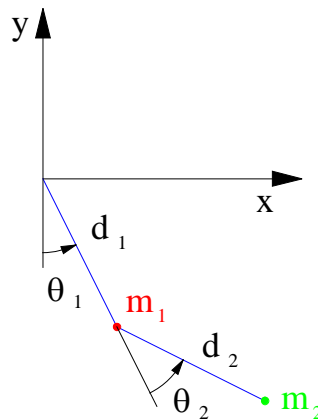
K = kinetische Energie

q_i = verallgemeinerte Koordinate (Gelenkvariable)

\dot{q}_i = erste Zeitableitung von q_i (Gelenkgeschwindigkeit)

τ_i = verallgemeinerte Kraft (Moment), wirkend auf das mechanische System im Gelenk i , um das Glied (Arm) i zu treiben (Gelenkmoment), Antriebskraft oder -moment.

Das Verfahren wird am Beispiel eines 2-FHG-Roboters erläutert. Die Massen m_1 und m_2 sind der Einfachheit halber in zwei Punkten konzentriert. Es geht um die Punkt-Massen.



Kinetische Energie **K** und potenzielle Energie **P**

Allgemein:
$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Arm 1:
$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

wobei

$$v = (d_1 \theta_1)' = d_1 \dot{\theta}_1$$

Allgemein: $P = m g h$ h – die Höhe (positiv oder negativ)

$$P_1 = -m_1 g d_1 \cos \theta_1$$

Für den zweiten Arm: Zuerst die Geschwindigkeit berechnen.

$$x_2 = d_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = -d_1 \cos \theta_1 - d_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\dot{x}_2 = d_1 \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + d_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{y}_2 = d_1 \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + d_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + d_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2 d_1 d_2 \cos \theta_1 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2) \cdot \\ &\quad \cdot (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + 2 d_1 d_2 \sin \theta_1 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2) \cdot (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) = \\ &= d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + d_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2 d_1 d_2 \cos \theta_2 \cdot (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \end{aligned}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

$$P_2 = -m_2 g \left[d_1 \cdot \cos \theta_1 + d_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \right]$$

$$K = K_1 + K_2 = \sum_{i=1}^2 K_i$$

$$P = P_1 + P_2 = \sum_{j=1}^2 P_j$$

Lagrange'sche Funktion:

$$L = K - P$$

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + \\ & + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + m_1 g d_1 \cos \theta_1 + m_2 g d_1 \cos \theta_1 + \\ & + m_2 g d_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + \\ & + (m_1 + m_2) g d_1 \cos \theta_1 + m_2 g d_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 \cdot (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \end{aligned}$$

Teilausdrücke der Lagrange-Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = & (m_1 + m_2) d_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \dot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \dot{\theta}_2 + 2 m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 + \\ & + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = & \left[(m_1 + m_2) d_1^2 + m_2 d_2^2 + 2 m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 \right] \cdot \ddot{\theta}_1 + \\ & + \left[m_2 d_2^2 + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 \right] \cdot \ddot{\theta}_2 - 2 m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 - \\ & - m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = - (m_1 + m_2) g d_1 \sin \theta_1 - m_2 g d_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1 = & \left[(m_1 + m_2) d_1^2 + m_2 d_2^2 + 2 m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 \right] \cdot \ddot{\theta}_1 + \\ & + \left[m_2 d_2^2 + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 \right] \cdot \ddot{\theta}_2 - 2 m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \\ & - m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2) g d_1 \sin \theta_1 + m_2 g d_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

In derselben Weise leitet man τ_2 her:

$$\tau_2 = \left[m_2 d_2^2 + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 \right] \ddot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_2 - 2 m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

In allgemeiner Form:

$$\tau_1 = D_{11} \ddot{\theta}_1 + D_{12} \ddot{\theta}_2 + D_{111} \dot{\theta}_1^2 + D_{122} \dot{\theta}_2^2 + D_{112} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + D_{121} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + D_1$$

$$\tau_2 = D_{21} \ddot{\theta}_1 + D_{22} \ddot{\theta}_2 + D_{211} \dot{\theta}_1^2 + D_{222} \dot{\theta}_2^2 + D_{212} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + D_{221} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + D_2$$

Nichtlinear, verkoppelt

- $D_{ii} \ddot{\theta}_i$ – das Moment, verursacht durch die Beschleunigung $\ddot{\theta}_i$.
- D_{ii} – das Trägheitsmoment des i -ten Arms (Gliedes).
- $D_{ij}, i \neq j$ – das Kopplungsträgheitsmoment zwischen den Armen i und j .
- $D_{ijj} \dot{\theta}_j^2$ – die Zentrifugalkraft im Gelenk i , verursacht durch die Geschwindigkeit im Gelenk j .
- $D_{ijk} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k + D_{ikj} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j$ – die *Coriolis*'sche Kraft im Gelenk i , verursacht durch die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}_j, \dot{\theta}_k$.
- D_i – Gravitationskraft, $i = 1, 2$

$$D_{11} = \left[(m_1 + m_2) d_1^2 + m_2 d_2^2 + 2 m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 \right]$$

$$D_{22} = m_2 d_2^2$$

$$D_{12} = m_2 d_2^2 + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2$$

$$D_{21} = m_2 d_2^2 + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2$$

$$D_{111} = 0$$

$$D_{122} = -m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2$$

$$D_{211} = -m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2$$

$$D_{222} = 0$$

$$D_{112} = D_{121} = -m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \quad ; \quad D_{112} + D_{121} = -2 m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2$$

$$D_{212} = D_{221} = -m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \quad ; \quad D_{212} + D_{221} = -2 m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2$$

$$D_1 = (m_1 + m_2) g d_1 \sin \theta_1 + m_2 g d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$D_2 = m_2 g d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Mögliche Vereinfachungen, z. B. für kleine Geschwindigkeiten:

Dann:

$$\dot{\theta}_1^2 \approx 0 \quad , \quad \dot{\theta}_2^2 \approx 0 \quad , \quad \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \approx 0 \quad , \quad \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \approx 0$$

$$\tau_1 = D_{11} \ddot{\theta}_1 + D_{12} \ddot{\theta}_2 + D_1$$

$$\tau_2 = D_{21} \ddot{\theta}_1 + D_{22} \ddot{\theta}_2 + D_2$$

Die Vektor-Matrix-Form der allgemeinen Gleichungen:

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) d_1^2 + m_2 d_2^2 + 2 m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 & m_2 d_2^2 + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 \\ m_2 d_2^2 + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 & m_2 d_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{bmatrix} -2 m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \cdot \theta_2^2 \\ -2 m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \cdot \theta_1^2 \end{bmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g d_1 \sin \theta_1 + m_2 g d_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g d_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{allgemein}$$

$$\vec{\tau} = D(\vec{q}) \cdot \ddot{\vec{q}}(t) + \vec{h}[\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)] + \vec{c}[\vec{q}(t)]$$

$D(\vec{q}) = D^T(\vec{q})$ – symmetrische und immer nichtsinguläre Trägheitsmatrix

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_6 \end{bmatrix}, \quad h_i = \dot{\vec{q}}^T H_i \dot{\vec{q}}, \quad H_i = H_i[\vec{q}(t)]$$

Hier

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_6 \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_6 \end{bmatrix} \quad \text{für Drehgelenke.}$$

In unserem Fall des Roboters mit 2 FHG:

$$h_1 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \\ -m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 & -m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}}_{H_1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 & -m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \\ -m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Oder aber

$$h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m$$

In unserem Beispiel erhalten wir also die Gleichung:

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}^T H_1 \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{q}}^T H_2 \dot{\bar{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\bar{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Den mittleren Term auf der rechten Seite kann man auch auf eine andere Weise schreiben:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}^T H_1 \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{q}}^T H_2 \dot{\bar{q}} \\ \vdots \\ \dot{\bar{q}}^T H_6 \dot{\bar{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}^T H_1 \\ \dot{\bar{q}}^T H_2 \\ \vdots \\ \dot{\bar{q}}^T H_6 \end{bmatrix} \dot{\bar{q}} = h[\bar{q}, \dot{\bar{q}}] \dot{\bar{q}},$$

wo h jetzt eine 6×6 -Matrix ist. Diese Form wird im Weiteren verwendet.

Schaut man sich die dynamische Gleichung geschrieben in den Komponenten an, sieht man, dass dieses System der Gleichungen nicht nichtlinear sondern auch gekoppelt ist. Das Wort „gekoppelt“ bedeutet hier, dass die einzelnen Gleichungen nicht nur von einer Gelenkvariablen sondern auch von den anderen abhängig ist. „Entkoppelt“ würde bedeuten, dass es in einer Komponenten-gleichung nur eine einzige Variable gibt und dass man jede Differenzialgleichung selbständig lösen oder verwenden könnte.

Um dieses gerade entwickelte Modell verwenden zu können, braucht man dafür die genaue Kenntnis der einzelnen Terme und ihre Parameter. Es ist nicht immer möglich, diese Terme aus den Konstruktionsparametern (CAD) zu gewinnen (z. B. Reibung). Aus diesem Grund hat man dafür auch regelungstechnische Methoden entwickelt. Diese Methoden gehören in die so genannte Identifikation der dynamischen Systeme.

Die dynamischen Gleichungen wurden im Gelenkraum formuliert. Es ist ebenso möglich, die Dynamik im kartesischen Raum zu beschreiben.

8. Bahnplanung eines Roboters

8.1 Einführung

Eine Bahn (oder Trajektorie) ist eine räumliche Kurve, auf der sich der Endpunkt eines Roboters von einer Anfangsposition zu einer Zielposition bewegt. Unter dem Wort „Position“ versteht man Lage und Orientierung. Dabei werden einzelne Positionen in bestimmten Zeitpunkten erreicht. Aus regelungstechnischem Gesichtspunkt ist die Bahngenerierung die Vorbereitung der Sollwerte für die Positionsregelung mit den einzelnen Antrieben eines Roboters.

Bei einem Pfad ist die Zuordnung der Zeit nicht wichtig. Der Roboter kann sich also auf einem Pfad so bewegen, dass die Geschwindigkeit nicht wichtig ist. Im Zusammenhang mit den Industrierobotern beschäftigt man sich eher mit den Bahnen.

Jede Bahn hat einen Start- und einen Zielpunkt. Ihnen entsprechen die Startzeit t_0 und die Zielzeit t_f . Die Form der Bahn wird in der Regel durch Polynome oder aber trigonometrische Funktionen interpoliert oder approximiert. Zwischen dem Start- und Zielpunkt sind in der Regel noch weitere Zwischenpunkte vorgeschrieben.

Das Problem der Bahnplanung kann man im Gelenkraum oder im kartesischen (operationellen) Raum lösen. Im ersten Fall spricht man über **PTP-Bahnplanung** (point-to-point), im zweiten Fall über **CP-Bahnplanung** (continuous path). Beide haben ihre Vor- und Nachteile.

PTP Vorteile:

- a) Die Bahnplanung erfolgt direkt in Regelvariablen, weil die Antriebe in den Gelenken wirken.
- b) Die Bahnplanung kann in Echtzeit durchgeführt werden.
- c) Die Gelenkbahnen sind einfacher zu planen, weil keine inverse kinematische Transformation notwendig ist.

PTP Nachteile:

- a) Man kann nicht ohne direkte kinematische Transformation die Bewegung des Endpunktes und der einzelnen Glieder vorhersagen.

CP Vorteile:

- a) Verhältnismäßig einfache Kollisionsvermeidung.
- b) Anschaulichkeit und gute geometrische Vorstellung bei der Bahnplanung

CP Nachteile:

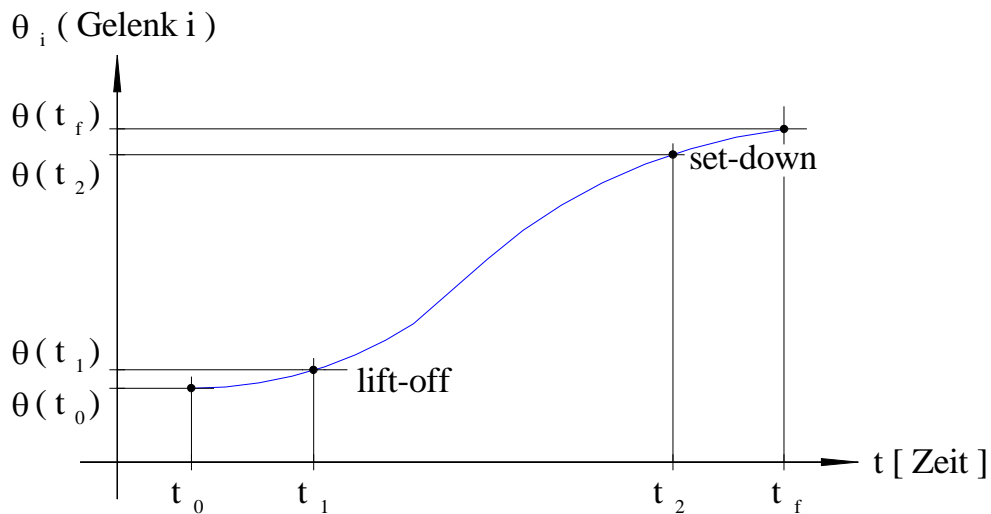
- a) Die inverse kinematische Transformation ist notwendig, um die Antriebe zu erreichen.
- b) Es ist nicht vorhersagbar, ob man im Gelenkraum nicht die Beschränkungen (Anschläge) überschreitet.

Bei der Bahnplanung ist die Frage der Stetigkeit der generierten Bahn sehr wichtig. Es ist wünschenswert, eine stetige Bahnbeschleunigung zu erhalten. Sprunghafte Beschleunigungsänderungen der Massen eines Roboters können nämlich nach dem 3. *Newton*'schen Gesetz ($f = m \cdot a$) den Verschleiß seiner Teile verursachen. In diesem Zusammenhang definiert man in der Mechanik den so genannten Ruck (engl.: jerk) als die dritte Ableitung der Position.

Ob **PTP**- oder **CP**-generiert, werden die Bahnen im Gelenkraum realisiert, weil die Antriebe und Lage- bzw. Geschwindigkeitssensoren mit den Gelenken verbunden sind. Auf dem nachfolgenden Bild kann man einen typischen Verlauf der Bahn im Gelenkraum für eine Gelenkvariable sehen. Zwei Zwischenpunkte zwischen Start- und Zielpunkt sind definiert: **lift-off** und **set-down**. Es geht um die Punkte, die den eigentlichen Kern der Bahn abgrenzen.

Im Fall der **PTP**-Bahnplanung sind zwei Verfahren bekannt,

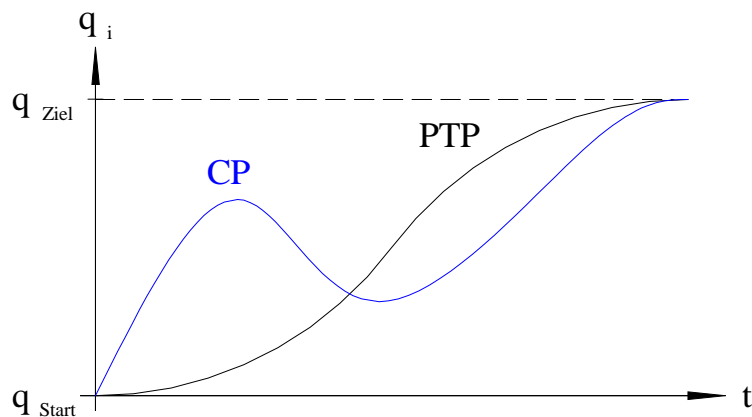
- a) die **asynchrone** und
- b) die **synchrone** **PTP**-Bahnplanung.



Im ersten Fall bewegt sich jede Achse „unkoordiniert“ mit den anderen, so dass jede Achse den Zielpunkt in einer anderen Zeit erreicht. Im zweiten Fall wird die langsamste Achse als die so genannte Leitachse gewählt und alle anderen Achsbewegungen werden so geplant, dass sie alle den Zielpunkt in derselben Zeit erreichen.

Bei der **CP**-Bahnplanung geht es um ganz konkrete Raumkurven. Bei kommerziellen Industrierobotern werden in der Regel zwei Arten der Bahnen verwendet, die lineare Bahn und die Zirkularbahn.

Die Unterschiede zwischen einer **PTP**- und einer **CP**-Bahn in Gelenkkoordinaten werden im nächsten Bild dargestellt.



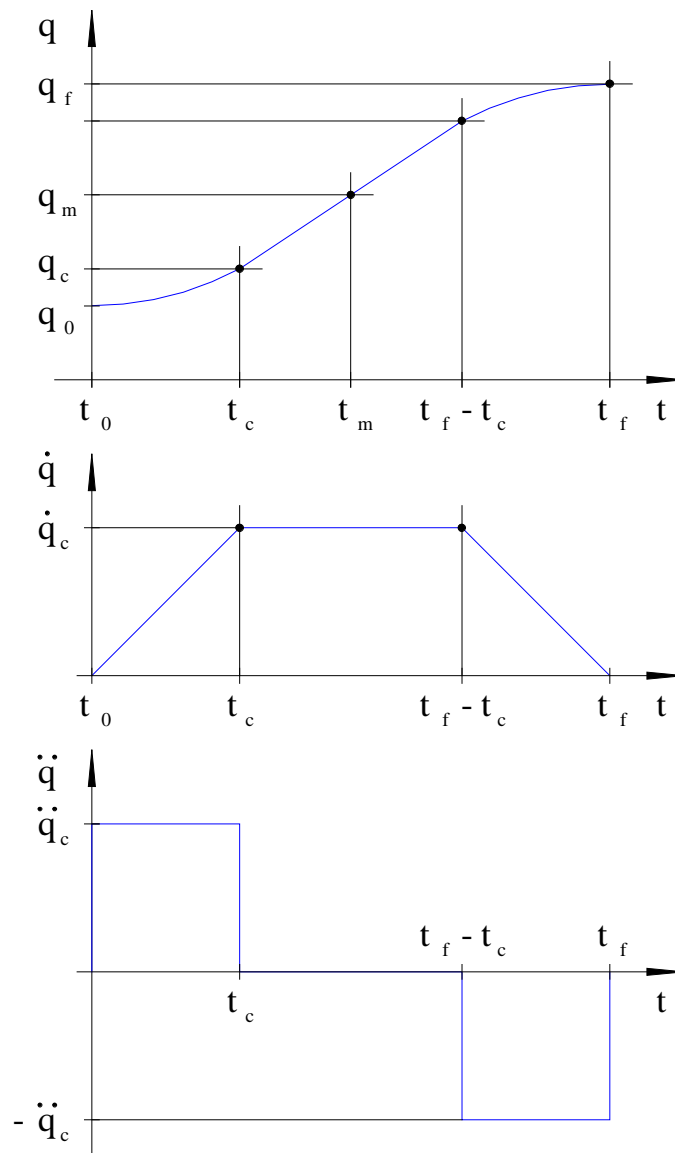
8.2 Bahnplanung in Gelenkkoordinaten

Das trapezoide Geschwindigkeitsprofil

Hier wird von der Geschwindigkeit ausgegangen. Das Profil der Geschwindigkeit hat drei Teile: Wachsende Geschwindigkeit, konstante Geschwindigkeit und Bremsen. Im Start- und Zielpunkt sind die Geschwindigkeiten gleich Null.

q_0	Startlage
$\dot{q}_0 = 0$	Startgeschwindigkeit
q_f	Ziellage
$\dot{q}_f = 0$	Zielgeschwindigkeit

Aus dem Geschwindigkeitsprofil ergibt sich das Polynom 3. Ordnung (4 Bedingungen entsprechen 4 Koeffizienten). In der Industriepraxis plant man in diesem Fall auf die folgende im nächsten Bild dargestellte Weise:



Für den Zeitverlauf des Winkels q gilt:

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{1}{2} \ddot{q}_c t^2 & 0 \leq t \leq t_c \quad (1) \\ q_0 + \ddot{q}_c t_c \left(t - \frac{t_c}{2} \right) & t_c < t \leq t_f - t_c \quad (2) \\ q_f - \frac{1}{2} \ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c < t \leq t_f \quad (3) \end{cases}$$

(1) Diesen Verlauf kann man aus der Anfangsbedingung der Lage und der Formel für den Weg bei konstanter Beschleunigung erklären.

(2) Es geht um den Weg des ersten Segments plus den Weg innerhalb des zweiten Segments:

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2} \ddot{q}_c t_c^2 + \underbrace{\ddot{q}_c t_c}_{\dot{q}_c} (t - t_c) = q_0 + \ddot{q}_c t_c \left(\frac{t_c}{2} + t - t_c \right) = q_0 + \ddot{q}_c t_c \left(t - \frac{t_c}{2} \right)$$

(3) Geht aus der Symmetrie des Verlaufs hervor.

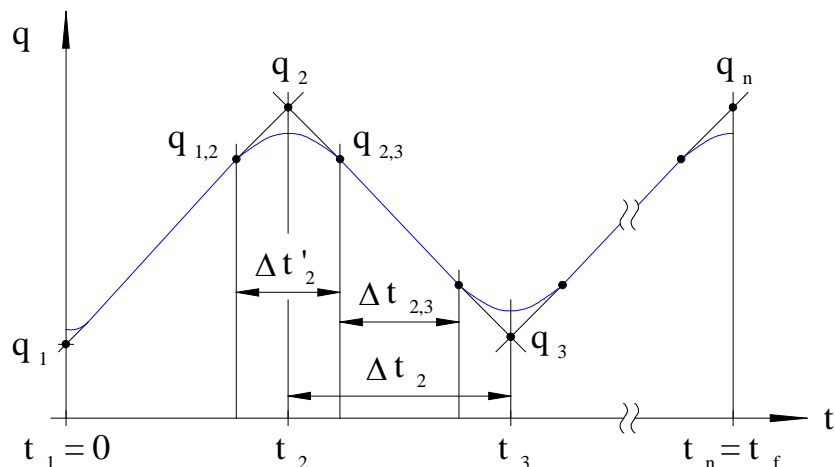
Der Verlauf der Beschleunigung ist nicht stetig. Man kann ihn deshalb für den praktischen Ansatz mit der folgenden Formel darstellen:

$$a(t) = a_m \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{t_c} \cdot t \right)$$

Die übrigen Verläufe erhält man durch Integration.

Interpolation mit linearen Polynomen und parabolischen Übergängen (Überschleifen)

- Es geht um die vereinfachte Planung.
- Lineare und quadratische Polynome werden verwendet.
- n Trajektorie-Punkte q_1, q_2, \dots, q_n in t_1, t_2, \dots, t_n gegeben.



Wenn wir mit linearen Polynomen interpolieren, würde in den Trajektorie-Punkten eine Unstetigkeit der Geschwindigkeit und dadurch auch eine Unstetigkeit der Beschleunigung entstehen. Deshalb wird der parabolische Übergang verwendet.

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$$

$\Delta t_{k,k+1}$ – Zeitperiode der linearen Approximation.

$\Delta t'_k$ – Zeitperiode der parabolischen Interpolation.

Bei der parabolischen Interpolation ist die Beschleunigung konstant.

$\dot{q}_{k,k+1}$ – die konstante Geschwindigkeit in der Zeitperiode $\Delta t_{k,k+1}$

\ddot{q}_k – die konstante Beschleunigung in der Zeitperiode $\Delta t'_k$

Gegeben: Δt_k , $\Delta t'_k$, q_k

Geschwindigkeit und Beschleunigung während Δt_k und $\Delta t'_k$:

$$\dot{q}_{k,k+1} = \frac{q_{k+1} - q_k}{\Delta t_k}, \quad \dot{q}_{k-1,k} = \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t_{k-1}}$$

$$\ddot{q}_k = \frac{\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}}{\Delta t'_k}$$

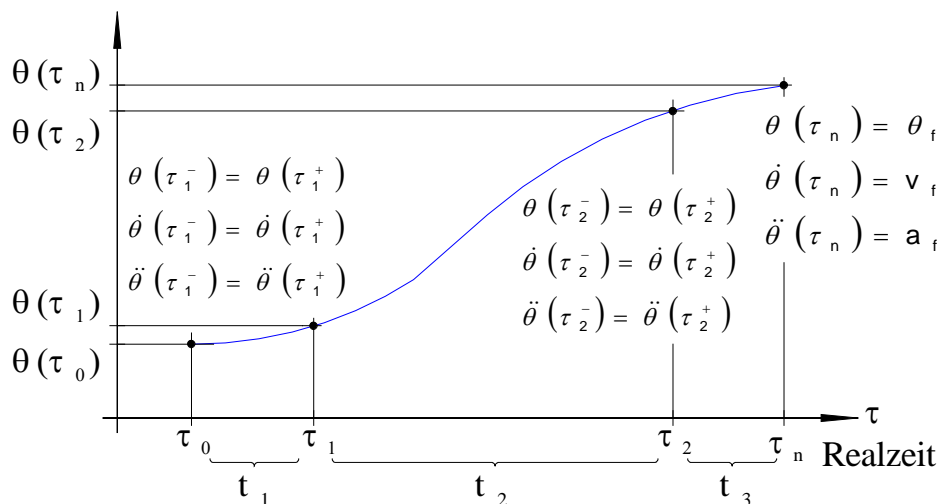
Die Punkte q_k werden nicht genau erreicht. Je größer die Beschleunigung ist, desto näher zum Punkt q_k kommt die Bahn. Im Prinzip geht es um das trapezoide Profil der Geschwindigkeit. Der Unterschied besteht allerdings darin, dass hier auf der Basis der einzelnen vorgegebenen Punkte und ihnen entsprechenden Zeiten geplant wird.

8.3 Bahnplanung in Gelenkvariablen mit Splines

Im Prinzip könnte man eine beliebige Bahn mit einem einzigen Polynom planen. Wenn eine bestimmte Zahl von Bedingungen an die Winkel (Lagen), Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gegeben sind, dann wählt man ein Polynom der Stufe um eins niedriger als die Zahl der Bedingungen (dann entspricht die Zahl der Bedingungen der Zahl der Koeffizienten) und man berechnet die Polynomkoeffizienten so, dass diese Bedingungen erfüllt sind. Es zeigt sich allerdings, dass Polynome höherer Ordnungen häufig lokale Extrema besitzen und die Verläufe etwas „wilder“ aussehen als die Verläufe der Polynome niedriger Ordnungen. Aus diesem Grund werden also praktisch nur Polynome bis zur vierten Ordnung eingesetzt. Um die Bedingungen auf der Bahn auch mit diesen Polynomen erfüllen zu können, sollten für eine Bahn mehrere verwendet werden und deshalb in geeigneter Weise aneinander anknüpfen. Solche Polynome nennt man Splines. Ihre Anwendung wird anhand eines etwas ausführlicheren Beispiels vorgestellt.

Beschränkungen sind im Allgemeinen:

- a) Anfangsposition:
Position, Geschwindigkeit (= 0) und Beschleunigung (= 0)
- b) lift-off-Position:
Stetige Bewegung für den Übergangspunkt
- c) set-down-Position:
Stetige Bewegung für den Übergangspunkt
- d) Endposition:
Position, Geschwindigkeit (= 0) und Beschleunigung (= 0)
- e) Extreme der Bahnen:
innerhalb von physischen und geometrischen Beschränkungen jedes Gelenkes.
- f) Zeitliche Beschränkungen



Die Bezeichnung der Bedingungen:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1. Anfangsposition | $\theta_0 = \theta(\tau_0)$ |
| 2. Anfangsgeschwindigkeit | v_0 (gewöhnlich Null) |
| 3. Anfangsbeschleunigung | a_0 (gewöhnlich Null) |
| 4. lift-off-Position | $\theta_1 = \theta(\tau_1)$ |
| 5. Stetigkeit der Position in τ_1 | $\theta(\tau_1^-) = \theta(\tau_1^+)$ |

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 6. Stetigkeit der Geschwindigkeit in τ_1 | $v(\tau_1^-) = v(\tau_1^+)$ |
| 7. Stetigkeit der Beschleunigung in τ_1 | $a(\tau_1^-) = a(\tau_1^+)$ |
| 8. set-down- Position | $\theta_2 = \theta(\tau_2)$ |
| 9. Stetigkeit der Position in τ_2 | $\theta(\tau_2^-) = \theta(\tau_2^+)$ |
| 10. Stetigkeit der Geschwindigkeit in τ_2 | $v(\tau_2^-) = v(\tau_2^+)$ |
| 11. Stetigkeit der Beschleunigung in τ_2 | $a(\tau_2^-) = a(\tau_2^+)$ |
| 12. Endposition | $\theta_f = \theta(\tau_f)$ |
| 13. Endgeschwindigkeit | v_f (gewöhnlich Null) |
| 14. Endbeschleunigung | a_f (gewöhnlich Null) |

4-3-4 Bahn

- a) Ein Polynom 4. Ordnung (t ist die normalisierte Zeit, siehe weiter)

$$h_1(t) = a_{14} t^4 + a_{13} t^3 + a_{12} t^2 + a_{11} t + a_{10}$$

→ das erste Segment (Anfangspunkt – lift-off)

- b) Ein Polynom 3. Ordnung

$$h_2(t) = a_{23} t^3 + a_{22} t^2 + a_{21} t + a_{20}$$

→ das zweite Segment (lift-off – set-down)

- c) Ein Polynom 4. Ordnung

$$a_{n4} t^4 + a_{n3} t^3 + a_{n2} t^2 + a_{n1} t + a_{n0} = h_n(t)$$

→ das letzte (3.) Segment (set-down – Zielpunkt).

Insgesamt: 14 Koeffizienten

Die mathematische Behandlung des Falles 4-3-4

Normalisierte Zeit $t \in [0, 1]$, wobei $t = 0$ die Anfangszeit und $t = 1$ die Endzeit des Segments ist.

τ die reale Zeit [s]

τ_i die reale Zeit am Ende des i -ten Segments der Trajektorie.

t_i die Länge des Segments

$$t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$$

$$t = \frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} = \frac{\tau - \tau_{i-1}}{t_i}, \quad \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad t \in [0, 1]$$

Die Ableitungen der Polynome in Hinsicht auf die reale Zeit

$$v_i(t) = \frac{dh_i(t)}{d\tau} = \frac{dh_i(t)}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dh_i(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\tau_i - \tau_{i-1}} = \frac{1}{t_i} \frac{dh_i(t)}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} a_i(t) &= \frac{d^2 h_i(t)}{d\tau^2} = \frac{1}{t_i} \cdot \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dh_i(t)}{dt} \right) = \frac{1}{t_i} \frac{1}{t_i} \cdot \frac{d^2 h_i(t)}{dt^2} = \\ &= \frac{1}{t_i^2} \frac{d^2 h_i(t)}{dt^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Das 1. Segment der Bahn:

Spline: $h_1(t) = a_{14} t^4 + a_{13} t^3 + a_{12} t^2 + a_{11} t + a_{10}, \quad t \in [0, 1]$

Die erste Ableitung von $h_1(t)$:

$$v_1(t) = \frac{\dot{h}_1(t)}{t_1} = \frac{4a_{14}t^3 + 3a_{13}t^2 + 2a_{12}t + a_{11}}{t_1}$$

Die zweite Ableitung von $h_1(t)$:

$$a_1(t) = \frac{\ddot{h}_1(t)}{t_1^2} = \frac{12a_{14}t^2 + 6a_{13}t + 2a_{12}}{t_1^2}$$

1. $t = 0$ (Anfangsposition)

$$\theta_0 = \theta(0) = h_1(0) = a_{10}$$

$$v_0 = \dot{\theta}(0) = \frac{\dot{h}_1(0)}{t_1} = \frac{a_{11}}{t_1} \Rightarrow a_{11} = v_0 \cdot t_1$$

$$a_0 = \ddot{\theta}(0) = \frac{\ddot{h}_1(0)}{t_1^2} = \frac{2a_{12}}{t_1^2} \Rightarrow a_{12} = \frac{a_0}{2} \cdot t_1^2$$

Jetzt:

$$h_1(t) = a_{14} t^4 + a_{13} t^3 + \left(\frac{a_0 \cdot t_1^2}{2} \right) t^2 + (v_0 t_1) t + \theta_0$$

2. $t = 1$:

Wir können jetzt die Bedingung der genauen Einhaltung der Position freilassen. Die einzige Bedingung wird die Stetigkeit der Geschwindigkeit und Beschleunigung (und Position!).

$$v_1(1) \triangleq v_1 = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} = \frac{4a_{14} + 3a_{13} + a_0 t_1^2 + v_0 t_1}{t_1}$$

$$a_1(1) \triangleq a_1 = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} = \frac{12a_{14} + 6a_{13} + a_0 t_1^2}{t_1^2}$$

Das 2. Segment der Bahn zwischen lift-off und set-down:

Spline: $h_2(t) = a_{23} t^3 + a_{22} t^2 + a_{21} t + a_{20}$, $t \in [0, 1]$

1. $t = 0$ (lift-off)

$$\theta_2(0) = h_2(0) = a_{20}$$

$$v_2(0) = \frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = \frac{3a_{23} t^2 + 2a_{22} t + a_{21}}{t_2} \Big|_{t=0} = \frac{a_{21}}{t_2} \Rightarrow a_{21} = v_2 t_2$$

$$a_2(0) = a_2 = \frac{\ddot{h}_2(0)}{t_2^2} = \frac{6a_{23} t + 2a_{22}}{t_2^2} \Big|_{t=0} = \frac{2a_{22}}{t_2^2} \Rightarrow a_{22} = \frac{a_2 t_2^2}{2}$$

Die Bedingungen der Stetigkeit:

$$\frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\ddot{h}_2(0)}{t_2^2} = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2}$$

$$v: \frac{3a_{23} t^2 + 2a_{22} t + a_{21}}{t_2} \Big|_{t=0} = \frac{4a_{14} t^3 + 3a_{13} t^2 + 2a_{12} t + a_{11}}{t_1} \Big|_{t=1}$$

$$-\frac{a_{21}}{t_2} + \frac{4a_{14}}{t_1} + \frac{3a_{13}}{t_1} + \frac{a_0 t_1^2}{t_1} + \frac{v_0 t_1}{t_1} = 0$$

$$a: \frac{6a_{23} t + 2a_{22}}{t_2^2} \Big|_{t=0} = \frac{12a_{14} t^2 + 6a_{13} t + 2a_{12}}{t_1^2} \Big|_{t=1}$$

$$-\frac{2a_{22}}{t_2^2} + \frac{12a_{14}}{t_1^2} + \frac{6a_{13}}{t_1^2} + \frac{2a_{12}}{t_1^2} = 0$$

2. $t = 1$

$$h_2(1) = a_{23} + a_{22} + a_{21} + a_{20}$$

$$v_2(1) = \frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = \frac{3a_{23}t^2 + 2a_{22}t + a_{21}}{t_2} \bigg|_{t=1} = \frac{3a_{23} + 2a_{22} + a_{21}}{t_2}$$

$$a_2(1) = \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} = \frac{6a_{23}t + 2a_{22}}{t_2^2} \bigg|_{t=1} = \frac{6a_{23} + 2a_{22}}{t_2^2}$$

Das letzte Segment der Bahn:

Spline: $h_n(\bar{t}) = a_{n4}\bar{t}^4 + a_{n3}\bar{t}^3 + a_{n2}\bar{t}^2 + a_{n1}\bar{t} + a_{n0}$, $t \in [0,1]$

! Neue Substitution (beim letzten Segment wird vom Ende her zum Anfang „gedacht“):

$$\bar{t} = t - 1 \quad , \quad \bar{t} \in [-1,0]$$

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = 1$$

1. $\bar{t} = 0$ – Endposition

$$h_n(0) = a_{n0} = \theta_f$$

$$v_f = \frac{\dot{h}_n(0)}{t_n} = \frac{a_{n1}}{t_n} \Rightarrow a_{n1} = v_f \cdot t_n$$

$$a_f = \frac{\ddot{h}_n(0)}{t_n^2} = \frac{2a_{n2}}{t_n^2} \Rightarrow a_{n2} = \frac{a_f \cdot t_n^2}{2}$$

2. $\bar{t} = -1$

$$h_n(-1) = a_{n4} - a_{n3} + \frac{a_f t_n^2}{2} - v_f t_n + \theta_f = \theta_2(1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{h}_n(-1)}{t_n} &= \frac{4a_{n4}\bar{t}^3 + 3a_{n3}\bar{t}^2 + 2a_{n2}\bar{t} + a_{n1}}{t_n} \bigg|_{\bar{t}=-1} = \\ &= \frac{-4a_{n4} + 3a_{n3} - 2a_{n2} + a_{n1}}{t_n} = \frac{-4a_{n4} + 3a_{n3} - a_f t_n^2 + v_f t_n}{t_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{h}_n(-1)}{t_n^2} &= \frac{12 a_{n4} \bar{t}^2 + 6 a_{n3} \bar{t} + 2 a_{n2}}{t_n^2} \bigg|_{\bar{t}=-1} = \\ &= \frac{12 a_{n4} - 6 a_{n3} + 2 a_{n2}}{t_n^2} = \frac{12 a_{n4} - 6 a_{n3} + a_f t_n^2}{t_n^2} \end{aligned}$$

Die Bedingungen der Stetigkeit:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} &= \frac{\dot{h}_n(-1)}{t_n} & \text{b) } \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} &= \frac{\ddot{h}_n(-1)}{t_n^2} \\ \text{a) } \frac{4 a_{n4} - 3 a_{n3} + a_f t_n^2 - v_f t_n}{t_n} &- \frac{3 a_{23}}{t_2} - \frac{2 a_{22}}{t_2} - \frac{a_{21}}{t_2} &= 0 \\ \text{b) } \frac{-12 a_{n4} + 6 a_{n3} - 2 a_{n2}}{t_n^2} &+ \frac{6 a_{23}}{t_2^2} + \frac{2 a_{22}}{t_2^2} &= 0 \end{aligned}$$

Das Polynom für das 3. Segment (n. Segment) muss man am Ende in die normalisierte Zeit t zurück transformieren:

$$\begin{aligned} h_n(\bar{t}) &= h_n(t-1) = a_{n4} t^4 + (-4 a_{n4} + a_{n3}) t^3 + (6 a_{n4} - 3 a_{n3} + a_{n2}) t^2 + \\ &+ (-4 a_{n4} + 3 a_{n3} - 2 a_{n2} + a_{n1}) t + \\ &+ t^3 + (a_{n4} - a_{n3} + a_{n2} - a_{n1} + a_{n0}) \quad , \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

Weitere Gleichungen:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \theta_1 - \theta_0 = h_1(1) - h_1(0) = a_{14} + a_{13} + \frac{a_0 t_1^2}{2} + v_0 t_1 \\ \delta_2 &= \theta_2 - \theta_1 = h_2(1) - h_2(0) = a_{23} + a_{22} + a_{21} \\ \delta_n &= \theta_f - \theta_2 = h_n(0) - h_n(-1) = -a_{n4} + a_{n3} - \frac{a_f t_n^2}{2} + v_f t_n \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen plus zwei Stetigkeitsbedingungen plus zwei weitere Stetigkeitsbedingungen ergeben sieben Gleichungen.

Diese sieben Gleichungen kann man in der Matrix-Form ausdrücken:

$$C x = y$$

wobei

$$x = [a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{n3}, a_{n4}]^T$$

$$y = \left[\delta_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2} - v_0 t_1, -a_0 t_1^2 - v_0, -a_0, \delta_2, -a_f t_n + v_f, a_f, \right. \\ \left. , \delta_n + \frac{a_f t_n^2}{2} - v_f t_n \right]^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{t_1} & \frac{4}{t_1} & \frac{-1}{t_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{t_1^2} & \frac{12}{t_1^2} & 0 & \frac{-2}{t_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t_2} & \frac{2}{t_2} & \frac{3}{t_2} & \frac{-3}{t_n} & \frac{4}{t_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Lösung:

$$x = C^{-1} y$$

8.4 Bahnplanung im kartesischen Raum (operational space)

Bezeichnungen:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \varphi \\ \vartheta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\phi}} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \vartheta \\ \psi \end{bmatrix}$$

Die Bahnplanung wird im Allgemeinen auf die folgende Weise durchgeführt:

1. $\left. \begin{array}{l} p_x = p_x(t) \\ p_y = p_y(t) \\ p_z = p_z(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varphi = \varphi(t) \\ \vartheta = \vartheta(t) \\ \psi = \psi(t) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bar{\mathbf{p}}_0 = \bar{\mathbf{p}}(0) ; \bar{\mathbf{p}}_f = \bar{\mathbf{p}}(t_f) \\ \bar{\boldsymbol{\phi}}_0 = \bar{\boldsymbol{\phi}}(0) ; \bar{\boldsymbol{\phi}}_f = \bar{\boldsymbol{\phi}}(t_f) \end{array} \right\}$

Zugehörige Rotationsmatrix

$$\begin{bmatrix} & & & p_x \\ & & & p_y \\ & & & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{R} \end{array}$$

Die Zeitvorschrift wird für $x_i(t), i = 1, 2, \dots, 6$ definiert. Die Methoden für die Zeitvorschrift sind aus dem Gelenkraum bekannt.

In diesen Koordinaten des operationellen Raums wird die geeignete Bahn vorbereitet.

2. Das inverse Problem der Kinematik für diese Bahn lösen.
3. Eventuell noch zwischen errechneten Punkten im Gelenkraum eine Interpolation durchführen (Mikrointerpolation).

Die Bahn im kartesischen Raum kann entweder 1. genau oder 2. mit der Interpolation der n Punkte beschrieben werden:

1. Analytische Repräsentation der Kurven (Geraden, Kreise, usw.)
2. n Punkte in n Zeitpunkten $t_k, k = 1, 2, \dots, n$. Das kann genauso gemacht werden wie im Falle der Gelenkvariablen, jetzt für die Komponenten des kartesischen Vektors

$$\bar{\mathbf{x}}^T(t_k) = [x_1, x_2, \dots, x_6].$$

Es können dieselben Methoden wie bei der Planung im Gelenkraum verwendet werden – kubische Splines, Folge linearer Polynome mit parabolischen Übergängen usw.

In beiden Fällen werden die Bahnen durch die Lösung der inversen Aufgabe in Gelenkkoordinaten überführt und als Stellgröße den Servomotoren zugeführt. Die Taktfrequenz wird durch die Komplexität der Berechnungen (Berechnungen der inversen Transformation und Bahn) vorgegeben.

Raumkurve – wird parametrisch repräsentiert. Zuerst wird nur die Bahn der Lage ohne die Orientierung geplant, später kommt auch die Orientierung dazu.

Anfangspunkt: $\vec{p}_o = [p_{ox}, p_{oy}, p_{oz}]^T$

Endpunkt: $\vec{p}_f = [p_{fx}, p_{fy}, p_{fz}]^T$

Punkt: $\vec{p} = [p_x, p_y, p_z]^T$

Parameter der Kurve: Länge der Kurve s vom Punkt \vec{p}_o zu \vec{p} .

$$\vec{p} = \vec{f}(s)$$

$s = s(t)$ – man muss die Zeitabhängigkeit kennen – geht bei der Geraden und beim Kreis.

Die folgenden Vektoren sind mit der Raumkurve verbunden, der Berührungsvektor \vec{t} und Normalvektor \vec{n} .

$$\vec{t} = \frac{d\vec{p}}{ds}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\left\| \frac{d^2\vec{p}}{ds^2} \right\|} \frac{d^2\vec{p}}{ds^2}$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$

\vec{t} und \vec{n} definieren die so genannte Oskulationsebene.

1. Das lineare Segment

$$\vec{p}(s) = \vec{p}_o + \frac{s}{\|\vec{p}_f - \vec{p}_o\|} (\vec{p}_f - \vec{p}_o)$$

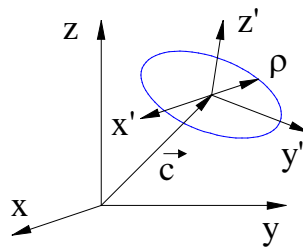
$$\vec{t} = \frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_o}{\|\vec{p}_f - \vec{p}_o\|}$$

$$\frac{d^2\vec{p}}{ds^2} = \vec{0}$$

2. Der Kreis im Raum

a) Das Koordinatensystem in der Mitte des Kreises (\vec{z}' Achse senkrecht zur Kreisebene):

$$O' - x' y' z'$$

$$\vec{p}(s) = \begin{bmatrix} \rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$


Hier ist ρ der Radius und s die Länge des Kreises.

b) Der Vektor zur Mitte des Kreises wird als \vec{c} (vom Anfang des Koordinatensystems) Rotation des KS $O' - x' y' z'$ im Bezug zu KS $O - x y z - R$

$$\vec{p}(s) = \vec{c} + R \vec{p}(s)$$

$$\vec{t} = \frac{d\vec{p}}{ds} = R \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{d^2\vec{p}}{ds^2} = R \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ -\frac{1}{\rho} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Trajektorien der Lage und der Orientierung

Hier wird die Position gesondert von der Orientierung behandelt.

Der gesamte Vektor ist

$$\vec{x}(s) = \begin{bmatrix} \vec{p}(s) \\ \vec{\phi}(s) \end{bmatrix}, \text{ wobei } \vec{p}(s) = \begin{bmatrix} p_x(s) \\ p_y(s) \\ p_z(s) \end{bmatrix}, \quad \vec{\phi}(s) = \begin{bmatrix} \varphi \\ \vartheta \\ \psi \end{bmatrix} \text{ der Eulerwinkel oder RPY - Winkel ist.}$$

1. Die Trajektorie der Position

\vec{p}_o Anfangspunkt

\vec{p}_f Endpunkt

$$\vec{p}_o = \vec{p}(s)|_{s=0} = \vec{p}(0) \quad ; \quad \vec{p}_f = \vec{p}(s)|_{s=s_f} = \vec{p}(s_f)$$

$$s = 0 \quad \text{wenn} \quad t = t_o (= 0)$$

$$s = s_f \quad \text{wenn} \quad t = t_f$$

$s = s(t)$ Zeitabhängigkeit von s !

Hier können beliebige Methoden aus dem Gelenkraum verwendet werden (kubische Polynome, lineare und parabolische Übergänge, usw.).

Die Geschwindigkeit (Zitableitung)

$$\dot{\vec{p}}(s) = \frac{d\vec{p}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \vec{t}$$

\dot{s} – das Profil der Geschwindigkeit.

a) Das lineare Segment

$$\vec{p} = \frac{s}{\|\vec{p}_f - \vec{p}_o\|} (\vec{p}_f - \vec{p}_o) + \vec{p}_o$$

$$\dot{\vec{p}} = \frac{\dot{s}}{\|\vec{p}_f - \vec{p}_o\|} (\vec{p}_f - \vec{p}_o) = \dot{s} \vec{t} \quad , \quad \ddot{\vec{p}} = \frac{\ddot{s}}{\|\vec{p}_f - \vec{p}_o\|} (\vec{p}_f - \vec{p}_o) = \ddot{s} \vec{t}$$

b) Das kreisförmige Segment

$$\vec{p} = \vec{c} + R \begin{bmatrix} \rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{p}} = R \begin{bmatrix} -\dot{s} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \dot{s} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix} = R \cdot \dot{s} \vec{t}$$

$$\ddot{\vec{p}} = R \begin{bmatrix} \frac{-\dot{s}^2}{\rho} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) - \ddot{s} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \frac{-\dot{s}^2}{\rho} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) + \ddot{s} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

 Richtung \vec{n}
Zentrifugale Beschleunigung

 Richtung \vec{t}
Tangentiale Beschleunigung

2. Die Trajektorie der Orientierung

Die Repräsentation durch die Rotationsmatrix ist für die Bahnplanung nicht vorteilhaft – z. B.

$$\vec{\bar{R}} = [\vec{\bar{n}}, \vec{\bar{s}}, \vec{\bar{a}}]$$

Bei der Interpolation würde die Senkrechttheit der Vektoren nicht beibehalten.

Deshalb $\vec{\phi}^T = [\varphi, \vartheta, \psi]$, Eulerwinkel oder RPY-Winkel

$\vec{\phi}_0$ – Anfangsorientierung

$\vec{\phi}_f$ – Endorientierung

Wieder ist die Verwendung von kubischen oder linearen Polynomen mit parabolischem Übergang möglich.

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}_0 + \frac{\mathbf{s}}{\|\vec{\phi}_f - \vec{\phi}_0\|} (\vec{\phi}_f - \vec{\phi}_0)$$

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}} = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{\|\vec{\phi}_f - \vec{\phi}_0\|} (\vec{\phi}_f - \vec{\phi}_0)$$

$$\ddot{\vec{\phi}} = \frac{\ddot{\mathbf{s}}}{\|\vec{\phi}_f - \vec{\phi}_0\|} (\vec{\phi}_f - \vec{\phi}_0)$$

Der Parameter \mathbf{s} hat jetzt allerdings nicht die physikalische Dimension der Länge sondern des Winkels. Dazu muss das Zeitverhalten spezifiziert werden. Verständlicher ist die Planung der Orientierung in den einzelnen Winkeln gegeben:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\mathbf{s}_1}{|\varphi_f - \varphi_0|} (\varphi_f - \varphi_0) \quad , \quad \mathbf{s}_1 \in [0, \varphi_f - \varphi_0]$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{\mathbf{s}_2}{|\vartheta_f - \vartheta_0|} (\vartheta_f - \vartheta_0) \quad , \quad \mathbf{s}_2 \in [0, \vartheta_f - \vartheta_0]$$

$$\psi = \psi_0 + \frac{\mathbf{s}_3}{|\psi_f - \psi_0|} (\psi_f - \psi_0) \quad , \quad \mathbf{s}_3 \in [0, \psi_f - \psi_0]$$

Die einzelnen \mathbf{s}_i sollten im Zeitverlauf synchronisiert werden.

Die Alternative mit Rotationsmatrizen

\vec{r} – der Einheitsvektor der Drehachse

α_f – der Drehwinkel, $\alpha(t) \in [0, \alpha_f]$

\mathbf{R}_0 – Anfangsrotationsmatrix $\mathbf{O}_0 - \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0$

R_f – Endrotationsmatrix $O_f = x_f y_f z_f$

$$R_f = R_o \circ R_r$$

${}^o R_f$ – Drehung von KS-o zu KS-f

${}^o R_f = R_o^{-1} R_f = R_o^T R_f$ – Matrix der Drehung von der Anfangs- zur Endorientierung.

$R_r(t)$ – Die Matrix des Übergangs zwischen R_o und R_f .

Die Matrix des Übergangs ${}^o R_r(t)$ ersetzt die Matrix ${}^o R_f$. Der Unterschied zwischen ihnen besteht darin, dass die erste Rotationsmatrix die Rotation von R_o zu R_f sozusagen in einem Schritt ohne Rücksicht auf die Zeit durchführt, wobei ${}^o R_r(t)$ dieselbe Rotation als Funktion der Zeit (und Winkels) realisiert. Deshalb muss gelten, dass ${}^o R_r(0) = I$ und ${}^o R_r(t_f) = {}^o R_f$ sind. Diese Rotationsmatrix dreht also von der Anfangsrotation zur Endrotation nach einer bestimmten zeitlichen Vorschrift. Das ist allerdings nichts anderes als eine Orientierungsbahn.

Für ${}^o R_f$ kann die Achse \vec{r} und der Winkel α_f errechnet werden:

$$\alpha_f = \cos^{-1} \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right)$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2 \sin \alpha_f} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix},$$

wobei

$${}^o R_f = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}.$$

Die Parametrisierung der Rotationsbewegung erfolgt über den Winkel

$$\alpha(t) \in [0, \alpha_f].$$

Wieder einmal kann man zum Winkel α eine Vorschrift für das Zeitverhalten zuordnen (aus der Menge der Gelenkvariablen), wobei $\alpha(0) = 0$ und $\alpha(t_f) = \alpha_f$ ist.

Die Matrix des Übergangs im Basiskoordinatensystem ist gestaltet als:

$$R(t) = R_o \circ R_r(\alpha(t))$$

wobei ${}^o R_r(\alpha(t))$ die Matrix der Drehung um den Vektor \vec{r} und um den Winkel $\alpha(t)$ ist. Der Zeitverlauf des Winkels kann mit den schon bekannten Methoden vorbereitet werden, z. B. mit dem Polynom

$$\alpha(t) = \alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$$

9. Zulagen

9.1 Physikalische Gesetzmäßigkeiten

Translation

Alle Körper sind träge. Wirken keine Kräfte auf sie, so bewegen sie sich gleichförmig ohne Richtungsänderung.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}(t)}{dt} \quad \text{Geschwindigkeit}$$

$$\vec{s} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt + \vec{s}(t_0)$$

$$\vec{s}(t_0) \quad \text{Ort zur Zeit } t_0$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad \text{Beschleunigung}$$

$$\vec{v} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{a}(t) dt + \vec{v}(t_0)$$

$$\vec{v}(t_0) \quad \text{Geschwindigkeit zur Zeit } t_0$$

Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung eines Körpers mit $\vec{s}(t_0) = \vec{v}(t_0) = 0$ und $\vec{a}(t_0) = \text{const.}$ gilt:

$$\vec{v} = \vec{a} t$$

Beispiel: Freier Fall eines Körpers

Es gilt

$$a = g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{Erdbeschleunigung}$$

Aus

$$v = g t$$

und

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

folgt:

$$v = \sqrt{2 g s}$$

bei unberücksichtigtem Luftwiderstand;

s ist die Fallhöhe

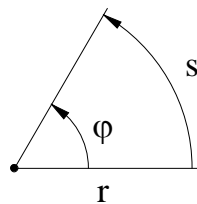
Rotation

Die für die Rotationsbewegung geltenden Gesetze sind denen der Translationsbewegung analog.
Es sind zu ersetzen:

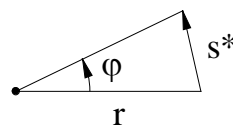
Weg s \rightarrow Drehwinkel φ
 Geschwindigkeit v \rightarrow Winkelgeschwindigkeit ω
 Beschleunigung a \rightarrow Winkelbeschleunigung α

$$\varphi = \frac{s}{r} \quad \text{Drehwinkel } (\varphi \text{ in Radiant})$$

$$\varphi = \frac{s^*}{r} \quad \text{Näherung für kleine Winkel}$$



für kleine Winkel φ



$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} \quad \text{Winkelbeschleunigung}$$

Für $\omega = \text{const.}$:

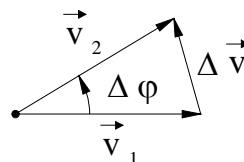
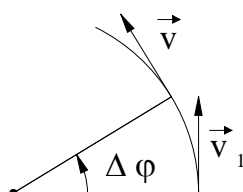
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

mit f = Kreisfrequenz und T = Umlaufzeit

Für die gleichförmige Kreisbewegung gilt:

$$v_t = r \frac{d\varphi}{dt} = r \omega \quad \text{Tangentialgeschwindigkeit}$$

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{Radialbeschleunigung (zeigt zum Drehzentrum)}$$



Für $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\dot{v}_r = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_t \Delta \varphi}{\Delta t} = r \omega^2$$

Kräfte

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Grundgleichung der Mechanik

$$G = m g$$

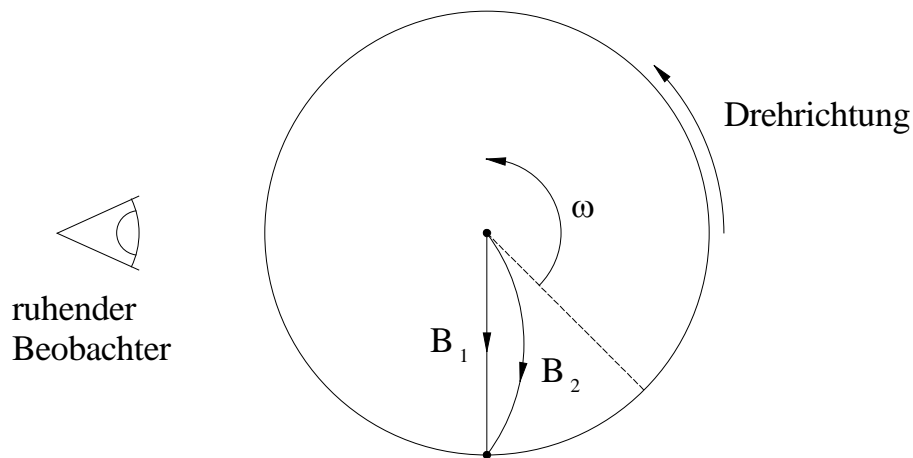
Gewichtskraft [1 kg $\hat{=}$ 9,81 N]

$$\vec{F}_Z = -m \vec{a}_r = -m \vec{r} \omega^2$$

Zentrifugalkraft F_Z (Fliehkraft) bei der Rotation. F_Z ist stets vom Drehzentrum weggerichtet.

Coriolis-Kraft:

Ein Körper, der sich in einem drehenden System in Richtung des Radius bewegt, erfährt eine Ablenkung durch die so genannte *Coriolis-Kraft*.



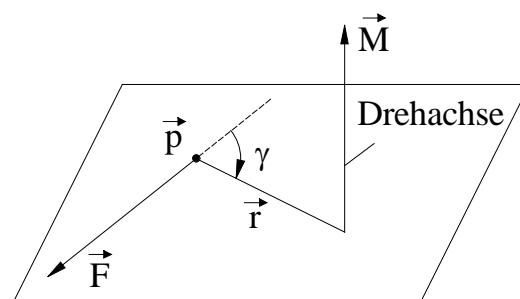
Die geradlinige Bahn B_1 bezüglich des ruhenden Beobachters entspricht einer gekrümmten Bahn B_2 bezüglich eines Beobachters im sich drehenden System, d. h., soll sich ein Körper in einem sich drehenden System auf einer geradlinigen Bahn bewegen, so sind hierfür Kräfte notwendig.

Drehmoment, Trägheitsmoment

Wirkt eine Kraft \vec{F} auf einen drehbaren Körper unter dem Hebel \vec{r} , so erzeugt sie ein Drehmoment \vec{M} :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{Vektorgleichung}$$

$$M = F r \sin \gamma \quad \text{Betragsgleichung}$$



$dJ = r^2 dm$ Trägheitsmoment für einen Massenpunkt mit der Masse dm .

$J = \int_{\text{Volumen}} r^2 dm$ Trägheitsmoment für einen Körper.

r – ist gleich dem Abstand des Massenpunktes von der Drehachse.

J – ist ein Maß für die Massenverteilung eines Körpers zu einer Drehachse.

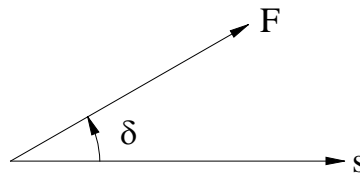
Tensor beschreibt das Trägheitsverhalten eines Körpers bezüglich x, y, z -System in homogenen Koordinaten:

$$M = \int \vec{r} \vec{r}^T dm = \begin{bmatrix} \int x^2 dm & \int xy dm & \int xz dm & \int x dm \\ \int xy dm & \int y^2 dm & \int yz dm & \int y dm \\ \int xz dm & \int yz dm & \int z^2 dm & \int z dm \\ \int x dm & \int y dm & \int z dm & \int dm \end{bmatrix}$$

Arbeit

$A = F \vec{s}$ Arbeit = Kraft · Weg

$A = F r \cos \delta$ Betragsgleichung



falls die Kraft nicht konstant ist:

$$a = \int_{(s)} \vec{F}_s d\vec{s}$$

\vec{F}_s ist die Kraft in Richtung $d\vec{s}$

Energie

Jede an einem Körper verrichtete Arbeit vergrößert dessen Energie und versetzt ihn in die Lage, seinerseits Arbeit zu verrichten, d. h. Energie entspricht Arbeitsvermögen oder Arbeitsvorrat.

Potenzielle Energie (Lageenergie):

$$P = mgh$$

m ist die Masse und h ist die Höhe senkrecht zur Erdoberfläche.

Kinetische Energie (Bewegungsenergie):

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Lässt man z. B. einen Körper aus einer Höhe h fallen, so hat er am Ende der Fallstrecke die kinetische Energie

$$K = m g h = m \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2} m v^2 ,$$

da sich seine potenzielle Energie vollständig in kinetische Energie umgewandelt hat.
Für den freien Fall gilt:

$$v = \sqrt{2 g h}$$

Kinetische Energie eines rotierenden Körpers:

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Das Trägheitsmoment J ist jeweils für die aktuelle Drehachse zu berechnen.

Physikalische Einheiten

Größe	Zeichen	Einheit	Name
Weg / Strecke	s	m	Meter
Zeit	t	s	Sekunde
Geschwindigkeit	v	$\frac{m}{s}$	
Beschleunigung	a	$\frac{m}{s^2}$	
Winkelgeschwindigkeit	ω	$\frac{1}{s}$	
Drehwinkel	φ	rad	Radian
Kraft	\vec{F}	$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$	Newton
Trägheitsmoment	J	$kg \cdot m^2$	
Arbeit	A	$J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	Joule

Literatur:

Kuchling, Horst: Taschenbuch der Physik; Fachbuchverlag Leipzig, 19. Aufl. 2007

Mirow, Bernd: Physik Formeln / Sekundarstufe II; Dümmler-Verlag Bonn

Gerthsen, Christian, Herausgeber *D. Meschede:* Physik; Springer-Verlag, 2006

9.2 Die Ableitung der *Lagrange-Euler-Dynamik*

Die *Lagrange*'sche Funktion eines mechanischen Systems ist:

$$L = K - P \quad = \text{kinetische Energie} - \text{potenzielle Energie}$$

Die dynamischen Gleichungen der *Lagrange*'schen Funktion sind:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

n : Zahl der Freiheitsgrade (Gelenke)

q_i : Gelenkvariablen

\dot{q}_i : korrespondierende Geschwindigkeiten der Gelenke

F_i : Kräfte (Schubgelenke) bzw. Drehmomente (Drehgelenke), die im Gelenk i wirken

Aufstellen der Dynamikgleichungen:

Beliebiger Punkt ${}^i \vec{r}$ im Koordinatensystem i bezüglich der Basiskoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{r} = {}^0 \vec{r} &= {}^0 T_i {}^i \vec{r} = (A_1 A_2 \dots A_i) {}^i \vec{r} \\ &= T_i {}^i \vec{r} \end{aligned}$$

Seine Geschwindigkeit im Basissystem in Abhängigkeit von den Gelenkvariablen $q_j(t)$ ist:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\sum_{j=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} \right] {}^i \vec{r} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial q_j}{\partial t} = \dot{q}_j$$

$$\vec{v}^2 = \vec{v}^T \vec{v} = \text{sp}(\vec{v} \vec{v}^T) \quad \text{mit} \quad \text{sp} A = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{Spur})$$

$$= \text{sp} \left[\left(\sum_{j=1}^i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j {}^i \vec{r} \right) \sum_{k=1}^i \left(\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k {}^i \vec{r} \right)^T \right]$$

$$\text{mit} \quad (AB)^T = B^T A^T \quad \text{folgt}$$

$$= \text{sp} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_j} {}^i \vec{r} {}^i \vec{r}^T \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \right]$$

= Quadrat der Geschwindigkeit eines Raumpunktes

Die kinetische Energie dK_i eines Masselementes dm im Glied i mit den Koordinaten ${}^i\vec{r}$ ist:

$$dK_i = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \frac{1}{2} \text{sp} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_j} {}^i\vec{r} {}^i\vec{r}^T dm \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right]$$

Die kinetische Energie des gesamten Gliedes i erhält man durch Integration.

$$K_i = \int_{\text{Glied } i} dK_i = \frac{1}{2} \text{sp} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \underbrace{\int_{\text{Glied } i} {}^i\vec{r} {}^i\vec{r}^T dm}_{=M_i} \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right]$$

Die kinetische Energie des gesamten Manipulators erhält man durch Aufsummierung der Energien für die einzelnen Glieder i .

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{sp} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_j} M_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{sp} \left[\frac{\partial T_i}{\partial q_j} M_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \dot{q}_j \dot{q}_k \end{aligned}$$

mit n = Anzahl der Achsen

Die potenzielle Energie P_i eines Körpers i mit der Masse m_i und den Schwerpunktkoordinaten $\underline{\vec{r}}_i$ in Basiskoordinaten ist:

$$P_i = -m_i \vec{g}^T \underline{\vec{r}} \quad \text{mit} \quad \vec{g}^T = (g_x, g_y, g_z, 0)$$

Wird der Massenschwerpunkt im System i beschrieben, dann ist:

$$P_i = -m_i \vec{g}^T T_i {}^i\underline{\vec{r}}_i$$

Die potenzielle Gesamtenergie ist damit:

$$P = - \sum_{i=1}^n m_i \vec{g}^T (T_i {}^i\underline{\vec{r}}_i)$$

Die *Lagrange*'sche Funktion ist damit:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{sp} \left[\frac{\partial T_i}{\partial q_j} M_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n m_i \vec{g}^T T_i {}^i\underline{\vec{r}}_i$$

Daraus berechnen sich die Dynamikgleichungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{sp} \left[\frac{\partial T_i}{\partial q_j} M_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right)^T \right] (\dot{q}_j \delta_{pk} + \dot{q}_k \delta_{pj})$$

mit:

$\delta_{mn} = 1$ für $m = n$ und sonst 0 und j, k in $\text{sp}[\dots]$ vertauschbar, da M_i symmetrisch ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \text{sp} \left[\frac{\partial T_i}{\partial q_p} M_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \dot{q}_k$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \text{sp} \left[\frac{\partial T_i}{\partial q_p} M_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \ddot{q}_k + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^i \text{sp} \left[\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_k \partial q_m} M_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_p} \right)^T \right] \dot{q}_k \dot{q}_m + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^i \text{sp} \left[\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_p \partial q_m} M_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \dot{q}_k \dot{q}_m \end{aligned}$$

Anmerkung: $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{\partial q_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q_m} \dot{q}_m$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{sp} \left[\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_j \partial q_p} M_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \dot{q}_j \dot{q}_k + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^i \text{sp} \left[\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_k \partial q_p} M_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_j} \right)^T \right] \dot{q}_j \dot{q}_k + \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i \bar{g}^T \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_p} \bar{r}_i \right) \end{aligned}$$

Erster und zweiter Summenausdruck sind identisch und je halb so groß wie der dritte Summenausdruck von

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right) \quad (\text{statt } j \rightarrow m).$$

Damit erhält man:

$$F_p = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \text{sp} \left[\frac{\partial T_i}{\partial q_k} M_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_p} \right)^T \right] \ddot{q}_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^i \text{sp} \left[\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_k \partial q_m} M_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_p} \right)^T \right] \dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{i=1}^n m_i \vec{g}^T \frac{\partial T_i}{\partial q_p} \vec{r}_i$$

mit $p = 1, \dots, n$

Als Matrixgleichung:

$\vec{F} = [A] \vec{\ddot{q}} + [B] \vec{\ddot{q}}^2 + [C] \overline{\dot{q} \dot{q}} + [D(\vec{q})]$
$n \times 1 \quad n \times n \quad n \times 1 \quad n \times n \quad n \times 1 \quad n \times c_n^2 \quad c_n^2 \times 1 \quad n \times 1$

Wobei gilt:

$$c_n^2 = n^2 - n.$$

- \vec{F} – von außen wirkende Kräfte
- $[A] \vec{\ddot{q}}$ – Trägheitsmomente / Kräfte
- $[B] \vec{\ddot{q}}^2$ – Zentrifugalkräfte
- $[C] \overline{\dot{q} \dot{q}}$ – Corioliskräfte
- D – Gravitationskräfte