Robotik

Vorlesung WS 2008 / 2009

Alexander Schlaefer

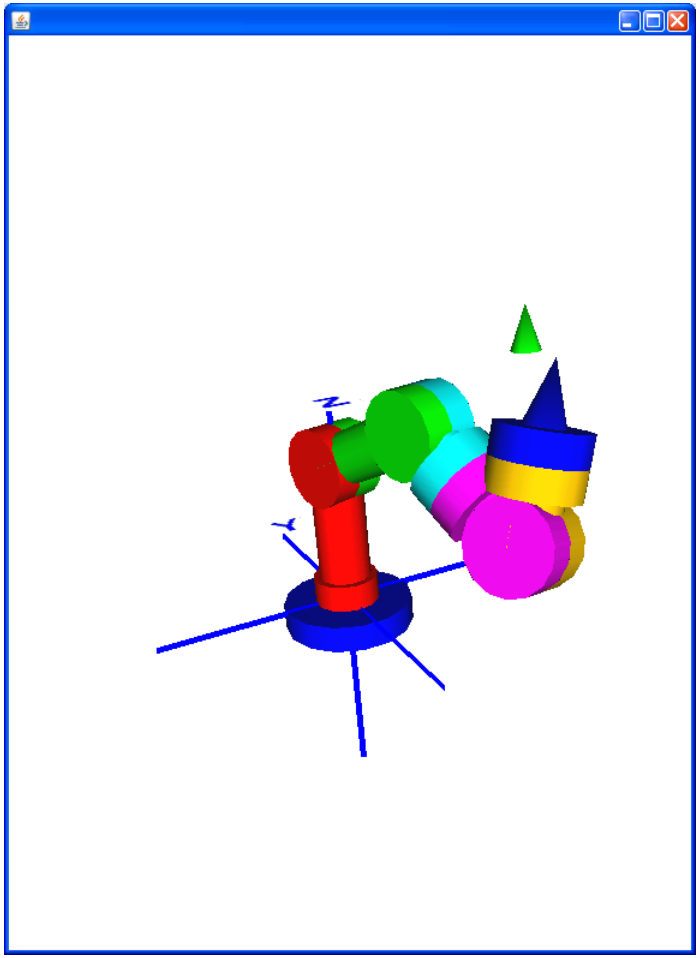
Kapitel V

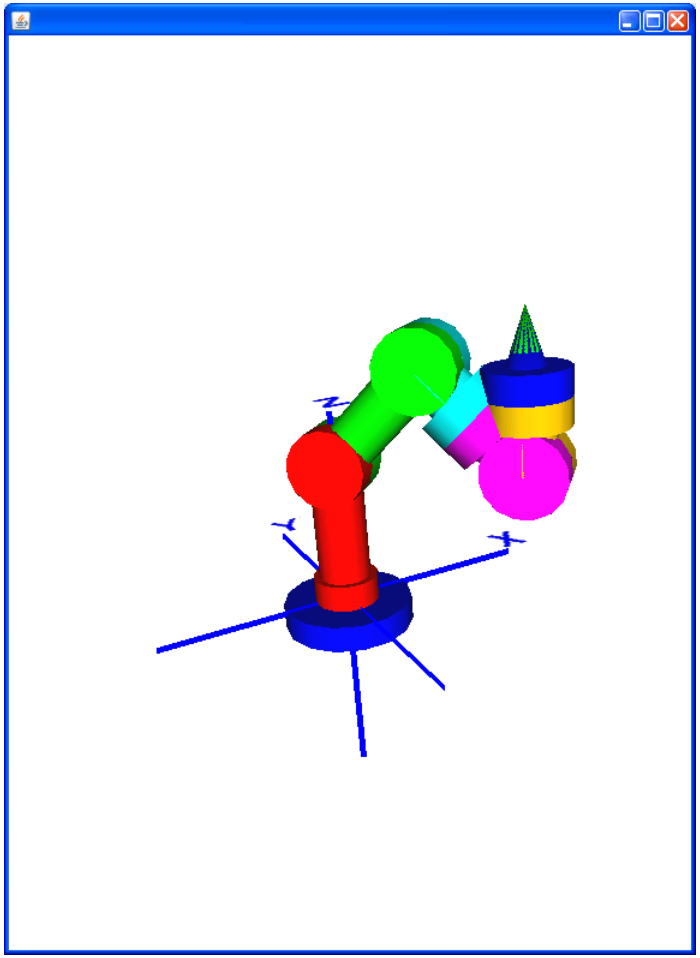
INVERSE KINEMATIK

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Vorwärtsrechnung: Bestimmen der Lage des Endeffektors / Handgelenk für gegebene Gelenkparameter
- Abbildung aus dem Gelenkwinkelraum in den kartesischen Raum
- Rückwärtsrechnung: Bestimmen der Gelenk-parameter für gegebende Position und Orientierung des Endeffektors
- Abbildung aus dem kartesischen in den Gelenkparameterraum

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)





Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

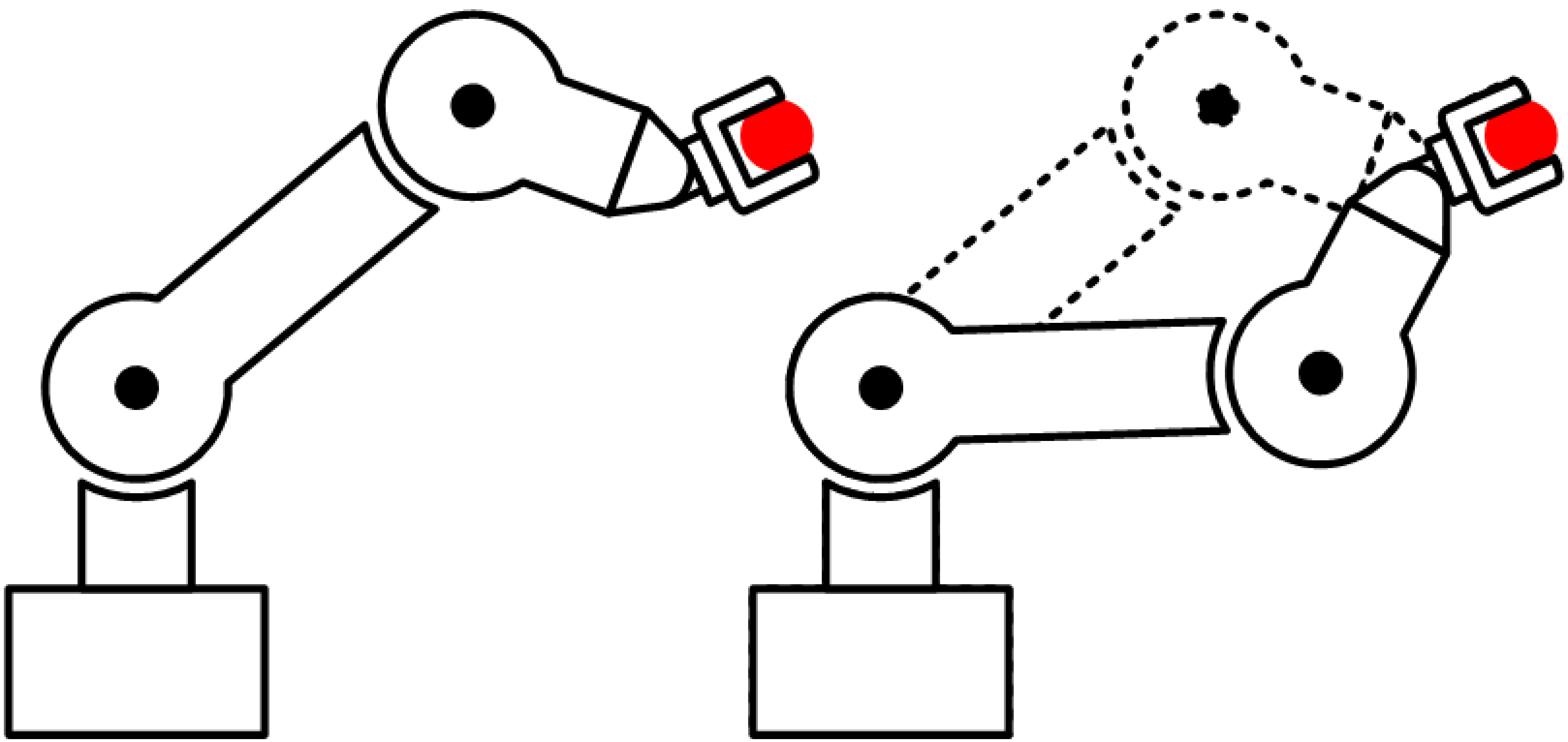
- Vorwärtsrechnung: 12 Werte in 4x4 Matrix

$$ {}^{0}A^{n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- Matrix beschreibt 6 unabhängige Größen (Freiheitsgrade)

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Matrixelemente a_{ij} enthalten trigonometrische Funktionen → keine eindeutigen Lösungen garantiert



Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Für Roboter mit $g > f = 6$ ist jede Effektorstellung mehrdeutig (Ausnahme: mechanische Grenzen)
- Effektorstellungen
  - Reduktionsstellung: mindestens eine Gelenkvariable frei wählbar (unendlich viele Belegungen)
  - „prinzipiell erreichbare" Effektorstellung: mindestens eine Belegung für die Gelenkvariablen
  - „unerreichbare" Effektorstellung: bei beliebiger Belegung der Gelenkvariablen nicht erreichbar

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Neben geometrischen Beschränkungen existieren physikalische Grenzen, z.B. für die Drehwinkel θ_i
- Lösungsansatz
  - Alle geometrisch möglichen Lösungen bestimmen
  - Aus den erhaltenen Lösungen („prinzipiell erreichbaren“ Effektorstellungen) die Teilmenge der physikalisch zulässigen Lösungen auswählen
  - Ergebnis sind die „zulässigen“ Effektorstellungen

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Für g = f = 6 ergeben sich aus

$$
{}^{0}A^{n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

12 Gleichungen mit 6 Unbekannten

- Zur Lösung können günstige Gleichungen ausgewählt werden

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

$$
{}^{0}A_3 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1} c_{\theta_2+\theta_3} & -s_{\theta_1} & c_{\theta_1} s_{\theta_2+\theta_3} & a_2 c_{\theta_1} c_{\theta_2} \\ s_{\theta_1} c_{\theta_2+\theta_3} & c_{\theta_1} & s_{\theta_1} s_{\theta_2+\theta_3} & a_2 s_{\theta_1} c_{\theta_2} \\ -s_{\theta_2+\theta_3} & 0 & c_{\theta_2+\theta_3} & -a_2 s_{\theta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{3}A_6 = \begin{bmatrix} c_{\theta_4} c_{\theta_5} c_{\theta_6} - s_{\theta_4} s_{\theta_6} & -c_{\theta_4} c_{\theta_5} s_{\theta_6} - s_{\theta_4} c_{\theta_6} & c_{\theta_4} s_{\theta_5} & d_6 c_{\theta_4} s_{\theta_5} \\ s_{\theta_4} c_{\theta_5} c_{\theta_6} + c_{\theta_4} s_{\theta_6} & -s_{\theta_4} c_{\theta_5} s_{\theta_6} + c_{\theta_4} c_{\theta_6} & s_{\theta_4} s_{\theta_5} & d_6 c_{\theta_4} s_{\theta_5} \\ -s_{\theta_5} c_{\theta_6} & s_{\theta_5} s_{\theta_6} & c_{\theta_5} & d_4 + d_6 c_{\theta_5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Lösungsansätze
  - Lösung in geschlossener Form (schnell!)
  - Numerische Lösung
- Gleichungssystem enthält trigonometrische Funktionen
- Es gibt kein allgemeines Verfahren zur Rückwärtsrechnung in geschlossener Form für beliebige Roboter

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Lösungsansätze
  - Geschlossene Form:
    - algebraische Lösung: verschiedene Lösungen direkt aus den Gleichungen
    - geometrische Lösung: Fallunterscheidung für verschiedene Roboter-Konfigurationen
    - Roboterspezifisch
  - Numerische Form:
    - iterative Verfahren, ggf. Rechenintensiv und ggf. Probleme mit Konvergenz
    - für verschiedene Roboter anwendbar

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

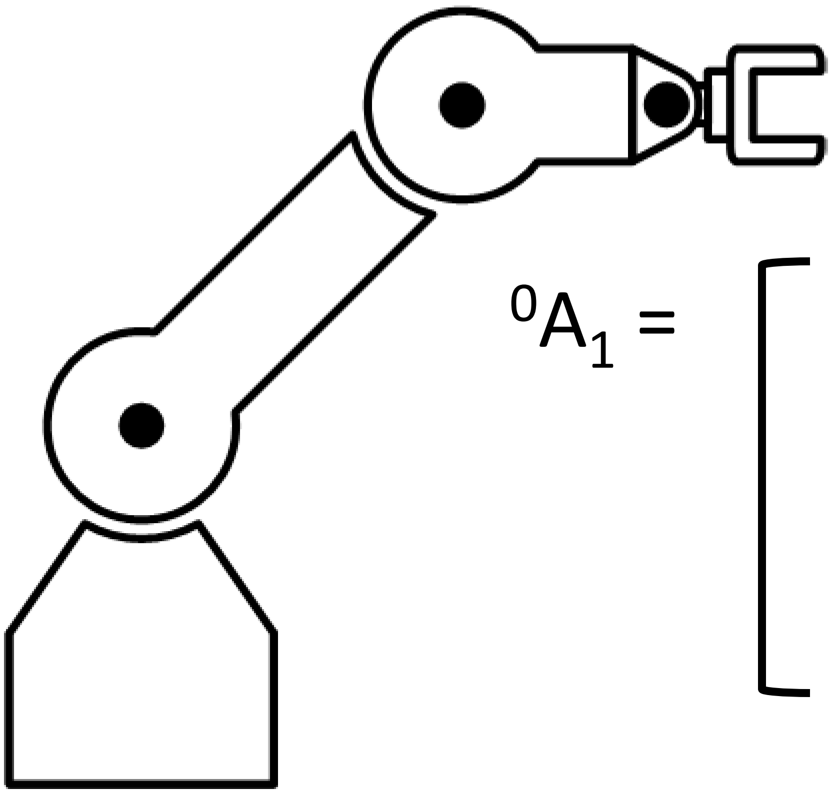
- atan2
  - Funktion bereits bekannt, für Rechnung sind nicht-negative Werte zweckmässig

$$\operatorname{atan2}(a,b) = \begin{cases} \arctan(a/b) + 2\pi & \text{falls } b > 0,\ a < 0 \\ \arctan(a/b) & \text{falls } b > 0,\ a \geq 0 \\ \pi/2 & \text{falls } b = 0,\ a > 0 \\ 0\ \text{undefiniert} & \text{falls } b = 0,\ a = 0 \\ \cancel{-}3\pi/2 & \text{falls } b = 0,\ a < 0 \\ \arctan(a/b) + \pi & \text{falls } b < 0,\ a > 0 \\ \arctan(a/b) \cancel{-} + \pi & \text{falls } b < 0,\ a < 0 \end{cases}$$

Inverse Kinematik (Beispiel)

$$ {}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -c_{\alpha_i}s_{\theta_i} & s_{\alpha_i}s_{\theta_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\alpha_i}c_{\theta_i} & -s_{\alpha_i}c_{\theta_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

S	a_i	α_i	d_i	Θ_i
1	L_1	0^o	0	Θ_1
2	L_2	0^o	0	Θ_2
3	L_3	0^o	0	Θ_3

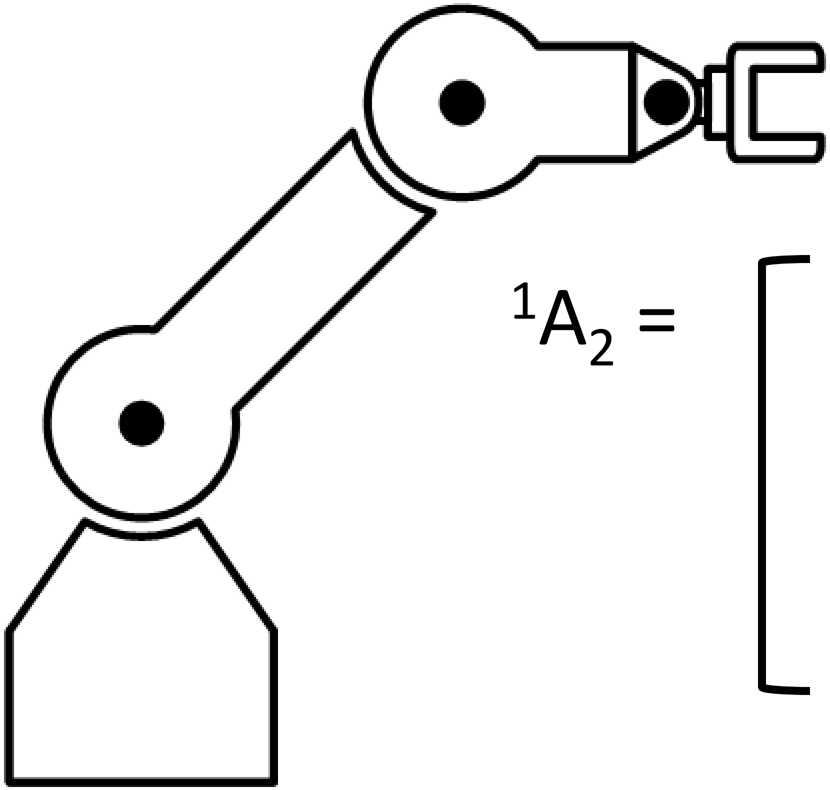


$$ {}^{0}A_1 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1} & -s_{\theta_1} & 0 & L_1\, c_{\theta_1} \\ s_{\theta_1} & c_{\theta_1} & 0 & L_1\, s_{\theta_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Inverse Kinematik (Beispiel)

$$ {}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -c_{\alpha_i}s_{\theta_i} & s_{\alpha_i}s_{\theta_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\alpha_i}c_{\theta_i} & -s_{\alpha_i}c_{\theta_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

S	a_i	α_i	d_i	Θ_i
1	L_1	0^o	0	Θ_1
2	L_2	0^o	0	Θ_2
3	L_3	0^o	0	Θ_3

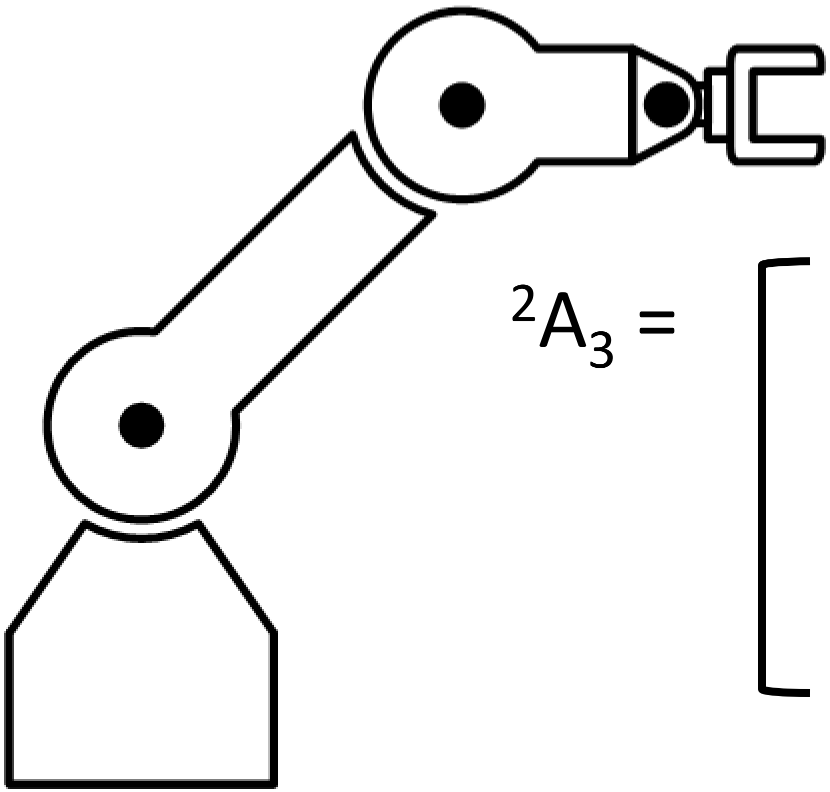


$$ {}^{1}A_2 = \begin{bmatrix} c_{\theta_2} & -s_{\theta_2} & 0 & L_2\, c_{\theta_2} \\ s_{\theta_2} & c_{\theta_2} & 0 & L_2\, s_{\theta_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Inverse Kinematik (Beispiel)

$$^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -c_{\alpha_i}s_{\theta_i} & s_{\alpha_i}s_{\theta_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\alpha_i}c_{\theta_i} & -s_{\alpha_i}c_{\theta_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

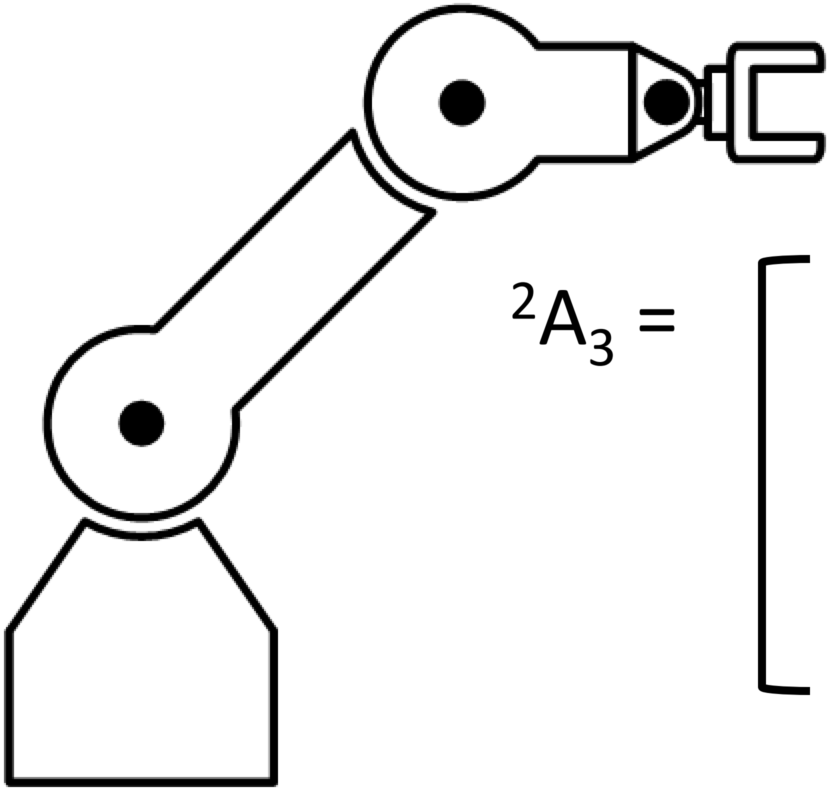
S	a_i	α_i	d_i	Θ_i
1	L_1	0^o	0	Θ_1
2	L_2	0^o	0	Θ_2
3	L_3	0^o	0	Θ_3



$$^2A_3 = \begin{bmatrix} c_{\theta_3} & -s_{\theta_3} & 0 & L_3\, c_{\theta_3} \\ s_{\theta_3} & c_{\theta_3} & 0 & L_3\, s_{\theta_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse Kinematik (Beispiel)

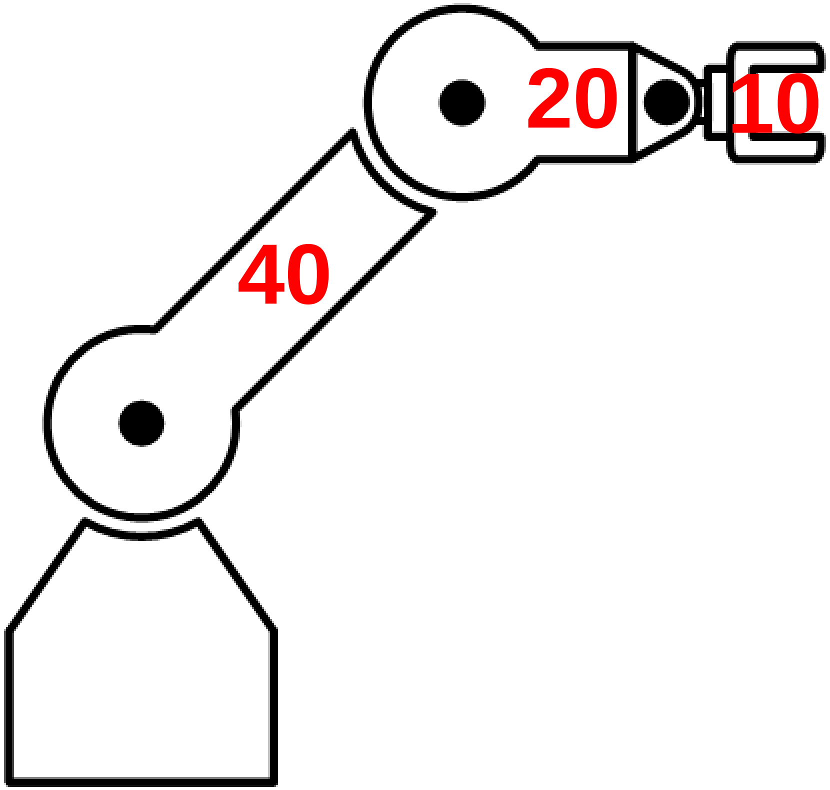
$$
{}^{0}A_3 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & -s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 & L_3\, c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + L_2\, c_{\theta_1+\theta_2} + L_1\, c_{\theta_1} \\ s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 & L_3\, s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + L_2\, s_{\theta_1+\theta_2} + L_1\, s_{\theta_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



$$
{}^{2}A_3 = \begin{bmatrix} c_{\theta_3} & -s_{\theta_3} & 0 & L_3\, c_{\theta_3} \\ s_{\theta_3} & c_{\theta_3} & 0 & L_3\, s_{\theta_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Inverse Kinematik (Beispiel)

$$^0A_3 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & -s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 & L_3\, c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + L_2\, c_{\theta_1+\theta_2} + L_1\, c_{\theta_1} \\ s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 & L_3\, s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + L_2\, s_{\theta_1+\theta_2} + L_1\, s_{\theta_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

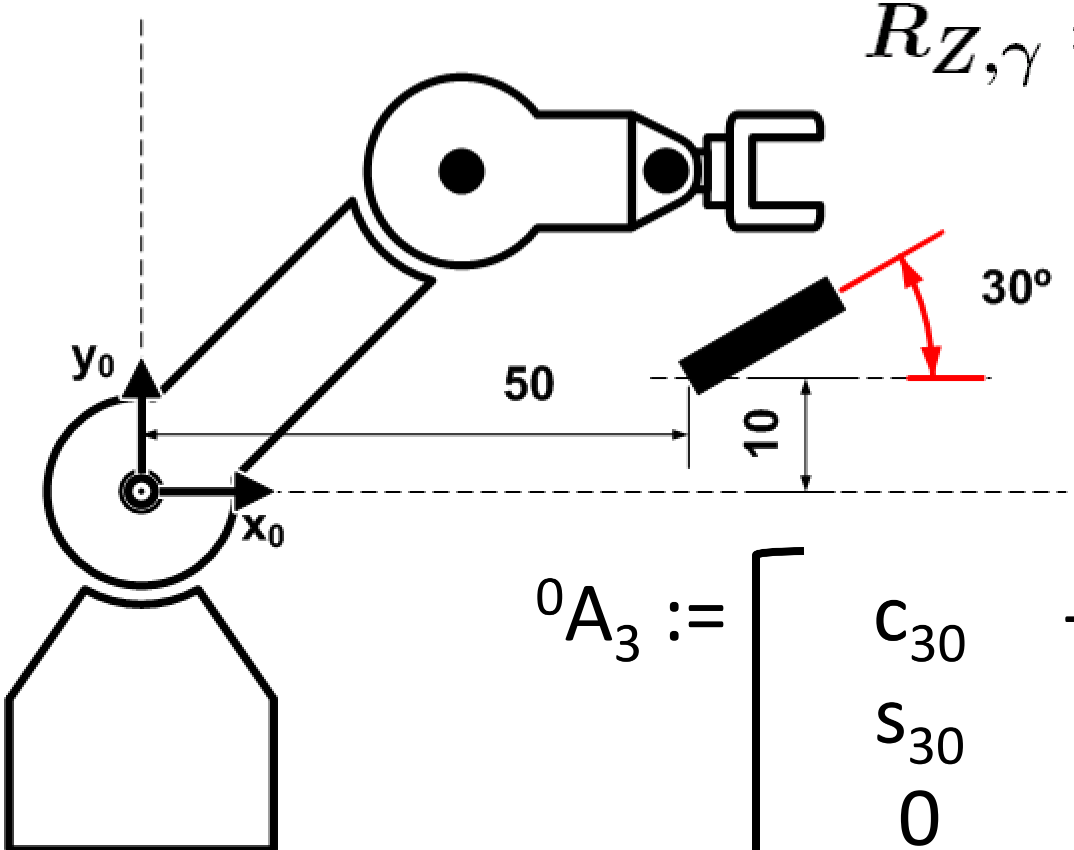


$L_1 = 40$

$L_2 = 20$

$L_3 = 10$

Inverse Kinematik (Beispiel)



$$R_{Z,\gamma} = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_3 := \begin{bmatrix} c_{30} & -s_{30} & 0 & 50 \\ s_{30} & c_{30} & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse Kinematik (Beispiel)

$$
{}^0A_3 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & -s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 & L_3\, c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + L_2\, c_{\theta_1+\theta_2} + L_1\, c_{\theta_1} \\ s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 & L_3\, s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + L_2\, s_{\theta_1+\theta_2} + L_1\, s_{\theta_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Inverse Kinematik (Beispiel)

$$ {}^{0}A_3 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & -s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 & 10\,c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + 20\,c_{\theta_1+\theta_2} + 40\,c_{\theta_1} \\ s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 & 10\,s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + 20\,s_{\theta_1+\theta_2} + 40\,s_{\theta_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}A_3 = \begin{bmatrix} c_{30} & -s_{30} & 0 & 50 \\ s_{30} & c_{30} & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$30^{o} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$

$50 = 10\ c_{30^{o}} + 20\ c_{12} + 40\ c_1$

$10 = 10\ s_{30^{o}} + 20\ s_{12} + 40\ s_1$

Inverse Kinematik (Beispiel)

$$30^o = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

$$50 = 10\, c_{30^o} + 20\, c_{12} + 40\, c_1$$

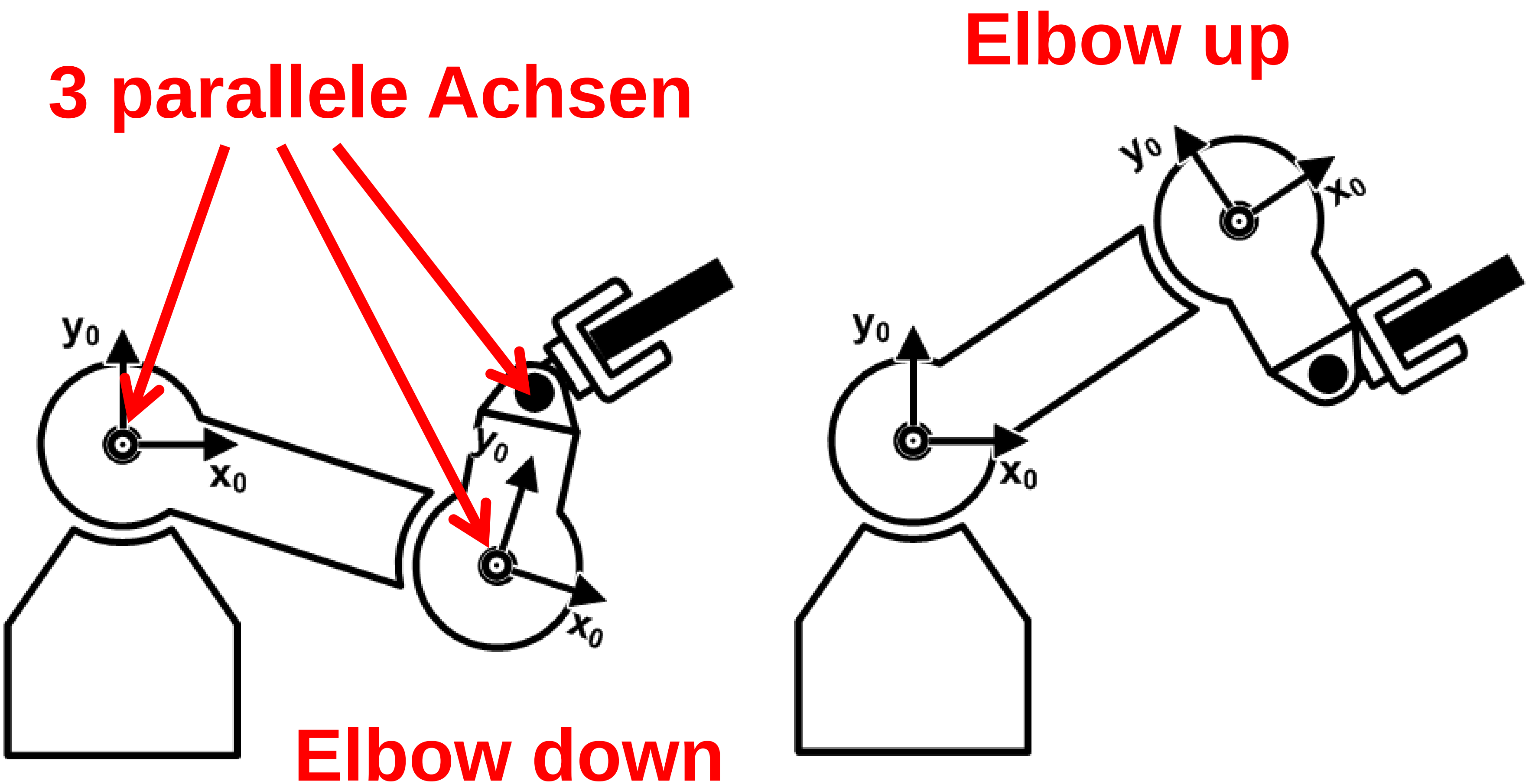
$$10 = 10\, s_{30^o} + 20\, s_{12} + 40\, s_1$$

Matlab:

a) $\theta_1 = -21^o$, $\theta_2 = 100^o$, $\theta_3 = -49^o$

b) $\theta_1 = 35^o$, $\theta_2 = -100^o$, $\theta_3 = 95^o$

Inverse Kinematik (Beispiel)

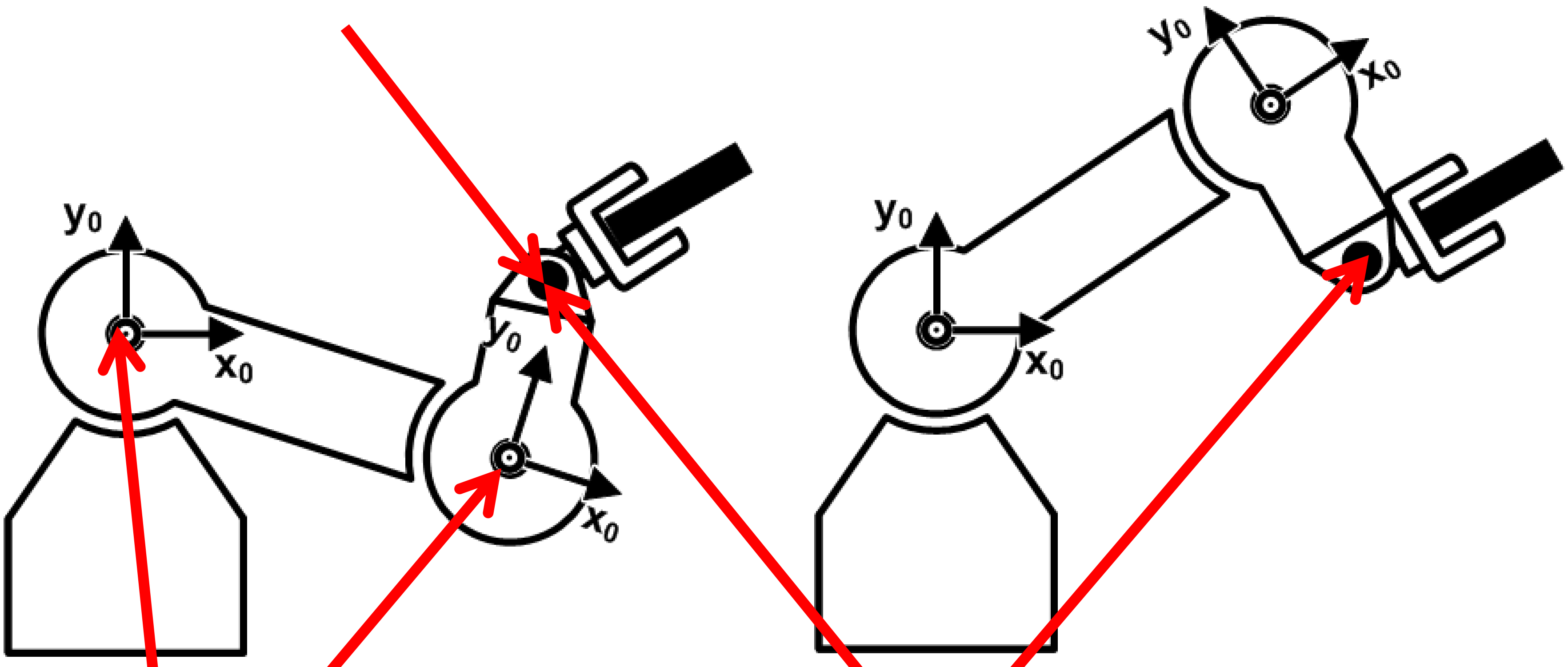


θ_1 = -21°, θ_2 = 100°, θ_3 = -49°

θ_1 = 35°, θ_2 = -100°, θ_3 = 95°

Inverse Kinematik (Beispiel)

Orientierung

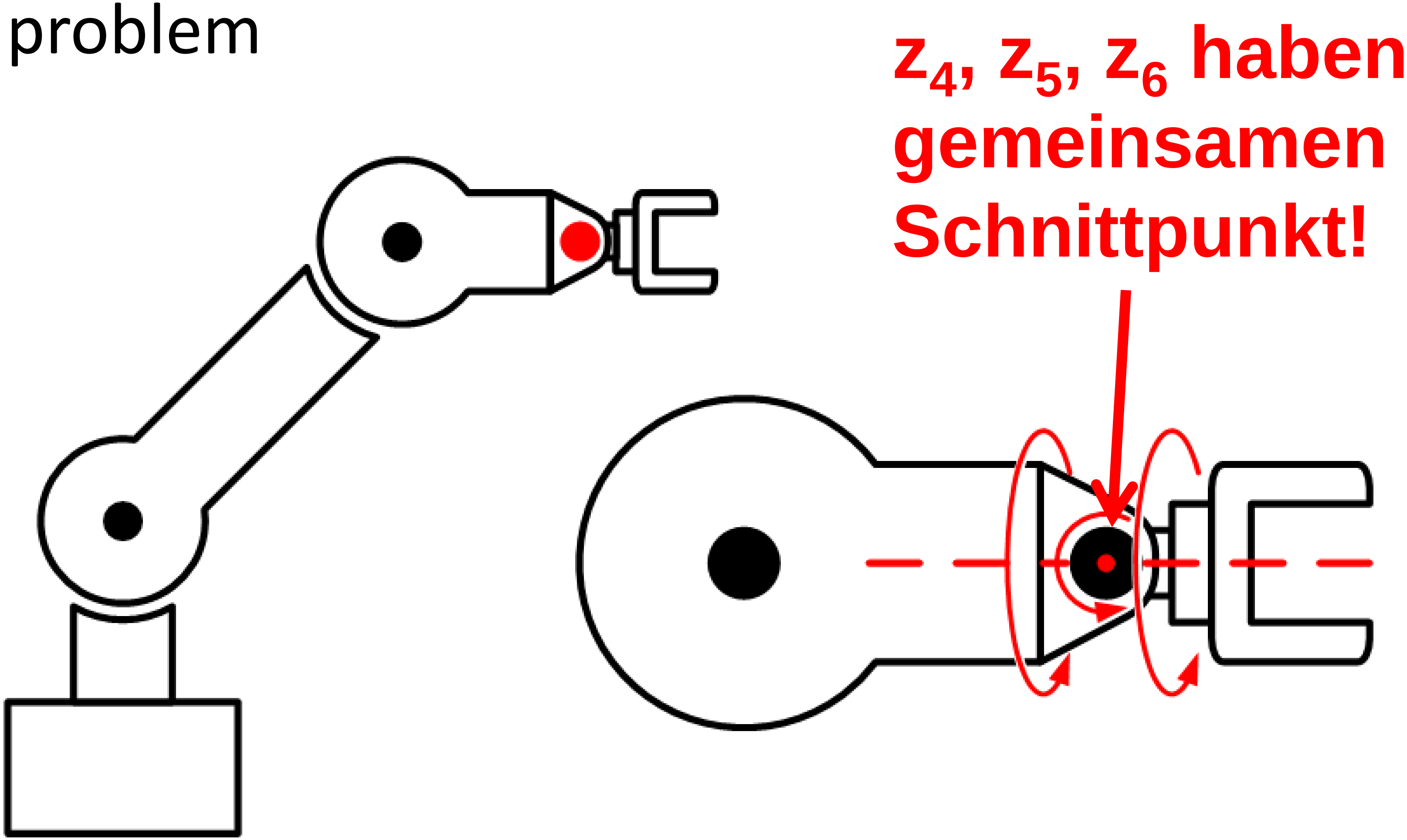


Positionierung

Letzte Achse “an der gleichen Stelle”!?

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Entkoppeln von Positions- und Orientierungs-problem

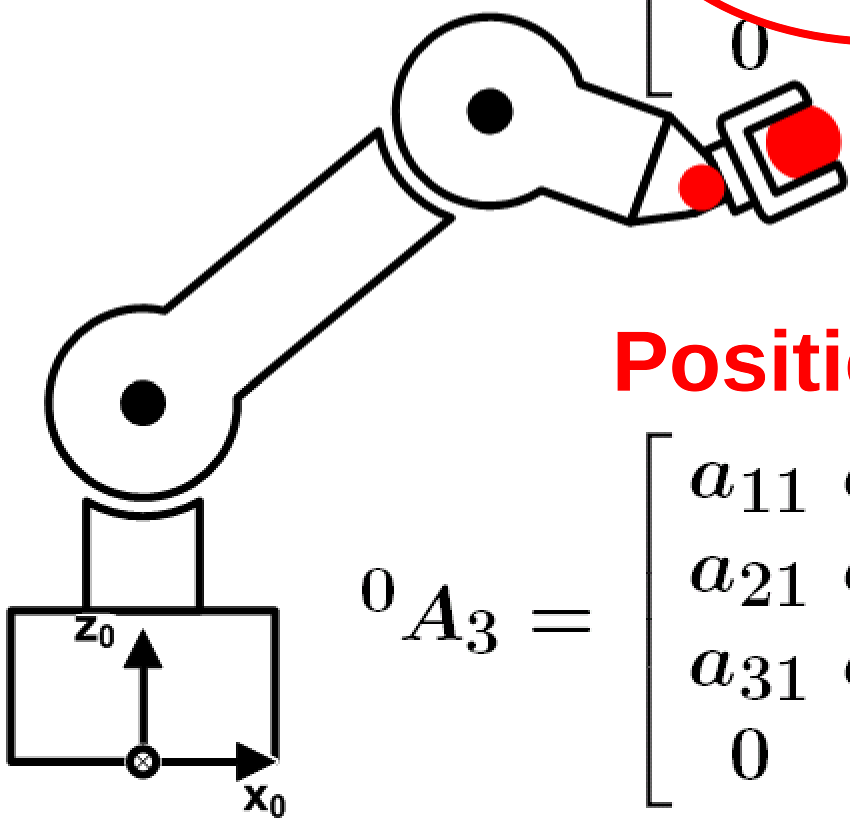


Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Entkoppeln von Positions- und Orientierungs-problem

Orientierungs-problem

$$ {}^{3}A_6 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



Positionsproblem

$$ {}^{0}A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

$$
{}^0A_3 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1}c_{\theta_2+\theta_3} & -s_{\theta_1} & c_{\theta_1}s_{\theta_2+\theta_3} & a_2c_{\theta_1}c_{\theta_2} \\ s_{\theta_1}c_{\theta_2+\theta_3} & c_{\theta_1} & s_{\theta_1}s_{\theta_2+\theta_3} & a_2s_{\theta_1}c_{\theta_2} \\ -s_{\theta_2+\theta_3} & 0 & c_{\theta_2+\theta_3} & -a_2s_{\theta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Nullen in der DH-Tabelle vorteilhaft!

$$
{}^3A_6 = \begin{bmatrix} c_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} - s_{\theta_4}s_{\theta_6} & -c_{\theta_4}c_{\theta_5}s_{\theta_6} - s_{\theta_4}c_{\theta_6} & c_{\theta_4}s_{\theta_5} & d_6c_{\theta_4}s_{\theta_5} \\ s_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} + c_{\theta_4}s_{\theta_6} & -s_{\theta_4}c_{\theta_5}s_{\theta_6} + c_{\theta_4}c_{\theta_6} & s_{\theta_4}s_{\theta_5} & d_6c_{\theta_4}s_{\theta_5} \\ -s_{\theta_5}c_{\theta_6} & s_{\theta_5}s_{\theta_6} & c_{\theta_5} & d_4 + d_6c_{\theta_5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

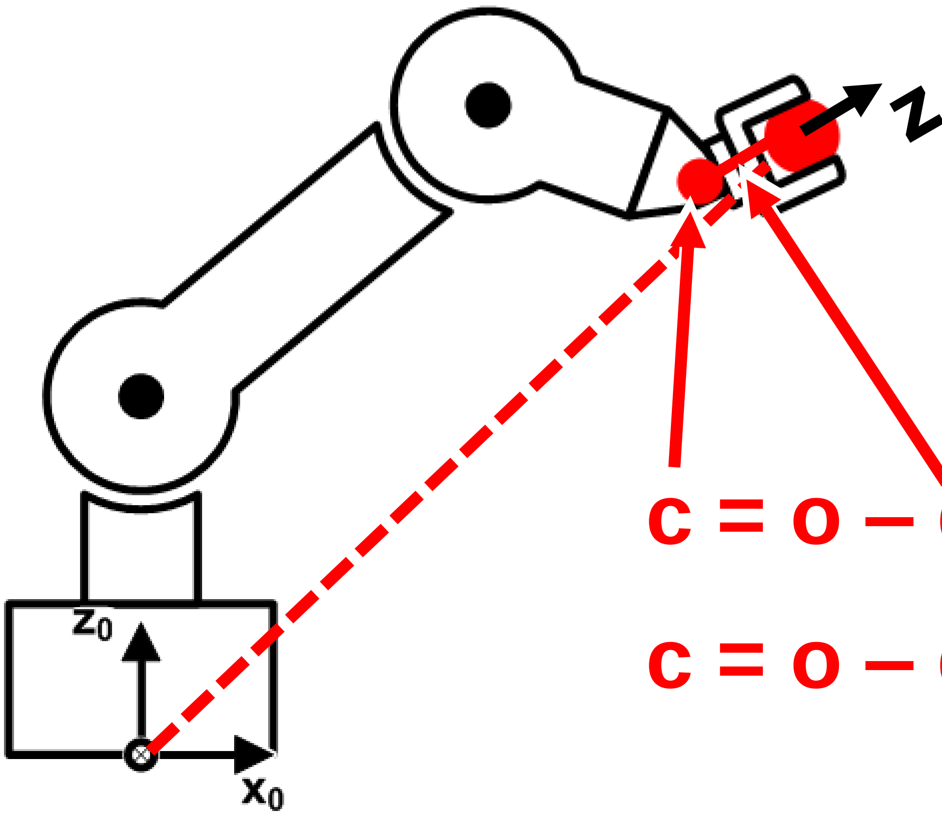
- Transformationen bekannt, Drehpunkt c gesucht

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Entkoppeln von Positions- und Orientierungs-problem

Bekannte (gewünschte) Position und Orientierung

$$ {}^{0}A_6 = \begin{bmatrix} R & \begin{matrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{matrix} \\ 0\;\;0\;\;0 & 1 \end{bmatrix} $$



$$ \mathbf{c = o - d_6\, R\, e_z} $$

$$ \mathbf{c = o - d_6\, R\, (0,0,1)^T} $$

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Entkoppeln von Positions- und Orientierungs-problem

Wegen ${}^0A_6 = {}^0A_3\ {}^3A_6$ ergibt sich die Effektor-rotation (Orientierung) als

$${}^0R_6 = {}^0R_3\ {}^3R_6$$
$${}^0R_3^T\ {}^0R_6 = {}^3R_6$$

bekannt

bekannt,
wenn das Positionsproblem gelöst ist

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem
  - Algebraische Lösung anhand der aus $c = o - d_6 R (0,0,1)^T$ resultierenden Gleichungen
  - Geometrische Lösung im Raum

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem

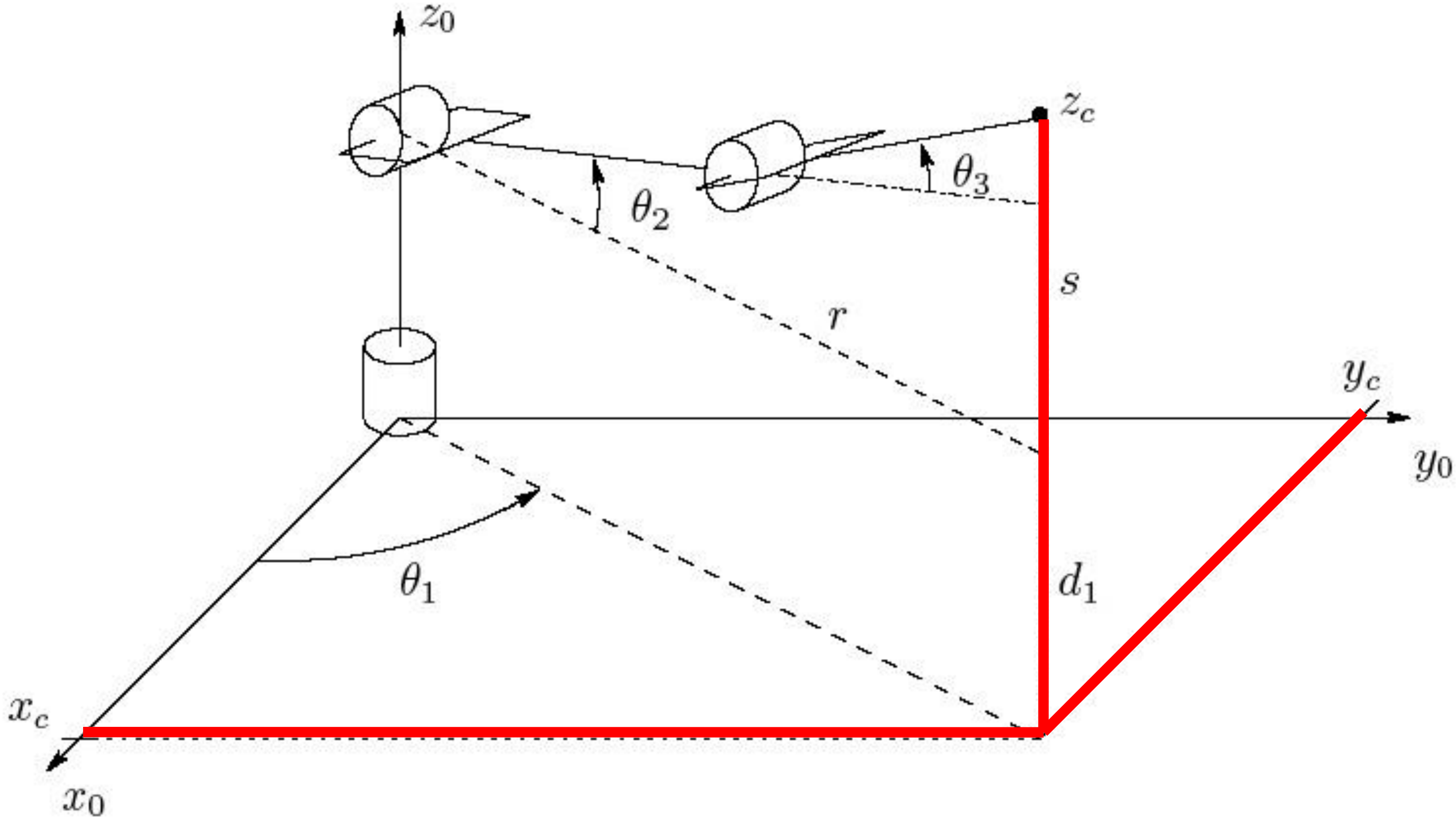


Figure 3.13: Elbow manipulator. Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem

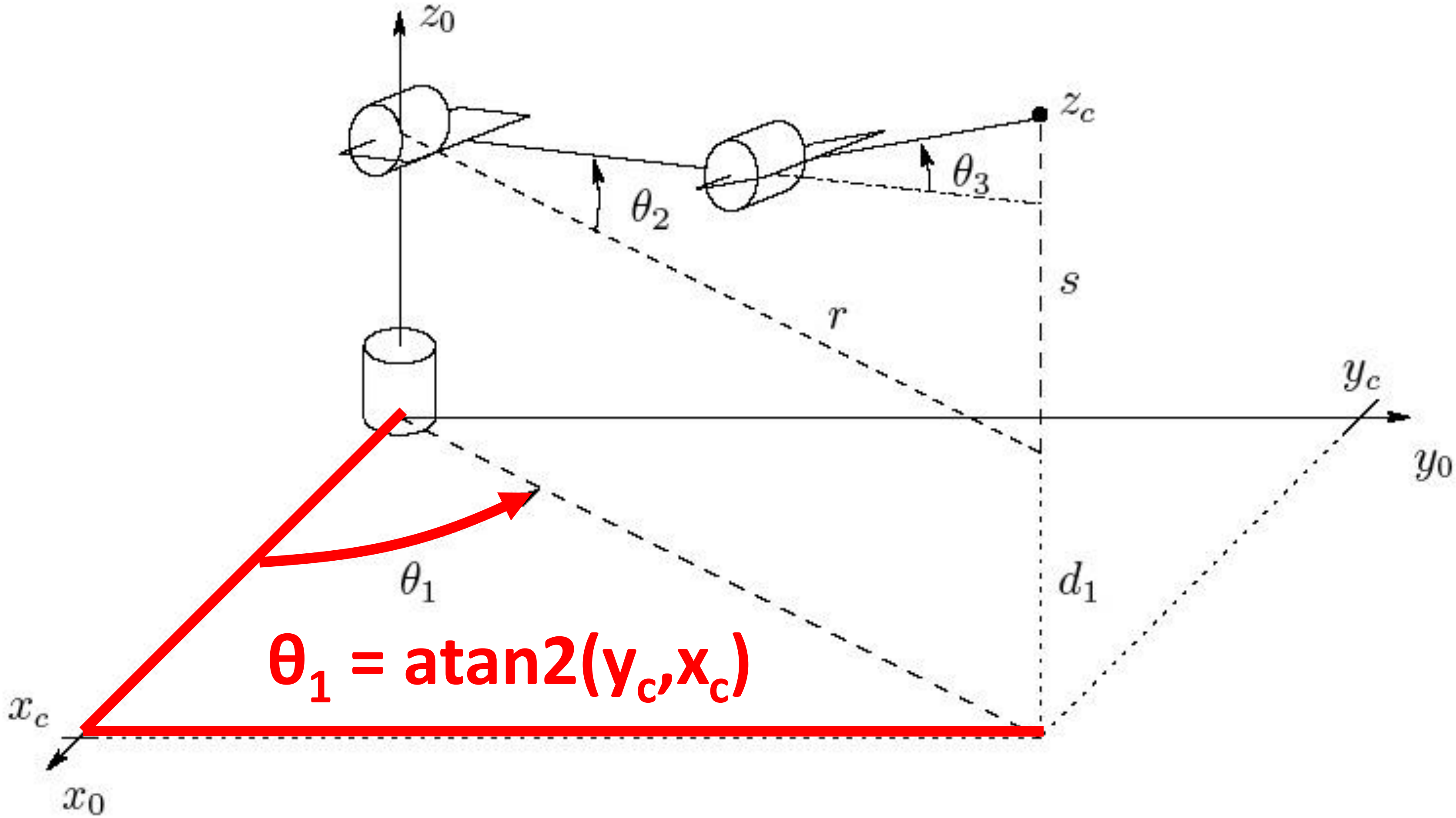


Figure 3.13: Elbow manipulator. Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem

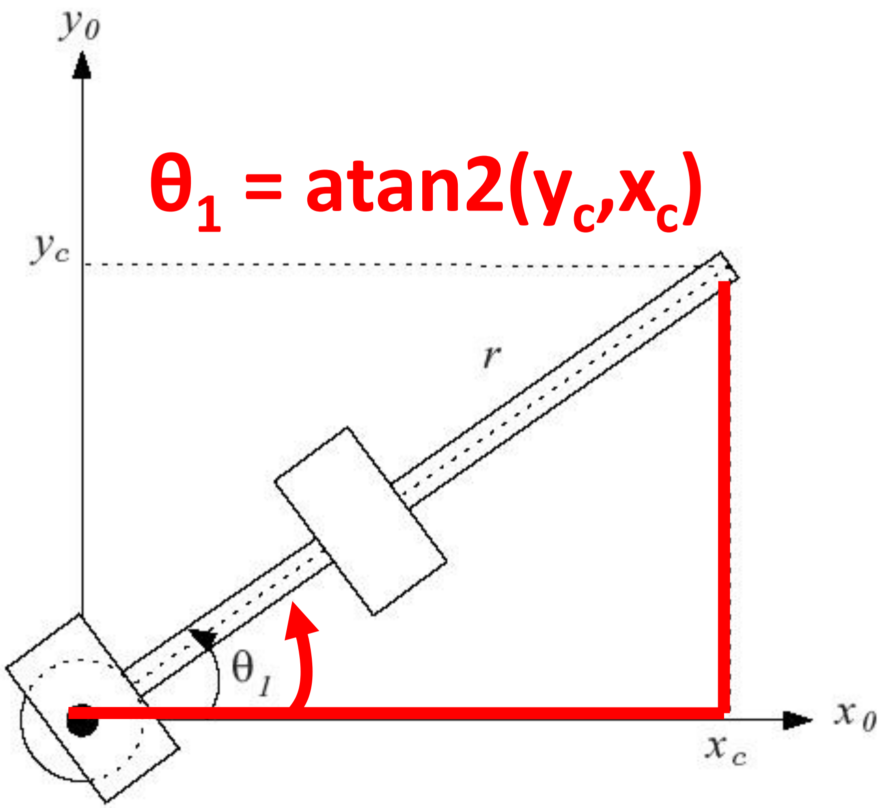
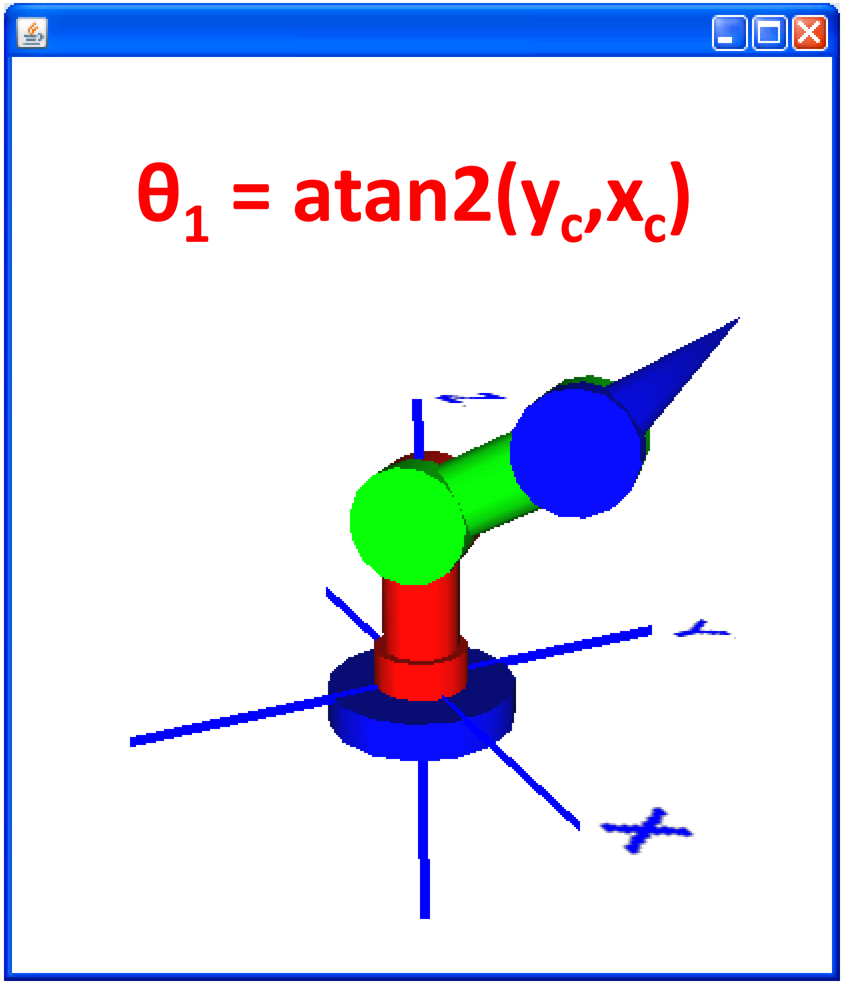


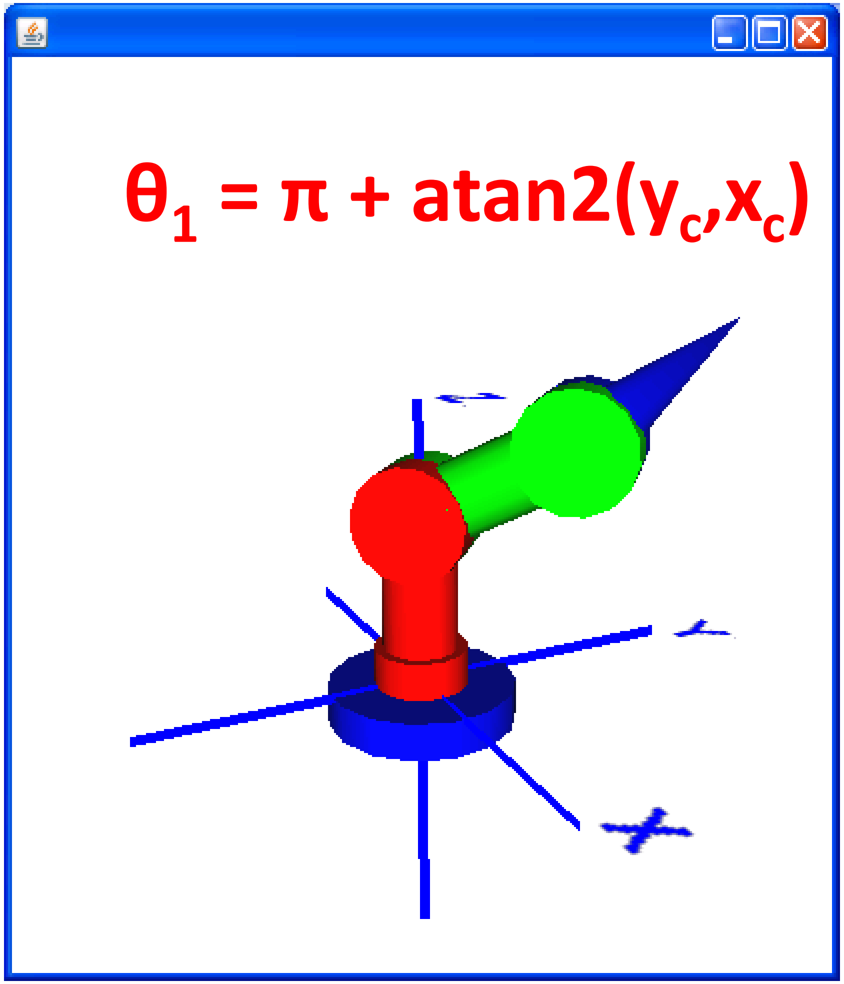
Figure 3.14: Projection of the wrist center onto $x_0 - y_0$ plane.

Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem





Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem

Es gibt Gelenkarmroboter mit einem Versatz d im “Schultergelenk”

Arm kann links oder rechts sein!

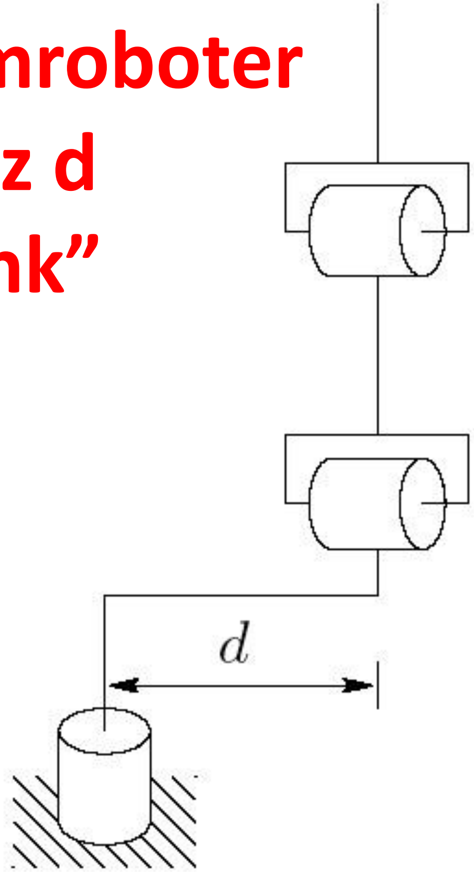


Figure 3.16: Elbow manipulator with shoulder offset.

Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem, Arm links

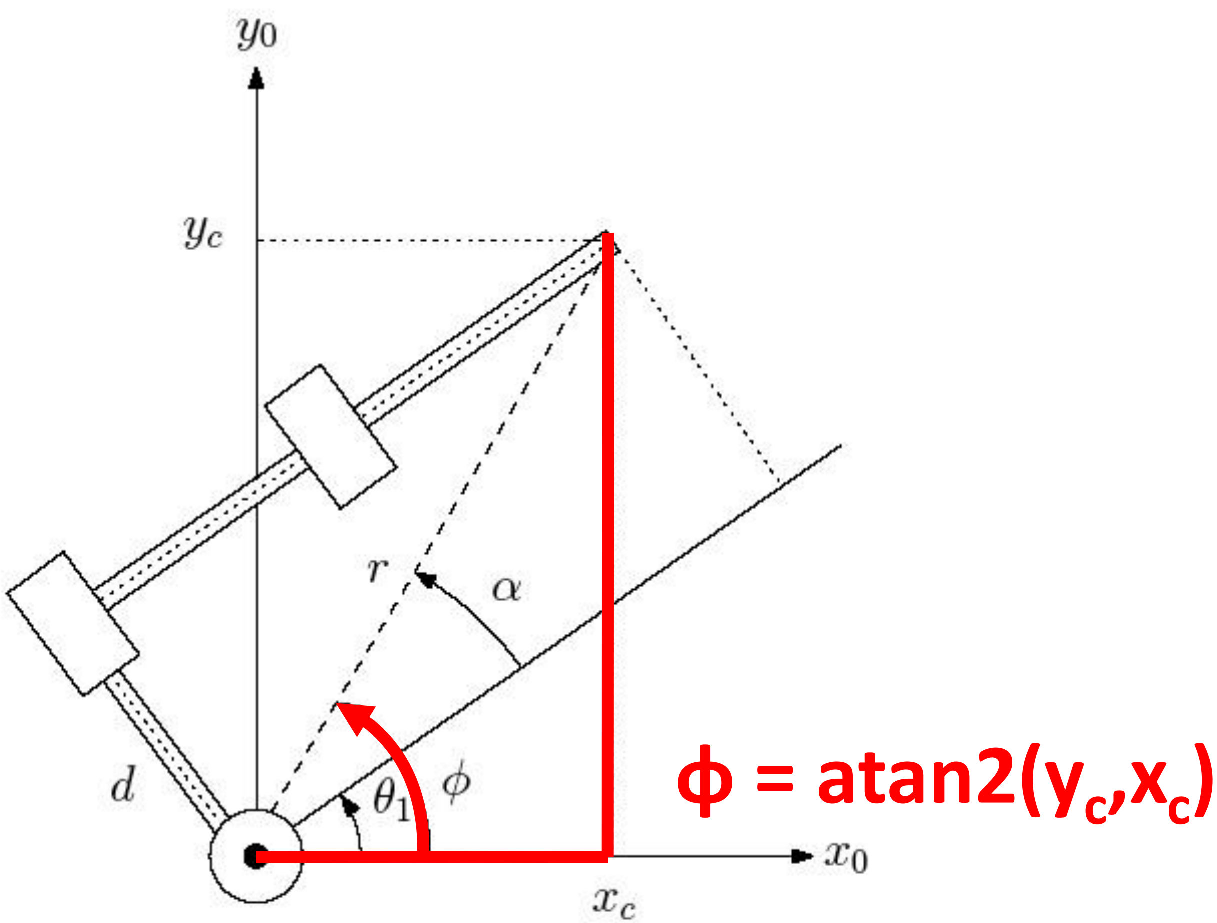


Figure 3.17: Left arm configuration.

Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem, Arm links

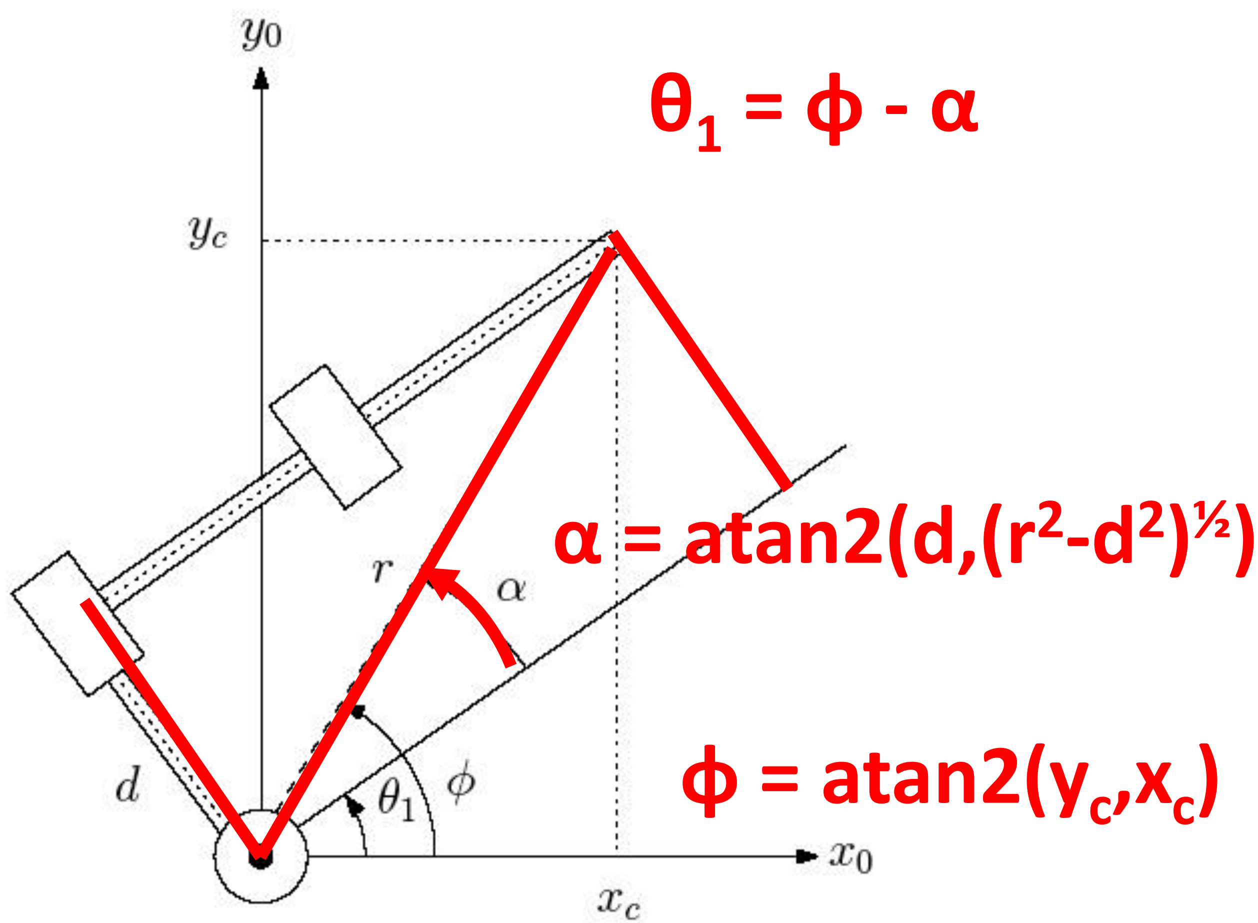


Figure 3.17: Left arm configuration.

Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem, Arm rechts

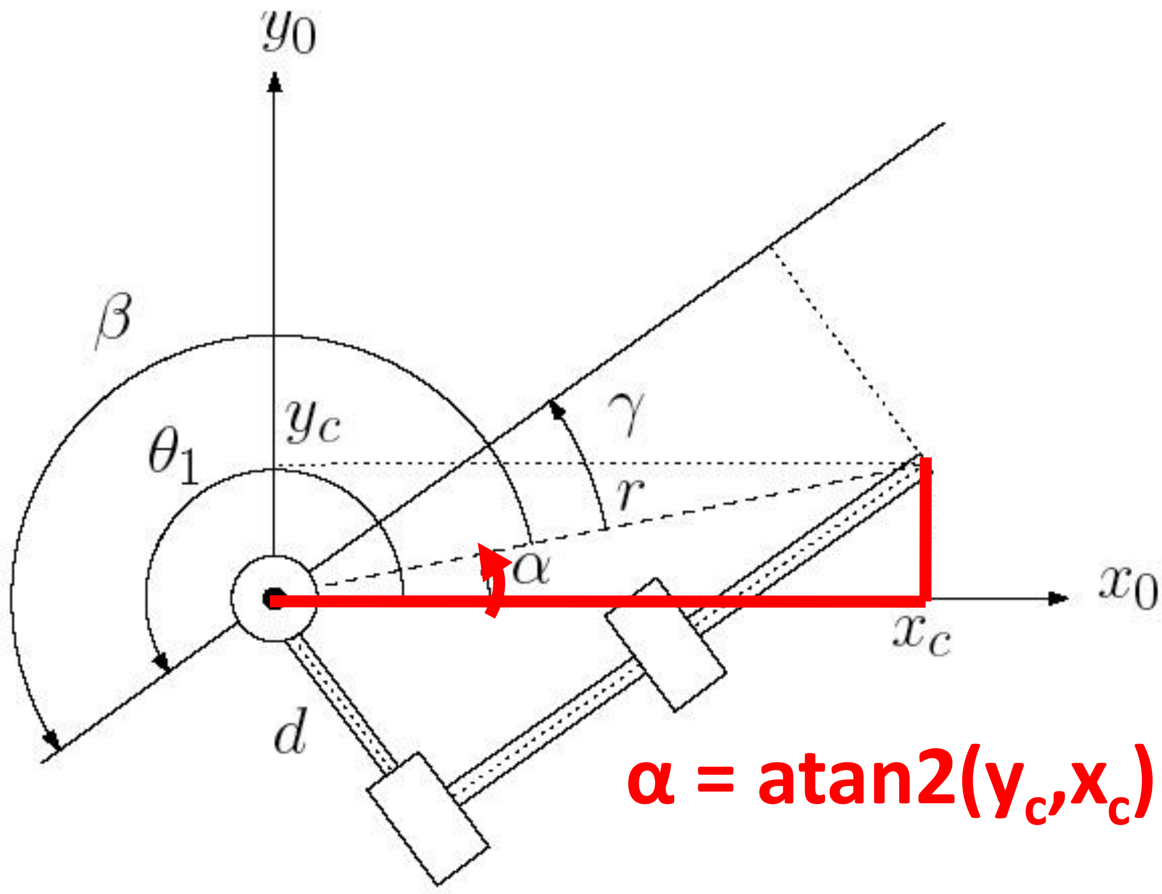


Figure 3.18: Right arm configuration.

Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem, Arm rechts

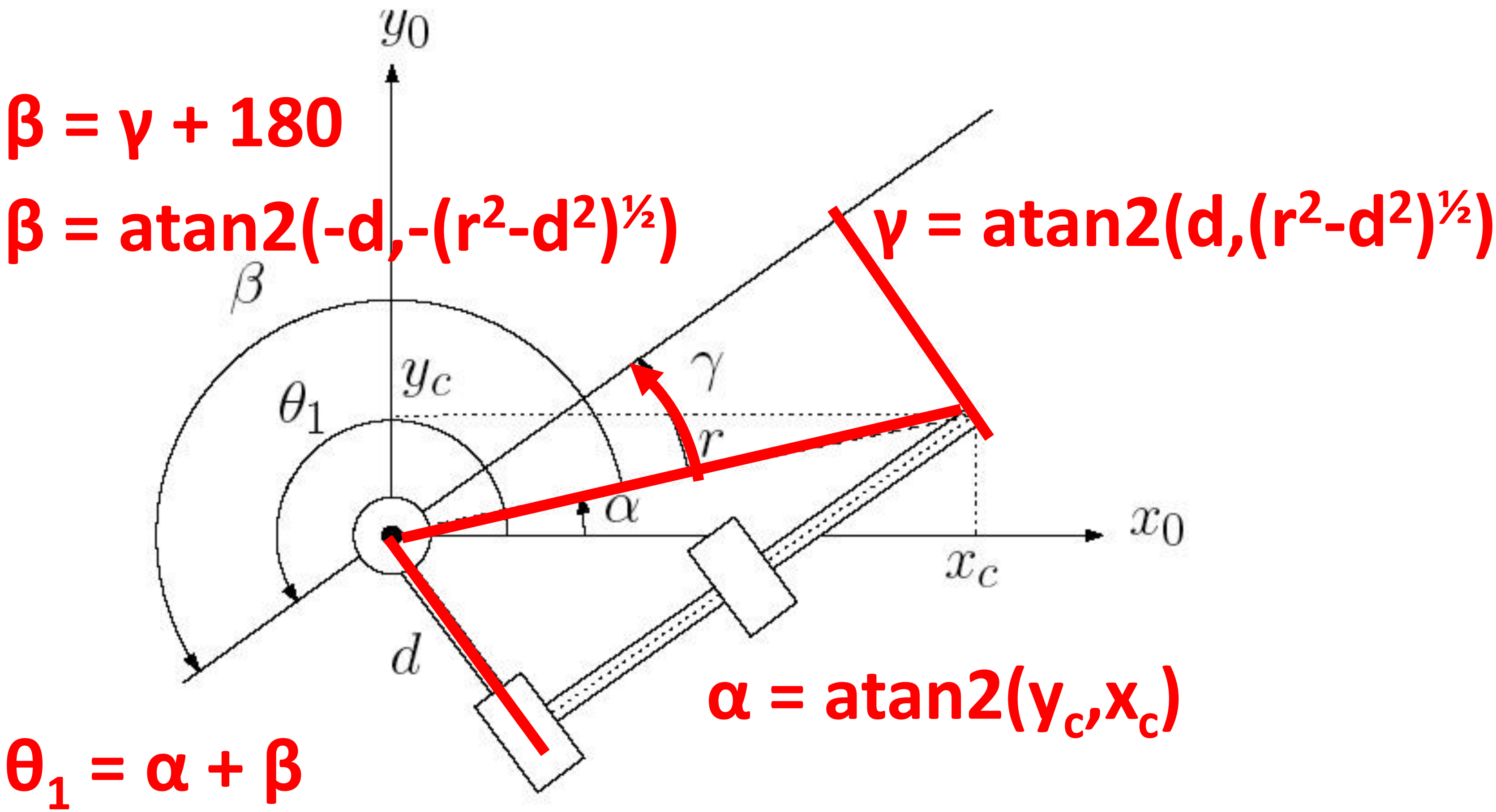


Figure 3.18: Right arm configuration.

Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Viele Gelenkarmroboter sind ohne Schulterversatz konstruiert, es gilt also

$$\theta_{1a} = \mathrm{atan2}(y_c, x_c)$$

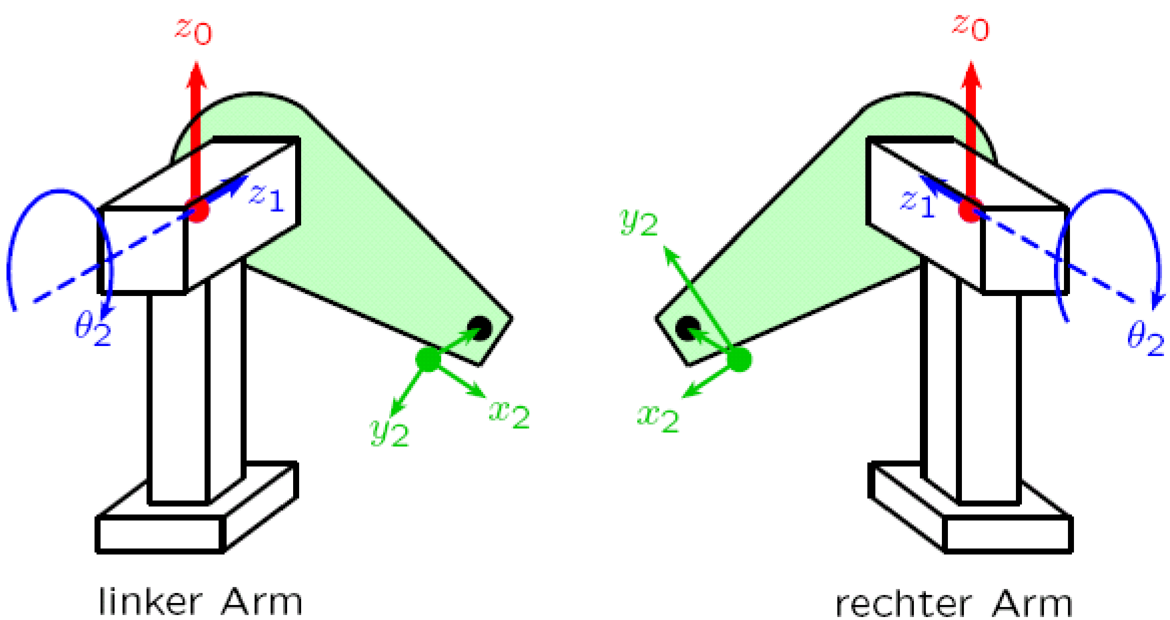
$$\theta_{1b} = \pi + \mathrm{atan2}(y_c, x_c) = \mathrm{atan2}(-y_c, -x_c)$$

- Das Vorzeichen kann mit einem Parameter ARM ausgedrückt werden, so dass

$$\theta_1 = \mathrm{atan2}(ARM * y_c,\ ARM * x_c)$$
$$ARM \in (-1,1)$$

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Konfigurationsparameter ARM = +1(−1):
  - rechter (linker) Arm wenn ein positiver Winkel θ_2 den Oberarm (Ursprung von $S_{2)}$, in positive (negative) z0-Richtung bewegt
  - VAL: „righty“ und „lefty”



Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem

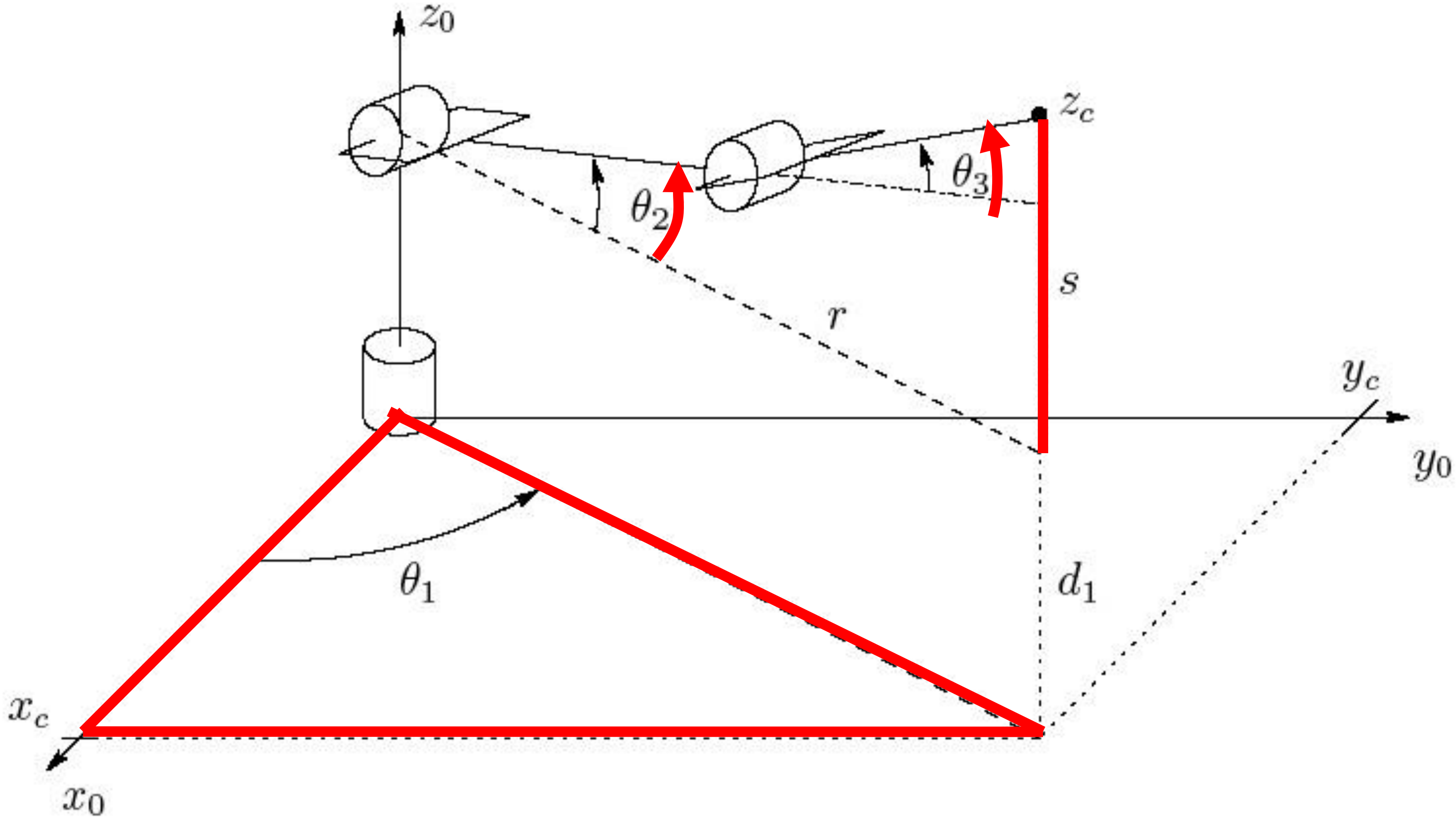


Figure 3.13: Elbow manipulator. Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem

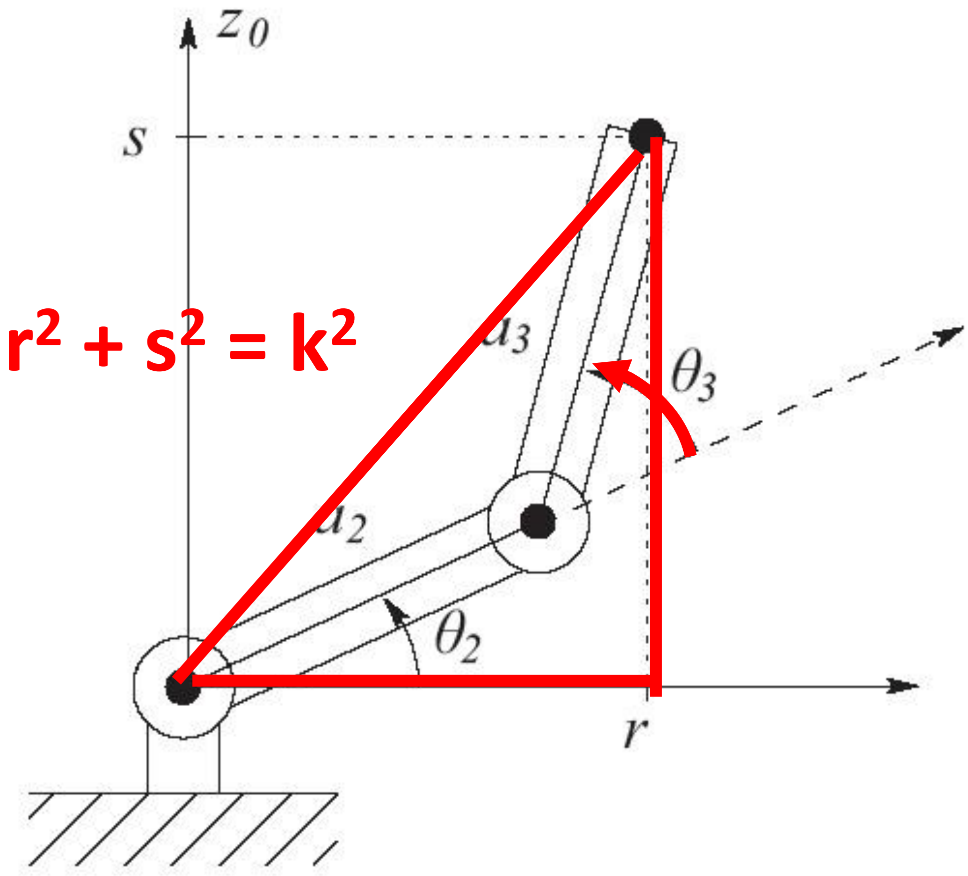


Figure 3.19: Projecting onto the plane formed by links 2 and 3.

Aus Spong et al. 2006

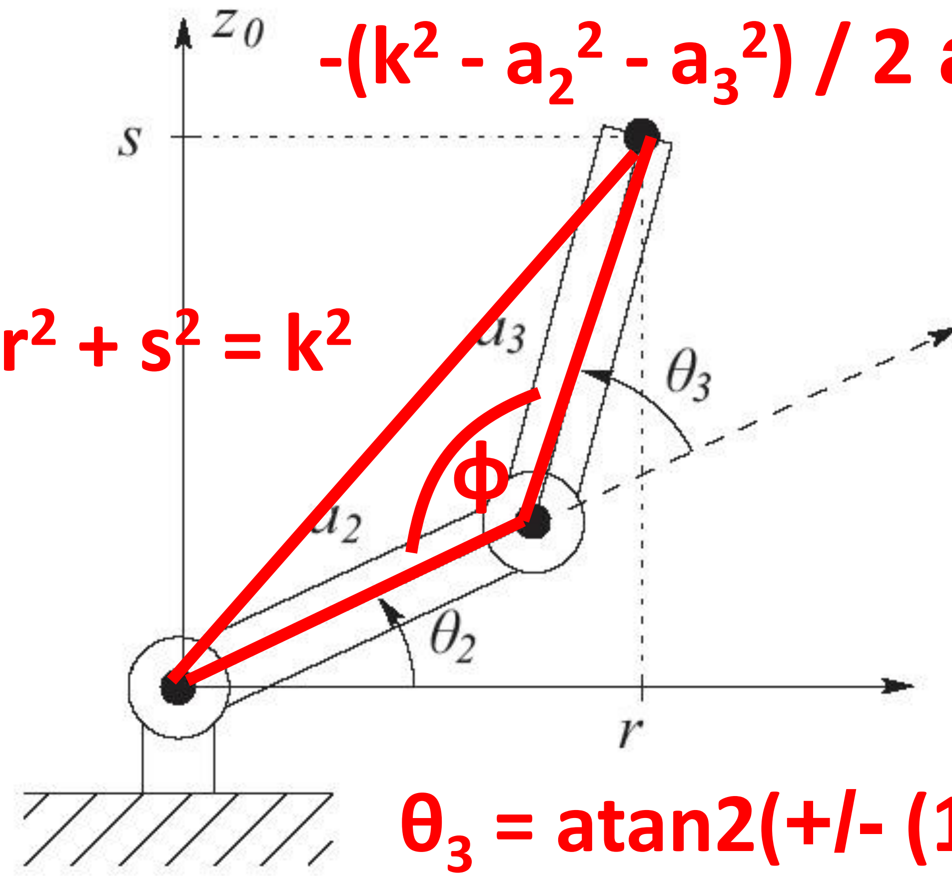
Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem $k^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2\, a_2\, a_3\, c_\phi$

$$-(k^2 - a_2^2 - a_3^2) / 2\, a_2\, a_3 = c_\phi$$

$$c_{\theta_3} = -c_\phi$$

$$r^2 + s^2 = k^2$$



$$\theta_3 = \mathrm{atan2}(+/- (1-c_\phi^2)^{½}, -c_\phi)$$

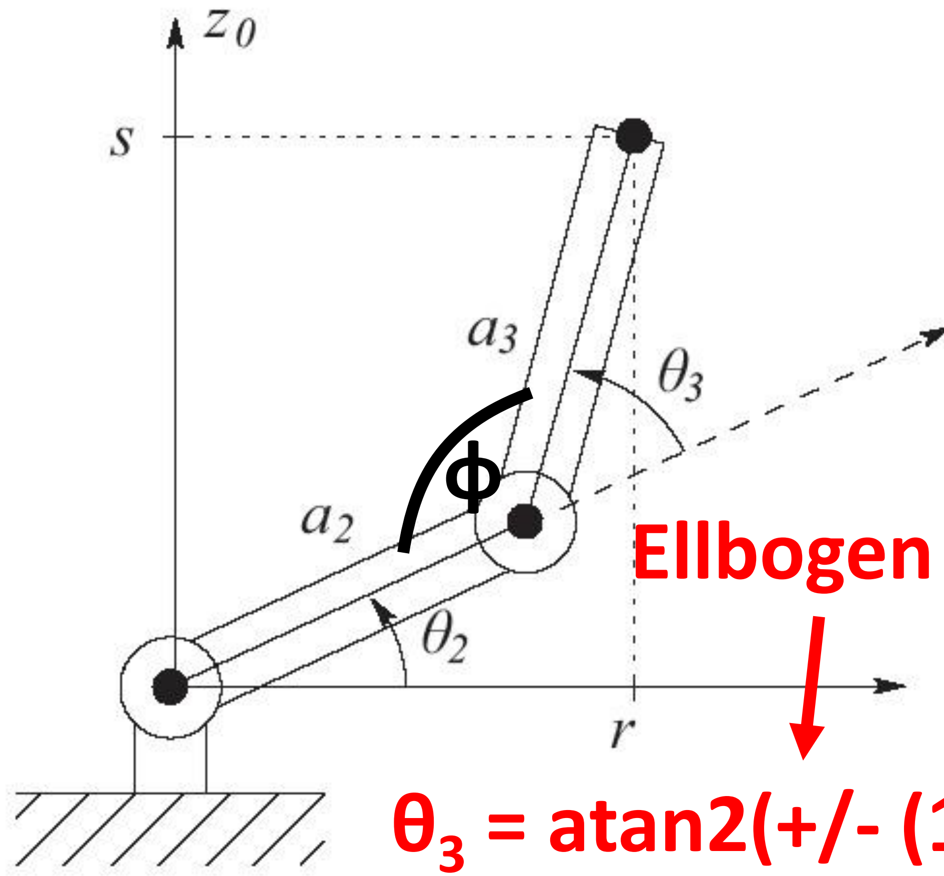
Figure 3.19: Projecting onto the plane formed by links 2 and 3.

Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

mrob

- Positionsproblem



Ellbogen oben / unten

$$\theta_3 = \text{atan2}(+/- (1-c_\phi^2)^{½}, -c_\phi)$$

Figure 3.19: Projecting onto the plane formed by links 2 and 3.

Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Für die beiden Konfigurationen des Ellbogens gilt

  $\theta_{3a} = \mathrm{atan2}((1-c_\phi{}^2)^{½}, -c_\phi)$

  $\theta_{3b} = \mathrm{atan2}(-(1-c_\phi{}^2)^{½}, -c_\phi)$

- Das Vorzeichen kann mit einem Parameter ELBOW ausgedrückt werden, so dass

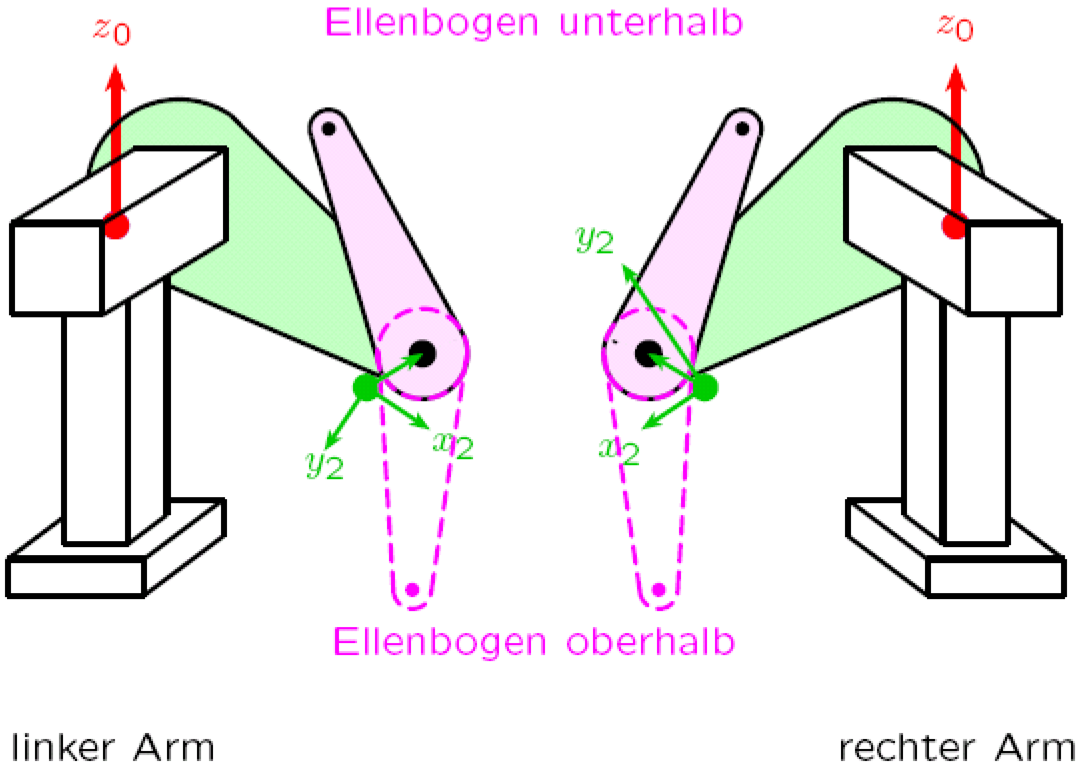
  $\theta_3 = \mathrm{atan2}(ELBOW * (1-c_\phi{}^2)^{½}, -c_\phi)$
  $ELBOW \in (-1,1)$

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Konfigurationsparameter ELBOW = +1(−1):
  - Ellbogen oberhalb Handgelenk bei rechtem (linkem) Arm wenn Handgelenk einen negativen (positiven) y2-Wert hat
  - Ellbogen unterhalb Handgelenk bei rechtem (linkem) Arm wenn Handgelenk einen positiven (negativen) y2-Wert hat
  - VAL: „above“ und „below“

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Konfigurationsparameter ELBOW = +1(−1):



Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem **ψ = atan2(s,r)**

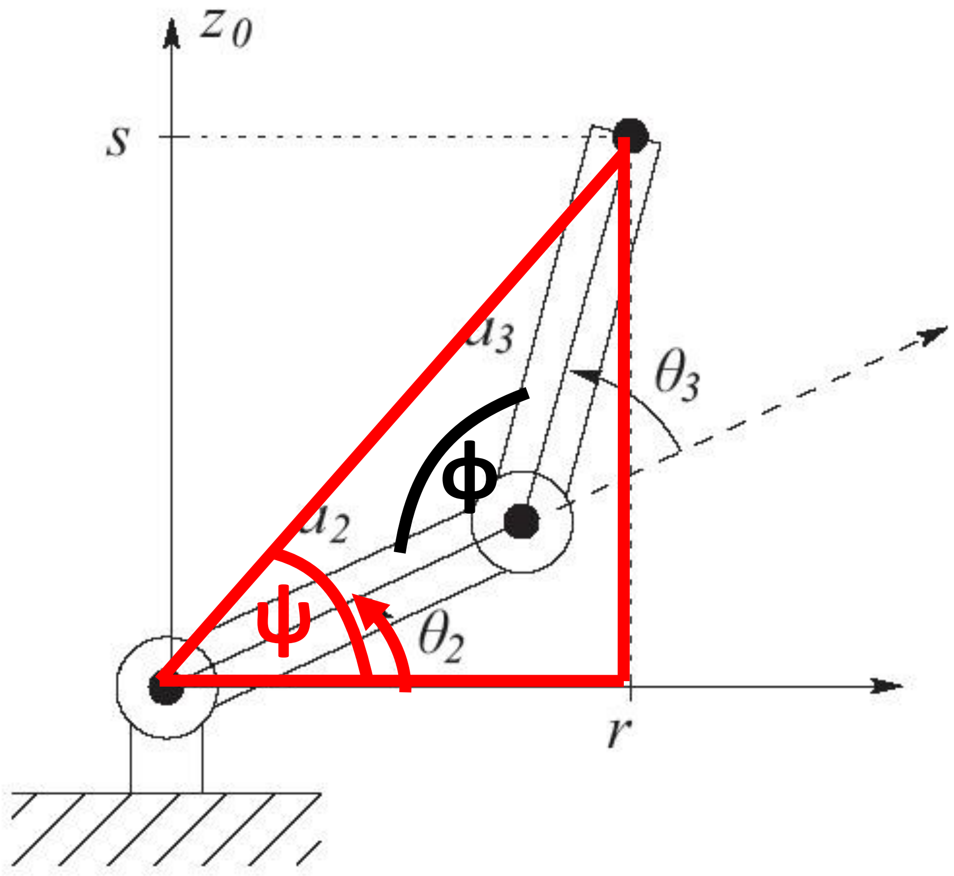


Figure 3.19: Projecting onto the plane formed by links 2 and 3.

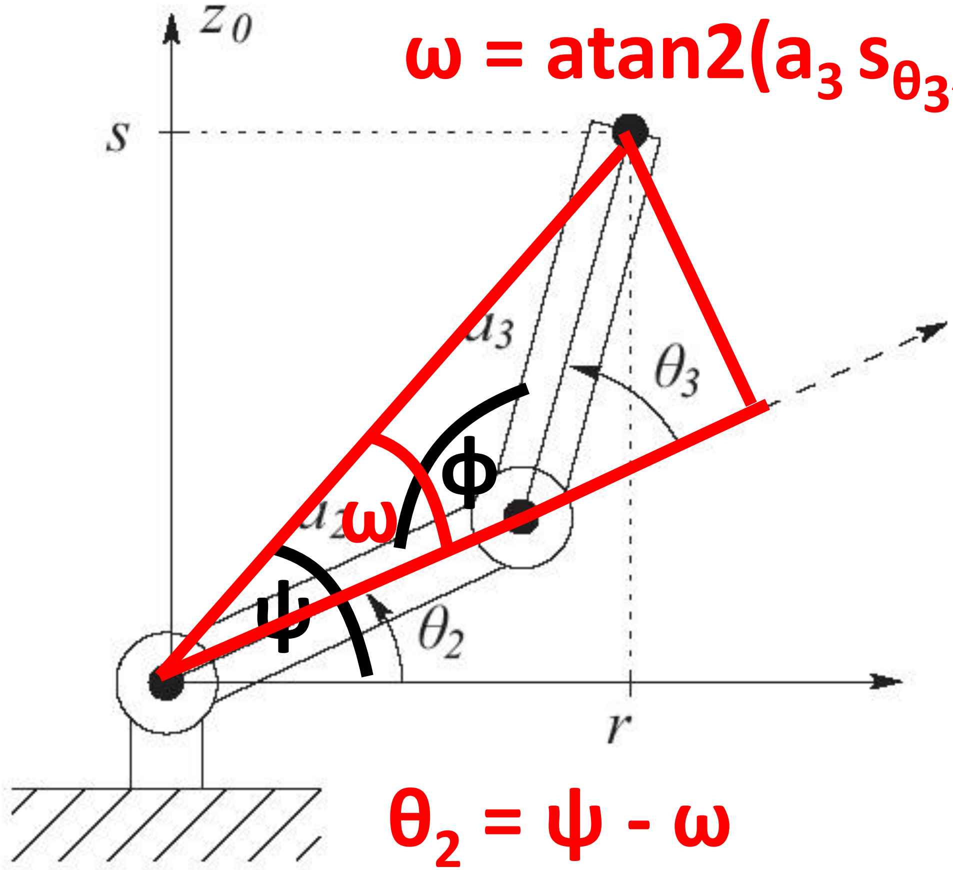
Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Positionsproblem

$\psi = \text{atan2}(s,r)$

$\omega = \text{atan2}(a_3\, s_{\theta_3},\ a2 + a_3\, c_{\theta_3})$



$\theta_2 = \psi - \omega$

Figure 3.19: Projecting onto the plane formed by links 2 and 3.

Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Vier mögliche Lösungen
  - Arm kann links oder rechts liegen
  - Ellbogen kann oben oder unten sein

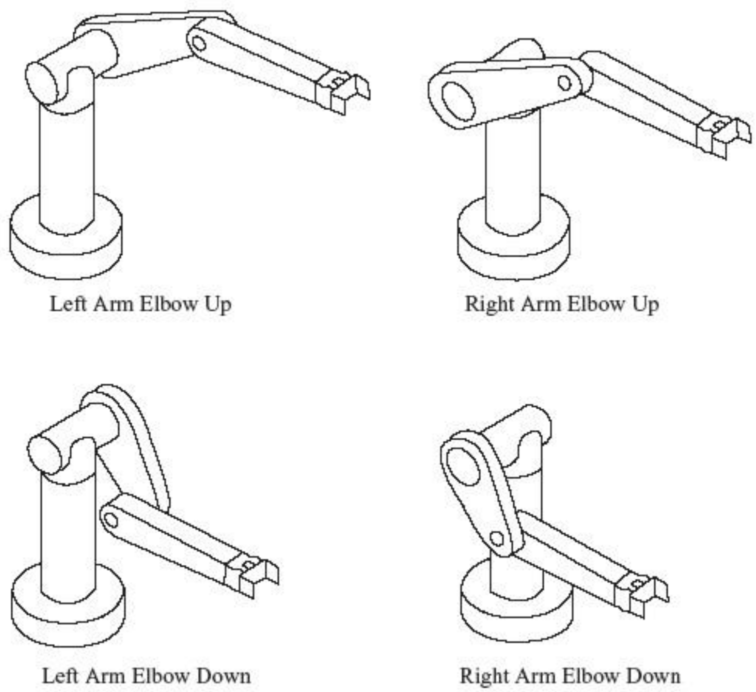


Figure 3.20: Four solutions of the inverse position kinematics for the PUMA manipulator.

Aus Spong et al. 2006

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Orientierungsproblem

$$
{}^{3}A_6 = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} - s_{\theta_4}s_{\theta_6} & -c_{\theta_4}c_{\theta_5}s_{\theta_6} - s_{\theta_4}c_{\theta_6} & c_{\theta_4}s_{\theta_5} & d_6c_{\theta_4}s_{\theta_5} \\ s_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} + c_{\theta_4}s_{\theta_6} & -s_{\theta_4}c_{\theta_5}s_{\theta_6} + c_{\theta_4}c_{\theta_6} & s_{\theta_4}s_{\theta_5} & d_6c_{\theta_4}s_{\theta_5} \\ -s_{\theta_5}c_{\theta_6} & s_{\theta_5}s_{\theta_6} & c_{\theta_5} & d_4 + d_6c_{\theta_5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}}
$$

- 1. Fall: $|c_{\theta_5}| < 1$

  $\theta_5 = \text{atan2}(\pm(1-m_{33}{}^2)^{½}, m_{33})$

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Für die Drehung des Handgelenks gilt

  $\theta_{5a} = \text{atan2}(+(1\text{-}m_{33}^2)^{½}, m_{33})$

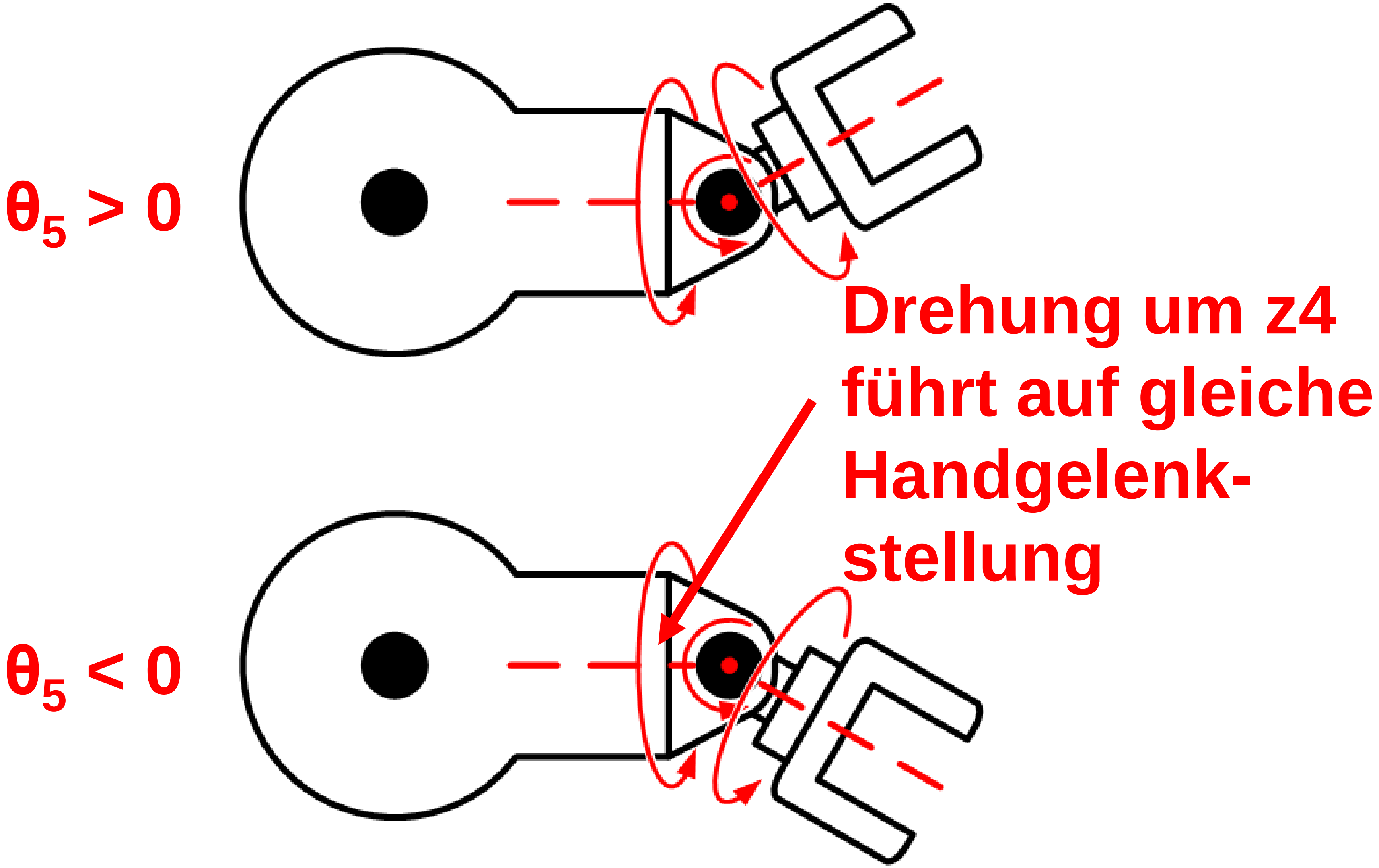
  $\theta_{5b} = \text{atan2}(-(1\text{-}m_{33}^2)^{½}, m_{33})$

- Das Vorzeichen kann mit einem Parameter FLIP ausgedrückt werden, so dass

  $\theta_5 = \text{atan2}(\text{FLIP} * (1\text{-}m_{33}^2)^{½}, m_{33})$
  $\text{FLIP} \in (-1,1)$

- “flip” / “no flip”

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)



Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Orientierungsproblem

$$
{}^3A_6 = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} - s_{\theta_4}s_{\theta_6} & -c_{\theta_4}c_{\theta_5}s_{\theta_6} - s_{\theta_4}c_{\theta_6} & c_{\theta_4}s_{\theta_5} & d_6 c_{\theta_4}s_{\theta_5} \\ s_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} + c_{\theta_4}s_{\theta_6} & -s_{\theta_4}c_{\theta_5}s_{\theta_6} + c_{\theta_4}c_{\theta_6} & s_{\theta_4}s_{\theta_5} & d_6 c_{\theta_4}s_{\theta_5} \\ -s_{\theta_5}c_{\theta_6} & s_{\theta_5}s_{\theta_6} & c_{\theta_5} & d_4 + d_6 c_{\theta_5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}}
$$

- 1. Fall: $|c_{\theta_5}| < 1$

θ_5 = atan2(FLIP * $(1-m_{33}^2)^{½}$, m_{33})

θ_4 = atan2(FLIP * m_{23}, FLIP * m_{13})

θ_6 = atan2(FLIP * m_{32}, FLIP * ($-m_{31}$))

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Orientierungsproblem

$$
{}^{3}A_6 = \underbrace{\begin{bmatrix}
\overset{c_{\theta_4+\theta_6}}{c_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} - s_{\theta_4}s_{\theta_6}} & -c_{\theta_4}c_{\theta_5}s_{\theta_6} - s_{\theta_4}c_{\theta_6} & \overset{0}{c_{\theta_4}s_{\theta_5}} & d_6 c_{\theta_4}s_{\theta_5} \\
\overset{s_{\theta_4+\theta_6}}{s_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} + c_{\theta_4}s_{\theta_6}} & -s_{\theta_4}c_{\theta_5}s_{\theta_6} + c_{\theta_4}c_{\theta_6} & \overset{0}{s_{\theta_4}s_{\theta_5}} & d_6 c_{\theta_4}s_{\theta_5} \\
\overset{0}{-s_{\theta_5}c_{\theta_6}} & \overset{0}{s_{\theta_5}s_{\theta_6}} & \overset{1}{c_{\theta_5}} & d_4 + d_6 c_{\theta_5} \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}}_{M}
$$

- 2. Fall: $c_{\theta_5} = 1$

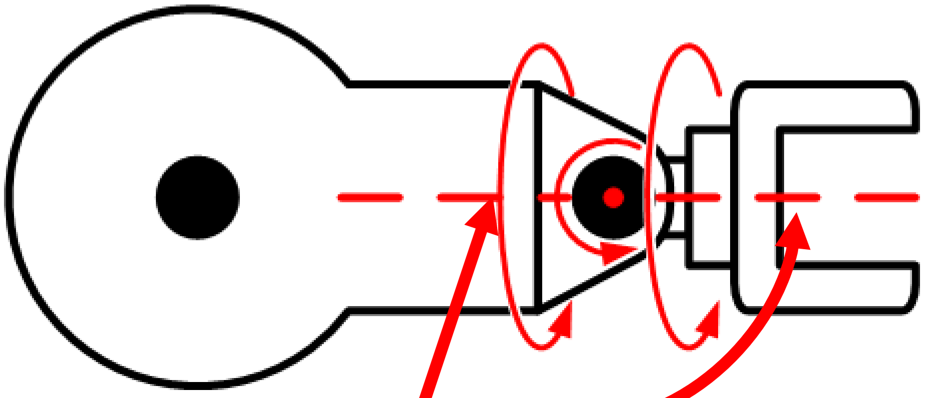
  $s_{\theta_5} = 0$

  $\theta_4 + \theta_6 = \mathrm{atan2}(m_{21}, m_{11})$

  Unendlich viele Lösungen (Reduktionsstellung)!

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

$\theta_5 = 1$



Drehungen um z_4 können durch Drehungen um z_6 ausgeglichen werden!

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Orientierungsproblem

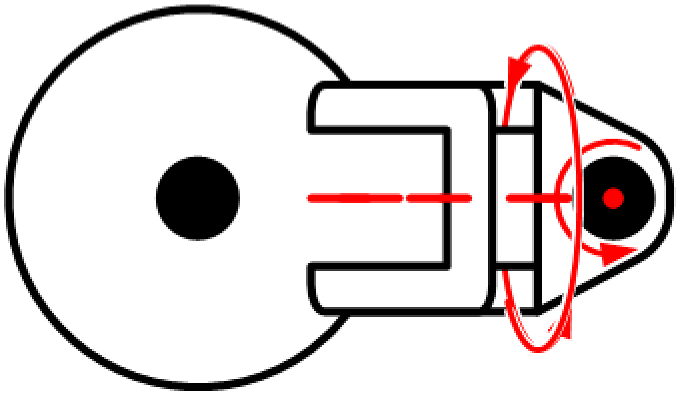
$$
{}^3A_6 = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} - s_{\theta_4}s_{\theta_6} & -c_{\theta_4}c_{\theta_5}s_{\theta_6} - s_{\theta_4}c_{\theta_6} & c_{\theta_4}s_{\theta_5} & d_6 c_{\theta_4}s_{\theta_5} \\ s_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} + c_{\theta_4}s_{\theta_6} & -s_{\theta_4}c_{\theta_5}s_{\theta_6} + c_{\theta_4}c_{\theta_6} & s_{\theta_4}s_{\theta_5} & d_6 c_{\theta_4}s_{\theta_5} \\ -s_{\theta_5}c_{\theta_6} & s_{\theta_5}s_{\theta_6} & c_{\theta_5} & d_4 + d_6 c_{\theta_5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}}
$$

- 3. Fall: $c_{\theta_5} = -1$

  Konstruktionsbedingt unmöglich!

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

$\theta_5 = -1$



Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

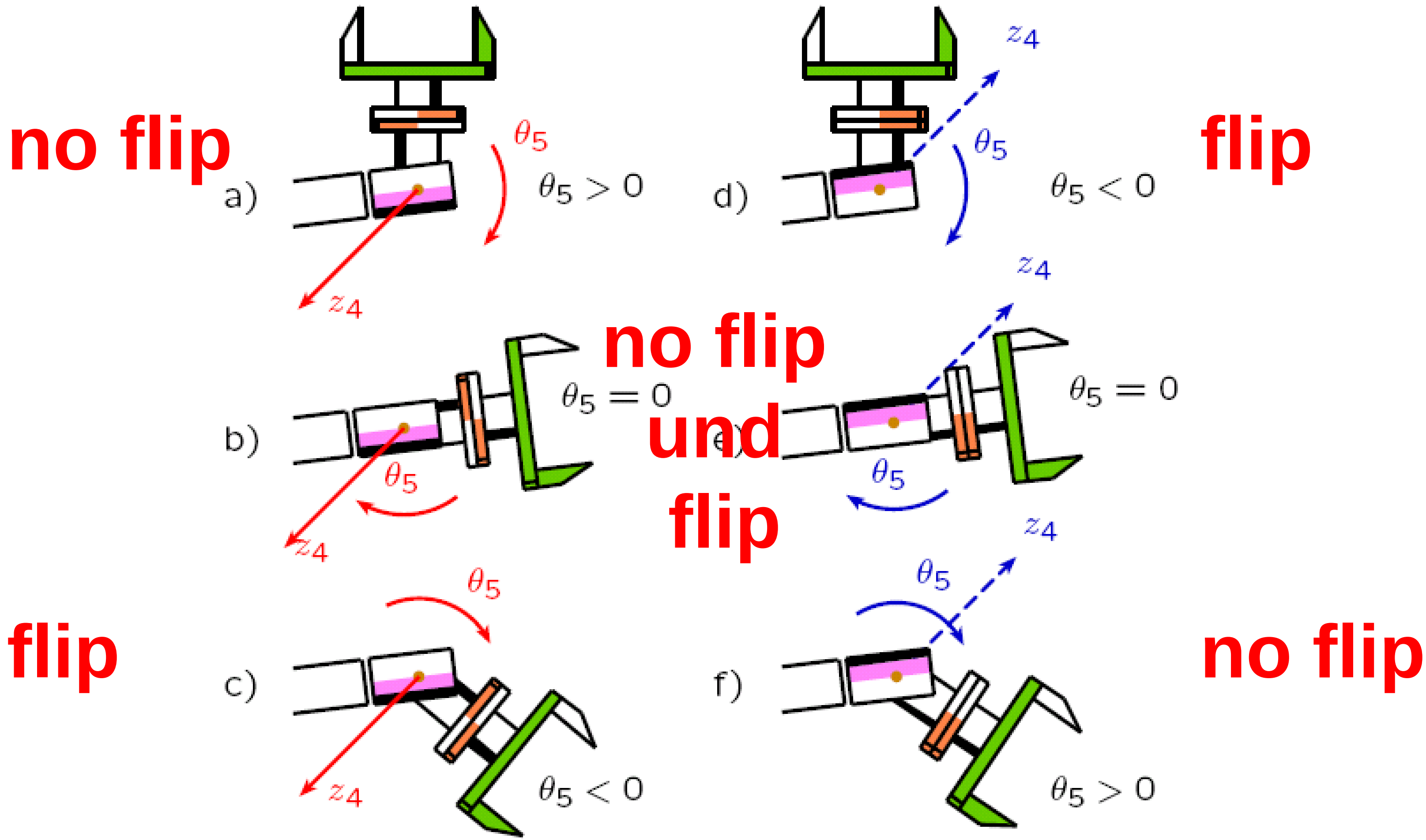
- Positionsproblem
  - Im Allgemeinen 4 mögliche Konfigurationen
  - Parameter ARM und ELBOW
- Orientierungsproblem
  - Im Allgemeinen 2 mögliche Konfigurationen
  - Parameter FLIP

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Bewegungen können zu Wechsel der Konfiguration führen
  - Drehungen mehrerer Gelenke in Reduktionsstellung vermeiden
  - In der Praxis weitere konstruktive Einschränkungen (z.B., Grenzen der Drehwinkel)
  - Bei Bewegungen ist darauf zu achten, dass keine abrupte Änderung der Konfiguration nötig ist

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

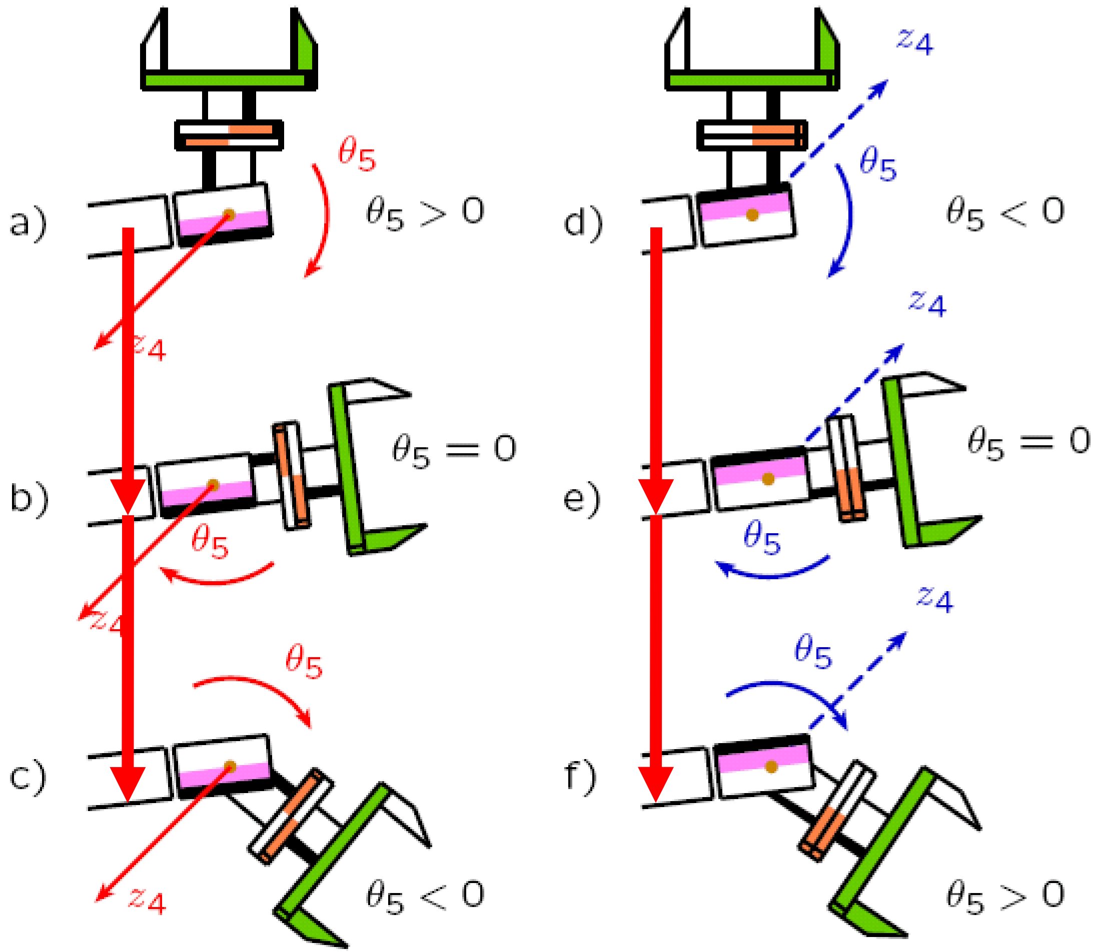
- Beispiel



Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Beispiel

Keine Drehung in z_4 und z_6

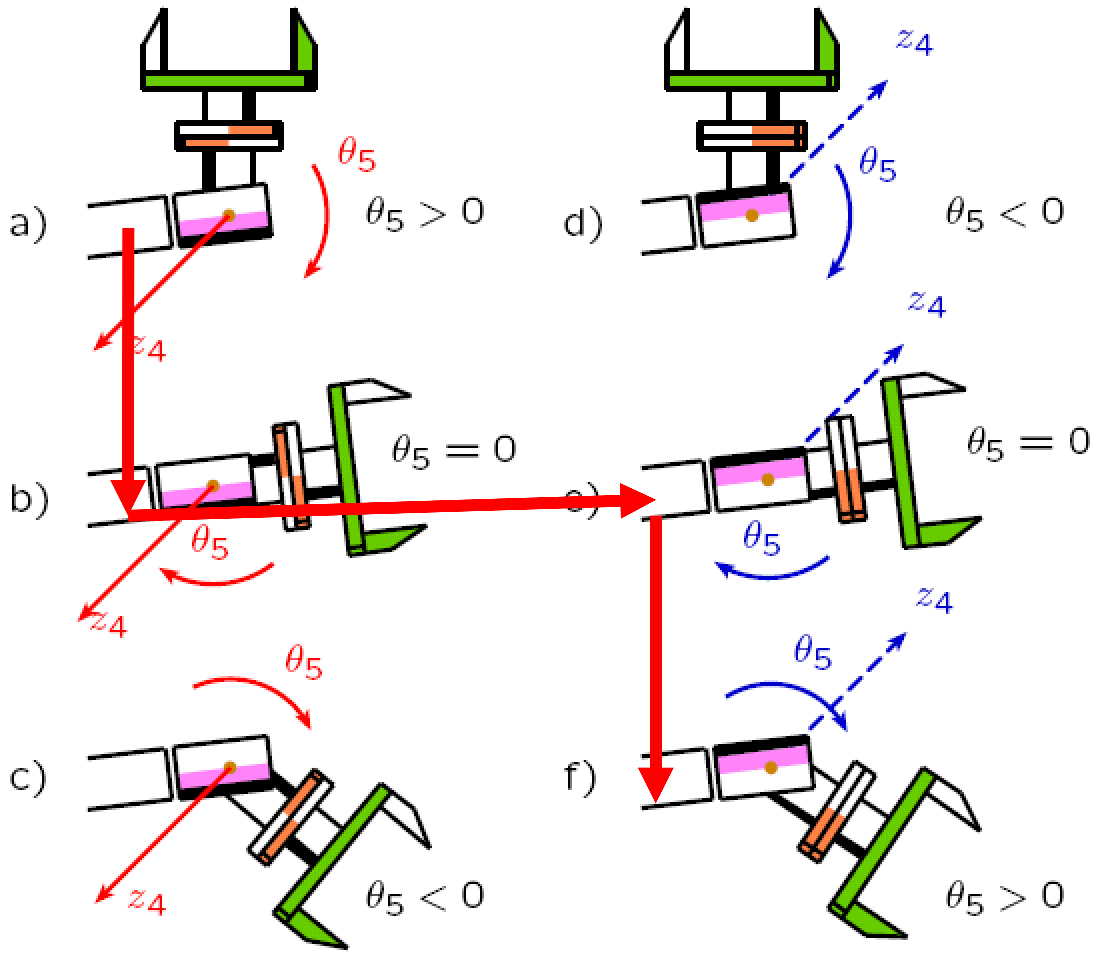


Keine Drehung in z_4 und z_6

Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Beispiel

Drehung in z_4 und z_6 um 180°



Inverse Kinematik (Rückwärtsrechnung)

- Nicht für alle Roboter mit 6 Freiheitsgraden existieren Lösungen in geschlossener Form
- Industrieroboter meist so konstruiert, dass
  a) sich drei aufeinanderfolgende Achsen schneiden, oder
  b) drei aufeinanderfolgende Achsen parallel sind