第二章映射

陈建文

1. 映射

定义1.1

设X和Y为两个非空集合。一个从X到Y的映射f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f: X \to Y$。

1. 映射

定义1.1

设X和Y为两个非空集合。一个从X到Y的映射f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f : X \to Y$。

定义1.2

设X和Y为两个非空集合。一个从X到Y的映射为一个满足以下两个条件的$X \times Y$的子集f：

1. 对X的每一个元素x，存在一个$y \in Y$，使得$(x, y) \in f$；
2. 若$(x, y) \in f$，$(x, y') \in f$，则$y = y'$。

$(x, y) \in f$记为$y = f(x)$。

1. 映射

定义1.1

设X和Y为两个非空集合。一个从X到Y的映射f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f : X \to Y$。

定义1.2

设X和Y为两个非空集合。一个从X到Y的映射为一个满足以下两个条件的$X \times Y$的子集f：

1. 对X的每一个元素x，存在一个$y \in Y$，使得$(x, y) \in f$；
2. 若$(x, y) \in f$，$(x, y') \in f$，则$y = y'$。

$(x, y) \in f$记为$y = f(x)$。

定义1.3

设f为从集合X到集合Y的映射，$f : X \to Y$，如果$y = f(x)$，则称y为x在f下的象，称x为y的原象。X称为f的定义域；集合$\{f(x)|x \in X\}$称为f的值域，记为$Im(f)$。

1. 映射

定义1.4

设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，当把f的定义域限制在A上时，就得到了一个$\phi: A \to Y$，$\forall x \in A$，$\phi(x) = f(x)$。ϕ称为f在A上的限制，并且常用$f|A$来表示ϕ。反过来，我们也称f为ϕ在X上的扩张。

1. 映射

定义1.4

设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，当把f的定义域限制在A上时，就得到了一个$\phi: A \to Y$，$\forall x \in A$，$\phi(x) = f(x)$。ϕ称为f在A上的限制，并且常用$f|A$来表示ϕ。反过来，我们也称f为ϕ在X上的扩张。

定义1.5

设$f: A \to Y$，$A \subseteq X$，则称f为X上的一个部分映射。

1. 映射

定义1.4

设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，当把f的定义域限制在A上时，就得到了一个$\phi: A \to Y$，$\forall x \in A$，$\phi(x) = f(x)$。ϕ称为f在A上的限制，并且常用$f|A$来表示ϕ。反过来，我们也称f为ϕ在X上的扩张。

定义1.5

设$f: A \to Y$，$A \subseteq X$，则称f为X上的一个部分映射。

定义1.6

两个映射f与g称为是相等的当且仅当f和g都为从X到Y的映射，并且$\forall x \in X$总有$f(x) = g(x)$。

1. 映射

定义1.4

设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，当把f的定义域限制在A上时，就得到了一个$\phi: A \to Y$，$\forall x \in A$，$\phi(x) = f(x)$。ϕ称为f在A上的限制，并且常用$f|A$来表示ϕ。反过来，我们也称f为ϕ在X上的扩张。

定义1.5

设$f: A \to Y$，$A \subseteq X$，则称f为X上的一个部分映射。

定义1.6

两个映射f与g称为是相等的当且仅当f和g都为从X到Y的映射，并且$\forall x \in X$总有$f(x) = g(x)$。

定义1.7

设$f: X \to X$，如果$\forall x \in X, f(x) = x$，则称$f$为$X$上的恒等映射。$X$上的恒等映射常记为$I_X$。

1.映射

定义1.8

设$f: X \to Y$，如果$\forall x_1, x_2 \in X$，只要$x_1 \neq x_2$，就有$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称f为从X到Y的单射。

定义1.9

设$f: X \to Y$，如果$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$使得$f(x) = y$，则称f为从X到Y的满射。

定义1.10

设$f: X \to Y$，如果f既是单射又是满射，则称f为从X到Y的双射，或者称f为从X到Y的一一对应。

2. 鸽笼原理

定理2.1 (鸽笼原理)

如果把$n+1$个物体放到n个盒子里，则必有一个盒子里至少放了两个物体。

2. 鸽笼原理

定理2.1 (鸽笼原理)
如果把$n+1$个物体放到n个盒子里，则必有一个盒子里至少放了两个物体。

例：
已知m个整数$a_1, a_2, \ldots, a_m$，试证：存在两个整数k，l，$0 \leq k < l \leq m$，使得$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_l$能被$m$整除。

2. 鸽笼原理

定理2.2 (鸽笼原理的强形式)

设q_1，q_2，...，q_n为n个正整数。如果把$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物体放到n个盒子中，则或者第一个盒子中至少含有q_1个物体，或者第二个盒子中至少含有q_2个物体，...，或者第n个盒子中至少含有q_n个物体。

2. 鸽笼原理

定理2.2 (鸽笼原理的强形式)

设q_1，q_2，…，q_n为n个正整数。如果把$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$个物体放到n个盒子中，则或者第一个盒子中至少含有q_1个物体，或者第二个盒子中至少含有q_2个物体，…，或者第n个盒子中至少含有q_n个物体。

推论2.1

如果把$n(r-1)+1$个物体放入n个盒子里，则至少有一个盒子里放了不少于r个物体。

2. 鸽笼原理

定理2.2 (鸽笼原理的强形式)

设q_1，q_2，…，q_n为n个正整数。如果把$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$个物体放到n个盒子中，则或者第一个盒子中至少含有q_1个物体，或者第二个盒子中至少含有q_2个物体，…，或者第n个盒子中至少含有q_n个物体。

推论2.1

如果把$n(r-1)+1$个物体放入n个盒子里，则至少有一个盒子里放了不少于r个物体。

推论2.2

如果把n个正整数$m_1, m_2, \ldots, m_n$的平均值

$$\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n} > r-1,$$

则$m_1, m_2, \ldots, m_n$中至少有一个正整数不小于r。

3. 映射的一般性质

定义3.1

设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，A在f下的象定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

3. 映射的一般性质

定义3.1

设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，A在f下的象定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

例:

设$f: \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$，$f(x) = x^2$，$f(\{-1, 0\})$=?

3. 映射的一般性质

定义3.2

设$f: X \to Y$，$B \subseteq Y$，B在f下的原象定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

3. 映射的一般性质

定义3.2

设$f: X \to Y$，$B \subseteq Y$，B在f下的原象定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

例:

设$f: \{-1,0,1\} \to \{-1,0,1\}$，$f(x) = x^2$，则$f^{-1}(\{-1,0\})$=?

3. 映射的一般性质

定理3.1

设$f: X \to Y$，$A \subseteq Y$，$B \subseteq Y$，则

(1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(2) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(3) $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

(4) $f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$

定理3.2

设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，$B \subseteq X$，则

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(3) $f(A \triangle B) \supseteq f(A) \triangle f(B)$

4. 映射的合成

定义4.1

设$f: X \to Y$，$g: Y \to Z$为映射，映射f与g的合成$g \circ f: X \to Z$定义为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

4. 映射的合成

定义4.1
设$f: X \to Y$，$g: Y \to Z$为映射，映射f与g的合成$g \circ f: X \to Z$定义为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

定理4.1
设$f: X \to Y$，$g: Y \to Z$，$h: Z \to W$ 为映射，则

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

5. 逆映射

定义5.1

设$f: X \to Y$为双射，f的逆映射$f^{-1}: Y \to X$定义为：对任意的$y \in Y$，存在唯一的x使得$f(x) = y$,则$f^{-1}(y) = x$。

5. 逆映射

定义5.1
设$f: X \to Y$为双射，f的逆映射$f^{-1}: Y \to X$定义为：对任意的$y \in Y$，存在唯一的x使得$f(x) = y$,则$f^{-1}(y) = x$。

定义5.1'
设$f: X \to Y$为一个映射。如果存在一个映射$g: Y \to X$使得

$$f \circ g = I_Y \text{且} g \circ f = I_X,$$

则称映射f为可逆的，而g称为f的逆映射。

定理5.1
定义*5.1*与定义*5.1'*是等价的。

5. 逆映射

定理5.2

设$f: X \to Y$为可逆映射，则$(f^{-1})^{-1} = f$。

5. 逆映射

定理5.2

设$f : X \to Y$为可逆映射，则$(f^{-1})^{-1} = f$。

定理5.3

设$f : X \to Y$，$g : Y \to Z$都为可逆映射，则$g \circ f$也为可逆映射并且$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$。

5. 逆映射

定义5.2

设$f : X \to Y$为一个映射，如果存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$，则称f为左可逆的，g称为f的左逆映射；如果存在一个映射$h : Y \to X$ 使得$f \circ h = I_Y$，则称f为右可逆的，h称为f的右逆映射。

5. 逆映射

定义5.2

设$f : X \to Y$为一个映射，如果存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$，则称f为左可逆的，g称为f的左逆映射；如果存在一个映射$h : Y \to X$ 使得$f \circ h = I_Y$，则称f为右可逆的，h称为f的右逆映射。

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

6. 置换

定义6.1

有穷集合S到自身的一一对应称为S上的一个置换。如果$|S| = n$,则S上的置换就说成是n次置换。

设$S = \{1, 2, \ldots, n\}$，$\sigma : S \to S$为S上的一个置换，$\sigma(1) = k_1$，$\sigma(2) = k_2$，$\ldots$，$\sigma(n) = k_n$，我们用如下的一个表来表示置换σ:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$$

例:

设$S = \{1, 2, 3, 4\}$，$\sigma(1) = 3$，$\sigma(2) = 2$，$\sigma(3) = 4$，$\sigma(4) = 1$，则σ可以表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

这里，列的次序无关紧要，例如，σ还可以表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 置换

定义6.2

设α与β为集合$S=\{1,2,3,4\}$上的两个置换，则α与β为两个从S到S的双射，讨论置换时，我们用$\alpha\beta$表示α与β的合成$\beta\circ\alpha$。注意这里α与β的次序，从运算的角度看有一定的便利性，但也有的教材中采用相反的顺序。按照我们的写法，讨论置换时，如果$i\in S$，则用$(i)\alpha$表示i在α下的像，简记为$i\alpha$。

例：

设$S=\{1,2,3\}$，α和β为S上的两个置换，

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

，则

$$\alpha\beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

，

6. 置换

若α与β为两个n次置换，当把β的表示式中的上一行按α的下一行的顺序写出时，则$\alpha\beta$的下一行就是β的新表示式中的下一行。

例:

设$S=\{1,2,3\}$，α和β为S上的两个置换，

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

，则

$$\alpha\beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

，

6. 置换

定义6.3

设σ为S上的一个n次置换，若$i_1\sigma = i_2$，$i_2\sigma = i_3$，$\cdots$，$i_{k-1}\sigma = i_k$，$i_k\sigma = i_1$，而$\forall i \in S\setminus\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$，$i\sigma = i$，则称$\sigma$为一个$k$循环置换，记为$(i_1 i_2 \cdots i_k)$。2–循环置换称为对换。

例：

设$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，

则$(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，$(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

6. 置换

定理6.1
每个置换都能被分解成若干个没有共同数字的循环置换的乘积。如果不计这些循环置换的顺序以及略去的1−循环置换，这个分解是唯一的。

6. 置换

定理6.2
当$n \geq 2$时，每个n次置换都能被分解成若干个对换的乘积。

6. 置换

定理6.3
如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

6. 置换

定理6.3
如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

定义6.4
能被分解为偶数个对换的乘积的置换称为**偶置换**；能被分解为奇数个对换的乘积的置换称为**奇置换**。

6. 置换

定理6.3

如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

定义6.4

能被分解为偶数个对换的乘积的置换称为偶置换；能被分解为奇数个对换的乘积的置换称为奇置换。

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

7. 代数运算

定义7.1

一个集合及其在该集合上定义的若干个代数运算合称为一个代数系。

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理8.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理8.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.1

设X，Y，Z为任意三个非空集合。一个从$X \times Y$到Z的映射ϕ称为X与Y到Z的一个二元（代数）运算。当$X = Y = Z$时，则称ϕ为X上的二元(代数)运算。

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.2

从集合X到Y的任一映射称为从X到Y的一元(代数)运算。如果$X = Y$，则从X到X的映射称为X上的一元(代数)运算。

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.3

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, D$为非空集合。一个从$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$到$D$的映射$\phi$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$到$D$的一个$n$元（代数）运算。如果$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = D = A$，则称$\phi$为$A$上的$n$元代数运算。

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.4

设“$\circ$”为集合X上的一个二元代数运算。如果$\forall a, b \in X$，恒有$a \circ b = b \circ a$，则称二元代数运算“$\circ$”满足交换律。

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x+y=y+x$
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$
3. $0+x=x+0=x$
4. $(-x)+x=(-x)+x=0$
5. $x*y=y*x$
6. $(x*y)*z=x*(y*z)$
7. $1*x=x*1=x$
8. $x^{-1}*x=x*x^{-1}=1$
9. $x*(y+z)=x*y+x*z$
10. $(y+z)*x=y*x+z*x$

定义8.5

设“$\circ$”为集合X上的一个二元代数运算。如果$\forall a, b, c \in X$，恒有$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$，则称二元代数运算“$\circ$”满足结合律。

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.6

设“$+$”与“$\circ$”为集合X上的两个二元代数运算。

如果$\forall a, b, c \in X$，恒有

$$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c,$$

则称二元代数运算“$\circ$”对“$+$”满足左分配律。

如果$\forall a, b, c \in X$，恒有

$$(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a,$$

则称二元代数运算“$\circ$”对“$+$”满足右分配律。

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.7

设$(X, \circ)$为一个代数系。如果存在一个元素$e \in X$使得对任意的$x \in X$恒有$e \circ x = x \circ e = x$，则称$e$为"$\circ$"的单位元素。

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.8

设$(X, \circ)$为一个代数系，“$\circ$”有单位元素e，$a \in X$，如果$\exists b \in X$使得

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则称b为a的逆元素。

7. 代数运算

定义8.9

设$(S,+)$与$(T,\oplus)$为两个代数系。如果存在一个一一对应$\phi: S \to T$，使得$\forall x, y \in S$，有

$$\phi(x+y) = \phi(x) \oplus \phi(y),$$

则称代数系$(S,+)$与$(T,\oplus)$同构，并记为$S \cong T$, ϕ称为这两个代数系之间的一个同构。

7. 代数运算

定义8.10

设$(S,+,\circ)$与$(T,\oplus,*)$为两个代数系。如果存在一个一一对应$\phi: S\to T$，使得$\forall x,y\in S$，有

$$\phi(x+y)=\phi(x)\oplus\phi(y),$$
$$\phi(x\circ y)=\phi(x)*\phi(y),$$

则称代数系$(S,+,\circ)$与$(T,\oplus,*)$同构，并记为$S\cong T$, ϕ称为这两个代数系之间的一个同构。

7. 代数运算

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\neg p$
T	F
F	T

7. 代数运算

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	¬ p
T	F
F	T

x	y	x ∧ y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x	y	x ∨ y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

代数系$(\{T, F\}, \wedge, \vee, \neg)$与$(\{1, 0\}, \wedge, \vee, \bar{\ })$是同构的。

8. 集合的特征函数

定义9.1

设X为一个集合，$E \subseteq X$。E的特征函数$\chi_E : X \to \{0,1\}$定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果} x \in E, \\ 0 & \text{如果} x \notin E. \end{cases}$$

8. 集合的特征函数

定义9.2

令$Ch(X)=\{\chi|\chi:X\to\{0,1\}\}$。$\forall\chi,\chi'\in Ch(X)$及$x\in X$，

$$\begin{aligned}(\chi\vee\chi')(x)&=\chi(x)\vee\chi'(x)\\(\chi\wedge\chi')(x)&=\chi(x)\wedge\chi'(x)\\\bar{\chi}(x)&=\overline{\chi(x)}\end{aligned}\tag{1}$$

定理9.1

设X为一个集合，则代数系$(2^X,\cup,\cap,^c)$与$(Ch(X),\vee,\wedge,^-)$同构。

习题

习题1

设$X=\{a,b,c\},Y=\{0,1\},Z=\{2,3\}$。$f:X\to Y,f(a)=f(b)=0,f(c)=1$； $g:Y\to Z,g(0)=2,g(1)=3$。试求$g\circ f$。

习题2

设$f:X\to Y$，$C\subseteq Y$，$D\subseteq Y$，证明
$f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$

习题3

设$f:X\to Y$，$A\subseteq X$，$B\subseteq X$，证明
$f(A\setminus B)\supseteq f(A)\setminus f(B)$

习题4

设$f:X\to Y$，$A\subseteq X$，则$(f(A))^c\subseteq f(A^c)$成立吗？$f(A^c)\subseteq (f(A))^c$成立吗？

习题

习题5

设$f: X \to Y$， 证明：f为满射当且仅当$\forall E \in 2^Y, f(f^{-1}(E)) = E$。

习题6

设$f: X \to Y$， 证明：f为单射当且仅当$\forall F \in 2^X, f^{-1}(f(F)) = F$。

习题7

设$f: X \to Y$，$g: Y \to Z$，$A \subseteq Z$，证明：$(gf)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$。

习题8

设$N = \{1, 2, \ldots\}$，试构造两个映射$f: N \to N$与$g: N \to N$，使得$fg = I_N$，但$gf \neq I_N$。

习题

习题9

设$f : X \to Y$，

（1）如果存在唯一的一个映射$g : Y \to X$，使得$gf = I_X$，那么f是否可逆呢?

（2）如果存在唯一的一个映射$g : Y \to X$，使得$fg = I_Y$，那么f是否可逆呢?

习题10

是否存在一个从集合X到X的一一对应，使得$f = f^{-1}$，但$f \neq I_X$?