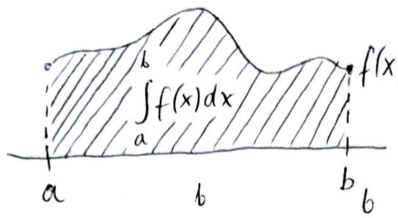
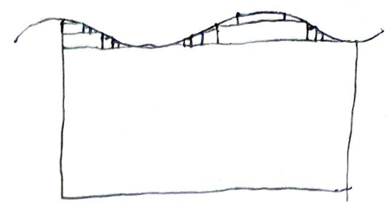
Analiza numeryczna, Wykład 12, 15/01/2020

Powtórka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$





$$f(x)\approx w(x) \quad \text{dla } x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b w(x)\,dx$$

$f(x)$ – trudna funkcja, $w(x)$ – łatwa funkcja (wielomian)

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,dx \approx Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

$I(f)$ – całka, $Q_n(f)$ – kwadratura liniowa, $A_k^{(n)}$ – współczynniki (wagi), $x_k^{(n)}$ – węzły

Zadanie: Dobrać współczynniki $A_k^{(n)}$ i węzły $(x_k^{(n)})$ $(0\le k\le n)$ w taki sposób, aby $I(f)\approx Q_n(f)$ dla funkcji f z pewnej rodziny funkcji, tzn. $A_k^{(n)}$ i $x_k^{(n)}$ mają być uniwersalne.

$$I(f) = Q_n(f) + R_n(f) \Rightarrow I(f)\approx Q_n(f) \equiv R_n(f) \text{ - małe.}$$

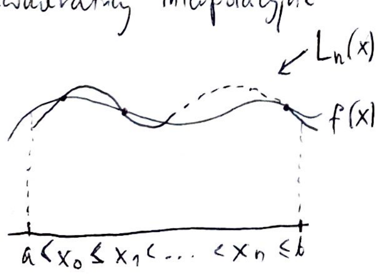
$I(f)$ – całka, $Q_n(f)$ – kwadratura, $R_n(f)$ – błąd

Rząd kwadratury Q_n

$$\text{rząd}(Q_n) = r \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1^\circ\ R_n(w)=0 \text{ jeśli } w\in\Pi_{r-1} \\ 2^\circ\ \exists v\in\Pi_r\setminus\Pi_{r-1}\ R_n(v)\neq 0,\ I(v)\neq Q_n(v)\end{array}$$

Twierdzenie: $\text{rząd}(Q_n)\le 2n+2$

Kwadratury interpolacyjne



$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^{(n)})\lambda_k(x), \quad \lambda_k(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i^{(n)}}{x_k^{(n)}-x_i^{(n)}}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{A_k^{(n)}}_{=\int_a^b \lambda_k(x)dx} f(x_k^{(n)}) =: Q_n(f)$$

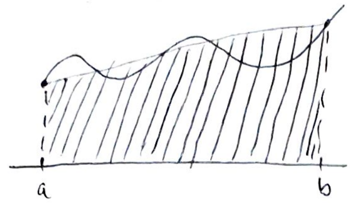
Twierdzenie: Rząd Q_n wynosi co najmniej $n+1$ wtw, gdy Q_n jest kwadraturą interpolacyjną.

Kwadratury Newtona - Cotesa

- Kwadratury interpolacyjne dla węzłów równoodległych $x_k^{(n)} = a + h_n k$ $\left(h_n := \frac{b-a}{n},\ k = 0,\dots,n\right)$

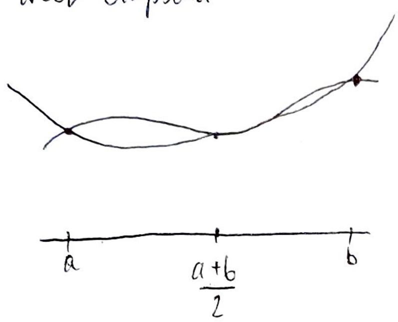
- wzór trapezów

$$Q_1(f) := \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$



- wzór Simpsona:

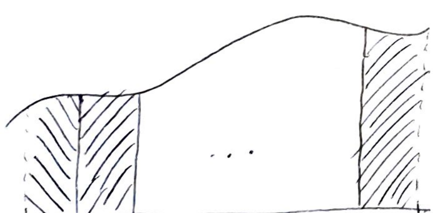
$$Q_2(f) := \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$



Fakt: Kwadratury Newtona - Cotesa praktycznie nie stosujemy dla $n \geq 7$.

Kwadratury złożone

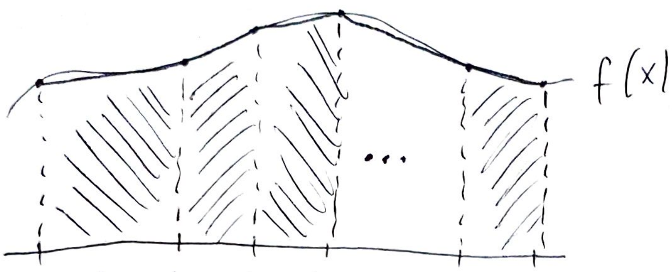
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)\,dx$$



$t_0 = a_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < b = t_n$

$\left.\begin{array}{l}1^\circ \text{ Podziel przedział całkowania na części} \\ 2^\circ \text{ W każdym przedziale zastosuj prostą kwadraturę}\end{array}\right\}$ kwadratury złożone

Złożony wzór trapezów - dzielimy przedział na równe części i na każdej z nich stosujemy wzór trapezów



$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = T_n(f) + R_n^T(f)$$

↑ złożony wzór trapezów

↑ błąd złożonego wzoru trapezów

$$t_k := a + h_n k, \quad k = 0, 1, \ldots, n; \quad h_n := \frac{b-a}{n}$$

$$T_n(f) := h_n \sum_{k=0}^{n}{}'' f(t_k) = h_n \left(\frac{1}{2} f(t_0) + f(t_1) + f(t_2) + \ldots + f(t_{n-1}) + \frac{1}{2} f(t_n) \right)$$

$\frac{1}{2}$, bo oznaczenie $\sum''$ dzieli pierwszy i ostatni wyraz przez 2

Twierdzenie: Jeśli funkcja $f \in C^2[a,b]$, to

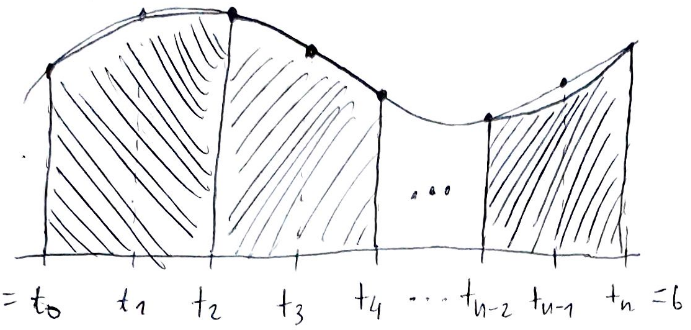
$$R_n^T(f) := \frac{a-b}{12} h_n^2 f''(\eta_n) \quad \text{dla} \quad \eta_n \in (a,b)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = O(n^{-2})$$

Twierdzenie: Jeśli $f \in C[a,b]$, to $\lim_{n \to \infty} T_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

Złożony wzór Simpsona – dzielimy przedział na parzystą liczbę podprzedziałów (równych) i dla każdych trzech kolejnych punktów stosujemy wzór Simpsona



$n = 2m$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{S_n(f)}_{\text{złożony wzór Simpsona}} + \underbrace{R_n^S(f)}_{\text{błąd złożonego wzoru Simpsona}}$$

$$t_k := a + h_n k, \quad k = 0, 1, \ldots, n; \quad h_n := \frac{b-a}{n}$$

$$S_n(f) = \frac{h_n}{3}\left(2\sum_{k=0}^{m}{}'' f(t_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{m} f(t_{2k-1})\right)$$

Twierdzenie: Jeśli $f \in C^4[a,b]$, to

$$R_n^S(f) := \frac{a-b}{180} h_n^4 f^{(4)}(\alpha_n), \quad \alpha_n \in (a,b)$$

$$h_n^4 = \left(\frac{b-a}{n}\right)^4 = O(n^{-4})$$

Twierdzenie: Jeśli $f \in C[a,b]$, to $\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$

Obserwacja: $\underset{(n=2m)}{S_n(f)} = \dfrac{4T_n(f) - T_m(f)}{4-1}$ ← EKSTRAPOLACJA

Metoda Romberga

Niech $n=2^k$, $k\in\mathbb{N}$, $h_k := \frac{b-a}{2^k}$, $x_i^{(k)} := a + ih_k$ $(i=0,1,\dots,2^k)$.

Definiujemy $T_{0k} := T_{2^k}(f) = h_k \sum_{i=0}^{2^k}{}'' f(x_i^{(k)})$ ← złożony wzór trapezów.

Kolejne elementy T_{mk} $(k=0,1,\dots;\ m=1,2,\dots)$ definiujemy rekurencyjnie za pomocą wzoru

$$T_{mk} := \frac{4^m T_{m-1,k-1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}$$

Tablica Romberga

złożony wzór trapezów

$$\begin{array}{lllllll}
T_{00} & & & & & & \\
T_{01} & T_{10} & & & & & \\
T_{02} & T_{11} & T_{20} & & & & \\
T_{03} & T_{12} & T_{21} & T_{30} & & & \\
\vdots & \vdots & | & & \ddots & & \\
T_{0m} & T_{1,m-1} & T_{2,m-2} & \dots & & \dots & T_{m0}
\end{array}$$

Twierdzenie: $\lim_{k\to\infty} T_{mk} = \int_a^b f(x)\,dx$ dla m-ustalonego, f-ciągłej

Twierdzenie: $\lim_{m\to\infty} T_{mk} = \int_a^b f(x)\,dx$ dla k-ustalonego, f-ciągłej

Uwaga:

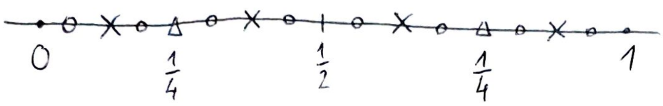
1° Przeważnie każda kolejna kolumna tablicy Romberga <u>SZYBCIEJ</u> zbiega do wartości całki.

2° Przeważnie najszybsza zbieżność występuje na przekątnej tablicy Romberga.

Obserwacja (efektywne obliczanie pierwszej kolumny)

Wartości f obliczamy w każdym połowionym punkcie tylko raz.

$n = 2^k$



$$T_{0k} \leftrightarrow T_{0,k+1}$$
$$\begin{array}{cc} \| & \| \\ T_{2^k}(f) & T_{2^{k+1}}(f) = T_{2\cdot 2^k}(f) \end{array}$$

Kwadratury Gaussa

Problem: Czy istnieje kwadratura liniowa $Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$ mająca maksymalny rząd, tzn. $2n+2$? Jak dobrać węzły oraz współczynniki, aby rząd $(Q_n) = 2n+2$?

Rozwiązanie: Istnieją kwadratury rzędu $2n+2$. Są to tzw. kwadratury Gaussa. Muszą być one interpolacyjne (rząd $\geq n+1$). Zatem

$$A_k^{(n)} := \int_a^b \left[\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}} \right] dx.$$

„Wystarczy" znaleźć odpowiednie węzły.

Przyjmijmy $a=-1$, $b=1$, tzn. interesują nas całki $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. Wtedy mamy do czynienia z tzw. kwadraturami Gaussa-Legendre'a.

Twierdzenie: Niech dany będzie ciąg wielomianów $P_0, P_1, \ldots$ zdefiniowany przez

wielomiany Legendre'a

$$P_0(x) \equiv 1; \quad P_1(x) \equiv x; \quad P_k(x) = \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{2} P_{k-2}(x) \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Miejsca zerowe wielomianu P_{n+1} są węzłami kwadratury Gaussa-Legendre'a, mającej rząd równy $2n+2$. Nie ma niestety jawnego wzoru na miejsca zerowe wielomianów Legendre'a, ich wartości przybliża się numerycznie. Zarówno współczynniki, jak i węzły są od dawna dokładnie stablicowane, więc łatwo ich używać.