Powtórka

- uwarunkowanie zadania : mała względna zmiana danych ⇓ duża względna zmiana wyniku } wskaźnik uwarunkowania + zadania źle uwarunkowane

- algorytmy numerycznie poprawne:
  - wynik w fl ≡ można zinterpretować jako mało zaburzony wynik dokładny dla mało zaburzonych danych
  - uwarunkowanie to cecha zadania i nic tego nie zmieni
  - poprawność numeryczna zależy od algorytmu

Jeśli zadanie jest dobrze uwarunkowane i rozwiązujemy je algorytmem numerycznie poprawnym, to jesteśmy w najlepszej sytuacji.

Rozwiązywanie równań nieliniowych

Przykłady:

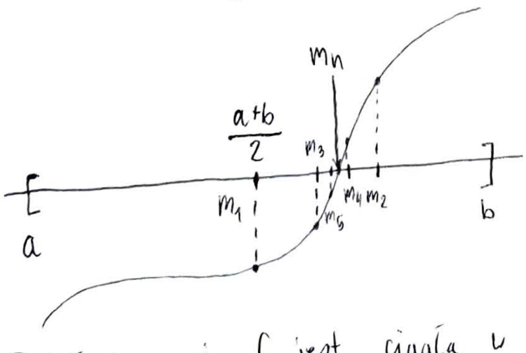
$$ax+b=0 \quad (a\neq 0) \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0) \Rightarrow \text{wzory } x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$10x^{2019}-2018x^7+5+\cos(\ln(x^5+7)-e^x)+\operatorname{tg} x=0 \Rightarrow ?$$

Zadanie: znajdowanie miejsc zerowych dla danej funkcji f $(\alpha\in D_f : f(\alpha)=0)$

(1) Metoda bisekcji:



$f\in C[a,b]$

$f(a)f(b)<0$

$\exists! \, \alpha\in[a,b] \; f(\alpha)=0$

dokładnie jeden pierwiastek

Zakładamy, że f jest ciągła w przedziale $[a,b]\equiv[a_0,b_0]$ i że $f(a_0)f(b_0)<0$ i w przedziale (a_0,b_0) jest dokładnie jedno miejsce zerowe α.
W następujący sposób rekurencyjny budujemy taki ciąg przedziałów

$$I_k := [a_k, b_k], \quad (k=0,1,\dots)$$

że $I_0 > I_1 > I_2 > \ldots > I_k > \ldots$ i $\alpha \in I_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$:

- wyznaczamy środek przedziału I_k: $m_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$
- jeśli $f(m_{k+1}) = 0$, to $\alpha = m_{k+1}$, w przeciwnym razie:

$$I_k := [a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, m_{k+1}] & : f(m_{k+1}) > 0 \\ [m_{k+1}, b_k] & : f(m_{k+1}) < 0. \end{cases}$$

Cechy metody bisekcji:

- $|I_k| = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
- $|\alpha - m_{k+1}| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$, α - miejsce zerowe, m_{k+1} - przybliżenie α
- aby wyznaczyć przybliżenie m_{k+1} miejsca zerowego α z błędem bezwzględnym na poziomie danego ε, należy wykonać

$$\left\lceil \log_2 \left(\frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon} \right) \right\rceil$$ kroków, a liczba kroków NIE ZALEŻY od rozpatrywanej funkcji, wynika stąd warunek STOPu
- metoda bisekcji jest stosunkowo „wolna" - znajdujemy mniej więcej jedną cyfrę dwójkową w każdym kroku

Przykład: $f(x) = \cos x - \sin 5x + x$, $f(x) = 0$

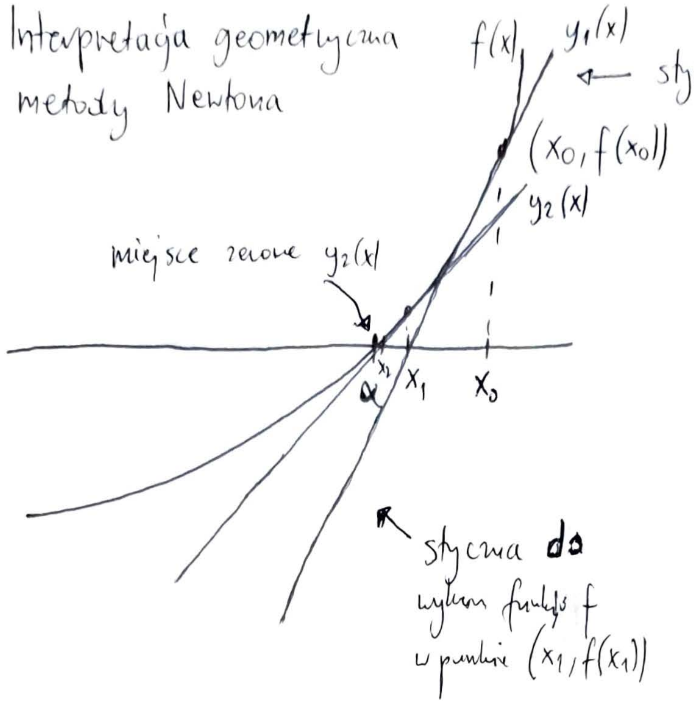
Stosujemy metodę bisekcji dla $a_0 := -1, b_0 := 0$

$k =$	0	1	2	3		30
$a_k =$	-1.0	-1.00	-0.75	-0.625		-0.6557672378
$b_k =$	0.0	-0.50	-0.50	-0.50	...	-0.6557672368
$m_{k+1} =$	-0.5	-0.75	-0.625	-0.6875		$-0.\underbrace{65576723}73$

dokładność 8 cyfr po przecinku

(2) Metoda Newtona (metoda stycznych)

Interpretacja geometryczna metody Newtona



← styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$

$$y_1(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

x_1 - miejsce zerowe y_1

$$0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$x_1 \equiv x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Wzór metody Newtona:

$$\begin{cases} x_0 \text{ - dane} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

Przykład: $f(x) = \cos x - \sin 5x + x = 0$, $x_0 = -0.5$

$k =$ 0	1	2	3	...	5... n
$x_k = -0.5$	$-0.6\dots$	$-0.655\dots$	-0.65576723		$\underbrace{-0.6557672369305890264}$

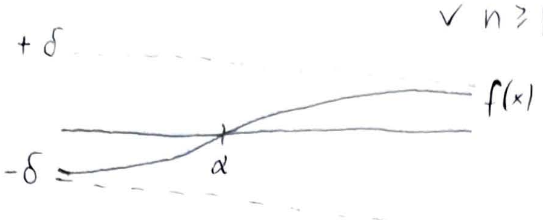
duża dokładność dla x_5, później się zatrzymuje i każdy x_n ma taką wartość

Cechy metody Newtona:

- jeśli dobrze dobierzemy (?) x_0, to ciąg (x_n) metody Newtona szybko (?) zbiega do α
- dużą wadą jest wymóg znajomości f'
- metoda jest bardzo czuła na x_0 (np. dla $f(x) = 10 \operatorname{arctan}(x-1) - \frac{1}{x^2+1}$ dla $x_0 = 2.3604$ mieliśmy 18-cyfrową dokładność dla x_{13}, lecz dla $x_0 = 2.3605$ ciąg x_n (przy $n \to \infty$) dąży do ∞

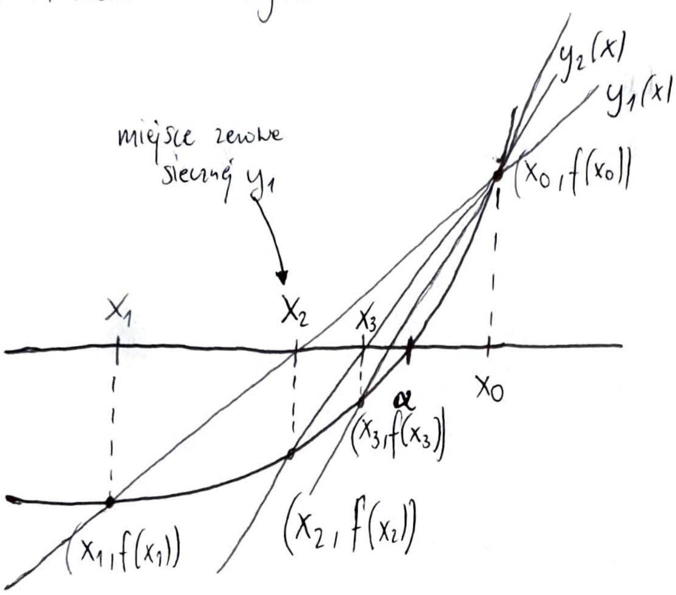
• warunek STOPu:

$$|f(x_n)| < \delta\text{ - małe} \ \wedge \ \left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right|, \left|\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}}\right|, \dots, \left|\frac{x_{n+k}-x_{n+k-1}}{x_{n+k-1}}\right| < \varepsilon \quad (k=2,3,\dots)$$
$$\vee \ n \geq N_{max}$$



• kolejną wadą jest to, że metoda może się zapętlać (np. $x_n = x_{n+1}$)

(3) Metoda siecznych



$y_1(x)$ → sieczna przechodząca przez punkty $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$

Wzór metody siecznych:

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ - dane} \\ x_{n+1} := x_n - \dfrac{f(x_n)}{\underbrace{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}_{f'(x) \text{ dla } x_n \approx x_{n-1}}} \quad (n = 1,2,3,\dots) \end{cases}$$

Cechy metody siecznych:

• nie musimy liczyć pochodnej

• metoda działa wolniej (?) niż metoda Newtona (bo przybliżamy pochodną)

• musimy „zgadnąć" (?) x_0, x_1 (punkty startowe)

• warunek STOPu podobnie jak w metodzie Newtona

• niebezpieczeństwa: czułość na x_0, x_1, zapętlenie

Przykład: $f(x) = \cos x - \sin 5x + x$

$k = 0$	1	2	...	7	8	9	...	12
$x_k = -0.5$	0.0	-0.41		-0.6	-0.6	-0.655		$-0.65576723693055\,\!1\ldots$

↑ pierwsze przybliżenie dopiero dla x_7

Pytania:

(1) Jak dobierać x_0 w metodzie Newtona, aby proces był zbieżny do miejsca zerowego? (TRUDNE!)

(2) Jak określić, która metoda jest „szybsza", a która „wolniejsza"? Co oznaczają słowa „szybka", „wolna"?

Odpowiedzi:

(Ad. 2) Definicja: wykładnik zbieżności ciągu

Niech dany będzie ciąg (x_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = g$. Jeśli istnieją takie stałe $p, C \in \mathbb{R}_+$ dla których

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C,$$

to p nazywamy wykładnikiem zbieżności ciągu (x_n), a C – stałą asymptotyczną. Jeżeli $p = 1$, $C \in (0,1)$, to mówimy o zbieżności liniowej, jeśli $p = 2$ to o zbieżności kwadratowej, a dla $p = 3$ – o sześciennej.

Intuicja:

n-duże $\Rightarrow |x_{n+1} - g| \approx C|x_n - g|^p$, więc im większe p, tym szybciej ciąg zbiega do granicy

Twierdzenie:

Jeśli α jest pierwiastkiem pojedynczym ($f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$), to wykładnik zbieżności (inaczej: rząd metody) metody Newtona wynosi $p=2$. Jeśli α - pierwiastek podwójny ($f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$, $f''(\alpha)\neq 0$), to $p=1$ dla metody Newtona.

Twierdzenie:

Wykładnik zbieżności metody siecznych wynosi:

$$p=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618 < 2 \text{ (metoda Newtona)}$$

Jak dla danej metody iteracyjnej rozwiązywania równań nieliniowych znajdować wykładnik zbieżności (rząd metody)? } LISTA 5

(Ad. 1) Twierdzenie:

Jeśli $f'(x)\neq 0$ i $\overbrace{f''(x)>0 \quad (f''(x)<0)}^{f'' \text{ ma stały znak}}$ dla dowolnego $x\in[a,b]$, gdzie $f(a)f(b)<0$ oraz

$$\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| < b-a, \quad \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| < b-a$$

to metoda Newtona jest zbieżna dla dowolnego $x_0\in[a,b]$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \text{ gdzie } f(\alpha)=0$$