## Funkcje tworzące

Funkcja tworząca dla ciągu $a_n$ $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ jest zdefiniowana wzorem

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Przykłady:

(1) $a_n \equiv 1$ $\quad A(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \dfrac{1}{1-x}$

(2) $a_n \equiv q^n$ $\quad A(x) = 1 + qx + qx^2 + \dots = \dfrac{1}{1-qx}$

(3) $a_n = \binom{m}{n}$ $\quad A(x) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{m}x^m + \overbrace{\binom{m}{m+1}}^{0} x^{m+1} + \dots = (1+x)^m$

(4) $a_n = \dfrac{1}{n!}$ $\quad A(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dots = e^x$

Wykładnicza funkcja tworząca ciągu $a_0, a_1, a_2, \dots$ jest zdefiniowana wzorem

$$A_e(x) = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

dzięki silni w mianowniku mają lepszy promień zbieżności

I METODA

(5) $a_n = n$ $\quad A(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots =$

$$= (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) + x(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots) =$$

$$= \frac{x}{1-x} + xA(x) \Rightarrow A(x) - xA(x) = \frac{x}{1-x} \Rightarrow A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

II METODA

$$A(x) \cdot B(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l\right) = \sum_{k,l} a_k b_l x^{k+l} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1}_{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$x\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = x\left(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\right) = x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots = A(x)$$

III METODA

$$x\left(1+x+x^2+x^3+\ldots\right)' = x\left(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\right) = A(x)$$

$$A(x) = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = x\left(\left(1-x\right)^{-1}\right)' = x\left((-1)(1-x)^{-2}(-1)\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

(6) $a_n = \frac{1}{n}$, $a_0 = 0$

$$A(x) = 0 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots = \int_0^x \left(1+t+t^2+t^3+\ldots\right)dt =$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \left(-\ln(1-t)\right)\Big|_0^x = -\ln(1-x)$$

Rozwiązywanie zależności rekurencyjnych

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $\quad a_0 = 0$, $a_1 = 1$

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + a_0 \quad /\cdot x^2 &&\Rightarrow a_2x^2 = a_1x^2 + a_0x^2\\
a_3 &= a_2 + a_1 \quad /\cdot x^3 &&\Rightarrow a_3x^3 = a_2x^3 + a_1x^3\\
a_4 &= a_3 + a_2 \quad /\cdot x^4 &&\Rightarrow a_4x^4 = a_3x^4 + a_2x^4\\
a_5 &= a_4 + a_3 \quad /\cdot x^5 &&\Rightarrow a_5x^5 = a_4x^5 + a_3x^5
\end{aligned}$$

$\ldots$

Znajdźmy funkcję tworzącą:

$$A(x) - a_0 - a_1x = x\left(A(x) - a_0\right) + x^2A(x)$$

$$A(x) - x = xA(x) + x^2A(x)$$

$$A(x)\left(1-x-x^2\right) = x$$

$$A(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

$$A(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) x^n$$

A więc dostajemy $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ← wzór na n-tą liczbę Fibonacciego

## Liczby Catalana

$$C_0 = 1$$

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} C_0$$

Pierwsze kilka wyrazów:

$c_0 = 1$

$c_1 = c_0 c_0 = 1 \cdot 1 = 1$

$c_2 = c_0 c_1 + c_1 c_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$

$c_3 = c_0 c_2 + c_1 c_1 + c_2 c_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$

$c_4 = 14$

Interpretacja kombinatoryczna: n-ta liczba Catalana $c_n$ to (1) liczba ciągów n zer i n jedynek, w których każdy prefiks zawiera co najmniej tyle zer co jedynek; (2) liczba drzew binarnych o n+1 liściach; (3) liczba wstawień nawiasów w n mnożeniach

Wytłumaczenie (1):

spełniają warunki prefiksu

$$\underbrace{0\ \boxed{\quad (a) \quad}\ 1}\ ,\ \boxed{0\ \ (b)\ \ 1}$$

najkrótszy prefiks, w którym
# zer = # jedynek
(prefiks długości k+1)

(a) składa się z k zer i k jedynek

(b) składa się z n-k-1 zer i n-k-1 jedynek

Liczba Catalana $c_n$ (n zer i n jedynek), w których najkrótszy niepusty prefiks z liczbą zer równą liczbie jedynek ma długość k+1 wynosi $c_k c_{n-k-1}$.

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$$

jeden x wyciągamy przed sumę

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}\right) x^{n-1} = 1 + x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right)x^n}_{\left(\sum c_n x^n\right)\left(\sum c_n x^n\right)} =$$

$$= 1 + xC^2(x)$$

$$C(x) = 1 + xC^2(x)$$

$$xC^2(x) - C(x) + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} \\ C_2(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \end{cases}$$

Jednak może istnieć TYLKO JEDNA funkcja tworząca!!!

Sprawdźmy która jest poprawna:

$$\lim_{x \to 0} C_1(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} C_2(x) = 1$$

← więc ta funkcja tworząca jest poprawna, ponieważ $c_0 = 1$ (co jest warunkiem początkowym liczb Catalana)

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$a^{\underline{n}} = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)$$

$$(1+x)^a = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n}_{\text{dla } a\in\mathbb{N}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{\underline{n}}}{n!}x^n}_{\text{dla } a\in\mathbb{R}}$$

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4x}{1!}+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}\cdot\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot2\cdot2}\cdot\frac{(4x)^3}{3!}+\dots+\frac{1\cdot1\cdot3\cdot\dots\cdot(2k-1)}{2^{k+1}}\cdot\frac{4^{k+1}x^{k+1}}{(k+1)!}+\dots\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot(2k-1)}{(k+1)!}\cdot 2^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\dots\cdot 2k}{(k+1)!\,k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\boxed{\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}}x^k$$

zwarty wzór k-tej liczby Catalana

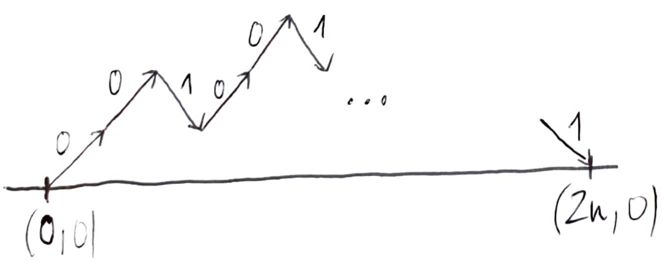
$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Dowód I:

$c_n$ - **liczba** ciągów niespadających poniżej prostej

$d_n$ - liczba ciągów spadających poniżej prostej

$c_n:$



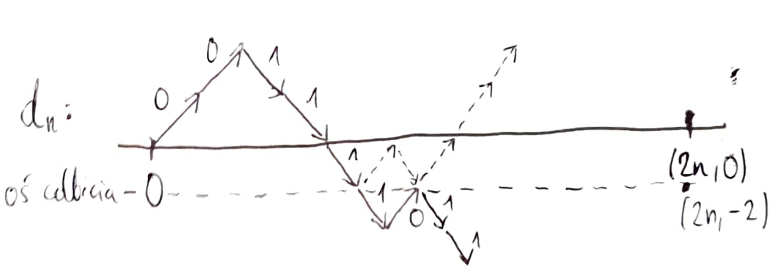

$$c_n + d_n = \binom{2n}{n}$$

$$d_n = \binom{2n}{n+1}$$

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \dots = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

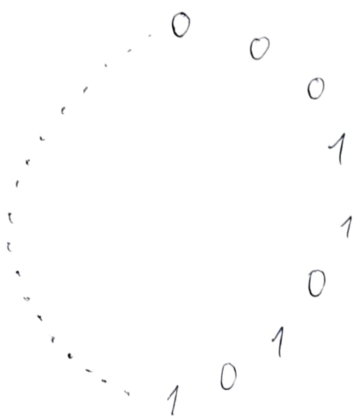
Przedstawione ciągi są przykładowymi ciągami $c_n$ oraz $d_n$, dodatkowo $c_n$ ZAWSZE kończy się w $(2n,0)$, a $d_n$ (dzięki odbiciu) w $(2n,-2)$.

$d_n:$



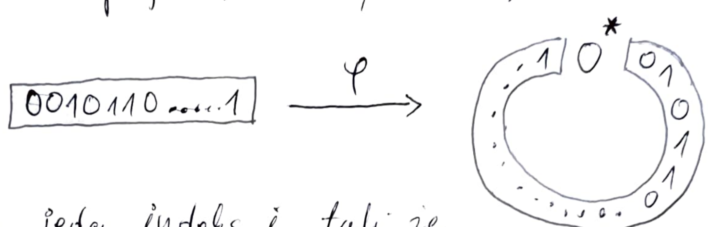
Dowód II:

$C_n$ – liczba ustawień $n+1$ zer i $n$ jedynek na kole (jeśli utożsamiamy ustawienia przechodzące na siebie przez obrót)

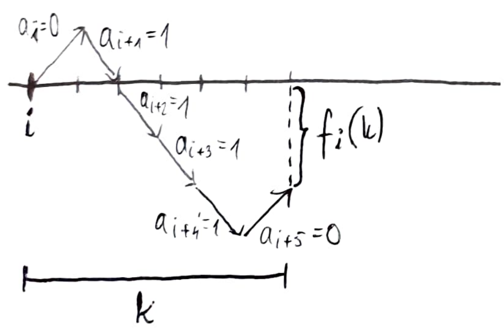



Liczba ustawień: $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Pokażemy bijekcję między ustawieniem $n+1$ zer i $n$ jedynek a ciągami spełniającymi warunek na prefiks ($\#0 = n$, $\#1 = n$)




Lemat: Istnieje dokładnie jeden indeks $i$, taki że dla dowolnego $k > 0$ zachodzi $f_i(k) > 0$ ($f_i(k)$ to „wysokość" ciągu dla $k$ – przedstawione na rysunku niżej).




Z lematu możemy wywnioskować, że wybranie punktu startowego $0^*$ jest jednoznaczne, ponieważ jest to nasze ostatnie minimum globalne.