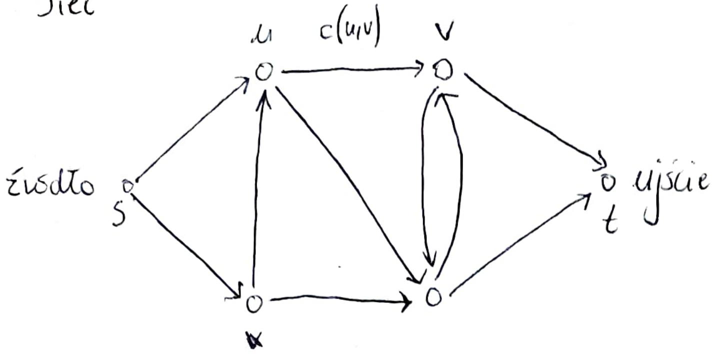
Matematyka dyskretna, Wykład 12, 09/01/2020

Sieć



$f(u,v)$ - przepływ

$c(u,v)$ - pojemność

$$0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$$

Wzór Kirchoffa:

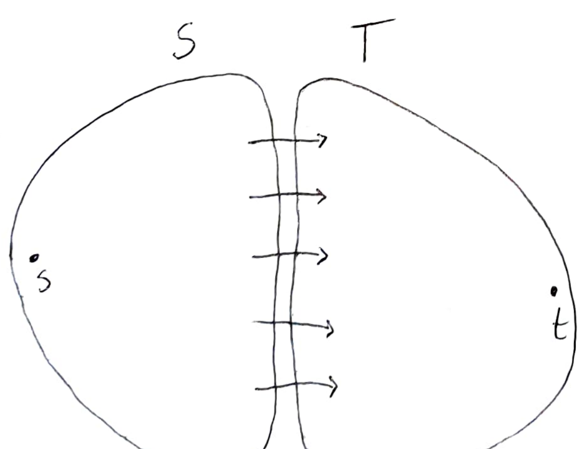
$$\sum_{u} f(u,v) = \sum_{u} f(v,u)$$

Wartość przepływu

$$\hat{f} = \sum_{u} f(s,u) = \sum_{u} f(u,t)$$

Przekrój (S,T)

$$s \in S, \quad t \in T, \quad c(S,T) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c(u,v)$$



$$S \cap T = \emptyset$$
$$S \cup T = V$$

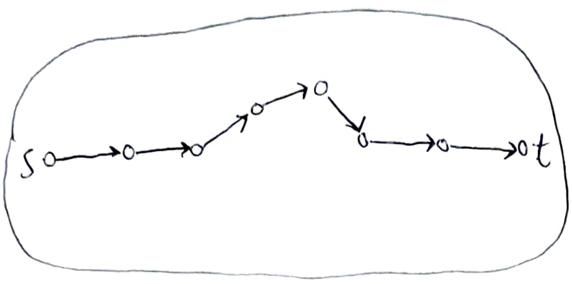
$$f(S,T) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} f(u,v) - \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} f(v,u)$$

Lemat: $\forall S,T: \quad f(S,T) = \hat{f}$

Lemat: $\forall S,T: \quad \hat{f} = f(S,T) \leq c(S,T)$

Wniosek: $\max\limits_{f} \hat{f} \leq \min\limits_{(S,T)} c(S,T)$

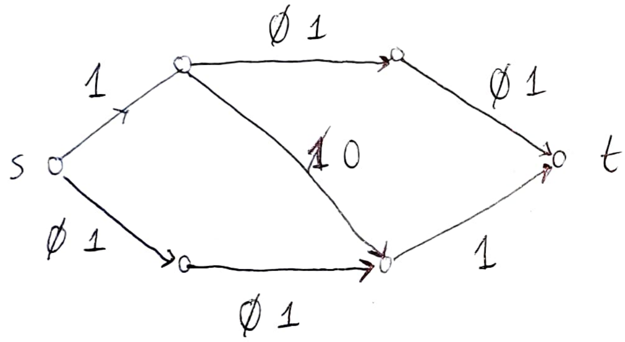
Dana jest sieć i przepływ f. Wtedy ścieżka powiększająca przepływ zawiera 2 rodzaje krawędzi (skierowanych):



1° krawędzie (u,v), takie że
$$f(u,v) < c(u,v),$$
2° krawędzie (u,v), takie że
$$f(v,u) > 0.$$

Po ścieżce powiększającej można puścić dodatkowy przepływ o wartości:

$$\min\left\{\min_{(u,v)\text{ z }1^\circ}\left(c(u,v)-f(u,v)\right),\ \min_{(u,v)\text{ z }2^\circ} f(v,u)\right\}$$



Na przykładzie obok wszystkie krawędzie mają pojemność 1.

Algorytm Forda-Fulkersona

$f \leftarrow 0$

Dopóki istnieje ścieżka powiększająca P:

  Powiększ f o maksymalny przepływ na ścieżce P.

Fakt: Algorytm Forda-Fulkersona oblicza maksymalny przepływ dla sieci o pojemnościach całkowitych. Przepływ ten jest całkowitoliczbowy.

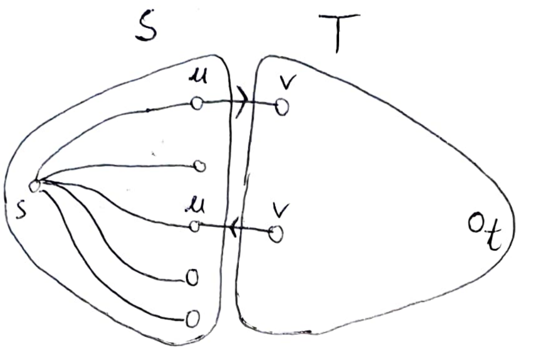
Fakt: Algorytm Forda-Fulkersona wylicza maksymalny przepływ dla sieci o pojemnościach wymiernych.

Twierdzenie: Dla sieci o pojemnościach rzeczywistych można dobrać taką kolejność krawędzi, że algorytm Forda-Fulkersona działa w nieskończoność.

Twierdzenie: Jeśli dla przepływu f nie istnieje ścieżka powiększająca, to istnieje taki przekrój (S,T), że $\hat{f} = c(S,T)$.

Dowód: Niech S będzie zbiorem wierzchołków v, do których można dojść z s „ścieżką powiększającą", czyli krawędziami typu 1° i 2°.

$T = V \setminus S$



Dla dowolnych krawędzi (u,v):

$$c(u,v) = f(u,v)$$

Dla dowolnych krawędzi (v,u):

$$f(v,u) = 0$$

$$\hat{f} = f(S,T) = \sum f(u,v) - \sum f(v,u) =$$
$$= \sum c(u,v) - 0 = c(S,T) \quad \blacksquare$$

Wniosek 1: W momencie gdy już nie istnieje ścieżka powiększająca zachodzi $\hat{f} = \max\limits_{\varphi} \hat{\varphi}$.

Dowód: $\forall \varphi: \hat{\varphi} \le c(S,T)$ czyli $\max\limits_{\varphi} \hat{\varphi} \le \hat{f} = c(S,T)$ $\blacksquare$

Wniosek 2: Przekrój (S,T) z twierdzenia (może on być efektywnie wyliczony) jest przekrojem o najmniejszej pojemności:

$$c(S,T) = \min_{(S',T')} c(S',T').$$

Dowód: $\forall (S',T'): c(S',T') \ge \hat{f} = c(S,T) \Rightarrow \min c(S',T') \ge \hat{f} = c(S,T)$.

Twierdzenie Forda - Fulkersona

$$\max_{\varphi} \hat{\varphi} = \min_{(S',T')} c(S',T')$$

W jaki sposób najlepiej wybierać ścieżki powiększające w algorytmie Forda - Fulkersona?

Heurystyka Edmondsa-Karpa: w każdym kroku użyj ścieżki o najmniejszej liczbie krawędzi.

Twierdzenie: Każda krawędź (u,v) może być krawędzią **krytyczną** w algorytmie Edmondsa-Karpa co najwyżej $\frac{n}{2}$ razy.

Wniosek 1: algorytm Edmondsa-Karpa wykonuje co najwyżej $m \cdot n$ powiększeń przepływu f.

Wniosek 2: algorytm Edmondsa-Karpa ma złożoność $O(m^2 n)$.

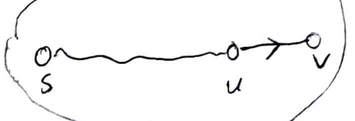
Lemat: Niech $\delta_f(v)$ będzie liczbą krawędzi na najkrótszej ścieżce powiększającej z s do v. Dla dowolnego v przy przejściu z przepływu φ do f mamy $\delta_\varphi(v) \leq \delta_f(v)$.

Dowód: Załóżmy nie wprost, że v jest wierzchołkiem o minimalnej wartości $\delta_f(v)$, takiej że $\delta_\varphi(v) > \delta_f(v)$. Niech u będzie poprzednikiem na najkrótszej ścieżce powiększającej f z s do v.

$\delta_f(u) < \delta_f(v)$, zatem $\delta_f(u) \geq \delta_f(v)$. Gdyby istniała możliwość trawersowania (u,v) przy przepływie φ, to

$$\delta_\varphi(v) \leq \delta_\varphi(u) + 1 \leq \delta_f(u) + 1 = \delta_f(v),$$

czyli sprzeczność. Zatem ścieżka powiększająca φ do f zawiera krawędź (v,u). To oznacza, że

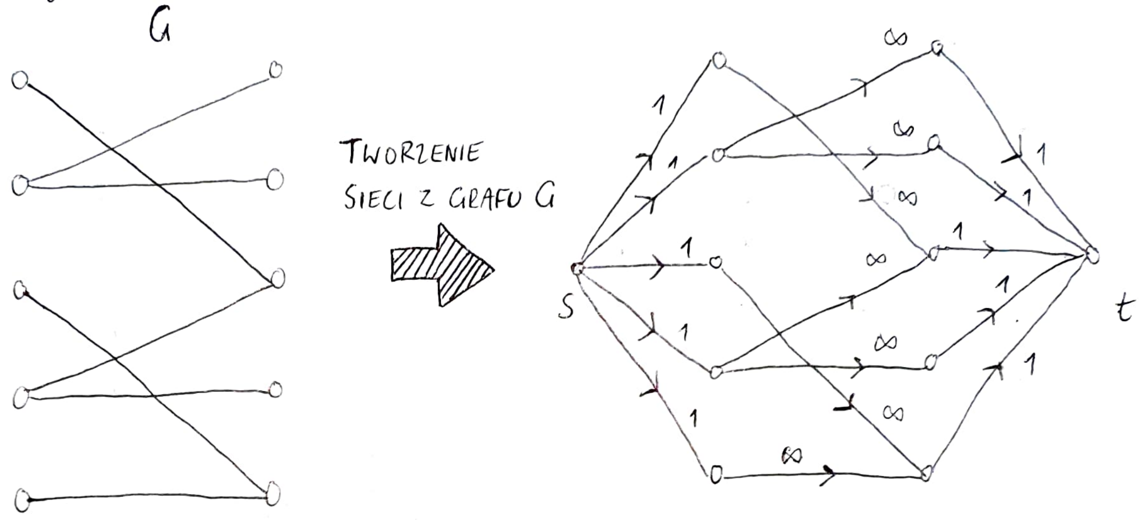


$$\delta_\varphi(v) < \delta_\varphi(v) + 1 = \delta_\varphi(u) \leq \delta_f(u) < \delta_f(v) \quad \text{(sprzeczność)}$$

Twierdzenie Königa-Egervaryego

Skojarzenie to zbiór krawędzi o rozłącznych wierzchołkach w grafie. Pokrycie wierzchołkowe to zbiór wierzchołków takich, że liczba krawędzi w G jest incydentna z którymś z wierzchołków.

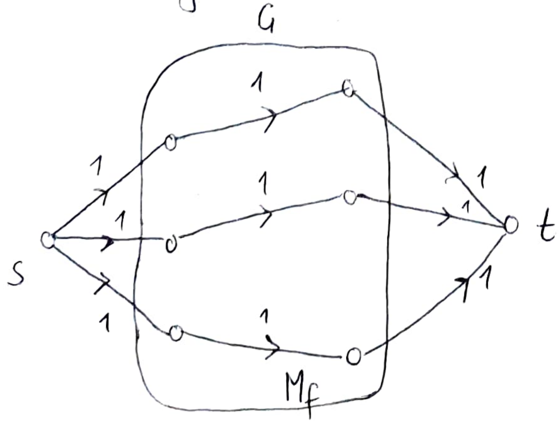
W grafie dwudzielnym liczność największego skojarzenia równa jest mocy najmniejszego pokrycia wierzchołkowego.



Z twierdzenia Forda-Fulkersona $\max\limits_{f} \hat{f} = \min\limits_{(S,T)} c(S,T)$.

Lemat: $\max\limits_{f} \hat{f} = \max\limits_{M} |M|$, M to skojarzenia w G

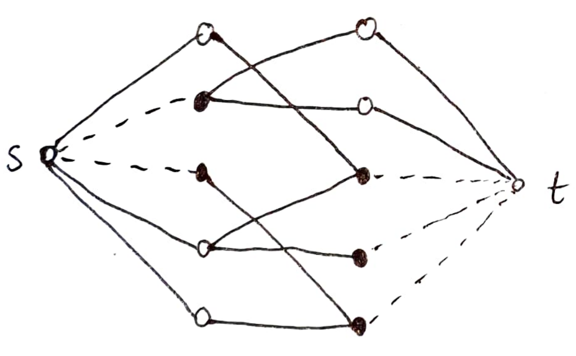
1° M-skojarzenie $\Rightarrow$ istnieje przepływ φ taki, że $\hat{\varphi} = |M|$



2° f – maksymalny przepływ całkowitoliczbowy (może być wyliczony za pomocą algorytmu Forda – Fulkersona) $\Rightarrow$ istnieje skojarzenie M_f taki, że $|M_f| = \hat{f}$.

Lemat: $\min\limits_{(S,T)} c(S,T) = \min\limits_{W} |W|$, gdzie W – pokrycie wierzchołkowe w G

1° W – pokrycie wierzchołkowe $\Rightarrow$ jeśli z sieci usuniemy krawędzie s i t z wierzchołkami z W, to w powstałej sieci nie ma dróg z s do t $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ istnieje przekrój (S,T), że $c(S,T) \leq |W|$.



Zamalowane wierzchołki
↓
przykładowe pokrycie wierzchołkowe

2° minimalny przekrój (S,T) $\Rightarrow$ istnieje W^*: $c(S,T) = |W^*|$