Analiza numeryczna L, Lista 4, 28/10/2019

Zadanie 1. $[a_0,b_0],[a_1,b_1],\dots$ - ciąg przedziałów zbudowanych za pomocą metody bisekcji na ciągłej funkcji f w przedziale $[a_0,b_0]$, $m_n := \frac{1}{2}(a_n+b_n)$, $\alpha = \lim_{n\to\infty} m_n$, $e_n := \alpha - m_n$

(a) $[a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}]$ dla $n=0,1,\dots$

Przedział $[a_n,b_n]$ dzielimy na dwa mniejsze przedziały, dzieli je punkt $m_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$, a więc zawiera się w przedziale $[a_0,b_0]$.
Jeżeli $f(m_{k+1})=0$, to kończymy działanie, jeżeli nie to:

$$[a_{k+1},b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, m_{k+1}] : f(m_{k+1}) > 0 \\ [m_{k+1}, b_k] : f(m_{k+1}) < 0, \end{cases}$$

a więc każdy podprzedział zawiera się w $[a_0,b_0]$.

(b) długość $[a_n,b_n]$

$$|b_n - a_n| = \left|\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}\right| = \dots = \left|\frac{b_{n-k}-a_{n-k}}{2^k}\right| = \dots = \left|\frac{b_0-a_0}{2^n}\right|$$

(c) $|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0-a_0)$ $(n \ge 0)$

Mamy więc $|e_n| = |\alpha - m_n|$, α to szukany pierwiastek, a m_n to środek przedziału. m_n może być początkiem lub końcem m_{n+1} przedziału, więc rozpatrujemy dwa przypadki:

1° początek przedziału: $\alpha \ge m_n$, aby zmaksymalizować wartość $|\alpha - m_n|$ maksymalizujemy α, wtedy: $|\alpha - m_n| \le |b_{n+1} - a_{n+1}|$.

2° koniec przedziału: $\alpha \le m_n$, aby zmaksymalizować $|\alpha - m_n|$ minimalizujemy α, wtedy: $|\alpha - m_n| \le |a_{n+1} - b_{n+1}| = |b_{n+1} - a_{n+1}|$

Mamy więc: $|\alpha - m_n| \le |b_{n+1} - a_{n+1}| = \left|\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}\right| = |2^{-n-1}(b_0-a_0)|$.

Aby pozbyć się modułu rozpatrzmy przypadki:

1° $a_0, b_0 > 0$: $a_0 < b_0 \Rightarrow b_0 - a_0 > 0$

2° $a_0 < 0, b_0 > 0$: $b_0 - a_0 > 0$

3° $a_0, b_0 < 0$: $a_0 < b_0 \Rightarrow b_0 - a_0 > 0$

} w tych przypadkach możemy opuścić moduł

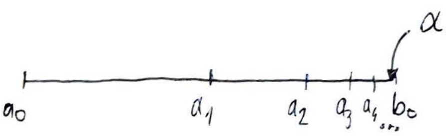
4° $a_0 > 0, b_0 < 0$: sytuacja niemożliwa (b_0 musi być $a_0 < b_0$).

Stąd mamy:

$2^{-n-1}(b_0 - a_0)$ jest zawsze dodatnie: $|e_n| \leq 2^{-n-1}(b_0 - a_0)$ $\blacksquare$

(d) Czy może zajść $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$?

Tak, jeśli miejsce zerowe jest bardzo blisko b_0:



Zadanie 2. Ile kroków wg metody bisekcji należy wykonać, żeby wyznaczyć
(kartkówka)
α z błędem bezwzględnym mniejszym niż dany $\varepsilon > 0$?

$|\varepsilon_n| \leq 2^{-n-1}(b_0 - a_0)$, szukamy n dla którego $|\varepsilon| \geqslant 2^{-n-1}(b_0 - a_0)$.

$$|\varepsilon| \geqslant 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \quad / \cdot \frac{2^n}{\varepsilon}$$

$$2^n \geqslant \frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon}$$

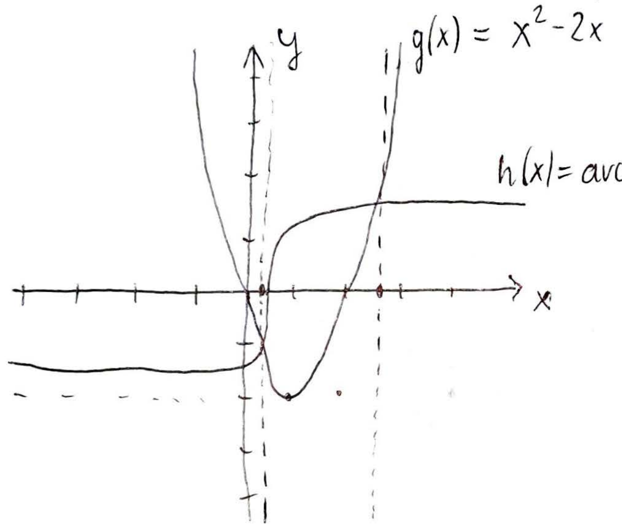
$$n \geqslant \log_2 \frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon},$$

więc $n = \left\lceil \log_2 \frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon} \right\rceil$.

Zadanie 4.3. $f(x) = xe^{-x} - 0.06064$, miejsce zerowe $\alpha = 0.06469...$, $a_0 := 0$, $b_0 := 1$, używamy metody bisekcji.

Dla pierwszych kilku wyrazów oszacowanie i błąd rzeczywisty sporo się różnią, jednak później są do siebie zbliżone. Wielkości oszacowania maleją monotonicznie, ponieważ z każdą iteracją dzielimy przedział na pół, jednak błąd rzeczywisty nie maleje monotonicznie.

Zadanie 4.4. Wyznaczyć miejsca zerowe $f(x) = x^2 - 2x - \arctan(7x-2)$ z błędem bezwzględnym nie większym niż 10^{-5}.



Miejsca przecięcia wykresów oznaczają miejsca zerowe, stąd używamy metody bisekcji na przedziałach $[0,1]$ oraz $[2,3]$, otrzymujemy $x = \{0.22533..., 2.58388...\}$

$\varepsilon = 10^{-5}$, $n = \left\lceil \log_2 \frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon} \right\rceil = 16$ => 16 iteracji w programie.

Zadanie 4.5. Odwrotność liczby R można obliczyć bez wykonywania dzieleń za pomocą wzoru $x_{n+1} := x_n(2 - x_n R)$ $(n=0,1,\dots)$

Przykładowa funkcja: $x = \sqrt{a}$ dla $a \in \mathbb{R}^+$

$$x^2 = a$$

$$x^2 - a = 0$$

$$f(x) = x^2 - a$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} \rightarrow \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)$$

$(x_k$ - dane$)$

Weźmy $a = 2$, $x_0 = 1.5$:

$$x_0 = 1,5.$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1,5 + \frac{2}{1.50}\right) \approx 1.416666\dots$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(1,41666 + \frac{2}{1,41666}\right) \approx 1.414214.$$

Aby uzyskać poprawny wynik powinniśmy wybierać x_0 będące wczesnym przybliżeniem wyniku (czyli dla $R > 1$ wybieramy $x_0 < 1$, w drugą stronę podobnie).

Dokładne oszacowanie x_0: $\frac{3}{2}R > x_0 > \frac{1}{2}R$

Zadanie 7. $a = m2^c$, $c \in \mathbb{Z}$, $m \in [\frac{1}{2}, 1)$, metoda obliczania $\sqrt{a}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Niech } c = 2k, \text{ wtedy } \sqrt{a} = \sqrt{m} \cdot 2^k, \\ \text{niech } c = 2k+1, \text{ wtedy } \sqrt{a} = \sqrt{2m} \cdot 2^k\end{array}\right\} \text{ więc } m \in [\tfrac{1}{2}, 2)$$

$$f(x) = x^2 - R$$

$$f'(x) = 2x$$

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = x - \dfrac{x^2 - R}{2x} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{R}{2x} \\ |F'(x)| < 1, \quad F'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{R}{2x^2} \end{array}\right\} \left|\frac{R}{2x^2} - \frac{1}{2}\right| < 1$$

$$\frac{R}{2x^2} < \frac{3}{2}$$

$$x^2 > \frac{R}{3}$$

Zadanie 8.

$$[f(x)^2]' = 2f(x) \cdot f'(x)$$

$$\left[f(x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2} f(x)^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(x)$$

$$g(x) = f(x)^{\frac{1}{r}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{r} \cdot f(x)^{\frac{1}{r} - 1} \cdot f'(x)$$

Metoda Newtona

$$x_{n+1} := x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} =$$

$$= x_n - \frac{f(x)^{\frac{1}{r}}}{\frac{1}{r} f(x)^{\frac{1}{r}-1} \cdot f'(x)} =$$

$$= x_n - \frac{r f(x)^{\frac{1}{r}}}{f(x)^{\frac{1}{r}-1} \cdot f'(x)} =$$

$$= x_n - \frac{r \cdot g(x)}{g'(x)}$$

$$f(x) = (x-\alpha)^r h(x), \quad h(\alpha) \neq 0$$

$$g(x) = \sqrt[r]{f(x)} = (x-\alpha)\sqrt[r]{h(x)}$$