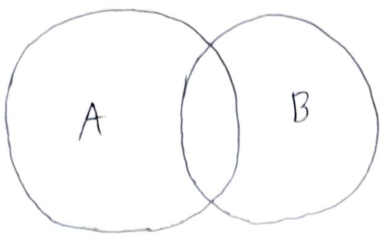
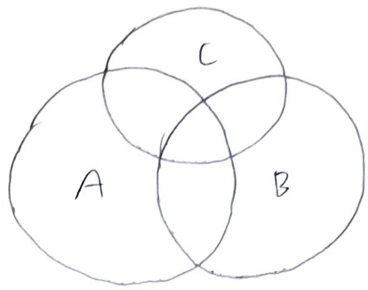
Matematyka dyskretna M, Wykład 5, 7/11/2019

Zasada włączania-wyłączania



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Uogólnienie zasady włączania-wyłączania dla n-zbiorów:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = {} & |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| - \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| + \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots - \\ & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \ldots \\ & + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n|\end{aligned}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

krótszy zapis ułatwiający dowodzenie

Dowód przez indukcję po n:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| &= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - \overbrace{|(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}|}^{|(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})|} = \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + |A_{n+1}| - \\ &- \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (-1)^{k+1} |(A_{i_1} \cap A_{n+1}) \cap \ldots \cap (A_{i_k} \cap A_{n+1})| =\end{aligned}$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + |A_{n+1}| + \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (-1)^{k+2} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}| =$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| \quad \blacksquare$$

Zadanie: Na ile sposobów można umieścić n ponumerowanych kulek w k ponumerowanych pudełkach?

Odpowiedź: k^n

Zadanie: Na ile sposobów można umieścić n ponumerowanych kulek w k ponumerowanych pudełkach tak, by żadne nie było puste?

Odpowiedź: Ω - zbiór wszystkich ułożeń kulek w pudełkach, $|\Omega| = k^n$

A_i - zbiór ułożeń takich, że i-te pudełko jest puste, $|A_i| = (k-1)^n$

$|A_i \cap A_j| = (k-2)^n$,

$|A_i \cap A_j \cap A_l| = (k-3)^n, \ldots$

Chcemy policzyć $|\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|$:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \ldots \cup A_k| = {} & |A_1| + \ldots + |A_k| - && k(k-1)^n \\ & - |A_1 \cap A_2| - \ldots - |A_{k-1} \cap A_k| + && -\tfrac{k}{2}(k-2)^n \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots && +\tfrac{k}{3}(k-3)^n \\ & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \ldots && \ldots \\ & \ldots \\ & + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| \end{aligned}$$

$$|\Omega| - |A_1 \cup \ldots \cup A_k| = k^n - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

Liczba Stirlinga II rodzaju

$\left\{ {n \atop k} \right\}$ - liczba sposobów rozbicia zbioru n-elementowego na k podzbiorów niepustych

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{\sum_i (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n}{k!}$$

Liczba Stirlinga I rodzaju

$\left[{n \atop k} \right]$ - liczba permutacji n-elementów, które w rozbiciu na cykle mają dokładnie k cykli

Grupa - zbiór z działaniem łącznym, elementem odwrotnym i neutralnym

1° $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$

2° $\exists e \quad ge = eg = g$

3° $\forall g \, \exists g^{-1} \quad gg^{-1} = g^{-1}g = e$

G jest przemienna, gdy $gh = hg$.

G jest cykliczna, gdy $\{e, g^1, g^2, \dots, g^k\}$, gdzie g - generator

Podgrupa H grupy G

1° $H \subseteq G$

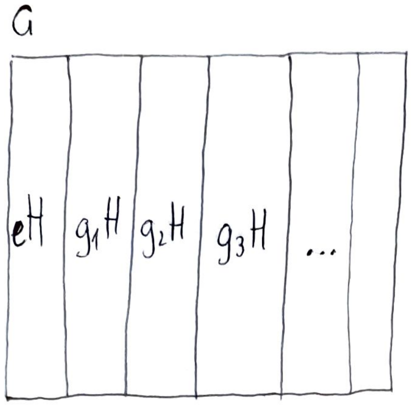
2° $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in H$

3° $\forall h \in H \quad h^{-1} \in H$ ← tego nie trzeba sprawdzać w grupach skończonych

Warstwy w grupach

- lewostronna: $gH = \{gh : h \in H\}$
- prawostronna: $Hg = \{hg : h \in H\}$

Lemat: dowolne dwie warstwy lewostronne (prawostronne) są równe lub rozłączne.



Twierdzenie Lagrange'a:

$$|G| = [G : H] \cdot |H|$$

$[G : H]$ – liczba różnych warstw lewostronnych

Twierdzenie Eulera:

$$a \perp n \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$$

Dowód:

$G = \mathbb{Z}_n^* = \{x : x \perp n \wedge x \in \mathbb{Z}_n\}$ z mnożeniem mod n,

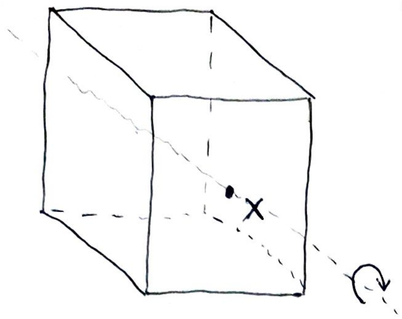
czyli $x \cdot_n y = x \cdot y \mod n$

$H = \{e, a, a^2, \dots, a^{x-1}\}$ (wiemy, że istnieje minimalny x taki, że $a^x \equiv_n 1$)

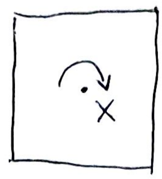
Z twierdzenia Lagrange'a $x = |H| \mid |G|$, bo $|G| = |H| \cdot [G : H]$,

$$a^{\varphi(n)} = a^{|G|} = a^{l \cdot x} \equiv_n 1^l \equiv 1$$

$a^x \equiv 1$



Zadanie: na ile sposobów można tak obrócić sześcian, żeby przeszedł na siebie?



Dla kwadratu są 4 możliwości: $\underbrace{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ}$ wokół środka.

x - środek jednej ze ścian

G - zbiór obrotów sześcianu

$G_x - \{g \in G : g(x) = x\}$

$O_x - \{y : \exists g \in G \;\; g(x) = y\}$

$|G_x| = 4$ ← obroty dla kwadratu wokół osi

$|O_x| = 6$ ← przejście x na ściany

Twierdzenie: $|G| = |G_x||O_x|$ (czyli $|G| = 4 \cdot 6 = 24$)

→ $|G_x| \cdot [G : G_x]$

$H = G_x$

$gH = G(x \to y)$

$G(x \to y) = \{g : g(x) = y\}$

Lemat: $g(x) = y \Rightarrow gG_x = G(x \to y)$

1° $gG_x \subseteq G(x \to y)$, bo $\forall h \in G_x \;\; g(h(x)) = g(x) = y$

2° $gG_x \supseteq G(x \to y)$, bo $g'(x) = y \Rightarrow g' = g(g^{-1}g') \wedge g^{-1}g'(x) = x$,

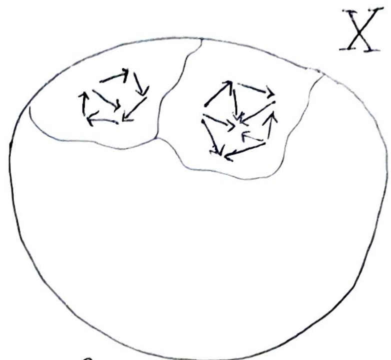
więc $(g^{-1}g') \in G_x$ (g' to jakiś element $G(x \to y)$)

Zliczanie istotnie różnych obiektów

Zadanie: Ile jest istotnie różnych sześciennych kostek do gry?

X - zbiór sposobów nalepienia liczb 1,2,3,4,5,6 na ściany sześcianu (unieruchomionego)

$|X| = 6!$



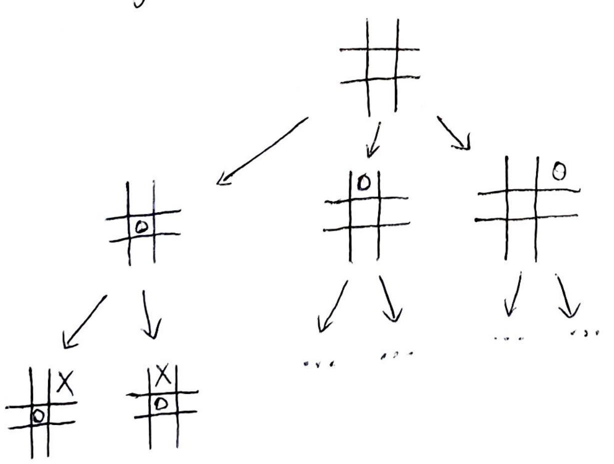
Liczba istotnie różnych kostek to liczba orbit unieruchomionych kostek przy działaniu grupy obrotów sześcianu G:

$$|O_x| = |G|, \quad \# \text{orbit} = \frac{|X|}{|G|} = \frac{6!}{24}$$

Dla „poprawnej" kostki, tzn. spełniających warunek, że suma liczb na przeciwległych ściankach mamy $|X'| = 6 \cdot 4 \cdot 2$, a więc liczba orbit:

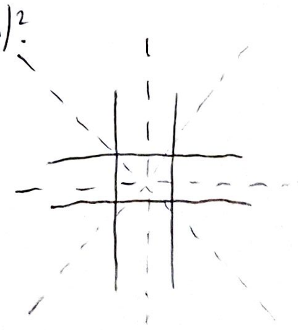
$$\frac{|X'|}{|G|} = 2$$

Przykład dla gry w kółko i krzyżyk:



Ile jest tabliczek na danym poziomie (tzn. czwartym)?

$G = \{id, O_{90°}, O_{180°}, O_{270°}, S_1, S_2, S_3, S_4\}$



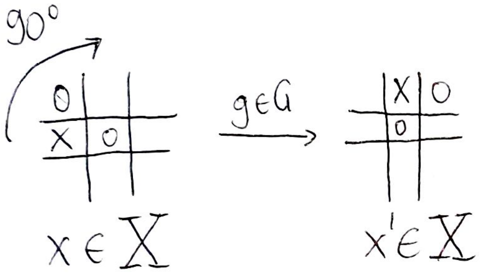
Lemat Burnside'a:

$$\#\text{orbit} = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|G_x| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|, \text{ gdzie } Fix(g) = \{x : g(x) = x\}$$

Dowód:

$$\#\text{orbit} = \sum_{|O_x|\text{-orbita}} 1 = \sum_{|O_x|\text{-orbita}} \frac{|G_x||O_x|}{|G|} = \sum_{x\in X}\frac{|G_x|}{|G|} = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|G_x| =$$

$$= \frac{1}{|G|}\left|\{(g,x) : g(x) = x\}\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$



krzyżyk na dowolnym polu

dwa kółka na pozostałych

$$|X| = \binom{9}{1\ 2\ 6} = \frac{9!}{1!\,2!\,6!} = 252 = 9\cdot\binom{8}{2}$$

1 krzyżyk, 2 kółka, 6 pustych pól

$$|Fix(id)| = 252$$

$$|Fix(O_{180°})| = 4$$

3	4	1
2	X	2
1	4	3

$$|Fix(O_{90°})| = |Fix(O_{270°})| = 0$$

1	2	1
2		2
1	2	1

krzyżyk na dowolnym miejscu w środkowej kolumnie

1	4	1
2	5	2
3	6	3

$$|Fix(S_1)| = |Fix(S_3)| = 3\cdot 4$$

1	4	1
2	4	2
3	X	3

$$|Fix(S_2)| = |Fix(S_4)| = 3\cdot 4$$

2	1	4
3	5	1
6	3	2

Więc $\#\text{orbit} = \frac{1}{8}(252 + 4 + 4\cdot 12) = 38$