Matematyka dyskretna, Lista 2, 18/10/2019

Zadanie 1. Pokaż, że $\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = n-1$, a to liczba niewymierna, n naturalna, (dodatnia) później analogiczna równość dla powały.

(1) $n \in \mathbb{N}^+ \wedge a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow an \notin \mathbb{N}^+$

$\boxed{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ - niewymierne}}$

Z powyższego wniosku mamy $\lfloor an \rfloor = \lceil an \rceil - 1$, więc:

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = \lfloor an \rfloor + \lfloor n - an \rfloor \overset{(*)}{=} \lfloor an \rfloor + n + \lfloor -an \rfloor$$

$$\overset{(\cdot)}{=} \lfloor an \rfloor - \lceil an \rceil + n = \lceil an \rceil - 1 - \lceil an \rceil + n = n - 1$$

$* \rightarrow n \in \mathbb{N}$ więc możemy pominąć podłogę

$\cdot \rightarrow \lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

■

(2) $\lceil an \rceil + \lceil (1-a)n \rceil = n+1$ (bo $\lfloor an \rfloor + 1 = \lceil an \rceil$)

$$\lceil an \rceil + \lceil (1-a)n \rceil = \lceil an \rceil + \lceil n - an \rceil = \lceil an \rceil + \lceil -an \rceil + n =$$

$$= \lceil an \rceil - \lfloor an \rfloor + n = n + 1$$

■

Zadanie 3. Ile warunków początkowych potrzeba do jednoznacznego określenia wartości elementów ciągu dla $n \in \mathbb{N}$.

(a) $a_n = n a_{n-2}$ ← potrzebujemy przynajmniej a_0 i a_1 (określonych), gdybyśmy chcieli policzyć a_1 musielibyśmy mieć wyraz a_{-1}, lecz $\{-1\} \notin \mathbb{N}$, potrzebujemy 2 wyrazów a_0, a_1

(b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ ← do policzenia a_3 musielibyśmy mieć a_0 i a_2, a do policzenia a_2 - a_1 oraz a_{-1}, jednak $\{-1\} \notin \mathbb{N}$, więc potrzebujemy 3 wyrazów a_0, a_1, a_2

(c) $a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor} + n$ ← do obliczenia a_0 mamy $a_0 = 2a_0 + 0$, co daje nam $a_0 = 0$, nie musimy więc znać żadnego wyrazu ciągu do policzenia wartości dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 4.

(a) $f_n = f_{n-1} + 3^n, \quad n > 1, \quad f_1 = 3$

$$f_n = 3^n + f_{n-1} = 3^n + 3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 = \sum_{i=1}^{n} 3^i$$

(b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot n, \quad n > 1, \quad h_1 = 1$

$$h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot n = (-1)^{n+1} n + h_{n-1} =$$
$$= (-1)^{n+1} n + (-1)^n (n-1) + h_{n-2} =$$
$$= (-1)^{n+1} n + (-1)^n (n-1) + (-1)^{n-1}(n-2) + \ldots + (-1)^{n-k}(n-k-1) + h_{n-k-2} =$$
$$= (-1)^{n+1} n + (-1)^n (n-1) + \ldots + (-1)^2 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot i$$

(c) $l_n = l_{n-1} l_{n-2}, \quad n > 2, \quad l_1 = l_2 = 2$

$$l_n = l_{n-1} l_{n-2} = (l_{n-2} l_{n-3}) l_{n-2} = (l_{n-2})^2 l_{n-3} = (l_{n-3} l_{n-4})^2 l_{n-3} =$$
$$= (l_{n-3})^3 (l_{n-4})^2 = (l_{n-4} l_{n-5})^3 (l_{n-4})^2 = (l_{n-4})^5 (l_{n-5})^3 = \ldots =$$
$$= (l_2)^{F_{n-1}} \cdot (l_1)^{F_{n-2}} = 2^{F_{n-1}} \cdot 2^{F_{n-2}} = 2^{F_{n-1} + F_{n-2}} = 2^{F_n}$$

Zadanie 5.

(a) $a_0 = 1, \quad a_n = \dfrac{2}{a_{n-1}}$, pierwsze kilka wyrazów:

$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = 2, \ldots$

Zatem $a_n = n \bmod 2 + 1$.

Dowód: Dla $a_0 = 0 \bmod 2 + 1 = 1$, więc się zgadza. Zał. że $\forall n_0 < n$ zachodzi $a_{n_0} = n_0 \bmod 2 + 1$.

(1) n parzyste, wtedy $(n-1) \bmod 2 + 1 = 2$, więc $a_n = 1 = 0 + 1 = n \bmod 2 + 1$

(2) n nieparzyste, wtedy $(n-1) \bmod 2 + 1 = 1$, więc $a_n = 2 = 1 + 1 = n \bmod 2 + 1$ ■

(b) $b_0 = 0, b_n = \dfrac{1}{1+b_{n-1}}$, policzmy pierwsze wyrazy: $b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{2}{3}$, $b_4 = \frac{3}{5}, b_5 = \frac{5}{8}, \ldots$

Zatem $b_n = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$, załóżmy więc, że $\forall n_0 < n$ zachodzi $b_{n_0} = \dfrac{F_{n_0}}{F_{n_0+1}}$,

sprawdźmy dla n:

$$b_n = \frac{1}{1+b_{n-1}} = \frac{1}{1+\frac{F_{n-1}}{F_n}} = \frac{1}{\frac{F_n + F_{n-1}}{F_n}} = \frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}} = \frac{F_n}{F_{n+1}} \quad \blacksquare$$

(c) $c_0 = 1, \; c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i = c_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i = \sum_{i=0}^{n-2} c_i + \sum_{i=0}^{n-2} c_i =$$

$$= c_{n-2} + \sum_{i=0}^{n-3} c_i + c_{n-2} + \sum_{i=0}^{n-3} c_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-3} c_i + \sum_{i=0}^{n-3} c_i + \sum_{i=0}^{n-3} c_i + \sum_{i=0}^{n-3} c_i = 4 \cdot \sum_{i=0}^{n-3} c_i =$$

$$= 8 \cdot \sum_{i=0}^{n-4} c_i = 2^3 \cdot \sum_{i=0}^{n-4} c_i = 2^4 \sum_{i=0}^{n-5} c_i = 2^5 \sum_{i=0}^{n-6} c_i =$$

$$= 2^{k-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-k} c_i = 2^{n-2} \cdot \sum_{i=0}^{1} c_i = 2^{n-2} \cdot (c_0 + c_1) = 2^{n-2} \cdot 2 = 2^{n-1} \text{ dla } n>0,$$

czyli $c_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n=0 \\ 2^{n-1} & \text{dla } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(d) $d_0 = 1, \; d_1 = 2, \qquad d_n = \dfrac{d_{n-1}^2}{d_{n-2}}$,

pierwsze wyrazy ciągu: $d_0 = 1, d_1 = 2, d_2 = 4, d_3 = 8, d_4 = 16$, więc $d_n = 2^n$

Dowód:

$$d_n = \frac{(2^{n-1})^2}{2^{n-2}} = \frac{2^{2n-2}}{2^{n-2}} = \frac{2^{2n}}{4} \cdot \frac{4}{2^n} = 2^n \quad \blacksquare$$

Zadanie 6.

(a) $y_0 = y_1 = 1$, $y_n = \dfrac{y_{n-1}^2 + y_{n-2}}{y_{n-1} + y_{n-2}}$

$y_2 = \dfrac{1^2+1}{1+1} = 1$, $y_3 = \dfrac{1^2+1}{1+1} = 1$, możemy podejrzewać, że $y_n = 1$,

więc zakładamy $\forall n_0 < n \;\; y_{n_0} = 1$, sprawdzamy dla n:

$$y_n = \frac{y_{n-1}^2 + y_{n-2}}{y_{n-1} + y_{n-2}} \overset{(\text{zał.})}{=} \frac{1^2+1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \quad \blacksquare$$

(b) $z_0 = 1$, $z_1 = 2$, $z_n = \dfrac{z_{n-1}^2 - 1}{z_{n-2}}$

$z_2 = \dfrac{2^2-1}{1} = 3$, $z_3 = \dfrac{3^2-1}{2} = 4$, $z_4 = \dfrac{4^2-1}{3} = 5$, więc załóżmy, że

$z_{n_0} = n_0 + 1$ zachodzi dla $\forall n_0 < n$, sprawdzamy dla n:

$$z_n = \frac{z_{n-1}^2 - 1}{z_{n-2}} \overset{(\text{zał.})}{=} \frac{((n-1)+1)^2 - 1}{(n-2)+1} = \frac{n^2-1}{n-1} = \frac{(n-1)(n+1)}{(n-1)} = n+1 \quad \blacksquare$$

(c) $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n = \dfrac{(t_{n-1} - t_{n-2} + 3)^2}{4}$,

$t_2 = \dfrac{4^2}{4} = 4$, $t_3 = \dfrac{6^2}{4} = 9$, $t_n \overset{(?)}{=} n^2$

Załóżmy, że $\forall n_0 < n$ zachodzi $t_{n_0} = n_0^2$, sprawdzamy dla n:

$$t_n = \frac{(t_{n-1} - t_{n-2} + 3)^2}{4} = \frac{((n-1)^2 - (n-2)^2 + 3)^2}{4} =$$

$$= \frac{(n^2 - 2n + 1 - n^2 + 4n - 4 + 3)^2}{4} = \frac{(2n)^2}{4} = \frac{4n^2}{4} = n^2 \quad \blacksquare$$

Zadanie 14.

(a) $F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

Dowód: $\underbrace{F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n}_{F_{n+2} - 1} + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$

$$F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1 \quad / + 1$$

$$F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3} \ \blacksquare$$

(b) $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$ dla $n \geq 1$

Dowód: $\underbrace{F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1}}_{F_{2n}} + F_{2n+1} = F_{2n+2}$

$$F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2} \ \blacksquare$$

(c) $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

Dowód: $\underbrace{F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2}_{F_n F_{n+1}} + F_{n+1}^2 = F_{n+1} F_{n+2}$

$$F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1} F_{n+2}$$

$$F_{n+1}(F_{n+1} + F_n) = F_{n+1} F_{n+2} \quad / : F_{n+1}$$

$$F_{n+1} + F_n = F_{n+2} \ \blacksquare$$

(d) $F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$

Dowód: $F_{n+1} F_{n+3} = F_{n+2}^2 + (-1)^{n+2}$

$$F_{n+1} F_{n+3} = F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) = F_{n+1}^2 + F_{n+1} F_{n+2} = F_n F_{n+2} - (-1)^{n+1} + F_{n+1} F_{n+2} =$$

$$= F_n F_{n+2} + F_{n+1} F_{n+2} - (-1)^{n+1} = F_{n+2}(F_n + F_{n+1}) + (-1)^{n+2} =$$

$$= F_{n+2}^2 + (-1)^{n+2}$$ (działa dla dowolnego $n+1$, więc twierdzenie $F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$ jest prawdziwe) $\blacksquare$

Zadanie 2. Dla $x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ oblicz $\lfloor \frac{x}{m} \rfloor + \lfloor \frac{x+1}{m} \rfloor + \ldots + \lfloor \frac{x+m-1}{m} \rfloor$.

Niech $x = km + r$, $k \in \mathbb{Z}$, $r \in [0, m)$, $x_i = \lfloor \frac{x+i}{m} \rfloor$ dla $i = \{0, 1, .., m-1\}$

więc $x_i = \lfloor \frac{x+i}{m} \rfloor = \lfloor \frac{km+r+i}{m} \rfloor = k + \lfloor \frac{r+i}{m} \rfloor$

$$0 \leq r+i < 2m-1$$

$$0 \leq \frac{r+i}{m} < 2 - \frac{1}{m}$$

$$\lfloor \frac{r+i}{m} \rfloor \in \{0, 1\}$$

Stąd mamy:

$$x_i = \begin{cases} k & : r+i < m \\ k+1 & : r+i \geq m \Rightarrow i \geq m-r \end{cases} \qquad \left(\sum_{i=n-\lfloor r \rfloor}^{m-1} 1 \right)$$

$$\lfloor \frac{x}{m} \rfloor + \lfloor \frac{x+1}{m} \rfloor + \ldots + \lfloor \frac{x+m-1}{m} \rfloor = \sum_{i=0}^{m-1} x_i = km + \lfloor r \rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Zadanie 4.(b)

$$h_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i \quad \leftarrow \text{tu należy rozpatrzyć parzystość}$$

1° n parzyste: $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} -2i + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 2i+1 =$

$$= \frac{(1+n-1)\frac{n}{2}}{2} + \frac{(-2+(-1)n)\frac{n}{2}}{2} = \frac{n^2}{4} - (2+n)\frac{n}{4} = \frac{n^2}{4} - \frac{n^2+2n}{4} =$$

$$= -\frac{2n}{4} = -\frac{1}{2}n$$

2° n nieparzyste: $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} i + (-1)^{n+1} n =$

$$= -\frac{n-1}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{n+1}{2} \quad \blacksquare$$

Zadanie 8. $a_n = \dfrac{1 + a_{n-1}}{a_{n-2}}$, $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$.

$$a_2 = \frac{1+\beta}{\alpha}$$

$$a_3 = \frac{1 + \frac{1+\beta}{\alpha}}{\beta} = \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

$$a_4 = \frac{1 + \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}}{\frac{1+\beta}{\alpha}} = \ldots = \frac{\alpha+1}{\beta}$$

$$a_5 = \frac{1 + \frac{\alpha+1}{\beta}}{\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}} = \ldots = \alpha$$

$$a_6 = \beta$$

← to do wpisania (stąd mamy $\alpha \neq -1$)

Po obliczeniu pierwszych kilku wyrazów ciągu a_n otrzymujemy zapętlony ciąg:

$$\alpha, \beta, \frac{1+\beta}{\alpha}, \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}, \frac{\alpha+1}{\beta}, \alpha, \beta, \ldots$$

Wartości α, β, aby ciąg a_n był określony dla wszystkich n:

$\alpha \neq 0$, $\alpha \neq -1$,

$\beta \neq 0$, $\beta \neq -1$,

$\alpha + \beta \neq -1$

Zadanie 9.

(b) $g(0) = 0$, $g(n) = g\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) + \lfloor \log_2 n \rfloor$

Po obliczeniu kilku pierwszych wyrazów otrzymujemy: $g(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} k$

Dowód indukcyjny:

1° $n = 1$, $g(1) = g(0) + \lfloor \log_2 1 \rfloor = 0$

2° $\forall k < n \quad g(k)$

• n parzyste → $g(n) = g\left(\frac{n}{2}\right) + \lfloor \log_2 n \rfloor = \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 \frac{n}{2} \rfloor} k + \lfloor \log_2 n \rfloor =$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor - 1} k + \lfloor \log_2 n \rfloor = \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} k$$

• n nieparzyste → $g(n) = g\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) + \lfloor \log_2 n \rfloor = \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rfloor} k + \lfloor \log_2 n \rfloor =$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 \left(\frac{n-1}{2}\right) \rfloor} k + \lfloor \log_2 n \rfloor = \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 (n-1) \rfloor - 1} k + \lfloor \log_2 n \rfloor$$

Dla n niepamystych mamy $\lfloor \log_2(n-1) \rfloor = \lfloor \log_2 n \rfloor$, weźmy takie $k \in \mathbb{Z}$, że $\lfloor \log_2 n \rfloor = k$, wtedy:

$$k \leq \lfloor \log_2 n \rfloor < k+1$$

Stąd wnioskujemy, że dla n ~~jest~~ zachodzi:

- $n \neq 2^k$ dla n niepamystych
- $2^k \leq n-1$ dla $n-1$ pamystych

Więc $g(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} k$ ■

Zadanie 10. Podwójna wieża Hanoi

$G(n) \rightarrow$ liczba ruchów dla $2n$-krążków (minimalna), $G(0) = 0$.

$$G(n) \leq G(n-1) + 2 + G(n-1) =$$
$$= 2G(n-1) + 2 = \ldots \leq$$
$$\leq 2^{n+1} - 2$$

$G(n-1) + 2 + G(n-1) \leq G(n)$ $\leftarrow$ przełożenie 2 najniższych krążków

■

Zadanie 11. Na ile obszarów n okręgów dzieli płaszczyznę?

$a_n \rightarrow$ maksymalna liczba regionów po n krokach

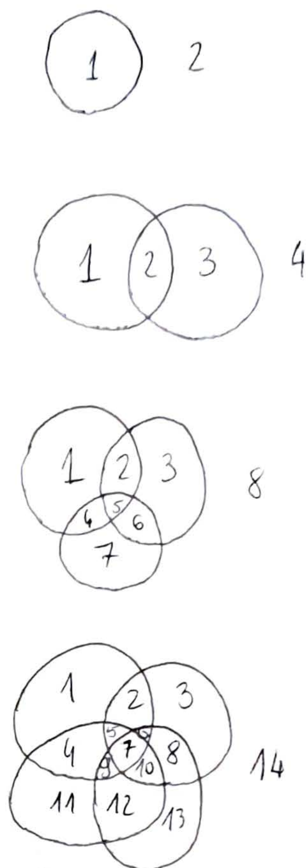
n	a_n	$a_{n+1} - a_n$
0	1	—
1	2	1 (pomijamy)
2	4	2
3	8	4
4	14	6
5	22	8

1° 2

2° 4

3° 8

4° 14



Z powyższej tabelki można udowodnić, że n okręgów dzieli płaszczyznę na a_n obszarów:

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$$

$$a_n = n(n-1) + 2 = n^2 - n + 2$$

niestety pomimo tego, że intuicja działa dobrze, nie jest to poprawne rozwiązanie :(

Jednak musimy przeanalizować powstawanie obszarów przez kolejne okręgi:

$$T(n) = T(n-1) + 2(n-1) = \dots$$
$$= n^2 - n + 2$$

Maksymalny ilość okręgów uzyskamy dla okręgów leżących na wspólnym ~~...~~ odcinku x, ~~...~~ które są od siebie oddalone o dx (mało), $x \in [0,1]$, $r = 1$. Wtedy środki są blisko siebie, czyli każde 2 okręgi przecinają się w 2 punktach.