Matematyka dyskretna L, Lista 2 - Tomasz Woszczyński

Zadanie 1

Dla $k \geqslant 1$ należy wykazać tożsamość absorpcyjną:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Wzór ten można też przekształcić do takiej postaci:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Po lewej stronie wybieramy drużynę o k zawodnikach spośród n zawodników, a następnie wybieramy kapitana. Po prawej stronie wybieramy kapitana z n zawodników, a następnie wybieramy $k-1$ zawodników z pozostałych $n-1$ zawodników.

Zadanie 4

Udowadniam indukcyjnie po n prawdziwość stwierdzenia

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Sprawdzę najpierw, czy zachodzi to dla $n = 1$ (baza indukcyjna):

$$\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} a^i b^{1-i} = \binom{1}{0} a^0 \cdot b^1 + \binom{1}{1} a^1 \cdot b^0 = a + b = (a+b)^1 \ \checkmark$$

Przechodzę więc do kroku indukcyjnego: jeżeli twierdzenie $(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ zachodzi dla n, to zachodzi też dla $n+1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n = \\
&= (a+b) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \\
&= a \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} + b \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \binom{n}{n} a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} = \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}
\end{aligned}$$

Zadanie 8

W tym zadaniu należy sprawdzić, czy poniżej podane relacje są prawdziwe. Przydatna będzie do tego definicja notacji dużego O:

$$f(x) \in O\left(g(x)\right) \iff \lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$$

- $n^2 \in O(n^3)$: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = 0$, więc relacja prawdziwa ✓
- $n^3 \in O(n^{2.99})$: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^{2.99}} = \lim_{n\to\infty} n^{0.01} = \infty$, więc relacja fałszywa
- $2^{n+1} \in O(2^n)$: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$, więc relacja prawdziwa ✓
- $(n+1)! \in O(n!)$: $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$, więc relacja fałszywa
- $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$:

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\ln 2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\ln 2\sqrt{n}} = \frac{2}{\ln 2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \left[\frac{2}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\infty}\right] = 0$$

  więc relacja prawdziwa ✓
- $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log_2 n} = \infty$ (symetria z poprzednim), więc fałszywa

Zadanie 9

Niech $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, należy pokazać:

- jeśli $f(n) = O(g(n))$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$:
  Mając $f(n) = O(g(n))$, wiemy że funkcja f jest rzędu n, a funkcja g jest tego samego rzędu lub wyższego. Niech rząd funkcji g będzie oznaczony jako m, wtedy $m \geqslant n$. Jeżeli $g(n) = O(h(n))$, to h jest wyższego rzędu niż g, a więc jednocześnie też jest wyższego rzędu niż f. Rząd h oznaczmy przez k, wtedy $k \geqslant m \geqslant n$. Stąd wnioskujemy, że $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{h(x)} < \infty$.

- $f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$:
  Z definicji dużego O wiemy, że funkcja f jest co najwyżej rzędu g, a więc $f(n) \leqslant c \cdot g(n)$. Z definicji Ω mamy, że g jest co najmniej rzędu f, czyli $g(n) \geqslant c \cdot f(n)$. Łącząc oba wnioski dochodzimy do konkluzji:

  $$f(n) \leqslant c_1 \cdot g(n) \iff g(n) \geqslant c_2 \cdot f(n)$$

- $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Theta(f(n))$:
  Definicja Θ mówi o tym, że funkcja f jest dokładnie rzędu funkcji g. Stąd wynika symetria, a więc funkcja g jest również rzędu funkcji f, co dowodzi twierdzenie.

Zadanie 10

Mamy dwa wielomiany f oraz g odpowiednio stopnia k i l, takie że $k < l$. Mamy pokazać, że $f(n) = o(g(n))$. Definicja notacji małego o jest następująca:

$$f(n) \in o(g(n)) \text{ jeśli } \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Wynik powstały z dzielenia $\frac{f(n)}{g(n)}$ będzie wynikiem z dzielenia wielomianu stopnia niższego przez wielomian stopnia wyższego, a granica takiego wyrażenia jest zawsze równa 0, co kończy dowód.