

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 14

22 stycznia 2020 r.

Zajęcia 4 lutego 2020 r.  
Zaliczenie listy **od 0 pkt.**

**L14.1.** 1 punkt Niech będzie

$$A := \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 217 \\ 254 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} := \begin{bmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} := \begin{bmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{bmatrix}.$$

Oblicz wektory reszt  $\tilde{r} := A\tilde{x} - b$ ,  $\hat{r} := A\hat{x} - b$  oraz wektory błędów  $\tilde{e} := \tilde{x} - x$ ,  $\hat{e} := \hat{x} - x$ , gdzie  $x$  jest rozwiązaniem układu  $Ax = b$ . Który z wektorów  $\tilde{x}$ ,  $\hat{x}$  jest lepszym przybliżeniem rozwiązania rozważanego układu równań liniowych? Jaki stąd wniosek?

**L14.2.** 1 punkt Znajdź rozkład  $LU$  macierzy

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & -3 & 7 \end{bmatrix},$$

a otrzymany wynik wykorzystaj do obliczenia wartości jej wyznacznika oraz macierzy  $A^{-1}$ .

**L14.3.** 1 punkt Stosując metodę faktoryzacji rozwiąż układ równań  $Ax = b$ , gdzie

$$A := \begin{bmatrix} -6 & 5 & -1 & 0 \\ -59 & 42 & -7 & -1 \\ 7 & -5 & 1 & 0 \\ 57 & -41 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} -14 \\ -132 \\ 16 \\ 128 \end{bmatrix}, \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

**L14.4.** 1 punkt Udowodnij następujące twierdzenia:

- (a) Iloczyn dwu macierzy trójkątnych dolnych (górnych) jest macierzą trójkątną dolną (górną).
- (b) Jeśli  $L$  jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, to  $L^{-1}$  również jest macierzą tego typu.

**L14.5.** 1 punkt Zaproponuj algorytm odwracania nieosobliwej macierzy trójkątnej górnej. Jaka jest jego złożoność?

**L14.6.** 1 punkt Niech dana będzie macierz  $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  postaci

$$A_n := \begin{bmatrix} a_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & b_1 \\ & a_2 & & & & b_2 \\ & & a_3 & & & b_3 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

gdzie zaznaczono jedynie niezerowe elementy. Załóżmy, że istnieje rozkład  $LU$  macierzy  $A_n$ . Opracuj oszczędny algorytm wyznaczania tego rozkładu. Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.

(-) *Paweł Woźny*