Analiza numeryczna, Wykład 6, 13/11/2019

Powtórka

Postaci wielomianu

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$ – postać naturalna – schemat Hornera

$$\sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x), \quad \begin{cases} p_0(x) \equiv 1 \\ p_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1}) \quad (k \geq 1) \end{cases}$$

postać Newtona, uogólniony schemat Hornera

$$\sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x) \quad \begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_k(x) = 2x T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \quad (k \geq 2) \end{cases}$$

postać Czebyszewa, algorytm Clenshawa

Dla Π_n metody te mają złożoność $O(n)$.

Zadanie interpolacji

$$\begin{cases} x_0, x_1, \ldots, x_n \text{ – węzły interpolacji (parami różne)} \\ f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n) \text{ – odpowiadające wartości funkcji} \end{cases}$$

$\to$ L_n – wielomian wyznaczony jednoznacznie:

- $L_n \in \Pi_n$
- $L_n(x_i) = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq n)$

Wzór Lagrange'a:

obserwacja w punkcie x_k

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) f(x_k), \quad \lambda_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Uwagi:

wprost ze wzoru Lagrange'a

1° Obliczenie wartości L_n dla danego x: $O(n^2)$

2° Jeśli dochodzi kolejna obserwacja $(x_{n+1}; f(x_{n+1}))$, to musimy wszystko obliczyć od nowa.

Uwagi 1° oraz 2° są motywacją do rozpatrzenia tzw. postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego.

Zadanie:

Dla danych parami różnych $x_0, x_1, \dots, x_n$ oraz wartości $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ znaleźć takie **współczynniki** $b_0, b_1, \dots, b_n$ dla wielomianu

$$\Pi_n \ni L_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + b_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

spełniał warunki interpolacji, tzn. $L_n(x_k) = f(x_k)$ $(k=0,1,\dots,n)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że:

$$\text{WARUNKI INTERPOLACJI}\begin{cases} L_n(x_0) = b_0 & = f(x_0) \\ L_n(x_1) = b_0 + b_1(x_1-x_0) & = f(x_1) \\ L_n(x_2) = b_0 + b_1(x_2-x_0) + b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) & = f(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ L_n(x_k) = b_0 + b_1(x_k-x_0) + \dots + b_k(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1}) & = f(x_k) \\ \vdots & \vdots \\ L_n(x_n) = b_0 + b_1(x_n-x_0) + \dots + b_n(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1}) & = f(x_n) \end{cases}$$

Stąd:

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1)-b_0}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$b_2 = \frac{f(x_2)-b_0-b_1(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{f(x_2)-f(x_0)-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$\vdots$$

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)} \quad (k=0,1,\dots,n)$$

Wartości $b_0, b_1, \dots, b_n$ możemy wyznaczyć w czasie $O(n^2)$, rozwiązując podany układ trójkątny („schodkowy”).

Tym samym udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Wielomian interpolacyjny dla danych $(x_k, f(x_k))$ dla danych $k=0,\dots,n$; $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, tzn. taki, że $L_n \in \Pi_n$ oraz $L_n(x_k) = f(x_k)$ $(0 \le k \le n)$ można zapisać w postaci Newtona

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, p_k(x),$$

gdzie $p_0(x) \equiv 1$, $p_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$ $(k \geq 1)$ oraz

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (x_i - x_j)}.$$

Uwagi:

1° Zakładając, że znamy już współczynniki $b_0, b_1, \dots, b_n$ (koszt: $O(n^2)$) wartość $L_n(x)$ dla danego x wyznaczamy w czasie $O(n)$ przy pomocy uogólnionego schematu Hornera.

2° Na przykład: wyznaczenie wartości $L_n(z_0), L_n(z_1), \dots, L_n(z_N)$ (chcemy narysować wykres L_n) kosztuje $O(\underbrace{n^2}_{b_0, b_1, \dots, b_n} + Nn)$ [to samo przy postaci Lagrange'a: $O(Nn^2)$].

3° Łatwo dodajemy kolejne obserwacje:

x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

x_0	x_1	$\dots$	x_n	x_{n+1}
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$

Nowa obserwacja, dodanie jej zajmuje $O(n)$.

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) + b_{n+1}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

Wiemy już, że współczynniki $b_0, b_1, \ldots, b_n$ postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego wyrażają się jakimś wzorem:

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} (x_i - x_j)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Zaleca się obliczanie wartości $b_0, b_1, \ldots, b_n$ w pewien sposób rekurencyjny. W tym celu wprowadzamy tzw. ilorazy różnicowe.

Definicja - ilorazy różnicowe:

Dla danych parami różnych $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l$ oraz funkcji f określonej w tych punktach wprowadzamy iloraz różnicowy $f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l]$ w następujący sposób rekurencyjny:

$$(*) \quad \begin{cases} f[x_k] := f(x_k) \\ f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{l-1}, x_l] := \dfrac{f[x_{k+1}, \ldots, x_{l-1}, x_l] - f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{l-1}]}{x_l - x_k} \end{cases}$$

Przykład:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad = b_1$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \qquad = b_2$$

itd...

Można udowodnić (np. indukcyjnie) następujące twierdzenie:

Twierdzenie (postać Newtona wielomianu interpolacyjnego + ilorazy różnicowe)

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f[x_0, x_1, \ldots, x_k]}_{b_k \,\equiv\, \text{ilorazy różnicowe}} p_k(x) \implies \begin{cases} L_n \in \Pi_n \\ L_n(x_k) = f(x_k) \quad (0 \le k \le n) \end{cases}$$

Zauważmy, że w postaci Newtona potrzebne są ilorazy różnicowe

$$f[x_0],\ f[\cancel{x_0},x_1],\ f[x_0,x_1,x_2],\ \dots,\ f[x_0,x_1,\dots,x_n]$$

Jak znaleźć rekurencję (*)?

$O(n^2)$ operacji $(-,/)$, aby obliczyć wszystkie ilorazy różnicowe na przekątnej.

$$
\begin{array}{llllll}
 & & \swarrow b_0 & & & \\
x_0 & f(x_0) \equiv f[x_0] & \swarrow b_1 & & & \\
x_1 & f(x_1) \to & f[x_0,x_1] & \swarrow b_2 & & \\
x_2 & f(x_2) \to & f[x_1,x_2] \to & f[x_0,x_1,x_2] & \swarrow b_3 & \\
x_3 & f(x_3) \to & f[x_2,x_3] \to & f[x_1,x_2,x_3] \to & f[x_0,x_1,x_2,x_3] & \swarrow b_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
x_n & f(x_n) \to & f[x_{n-1},x_n] \to & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] \to & f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n] \to \dots & f[x_0,x_1,\dots,x_n]
\end{array}
$$

Zadanie:

1° Opracuj algorytm obliczania $f[x_0], f[x_0,x_1],\dots, f[x_0,x_1,\dots,x_n]$ w czasie $O(n^2)$ z pamięcią $O(n)$.

2° Jak dodać kolejną obserwację w czasie $O(n)$ pamiętając jedynie przekątną tablicy ilorazów różnicowych (bez ostatniego wiersza)?

Wpływ rozkładu węzłów interpolacji na jej błąd:

Twierdzenie:

Niech $L_n \in \Pi_n$ spełnia warunki interpolacji $L_n(x_k) = f(x_k)$ ($k=0,1,\dots,n$; $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$). Wtedy

WZÓR NA BŁĄD INTERPOLACJI

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

gdzie $\eta_x \in (a,b) \ni \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ oraz $f \in C^{n+1}[a,b]$.

Wniosek:

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)-L_n(x)| \le \max_{x\in[a,b]} \underbrace{|f^{(n+1)}(x)|}_{\text{na to nie mamy wpływu}} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \max_{a\le x\le b} \underbrace{|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|}_{\text{na to mamy już wpływ}}$$

na to mamy już wpływ, warto tak dobrać $x_0, x_1, \dots, x_n$ (węzły), aby zminimalizować

$$\max_{a\le x\le b} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

Problem:

$$\min_{\substack{x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b] \\ (x_i \neq x_j,\ i\neq j)}} \left(\max_{a\le x\le b} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \right) =: M_{n,a,b}$$

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności można założyć, że $a=-1$, $b=1$.

Można pokazać, że:

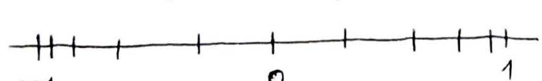
1) $M_{n,-1,1} = \dfrac{1}{2^n}$

2) węzły $x_0, x_1, \dots, x_n$ to miejsca zerowe $(n+1)$-szego wielomianu Czebyszewa, tzn.:

$$T_{n+1}(x_k) = 0,$$

WĘZŁY „CZEBYSZEWA" DLA $[-1,1]$ $\longrightarrow$ $x_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n+2}\pi\right)^{*}$ $(k = 0, 1, \dots, n)$

Im bliżej krańców przedziału, tym więcej miejsc zerowych, np.:

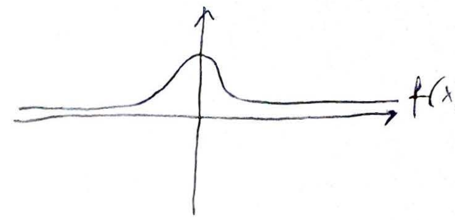


Uwaga:*

$$\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}_{\in \Pi_{n+1}} = \frac{1}{2^n} \underbrace{T_{n+1}(x)}_{\in \Pi_{n+1}}$$

Przykłady:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{25x^2+1}$ (funkcja Rungego)

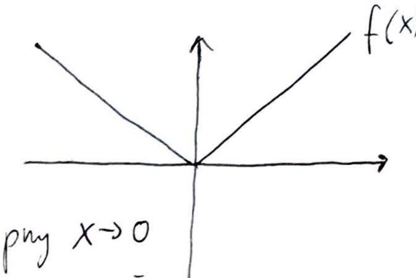


L_n - wielomiany interpolacyjne dla f:

(1) węzły równoodległe $[-1,1]$ - problemy na końcach przedziału

(2) węzły „Czebyszewa" - funkcja oplata f

(b) $f(x) = |x|$



L_n - wielomiany interpolacyjne dla f:

(1) węzły równoodległe $[-1,1]$ - jak wyżej

(2) węzły „Czebyszewa" - problem jedynie przy $x \to 0$
(jako że jest to funkcja ciągła, bo nie będzie tego szpica)