Matematyka dyskretna L, Lista 5 - Tomasz Woszczyński

Zadanie 1

Ile jest podzbiorów zbioru n kolejnych liczb naturalnych, w których nie występują dwie kolejne liczby?

Niech $A = \{x, x+1, \ldots, x+(n-1)\}$, wtedy $|A| = n$. Rozpatrzmy podzbiory zbioru A jako n-słowa (tzn. słowa binarne długości n) z alfabetu $\Sigma = \{0, 1\}$.
Przez a_n oznaczmy liczbę dobrych podzbiorów, a więc takich, w których nie występują dwie kolejne liczby. Wtedy słowo może się rozpoczynać od "0" a pozostałe litery można do niego dodać na a_{n-1} sposobów, lub zaczyna się od "10" i pozostałe litery dodajemy na a_{n-2} sposobów. Stąd mamy, że

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

a jego pierwszymi wyrazami są $a_1 = 2$ ("0", "1"), $a_2 = 3$ ("00", "10", "01").
Można zauważyć więc, że ten ciąg będzie tworzył kolejne liczby Fibonacciego, a więc liczba szukanych podzbiorów to $a_n = F_{n+2}$.

Zadanie 2

Mamy policzyć ile jest liczb od 1 do 800, które są podzielne przez 6 lub 8, ale nie są podzielne przez 7.

Dla liczby $n \in \mathbb{N}_+$ jest $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ liczb podzielnych przez a. Oznaczmy sobie zbiory liczb podzielnych przez 6 jako A, przez 8 jako B, a przez 7 jako C.
Wiedząc, że $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, interesować nas będzie wynik działania:

$$\underbrace{|(A \cup B)|}_{\substack{\text{podzielne przez} \\ \text{6 lub 8}}} - \underbrace{|\underbrace{(A \cap C)}_{\substack{\text{podzielne przez} \\ \text{6 i 7}}} \cup \underbrace{(B \cap C)}_{\substack{\text{podzielne przez} \\ \text{8 i 7}}}|}_{\text{podzielne przez 6, 7, 8}}$$

Rozpiszmy więc kolejne składniki działania:

$$|(A \cup B)| = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\operatorname{lcm}(6,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor \overset{(n=800)}{=} 200$$

$$|(A \cap C)| = \left\lfloor \frac{n}{\operatorname{lcm}(6,7)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{42} \right\rfloor \overset{(n=800)}{=} 19$$

$$|(B \cap C)| = \left\lfloor \frac{n}{\operatorname{lcm}(8,7)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{56} \right\rfloor \overset{(n=800)}{=} 14$$

$$|(A \cap C) \cup (B \cap C)| = \left\lfloor \frac{n}{\operatorname{lcm}(6,7)} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{\operatorname{lcm}(8,7)} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\operatorname{lcm}(6,7,8)} \right\rfloor =$$

$$= \left\lfloor \frac{n}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{56} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{168} \right\rfloor \overset{(n=800)}{=} 19 + 14 - 4 = 29$$

Ostatecznym wynikiem jest więc $|(A \cup B)| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = 200 - 29 = 171$.

Zadanie 4

Nieporządek to taka permutacja elementów, że żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Należy wyprowadzić wzór na liczbę nieporządków d_n utworzonych z n elementów korzystając z zasady włączeń i wyłączeń.

Niech permutacja ma właściwość P_i jeśli i-ty element znajduje się na i-tym miejscu. Szukać będziemy permutacji takich, dla których ta właściwość **nie jest** spełniona dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Niech $N = n!$ (liczba wszystkich permutacji). Mamy wtedy:

$$
\begin{aligned}
d_n = N(\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \cdots \cup \overline{P_n}) = \left| \bigcup_{i=1}^{n} N(\overline{P_i}) \right| = \\
= N - \sum_i N(P_i) + \sum_{i<j} N(P_i \cap P_j) - \sum_{i<j<k} N(P_i \cap P_j \cap P_k) + \\
+ \cdots + (-1)^n \cdot N(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n)
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że $N(P_i) = (n-1)!$, ponieważ i-ty element ma odgórnie wybraną pozycję a pozostałe $n-1$ elementów są wybierane w dowolny sposób. Podobnie, dla $N(P_i \cap P_j)$ dwa elementy są na swoich miejscach, a wybierane są miejsca dla pozostałych $n-2$ elementów. W ogólności dla m elementów mamy więc

$$
N(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \cdots \cap P_{i_m}) = (n-m)!
$$

Ponadto możemy wybrać m elementów z n-elementowego zbioru na $\binom{n}{m}$ sposobów. Rozpiszmy więc sumy z powyższego równania na d_n:

$$
\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} N(P_i) &= \binom{n}{1} \cdot (n-1)! \\
\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} N(P_i \cap P_j) &= \binom{n}{2} \cdot (n-2)! \\
&\vdots \\
\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} N(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \cdots \cap P_{i_m}) &= \binom{n}{m} \cdot (n-m)!
\end{aligned}
$$

Możemy więc podstawić obliczone sumy do wzoru na d_n, a następnie uprościć całość, aby otrzymać oczekiwany wzór na liczbę nieporządków n-elementowych:

$$
\begin{aligned}
d_n &= n! - \binom{n}{1} \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! - \cdots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot (n-n)! = \\
&= n! - \frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot (n-1)! + \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot (n-2)! - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!0!} \cdot (n-n)! = \\
&= n! \cdot \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right] \\
&= n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}
\end{aligned}
$$

Otrzymaliśmy więc wzór na liczbę nieporządków n-elementowych:

$$
d_n = n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}
$$

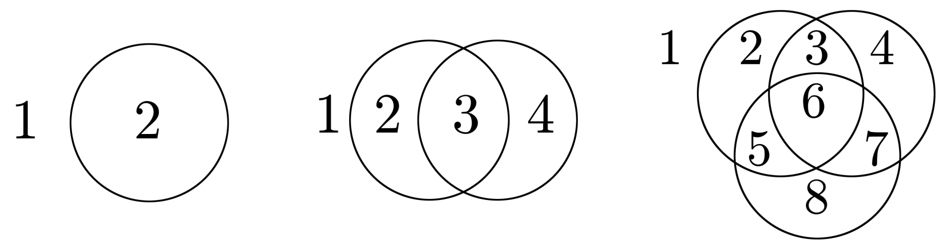
Zadanie 7

Na płaszczyźnie jest n okręgów, na ile maksymalnie obszarów mogą one podzielić tą płaszczyznę? Rozwiązanie należy wyprowadzić za pomocą zależności rekurencyjnej.

Aby podzielić płaszczyznę na najwięcej obszarów przy użyciu n okręgów muszą zostać spełnione dwa warunki:

1. żaden z dwóch dowolnych okręgów nie leży wewnątrz innego,
2. żadne trzy okręgi nie przecinają się w jednym miejscu.

Przez r_n oznaczmy maksymalną liczbę obszarów, które możemy uzyskać za pomocą n okręgów. Ilustrując pierwsze przypadki, możemy zobaczyć ile obszarów uzyskamy dla bardzo małych n:



Rysunki przedstawiające podział płaszczyzny na obszary dla $n = 1, 2, 3$

Na podstawie rysunków możemy stwierdzić, że $r_1 = 2, r_2 = 4, r_3 = 8$ – dzięki temu będziemy mieli warunek początkowy oraz będziemy mogli sprawdzić czy otrzymana zależność rekurencyjna jest prawdziwa.

Załóżmy, że mamy narysowane już $n - 1$ okręgów w najlepszym położeniu (tzn. tworzą najwięcej obszarów) i dodajemy do nich n-ty okrąg – będzie się on przecinał z każdym z tych okręgów w 2 miejscach. Każdy z $2(n - 1) = 2n - 2$ punktów dzieli n-ty okrąg na $2n-2$ łuków. Każdy z tych łuków dzieli każdy z wcześniej istniejących regionów r_{n-1} na dwa nowe. Otrzymujemy więc zależność rekurencyjną:

$$r_n = \begin{cases} 2 & \text{dla } n = 1 \\ r_{n-1} + 2(n-1) & \text{dla } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Możemy to wyrażenie jeszcze uprościć, znajdując wzór jawny dla r_n:

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-1} + 2(n-1) = \\ &= r_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) = \\ &= r_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) = \\ &= \ldots = \\ &= r_1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i) = r_1 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \\ &= 2 + 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{(n-1) \cdot n}{2} \right)}_{1+2+\ldots+(n-1)} = n^2 - n + 2 \text{ dla } n \geqslant 0 \end{aligned}$$

Zadanie 8
Na ile maksymalnie obszarów można podzielić trójwymiarową przestrzeń $\mathbb{R}^3$ za pomocą n płaszczyzn? Należy wyprowadzić zależność rekurencyjną.

Rozpatrzmy najpierw na ile obszarów można podzielić płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ używając do tego n linii. Niech p_n oznacza maksymalną liczbę obszarów uzyskanych n cięciami, wtedy $p_0 = 1$ (brak cięć), $p_1 = 2$ (jedno cięcie), $p_2 = 4$, itd.

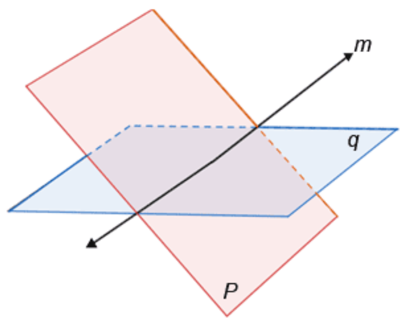
Załóżmy, że mamy narysowane $n-1$ linii (nierównoległych, przecinających się w największej ilości punktów). Rysując n-tą linię powstanie $n-1$ nowych punktów przecięcia, które dzielą linię n-tą na n części. Oznacza to, że do p_{n-1} regionów dodane zostanie n nowych regionów. Opisuje to zależność rekurencyjna:

$$p_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ p_{n-1} + n & \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Wzór jawny zależności rekurencyjnej p_n:

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} + n = \\ &= p_{n-2} + n + (n-1) = \\ &= p_{n-3} + n + (n-1) + (n-2) = \\ &= \ldots = \\ &= p_0 + n + (n-1) + \ldots + 1 = \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \text{dla } n \geqslant 0 \end{aligned}$$

Teraz możemy przejść do $\mathbb{R}^3$ i uogólnić rozważania nad przecinaniem płaszczyzny do przecinania przestrzeni. W tym przypadku warto zauważyć, że dwie przecinające się płaszczyzny mogą się przeciąć jedynie na jednej linii.



Płaszczyzny p oraz q przecinają się tylko w jednej linii m

Niech q_n oznacza maksymalną liczbę obszarów stworzonych przez n przecinających się płaszczyzn. Jasne jest, że $q_0 = 1$, jako że nie wykonujemy żadnego cięcia i przestrzeń jest nienaruszona, a kolejne wyrazy to $q_1 = 2$, $q_2 = 4$, $q_3 = 8$, itd.

Podobnie jak w przypadku cięć liniami, n-ta płaszczyzna przetnie $n-1$ płaszczyzn w maksymalnie $n-1$ liniach, a więc utworzy $n-1$ nowych linii (tworzących p_{n-1} obszarów). Oznacza to, że do q_{n-1} obszarów zostanie dodanych p_{n-1} obszarów stworzonych przez linie. Wyraża to zależność rekurencyjna:

$$q_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ q_{n-1} + p_{n-1} = q_{n-1} + 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} & \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Można jeszcze wyprowadzić wzór jawny:

$$\begin{aligned}
q_n &= q_{n-1} + p_{n-1} = q_{n-1} + \underbrace{1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2}}_{p_{n-1}} = \\
&= q_{n-2} + \underbrace{1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2}}_{p_{n-1}} + \underbrace{1 + \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}}_{p_{n-2}} = \\
&= \ldots = \\
&= q_0 + \sum_{i=0}^{n-1} 1 + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\frac{i \cdot (i+1)}{2}}_{i\text{-ta liczba trójkątna}}}_{n-1\text{-ta liczba czworościenna}} \\
&= 1 + n + \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6} = \\
&= 1 + n + \frac{n^3 - n}{6} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6} \text{ dla } n \geqslant 0
\end{aligned}$$

Wyjaśnienie: i-ta *liczba trójkątna* to suma liczb od 1 do i $\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)$, a j-ta *liczba czworościenna* to suma liczb trójkątnych od 1 do j, wyraża się ją wzorem $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$.

Zadanie 10

Na ile sposobów można wejść po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?

Na pierwszy schodek można wejść tylko na 1 sposób, na drugi na 2 (dwa małe kroki lub jeden duży). Wejść na n-ty stopień można albo ze schodka $n-1$ albo z $n-2$ (dystans odpowiednio jednego lub dwóch schodków). Oznacza to, że liczba możliwości wejścia na n-ty schodek wyraża się zależnością rekurencyjną:

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1 \\ 2 & \text{dla } n = 2 \\ x_{n-1} + x_{n-2} & \text{dla } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Można zauważyć, że są to kolejne liczby Fibonacciego, a dokładniej $x_n = F_{n+1}$, więc na n-ty schodek można wejść na F_{n+1} sposobów.