Matematyka dyskretna, Lista 8, 06/12/2019

Zadanie 1. Oblicz sumę $\sum_{k=0}^{\infty}{}' 2^{-k}$ biorąc po wszystkich $k \in \mathbb{N}$, takich że 2, 3, 5, 7 nie dzielą k.

Z zasady włączeń i wyłączeń (podobnie do zadania 6.1):

$$S = \sum{}' 2^{-k}$$
$$- \sum{}' 2^{-k\cdot 2} - \sum{}' 2^{-k\cdot 3} - \sum{}' 2^{-k\cdot 5} - \sum{}' 2^{-k\cdot 7}$$
$$+ \sum{}' 2^{-k\cdot 2\cdot 3} + \sum{}' 2^{-k\cdot 2\cdot 5} + \sum{}' 2^{-k\cdot 2\cdot 7} + \sum{}' 2^{-k\cdot 3\cdot 5} + \sum{}' 2^{-k\cdot 3\cdot 7} + \sum{}' 2^{-k\cdot 5\cdot 7}$$
$$- \sum{}' 2^{-k\cdot 2\cdot 3\cdot 5} - \sum{}' 2^{-k\cdot 2\cdot 3\cdot 7} - \sum{}' 2^{-k\cdot 2\cdot 5\cdot 7} - \sum{}' 2^{-k\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$
$$+ \sum{}' 2^{-k\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$

Wiemy, że $\sum{}' 2^{-k\cdot n} = \sum{}' (2^{-n})^k = \dfrac{1}{1-2^{-n}} = \dfrac{2^n}{2^n-1}$ (z funkcji tworzącej dla $a_n \equiv 1$)

Podstawiamy do S kolejne wyrazy z powyższego wzoru, dzięki czemu mamy:

$$S = 2 - \frac{4}{3} - \frac{8}{7} - \frac{32}{31} - \frac{128}{127} + \frac{64}{63} + \frac{1024}{1023} + \frac{16384}{16383} + \ldots - \ldots + \frac{2^{210}}{2^{210}-1}$$

$n = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 2\cdot 3 \quad 2\cdot 5 \quad 2\cdot 7 \quad \ldots \quad 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$

Zadanie 4. Korzystając z wzoru Taylora pokaż, że dla $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\underline{n}}}{n!} x^n$.

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$, weźmy $f(x) = x^a$ i wypiszmy dla $x = 1$:

$$(x+1)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \cdot (x+1-1)^n,$$

$$f'(x) = a x^{a-1}$$
$$f''(x) = a\cdot(a-1)\cdot x^{a-2}$$
$$f'''(x) = a\cdot(a-1)(a-2)\, x^{a-3}$$
$$f^{(n)}(x) = a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)\, x^{a-n}$$

Znając wzór na n-tą pochodną mamy $f^{(n)}(1) = a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1) = a^{\underline{n}}$, czyli

$$(x+1)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\underline{n}}}{n!} \cdot x^n \quad \blacksquare$$

Zadanie 5. Wylicz funkcje tworzące (dla wygody inne oznaczenia w przykładach)

(a) $a_0 = a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n + 1$

$$A(x) = 1 + x + x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+3} x^{n+3} = 1 + x + x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+2} + a_{n+1} + a_n + 1) x^{n+3} =$$

$$= 1 + x + x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+3} =$$

$$= A(x) + x^3 A(x) + x^2 (A(x) - a_0) + x (A(x) - a_0 - a_1 x) =$$

$$= \left(\frac{1}{1-x} - a_0 x^2 - a_0 x - a_1 x^2\right) + A(x)(x + x^2 + x^3) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{1-x} - x - 2x^2\right)}_{\alpha} + A(x) \underbrace{(x + x^2 + x^3)}_{\beta}$$

$$A(x) = \alpha + \beta A(x) \Rightarrow A(x) = \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{\frac{1}{1-x} - x - 2x^2}{1 - x - x^2 - x^3}$$

(b) $b_0 = 0, \; b_1 = 1, \quad b_{n+2} = b_{n+1} + b_n + \frac{1}{n+1}$

$$B(x) = 0 + x + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+2} x^{n+2} = x + \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_{n+1} + b_n + \frac{1}{n+1}\right) x^{n+2} =$$

$$= x + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+2} =$$

$$= x + x(B(x) - \overset{0}{\overset{\parallel}{b_0}}) + x^2 B(x) + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} =$$

$$= x + x B(x) + x^2 B(x) + x \underbrace{\int_0^x \frac{1}{1-t} \, dt}_{\text{z wykładu 7.}} = x + x B(x) + x^2 B(x) + x(-\ln(1-x))$$

$$B(x) = x + x B(x) + x^2 B(x) + x(-\ln(1-x)) = \frac{x \ln(1-x) - x}{x^2 + x - 1}$$

(c) $c_0 = 1, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_{n-k}}{k!}$

$$C(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^{n+1} = 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{c_{n-k}}{k!} \right) x^n = 1 + x \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) =$$

$$= 1 + x \cdot C(x) \cdot e^x$$

$$C(x) = \frac{1}{1 - xe^x}$$

Zadanie 12. Niech p_n i r_n będą odpowiednio liczbami wszystkich podziałów n i podziałów n na różne składniki. Niech $P(x)$ i $R(x)$ będą ich funkcjami tworzącymi. Pokaż, że $P(x) = R(x) \cdot P(x^2)$.

$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \sum_{i_1, i_2, i_3, \ldots} x^{i_1 + 2i_2 + 3i_3 + 4i_4 + \ldots} =$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + \ldots)(1 + x^4 + x^8 + \ldots) \ldots =$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^4} \cdot \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

$$R(x) = \sum_{i_1, i_2, i_3, \ldots \in \{0,1\}} x^{i_1 + 2i_2 + 3i_3 + 4i_4 + \ldots} = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k)$$

$$R(x) \cdot P(x^2) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - x^{2i}} \right) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^i) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + x^i}{1 - x^{2i}} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + x^i}{(1 + x^i)(1 - x^i)} =$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^i} = P(x) \; \blacksquare$$

Zadanie 15. Pokaż, że wykładnicza funkcja tworząca $G_e(z)$ dowolnego ciągu jest powiązana ze zwykłą funkcją tworzącą $G(z)$ za pomocą równania $\int_0^\infty G_e(zt)e^{-t}dt = G(z)$ jeśli tylko całka ta istnieje.

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad G_e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} z^n, \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Rozwiązując to zadanie korzystamy z funkcji gamma $\Gamma(z)$ oraz własności $\Gamma(n+1) = n!$, co udowodnię poniżej indukcyjnie (działa dla $n \in \mathbb{N}$):

- baza: $\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = e^{-t}\Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1 = 0!$
- krok: załóżmy, że $\Gamma(n+1) = n!$ dla $\forall n_0 < n \in \mathbb{N}$, udowodnimy dla n:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^{n+1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \overset{(*)}{=} -t^n e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} n t^{n-1} dt =$$

$$= \frac{-t^n}{e^t}\Big|_0^\infty + n\int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = 0 + n\Gamma(n) = n\Gamma(n) = n!$$

Przechodząc do głównej części zadania z powyższą wiedzą mamy:

$$\int_0^\infty G_e(zt)\cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n!}(zt)^n\right)e^{-t} dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t}\frac{a_n}{n!}\cdot z^n \cdot t^n dt =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}(e^{-t}\cdot t^n) z^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!} z_n \cdot \int_0^\infty e^{-t}\cdot t^n dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}\cdot \Gamma(n+1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^n}{n!}\cdot n! = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \blacksquare$$

(*) całkowanie przez części

Zadanie 2. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n, wylicz funkcje tworzące ciągów a_{2n} i a_{3n}.

$B(x)$ - OGF ciągu a_{2n}

$C(x)$ - OGF ciągu a_{3n}

$$\frac{1}{2}\left(A(\alpha\sqrt{x}) + A(\beta\sqrt{x})\right) \qquad \begin{cases} \alpha^{2k} + \beta^{2k} = 2 \\ \alpha^{2k+1} + \beta^{2k+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

dla $n = 2k$:

$$\frac{1}{2}\left(a_{2k} \cdot (1\sqrt{x})^{2k} + a_{2k} \cdot (-1\sqrt{x})^{2k}\right) = a_{2k} x^k$$

dla $n = 2k+1$

$$\frac{1}{2}\left(a_{2k+1} (\sqrt{x})^{2k+1} + a_{2k+1} (-1)(\sqrt{x})^{2k+1}\right) = 0$$

$$C(x) = \frac{A(\alpha\sqrt[3]{x}) + A(\beta\sqrt[3]{x}) + A(\gamma\sqrt[3]{x})}{3}$$

$$z^3 = 1 \Rightarrow z = 1 \lor z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = (-1 + \sqrt{3}i)\cdot\frac{1}{2},$$
$$\gamma = (-1 - \sqrt{3}i)\cdot\frac{1}{2}$$

dla $n = 3k$

$$a_{3k}\left(1\cdot\sqrt[3]{x}\right)^{3k} + a_{3k}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{x}\right)^{3k} + a_{3k}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{x}\right)^{3k}$$

Zadanie 6. Nieporządki i $d_{n+1} = nd_n + nd_{n-1}$, $d_0 = 1$, $d_1 = 0$.

$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$ – indukcyjnie po n

- baza: $n=1$ $\quad d_1 = 1d_0 + (-1)^1 = 1 \cdot 1 + (-1) = 0$
- krok: załóżmy, że działa $\forall n_0 < n$, udowodnimy dla n:

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}) = (n-1)\left((n-1)d_{n-2} + (-1)^{n-1} + d_{n-2}\right) =$$
$$= (n-1)(nd_{n-2} + (-1)^{n-1}) = n^2 d_{n-2} + n(-1)^{n-1} - nd_{n-2} - (-1)^{n-1} =$$
$$= n(nd_{n-2} + (-1)^{n-1} - d_{n-2}) + (-1)^n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

Zadanie 3. Oblicz $a_n = \sum_{i=1}^{n} F_i F_{n-i}$

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} F_i F_{n-i} = \sum_{i=1}^{n-2} F_i (F_{n-1-i} + F_{n-2-i}) + F_{n-1} \cdot \overset{\overset{1}{\uparrow}}{F_1} + F_n \cdot \overset{\overset{0}{\uparrow}}{F_0} =$$
$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n-2} F_i F_{n-1-i}}_{a_{n-1} - F_{n-1} \cdot F_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-2} F_i F_{n-2-i}}_{a_{n-2}} + F_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2} + F_{n-1}$$

$$(E^2 - E - 1)\langle a_{n-2} \rangle = \langle F_{n-1} \rangle$$

$$\left(E - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(E - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \langle a_n \rangle = \langle 0 \rangle$$

Zadanie 7. EGF dla $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$, $d_0 = 1$, $d_1 = 0$.

$$D'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d_n x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n d_n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n+2} x^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) d_{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) d_n x^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) d_{n+1} x^n}{(n+1)!} + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n x^n}{n!} = x D'(x) + x D(x)$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{D'(x)}{D(x)} = (\ln D(x))' \qquad \ln D(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t}\, dt = -\ln|x-1| - x$$

$$D(x) = e^{-\ln|x-1| - x} = \frac{e^{-x}}{|x-1|}$$

Zadanie 8. $a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1})$, $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$

n	0	1	2 ...
$n!$	1	1	
d_n	1	0	
a_n	α	β	

$\Rightarrow \quad a_n = \beta \cdot n! + (\alpha - \beta) \cdot d_n$

Załóżmy, że $\forall k < n$ zachodzi $a_k = \beta \cdot k! + (\alpha - \beta) d_k$, pokażemy dla n:

$$a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1}) = n\left[\beta \cdot n! + (\alpha-\beta) d_n + \beta (n-1)! + (\alpha - \beta) d_{n-1}\right] =$$

$$= \beta \cdot \underbrace{n(n! + (n-1)!)}_{(n+1)!} + (\alpha - \beta) \underbrace{n(d_n - d_{n-1})}_{d_{n+1}} = \beta (n+1)! + (\alpha - \beta) d_{n+1} \quad \blacksquare$$

Zadanie 11. OGF dla liczby podziałów n: $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$

(a) składniki parzyste: $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2i}}$

(b) składniki mniejsze od m: $\prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{1-x^i}$

(c) różne składniki nieparzyste: $\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^{2i+1})$

(d) różne potęgi dwójki: $\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^{2^i})$

Wystarczyło się powołać na wiedzę z wykładu, odpowiednio przekształcić wzór na górze i koniec.

Zadanie 13. Permutację nazywamy inwolucją... a_n - liczba inwolucji n-elementowych. Pokaż, że EGF ciągu a_n to $e^{\frac{x+x^2}{2}}$.

Inwolucje to **permutacje**, które mają cykle jedno lub dwuelementowe.
Ze wskazówki mamy $a_{n+1} = a_n + n a_{n-1}$, $a_1 = a_0 = 1$

$$a_2 = a_1 + a_0 \quad / \cdot \frac{x^1}{1!} \qquad\qquad a_2 \cdot \frac{x^1}{1!} = a_1 \frac{x^1}{1!} + a_0 \frac{x^1}{1!}$$

$$a_3 = a_2 + 2a_1 \quad / \cdot \frac{x^2}{2!} \qquad \Rightarrow \qquad a_3 \cdot \frac{x^2}{2!} = a_2 \frac{x^2}{2!} + 2a_1 \frac{x^2}{2!}$$

$$a_4 = a_3 + 3a_2 \quad / \cdot \frac{x^3}{3!} \qquad\qquad a_4 \cdot \frac{x^3}{3!} = a_3 \frac{x^3}{3!} + 3a_2 \frac{x^3}{3!}$$

$$\vdots$$

Sumujemy: $$\sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \frac{x^i}{i!} + \sum_{i=1}^{\infty} i \, a_{i-1} \frac{x^i}{i!}$$

$$G'(x) - a_1 = G(x) - a_0 + x \sum_{i=1}^{\infty} a_{i-1} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!},$$

$$G(x) = a_0 + a_1 \frac{x^1}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} = a_1 + a_2 \frac{x^1}{1!} + a_3 \frac{x^2}{2!} = a_2 \frac{x}{1!} + a_3 \frac{x^2}{2!}$$

$$G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}, \quad G'(x) = G(x) + x\,G(x) \Rightarrow \frac{G'(x)}{G(x)} = 1 + x$$

$$\int_0^x \frac{G'(t)}{G(t)} dt = \int_0^x (1+t)\, dt \Rightarrow \ln(G(t)) \Big|_0^x = t + \frac{t^2}{2} \Big|_0^x$$

$$\ln(G(x)) - \ln(G(0)) = x + \frac{x^2}{2}$$

$$\ln(G(x)) = x + \frac{x^2}{2} \implies G(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}} \quad \blacksquare$$

Zadanie 14. Liczby Stirlinga I rodzaju:

$$\left[{n \atop k}\right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right]$$

Mamy udowodnić $x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{n \atop k}\right] x^k$, zrobimy to indukcyjnie po n:

- baza: $n=1$ $\quad x^1 = x \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left[{1 \atop k}\right] x^k = \left[{1 \atop 1}\right] x^1 = x$
- krok: załóżmy że zachodzi dla $\forall n_0 < n$, pokażemy dla n:

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1) = x^{\overline{n-1}} \cdot (x+n-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{n-1 \atop k}\right] x^k \cdot (x+n-1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[{n-1 \atop k}\right] x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[{n-1 \atop k}\right] x^k \cdot (n-1) =$$

$$= \left[{n-1 \atop 0}\right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[{n-1 \atop k-1}\right] x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left[{n-1 \atop k}\right] x^k (n-1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x^k \left(\left[{n-1 \atop k-1}\right] + \left[{n-1 \atop k}\right](n-1) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k \left[{n \atop k}\right] + \left[{n \atop 0}\right] x^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{n \atop k}\right] x^k \quad \blacksquare$$