Kwadratury (całkowanie)

f - funkcja podcałkowa, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$[a,b]$ - przedział

F - funkcja pierwotna

$$\int_a^b f(x)\,dx = ? = F(b) - F(a)$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

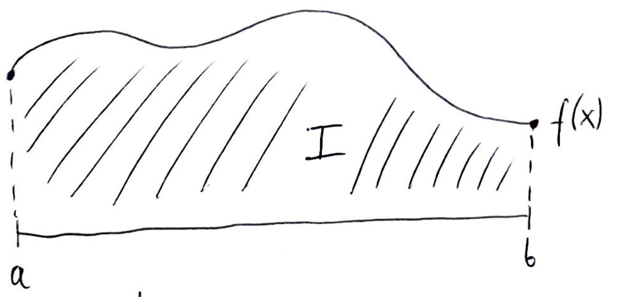
$$\int \left(\cos x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx \text{ - całka nieoznaczona}$$

$$= C + \underbrace{\sin x + \arctan x}_{F(x)}$$

Metody obliczania całek:

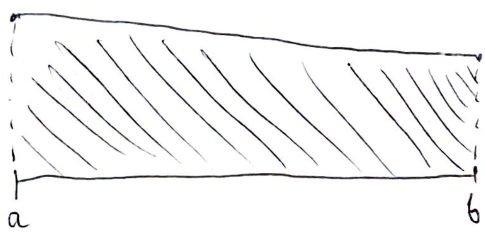
- podstawianie
- przez części

Problem: Obliczenie $I = \int_a^b f(x)\,dx$ dla danych $f \in C[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$.



$\to$

Interpolacja funkcją liniową



$$I \quad \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) \quad \leftarrow \text{wzór trapezów}$$

Kwadratura liniowa

$$Q_n(f+g) = Q_n(f) + Q_n(g)$$
$$Q_n(\alpha f) = \alpha Q_n(f)$$

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \approx I(f)$$

We wzorze trapezów: $x_0 = a,\ x_1 = b,\ A_0 = A_1 = \frac{b-a}{2}$.

$x_0, x_1, \dots, x_n$ - węzły kwadratury

$A_0, A_1, \dots, A_n$ - współczynniki kwadratury

Błąd / reszta kwadratury Q_n

$$R_n(f) := I(f) - Q_n(f)$$

1° $$\int_3^5 \underbrace{e^x}_{\approx} dx \qquad \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_1 = 5 \\ A_0 = -1 \\ A_1 = 1 \end{cases}$$

$$f(3) + f(5) = e^3 + e^5$$

2° $$\int_3^5 \underbrace{7x+5}_{=} dx \qquad \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_1 = 5 \\ A_0 = 1 \\ A_1 = 1 \end{cases}$$

$$7 \cdot 5 + 5 + 7 \cdot 3 + 5 = \dots$$

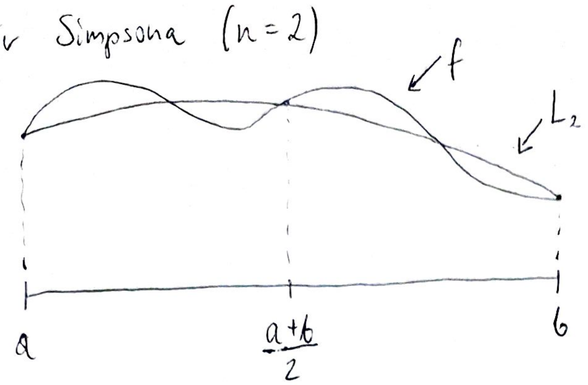
Rząd kwadratury Q_n

r jest rzędem kwadratury jeśli:

- $\forall w \in \Pi_{r-1} \quad R_n(w) = 0$
- $\exists w \in \Pi_r \setminus \Pi_{r-1} \quad R_n(w) \neq 0$

Rząd wzoru trapezów wynosi 2. $(n = 1)$

Wzór Simpsona $(n=2)$



$$x_0 = a \qquad A_0 = \frac{h}{3}$$
$$x_1 = \frac{a+b}{2} \qquad A_1 = \frac{4}{3}h \qquad h = \frac{b-a}{2}$$
$$x_2 = b \qquad A_2 = \frac{h}{3}$$

$$Q_2(f) = \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right)$$ ← interpolacja kwadratowa w trzech punktach

Rząd wzoru Simpsona to 4, a więc dokładnie można obliczyć całki nawet 3. stopnia.

Twierdzenie: Rząd kwadratury $Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ nie przekracza $2n+2$.

Kwadratura rzędu 4 na 2 węzłach (dla przedziału $[-1,1]$):

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 1$$

$$f(x_0) + f(x_1) \approx \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

Kwadratury interpolacyjne:

x_k – węzły kwadratury

$Q_n(f) = \int_a^b L_n(x)\,dx$, gdzie L_n jest wielomianem interpolującym funkcji f w punktach $x_0, \dots, x_n$.

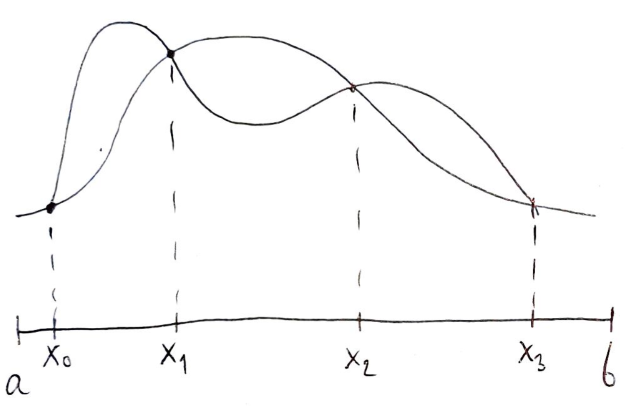
$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\lambda_k(x), \quad \lambda_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \in \Pi_n$$

$$Q_n(f) = \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\lambda_k(x)\right] dx = \sum_{k=0}^{n}\left(f(x_k) \cdot \int_a^b \lambda_k(x)\,dx\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \quad \text{dla } A_k = \int_a^b \lambda_k(x)\,dx$$

Kwadratura interpolacyjna ma rząd $\geq n+1$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx Q_n(f) = \int_a^b L_n[f](x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (A_k \text{ jak wyżej})$$



Kwadratura Newtona - Cotesa (czyli z węzłami równoodległymi)

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n} = a + kh \quad \left(h := \frac{b-a}{n}\right)$$

Twierdzenie: Kwadratura interpolacyjna ma rząd $\geq n+1$.

Twierdzenie: Jeśli kwadratura Q_n (liniowa) ma rząd $\geq n+1$, to jest ona kwadraturą interpolacyjną.

			rząd
$n=1$	$\Rightarrow$	wzór trapezów	2
$n=2$	$\Rightarrow$	wzór Simpsona	4
$n=3$	$\Rightarrow$	„reguła 3/8"	4
$n=4$			6
$n=5$			6

Twierdzenie: Reszta R_n kwadratury Newtona - Cotesa wyraża się wzorem:

$$R_n(f) = \begin{cases} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \displaystyle\int_a^b p_{n+1}(x)\,dx & : n \text{ nieparzyste} \\ \dfrac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} \cdot \displaystyle\int_a^b x\,p_{n+1}(x)\,dx & : n \text{ parzyste} \end{cases}$$

gdzie $p_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

Wniosek: Rząd $Q_n = \begin{cases} n+1 & : n \text{ nieparzyste} \\ n+2 & : n \text{ parzyste} \end{cases}$

Reszta wzoru trapezów:

$$R_1(f) = I(f) - Q_1(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b L_1(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - L_1(x)\big)\,dx =$$

$$= \int_a^b f[x, x_0, x_1]\,p_2(x)\,dx = \int_a^b f[x, a, b](x-a)(x-b)\,dx =$$

$$= f[\xi, a, b] \cdot \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \cdot \frac{(b-a)^3}{6} =$$

$$= -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \qquad (h := b-a)$$

$$R_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta) \qquad \left(h := \frac{b-a}{2}\right)$$