Zadanie 1. Uzasadnij proces ortogonalizacji Grama-Schmidta.

Dla liniowo niezależnych funkcji $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$ możemy stworzyć układ liniowo niezależny $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ taki, że iloczyn skalarny $\langle g_i, g_j \rangle_N = 0$ dla $i \neq j$. Ten iloczyn skalarny zdefiniowany jest jako $\langle f, g \rangle_N = \sum_{k=0}^{N} f(x_k) g(x_k)$. Proces przebiega przez algorytm:

$$\begin{cases} g_0 := f_0 \\ g_k := f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle f_k, g_j \rangle_N}{\langle g_j, g_j \rangle_N} \cdot g_j \end{cases}$$

Układ taki jest ortogonalny, co udowodnimy indukcyjnie względem k:

TEZA: $\forall i,j \leq k \quad i \neq j \Rightarrow \langle g_i, g_j \rangle = 0$ (ortogonalność)

BAZA: $g_0 = f_0$, jednoelementowy układ jest ortogonalny

$$g_1 = f_1 - \frac{\langle f_1, g_0 \rangle_N}{\langle g_0, g_0 \rangle_N} \cdot g_0$$

Sprawdźmy czy $\langle g_0, g_1 \rangle_N = 0$:

$$\begin{cases} \langle f + g, h \rangle_N = \langle f, h \rangle_N + \langle g, h \rangle_N \\ \langle k \cdot f, g \rangle_N = k \cdot \langle f, g \rangle_N \\ \langle f, g \rangle_N = \langle g, f \rangle_N \end{cases}$$

$$\langle g_0, g_1 \rangle_N = \langle g_0, f_1 - \frac{\langle f_1, g_0 \rangle_N}{\langle g_0, g_0 \rangle_N} g_0 \rangle_N =$$

$$= \langle g_0, f_1 \rangle_N - \langle g_0, \underbrace{\frac{\langle f_1, g_0 \rangle_N}{\langle g_0, g_0 \rangle_N}}_{k} \cdot g_0 \rangle_N =$$

$$= \langle g_0, f_1 \rangle_N - \frac{\langle f_1, g_0 \rangle_N}{\langle g_0, g_0 \rangle_N} \cdot \langle g_0, g_0 \rangle_N =$$

$$= \langle g_0, f_1 \rangle_N - \langle f_1, g_0 \rangle_N = 0$$

KROK: Załóżmy, że teza działa dla $k_0 < k$, czyli $g_0, \dots, g_{k-1}$ są ortogonalne. Pokażę ortogonalność g_k z dowolnym g_i dla $i<k$.

$$g_k = f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle f_k, g_j \rangle_N}{\langle g_j, g_j \rangle_N} \cdot g_j$$

Korzystając z własności iloczynu skalarnego mamy:

$$\langle g_i, g_k \rangle_N = \left\langle g_i, f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle f_k, g_j \rangle_N}{\langle g_j, g_j \rangle_N} g_j \right\rangle_N =$$

$$= \langle g_i, f_k \rangle_N - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle f_k, g_j \rangle_N}{\langle g_j, g_j \rangle_N} \langle g_j, g_i \rangle_N =$$

(*) z zał. ind. $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ dla $i \neq j$

$$\overset{(*)}{=} \langle g_i, f_k \rangle_N - \frac{\langle f_k, g_i \rangle_N}{\langle g_i, g_i \rangle_N} \langle g_i, g_i \rangle_N =$$

$$= \langle g_i, f_k \rangle_N - \langle f_k, g_i \rangle_N = 0$$

Więc g_k jest ortogonalny z dowolnym g_i dla $i<k$. ∎

Zadanie 2. Niech P_k $(1 < k \le N)$ będzie k-tym wielomianem ortogonalnym względem $(\cdot,\cdot)_N$. Pokaż, że dla dowolnego wielomianu $w \in \Pi_{k-1}$ jest $(w, P_k)_N = 0$.

Wielomian w zapiszmy jako kombinację liniową $P_0, \dots, P_{k-1}$:

$$\alpha_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_i \begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_{k-1} \begin{bmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{k-1} P_{k-1}$$

Wtedy dla dowolnego w mamy:

$$\langle w, P_k \rangle = \langle \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{k-1} P_{k-1}, P_k \rangle_N = \langle \alpha_0 P_0, P_k \rangle_N + \langle \alpha_1 P_1, P_k \rangle + \dots + \langle \alpha_{k-1} P_{k-1}, P_k$$

$$= \alpha_0 \langle P_0, P_k \rangle_N + \alpha_1 \langle P_1, P_k \rangle_N + \dots + \alpha_{k-1} \langle P_{k-1}, P_k \rangle_N = 0,$$ ponieważ

dla $i<k$ iloczyn skalarny $\langle P_i, P_k \rangle_N = 0$ (z ortogonalności)

Zadanie 4. Niech P_k będzie ciągiem wielomianów określonych w następujący sposób:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x - c_1 \\ P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2} \quad (k = 2, 3, \dots) \end{cases}$$

gdzie c_k, d_k są danymi stałymi. Udowodnij, że następujący algorytm Clenshawa:

$$\begin{cases} B_{m+2} := B_{m+1} := 0 \\ B_k := a_k + (x - c_{k+1}) B_{k+1} - d_{k+2} B_{k+2} \quad (k = m, m-1, \dots, 0) \\ \text{wynik} := B_0 \end{cases}$$

oblicza wartość sumy $\sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x)$.

$$P_2 B_2$$

$$B_0 = a_0 + (x - c_1) B_1 - d_2 B_2 = a_0 P_0 + P_1 B_1 - d_2 B_2 =$$

$$= a_0 P_0 + P_1 (a_1 + (x - c_2) B_2 - d_3 B_3) - d_2 B_2 = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \underline{P_1 (x - c_2) B_2} - P_1 d_3 B_3 \underline{- d_2 B_2 P_0} =$$

$$= a_0 P_0 + a_1 P_1 + P_2 B_2 - P_1 d_3 B_3 = a_0 P_0 + a_1 P_1 + P_2 (a_2 + (x - c_3) B_3 - d_4 B_4) - P_1 d_3 B_3 =$$

$$= a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + P_3 B_3 - P_2 d_4 B_4 = \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{i} a_k P_k + P_{i+1} B_{i+1} - P_i d_{i+2} B_{i+2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{i} a_k P_k + P_{i+1} (a_{i+1} + (x - c_{i+2}) B_{i+2} - d_{i+3} B_{i+3}) - P_i d_{i+2} B_{i+2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{i+1} a_k P_k + P_{i+1} (x - c_{i+2}) B_{i+2} - P_{i+1} d_{i+3} B_{i+3} - P_i d_{i+2} B_{i+2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{i+1} a_k P_k + B_{i+2} (P_{i+1} (x - c_{i+2}) - P_i d_{i+2}) - P_{i+1} d_{i+3} B_{i+3} =$$

bo $B_{m+2} = B_{m+1} = 0$

$$= \sum_{k=0}^{i+1} a_k P_k + B_{i+2} P_{i+2} - P_{i+1} d_{i+3} B_{i+3} = \dots = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x)$$

Aby obliczyć $P_m(x)$ powinniśmy za a_m podstawić 1, a za resztę współczynników 0.

Zadanie 5. Zbuduj wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne na zbiorze $D_4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, gdzie $x_j := -8 + 4j$ $(j = 0,1,2,3,4)$.

$x_0 = -8 \quad x_1 = -4 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 8$

I sposób: ciąg wielomianów ortogonalnych P_n

$$\sum_{k=0}^{N} x_k P_{k-1}(x_k) \cdot P_{k-1}(x_k)$$

$$\begin{cases} P_0(x) \equiv 1 \\ P_1(x) = x - c_1 \\ P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \quad (k = 2,3,\dots,m) \end{cases}$$

$$c_k := \frac{(xP_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-1}, P_{k-1})_N} \text{ dla } (1 \le k \le m)$$

$$d_k := \frac{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-2}, P_{k-2})_N} \text{ dla } (2 \le k \le m)$$

$$c_1 = \frac{(xP_0, P_0)_4}{(P_0, P_0)_4} = \frac{(-8\cdot 1) + (-4\cdot 1) + (0\cdot 1) + (4\cdot 1) + (8\cdot 1)}{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1} = \frac{0}{5} = 0 \Rightarrow P_1(x) = x$$

$$c_2 = \frac{(xP_1, P_1)_4}{(P_1, P_1)_4} = \frac{\sum_{k=0}^{4} x_k \cdot x_k \cdot x_k}{\sum_{k=0}^{4} x_k \cdot x_k} = \frac{-512 - 64 + 64 + 512}{64 + 16 + 16 + 64} = 0 \; *$$

$$d_2 = \frac{(P_1, P_1)_4}{(P_0, P_0)_4} = \frac{\sum_{k=0}^{4} x_k \cdot x_k}{\sum_{k=0}^{4} 1\cdot 1} = \frac{64 + 16 + 16 + 64}{1+1+1+1+1} = \frac{160}{5} = 32$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = (x - c_1) = x - 0 = x$$

$$P_2(x) = (x - c_2) P_1(x) - d_2 P_0(x) = x^2 - 32$$

II sposób: ortogonalizacja Grama - Schmidta

Weźmy liniowo niezależne funkcje $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, wielomiany P_0, P_1, P_2 obliczymy w następujący sposób:

$$\begin{cases} P_0(x) = f_0(x) \\ P_k(x) = f_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f_k, P_j)_N}{(P_j, P_j)_N} \cdot P_j \end{cases}$$

Obliczmy więc te funkcje:

- $P_0(x) = f_0(x) = 1$
- $P_1(x) = f_1(x) - \frac{\langle f_1, P_0\rangle_4}{\langle P_0, P_0\rangle_4} \cdot P_0 = x - \frac{\langle x, 1\rangle_4}{\langle 1, 1\rangle_4} \cdot 1 = x - \frac{-8-4+4+8}{1+1+1+1+1} \cdot 1 = x - 0 = x$
- $P_2(x) = f_2(x) - \frac{\langle f_2, P_0\rangle_4}{\langle P_0, P_0\rangle_4} P_0 - \frac{\langle f_2, P_1\rangle_4}{\langle P_1, P_1\rangle_4} P_1 = x^2 - \underbrace{\frac{64+16+16+64}{5}} - \frac{-512-64+64+512}{64+16+16+64} x =$

$= x^2 - 32$

Zadanie 3.

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x - c_1 = x - \frac{\langle x P_0, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} \\ P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \end{cases}$$

$4N$

$$c_k = \frac{(x P_{k-1}, P_{k-1})}{(P_{k-1}, P_{k-1})} \qquad \langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle = \sum_{i=0}^{N} P_{k-1}^2(x_i)$$

$$d_k = \frac{(P_{k-1}, P_{k-1})}{(P_{k-2}, P_{k-2})} \qquad \langle x P_{k-1}, P_{k-1}\rangle = \sum_{i=0}^{N} x_i P_{k-1}^2(x_i)$$

Dla c_k mamy $N+1$ mnożeń i N dodawań, więc $\sim 2N$ działań.

Dla d_k tak samo, gdyż możemy zapisywać wartości $P_{k-1}^2(x_i)$, więc $2N$ działań.

Gdy mamy obliczone $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$, to do obliczenia P_k wykonamy:

- $c_k \to 2N + 2N$
- $d_k \to$ obliczone

} każdy krok wymaga $4N$ działań

Łączny koszt: $4N + (N-1)4N = 4N^2$

Zadanie 6.

$$x_j = \{-8, -4, 0, 4, 8\}$$
$$h_j = \{2, -3, 1, -3, 2\}$$

$$P_0 = 1$$
$$P_1 = x$$
$$P_2 = x^2 - 32$$

$$\langle P_0, P_0 \rangle = 5$$
$$\langle P_1, P_1 \rangle = 160$$
$$\langle P_2, P_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 32)^2 = 3584$$

$$w_n^* = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x), \quad a_k = \frac{\langle h, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle}$$

$$\langle h, P_0 \rangle = -1$$
$$\langle h, P_1 \rangle = 0$$
$$\langle h, P_2 \rangle = 102$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = -\frac{1}{5} \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{102}{3584} = \frac{3}{56} \end{cases}$$

Stąd $w_2^* = -\frac{1}{5} P_0(x) + \frac{3}{56} P_2(x)$.