Analiza numeryczna L, Lista 3, 22/10/201

Zadanie 1.

(a) $4\cos^2 x - 3$ traci cyfry znaczące dla $x = \left\{\frac{\pi}{6}k, \frac{5\pi}{6}k\right\}$ dla $k \in \mathbb{Z}$, możemy zamienić tę funkcję do postaci:

(1) $4(1 - \sin^2 x) - 3 = 1 - 4\sin^2 x$,

(2) $4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right)^2 - 3$,

jednak powyższe przekształcenia nie pomogły w poprawie wyniku.

(b) $\log_5 x - 6$ traci cyfry znaczące dla $x = 15625$,

zamieniamy funkcję na:

$$\log_5 x - 6 = \log_5 x - \log_5 5^6 = \frac{\ln x}{\ln 5} - \frac{\ln 5^6}{\ln 5} =$$

$$= \frac{\ln x - \ln 5^6}{\ln 5} = \ln\left(\frac{x}{5^6}\right) \cdot \frac{1}{\ln 5},$$

ten sposób działa i zwraca poprawną wartość dla $x = 15625$.

Zadanie 2. Miejsca zerowe równania kwadratowego w bezpieczniejszy sposób niż $x_{1/2} = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

Powyższy sposób nie jest dobry, gdy $\sqrt{b^2-4ac} \approx b$, czyli dla bardzo dużych wartości b oraz bardzo małych wartości a, c. Cyfry znaczące utracimy przy obliczaniu $-b + \sqrt{b^2-4ac}$ (bo wynik będzie bliski zeru), jednak $-b - \sqrt{b^2-4ac}$ działa poprawnie. Możemy więc obliczyć nasze rozwiązania używając wzorów Viete'a:

$$x_1 = -b - \sqrt{b^2-4ac}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_2 = \frac{c}{a \cdot x_1} = \frac{c}{-ab - a\sqrt{b^2-4ac}}$$

Zadanie 4.

względna zmiana $\nearrow$ danych: $\left|\frac{(x+\delta)-x}{x}\right| = \left|\frac{\delta}{x}\right|$

względna zmiana $\searrow$ wyniku: $\left|\frac{f(x+\delta)-f(x)}{f(x)}\right|$

wskaźnik uwarunkowania

$\downarrow$

$$\mathrm{Cond}(x) = \frac{\text{względna zmiana wyniku}}{\text{względna zmiana danych}} = \left|\frac{f(x+\delta)-f(x)}{f(x)}\right| \cdot \left|\frac{x}{\delta}\right| =$$

$$= \underbrace{\left|\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\right|}_{f'(x)} \cdot \left|\frac{\delta}{f(x)}\right| \cdot \left|\frac{x}{\delta}\right| = |f'(x)| \cdot \left|\frac{x}{f(x)}\right| = \left|\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}\right|$$

Zadanie 5.

(a) $f(x) = x^2 - 2019$, $f'(x) = 2x$

$$\mathrm{Cond}(f(x)) = \left|\frac{x \cdot 2x}{x^2-2019}\right| = \left|\frac{2x^2}{x^2-2019}\right|$$

$\lim_{x \to \sqrt{2019}} \mathrm{Cond}(f(x)) = \infty$, więc zadanie źle uwarunkowane

(b) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

$$\mathrm{Cond}(f(x)) = \left|\frac{x(\ln x - 1)}{\ln^2 x} \cdot \frac{\ln x}{x}\right| = \left|\frac{\ln x - 1}{\ln x}\right| = \left|1 - \frac{1}{\ln x}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^+} \mathrm{Cond}(f(x)) = -\infty \\ \\ \lim_{x \to 1^-} \mathrm{Cond}(f(x)) = +\infty \end{array}\right\} \text{więc zadanie źle uwarunkowane}$$

(c) $f(x) = \cos(3x)$, $f'(x) = -3 \cdot \sin(3x)$

$$\mathrm{Cond}(f(x)) = \left| \frac{x \cdot (-3) \cdot \sin(3x)}{\cos(3x)} \right| = |-3x \tan(3x)|$$

$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{6}\right)^+} \mathrm{Cond}(f(x)) = +\infty$, więc źle uwarunkowane.

(d) $f(x) = \left(\sqrt{x^2 + 2019} + x\right)^{-1}$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2 + \sqrt{x^2 + 2019}\, x + 2019}$

$$c = \mathrm{Cond}(f(x)) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right| = \left| -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2019}} \right|$$

$\lim_{x \to 0} c = 0$, $\lim_{x \to -\infty} c = 1$, $\lim_{x \to \infty} c = -1$, więc zadanie dobrze uwarunkowane.

Zadanie 7. Czy poniższy algorytm obliczania $w(x) := x + x^{-1}$ $(x \neq 0)$ jest algorytmem numerycznie poprawnym? (x maszynowy)

```
u := X
v := 1/X
Return (u+v)
```

$$x + \frac{1}{x} \Rightarrow \left(x + \frac{1+\varepsilon_1}{x}\right)(1 + \varepsilon_2)$$

← błąd wprowadzenia danych

← błąd wyniku

Dla poprawnego numerycznie wyniku mamy:

$$\left(\tilde{x} + \frac{1}{\tilde{x}}\right)(1 + E) = \left(x + \frac{1+\varepsilon_1}{x}\right)(1 + \varepsilon_2)$$

Po wpisaniu danych nasz błąd wynosi:

$$x + \frac{1+\varepsilon}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)(1 + \delta)$$ ← jakiś błąd

$$x + \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon}{x} = x + \frac{1}{x} + \delta\left(x + \frac{1}{x}\right) \quad / : \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\varepsilon}{x} = \delta\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{x} \cdot \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$$

$$|\delta| \leq 2^{-t} \cdot \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \leq 2^{-t}$$

↑ wraz ze wzrostem **x** błąd maleje, podobnie dla malejących x

Wiemy więc, że błąd na „wejściu" jest niewiększy niż 2^{-t}, oznacza to, że:

$$\left(x+\frac{1+\varepsilon_1}{x}\right)(1+\varepsilon_2) = \left(x+\frac{1}{x}\right)(1+\delta)(1+\varepsilon_2) =$$

błąd wejścia

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)\underbrace{(1+\gamma)}_{\text{błąd całkowity}}, \text{ gdzie } |\gamma| \le 2\cdot 2^{-t}$$

Wykazaliśmy więc, że wynik wyjściowy jest bliski dokładnemu wynikowi, więc algorytm jest poprawny numerycznie.

Zadanie 1.a (dodatkowe rozwiązanie, to już poprawia wartości obliczeń dla $\frac{\pi}{6}k, \frac{5\pi}{6}k$

$$4\cos^2 x - 3 = 4\cos^2 x - 3\sin^2 x - 3\cos^2 x =$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin^2 x =$$

$$= (\cos 2x - 2\sin^2 x) \cdot \frac{\cos x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\cos 2x \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$\cos(\alpha+\beta)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Dlaczego kolejność działań na liczbach maszynowych ma takie znaczenie?

$$(x+y)(x-y)\underbrace{(1+\varepsilon_1)}_{\text{dodawanie}}\underbrace{(1+\varepsilon_2)}_{\text{odejmowanie}}\underbrace{(1+\varepsilon_3)}_{\text{mnożenie}} = \left(x^2(1+\alpha_1) - y^2(1+\alpha_2)\right)(1+\alpha_3)$$

$$1+2^{-53} = 1 \quad \text{ALE} \quad 1+2^{-52} > 1$$

Zadanie 3. Miejsce zerowe $x^3 + 3qx - 2r = 0, \; r, q > 0$

$$x = \sqrt[3]{r+\sqrt{q^3+r^2}} + \sqrt[3]{r-\sqrt{q^3+r^2}} = \frac{2r}{\left(\sqrt[3]{r+\sqrt{q^3+r^2}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{r-\sqrt{q^3+r^2}}\right)^2 + q} =$$

$$= \frac{2r}{q + \left(\sqrt[3]{r+\sqrt{q^3+r^2}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{-q^3}{r+\sqrt{q^3+r^2}}}\right)^2} = \frac{2r}{\left(\sqrt[3]{r+\sqrt{q^3+r^2}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{r+\sqrt{q^3+r^2}}}\right)^2 \cdot q^2 + q}$$

Zadanie 6.

$$\frac{x}{4} = x \cdot 2^{-2}, 2^{-4}, 2^{-6}, 2^{-8}$$

```
S := 0;
FOR i FROM 1 TO 4:
    S := S + y[i] * atan $\underbrace{(4^{-i} * x)}_{\text{liczby maszynowe}}$
RETURN S
```

$$fl(\text{atan } x) = (\text{atan } x)(1+\varepsilon_{ox}), \quad \varepsilon_{ox} \le 2^{-t}$$

$$fl(S) = (((y_1 a_1)(1+\alpha_1) + (y_2 a_2)(1+\alpha_2))(1+\beta_2) + (y_3 a_3)(1+\alpha_3))(1+\beta_3) + (y_4 a_4)(1+\alpha_4))(1+\beta_4)$$

$$= y_1 a_1 (1+\alpha_1)(1+\beta_2)(1+\beta_3)(1+\beta_4)(1+\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\beta_1})$$
$$+ y_2 a_2 (1+\alpha_2)(1+\beta_2)(1+\beta_3)(1+\beta_4)$$
$$+ y_3 a_3 (1+\alpha_3)(1+\beta_3)(1+\beta_4)$$
$$+ y_4 a_4 (1+\alpha_4)(1+\beta_4)$$
$$= \hat{y}_1 a_1 + \hat{y}_2 a_2 + \hat{y}_3 a_3 + \hat{y}_4 a_4$$

a_i - kolejne wyrazy $\text{atan}(4^{-i} \cdot x)$

$(1+E_i)$; $|E_i| \le (6-i)\, 2^{-t}$

$$\tilde{S} = S(a, \hat{y})$$

$$A(a,y) \equiv \underbrace{S(\tilde{a},\tilde{y})}_{\text{zmiana danych}} \underbrace{(1+\alpha)}_{\text{zmiana wyniku}}$$

„nieco" zaburzony wynik oznacza
wynik zaburzony o 2^{-t}