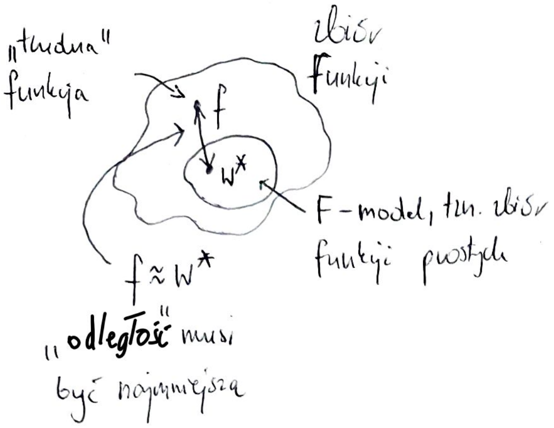
Analiza numeryczna, Wykład 10, 18/12/2019

Powtórka



$$\|f\|_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} \left(f(x_k)\right)^2} \leftarrow \text{norma średniokwadratowa funkcji}$$

„odległość" między funkcjami f oraz g: $\|f-g\|_2$, do znalezienia elementu optymalnego $w^* \in F$ ~~szukany~~ rozwiązujemy równanie $\|f-w^*\|_2 = \min\limits_{w\in F} \|f-w\|$, jednak nie jest to takie proste:

1° Tworzymy układ równań normalnych (m parametrów)

2° Rozwiązujemy ten układ (jeśli jest liniowy, to ma złożoność $O(m^3N)$)

Wielomianowa aproksymacja średniokwadratowa na zbiorze dyskretnym

Zadanie: Dla danych parami różnych $X := \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ oraz funkcji f określonej na zbiorze X (tj. $y_k := f(x_k)$ dla $k = 0, 1, \dots, N$) i liczby naturalnej m, znaleźć taki wielomian $w_m^* \in \Pi_m$, dla którego

$$\|f - w_m^*\|_2 = \min_{w_m \in \Pi_m} \|f - w_m\|_2 \equiv \min_{w_m \in \Pi_m} \sqrt{\sum_{k=0}^{N} \left(y_k - w_m(x_n)\right)^2}.$$

Naszym modelem F jest $F \equiv \Pi_m$ (dla ustalonego m).

Uwagi: 1° Zakładając, że $w_m^*(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k x^k$ oraz stosując metodę z poprzedniego wykładu, tj. rozwiązując układ równań normalnych, nie osiągniemy sukcesu, gdyż:

(a) jest zbyt duża złożoność obliczeniowa, tzn. $O(m^3N)$

(b) występują duże problemy numeryczne; zadanie jest źle uwarunkowane

2° Cel wykładu: podać efektywną, zarówno pod względem złożoności obliczeniowej, jak i stabilności numerycznej, metodę konstrukcji wielomianu optymalnego $w_m^* \in \Pi_m$. Koszt tej metody to $O(mN)$.

Użyjemy następujących narzędzi (plan wykładu):

- iloczyn skalarny, notacja $(\cdot,\cdot)_N$
- układy ortogonalne
- ortogonalizacja Grama-Schmidta
- ciągi wielomianów ortogonalnych
- algorytm Clenshawa

aby uzyskać jawny wzór na w_m^* bez potrzeby rozwiązywania układu równań normalnych.

Iloczyn skalarny funkcji f oraz g (dyskretny iloczyn skalarny na zbiorze X)

$$(f,g)_N = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)g(x_k)$$

Ortogonalność funkcji f oraz g

$$(f,g)_N = 0, \quad \text{tzn.} \quad \sum_{k=0}^{N} f(x_k)g(x_k) = 0$$

Przykład: $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1$ (czyli $N=3$)

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = X, \quad (f,g)_N = \sum_{k=0}^{3} f(x_k)g(x_k).$$

Przyjmijmy, że $f(x) := \cos(2\pi x)$, $g(x) := x^2 - \frac{13}{9}x$.

Obliczmy $(f,g)_N = \sum_{k=0}^{3} \cos(2\pi x_k)\cdot\left(x_k^2 - \frac{13}{9}x_k\right) = 0 + \frac{5}{27} + \frac{7}{27} - \frac{4}{9} = 0$

Wniosek: Przy tak ustalonym iloczynie skalarnym funkcje f oraz g są ortogonalne.

Mówimy, że układ funkcji $f_0, f_1, \dots, f_m$ $(m \leq N)$ jest ortogonalny względem iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$ wtw, gdy:

1° $(f_i, f_j)_N = 0$ dla $i \neq j$, $0 \leq i,j \leq m$

2° $(f_i, f_i)_N > 0$

Ortogonalizacja Grama - Schmidta

Dla danego układu liniowo niezależnych funkcji $g_0, g_1, \ldots, g_m$ oraz ustalonego iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$ $(m \le N)$, układ funkcji $f_0, f_1, \ldots, f_m$ zadanych w następujący sposób rekurencyjny:

$$(\square)\begin{cases} f_0 := g_0 \\ f_k := g_k - \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{(g_k,f_j)_N}{(f_j,f_j)_N}\cdot f_j\right) \text{dla } k=1,2,\ldots,m \end{cases}$$

jest układem ortogonalnym względem wybranego iloczynu skalarnego, tzn.

1° $(f_i,f_j)_N = 0$ dla $i \ne j$, $0 \le i,j \le m$,

2° $(f_i,f_i)_N > 0$ dla $0 \le i,j \le m$.

Pytanie: Jak dla zadanego iloczynu skalarnego znaleźć układ ortogonalny wielomianów generujących przestrzeń Π_m?

Odpowiedź: Można użyć ortogonalizacji Grama-Schmidta dla układu $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^m$. Wtedy skonstruujemy (patrz $(\square)$ dla $g_k(x) := x^k$) układ wielomianów $P_0, P_1, \ldots, P_m$ (patrz $(\square)$: $P_k \equiv f_k$) o własnościach:

(a) $P_k \in \Pi_k \setminus \Pi_{k-1}$ $(k = 0,1,\ldots,m;\ \Pi_{-1} = \phi)$

(b) $\begin{cases} (P_k,P_l)_N = 0 & \text{dla } k \ne l,\ 0 \le k,l \le m \\ (P_k,P_k)_N > 0 \end{cases}$

Jednak w praktyce tego nie robimy. Powody są dwa:

(a) jest to zbyt długie: $O(m^2N)$

(b) są poważne problemy z numeryczną realizacją ortogonalizacji Grama - Schmidta

Zaleca się konstrukcję ortogonalnej bazy przestrzeni Π_m przeprowadzić z wykorzystaniem następującego twierdzenia:

Twierdzenie (ciąg wielomianów ortogonalnych):

Ustalmy iloczyn skalarny $(\cdot,\cdot)_N$. Niech wielomiany $P_0, P_1, \dots, P_m$ $(m \leq N)$ spełniają zależność rekurencyjną postaci:

$$(A) \quad \begin{cases} P_0(x) \equiv 1 \\ P_1(x) = x - c_1 \\ P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \quad (k = 2, 3, \dots, m;\ m \leq N) \end{cases}$$

gdzie:

$$c_k := \frac{(xP_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-1}, P_{k-1})_N} \quad (1 \leq k \leq m)$$

$$d_k := \frac{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-2}, P_{k-2})_N} \quad (2 \leq k \leq m)$$

Wtedy:

(a) $P_k \in \Pi_k \setminus \Pi_{k-1} \quad (k = 0, 1, \dots, m)$

(b) $\begin{cases} (P_k, P_l)_N = 0 & \text{dla } k \neq l,\ 0 \leq k, l \leq m \\ (P_k, P_k)_N > 0 & \text{dla } 0 \leq k \leq m \end{cases}$

Zapis $(xP_{k-1}, P_{k-1})_N$ z licznika c_k oznacza $\sum_{k=0}^{N} x_k P_{k-1}(x_k) \cdot P_{k-1}(x_k)$.

Dzięki temu uzyskujemy koszt $O(mN)$, a numerycznie jest bardzo dobre.

Przykład:

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad N=3$$

$$(f,g)_N := \sum_{k=0}^{3} f(x_k)\, g(x_k)$$

Wykorzystamy wzory (Δ) do znalezienia wielomianów P_0, P_1, P_2, P_3 ortogonalnych względem ustalonego wyżej iloczynu skalarnego.

$$P_0(x) \equiv 1$$

$$P_1(x) = x - c_1 = x - \frac{(xP_0, P_0)_N}{(P_0, P_0)_N} = x - \frac{(x\cdot 1, 1)_N}{(1,1)_N} = x - \frac{1}{2}$$

$$P_2(x) = (x - c_2)P_1(x) - d_2 P_0(x) = \left(x - \frac{(xP_1, P_1)_N}{(P_1, P_1)_N}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{(P_1, P_1)_N}{(P_0, P_0)_N} \cdot 1 =$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{9}$$

$$P_3(x) = (x - c_3)P_2(x) - d_3 P_1(x) = \left(x - \frac{(xP_2, P_2)_N}{(P_2, P_2)_N}\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{9}\right) - \frac{(P_2, P_2)_N}{(P_1, P_1)_N}\left(x - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{47}{90}x - \frac{1}{90}$$

Można sprawdzić, że:

- $(P_i, P_j)_N = 0$ dla $i \neq j$, $0 \leq i,j \leq 3$
- $(P_0, P_0)_N = 4$, $(P_1, P_1)_N = \frac{5}{9}$, $(P_2, P_2)_N = \frac{4}{81}$, $(P_3, P_3)_N = \frac{1}{405}$

Uwaga: Używając ortogonalizacji Grama-Schmidta dla układu $1, x, x^2, x^3$, tego samego co w przykładzie iloczynu skalarnego uzyskamy te same wzory dla P_0, P_1, P_2, P_3 (we wzorze $(\square)$ $f_k \equiv P_k$).

Zadanie (przypomnienie)

Niech dane będą obserwacje (x_k, y_k) $(0 \le k \le N,\ x_i \neq x_j$ dla $i \neq j)$. Znaleźć wielomian $w_m^* \in \Pi_m$ optymalnie dopasowany do tych obserwacji w sensie dyskretnej optymalizacji średniokwadratowej, tj. taki, że:

$$\| f - w_m^* \|_2 = \min_{w_m \in \Pi_m} \| f - w_m \|_2 = \min_{w_m \in \Pi_m} \sqrt{\sum_{k=0}^{N} \left(y_k - w_m(x_k) \right)^2}.$$

Twierdzenie (rozwiązanie):

Wielomian optymalny $w_m^* \in \Pi_m$ wyraża się wzorem:

$$w_m^*(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x), \qquad a_k := \frac{(f, P_k)_N}{(P_k, P_k)_N},$$

gdzie $P_0, P_1, \ldots, P_m$ to ciąg wielomianów ortogonalnych względem dyskretnego iloczynu skalarnego dla zbioru $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$. Koszt tego rozwiązania to $O(mN)$. Błąd aproksymacji wyraża się wzorem $(\Diamond)$:

$$\| f - w_m^* \|_2 = \sqrt{\| f \|_2 - \sum_{k=0}^{m} \frac{(f, P_k)_N^2}{(P_k, P_k)_N}}.$$

Obserwacje:

- $w_{m+1}^*(x) = w_m^*(x) + a_{m+1} P_{m+1}(x)$, czyli w łatwy sposób możemy budować ciąg wielomianów optymalnych, przy czym dla każdego kolejnego m kontrolujemy wartość błędu $(\Diamond)$
- $w_N(x) \equiv$ wielomian interpolacyjny dla danych (x_k, y_k) $(k = 0, 1, \ldots, N)$
- aproksymację warto stosować dla $m \ll N$ (duża korpusja danych)

Jak szybko obliczyć wartość w_m^x?

Zadanie: Niech dany będzie wielomian $q_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \delta_k Q_k(x)$, gdzie liczby $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ są dane, a wielomiany $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ spełniają zależność rekurencyjną postaci:

$$\begin{cases} Q_0(x) = \alpha_0 \quad (\neq 0) \\ Q_1(x) = (\alpha_1 x - \beta_1) Q_0(x) \\ Q_k(x) = (\alpha_k x - \beta_k) Q_{k-1}(x) - \gamma_k Q_{k-2}(x) \quad k = 2, 3, \ldots, n \end{cases}$$

Dla danego $x \in \mathbb{R}$ oblicz wartość $q_n(x)$.

Rozwiązanie: Algorytm Clenshawa

$$\begin{cases} B_{n+1} := 0 \\ B_{n+2} := 0 \\ B_k := \delta_k + (\alpha_{k+1} x + \beta_{k+1}) B_{k+1} - \gamma_{k+2} B_{k+2} \quad (k = n, n-1, n-2, \ldots, 1, 0) \end{cases}$$

Wtedy $q_n(x) = \alpha_0 B_0$.