Analiza numeryczna, Wykład 13, 22/01/2020

Algorytmy numeryczne algebry liniowej

Powtórka z algebry

wymiar macierzy - n wierszy, m kolumn

1° Macierze:
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Dla $n=m$ (macierz kwadratowa) n jest stopniem macierzy.

Działania na macierzach: $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times m}, E=[e_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times k}$

$\pm$ $\quad A \pm B =: C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

$\cdot\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ $\quad A \cdot \alpha =: D = [d_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad d_{ij} = a_{ij} \cdot \alpha$

$\cdot$ $\quad A \cdot E =: F = [f_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times k}, \quad f_{ij} := \sum_{h=1}^{m} a_{ih} \cdot e_{hj}$

iloczyn skalarny wiersza A z kolumnami E

T (transpozycja) $\quad A^T = [a_{ji}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Wyznacznik macierzy kwadratowej

$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow \det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ - jednoznacznie określona funkcja przyporządkowująca macierzy liczbę rzeczywistą.

tylko macierze kwadratowe

Liczenie (szybkie) wyznacznika:

- $$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$
- przekształcenia elementarne $\to$ wyznacznik macierzy trójkątnej

Własności:
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$

Odwracanie macierzy kwadratowych

$$I_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazywamy macierzą odwrotną do $A \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$

FAKT: Macierz odwrotna do A istnieje $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Układy równań liniowych

zapis skalarny

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

dane

$(*) \equiv A \cdot x = b$

niewiadome

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \equiv \mathbb{R}^n$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

FAKT: Układ $*$ ma jednoznaczne rozwiązanie $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Rozwiązanie: $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ istnieje

$$Ax = b \quad /\cdot_L A^{-1}$$
$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$
$$\underbrace{A^{-1}A}\, x = A^{-1}b$$
$$I_n\, x = A^{-1}b$$

Twierdzenie (wzory Cramera)

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

A_k – macierz powstała poprzez zamianę k-tej kolumny macierzy A na elementy wektora b

Przykład:

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix}$, $\tilde{b} := b + \begin{bmatrix} -0.000097 \\ +0.000106 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.989903 \\ 1.970106 \end{bmatrix}$, $b \approx \tilde{b}$.

Rozwiązując układ $Ax = b$ otrzymamy $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Rozwiążmy układ $Ax = \tilde{b}$.
Jego rozwiązaniem jest $x = \begin{bmatrix} 3.0000 \\ -1.0203 \end{bmatrix}$.

Wniosek: Zadanie źle uwarunkowane.

Wniosek: Trzeba być ostrożnym nawet dla prostych danych

Rozwiązywanie układów równań o macierzy trójkątnej dolnej

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} l_{11} x_1 = b_1 \\ l_{21} x_1 + l_{22} x_2 = b_2 \\ l_{31} x_1 + l_{32} x_2 + l_{33} x_3 = b_3 \\ \vdots \\ l_{n1} x_1 + l_{n2} x_2 + \ldots + l_{nn} x_n = b_n \end{cases} \equiv Lx = b, \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$L : \Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Rozwiązanie: $(l_{kk} \neq 0)$

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$
$$\downarrow$$
$$x_2 = \frac{b_2 - l_{21} x_1}{l_{22}}$$
$$\downarrow$$
$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} x_j}{l_{kk}}$$
$$\downarrow$$
$$x_n = \frac{b_n - \sum_{j=1}^{n-1} l_{nj} x_j}{l_{nn}}$$

koszt $O(n^2)$.

Podobnie, w czasie $O(n^2)$ rozwiążemy układ równań „trójkątny górny" postaci:

$$\begin{cases} u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + \ldots + u_{1n} x_n = b_1 \\ \quad u_{22} x_2 + \ldots + u_{2n} x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ \quad \ddots \quad u_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

Z tym, że tu liczymy od x_n do x_1.

Metoda faktoryzacji rozwiązywania układów równań liniowych.

Załóżmy, że układ $Ax = b$ ma jednoznaczne rozwiązanie, tzn. $\det(A) \neq 0$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$). Załóżmy, że znamy taką macierz trójkątną dolną $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz taką macierz trójkątną górną $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, że

$$A = L \cdot U.$$

Pokażemy, że rozwiązanie wyjściowego układu jest równoważne rozwiązaniu dwóch układów trójkątnych:

$$Ax = b$$

$$LUx = b$$

$$L\underbrace{(Ux)}_{y} = b$$

Niech będzie $y := Ux$. Wtedy $Ly = b$ (układ trójkątny). Stąd umiemy wyznaczyć y. Znając y, rozwiązujemy drugi układ równań $Ux = y$, którego rozwiązaniem jest szukany x, będący rozwiązaniem wyjściowego układu.

$$Ax = b \iff \begin{cases} 1^\circ \quad Ly = b & \leftarrow \text{znamy } L \text{ i } b \\ 2^\circ \quad Ux = y & \leftarrow \text{znamy } U \text{ i } y \text{ z } 1^\circ \end{cases}$$

Koszt $O(n^2)$, musimy znać jednak rozkład LU macierzy (który nie zawsze istnieje).

Twierdzenie (rozkład trójkątny macierzy = rozkład LU)

Niech macierz $A=[a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ będzie taka, że

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n$$

minory główne

Wówczas istnieje dokładnie jedna para macierzy $L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, gdzie $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej, a $U = [u_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą trójkątną górną, spełniająca warunek $A = L \cdot U$. Ponadto, $\det(A) = u_{11} u_{22} \dots u_{nn}$,

jawny wzór na rozkład LU koszt $O(n^3)$

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} & (i \leq j) \\ l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}\right) / u_{jj} & (i > j) \end{cases}$$

Koszt metody faktoryzacji: $\underbrace{O(n^3}_{LU} + \underbrace{n^2)}_{\text{rozwiązanie 2 układów}} = O(n^3)$

Inne zastosowania rozkładu LU: $A = L \cdot U$, $L = \Delta^1$, $U = \nabla \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1° Liczenie wyznacznika

$$\det(A) = \det(L \cdot U) = \det(L) \cdot \det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33} \dots u_{nn}$$ $O(n$

2° Odwracanie macierzy ($\det(A) \neq 0$)

$$A = LU \iff A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$$

(znając LU wystarczy umieć odwracać macierze trójkątne)

Odwrotnością macierzy trójkątnej jest macierz trójkątna tego samego typu.

Zadanie: Załóżmy, że mamy N układów równań postaci: $Ax_i = b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$), gdzie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x_i, b_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2, \ldots, N$).
Jak efektywnie znaleźć wektory $x_1, x_2, \ldots, x_N$? koszt $O(Nn^3)$?