Matematyka dyskretna L, Lista 3 - Tomasz Woszczyński

Zadanie 1
Należy wykazać, że wśród $n+1$ różnych liczb spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych (od 1 wzwyż) istnieje przynajmniej jedna para, z których jedna liczba dzieli drugą.

Zauważmy, że każdą liczbę naturalną można zapisać jako $2^m \cdot q$, gdzie q jest liczbą nieparzystą. Podzielmy więc zbiór $\{1, \ldots, 2n\}$ na szufladki składające się zliczb o ustalonym $q > 1$, tzn. w pierwszej szufladce będą liczby postaci $2^m \cdot 1$, w drugiej $2^m \cdot 3$ i tak dalej. Nieparzystych liczb w zbiorze $\{1, \ldots, 2n\}$ jest n, a my wybraliśmy $n + 1$ liczb, więc pewne dwie liczby są postaci $2^m \cdot q$ oraz $2^k \cdot q$, co oznacza że jedna z nich jest podzielna przez drugą.

Zadanie 2
Na kartce w kratce zaznaczamy 5 punktów kratowych (współrzędne całkowitoliczbowe), chcemy wykazać, że środek odcinka łączącego któreś dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

Na wybór punktów kratowych mamy następujące cztery możliwości:

$$(P, P), (N, N), (P, N), (N, P)$$

gdzie P oznacza liczbę parzystą, a N liczbę nieparzystą. Skoro wybieramy 5 punktów spośród 4 możliwości, to jakieś dwa punkty muszą być w takiej samej kombinacji. Jeśli w obu tych punktach pierwsza współrzędna jest parzysta, to suma tych liczb jest również parzysta, czyli podzielona przez 2 da nam liczbę całkowitą. Podobnie jeśli jest nieparzysta, wtedy suma tych liczb jest parzysta, a wynikiem dzielenia przez 2 będzie liczba całkowita. Dla drugiej współrzędnej działa to tak samo, a więc otrzymany punkt będzie również punktem kratowym.

Zadanie 5
W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Dodajemy do siebie te, które są w jednej kolumnie, jednym wierszu lub jednej przekątnej. Mamy pokazać, że co najmniej dwie sumy są równe.

Dla dowolnego n mamy $2n + 1$ możliwych do uzyskania sum, np. dla $n = 3$ są to

$$\{\underbrace{-3, -2, -1}_{n}, \underbrace{0}_{1}, \underbrace{1, 2, 3}_{n}\}$$

Wszystkich sum, które uzyskamy, będziemy mieli $2n + 2$: są to n kolumn, n wierszy oraz 2 przekątne. Mamy więc $2n+2$ sum (kulek) i tylko $2n+1$ możliwości (szufladek), więc co najmniej jedna suma się powtórzy, co kończy dowód.

Zadanie 6
Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10, mamy pokazać że zawsze znajdzie się grupa trzech sąsiednich liczb, których suma wyniesie przynajmniej 18.

Umieśćmy losowo 10 liczb naturalnych i pogrupujmy je w taki sposób, aby 1 nie należało do żadnej grupy. Pozostałe liczby sumują się do $2 + 3 + \cdots + 9 + 10 = 54$. Jeśli podzielimy sumę 54 na 3 równe grupy, to każda z nich będzie miała sumę 18. Jeśli jedna z grup ma mniej niż 18, to wtedy jedna z grup "przejmuje" wartość większą, dzięki czemu jedna grupa będzie miała więcej niż 18, co kończy dowód.

Zadanie 8 (-)
Poniżej wzór na znalezienie $\mathrm{lcm}(a, b)$, mając dane a, b oraz $\gcd(a, b)$. Wynika on stąd, że mając $\gcd(a, b) = g$ wiemy, że istnieją takie liczby względnie pierwsze m, n, że $a = m \cdot g$ oraz $b = n \cdot g$. Skoro lcm to najmniejsza wspólna wielokrotność, to jest to iloczyn liczb względnie pierwszych m, n oraz wspólnego im czynnika g, tzn. $\mathrm{lcm}(a, b) = m \cdot n \cdot g$. Możemy wykonać następujące działanie:

$$\gcd(a, b) \cdot \mathrm{lcm}(a, b) = g \cdot m \cdot n \cdot g = \underbrace{g \cdot m}_{a} \cdot \underbrace{g \cdot n}_{b} = a \cdot b$$

A następnie dzieląc równanie obustronnie przez $\gcd(a, b)$ otrzymamy wynik:

$$\mathrm{lcm}(a, b) = \frac{ab}{\gcd(a, b)}$$

Zadanie 9 (-)
Obliczmy najpierw $\gcd(13, 8)$:

a	b	równanie
13	8	$13 - 1 \cdot 8 = 5$
8	5	$8 - 1 \cdot 5 = 3$
5	3	$5 - 1 \cdot 3 = 2$
3	2	$3 - 1 \cdot 2 = 1$
2	1	$2 - 2 \cdot 1 = 0$
1	0	$-$

Mamy więc, że $\gcd(13, 8) = 1$. Teraz policzmy współczynniki x, y, aby $8x + 13y = \gcd(8, 13) = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot (8 - 5) - 5 = \\ &= 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot (13 - 8) = \\ &= 5 \cdot 8 - 3 \cdot 13 \end{aligned}$$

Więc szukane wartości to $x = 5$ oraz $y = -3$.

Zadanie 11
Trzeba pokazać, że dla $a > b$, a względnie pierwszego do b i $0 \leqslant m < n$ zachodzi:

$$\gcd(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^{\gcd(m,n)} - b^{\gcd(m,n)}$$

Udowodnię to indukcyjnie po n:

1. Podstawa indukcji: $n = 1$, wtedy mamy

$$\gcd(a^1 - b^1, a^m - b^m) = a^{\gcd(m,1)} - b^{\gcd(m,1)} = a^1 - b^1 = a - b$$

2. Krok indukcyjny: załóżmy, że $\forall n_0 < n$ zachodzi

$$\gcd(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^{\gcd(m,n)} - b^{\gcd(m,n)}$$

   Pokażę, że zachodzi to dla wszystkich n.

$$\begin{aligned}
\gcd(a^n - b^n, a^m - b^m) &\overset{1}{=} \gcd(a^{m+k} - b^{m+k}, a^m - b^m) = \\
&= \gcd(a^m - b^m, [a^{m+k} - a^m \cdot b^k] + [a^m \cdot b^k - b^{m+k}]) = \\
&= \gcd(\underbrace{a^m - b^m}_{x}, \underbrace{a^m[a^k - b^k]}_{y} + \underbrace{b^k[a^m - b^m]}_{z \cdot x}) = \\
&\overset{2}{=} \gcd(a^m - b^m, a^m[a^k - b^k]) = \\
&\overset{3}{=} \gcd(a^m - b^m, a^k - b^k) = \\
&\overset{\text{zał}}{=} a^{\gcd(m,k)} - b^{\gcd(m,k)} = \\
&= a^{\gcd(m,n-m)} - b^{\gcd(m,n-m)} = \\
&= a^{\gcd(m,n)} - b^{\gcd(m,n)}
\end{aligned}$$

Wyjaśnienie poszczególnych przejść:

1. skoro $0 \leqslant m < n$, to $\exists k > 0 : m + k = n$
2. $\gcd(x, y + z \cdot x) = \gcd(x, y)$
3. jeśli $b \perp c$, to $\gcd(ab, c) = \gcd(a, c)$