Zadanie 3. Iloczyn dowolnych k kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez k!

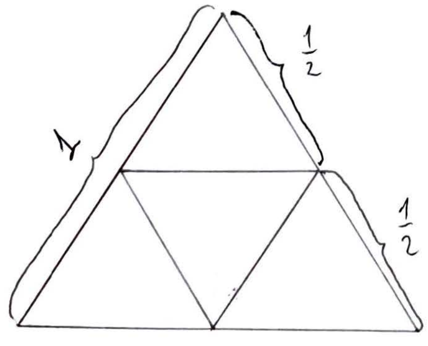
Mamy pokazać, że $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \in \mathbb{N} \quad \blacksquare$$

Zadanie 4. Zasada szufladkowa **Dirichleta**:

(a) Każda drużyna z każdą gra dokładnie raz, a więc każda drużyna rozegra n−1 meczów (dla n drużyn). W trakcie **turnieju** liczba rozegranych meczów należy do przedziału $\{0,\ldots,n-1\}$, stąd wynika, że jeśli istnieje drużyna, która rozegrała n−1 meczów, to nie może istnieć drużyna, która nie rozegrała żadnego meczu. Mamy więc n−1 szufladek oznaczających liczbę rozegranych meczów oraz n kulek oznaczających liczbę drużyn. Z zasady szufladkowej Dirichleta wiemy, że w jednym momencie znajdują się dwie drużyny, które rozegrały tyle samo meczów.

(b) Wśród pięciu punktów w trójkącie równobocznym o boku 1 istnieje przynajmniej jedna para punktów odległych od siebie o co najwyżej $\frac{1}{2}$.



Dzielimy trójkąt w taki sposób jak na rysunku, a więc mamy 4 szufladki i 5 kulek, czyli jedna z szufladek będzie zawierać 2 kulki, a więc odległość między nimi będzie co najwyżej $\frac{1}{2}$.

(c) Każdy wielościan wypukły zawiera przynajmniej dwie ściany o tej samej liczbie krawędzi.

Aby ściana wielościanu była ścianą, to musi mieć przynajmniej 3 krawędzie oraz maksymalnie n-1 krawędzi, aby wielościan pozostał wielościanem o n-ścianach (dla n krawędzi mielibyśmy już dodatkowy bok, czyli wielościan miałby n+1 ścian). Niech szufladką będzie ilość krawędzi ściany, a liczba ścian - kulkami. Mamy więc n-2 szufladek (bo między n a 3 jest n-2 liczb) oraz n kul, a więc każdy wielościan zawiera przynajmniej dwie ściany o tej samej liczbie krawędzi.

Zadanie 6. Pokaż, że w dowolnym zbiorze S złożonym z 10 liczb naturalnych mniejszych od 100, zawsze istnieją dwa podzbiory o tej samej sumie.

S - zbiór 10 liczb naturalnych mniejszych od 100.

Maksymalna suma liczb tego zbioru to $99 \cdot 10 = 990$, a więc dowolną sumę 10 elementów zbioru S możemy wybrać ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 990\}$, czyli spośród 991 elementów. Możliwych podzbiorów zbioru S jest 2^{10}, a więc 1024. Z metody szufladkowej, gdzie kulki to wszystkie możliwe podzbiory S, a szufladki to wszystkie możliwe sumy, mamy że zawsze istnieją przynajmniej dwa podzbiory o tej samej sumie.

Co do tego rozwiązania, to maksymalna suma liczb tego zbioru powinna wynosić 945, jako że w zbiorze elementy nie mogą się powtarzać (a więc zamiast 99*10 będzie 90+91+...+99), ale nie zmienia to wyniku zadania w żaden sposób - dzięki temu mamy nawet mniej szufladek, do których przyporządkowujemy podzbiory.

Zadanie 9. Ile jest pięciocyfrowych numerów telefonów, w których dokładnie jedna liczba występuje więcej niż jeden raz? A ile jest, gdy przynajmniej jedna cyfra występuje więcej niż jeden raz?

(1) Jedna cyfra występuje więcej niż jeden raz:

1° 5 razy : 10 możliwości

2° 4 razy : $10 \cdot 9 \cdot \binom{5}{1} = 10 \cdot 9 \cdot 5 = 450$ możliwości

3° 3 razy : $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \binom{5}{2} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 10 = 7200$ możliwości

4° 2 razy : $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \binom{5}{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 10 = 50400$ możliwości

Dodajemy więc wszystkie możliwe „układy" cyfr i otrzymujemy 58060 możliwości.

(2) Przynajmniej jedna cyfra występuje więcej niż jeden raz:

Możliwych numerów (wszystkich) jest 10^5, a liczb z cyframi niepowtarzającymi się ani razu $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$, więc liczb, w których przynajmniej jedna cyfra występuje więcej niż jeden raz jest $10^5 - 30240 = 69760$.

Zadanie 13. Udowodnij wzory:

(a) tożsamość absorpcyjna: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ dla $k \neq 0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \blacksquare$$

(b) wzór na sumowanie po górnym wskaźniku: $\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ dla $m, n \geq 0$

Dowód indukcyjny po n:

1° Podstawa: $n = m$

$$\sum_{0 \leq k \leq m} \binom{k}{m} = \underbrace{\binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \dots}_{} + \binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$$

te wyrazy zawierają w sobie silnię z wyrazów ujemnych, a więc przyjmijmy, że wynoszą 0 (element neutralny dodawania)

Krok indukcyjny: załóżmy, że dla $n_0 \leq n$ zachodzi $\sum_{0 \leq k \leq n_0} \binom{k}{m} = \binom{n_0+1}{m+1}$

Weźmy więc $n+1$ i pokażmy, że zachodzi $\sum_{0 \leq k \leq n+1} \binom{k}{m} = \binom{n+2}{m+1}$.

$$\sum_{0 \leq k \leq n+1} \binom{k}{m} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} + \binom{n+1}{m} \overset{\text{zał.}}{=} \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} \overset{*}{=} \binom{n+2}{m+1} \quad \blacksquare$$

Dowód przejścia $*$ (czyli tożsamości Pascala, niepotrzebny):

$$\binom{n+1}{m+1} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n+1-m-1)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{1}{m+1}$$

$$\binom{n+1}{m} = \frac{(n+1)!}{m!\,(n+1-m)!} = \frac{(n+1)!}{m!\,(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{1}{n-m+1}$$

$$\binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} = \frac{(n+1)! \cdot 1}{m!\,(n-m)! \cdot (m+1)} + \frac{(n+1)! \cdot 1}{m!\,(n-m)! \cdot (n-m+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)! \cdot (n-m+1)}{m!\,(n-m)!\,(m+1)(n-m+1)} + \frac{(n+1)!\,(m+1)}{m!\,(n-m)!\,(n-m+1)\,(m+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)!\,\big((n-m+1)+(m+1)\big)}{m!\,(n-m)!\,(m+1)(n-m+1)} = \frac{(n+1)!\,(n+2)}{(m+1)!\,(n-m+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!\,(n+2)}{(m+1)!\,\big((n+2)-(m+1)\big)!} = \frac{(n+2)!}{(m+1)!\,\big((n+2)-(m+1)\big)!} = \binom{n+2}{m+1} \quad \blacksquare$$

Tożsamość Pascala: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Zadanie 15. Dowód indukcyjny małego twierdzenia Fermata:

$$a^p \equiv a \ (\mathrm{mod}\ p) \quad \text{dla } a \in \mathbb{N} \text{ i } p\text{-pierwszej}$$

1° Podstawa indukcji: $a = 1$

$$1^p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p)$$

2° Założenie indukcyjne: dla $a_0 \leq a$ zachodzi $a_0^p \equiv a_0 \ (\mathrm{mod}\ p)$

Krok indukcyjny: weźmy $a+1$ i pokażmy, że $(a+1)^p \equiv (a+1) \ (\mathrm{mod}\ p)$

$$(a+1)^p \overset{*}{=} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k = a^p + a^0 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$$

$*$ - rozwinięcie do wzoru dwumiennego Newtona, tj. $(a_N+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_N^{n-k} b^k$, przyjmujemy, że $a_N = 1$, $b = a$.

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{k!} = p \cdot \frac{(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{k!} \Rightarrow p \mid \binom{p}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{p}{k} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$$

Mając powyższą własność przechodzimy do kongruencji $\binom{p}{k}$ oraz 0, mamy:

$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k = a^p + a^0 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \equiv (a^p + a^0) \ (\mathrm{mod}\ p) \overset{\text{zał.}}{\equiv} (a+1) \ (\mathrm{mod}\ p)$$

A więc $a^p \equiv a \ (\mathrm{mod}\ p)$, czyli p dzieli $a^p - a$. ■

Zadanie 1. Niech $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$, ϕ - funkcja Eulera,

$\psi(n) = \operatorname{lcm}\left(\phi(p_1^{n_1}), \phi(p_2^{n_2}), \ldots, \phi(p_s^{n_s})\right)$.

Udowodnij, że dla $a \perp n$ zachodzi $n \mid a^{\psi(n)} - 1$

Założenie: $a \perp n \equiv a \perp p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, czyli $\forall_i : 1 \leq i \leq k \Rightarrow a \perp p_i^{n_i}$

$\Psi(n) = \operatorname{lcm}\left(\phi(p_1^{n_1}), \phi(p_2^{n_2}), \ldots, \phi(p_i^{n_i})\right)$

$\Psi(n) = \phi(p_i^{n_i}) \cdot q_i$, gdzie $q_i \in \mathbb{Z}$

$$a^{\Psi(n)} = a^{\phi(p_i^{n_i}) \cdot q_i} \equiv 1 \pmod{p_i^{n_i}} \text{ dla } a \perp p_i^{n_i},\ 1 \leq i \leq k$$

$$\left(a^{\phi(p_1^{n_1})}\right)^{q_i} \equiv 1^{q_i}$$

$$\left(a^{q_i}\right)^{\phi(p_1^{n_1})} \equiv 1$$

$$a^{\phi(p_i^{n_i}) \cdot q_i} - 1 \equiv 0 \pmod{p_i^{n_i}} \Rightarrow p_i^{n_i} \mid a^{\Psi(n)} - 1.$$

Wiemy, że $p_i^{n_i}$ są parami względnie pierwsze i z lematu (1) mamy

$$\underbrace{p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}}_{n} \mid a^{\Psi(n)} - 1 \Rightarrow n \mid a^{\Psi(n)} - 1$$

Lemat: $p_1 \mid b, p_2 \mid b, \ldots, p_k \mid b$ oraz $p_i^{n_i}$ są parami względnie pierwsze, to $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k} \mid b$.

Zadanie 2. Pokaż, że $\sum\limits_{d:d|n} \phi(d) = n$.

$$\sum_{d:d|n} \phi(d) = n \qquad \underbrace{\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, \frac{10}{10}}_{n \text{ ułamków}}$$

$$\downarrow$$

$$\gcd(\text{licznik}, \text{mianownik}) = 1 \Leftarrow \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{1}{1}$$

$$c \perp b, \quad \frac{c}{b} < 1$$

$$\frac{c}{b} \cdot \frac{n/b}{n/b} = \frac{\frac{cn}{b}}{n}$$

ilość ułamków o mianowniku d to $\phi(d)$

Zadanie 5. Dane są $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, pokaż że $\exists_{i,j}\ n \mid a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$.

Zdefiniujmy sumy prefiksowe jako $A_i = \sum\limits_{j=1}^{i} a_j$ $(0 \le i \le n)$. Jest ich $n+1$.

$$\exists_{m,n}\ 0 \le k < m \le n \quad A_k \bmod n \equiv A_m \bmod n,$$

więc $\underbrace{A_m - A_k}_{a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_m} \equiv 0 \mod n$

Zadanie 7. Niech $n,k,r,s \in \mathbb{N}$, $0 \le r,s < n$. Mamy $nk+r$ kulek i n szufladek. Pokaż, że w pewnych s szufladach znajduje się co najmniej $sk + \min\{r,s\}$ kulek.

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n-s}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{s}$$

1° $\ge k+1$ kulek $\Rightarrow s(k+1) = sk + s$

2° $\le k$ W $(n-s)$ „małych" szufladach jest $\le (n-s)k$ kulek, w s „dużych" szufladach jest $\ge nk+r-(n-s)k = sk+r$

Zadanie 8. Na szachownicy $n \times m$ dla $n \le m$ umieszczono $m(k-1)+1$ wież. Pokaż, że istnieje k wież nieatakujących się wzajemnie.

m (kolumny), n (wiersze):

1	2			...	m
m	1	2		...	
	m	1	2	...	
		m	⋱	⋱	

szufladka – każdy skos

wytłumaczenie na repetytorium 5.

Zadanie 10. Ile jest różnych ustawień wszystkich białych i czarnych figur szachowych na szachownicy? Ile jest ustawień w których para gońców każdego z kolorów zajmuje pola różnych kolorów?

(1) $\underbrace{\binom{64}{8}\binom{56}{8}}_{\text{pionki}}\underbrace{\binom{48}{2}\binom{46}{2}}_{\text{gońce}}\underbrace{\binom{44}{2}\binom{42}{2}}_{\text{wieże}}\cdot\ldots$

(2) $\binom{32}{2}\binom{32}{2}\cdot\ldots$

Zadanie 11. Pokaż, że liczba przedstawień n w postaci sumy k liczb naturalnych (większych od zera) wynosi $\binom{n-1}{k-1}$, jeśli przedstawienia różniące się kolejnością składników uważamy za różne?

$n = 7$
$k = 3$

$$1,\ 1 \ \Big|\ 1,\ 1\ \Big|\ 1,\ 1,\ 1$$

$k-1$ przegród, $n-1$ miejsc na przegrodę, a więc $\binom{n-1}{k-1}$.

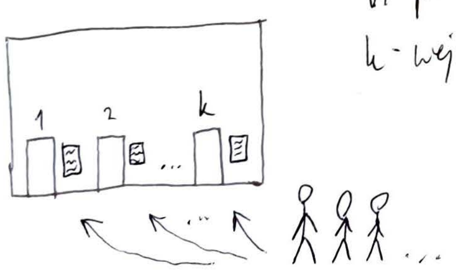
Ile jest przedstawień n w postaci sumy dowolnej ilości liczb naturalnych?

$$\sum_{0<k<n-1} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

← tutaj mamy $n-1$ miejsc na przedziały do wybrania, a więc albo istnieje przedział w danym miejscu, albo nie

Zadanie 12. Na teren fabryki prowadzi k wejść, pracuje tam n osób...

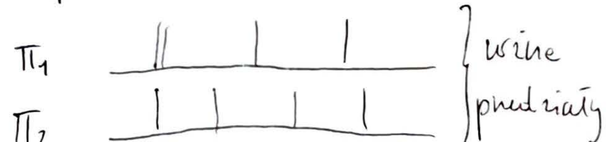
n - pracowników,
k - wejść



kolejka może być wybrana na $n!$ sposobów

$(n+1)^{k-1} \longrightarrow$ wybór wejścia przez każdego pracownika

(1) Stąd mamy



$$n!\, \frac{(n+1)^{k-1}}{(k-1)!} = n!\, \underbrace{V^{n+1}_{k-1}}_{\text{liczba wariacji}}$$

(2) Ile sposobów bez pustej listy?

Ilość pustych list: $i \in \langle 1, n-1 \rangle$

$$n!\,\frac{(n+1)^{k-1}}{(k-1)!} - \sum\left[\binom{k}{i}\cdot n!\cdot\frac{(n+1)^{k-i-1}}{(k-i-1)!}\right] \quad \blacksquare$$

Zadanie 14. Interpretacja w terminach zbiorów:

(a) $$\binom{m+n}{r} = \sum_{s=0}^{r}\binom{m}{s}\binom{n}{r-s}$$

$$R \subseteq M \cup N \iff \begin{cases} M\cup N \supseteq (R\cap M)\cup(R\cap N) \\ R = (R\cap M)\cup(R\cap N)\end{cases}$$

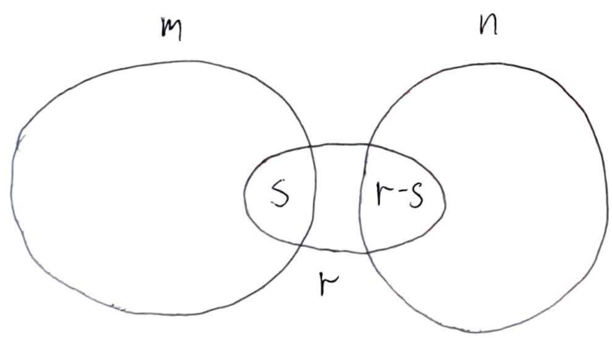
$\uparrow\ \uparrow$

zbiory rozłączne

$$x\in R \Rightarrow x \in (M\cup N)$$

L = zbiór $m+n$-elementowy, r reprezentantów

P = wszystkie możliwe wybory s-elementów z m oraz $r-s$ elementów z n



$\blacksquare$

(b) $$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

$$N \supseteq K \supseteq M \iff \begin{cases} N\supseteq M \\ N\setminus M \supseteq K' \\ K = M\cup K'\end{cases} \quad \blacksquare$$