Matematyka dyskretna L, Lista 1 - Tomasz Woszczyński

Zadanie 2

Niech $A = [1, 10^{10}]$, wtedy $|A| = 10^{10}$. Prawie każdą liczbę takiej postaci możemy zapisać jako

$$a = a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$$

gdzie a_i to kolejne cyfry. Używając takiego schematu obejmiemy liczbę 0, jednak nie obejmiemy 10^{10}, liczby te nie zawierają jednak cyfry 9, więc moc zbioru A pozostaje taka sama. Dla wszystkich cyfr a_i liczby a, aby nie było w niej cyfry 9, będziemy mieć 9 możliwości wyboru innej cyfry (ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 8\}$). Nazwijmy zbiór liczb bez cyfry 9 zbiorem B, wtedy $|B| = 9^{10} = 3486784401$. Ostatnim krokiem jest odjęcie od siebie mocy tych zbiorów: $|A| - |B| = 10^{10} - 9^{10} = 6513215599$. Stąd wiemy, że liczb zawierających cyfrę 9 w zadanym przedziale jest więcej niż tych, które jej nie zawierają.

Zadanie 3

Mamy policzyć ile jest podzbiorów n-elementowego zbioru A o parzystej i nieparzystej ilości elementów. Korzystając z symbolu Newtona dla $0 \leqslant k \leqslant n$ możemy obliczyć liczbę podzbiorów k-elementowych ze zbioru n-elementowego. Łącznie zbiorów o parzystej ilości elementów będziemy mieli tyle:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{2m}$$

gdzie $2m$ jest maksymalną parzystą liczbą nieprzekraczającą n. Wiemy też, że wszystkich podzbiorów zbioru n elementowego jest 2^n. Wiemy też, że wszystkich pozdbiorów zbioru A jest $2^{|A|} = 2^n$. Używając dwumianu Newtona dla $a = 1, b = 1$ możemy rozpisać 2^n:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Rozpiszmy jednak dwumian Newtona również na inny sposób, tym razem podstawiając wartości $a = 1, b = -1$:

$$\begin{aligned}
0 &= 0^n \\
&= (1 + (-1))^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k \\
&= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \\
&\Rightarrow \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}
\end{aligned}$$

Stąd mamy, że liczba podzbiorów zbioru n-elementowego zawierających parzystą liczbę elementów jest równa liczbie podzbiorów o nieparzystej ilości elementów. Ponadto, skoro zbiór A ma 2^n podzbiorów i jest tyle samo podzbiorów o parzystej jak i nieparzystej ilości elementów, to łatwo policzyć, że jest ich po $\frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$.

Zadanie 4
Mieszkańcy osady X (jest ich n) mają możliwość zapisu na wycieczki do kanionu K oraz nad wodospad W. Każdy mieszkaniec może wybrać, na które wycieczki się wybierze lub czy w ogóle na jakąś pojedzie - za tym wyborem stoi zbiór Y.

$$Y = \{\text{żadna}, K, W, \text{obie}\}$$

Wybór mieszkańca możemy przedstawić jako funkcję $f : X \to Y$. Ilość tych funkcji liczymy ze wzoru $|Y|^{|X|} = 4^n$ i to jest odpowiedź na nasze zadanie.

Zadanie 5 (-)
Są 3 kobiety i 3 mężczyzn, usadzamy ich najpierw w rzędzie. Nie zwracamy więc uwagi na to jakiej kto jest płci, tylko na to ile mamy osób. Jest $6! = 720$ możliwości takich ustawień. Kolejnym celem jest ustawienie 3 kobiet i 3 mężczyzn tak, aby siedzieli na przemian. Możemy na dwa sposoby wybrać kto będzie siedział pierwszy, a następnie z dwóch puli po 3 osoby dobieramy kolejne osoby bez powtórzeń:

$$2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$$

Zadanie 6
Mamy wybrać parę liczb (a, b) taką, że liczby a, b są z przedziału $[1, n]$ oraz suma $a + b$ jest parzysta. Aby suma ta była parzysta, a i b muszą być obie parzyste lub obie nieparzyste. Zakładam też, że liczby a, b mogą się powtarzać. Rozważmy więc dwa przypadki:

- n jest parzyste: mamy wtedy po $\frac{n}{2}$ elementów parzystych i nieparzystych. Możemy więc wybrać te liczby na tyle sposobów:

$$\underbrace{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}}_{\text{parzyste}} + \underbrace{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}}_{\text{nieparzyste}} = \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2}$$

- n jest nieparzyste: mamy wtedy $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ elementów nieparzystych i $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ parzystych. W podobny sposób liczymy liczbę możliwości w tym przypadku:

$$\underbrace{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}_{\text{nieparzyste}} + \underbrace{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}_{\text{parzyste}} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2$$

Rozpatrzyliśmy wszystkie przypadki, co kończy zadanie.

Zadanie 7 (-)
Rejestracja samochodu jest postaci $LLL\ DDDD$, gdzie L to litera z łacińskiego alfabetu, a D to cyfra. Wiemy, że $|L| = 26$ i $|D| = 10$, więc jest $26^3 \cdot 10^4$ możliwości.

Zadanie 9
Rozpiszmy sobie $\lfloor nx \rfloor$, wiedząc że $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor n \lfloor x \rfloor + n \{x\} \rfloor = n \lfloor x \rfloor + \lfloor n \{x\} \rfloor$$

Chcemy, aby $\lfloor n \{x\} \rfloor = 0$, a więc $n \{x\} < 1$ oraz $x < \frac{1}{n}$.

Zadanie 10
Mamy pokazać, że dla $x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0$ zachodzi $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor &\leqslant \sqrt{x} \leqslant \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor + 1 \\
\left(\left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor\right)^2 &\leqslant x \leqslant \left(\left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor + 1\right)^2 \\
\left(\left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor\right)^2 &\leqslant \lfloor x \rfloor < \left(\left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor + 1\right)^2 \\
\left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor &\leqslant \sqrt{\lfloor x \rfloor} < \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor + 1 \\
\left\lfloor \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor \right\rfloor \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor &\leqslant \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor < \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor + 1 \\
\Rightarrow \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor &= \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor
\end{aligned}$$

Zadanie 12
Dzieci zebrały 10 rumianków, 16 bławatków i 14 niezapominajek. Kwiaty w obrębie swojego rodzaju są nierozróżnialne, a więc dzieci (rozróżnialne) mogą podzielić się nimi w taki sposób:

$$\begin{aligned}
&R = \{(0,10), (1,9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5), (6,4), (7,3), (8,2), (9,1), (10,0)\} \\
&B = \{(0,16), (1,15), (2,14), \ldots, (14,2), (15,1), (16,0)\} \\
&N = \{(0,14), (1,13), (2,12), \ldots, (12,2), (13,1), (14,0)\}
\end{aligned}$$

Mamy więc $|R| = 11$, $|B| = 17$, $|N| = 15$, a więc istnieje $|R| \cdot |B| \cdot |N| = 2805$ możliwości.