Zadanie 1. Najmniejsze k takie, że $a_n = O(n^k)$

(a) $a_n = \frac{2n^{81.2} + 3n^{45.1}}{4n^{23.3} + 5n^{11.3}}$, $\sum_{i=1}^{k} O(a_i(n)) = O(\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}) \Rightarrow O\left(\frac{n^{81.2}}{n^{23.3}}\right) = O(n^{57.9})$,

więc $k = 57.9$

(b) $a_n = 5^{\log_2 n} = 2^{\log_2 5 \cdot \log_2 n} = 2^{\log_2 n \cdot \log_2 5} = n^{\log_2 5}$, więc $O(n^{\log_2 5})$, $k = \log_2 5 \approx 2$

(c) $a_n = (1.001)^n$ Funkcja ta jest większa od n^x dla każdego x:

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{1.001^n}{n^x} = \lim_{n\to\infty} (n \cdot \log 1.001 - x \log n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\Big(\log 1.001 - x \underbrace{\frac{\log n}{n}}_{\text{dąży do } 0}\Big) = \infty$$

Stąd wynika, że logarytm monotonicznie dąży do nieskończoności (wzrost), więc $n^x = O(1.001^n)$, czyli nie istnieje k spełniające $O(n^k)$.

(d) $a_n = n \cdot \log^3 n$ Aby dążyć $O(n^k)$, musimy ~~pokazać~~ spełnić warunek:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \infty \Rightarrow f(n) = O(g(n))$$

obie funkcje dodatnie, więc moduł pomijamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \log^3 n}{n^k} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\log^3 n + 3\log^2 n}{k \cdot n^{k-1}} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{3\log^2 n + 6\log n}{k(k-1)^2 n^{k-1}}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{6\log n + 6}{k(k-1)^2 n^{k-1}} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{6}{k(k-1)^3 n^{k-1}} = \frac{6}{k(k-1)^3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}}$$

Wynika stąd, że $\forall k > 1 : n \log^3 n = O(n^k)$, więc nie istnieje najmniejsze k spełniające ten warunek, zachodzi jednak $\forall \varepsilon > 0$ $k = 1 + \varepsilon$ dla których $n \log^3 n = O(n^k)$ jest spełnione.

Zadanie 2. Posortuj funkcje od najwolniej do najszybciej rosnącej:

0.99^n, $(1 + \frac{1}{n})^n$, $\log_2 n$, n, $\log_2(n^n)$, $3^{\log_2 n}$, n^2, $n^{\log_2 n}$, $2^{\sqrt{n}}$, 1.01^n, $(\log_2 n)^n$

funkcja malejąca

funkcja zbieżna do e

$n \cdot \log_2 n$

$2^{\log_2 3 \cdot \log_2 n} \Downarrow n^{\log_2 3}$

$2^{2 \cdot \log_2 n}$

$2^{\log_2 n \cdot \log_2 n} = 2^{\log_2^2 n}$

$2^{\log_2 1.01 \cdot n}$

$2^{\log_2 \log_2 n \cdot n}$

Zadanie 3. Funkcje $f(n), g(n)$ monotonicznie rosnące do ∞, nie może zajść żadna z tych relacji: $f(n) = o(g(n))$, $g(n) = o(f(n))$,

$$f(n) = \Theta(g(n)).$$

Definicje: $f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$$f(x) = \Theta(g(x)) \iff 0 < \lim_{x \to \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

$$f(x) = e^{x^2 + x \sin x} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^{x^2 + x \sin x}}{e^{x^2 + x \cos x}} = e^{x(\sin x - \cos x)}$$

$$g(x) = e^{x^2 + x \cos x}$$

Dzięki ilorazowi $\frac{f(x)}{g(x)}$ możemy łatwo dowieść, że

- dla $x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{N})$ mamy $\frac{f(x)}{g(x)} \to e^{x}$ $\Rightarrow$ nie jest $f(x) = o(g(x))$
- dla $x = 2k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{N})$ mamy $\frac{f(x)}{g(x)} \to e^{-x}$ $\Rightarrow$ nie jest $g(x) = o(f(x))$
- nie jest $f(x) = \Theta(g(x))$, ponieważ e^x nie jest ograniczone od góry żadną stałą, co przeczy definicji

Zadanie 5. Dowód własności:

(a) $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

$$f(n) = o(g(n)) \overset{\text{def.}}{\iff} \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \overset{\text{def. Cauchy'ego}}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 > 0 \; \forall n > n_0 \; \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 > 0 \; \forall n > n_0 \; |f(n)| \le \varepsilon \cdot |g(n)|$$

$$\overset{\text{def.}}{\iff} f(n) = O(g(n)) \quad \blacksquare$$

(b) $f \sim g \Rightarrow f = \Theta(g)$

moduły przy funkcjach

$$f \sim g \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 > 0 \; \forall n > n_0 \left(1 - \varepsilon \le \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| \wedge \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| \le 1 + \varepsilon \right)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 > 0 \; \forall n > n_0 \; (1 - \varepsilon) \cdot |g(n)| \le |f(n)| \wedge |f(n)| \le (1 + \varepsilon) \cdot |g(n)|$$

$$\Rightarrow \exists c, d \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \; c \cdot |g(n)| \le |f(n)| \le d \cdot |g(n)| \overset{\text{def.}}{\iff} f(n) = \Theta(g(n))$$

$\blacksquare$

Zadanie 5. (kontynuacja)

(c) $f = O(g) \iff g = \Omega(f)$

$$f(n) = O(g(n)) \overset{def.}{\iff} \exists c>0 \ \exists n_0 \ \forall n>n_0 \ |f(n)| \le c \cdot |g(n)|$$

$$\iff \exists c>0 \ \exists n_0 \ \forall n>n_0 \ |g(n)| \ge \frac{1}{c}|f(n)| \iff g = \Omega(f) \ ■$$

(d) $f = O(g) \wedge g = O(f) \iff g = \Omega(f)$

$$f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(f(n)) \iff$$

$$\iff \exists c,d>0 \ \exists n_0 \ \forall n>n_0 \ |f(n)| \le c \cdot |g(n)| \wedge |g(n)| \le d \cdot |f(n)|$$

$$\iff \exists c,d>0 \ \exists n_0 \ \forall n>n_0 \ \frac{1}{c}|f(n)| \le |g(n)| \le d\,|f(n)| \overset{def.}{\iff} g = \Theta(f) \ ■$$

Wszystkie symbole: $o, O, \Theta, \Omega, \sim$ są przechodnie, a symetryczne tylko $\sim, \Theta$.
Wynika to wprost z ich definicji

Zadanie 6. Pokaż, że $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \implies e^{\frac{1}{n}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^i \cdot i!}$$

$$= 1 + \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^i \cdot i!}$$

$$\le 1 + \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^i}$$

$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

wynika to ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$= 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

■

Zadanie 7.

Sortowanie n liczb poprzez znajdowanie minimum z kolejnych podciągów a_i ... a_n dla $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

Dla najgorszego możliwego przypadku wykonamy kolejno $n-1, n-2, \ldots, 0$ porównań, więc musimy je zsumować:

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 1 + 0 = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2} = O(n^2)$$

Zadanie 8. Złożoność operacji:

(1) Pisemne dodawanie liczb długości n: dodajemy ich cyfry po kolei, ewentualnie przenosimy nadmiar.

$$\begin{array}{rcccclll}
 & p_1 & p_2 & p_3 & p_{n-1} & _ & & \leftarrow \text{max } (n-1) \text{ przeniesień} \\
 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & & n \text{ cyfr} \\
+ & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n & & n \text{ cyfr} \\
\hline
 & w_1 & w_2 & w_3 & \ldots & w_n & &
\end{array}$$

Więc mamy $n + n + (n-1)$ operacji, czyli $3n - 1 = O(n)$.

(2) Pisemne mnożenie liczb długości n:

$$\begin{array}{cccccccl}
 & & & p_1 & p_2 & _ & & \text{max } (n-1) \text{ przeniesień} \\
 & & & a_1 & a_2 & a_3 & & n \\
 & \cdot & & b_1 & b_2 & b_3 & & n \\
\hline
 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & & \\
 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 & 0 & & n \text{ dodawań liczb długości } (2n-1) \\
+ & e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 0 & & \\
\hline
w_1 & w_2 & \ldots & & & w_6 & &
\end{array}$$

Więc: $n \cdot (n$ mnożeń $+ (n-1)$ przeniesień$) + n$ dodawań liczb długości $(2n-1)$

czyli $T(n) = n \cdot (n + (n-1)) + n \cdot (2n-1)$

$= n \cdot (2n-1) + n \cdot (2n-1)$

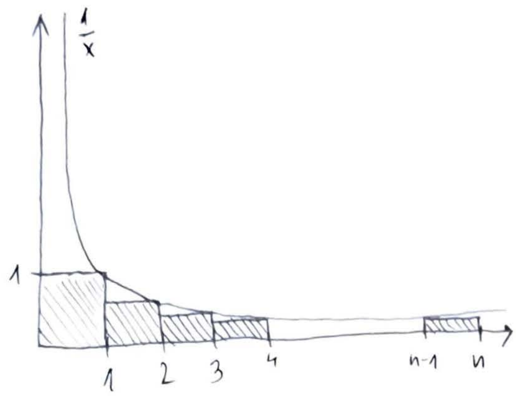
$= 2n^2 - n + 2n^2 - n$

$= 4n^2 - 2n = O(n^2)$

Zadanie 10.

Oszacowanie sumy $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ przez całkowanie:

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n - \ln 1 = \ln n$$



$$\ln(n+1) = \int_0^n \frac{1}{x+1}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x}\,dx + 1 = \ln(n) + 1$$

Zadanie 4. Wykazać, że $n^a(\log n)^b(\log\log n)^c = o(n^d(\log n)^e(\log\log n)^f)$ wtw. gdy $(a,b,c) \prec (d,e,f)$.

$d = a + a'$
$e = b + b'$
$f = c + c'$

$1^\circ \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^a(\log n)^b(\log\log n)^c}{n^{a+a'}(\log n)^{b+b'}(\log\log n)^{c+c'}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a'}(\log n)^{b'}(\log\log n)^{c'}}$$ ← to musi zbiegać do ∞, aby granica wyniosła 0.

$$(a'>0) \lor (a'=0 \land b'>0) \lor (a'=0 \land b'=0 \land c'>0)$$

$$\Rightarrow (a,b,c) \prec (d,e,f)$$

$2^\circ \Leftarrow$ implikacja w drugą stronę: wychodzimy z $(a,b,c) \prec (d,e,f)$ i „cofamy" się.

(?) Zadanie 5. (dowód przechodniości)

$$f = O(g) \land g = O(h) \Rightarrow f = O(h)$$

$$\exists a,b,c>0,\ d>0\ (\forall n>a\ \cancel{(}f(n) \le c\cdot g(n)) \land \overbrace{(}^{\forall n>b} g(n) \le d\cdot h(n)))$$

$$\Rightarrow \exists a,b,c,d>0\ \forall n>a,b\ \underbrace{\tfrac{1}{c} f(n) \le d\cdot h(n)}$$

$$\Rightarrow f(n) \le cd\cdot h(n) \Leftrightarrow f(n) = O(h(n))$$

Zadanie 9. Złożoność czasowa pisemnego dzielenia w najgorszym przypadku:

$k, l \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ – długości liczb, $a_i, b_i \in \{0,1\}$

$a = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 2^i$ ← dzielna

$b = \sum_{i=0}^{l} b_i \cdot 2^i$ ← dzielnik

$$\frac{\overline{a_{k-1}\,a_{k-2}\cdots a_1\,a_0}}{b_{l-1}\,a_{l-2}\cdots b_1\,b_0}$$

$w\ldots$

$k=n$

$(k-l+1)l = O((k-l)l) = O(n^2)$

$$(n-l)l = nl - l^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2 + nl - l^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(l-\frac{n}{2}\right)^2 \le \left(\frac{n}{2}\right)^2 \Rightarrow l = \frac{n}{2}$$

Zadanie 11. $h(n) = f(n) + O(g(n))$; $g(n) \prec f(n)$

Najlepsze oszacowanie $\frac{1}{h(n)}$ postaci $F(n) + O(G(n))$.

Lemat: $a(n) = 1 + O(b(n)) \Rightarrow \frac{1}{a(n)} = 1 - O(b(n))$

$$a_n \quad \frac{h(n)}{f(n)} = 1 + \overbrace{\frac{O(g(n))}{f(n)}}^{b_n}$$

⇓ z lematu

$$\frac{f(n)}{h(n)} = 1 - \frac{O(g(n))}{f(n)}$$

Dowód lematu: Wiemy, że ~~$a(n) = 1 + O(b(n))$~~ $\exists c \; a(n) \le 1 + c\cdot b(n)$, $a(n) \ge 1$

Cel: $\underbrace{1 - \frac{1}{a(n)}} = O(b(n))$

$$\frac{a(n)-1}{a(n)} = O(b(n))$$

$$\frac{a(n)-1}{a(n)} \le \frac{c\cdot b(n)}{a(n)} \le \frac{c\cdot b(n)}{a(n)} = c\cdot b(n)$$

$$\frac{1}{h(n)} = \frac{1}{f(n)} - \frac{O(g(n))}{f^2(n)}, \text{ więc } F(n) = \frac{1}{f(n)}, \quad \frac{O(g(n))}{f^2(n)} = O\left(\frac{g(n)}{f^2(n)}\right) \Rightarrow G(n) = \frac{g(n)}{f^2_n}$$

Zadanie 12. Pokaż, że $(n+2+O(n^{-1}))^n = n^n e^2 (1+O(n^{-1}))$ ~~...~~ $/ \frac{1}{n^n e^2}$

$$\underbrace{\frac{1}{e^2}\left(1+\frac{2}{n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n}\right)}_{r(n)}\right)^n}_{w} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(\exists c>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n>n_0) \quad r(n) < \frac{c}{n}$$

$$n>n_0: \quad w \le \frac{1}{e^2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{c}{n^2}\right)^n \le \frac{1}{e^2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{c}{n^2}\right)^n = \frac{1}{e^2}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{c}{n^2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{e^2}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\left(1+\frac{c}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)n\right)^2}\right) \le \left(1+\frac{c}{(n+1)^2}\right)^n = 1 + \frac{cn}{(n+1)^2} + \sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{c}{(n+1)^2}\right)^i$$

$(i \ge 2)$

$$= 1 + \frac{c}{n+2+\frac{1}{n}} + S$$

i dalej jakoś tam wychodzi to, co chcieliśmy dostać ■

Zadanie 14. Pokazać $\forall x \geq 0 \; \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$.

Niech $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = m$.

Fakt: $n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}^{+}$
$n \leq y \iff n \leq \lfloor y \rfloor$

$$m \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} < m+1 \quad /^2$$

$\lfloor x \rfloor \leq x \quad \rightarrow \quad m^2 \leq \lfloor x \rfloor < (m+1)^2$

$$m^2 \leq x < (m+1)^2 \quad /\sqrt{\ }$$ (zdjęcie podłogi korzystając z faktu)

$$m \leq \sqrt{x} < m+1$$

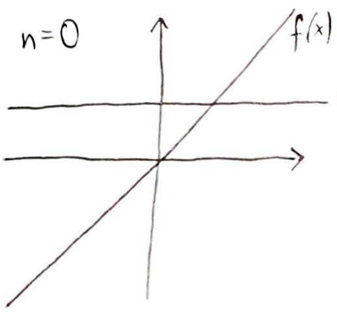
$$m = \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor \quad \blacksquare$$

Zadanie 15.

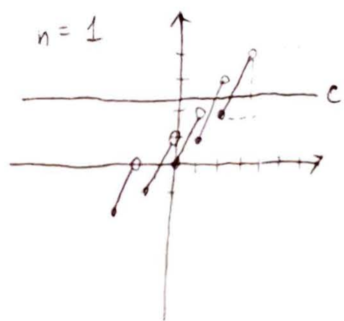
(a) $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ i $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$ ← Takie

(b) Ile rozwiązań x ma równanie $(n+1)x - \lfloor nx \rfloor = c$?

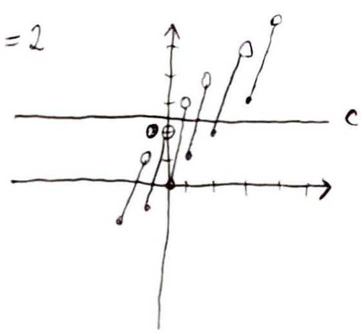
$$f(x) = (n+1)x - \lfloor nx \rfloor = nx - \lfloor nx \rfloor + x = \{nx\} + x$$



1 rozw.

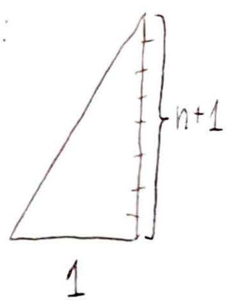


2 rozw.



3 rozw.

Więc:



Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $n+1$ rozwiązań równania $(n+1)x - \lfloor nx \rfloor = c$.