Matematyka dyskretna, Lista 7, 02/12/2019

Zadanie 2. Dowód wzorów:

(1) $$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$$

Dowód indukcyjny po $n$:

• $n=0$: $F_1 = \binom{0}{0} = 1$, $n=1$: $F_2 = \binom{1}{0} + \overbrace{\binom{0}{1}}^{0} = 1$

• załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla $n$, pokażę dla $n+1$:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1-i}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i}{i-1} =$$

$$= \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i}{i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i}{i-1} = \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n} \left[ \binom{n-i}{i} + \binom{n-i}{i-1} \right] =$$

$$= \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i+1}{i} = \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i+1}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i+1}{i} =$$

$$= \binom{0}{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i+1}{i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n-i+1}{i} \quad \blacksquare$$

(2) $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{i+m} = F_{m+2n}$$ ← twierdzenie, udowodnię po $n$ (indukcyjnie)

• $n=0$: $\binom{0}{0} F_m = F_m$, $n=1$: $\binom{1}{0} F_m + \binom{1}{1} F_{1+m} = F_m + F_{m+1} = F_{m+2\cdot 1}$ n

• załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $\forall n_0 < n$, pokażę dla $n$:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{i+m} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-1}{i} F_{m+i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n-1}{i-1} F_{m+i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n-1}{i} F_{m+i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} F_{m+i} =$$

$$= \binom{n-1}{n} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} F_{m+i+1} =$$

$$\overset{\text{zał.}}{=} 0 + F_{m+2n-2} + F_{m+1+2n-2} = F_{m+2+2n-2} = F_{m+2n} \quad \blacksquare$$

Zadanie 4. Zwarta postać ciągu $a_n$: $a_0 = 1, a_1 = 0, a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$

$a_n - \dfrac{a_{n-1}}{2} - \dfrac{a_{n-2}}{2} = 0 \Rightarrow$ Anihilator rekurencji to $\left(E^2 - \frac{1}{2}E - \frac{1}{2}\right) =$
$= (E-1)\left(E + \frac{1}{2}\right)$

$$a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases} a_0 = \alpha + \beta = 1 \\ a_1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ 0 = \alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Mamy więc $a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Zadanie 5. Ogólna postać rozwiązań rekurencyjnych (anihilatory):

(a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1, \quad a_0 = a_1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n &\rightarrow (E^2 - 2E + 1) = (E-1)^2 \\ 3^n &\rightarrow (E-3) \\ -1 &\rightarrow (E-1) \end{aligned}\right\} (E-1)^3(E-3)$$

$$a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot n \cdot 1^n + \gamma \cdot n^2 \cdot 1^n + \delta \cdot 3^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 = \alpha + \delta \\ a_1 = 0 = \alpha + \beta + \gamma + 3\delta \\ a_2 = 0 = \alpha + 2\beta + 4\gamma + 9\delta \\ a_3 = 2 = \alpha + 3\beta + 9\gamma + 27\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{4} \\ \beta = 0 \\ \gamma = -\frac{1}{2} \\ \delta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

A więc otrzymujemy $a_n = -\frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4} \cdot 3^n = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4} \cdot 3^n$.

(b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n \longrightarrow (E^2 - 4E + 4) = (E-2)^2 \\ n2^{n+1} \longrightarrow (E-2)^2 \quad (*) \end{array}\right\} (E-2)^4$$

$$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot n \cdot 2^n + \gamma \cdot n^2 \cdot 2^n + \delta \cdot n^3 \cdot 2^n$$

$(*)$: $$(E-2)^2 \langle n \cdot 2^{n+1} \rangle = (E-2) \langle (n+1) \cdot 2^{(n+1)+1} - n2^{n+2} \rangle =$$
$$= (E-2) \langle 2^{n+2} \rangle = \langle 2^{n+3} - 2^{n+3} \rangle = \langle 0 \rangle$$

(c) $a_{n+2} = 2^{n+1} - a_{n+1} - a_n$

$$a_{n+2} + a_{n+1} + a_n \longrightarrow (E^2 + E + 1) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$2^{n+1} \longrightarrow (E-2)$ - podobnie jak $(*)$ z (b)

$$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \gamma \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^n$$

Zadanie 7. Ile jest ciągów...

$x_n$ - liczba ciągów długości $n$

$x_0 = 1$

$x_1 = 25$

$$x_n = \underset{\text{„a" na końcu}}{1} \cdot \underbrace{(26^{n-1} - x_{n-1})}_{\text{ciągi długości } n-1 \text{ o nieparzystej liczbie wystąpień „a"}} + \underset{\text{„a" nie na końcu}}{25} \cdot \underset{\text{ciągi długości } n-1 \text{ o parzystej liczbie „a"}}{x_{n-1}} = 26^{n-1} + 24x_{n-1}$$

$$x_{n+1} - 24x_n = 26^n \Rightarrow (E-24)(E-26)\langle x_n \rangle = 0 \Rightarrow x_n = \alpha \cdot 24^n + \beta \cdot 26^n$$

$$\begin{cases} x_0 = 1 = \alpha + \beta \\ x_1 = 25 = 24\alpha + 26\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x_n = \frac{1}{2} \cdot 24^n + \frac{1}{2} \cdot 26^n$$

Zadanie 8. Za pomocą metody anihilatorów oblicz $\sum_{i=1}^{n} i2^i$ rozwiązując zależność $s_n = s_{n-1} + n2^n$.

$s_n - s_{n-1} \rightarrow (E-1)$

$n2^n \rightarrow (E-2)^2$ (podobnie jak w 5)

$$s_n = \alpha\cdot 1^n + \beta\cdot 2^n + \gamma\cdot n2^n$$

$$\begin{cases} s_1 = 2 = \alpha + 2\beta + 2\gamma \\ s_2 = 10 = \alpha + 4\beta + 8\gamma \\ s_3 = 34 = \alpha + 8\beta + 24\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Więc $s_n = 2 + (-2)\cdot 2^n + 2n2^n = 2 - 2^{n+1} + n2^{n+1} = 2 + (n-1)2^{n+1}$

Zadanie 10. Przez linię komunikacyjną przesyłamy...

$p_n$ - prawdopodobieństwo uzyskania oryginału po $n$ transmisjach

$p_0 = 1$, $p_1 = 1-p$, $p_2 = (1-p)^2 + p^2$

$$p_n = \underbrace{p_{n-1}\cdot(1-p)}_{\substack{\text{otrzymaliśmy}\\ \text{oryginalną wartość}}} + \underbrace{(1-p_{n-1})\cdot p}_{\substack{\text{otrzymaliśmy}\\ \text{zanegowaną wartość}}} = p_{n-1}(1-2p) + p$$

$E\langle p_n\rangle = p_n(1-2p) + p$

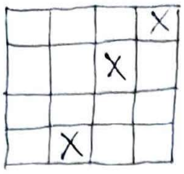
$(E-(1-2p))\langle p_n\rangle = p \Rightarrow (E-1)(E-(1-2p))\langle p_n\rangle = 0 \Rightarrow p_n = A\cdot(1-2p)^n + B$

$$\begin{cases} p_0 = 1 = A + B \\ p_1 = 1-p = A(1-2p) + B \end{cases} \Rightarrow \overset{(p\neq 0)}{\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}} \vee \begin{cases} A = 1-B \\ B \end{cases}$$

($p=0$, to jednak nie ma sensu, ponieważ wtedy zawsze mielibyśmy $p_n = 1$)

$$p_n = \frac{1}{2}(1-2p)^n + \frac{1}{2}$$

Zadanie 1. Ile jest takich ułożeń...



$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{i} = \binom{2n}{n}$$

liczba wierszy    liczba kolumn

Zadanie 3. Znajdź wzór na liczbę ciągów długości 2n...

$$|\Omega| = \frac{(2n)!}{2^n}$$

← liczba ciągów

← nierozróżnialność tych samych liczb

$$|A_i| = \frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}} \cdot (2n-1) = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$$

← i-ta liczba obok siebie

$$|A_i \cap A_j| = \frac{(2(n-2))!}{2^{n-2}} \cdot (2n-2)\cdot(2n-3) = \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}$$

Ostatecznie mamy (ze wzoru włączeń i wyłączeń):

$$\frac{(2n)!}{2^n} - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \cdot \frac{(2n-i)!}{2^{n-1}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}} \binom{n}{i} (-1)^i$$

Zadanie 6. $a_n = a_{n-3}$

$$a_n = \begin{cases} 0 : a_0 \\ 1 : a_1 \\ 2 : a_2 \\ a_{n-3} : n \geq 3 \end{cases}$$

$$E^3 - 1 = (E-1)(E^2+E+1) = (E-1)\left(E - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(E - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$a_n = \alpha + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n \beta + \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n \gamma$$

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \frac{n - (n \bmod 3)}{3} = \frac{n - a_n}{3}$$

Zadanie 9. Niech $c_n$ oznacza...

$z_n$ - ciągi z zerem na końcu

$j_n$ - ciągi z jedynką na końcu

$d_n$ - ciągi z dwójką na końcu

$c_n$ - wszystkie ciągi $\Rightarrow$ $c_n = z_n + j_n + d_n$

$$z_n = z_{n-1} + j_{n-1} + d_{n-1}$$
$$j_n = z_{n-1} + d_{n-1}$$
$$d_n = z_{n-1} + j_{n-1}$$

Więc
$$c_n = 3z_{n-1} + 2d_{n-1} + 2j_{n-1} =$$
$$= z_{n-1} + 2(z_{n-1} + d_{n-1} + j_{n-1}) =$$
$$= z_{n-1} + 2c_{n-1} =$$
$$= c_{n-2} + 2c_{n-1}$$

Stąd anihilatorem jest $(E^2 - 2E - 1) = (E - (1-\sqrt{2}))(E - (1+\sqrt{2}))$,

$a_0 = 0$, $a_1 = 3$, czyli

$$a_n = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \cdot (1-\sqrt{2})^n + \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^n.$$

Zadanie 11. Problem ruiny gracza (dla bogatego B, tzn. mającego nieskończoną liczbę monet - nie może przegrać, gra może trwać nieskończenie długo)

A ma k-złotych, B ma n-k-złotych

$p_k$ - prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez gracza A

$p_0 = 0$, $p_n = 1$, $p_k = \underbrace{p \cdot p_{k+1}}_{\text{wygrywamy, to mamy monetę więcej}} + \underbrace{(1-p)p_{k-1}}_{\text{przegrywamy, to mamy monetę mniej}}$ $\Rightarrow$ $\left(E^2 - \frac{1}{p}E + \frac{1-p}{p}\right) =$

$= (E-1)\left(E - \left(\frac{1}{p} - p\right)\right)$

$$p_k = \alpha + \beta\left(\frac{1}{p} - p\right)^n \Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha + \beta \\ 1 = \alpha + \beta\left(\frac{1}{p} - p\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{1 - (\frac{1}{p} - 1)^n} \\ \beta = -\dfrac{1}{1 - (\frac{1}{p} - 1)^n} \end{cases}$$

Zadanie 12. Policz sumy:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)2^k$

$$a_{n+1} = a_n + (n+1)n2^{k+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)n2^{k+1} \Rightarrow (E-1)(E-2)^2, \text{ czyli}$$

$$a_n = A + B2^n n + Cn^2 2^n$$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot (-1)^k$

$$a_{n+1} = a_n + (n+1)^2(-1)^{n+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2(-1)^{n+1} \Rightarrow (E-1)(E+1)^3, \text{ czyli}$$

$$a_n = A + B\cdot(-1)^n + C\cdot n(-1)^n + Dn^2(-1)^n$$

(c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ (fajne rozwiązanie w repetytorium 7).

Zadanie 13. Wylicz funkcję tworzącą ciągów:

dodajemy, aby sumować od 0 i otrzymać $A'(x)$

(a) $b_n = na_n$

$$B(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1} = x \overbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot x^k)' + \underbrace{(a_0x^0)' - (a_0x^0)'}_{=0}} = x \cdot A'(x)$$

(b) $c_n = \frac{a_n}{n}$, $c_0 = 0$

$$B(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k x^{k-1} dx = \int \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} dx = \int \frac{A(x) - A(0)}{x} dx$$

(c) $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) = A(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{A(x)}{1-x}$$

(d) jak na repetytorium 7.

Zadanie 15. a

$$a_n = \begin{cases} n & : n \text{ parzyste} \\ \frac{1}{n} & : n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

Ciągi pomocnicze

$p_n = 1 \quad \rightarrow \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1x^n = \frac{1}{1-x}$

$r_n = n \quad \rightarrow \quad R(x) = x \cdot P'(x)$

$q_n = \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad Q(x) = \int \frac{P(x)-P(0)}{x} dx$

$$A(x) = \frac{1}{2}\left(R(x) + R(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(Q(x) - Q(-x)\right) = \dots$$ (podstawiamy to co wyżej)

Zadanie 15. b.

$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad H_0 = 0$

$q_n = \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad Q(x) = \int \frac{P(x)-P(0)}{x} dx$ (jak w a)

$$H(x) = \frac{Q(x)}{1-x}$$

$H_n = q_0 + q_1 + \dots + q_n$

Zadanie 14.

(a) $a_n = n^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot n x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (n x^n)' = x \cdot B'(x),$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

(b) $a_n = n^3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot n^2 x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 x^n)' = x \cdot A'(x)$$

(c) $a_n = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!\,k!} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k!}$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k!} x^n = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+k) x^n =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{n+k}\right)^{(k)} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+k}\right)^{(k)} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x^k}{1-x}\right)^{(k)}$$