Analiza numeryczna, Lista 9, 10/12/2019

Zadanie 1. Sprawdź, że wielomiany Bernsteina B_i^n mają następujące własności:
$B_i^n := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \{0,1,\dots,n\})$

(a) B_i^n jest nieujemny w $[0,1]$ i osiąga w nim dokładnie jedno maksimum.

Wynika to z faktu, że wielomian Bernsteina ma miejsca zerowe dla $x=0$ oraz $x=1$, oraz bezpośrednio ze wzoru $\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, który zgodnie z warunkami istnienia nigdy nie osiągnie wartości mniejszych od 0, gdyż $t \in [0,1]$.

Teraz maksimum (przyjmujemy $t \in (0,1)$ z powyższych rozważań):

$$\frac{dB_i^n(t)}{dt} = \binom{n}{i}\left(it^{i-1}(1-t)^{n-i} - t^i(n-i)(1-t)^{n-i-1}\right) = 0 \qquad /:\binom{n}{i}$$

$$it^{i-1}(1-t)^{n-i} - t^i(n-i)(1-t)^{n-i-1} = 0 \qquad /: t^{i-1}$$

$$i(1-t)^{n-i} - t(n-i)(1-t)^{n-i-1} = 0 \qquad /: (1-t)^{n-i-1}$$

$$i(1-t) - t(n-i) = 0$$

$$i - it - nt + it = 0$$

$$i = nt$$

$$t = \frac{i}{n} \quad \blacksquare$$

b

Dwumian Newtona:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$y := t$

$x := (1-t)$

(b) $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \equiv 1$

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = ((1-t)+t)^n = 1^n = 1 \quad \blacksquare$$

(c) $B_i^n(u) = (1-u)\, B_i^{n-1}(u) + u B_{i-1}^{n-1}(u), \quad 0 \le i \le n$

$$(1-u)\binom{n-1}{i} u^i (1-u)^{n-1-i} + u\binom{n-1}{i-1} u^{i-1} (1-u)^{n-1-(i-1)} =$$

$$= \binom{n-1}{i} u^i (1-u)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} u^i (1-u)^{n-i} = \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right] u^i (1-u)^{n-i} =$$

$$= \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} = B_i^n(u) \quad \blacksquare$$

(d) $B_i^n(u) = \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(u), \quad 0 \le i \le n$

Wykorzystujemy fakt z (c), czyli możliwość rekurencyjnego zapisu $B_i^n(u)$:

(1) $(1-u)B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n+i-1} = \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} \binom{n+1}{i} u^i (1-u)^{n+i-1} =$

$$= \frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(u)$$

(2) $u B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^{i+1} (1-u)^{n-i} = \binom{n}{i} u^{i+1} (1-u)^{n+1-(i+1)} =$

$$= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i+1}} \binom{n+1}{i+1} u^{i+1} (1-u)^{n+1-(i+1)} = \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(u)$$

Stąd $B_i^n(u) = (1-u)B_i^n(u) + uB_i^n(u) = \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(u). \quad \blacksquare$

Zadanie 2. Baza przestrzeni Π_n.

$$B_3^3(t) = \binom{3}{3} t^3$$
$$B_2^3(t) = \binom{3}{2} t^2 (1-t)$$
$$B_1^3(t) = \binom{3}{1} t (1-t)^2$$
$$B_0^3(t) = \binom{3}{0} (1-t)^3$$

$\Rightarrow$

$$\alpha_3 : t^3$$
$$\alpha_2 : t^3 + t^2$$
$$\alpha_1 : t^3 + t^2 + t$$
$$+ \; \alpha_0 : t^3 + t^2 + t + 1$$

$$\alpha_0 = 0$$

$\alpha_1 + \alpha_0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ itd.

więc $\alpha_i = 0$ dla $i = 0, 1, \dots, n$,

czyli $B_0^n, \dots, B_n^n$ tworzą bazę przestrzeni Π_n.

Zadanie 3. Dowód algorytmu de Casteljau (z wykładu)

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} W_i B_i^n(t) \qquad \begin{cases} W_k^{(0)} = W_k & k = 0, 1, 2, \dots, n \\ W_k^{(i)} = (1-t) W_k^{(i-1)} + t W_{k+1}^{(i-1)} & i = 1, 2, \dots, n; \; k = 0, \dots, n-i \end{cases}$$

Indukcja po n:

- $n = 0 \Rightarrow P_0(t) = W_0 \cdot B_0^0(t) = W_0 = W_0^{(0)}$
- załóżmy, że $P_n(t)$ zachodzi, pokażemy dla $P_{n+1}(t)$ (czyli dla $n+1$):

$$P_{n+1}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} W_i^{(0)} B_i^{n+1}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} W_i^{(0)} \left[(1-t) B_i^n(t) + t B_{i-1}^n(t) \right] =$$
$$= (1-t) \sum_{i=0}^{n} W_i^{(0)} B_i^n(t) + t \sum_{i=1}^{n} W_{i+1}^{(0)} B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \underbrace{\left[W_i^{(0)}(1-t) + t \cdot W_{i+1}^{(0)} \right]}_{W_i^{(1)}}$$

Interpretacja na wykładzie + slajdach.

Zadanie 4. Schemat Hornera dla obliczania punktu na krzywej Béziera.

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) W_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} W_i =$$

$$= \binom{n}{0} t^0 (1-t)^n W_0 + \binom{n}{1} t^1 (1-t)^{n-1} W_1 + \ldots + \binom{n}{n-1} t^{n-1} (1-t)^1 W_{n-1} + \binom{n}{n} t^n (1-t)^0 W_n =$$

$$= \left(\ldots \left(W_0 \binom{n}{0} (1-t) + W_1 \binom{n}{1} t \right)(1-t) + \ldots + W_{n-1} \binom{n}{n-1} t^{n-1} \right)(1-t) + W_n \binom{n}{n} t^n$$

Algorytm:

$u = 1-t$

$b = n$ (dwumian Newtona)

$p = p_0$ (wynik)

$d = 1$ (ciągły do t^n)

FOR $i=1$ TO n:

  $p = p \cdot u + b \cdot p_i \cdot d$

  $d = d \cdot t$

  $b = (b \cdot (n-i)) / (i+1)$

RETURN p

Dla przyspieszenia obliczeń korzystamy ze wzoru:

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{i-1} \cdot \frac{n+1-i}{i},$$

więc do b przypisujemy n.

Zadanie 5. Bezier Coeffs - PWO ++

$$B_i^n(t) \cdot B_j^m(t) = k \cdot B_{i+j}^{n+m}(t)$$

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_i^n(t), \qquad q(t) = \sum_{j=0}^{2} b_j B_j^2(t)$$

$B_i^n(t) \cdot B_j^2(t)$ $\downarrow$

stała

$$p(t) \cdot q(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_i^n(t) \cdot \sum_{j=0}^{2} b_j B_j^2(t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{2} k_{ij} a_i b_j B_{i+j}^{n+2}(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+2} B_i^{n+2}(t) \sum_{j=0}^{2} a_{i-j} b_j \underbrace{\frac{\binom{n}{i}\binom{2}{j}}{\binom{n+2}{i+j}}}_{k_{ij}}$$

$$t \cdot B_i^n \longrightarrow B_{i+1}^{n+1}$$

$$t^2 \cdot B_i^n \longrightarrow B_{i+2}^{n+2}$$

Zamiana algorytmu na uniwersalny polega na zmianie indeksu 2 w $q(t)$ na m, tzn.

$$q(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot B_j^m(t).$$

z wykładu

Zadanie 3. Sformułuj i udowodnij algorytm de Casteljau...

Niech $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t)\cdot W_k$, $P(t)$ – krzywa Béziera, W_k – punkty kontrolne,

wtedy mamy:

$$\begin{cases} (1)\ W_k^{(0)} = W_k & (k = 0,1,\dots,n) \\ (2)\ W_k^{(i)} = (1-t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} & (i = 1,2,\dots,n,\ k = 0,1,\dots,n-i) \end{cases}$$

i otrzymujemy $P_n(t) = W_0^{(n)}$ dla $t \in [0,1]$.

P(t) dla $W_0,\dots,W_{n-1}$

$$* \quad W_0^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{n-1} W_i B_i^{n-1}(t)$$

$$W_1^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} W_i B_{i-1}^{n-1}(t)$$

P(t) dla $W_1,\dots,W_n$

$\Downarrow$

P(t) dla $W_0,\dots,W_n$

$$\sum_{i=0}^{n} W_0 B_i^n(t)$$

Udowodnimy to indukcyjnie:

- $n = 0 \Rightarrow P_0(t) = B_0^0(t)\cdot W_0 = 1\cdot W_0 = W_0^{(0)}$

Do kroku indukcyjnego przydadzą się własności (tzn dla $n>0$):

- $(1-t)B_0^{n-1}(t) = (1-t)\cdot\binom{n-1}{0}\cdot t^0\cdot(1-t)^{n-1} = (1-t)^n = B_0^n(t)$
- $tB_{n-1}^{n-1}(t) = t\cdot\binom{n-1}{n-1}\cdot t^{n-1}\cdot(1-t)^{n-1-(n-1)} = t^n = B_n^n(t)$
- $(1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) = B_i^n(t)$ (z zadania 1c lub wykładu)

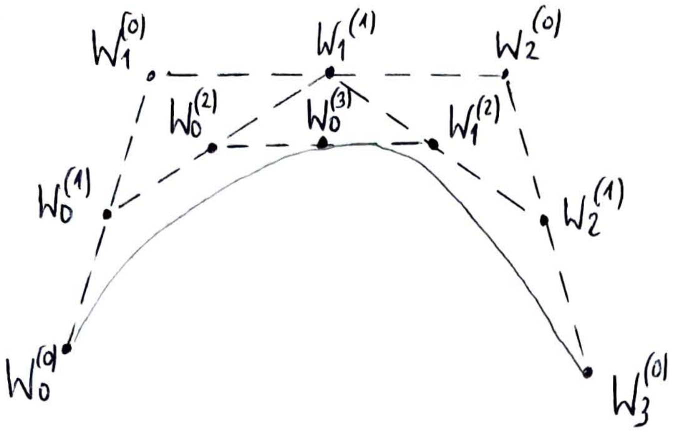
(*) Zauważmy, że punkty $W_0^{(n-1)}$ i $W_1^{(n-1)}$ są odpowiadającymi danej wartości parametru t punktami krzywych Béziera stopnia $n-1$, reprezentowanych odpowiednio przez $W_0, W_1, \dots, W_{n-1}$ oraz $W_1, W_2, \dots, W_n$. Ze związku rekurencyjnego wielomianów stopni $n-1$ oraz n mamy:

$$(2) = W_0^{(n)} = (1-t)\sum_{i=0}^{n-1} W_i B_i^{n-1}(t) + t\sum_{i=1}^{n} W_i B_{i-1}^{n-1}(t) =$$

$$= W_0(1-t)B_0^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} W_i\left[(1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)\right] + W_n t B_{n-1}^{n-1}(t) =$$

$$= W_0(1-t)B_0^{n-1}(t) + W_n t B_{n-1}^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} W_i B_i^n = W_0 B_0^n(t) + W_n B_n^n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} W_i B_i^n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} W_i B_i^n = P_n(t) \ \blacksquare$$



Interpretacja geometryczna algorytmu de Casteljau dla $t = \frac{1}{2}$, P_3.

Zadanie 6. Wykaż, że dla każdego $t \in [0,1]$ $R_n(t)$ jest punktem na płaszczyźnie będącym kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych $W_0, W_1, \dots, W_n \in \mathbb{R}^2$.

$$R_n(t) := \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i W_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i W_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j B_j^n(t)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j B_j^n(t)} \cdot W_i$$

Kombinacja barycentryczna punktu wyraża się przez $\alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1 + \dots + \alpha_n W_n$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{R}$ oraz $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$, W_i to punkty. Stąd mamy, że

$$\alpha_i = \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}, \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j B_j^n(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)} = 1,$$

czyli $R_n(t)$ jest kombinacją barycentryczną punktów, a więc jest on punktem na płaszczyźnie. ■