Zadanie 1. Znajdź NIFS3 dla danych

(a)

x_k	-3	0	3
y_k	-2	1	2

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & : x \in [-3,0] \\ s_2(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H & : x \in [0,3] \end{cases}$$

$$s'(x) = \begin{cases} s_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C & : x \in [-3,0] \\ s_2'(x) = 3Ex^2 + 2Fx + G & : x \in [0,3] \end{cases}$$

$$s''(x) = \begin{cases} s_1''(x) = 6Ax + 2B & : x \in [-3,0] \\ s_2''(x) = 6Ex + 2F & : x \in [0,3] \end{cases}$$

UKŁAD 8 RÓWNAŃ:

$s_1(-3) = -27A + 9B - 3C + D = -2$

$s_1(0) = s_2(0) = D = H = 1$

$s_1(3) = 27E + 9F + 3G + H = 2$

$s_1'(0) = s_2'(0) \Rightarrow C = G$

(ciągłość s')

$s_1''(0) = s_2''(0) \Rightarrow 2B = 2F$

naturalność $\begin{cases} s_1''(-3) = s_2''(3) = 0 \Rightarrow \\ = -18A + 2B = 18E + 2F \end{cases}$

$A = -\frac{1}{54}$ $\quad B = -\frac{1}{6}$ $\quad C = \frac{2}{3}$ $\quad D = 1$

$E = \frac{1}{54}$ $\quad F = -\frac{1}{6}$ $\quad G = \frac{2}{3}$ $\quad H = 1$

Więc mamy:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = -\frac{x^3}{54} - \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}x + 1 & : x \in [-3,0] \\ s_2(x) = \frac{x^3}{54} - \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}x + 1 & : x \in [0,3] \end{cases}$$

(b)

x_0	-2	-2		
x_1	-1	-1	$\frac{-1+2}{-1+2}=1$	
x_2	1	3	$\frac{3+1}{1+1}=2$	$\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$
x_3	2	6	$\frac{6-3}{2-1}=3$	$\frac{3-2}{2+1}=\frac{1}{3}$

$$\boxed{\begin{aligned} h_k &= x_k - x_{k-1} \\ M_0 &= M_3 = 0 \\ \lambda_k &= \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} \end{aligned}}$$

$$s_k(x) = h_k^{-1}\Big[\tfrac{1}{6}M_{k-1}(x_k-x)^3 + \tfrac{1}{6}M_k(x-x_{k-1})^3 + \left(y_{k-1} - \tfrac{1}{6}M_{k-1}h_k^2\right)(x_k - x) + \left(y_k - \tfrac{1}{6}M_k h_k^2\right)(x - x_{k-1})\Big]$$

← wzór na k-ty segment NIFS3

Musimy obliczyć momenty M_1, M_2 z **równań**, a dokładniej z układu:

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k+1} = 6 f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \text{ czyli:}$$

$$\begin{cases} \underline{\lambda_1 M_0} + 2M_1 + (1-\lambda_1)M_2 = 6\cdot\frac{1}{3} \\ \lambda_2 M_1 + 2M_2 + \underline{(1-\lambda_2)M_3} = 6\cdot\frac{1}{3} \end{cases} \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2M_1 + \frac{2}{3}M_2 = 2 \\ \frac{2}{3}M_1 + 2M_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1 = \frac{3}{4} \\ M_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

podkreślone wyrazy wynoszą 0 ($M_0 = M_3 = 0$)

(*) obliczmy potrzebne wyrazy λ_1, λ_2: $h_1 = 1, h_2 = 2, h_3 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{2}{3}$

Podczas obliczania $s_k(x)$ POMIJAM wyrazy o wartości 0!

$$s_1(x) = 1\cdot\left[\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{4}(x+2)^3 + (-2)(-1-x) + \left(-1 - \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot 1^2\right)(x+2)\right] = \frac{x^3}{8} + \frac{3x^2}{4} + \frac{19x}{8} + \frac{3}{4}$$
$x \in [-2,-1]$

$$s_2(x) = \frac{1}{2}\left[\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{4}(1-x)^3 + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{4}(x+1)^3 + \left(-1 - \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot 2^2\right)(1-x) + \left(3 - \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot 2^2\right)(x+1)\right] =$$
$x \in [-1,1]$
$$= \frac{3x^2}{8} + 2x + \frac{5}{8}$$

$$s_3(x) = 1\cdot\left[\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{4}(2-x)^3 + \left(3 - \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot 1^2\right)(2-x) + (6)\cdot(x-1)\right] = -\frac{x^3}{8} + \frac{3x^2}{4} + \frac{13x}{8} + \frac{3}{4}$$
$x \in [1,2]$

Zadanie 2. Czy funkcja $f(x)$ jest NIFS3?

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 9x & : x \in [-1, 0] \\ -5x^3 + 3x^2 + 9x & : x \in [0, 1] \\ 5x^3 - 27x^2 + 39x - 10 & : x \in [1, 2] \\ -x^3 + 9x^2 - 33x + 38 & : x \in [2, 3] \end{cases}$$

1° $f(x_k) = y_k$

2° ciągłość f: $0 = \lim_{x \to 0^-} (x^3 + 3x^2 + 9x) = \lim_{x \to 0^+} (-5x^3 + 3x^2 + 9x) = 0$

$$7 = \lim_{x \to 1^-} (-5x^3 + 3x^2 + 9x) = \lim_{x \to 1^+} (5x^3 - 27x^2 + 39x - 10) = 7$$

$$0 = \lim_{x \to 2^-} (5x^3 - 27x^2 + 39x - 10) = \lim_{x \to 2^+} (-x^3 + 9x^2 - 33x + 38) = 0$$

3° ciągłość f': $9 = \lim_{x \to 0^-} (3x^2 + 6x + 9) = \lim_{x \to 0^+} (-15x^2 + 6x + 9) = 9$

$$0 = \lim_{x \to 1^-} (-15x^2 + 6x + 9) = \lim_{x \to 1^+} (15x^2 - 54x + 39) = 0$$

$$-9 = \lim_{x \to 2^-} (15x^2 - 54x + 39) = \lim_{x \to 2^+} (-3x^2 + 18x - 33) = -9$$

4° ciągłość f'': $6 = \lim_{x \to 0^-} (6x + 6) = \lim_{x \to 0^+} (-30x + 6) = 6$

$$-24 = \lim_{x \to 1^-} (-30x + 6) = \lim_{x \to 1^+} (30x - 54) = -24$$

$$6 = \lim_{x \to 2^-} (30x - 54) = \lim_{x \to 2^+} (-6x + 18) = 6$$

5° $f(x) \in \Pi_3$

6° $f''(x_0) = f''(x_n)$

Więc funkcja $f(x)$ jest NIFS3. $\blacksquare$

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) + 6 = 0$$

$$f''(3) = 18 - 6 \cdot 3 = 0$$

Zadanie 3. Czy istnieją takie stałe a, b, c, d, że $f(x)$ jest NIFS3?

$$f(x) = \begin{cases} 4x & : x \in [-2,-1] \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & : x \in [-1,1] \\ -6x & : x \in [1,2] \end{cases}$$

Dla uproszczenia zapisu, niech:

$f_1(x) = 4x$

$f_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f_3(x) = -6x$

Sprawdźmy (1) ciągłość f:

$$f_1(-1) = f_2(-1) \Rightarrow -4 = -a + b - c + d$$

$$f_2(1) = f_3(1) \Rightarrow -6 = a + b + c + d$$

(2) ciągłość f': $f_1'(x) = 4$, $f_2'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f_3'(x) = -6$

$$f_1'(-1) = f_2'(-1) \Rightarrow -4 = 3a - 2b + c$$

$$f_2'(1) = f_3'(1) \Rightarrow -6 = 3a + 2b + c$$

(3) ciągłość f'': $f_1''(x) = 0$, $f_2''(x) = 6ax + 2b$, $f_3''(x) = 0$

stąd dostajemy „naturalność" funkcji

$$f_1''(-1) = f_2''(-1) \Rightarrow 0 = -6a + 2b$$

$$f_2''(1) = f_3''(1) \Rightarrow 0 = 6a + 2b$$

Dostajemy układ równań

$$\begin{cases} -4 = -a + b - c + d \\ -6 = a + b + c + d \\ \left.\begin{matrix} 4 = 3a - 2b + c \\ -6 = 3a + 2b + c \end{matrix}\right\} \text{stąd } -4b = 10 \\ \left.\begin{matrix} 0 = -6a + 2b \\ 0 = 6a + 2b \end{matrix}\right\} \text{stąd } 4b = 0 \end{cases}$$

sprzeczność, czyli takie stałe a, b, c, d nie istnieją ■

Zadanie 4. Niech s będzie NFS3 interpolującą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Jak wiemy, momenty $M_k := s''(x_k)$ spełniają układ równań:

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k=1,2,\ldots,n-1), \qquad (*)$$

gdzie $M_0 = M_n = 0$, $d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$, $\lambda_k = \dfrac{h_k}{h_k + h_{k+1}}$, $h_k := x_k - x_{k-1}$. Sformułuj i uzasadnij oszczędny algorytm rozwiązywania $(*)$. Jaki jest koszt jego realizacji?

ALGORYTM

$$\left[\begin{array}{l} q_0 := 0 \\ u_0 := 0 \\ \left.\begin{array}{l} p_k := \lambda_k q_{k-1} + 2 \\ q_k := (\lambda_k - 1)/p_k \\ u_k := (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{array}\right\} k = 1,2,\ldots,n-1 \end{array}\right.$$

Używając obliczonych wartości będziemy mieli

$$\binom{*}{*} \begin{cases} M_{n-1} = u_{n-1}, \\ M_k = u_k + q_k M_{k+1} \quad (k = n-2, n-3, \ldots, 1), \end{cases}$$

momenty znajdujemy w czasie $O(n)$.

$$p_1 = \lambda_1 q_0 + 2 = 2$$
$$u_1 = (d_1 - \lambda_1 u_0)/p_1 = \frac{d_1}{p_1}$$
$$q_1 = \frac{\lambda_1 - 1}{p_1}$$

Dowód indukcyjny $\binom{*}{*}$:

- $k = 1$

$$(*)(1) = \lambda_1 M_0 + 2M_1 + (1-\lambda_1)M_2 = d_1 \quad /: p_1 (=2)$$

$$(*)(1) = M_1 + \frac{1-\lambda_1}{p_1} M_2 = \frac{d_1}{p_1}$$

$$M_1 - \frac{\lambda_1 - 1}{p_1} M_2 = \frac{d_1}{p_1}$$

$$M_1 = \frac{d_1}{p_1} + \frac{\lambda_1 - 1}{p_1} M_2 = u_1 + q_1 M_2$$

• załóżmy, że dla k zachodzi, pokażę dla $k+1$

$$(*)(k+1) = \lambda_{k+1} M_k + 2M_{k+1} + (1-\lambda_{k+1}) M_{k+2} = d_{k+1}$$

$$(\ast\ast)(k) = u_k + q_k M_{k+1} = M_k \quad / \cdot \lambda_{k+1}$$

$$M_k \lambda_{k+1} = u_k \lambda_{k+1} + q_k M_{k+1} \lambda_{k+1} \quad / -(*)(k+1)$$

$$-(\lambda_{k+1} q_k + 2) M_{k+1} - (1-\lambda_{k+1}) M_{k+2} = \lambda_{k+1} u_k - d_{k+1} \quad / \cdot (-1)$$

$$\underbrace{(\lambda_{k+1} q_k + 2)}_{p_{k+1}} M_{k+1} - (\lambda_{k+1} - 1) \cdot M_{k+2} = d_{k+1} - \lambda_{k+1} u_k \quad / : p_k$$

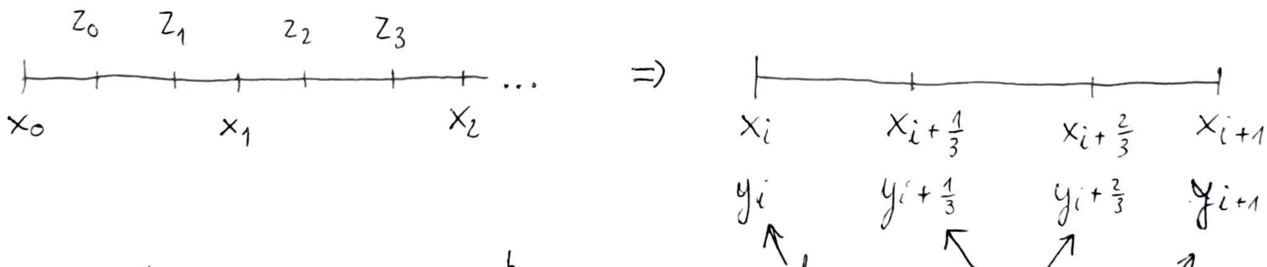
$$M_{k+1} - \underbrace{\frac{\lambda_{k+1} - 1}{p_{k+1}}}_{q_{k+1}} M_{k+2} = \underbrace{\frac{d_{k+1} - \lambda_{k+1} u_k}{p_{k+1}}}_{u_{k+1}}$$

$$M_{k+1} - q_{k+1} M_{k+2} = u_{k+1} \quad \blacksquare$$

Zadanie 5. PWO++ $\rightarrow$ NSpline3(x, y, z), dane $x := [x_0, x_1, \dots, x_n]$ dla $n \leq 100$

$x_0, x_1, \dots, x_n$ - 100 wartości

$s(z_0), s(z_1), \dots, s(z_m)$, $m < 200$ - 200 wartości



$$s_i = \underset{b_0}{y_i} + \overbrace{y[i, i+\tfrac{1}{3}]}^{b_1}(x - x_i) + \overbrace{y[i, i+\tfrac{1}{3}, i+\tfrac{2}{3}]}^{b_2}(x-x_i)(x-x_{i+\frac{1}{3}}) + \overbrace{y[i, i+\tfrac{1}{3}, i+\tfrac{2}{3}, i+1]}^{b_3}(x-x_i)(x-x_{i+\frac{1}{3}})(x-x_{i+\frac{2}{3}})$$

$$s_i' = b_1 + b_2\left((x-x_i) + (x-x_{i+\frac{1}{3}})\right) + b_3\left((x-x_i)(x-x_{i+\frac{1}{3}}) + (x-x_{i+\frac{1}{3}})(x-x_{i+\frac{2}{3}}) + (x-x_i)(x-x_{i+\frac{2}{3}})\right)$$

Zadanie 6.

Algorytm taki sam jak w zadaniu 4.

t_i	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\dots$	1
x_i/y_i	x_0/y_0	x_1/y_1	x_2/y_2		x_{27}/y_{27}
M_x/M_y	M_x^0/M_y^0	M_x^1/M_y^1	M_x^2/M_y^2	$\dots$	M_x^{27}/M_y^{27}

$u_k = \frac{k}{M}$, M powinno być duże, dla 100 zaczyna już dobrze działać (lepiej dla 108, bo 27 | 108), dla ~1000 już bardzo dobrze działa