Lista 1, zadanie 6 - Tomasz Woszczyński

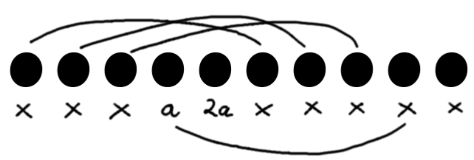
Treść: Dany jest niemalejący ciąg n liczb całkowitych dodatnich $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$. Wolno nam modyfikować ten ciąg za pomocą następującej operacji: wybieramy dwa elementy a_i, a_j, spełniające $2a_i \leqslant a_j$ i wykreślamy je oba z ciągu. Ułóż algorytm obliczający, ile co najwyżej elementów możemy w ten sposób usunąć.

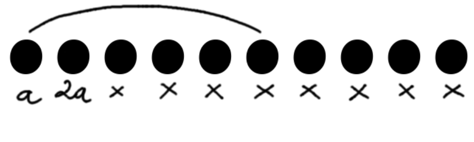
Rozwiązanie: Algorytm polega na podzieleniu całej tablicy na dwie tablice L i R o długości $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ oraz $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, a następnie porównywaniu kolejnych elementów w następujący sposób: bierzemy pierwszy element z L i usuwamy go z pierwszym elementem z P, który spełnia warunek $2a_i \leqslant a_j$. W takim przypadku zwiększamy licznik o 2, gdyż tyle elementów jest usuwanych oraz przechodzimy do kolejnego elementu w L. Krok ten powtarzamy dopóki nie dojdziemy do ostatniego elementu L. Przedstawiony powyżej algorytm działa w czasie $O(n)$, gdyż jednokrotnie przechodzimy po całej tablicy: jednym wskaźnikiem przez $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ elementów, a drugim przez $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ elementów.

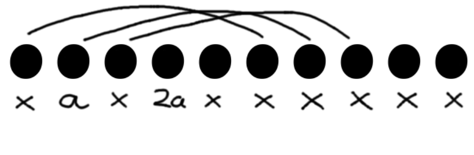
Aby rozwiązanie było optymalne, należy zawsze brać kolejne elementy z L i usuwać je z pierwszymi **najmniejszymi** elementami z R, aby uniknąć sytuacji, w których dla np. $L = [1, 2, 3], R = [5, 6, 7]$ usuwalibyśmy pary $(1, 2), (3, 6)$, zamiast $(1, 5), (2, 6), (3, 7)$. Dla optymalnego rozwiązania wykreślenie wszystkich elementów L będzie oznaczało usunięcie całego ciągu, a do tego dążymy.

Dowód: Weźmy usunięcie optymalne i załóżmy, że został pominięty jakiś element. Może to wystąpić w trzech różnych sytuacjach:

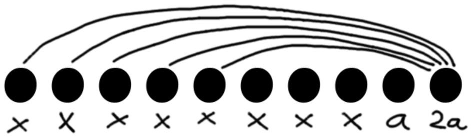
1. 2 elementy w L: usuwając według naszego algorytmu na lewo od a będziemy mieli elementy mniejsze lub równe a, a na prawo od $2a$ będą większe lub równe. Wtedy nasz algorytm nie pominie żadnej pary, która należy do rozwiązania optymalnego, poniżej przedstawione przykładowe sytuacje:



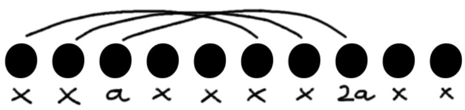


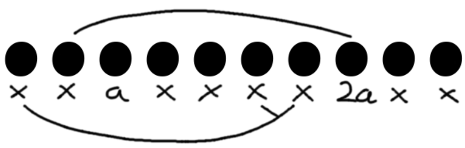


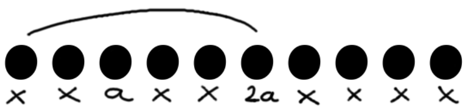
2. 2 elementy w P: usuwając elementy na pewno będziemy mogli skasować któryś z x z elementem $2a$, jako że jest on dwukrotnie większy od x, co nam na to pozwoli, o pozostałych porównywanych wartościach nie możemy zbyt wiele powiedzieć. Przedstawia to poniżej przedstawiony rysunek:



3. po jednym elemencie w L i P: rozpatrzmy kilka możliwych przypadków. Jeśli jakiś x znajduje się na lewo od a w L, to będzie można go wykreślić z jakąś liczbą z P, jako że $a \leqslant 2a$, ewentualnie a wykreśli $2a$ (rysunek 1 i 2):







Możemy zauważyć, że w ogólnym przypadku jeśli na lewo od a jest mniej liczb niż przed $2a$ w P, to albo wykreślimy a albo $2a$. Gdy jest ich więcej, to z pewnością wykreślimy $2a$.

Rozpatrzenie powyższych przypadków pokazuje, że algorytm jest poprawny i znajduje optymalne rozwiązanie, co kończy dowód. ■