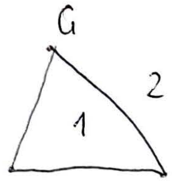
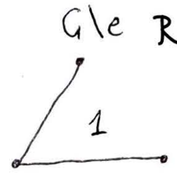
Zadanie 1. Pokaż, że jeśli G jest planarny, to $G \setminus e$ jest planarny. Czy graf Petersena jest planarny?

Dowód: Weźmy graf planarny G. Wiemy, że w takim grafie spełniony jest wzór Eulera $n - m + f = 2$ dla $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$, $f = |S(G)|$ oraz z twierdzenia Kuratowskiego, że nie zawiera on podgrafu homeomorficznego z K_5 lub $K_{3,3}$. Zabierzmy krawędź e, aby uzyskać graf $G \setminus e$. Sprawdźmy najpierw wzór Eulera – zdjęcie krawędzi sprawia, że $m' = m - 1$ oraz $f' = f - 1$:

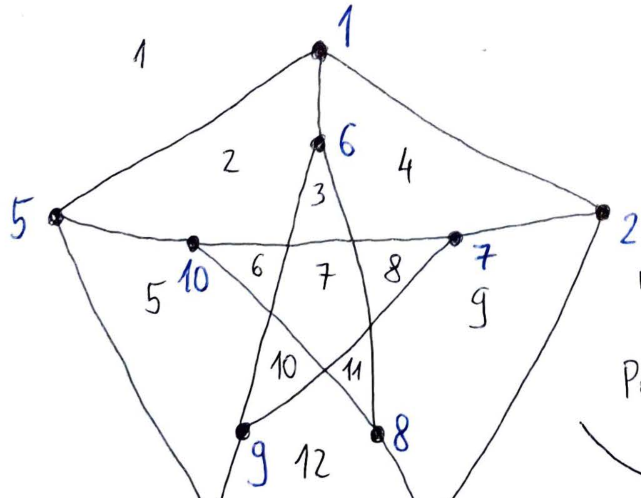
TO NIE JEST ROZWIĄZANIE!





Mamy więc $n + f' - m' = n + f - 1 - m + 1 = n + f - m = 2$.
Dla twierdzenia Kuratowskiego wystarczy zajście własności grafu $G \setminus e$, bo skoro G nie miał pewnych, to tym bardziej $G \setminus e$ ich nie ma. ■

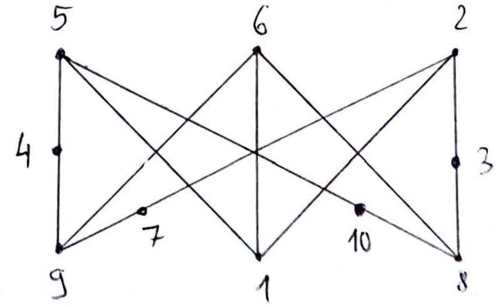
Na czarno numery obszarów f, na niebiesko numery wierzchołków.



$n = 10$
$m = 15$
$f = 12$

$n - m + f = 3 \neq 2$

Pomińmy krawędzie $\{7, 10\}$ oraz $\{3, 4\}$, znajdujemy podgraf $K_{3,3}$:



Więc z twierdzenia Kuratowskiego, graf Petersena nie jest planarny. ■

Zadanie 2. Niech G będzie grafem o co najmniej 11 wierzchołkach. Wykaż, że G i $\bar{G}$ nie mogą być jednocześnie planarne.

$$m(G) + m(\bar{G}) = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{(graf pełny)}$$

Dla grafów planarnych spełniona jest nierówność $m \leq 3n - 6$, a więc

$$\begin{aligned} m(G) &\leq 3n(G) - 6 \\ m(\bar{G}) &\leq 3n(\bar{G}) - 6 \end{aligned} \implies m(G) + m(\bar{G}) \leq 3n(G) + 3n(\bar{G}) - 12 = 6n(G) - 12$$

Sprawdźmy więc czy dla $n(G) \geq 11$ zachodzi

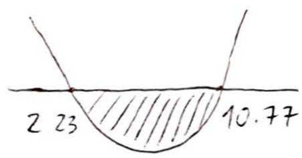
$$\frac{n(n-1)}{2} \leq 6n - 12$$

$$n^2 - n \leq 12n - 24$$

$$n^2 - 13n + 24 \leq 0$$

$$\Delta = 13^2 - 4 \cdot 24 = 169 - 96 = 73$$

$$n_{1/2} = \frac{13 \pm \sqrt{73}}{2} = 10.77 \ / \ 2.23$$



A więc G i $\bar{G}$ mogą być planarne dla $n = 3, \ldots, 10$, a więc dla $n \geq 11$ nie mogą być one jednocześnie planarne. ∎

Zadanie 3. Pokaż, że w dowolnym grafie prostym planarnym ($n \geq 3$) istnieją co najmniej trzy wierzchołki stopnia mniejszego od 5.

Skoro G - prosty, planarny i $n \geq 3$, to zachodzi $m \leq 3n-6$. Mnożąc tę nierówność przez 2 dostajemy $2m \leq 6n-12$, a z lematu o uściskach dłoni mamy $\sum_u \deg(u) = 2m$, czyli $\sum_u \deg(u) = 2m \leq 6n-12$.

Załóżmy nie wprost, że wierzchołków o stopniu mniejszym niż 5 jest mniej niż 3. Oszacujmy sumę stopni wierzchołków od dołu, więc istnieją dwa wierzchołki stopnia 1, a pozostałe są stopnia 6. Wtedy mamy, że

$$\sum_u \deg(u) = 2m \geq 6(n-2) + 2 \cdot 1 = 6n-10$$

czyli otrzymujemy

$$6n-12 \geq 2m \geq 6n-10 \quad /:2$$
$$3n-6 \geq m \geq 3n-5$$
$$-6 \geq -5 \quad \text{SPRZECZNOŚĆ}$$

Więc pokazaliśmy, że w dowolnym grafie prostym planarnym istnieją co najmniej trzy wierzchołki stopnia mniejszego od 5.

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli G jest grafem płaskim, to

$n(G) + f(G) = m(G) + k(G) + 1$, gdzie $f(G)$ jest liczbą obszarów, a $k(G)$ liczbą składowych spójności G.

$n + f = m + k + 1 \Rightarrow n + f - m = k + 1$ ← zachodzi dla grafu spójnego, płaskiego: $n + f - m = 2 = k + 1 \Rightarrow k = 1$ (baza)

Załóżmy, że dla dowolnego $k_0 \in \mathbb{N}$ zachodzi teza, tzn. bierzemy $k \in \mathbb{N}$ i zakładamy, że dla $1 < k_0 \leq k$ zachodzi $k(G) = k_0$. Dla $k_0 = 1$ (baza) pokazałem powyżej z własności wzoru Eulera.

Krok: pokażemy, że dla $k+1$ zachodzi teza

Weźmy dowolną spójną składową z grafu G i nazwijmy ją G'. Skoro G' jest płaski i spójny, to zachodzi

$$n(G') + f(G') - m(G') = 2$$

Niech $G'' = G \setminus G'$, wtedy dla niego zachodzi założenie indukcyjne, tzn.

$$n(G'') + f(G'') - m(G'') = k + 1$$

Połączmy teraz G' oraz G''. Zauważmy, że $f(G) = f(G') + f(G'') - 1$, ponieważ nie chcemy dwukrotnie liczyć obszarów zewnętrznych, zatem mamy

$$n(G) + f(G) - m(G) = \underbrace{n(G') + f(G') - m(G')}_{2} + \underbrace{n(G'') + f(G'') - m(G'')}_{k+1} - 1 =$$

$$= 2 + k + 1 - 1 = k + 2 = (k+1) + 1 = k(G) + 1 \quad \blacksquare$$

Zadanie 5. Udowodnij, że jeśli G jest spójnym grafem płaskim, w którym najkrótszy cykl ma długość r, to spełniona jest nierówność

$$(r-2)m \leq r(n-2)$$

Kiedy nierówność ta staje się równością?

Skoro mamy graf spójny i płaski, to $n - m + f = 2$. Skoro znamy najkrótszy cykl, to każda ściana ma minimum r boków, a więc minimalnie jest $f \cdot r$ boków. Zsumowanie liczby boków ze wszystkich ścian da nam $2m$, ponieważ każda krawędź jest bokiem dwóch ścian jednocześnie, więc stąd mamy $2m \geq f \cdot r$.

$$n - m + f = 2 \Rightarrow f = 2 - n + m$$

$$2m \geq f \cdot r = r(2 - n + m)$$

$$2m \geq 2r - rn + rm$$

$$2m - rm \geq 2r - rn$$

$$(2-r)m \geq (2-n)r \quad / \cdot (-1)$$

$$(r-2)m \leq (n-2)r$$

$\blacksquare$

Powyższa nierówność staje się równością dla $2m = fr$, gdzie $f \geq 2$ (aby istniał cykl), $r \geq 3$ (nie ma krótszych cykli).

Zadanie 13. Wykaż, że liczba krawędzi dowolnego grafu wynosi co najmniej $\frac{\chi(G)\cdot(\chi(G)-1)}{2}$.

Baza: $\chi(G)=1$ (nie ma krawędzi), czyli $\frac{1\cdot 0}{2}=0$ ✓

Krok: $\chi(G)>1$ Dla dowolnych kolorów mamy krawędź łączącą wierzchołki pomalowane na te kolory - w przeciwnym przypadku liczba chromatyczna $\chi(G)$ nie byłaby minimalna (co przeczyłoby jej definicji). Skoro każdy kolor łączy się z każdym innym, to ze zbioru k kolorów wybieramy dwa i łączymy krawędzią. Wybieramy je bez powtórzeń dopóki nie wykorzystamy wszystkich kombinacji, czyli mamy:

$$\binom{k}{2}=\binom{\chi(G)}{2}=\frac{\chi(G)!}{(\chi(G)-2)!\,2!}=\frac{\chi(G)\cdot(\chi(G)-1)(\chi(G)-2)!}{(\chi(G)-2)!\cdot 2}=\frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2} \quad \blacksquare$$

Zadanie 14. Pokaż, że dla dowolnego grafu G zachodzi $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq n$.

Niech G będzie grafem takim, że $|V(G)| = n$. Załóżmy, że graf G jest $\chi(G)$-kolorowalny, a jego dopełnienie $\bar{G}$ $\chi(\bar{G})$-kolorowalne. Używając minimalnych kolorowań c (dla grafu G) oraz $\bar{c}$ (dla grafu $\bar{G}$), uzyskamy kolorowanie grafu K_n, dla którego $n = \chi(K_n)$. Weźmy dowolny wierzchołek $v \in V(K_n)$ i przypiszmy mu parę kolorów $\{c(v), \bar{c}(v)\}$. Skoro każde dwa wierzchołki K_n są sąsiednie w jednym z grafów G lub $\bar{G}$, to mają one przypisane inne kolory (w tych podgrafach), stąd otrzymujemy, że jest to kolorowanie K_n, w którym użyte jest maksymalnie $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G})$ kolorów, czyli $n = \chi(K_n) \leq \chi(G) \cdot \chi(\bar{G})$. ∎

Zadanie 1. To jest poprawne rozwiązanie

G $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $G \cdot e$

Chodzi tu o otoczkę punktu powstałego po zdjęciu krawędzi, tzn. od pewnego momentu można w taki sposób poprowadzić krawędzie dochodzące do wierzchołka, że ■ nie będą się one przecinać, przez co graf G po ściągnięciu krawędzi jest planarny.

Zadanie 6.

$\{a, b\}$

$$a|F| = 2m \qquad b|V| = 2m \implies \frac{2m}{a} + \frac{2m}{b} - m = 2 \implies \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m},\ a, b \geq 3$$

1° $a = 3$ $\quad \frac{1}{b} - \frac{1}{6} = \frac{1}{m}$, więc $b = 3, 4, 5$; $\quad m = 6, 12, 30$

2° $b = 3$ $\quad \frac{1}{a} - \frac{1}{6} = \frac{1}{m}$, więc $a = 3, 4, 5$

Zadanie 7.

$$3 + 4 + 5 + \ldots + (n+2) = \frac{n(n+5)}{2} = 2m \implies n(n+5) = 4m$$

$$m \leq 3n - 6$$

$$n^2 + 6n \geq 3n - 6$$

Załóżmy, że P nie ma dwóch ścian o tej samej liczbie krawędzi:

$$\sum d(f) \geq 3 + 4 + 5 + \ldots + (f+2) \leq 2m = \sum \deg(v) \geq 3n \implies n \leq \frac{2}{3} m$$

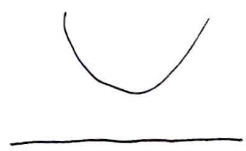
$$m \leq 3n - 6$$

$$\frac{m}{3} \leq n - 2$$

$$f - 2 \geq \frac{f(f+5)}{2}$$

$$f^2 + 3f + 4 \leq 0$$

$$\Delta = 9 - 16$$



Zadanie 8.

Niech $c: V(G) \to \{1, 2, \dots, \chi(G)\}$, c' to nasze kolorowanie

Ustawmy ciąg:

$(c(v_i) = 1, c(v_j) = 1, \dots, c(v_k) = 2, \dots, c(v_l) = \chi(G))$

Cel: $c'(v_m) \leq c(v_m)$

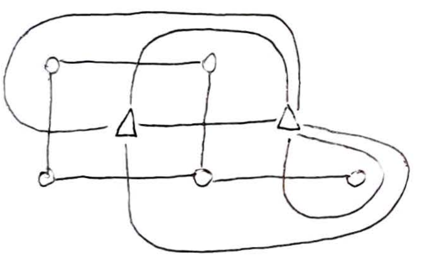
Dowód indukcyjny:

Baza: zdejmuję $c(v_i) = 1$ i dodaję $c'(v_i) = 1$.

Krok: zdejmuję $c(v_j) = k$, $\begin{cases} c'(v_j) = k & \text{dla } v_j \text{ sąsiadującego z kolorami } \{1, \dots, k-1\} \\ c'(v_j) < k & \text{wpp.} \end{cases}$

Zadanie 9.

Graf dualny G^* do grafu G, przez każdą krawędź G musi przejść krawędź w G^*



$\chi(G^*) = 2 \iff G^*$ jest dwudzielny

$n = f^* = n^{**}$

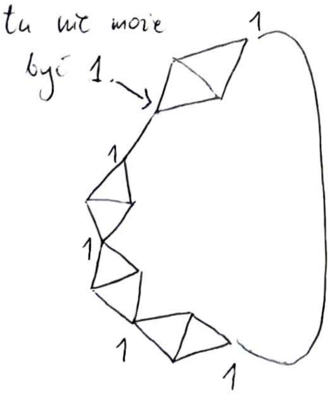
$f = n^* = f^{**}$

$m = m^* = m^{**}$

G^* nie jest dwudzielny $\Rightarrow$ G^* zawiera cykl o nieparzystej długości

Zadanie 10.

II część:



Zadanie 11.

$P_G(k) = P_{G\setminus e}(k) - P_{G\cdot e}(k)$, e - dowolna krawędź

$$P_{G\setminus e}(k) = P_G(k) + P_{G\cdot e}(k)$$

← liczba kolorowań $G\setminus e$ takich, że końce e mają taki sam kolor

↑ liczba kolorowań $G\setminus e$ takich, że końce e mają różne kolory

$\blacksquare$

Zadanie 12.

(a) $P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$

Indukcja po n:

- $n=1$ ✓
- krok: załóżmy, że $P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$ dla $n' < n$. Pokażemy, że dla n działa.

Weźmy e będące krawędzią liścia.

$$P_G(k) = P_{G\setminus e}(k) - P_{G\cdot e}(k)$$

$$P_G(k) = k \cdot P_{G\cdot e}(k) - P_{G\cdot e}(k)$$

$$P_G(k) = (k-1)\, P_{G\cdot e}(k)$$

$$P_G(k) = (k-1)\, k\, (k-1)^{n-2} = k(k-1)^{n-1}$$

(b) $P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n (k-1)$

Indukcja po n:

- $n=3$: $P_{C_3}(k) = (k-1)^3 + (-1)^3(k-1) = k(k-1)(k-2)$
- krok: załóżmy że działa dla $n' \leq n$, pokażemy dla $n+1$

$$P_G(k) = P_{G\setminus e}(k) - P_{G\cdot e}(k) = k(k-1)^n - \left((k-1)^n + (-1)^n(k-1)\right) =$$

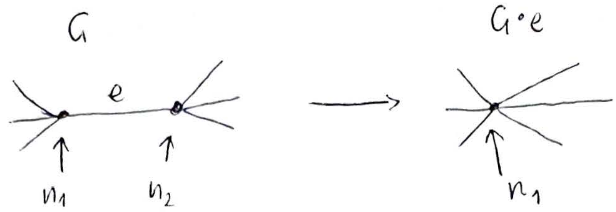
$$= k(k-1)^n - (k-1)^n - (-1)^n(k-1) = (k-1)^n(k-1) - (-1)^n(k-1) =$$

$$= (k-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(k-1)$$

$\blacksquare$

Zadanie 15.

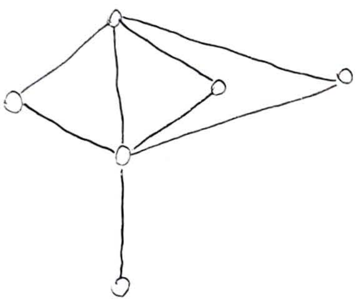
(a) z definicji:



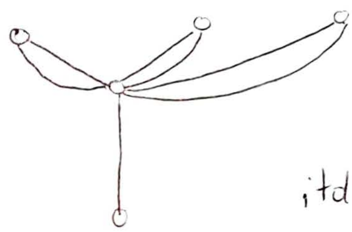
$$n(G\cdot e) = n(G) - 1$$
$$m(G\cdot e) = m(G) - 1$$
$$p(G\cdot e) = p(G)$$

(b) $t(G) = \underbrace{t(G\backslash e)}_{\text{G niezawierający e}} + t(G\cdot e)$

(c)



8



bezsensowny sposób

itd...