Problem wydawania reszty

Mamy 10 jednogroszówek,
8 dwugroszówek,
5 pięciogroszówek,
6 dziesięciogroszówek.

Nie ma eleganckiego wzoru na a_n, jednak napisanie funkcji tworzącej jest „łatwe", więc to robimy.

a_n - liczba sposobów wypłacenia n groszy

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{0 \le i_1 \le 10 \\ 0 \le i_2 \le 8 \\ 0 \le i_5 \le 5 \\ 0 \le i_{10} \le 6 \\ i_1 + 2i_2 + 5i_5 + 10i_{10} = n}} x^n = \sum_{\left.\substack{0 \le i_1 \le 10 \\ 0 \le i_2 \le 8 \\ 0 \le i_5 \le 5 \\ 0 \le i_{10} \le 6}\right\}\text{ nazwijmy to } I \text{ dla ułatwienia}} x^{i_1 + 2i_2 + 5i_5 + 10i_{10}} =$$

$$= \sum_{I} x^{i_1} \cdot x^{2i_2} \cdot x^{5i_5} \cdot x^{10i_{10}} =$$

$$= \underbrace{(1 + x + x^2 + \ldots + x^{10})}_{\text{jednogroszówki (10)}} \underbrace{(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{8 \cdot 2})}_{\text{dwugroszówki (8)}} \underbrace{(1 + x^5 + \ldots + x^{5 \cdot 5})}_{\text{pięciogroszówki (5)}} \underbrace{(1 + x^{10} + \ldots + x^{10 \cdot 6})}_{\text{dziesięciogroszówki (6)}} =$$

$$= \frac{1 - x^{11}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{9 \cdot 2}}{1 - x^2} \cdot \frac{1 - x^{6 \cdot 5}}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^{7 \cdot 10}}{1 - x^{10}}$$

Teraz załóżmy, że mamy nieskończenie wiele monet 1, 2, 5, 10-groszowych.

a_n - liczba sposobów wypłacenia n groszy

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum x^{i_1 + 2i_2 + 5i_5 + 10i_{10}} =$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + \ldots)(1 + x^{10} + x^{20} + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1}{1 - x^{10}}$$

Podziały liczby (rozbicie na składniki)

$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ (podziały różniące się kolejnością utożsamiamy, równoważnie można założyć, że $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$)

p_n - liczba podziałów n

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, \ldots} x^{i_1 + 2i_2 + 3i_3 + 4i_4 + \ldots} =$$

$$= (1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^4+x^8+\ldots)\ldots =$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^4} \cdot \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

q_n - liczba podziałów n na składniki nieparzyste

r_n - liczba podziałów n na różne składniki

$$Q(x) = \ldots = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^7} \cdot \ldots$$

$$R(x) = \ldots = \underbrace{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots}_{\sum_{i_1, i_2, i_3, \ldots \in \{0,1\}} x^{i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \ldots}} =$$

- oznacza to, że danej liczby naturalnej można nie użyć albo użyć tylko raz.

$$= \frac{\cancel{1-x^2}}{1-x} \cdot \frac{\cancel{1-x^4}}{\cancel{1-x^2}} \cdot \frac{\cancel{1-x^6}}{1-x^3} \cdot \frac{\cancel{1-x^8}}{\cancel{1-x^4}} \cdot \frac{\cancel{1-x^{10}}}{1-x^5} \cdot \frac{\cancel{1-x^{12}}}{\cancel{1-x^6}} \cdot \ldots =$$

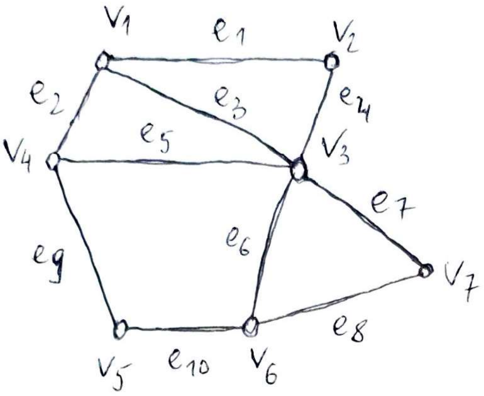
$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^7} \cdot \ldots = Q(x),$$

a więc jest TYLKO jedna funkcja twórcza dla ciągów q_n, r_n, czyli te ciągi są sobie równoważne.

Teoria grafów

Graf G to para uporządkowana wierzchołków V i krawędzi E.

$$G = (V, E)$$



$V = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_{10}\}$

1° e_i jest incydentna z v_j

$\Leftrightarrow$

v_j jest jednym z końców e_i

2° v_i sąsiednia z v_j $\Leftrightarrow$ v_i i v_j są połączone krawędziami

deg(v) – liczba krawędzi incydentnych z v (stopień wierzchołka)

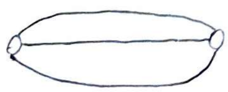
Lemat o uściskach dłoni

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

wniosek: $2 \mid \sum_{v \in V} \deg(v)$ ← suma stopni wierzchołków jest zawsze parzysta

„Patologie" w grafach:

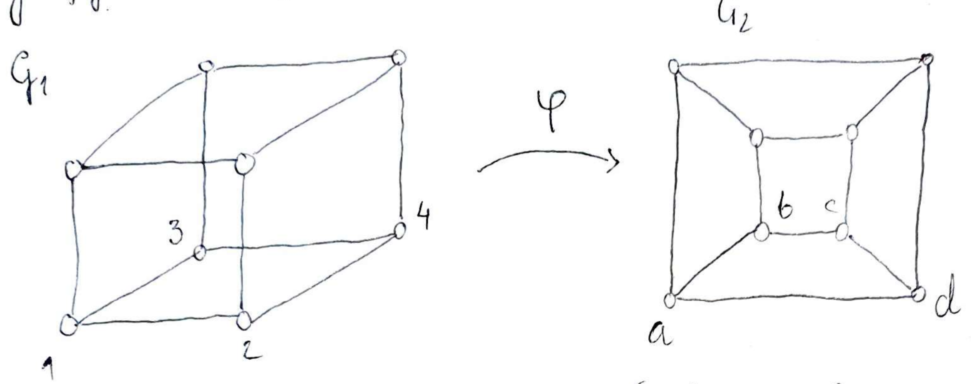
1)  ← pętla – wierzchołek połączony sam ze sobą

2)  ← krawędzie wielokrotne

Graf bez pętli i krawędzi wielokrotnych to graf prosty.

W grafie prostym zbiór krawędzi E może być traktowany jako rodzina dwuelementowych podzbiorów wierzchołków V. Jeśli krawędź e łączy v_1 i v_2, to $e = \{v_1, v_2\}$.

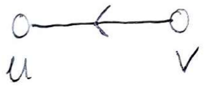
Grafy izomorficzne ($G_1 \simeq G_2$)



$$\varphi: V(G_1) \to V(G_2) \qquad (\varphi \text{ jest bijekcją})$$

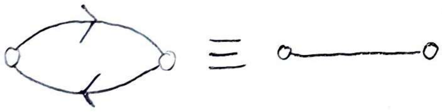
$$\{v_1, v_2\} \in E(G_1) \iff \{\varphi(v_1), \varphi(v_2)\} \in E(G_2)$$

Krawędź skierowana



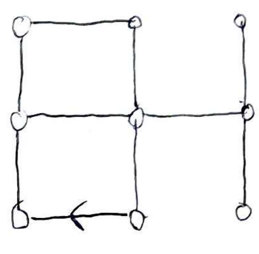
początek koniec

– oznaczamy ją jako (v, u)

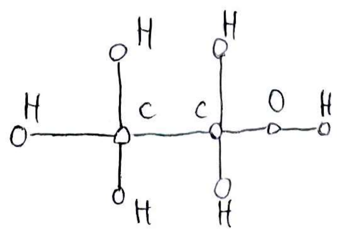


krawędź skierowana w obie strony

Przykładowe zastosowania grafów:

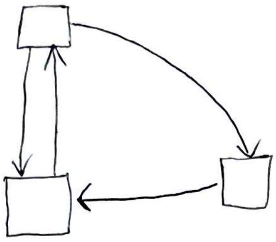


sieci drogowe



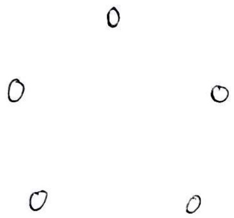
wzory strukturalne cząstek chemicznych

Grafy skierowane (digrafy)



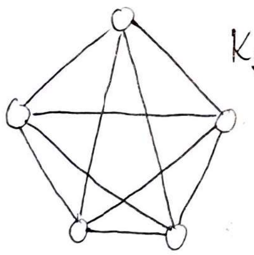
Krawędzie skierowane nazywamy łukami.

Grafy puste / bezkrawędziowe: N_n, n - liczba wierzchołków, m - liczba krawędzi



$$m(N_n) = 0$$

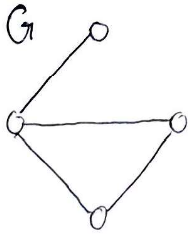
Grafy pełne (kliki): K_n



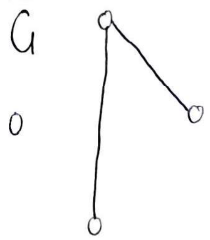
K_5

Dopełnienie grafu prostego G

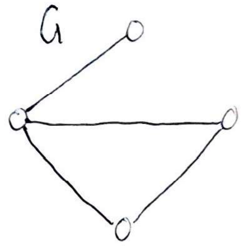
G



$\overline{G}$



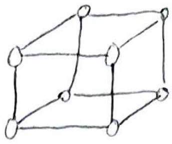
$\overline{\overline{G}}$



$$m(G) + m(\overline{G}) = m(K_n) = \binom{n}{2}$$

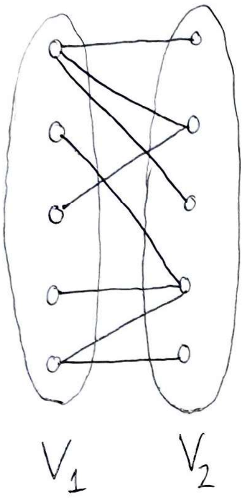
$$\overline{\overline{G}} \equiv G$$

Grafy regularne (k-regularne) to takie grafy, w których wszystkie wierzchołki są tego samego stopnia (k).



graf 3-regularny nazywany jest grafem kubicznym

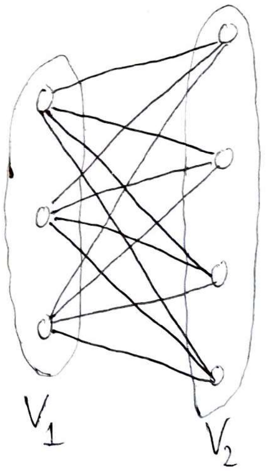
Grafy dwudzielne



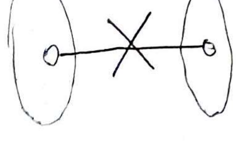
$V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,
Krawędzie są wyłącznie między V_1 i V_2 (jak na rysunku obok).

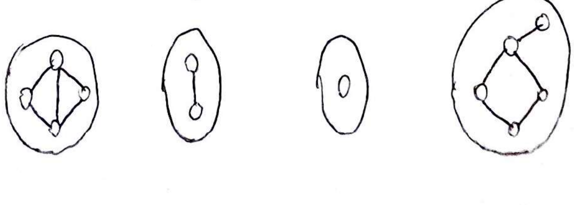
Graf dwudzielny pełny $K_{m,n}$, np. $K_{3,4}$ zawiera wszystkie możliwe krawędzie między V_1 i V_2.

$$|E(K_{m,n})| = m \cdot n$$



Graf spójny to taki, że nie istnieją V_1 i V_2, takie że $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, tzn. że nie ma krawędzi między V_1 i V_2. Jeśli mamy graf G niespójny, to można go rozbić na składowe spójne, czyli maksymalne podgrafy spójne.

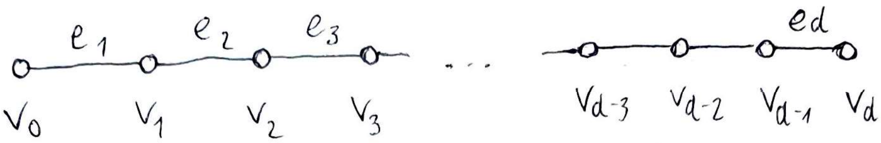




H jest podgrafem G $\iff V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$

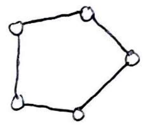
Drogi w grafach:

(1) Marszruta – jej długość to liczba krawędzi



Droga – marszruta, w której wierzchołki się nie powtarzają.

Cykl – marszruta zamknięta, w której jedynym powtórzeniem wierzchołka jest $v_0 = v_d$



Odległość między wierzchołkami u, v to $d(u,v)$ to długość najkrótszej drogi z u do v w grafie G, (jest równa długości najkrótszej marszruty).

1° $\qquad d(u,u) = 0$

2° $\qquad d(u,v) = d(v,u)$

$\left[d(u,v) = \infty, \text{ gdy nie ma drogi z } u \text{ do } v \right]$

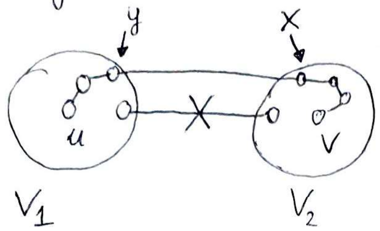
3° $\quad d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Twierdzenie (1): G jest dwudzielny, wtw gdy wszystkie cykle w G mają długość parzystą.

Twierdzenie (2): G jest spójny, wtw gdy między każdą parą wierzchołków w G jest droga.

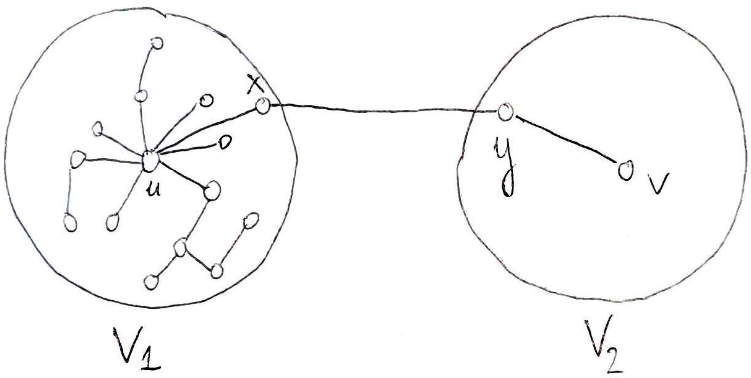
Dowód (2): Implikacja w obie strony.

$\Leftarrow$: Załóżmy, że między dowolną parą wierzchołków jest droga i G jest niespójny.



Jest to sprzeczne, gdyż nie może istnieć krawędź (y, x).

$\Rightarrow$: Załóżmy, że istnieją dwa wierzchołki pomiędzy którymi nie ma drogi. Pokażemy, że G jest niespójny.

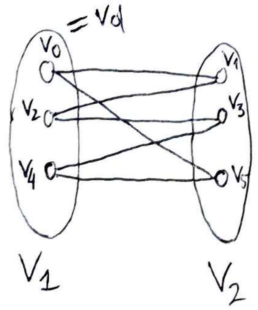


Z wierzchołka $v \in V_1$ NIE MOŻNA dojść do wierzchołka $v \in V_2$.

Istnienie drogi z u do y jest sprzeczne z $y \in V_2$. ∎

Dowód (1): Implikacja w obie strony.

$\Rightarrow$:



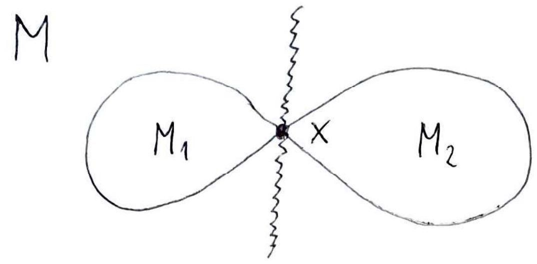
$v_0 = v_d$, a więc d musi być parzyste.

$\Leftarrow$:

Fakt: G jest dwudzielny, wtw gdy wszystkie składowe spójne G są dwudzielne.

Lemat: Wszystkie cykle w G są długości parzystej, wtw gdy wszystkie marszruty zamknięte w G są długości parzystej.

Załóżmy nie wprost, że M jest najkrótszą marszrutą zamkniętą o długości nieparzystej. M nie jest cyklem.



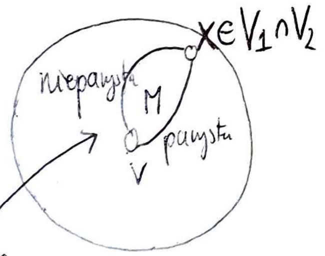
$|M_1| + |M_2| = |M|$

nieparzyste

z założenia, że M jest najkrótszą marszrutą wynika, że $|M_1|$ oraz $|M_2|$ są parzyste, cyli dochodzimy do sprzeczności.

■ (do lematu)

Pokażemy, że dowolna składowa spójna G jest dwudzielna.



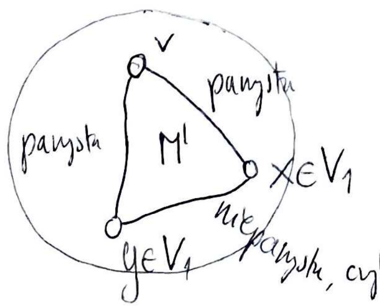
powstaje marszruta o długości nieparzystej, jednak taka marszruta nie może istnieć

V_1 - zbiór wierzchołków, do których istnieje droga długości parzystej z v ($v \in V_1$)

V_2 - zbiór wierzchołków, do których istnieje droga długości nieparzystej z v ($v \in V_2$)

$V_1 \cup V_2 = V(G')$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

nie ma krawędzi wewnątrz V_1 lub V_2.



, cyli mamy sprzeczność

■