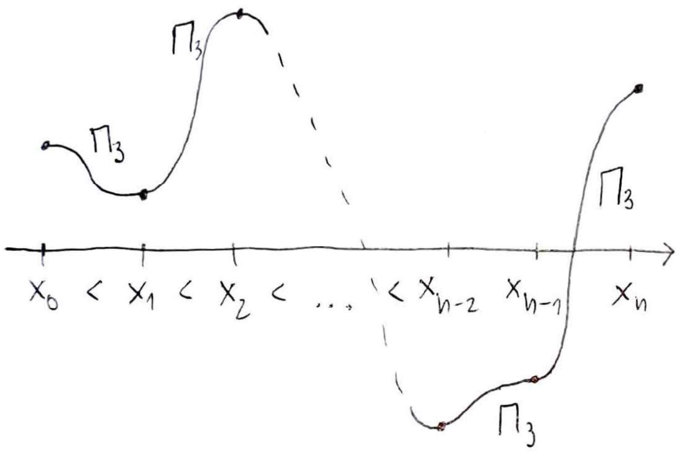
Analiza numeryczna, Wykład 7, 20/11/2019

Naturalna interpolacyjna funkcja sklejana trzeciego stopnia (NIFS3)

Pomysł: Zamiast znajdować jeden wielomian dla danych

x_0	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_n

, które chcemy zinterpolować, będziemy konstruować prostą funkcję „gładką" kawałkami wielomianową (stopnia trzeciego) interpolującą dane (x_k, y_k), $(0 \le k \le n)$.



Definicja (NIFS3)

Dla danych $n \in \mathbb{N}$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ oraz wartości $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, wprowadzamy funkcję $s : [x_0, x_n] \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywaną NIFS, spełniającą następujące warunki:

- $s(x_k) = y_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$
- s, s', s'' – funkcje ciągłe w $[x_0, x_n]$
- s w $[x_{k-1}, x_k] \equiv$ wielomian stopnia ≤ 3 $(1 \le k \le n)$
  (inny zapis $s|_{[x_{k-1}, x_k]} \in \Pi_3$)
- $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ $\longleftarrow$ „naturalność"

Liczba niewiadomych

$$x \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow s(x) = \underline{A_k} x^3 + \underline{B_k} x^2 + \underline{C_k} x + \underline{D_k} \in \Pi_3 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

czyli mamy $4n$ niewiadomych

Liczba warunków

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ s(x_k) = y_k \quad (0 \le k \le n) \Rightarrow n+1 \\ \bullet\ s, s', s'' \text{ – funkcje ciągłe w } [x_0, x_n] \Rightarrow 3(n-1) \end{array}\right\} \overset{+}{} \ 4n$$

Twierdzenie

NIFS3 zawsze istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie.

Przykład: Znajdowanie NIFS3 dla danych

x_k	-1	0	1
y_k	1	-1	1

$(n=2)$.

$$(1) \qquad s(x) = \begin{cases} s_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & : x \in [-1, 0] \\ s_2(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H & : x \in [0, 1] \end{cases}$$

$s_1(-1) \Rightarrow -A + B - C + D = 1$

$s_1(0) = -1 = s_2(0) \Rightarrow D = -1,\ H = -1$

$s_2(1) = 1 \Rightarrow E + F + G + H = 1$

$$(2) \qquad s'(x) = \begin{cases} s_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C & : x \in [-1, 0] \\ s_2'(x) = 3Ex^2 + 2Fx + G & : x \in [0, 1] \end{cases}$$

$s_1'(0) = s_2'(0) \Rightarrow C = G$ (ciągłość s' w 0)

(3)

$$s''(x) = \begin{cases} s_1''(x) = 6Ax + 2B & : x \in [-1,0] \\ s_2''(x) = 6Ex + 2F & : x \in [0,1] \end{cases}$$

$$s_1''(0) = s_2''(0) \Rightarrow 2B = 2F$$

$$s_1''(-1) = s_2''(1) = 0 \Rightarrow -6A + 2B = 0,\ 6E + 2F = 0$$

I mamy taki układ równań do rozwiązania:

$$\begin{cases} -A + B - C + D = 1 \\ E + F + G + H = 1 \\ -6A + 2B = 0 \\ 6A + 2F = 0 \\ D = -1,\ H = -1,\ C = G,\ B = F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, & E = -1 \\ B = 3, & F = 3 \\ C = 0, & G = 0 \\ D = -1, & H = -1 \end{cases}$$

A więc otrzymana NIFS3: $s(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1 & : x \in [-1,0] \\ -x^3 + 3x^2 - 1 & : x \in [0,1] \end{cases}$

Wnioski:

Metoda bardzo pracochłonna, dla $n+1$ węzłów mamy układ $4n$ równań liniowych, który w ogólnej sytuacji rozwiązujemy w czasie $O(n^3)$ - nieopłacalne.

Uwaga: Konstrukcja NIFS3 tą metodą (powyżej) ma złożoność $O(n)$.

Przykład:

$f(x) = \sin(4\pi^2 x^2)$, $x_k := \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \dots, n;\ n = 1, 2, \dots)$

S-NIFS3 dobrze działa dla węzłów równoodległych w $[0,1]$.

Konstrukcja NIFS3 w czasie $O(n)$ dla $n+1$ obserwacji

Twierdzenie

Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ i funkcji f o własności $f(x_k) = y_k$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ istnieje dokładnie jedna NIFS3 s.

Jeśli $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, to

wzór na k-ty segment NIFS3

$$s(x) = h_k^{-1}\Big[\tfrac{1}{6}M_{k-1}(x_k - x)^3 + \tfrac{1}{6}M_k(x - x_{k-1})^3 + \big(y_{k-1} - \tfrac{1}{6}M_{k-1}h_k^2\big)(x_k - x) +$$

///

$$s_k(x) \in \Pi_3 \qquad + \big(y_k - \tfrac{1}{6}M_k h_k^2\big)(x - x_{k-1})\Big],$$

gdzie $h_k := x_k - x_{k-1}$ oraz $M_k := s''(x_k)$ (tzw. k-ty moment funkcji s),

$M_0 = 0, M_n = 0$.

Momenty M_k $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ spełniają układ równań liniowych postaci:

$$(*) \quad \lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k = \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}$$

kombinacja liniowa y_{k-1}, y_k, y_{k+1}

Postać macierzowa układu $(*)$:

UKŁAD TRÓJPRZEKĄTNIOWY

$$\begin{bmatrix} 2 & 1-\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 & 2 & 1-\lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_3 & 2 & 1-\lambda_3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-2} & 2 & 1-\lambda_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$$

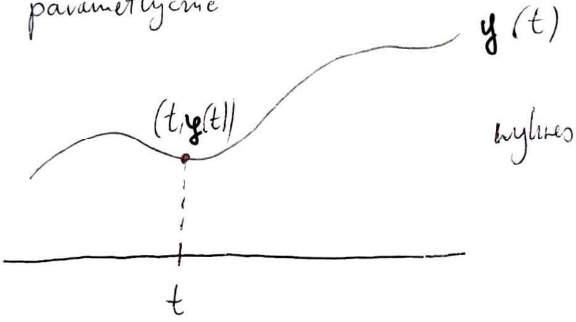
ALGORYTM (rozwiązywanie układu ∗)

$$\left[\begin{array}{l} q_0 := 0 \\ u_0 := 0 \\ \left.\begin{array}{l} p_k := \lambda_k q_{k-1} + 2 \\ q_k := (\lambda_k - 1)/p_k \\ u_k := (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{array}\right\} \text{pętla dla } k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{array}\right.$$

Wtedy $M_{n-1} = u_{n-1}$, $M_k = u_k + q_k M_{k+1}$ $(k = n-2, n-3, \ldots, 1)$, wszystkie momenty $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ znajdujemy w czasie $O(n)$.

Zastosowania NIFS3 w grafice komputerowej:

- Krzywe parametryczne



dziedzina y

wykres $\equiv \{(t, y(t)) : t \in D_y\}$

Krzywa parametryczna na płaszczyźnie

$\gamma(t) := \{(x(t), y(t)) : a \leq t \leq b\}$, gdzie x, y to ustalone funkcje zmiennej $t \in [a,b]$.

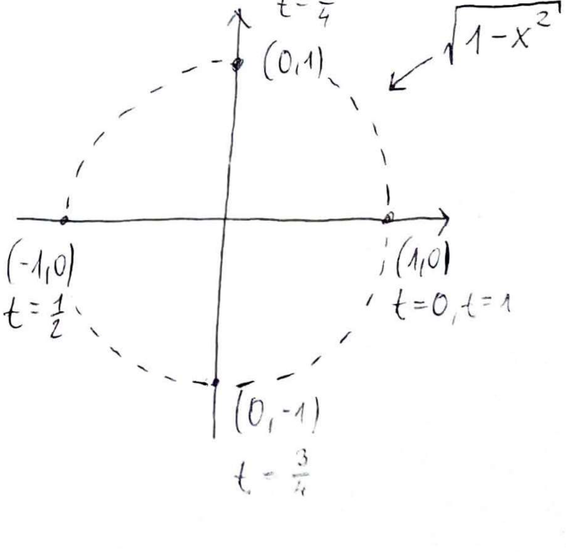
Co z tego wychodzi dla różnych doborów funkcji x, y?

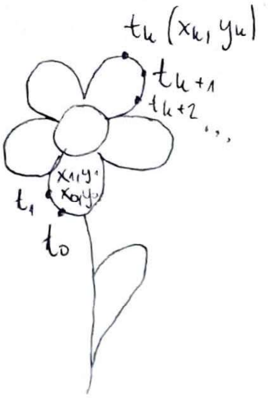
Na przykład:

$x(t) = \cos(2\pi t)$

$y(t) = \sin(2\pi t)$, $t \in [0,1]$

$\gamma(t) = \{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), t \in [0,1]\}$





$$\gamma(t) = \{(x(t), y(t)),\ t \in [0,1]\}$$

Próbkujemy cały obraz $\{t_k$ – „czas", $x_k = x(t_k)$, $y_k = y(t_k))$

$t_0 \to (x_0, y_0)$
$t_1 \to (x_1, y_1)$
$t_2 \to (x_2, y_2)$
$\vdots$
$t_n \to (x_n, y_n)$

Pomysł: Znajdźmy NIFS3 s_x, s_y takie, że $s_x(t_k) = x_k$, $s_y(t_k) = y_k$ dla $k = 0, 1, \dots, n$; $t := \frac{k}{n}$.
Zamiast rysować / pamiętać $\gamma(t) = \{(x(t), y(t)) : t \in [0,1]\}$,
możemy rysować / pamiętać $\tilde{\gamma}(t) = \{(s_x(t), s_y(t)) : t \in [0,1]\}$,
gdzie $\tilde{\gamma}(t)$ jest przybliżeniem $\gamma(t)$.