Analiza numeryczna, Lista 7, 19/11/2019

Zadanie 1. Sprawdź, że wielomian $L_n \in \Pi_n$ interpolujący funkcję $f$ w parami różnych $n+1$ węzłach $x_0, \dots, x_n$ można zapisać w postaci:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{p_{n+1}(x)}{(x-x_k)\, p'_{n+1}(x_k)},$$

gdzie $p_{n+1}(x) := (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$.

Pochodna z mianownika:

$$p'_{n+1}(x_k) = \sum_{i=0}^{n} (x_k - x_i)' \cdot \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{n} (x_k - x_j) \overset{(x_k-x_i)'=1}{=\!=} \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_k - x_j)$$

A więc:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{p_{n+1}(x)}{(x-x_k)\, p'_{n+1}(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{\sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_k - x_j)} =$$

$$\overset{*}{=} \sum_{k=0}^{n} f(x) \frac{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (x-x_i)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_i)} = \sum_{k=0}^{n} f(x) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \left(\frac{x-x_i}{x_k - x_i}\right) \quad \blacksquare$$

* pomijamy sumę, ponieważ $k=i$, a $j \neq i$

Zadanie 2. Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dla danych:

(a)

| | $x_k$ | $y_k$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $-3$ | $-8$ | $\leftarrow b_0$ | | |
| $x_1$ | $-1$ | $0$ | $4 \leftarrow b_1$ | | |
| $x_2$ | $0$ | $-8$ | $-8$ | $-4 \leftarrow b_2$ | |
| $x_3$ | $1$ | $16$ | $24$ | $16$ | $5 \leftarrow b_3$ |

$$(*)\begin{cases} f[x_k] \overset{(1)}{:=} f(x_k) \\ f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{l-1}, x_l] \overset{(2)}{:=} \dfrac{f[x_{k+1}, \ldots, x_{l-1}, x_l] - f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{l-1}]}{x_l - x_k} \end{cases}$$

$$L_n(x) = -8 + 4(x+3) - 4(x+3)(x+1) + 5(x+3)(x+1)x =$$
$$= 5x^3 + 16x^2 + 3x - 8$$

(b)

| $x_k$ | $y_k$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $-8 \leftarrow b_0$ | | | | |
| $1$ | $16$ | $24 \leftarrow b_1$ | | | |
| $2$ | $102$ | $86$ | $31 \leftarrow b_2$ | | |
| $-1$ | $0$ | $34$ | $26$ | $5 \leftarrow b_3$ | |
| $-3$ | $-8$ | $4$ | $6$ | $5$ | $0 \leftarrow b_4$ |

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f[x_0, x_1, \ldots, x_k]}_{b_k \equiv \text{ilorazy różnicowe}} p_k(x)$$

$$L_n(x) = -8 + 24x + 31x(x-1) + 5x(x-1)(x-2) =$$
$$= 5x^3 + 16x^2 + 3x - 8$$

Zadanie 3. Ile i jakich operacji arytmetycznych należy wykonać, aby dla danych parami różnych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ obliczyć ilorazy różnicowe $f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$? Podaj pseudokod algorytmu wyznaczającego je, którego złożoność pamięciowa wynosi $O(n)$.

Z definicji $(*)$ z zadania 2. wiemy, że przypisanie $f[x_k]$ nie wymaga żadnych operacji, a dla obliczenia ilorazu różnicowego (znając dwa poprzednie) potrzebujemy dwóch odejmowań i jednego dzielenia. Dla $k$-tego rzędu (elementu ciągu) zdefiniujmy:

$D(k)$ - ilość dzieleń dla $k$-tego elementu ciągu

$S(k)$ - ilość odejmowań dla $k$-tego elementu ciągu

Jako k-ty element definiujemy kolejno $f[x_k], f[x_k, x_{k+1}], \dots$ dla $k = 0, \dots, n$.

Mamy więc:

$D(0) = 0$ $\qquad$ $S(0) = 0$ $\qquad$ (przypisanie (1))

$D(1) = 1$ $\qquad$ $S(1) = 2$

$D(2) = 2D(1) + 1 = 3$ $\qquad$ $S(2) = 2S(1) + 2 = 6$

$D(3) = 2D(2) + 1 = 7$ $\qquad$ $S(3) = 2S(2) + 2 = 14$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

$D(k) = 2^k - 1$ $\qquad$ $S(k) = 2^{k+1} - 2$ $\qquad$ ← dowody indukcyjne dla $k+1$ (proste)

Algorytm:

$$\left.\begin{array}{l} x[n+1] = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \\ fx[n+1] = \{y_0, y_1, \dots, y_n\} \end{array}\right\} \text{ pamięć } O(2n) = O(n)$$

FOR $i = 1$, $i \leq n$, $i{+}{+}$:

FOR $j = n$, $j \geq i$, $j{-}{-}$:

$$fx[j] = \frac{fx[j] - fx[j-1]}{x[j] - x[j-1]}$$

END

END

RETURN fx[]

Zadanie 6. Funkcję $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w pewnych $n+1$ punktach przedziału $[4,5]$. Jak dobrać $n$, aby mieć pewność, że $\max\limits_{x \in [4,5]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-8}$?

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot \max_{x \in [4,5]} |p_{n+1}(x)|$$

Kolejne pochodne $f$:

$$f' = \frac{1}{x-2} = (x-2)^{-1} \qquad f'' = -(x-2)^{-2} \qquad f''' = 2(x-2)^{-3}$$

$$f^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (x-2)^{-n}$$

$$f^{(n+1)} = (-1)^{n} \cdot \frac{n!}{(x-2)^{+(n+1)}}$$

Więc podstawiamy do wzoru:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \underbrace{\frac{n!}{(x-2)^{+(n+1)} (n+1)!}}_{\substack{\text{minimalizujemy mianownik,} \\ \text{czyli } \min (x-2)^{n+1} = 2^{n+1}, \\ \text{bo } \min (x) = 4.}} \cdot \underbrace{\max_{x \in [4,5]} |p_{n+1}(x)|}_{\substack{x, x_i \in [4,5], \text{ zatem } \max (x - x_i) = 1 \quad (5-4), \\ \text{czyli } \max p_{n+1}(x) = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1}}$$

Stąd mamy:

$$\frac{n!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \leq 10^{-8}$$

$$\frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)} \leq \frac{1}{10^8}$$

$$2^{n+1} \cdot (n+1) \geq 10^8$$

$$L = n \geq \frac{10^8}{2^{n+1}} - 1 = P$$

$n = 20 \leq 46.68$

$n = 21 \leq 22.84$

$n = 22 \geq 10.92$

Więc $n=22$ jest odpowiednią.

Zadanie 7. Funkcję $f(x) = e^{\frac{3x}{4}}$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa $T_{n+1}$. Jak należy dobrać $n$, aby mieć pewność, że

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-16} \text{ ?}$$

Postępujemy podobnie jak w poprzednim zadaniu, liczymy więc pochodne $f$:

$$f' = \frac{3}{4} e^{\frac{3x}{4}} \qquad f'' = \left(\frac{3}{4}\right)^2 e^{\frac{3x}{4}} \quad \dots \quad f^{(n)} = \left(\frac{3}{4}\right)^n e^{\frac{3x}{4}} \qquad f^{(n+1)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} e^{\frac{3x}{4}}$$

Zera wielomianu Czebyszewa wyrażają się wzorem:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right) \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n$$

Twierdzenie: Jeśli węzłami $x_i$ są zera wielomianu Czebyszewa $T_{n+1}$, to dla $x \in [-1,1]$ zachodzi własność:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} \cdot \underbrace{\| f^{(n+1)} \|_{[-1,1]}}_{\text{maksymalna wartość pochodnej w zadanym przedziale}}$$

Niech $g(n) = \frac{1}{2^n (n+1)!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot e^{\frac{3}{4}}$, ma zachodzić $|f(x) - L_n(x)| \leq g(n) \leq 10^{-16}$.

$g(11) = 6.83 \cdot 10^{-14}$

$g(12) = 1.97 \cdot 10^{-15}$

$g(13) = 5.28 \cdot 10^{-17}$, czyli szukane $n$ wynosi 13.

Zadanie 8. Mając dany $x := [x_0, x_1, \dots, x_n]$, gdzie $x_i$ są parami różne oraz funkcję $f$ możemy obliczyć ilorazy różnicowe $f[x_0], f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ za pomocą DD_Table$(x, f)$, jednak $n < 21$. Jak wyznaczyć ilorazy różnicowe $f[z_0]$, $f[z_0, z_1], \dots, f[z_0, z_1, \dots, z_{20}], f[z_0, z_1, \dots, z_{20}, z_{21}]$, aby użyć DD_Table tylko raz?

Jedynym użyciem DD_Table$(x, f)$ obliczamy ilorazy różnicowe $f[x_0]$, $f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, x_1, \dots, x_{20}]$. Wiedząc, że ich wartości zostaną takie same po dodaniu kolejnej obserwacji możemy użyć wzoru:

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) + \underbrace{f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]}_{\substack{\text{ten iloraz różnicowy} \\ \text{jest szukaną wartością,} \\ \text{nazwijmy go } k}} \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Muszę więc zachodzić własności:

(1) $L_{21}(x) = L_{20}(x) + k(x - x_0) \dots (x - x_n)$

(2) $f(x_{21}) = L_{21}(x_{21})$

Stąd mamy:

$$f(x_{21}) = L_{20}(x_{21}) + k(x_{21} - x_0) \dots (x_{21} - x_{20})$$

$$k = \frac{f(x_{21}) - L_{20}(x_{21})}{(x_{21} - x_0) \dots (x_{21} - x_{20})}$$

Zadanie 1. (INACZEJ)

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{p_{n+1}(x)}{(x-x_k)\, p'_{n+1}(x_k)}$$

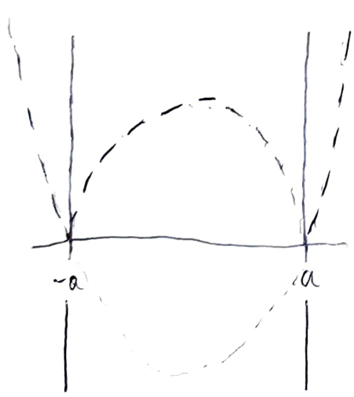
(1) $$\frac{p_{n+1}(x)}{x-x_k} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x-x_j)$$

(2) $$p'_{n+1}(x_k) = \lim_{x\to x_k} \frac{p_{n+1}(x) - \overset{0}{\overset{\parallel}{p_{n+1}(x_k)}}}{x-x_k} = \lim_{x\to x_k} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x-x_j) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k-x_j)$$

Po podstawieniu (1) i (2) do $L_n(x)$ otrzymamy $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \left(\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)$.

Zadanie 4. Minimalizacja parametrów $a, b > 0$

$$\max_{x\in[-a,a]} |(x+a)(x-a)|$$




$$f(x) = |x^2 - a^2|$$

$$f'(x) = |2x|$$

Ekstrema: $x \in \{-1, 0, 1\}$

(1) $f(1) = f(-1) = |1-a^2|$

(2) $f(0) = a^2$

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x)| = \max\{|1-a^2|, a^2\}$$

$$|1-a^2| = a^2$$

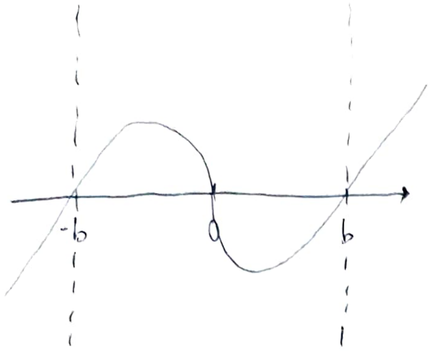
$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\max_{x\in[-1,1]} |(x-b)x(x+b)|$$

$$f(x) = (x-b)x(x+b) = x^3 - b^2 x$$

$$f'(x) = 3x^2 - b^2$$

$$x_{1/2} = \pm \frac{b}{\sqrt{3}}$$




$$|f(1)| = |1-b^2|$$

$$\left|f\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\right| = \frac{b^3}{3\sqrt{3}} - \frac{3b^2 \cdot b}{3\sqrt{3}} = \frac{-2b^3}{3\sqrt{3}}$$

$$\max_{[-1,1]} |f(x)| = \max\left\{1-b^2, \frac{2b^3}{3\sqrt{3}}\right\}$$

$$1-b^2 = \frac{2b^3}{3\sqrt{3}}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Te rozwiązania można uzyskać z miejsc zerowych $T_2(x)$ dla przykładu a oraz $T_3(x)$ dla przykładu b.

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$\boxed{\|f\|_{[-1,1]} \equiv \max_{[-1,1]} |f(x)|}$$

Zadanie 5. (Octave)

```
x = -1:0.01:1;
n = 10;
y1= cos(n*acos(x))/2^(n-1);
w = poly(-1:2/(n-1):1);
y2= polyval(w,x);
plot(x,y1,x,y2);
```

SZYBKA POWTÓRKA NUMERYCZNEJ POPRAWNOŚCI

$$fl\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{a}{b}(1+\varepsilon_1)+\frac{b}{a}(1+\varepsilon_2)\right)(1+\varepsilon_3) \qquad A(d) \equiv \left(f(d(1+\alpha))\right)(1+\beta)$$

$$\frac{a}{b}(1+\varepsilon_1)+\frac{b}{a}(1+\varepsilon_2) \overset{?}{=} \left(\frac{\bar a}{\bar b}+\frac{\bar b}{\bar a}\right)(1+\gamma)$$

nieskończona pętla

$$\frac{a}{b}(1+\varepsilon_1)+\frac{b}{a}(1+\varepsilon_2) = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)(1+E)$$

$$\frac{a}{b}\varepsilon_1+\frac{b}{a}\varepsilon_2 = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)E$$

$$|E| = \left|\frac{\frac{a}{b}\varepsilon_1+\frac{b}{a}\varepsilon_2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\right| \leq \frac{2^{-t}\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{a}\right|\right)}{\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right|} \leq 2^{-t}$$

$$fl\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)(1+F), \quad (1+F) = (1+\varepsilon_2)(1+E)$$ – algorytm numerycznie poprawny