Równania rekurencyjne liniowe, metoda anihilatorów

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \dots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = f(n)$$

k - liczba warunków początkowych $\qquad p_0 \neq 0$

Równanie jednorodne: $f(n) \equiv 0$

Przykłady:

- $a_{n+1} = 2a_n \iff a_{n+1} - 2a_n = 0 \implies a_n = c\cdot 2^n$
- $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
- $a_{n+1} = 5a_n \implies a_n = c\cdot 5^n$

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$
$$b_{n+2} - b_{n+1} - b_n = 0$$

Załóżmy, że mamy dwa ciągi a_n, b_n spełniające powyższe równanie.

$$(\alpha a_{n+2} + \beta b_{n+2}) - (\alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1}) - (\alpha a_n + \beta b_n) = 0$$

$$\begin{cases} a_n = (1, 0, *, *, \dots) \\ b_n = (0, 1, *, *, \dots) \end{cases} \implies \alpha a_n + \beta b_n = (\alpha, \beta, *, *, \dots)$$

* oznaczają wyrazy, które możemy policzyć korzystając ze wzoru rekurencyjnego

E - operator przesunięcia

$$E\langle a_n\rangle = \langle a_{n+1}\rangle \longrightarrow \begin{matrix}(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \\ \downarrow E \\ (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)\end{matrix}$$

$$E^2\langle a_n\rangle - E\langle a_n\rangle - \langle a_n\rangle = \langle 0\rangle.$$

ciąg złożony z samych zer

$$(E^2 - E - 1)\langle a_n\rangle = 0$$

$$\left(E - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(E - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle$$

$$\left(E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(E\langle a_n\rangle-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\langle a_n\rangle\right)=$$

$$=E^2\langle a_n\rangle-\frac{1+\sqrt{5}}{2}E\langle a_n\rangle-\frac{1-\sqrt{5}}{2}E\langle a_n\rangle+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\langle a_n\rangle$$

$a_n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ spełnia to równanie rekurencyjne, bo

$$\left(E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\underbrace{\left(E-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left\langle\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\rangle}_{0}=\langle 0\rangle$$

$$(E-c)\langle c^n\rangle=E\langle c^n\rangle-c\langle c^n\rangle=\langle c^{n+1}-c^{n+1}\rangle=\langle 0\rangle$$

Analogicznie skoro $\left(E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(E-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\left(E-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, to $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ również spełnia nasze równanie. Ciągi $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ oraz $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ stanowią bazę dwuwymiarową przestrzeni rozwiązań równania $a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$, każde rozwiązanie tego równania ma postać $a_n=A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

$$F_n=A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$0=F_0=A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0=A+B \implies A=-B$$

$$1=F_1=A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\underbrace{\left(A\cdot\tfrac{1}{2}+B\cdot\tfrac{1}{2}\right)}_{0}+(A-B)\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$1=8A\frac{\sqrt{5}}{8}\implies A=\frac{1}{\sqrt{5}}\qquad B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$a_{n+k} + p_{k-1} a_{n+k-1} + \ldots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0$

$(E^k + p_{k-1} E^{k-1} + \ldots + p_1 E + p_0) \langle a_n \rangle = \langle 0 \rangle$

$(E - c_1)(E - c_2) \ldots (E - c_k) \langle a_n \rangle = \langle 0 \rangle$, jeśli c_i są różne, to

$$a_n = A_1 c_1^n + A_2 c_2^n + \ldots + A_k c_k^n$$

Lemat: $(E - c)^k \langle a_n \rangle = \langle 0 \rangle$ ma rozwiązania:

$$c^n, n c^n, n^2 c^n, \ldots, n^{k-1} c^n \qquad (k > 0)$$

Dowód: indukcja po k

Załóżmy, że lemat jest prawdziwy dla k i pokażemy go dla $k+1$.

Dla $a_n = c^n, \ldots, n^{k-1} c^n$ mamy $(E-c)^{k+1} \langle a_n \rangle = (E-c)(E-c)^k \langle a_n \rangle =$

$\overset{\text{zał.ind.}}{=} (E-c) \langle 0 \rangle = \langle 0 \rangle$.

Dla $a_n = n^k c^n$:

$$(E-c)^{k+1} \langle n^k c^n \rangle = (E-c)^k \left[(E-c) \langle n^k c^n \rangle \right] =$$

$$= (E-c)^k \langle (n+1)^k c^{n+1} - n^k c^{n+1} \rangle =$$

$$= (E-c)^k \left\langle c^{n+1} \left(n^k + \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k}{i} n^i - n^k \right) \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (E-c)^k c \langle n^i c^n \rangle \overset{\text{zał.}}{=} \langle 0 \rangle$$

Przykład:

$$s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

$$s_{n+1} = s_n + (n+1)^2$$

$$(E-1)\langle s_n \rangle = \langle n^2 \rangle \qquad n^2 = n^2 1^n \qquad \boxed{(E-1)^3 \langle n^2 1^n \rangle = \langle 0 \rangle}$$

$$(E-1)^4 \langle s_n \rangle = (E-1)^3 \langle (n+1)^2 \rangle = \langle 0 \rangle$$

$$s_n = A1^n + Bn1^n + Cn^2 1^n + Dn^3 1^n$$

ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ DLA s_n

$$s_0 = 0 = A$$
$$s_1 = 1 = A + B + C + D$$
$$s_2 = 5 = A + 2B + 4C + 8D$$
$$s_3 = 14 = A + 3B + 9C + 27D$$

$A = 0$

$B + C + D = 1$

$2B + 4C + 8D = 5$

$3B + 9C + 27D = 14$

$2C + 6D = 3$

$4C + 18D = 8$

$2C + 9D = 4$

$B = \frac{1}{6}$

$C = \frac{1}{2}$

$D = \frac{1}{3}$

$$s_n = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n$$

Pokażemy, że ciągi w postaci $n^{j_i} c_i^n$ są liniowo niezależne.

Załóżmy nie wprost, że istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $(\alpha_i \neq 0)$ takie, że:

$$\sum_i \alpha_i n^{j_i} c_i^n \equiv 0.$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $n^{j_1} c_1^n$ rośnie co najmniej tak szybko jak pozostałe, czyli

$$(1) \quad \forall i>1 \quad |c_1| \geq |c_i| \;\wedge\; |c_i| = |c_1| \Rightarrow j_i \leq j_1$$

Pokażemy, że $\sum_i \alpha_i \frac{n^{j_i} c_i^n}{n^{j_1} c_1^n} \not\equiv 0$.

Niech $M(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n}$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow M(a_n) = a$

1° Jeśli $|c_i| < |c_1|$ lub $|c_i| = |c_1|$ i $|j_i| < |j_1|$, to:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{j_i} c_i^n}{n^{j_1} c_1^n} = 0 \Rightarrow M\left(\frac{n^{j_i} c_i^n}{n^{j_1} c_1^n}\right) = 0$$

2° Jeśli $|c_1| = |c_i|$ i $|j_1| = |j_i|$, to:

$$M\left(\frac{n^{j_i} c_i^n}{n^{j_1} c_1^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{c_i}{c_1} + \left(\frac{c_i}{c_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{c_i}{c_1}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{c_i}{c_1}\right)^n}{n\left(1 - \frac{c_i}{c_1}\right)} = 0$$

$$M\left(\sum_i \alpha_i \frac{n^{j_i} \cdot c_i^n}{n^{j_1} \cdot c_1^n}\right) = M(\alpha_1) + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \overbrace{M\left(\frac{n^{j_i} c_i^n}{n^{j_1} c_1^n}\right)}^{0} = \alpha_1 \neq M(0) = 0$$

$\blacksquare$

Obliczanie sum

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$$

$$s_n + q^{n+1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1} = 1 + q s_n \Rightarrow s_n - q s_n = 1 - q^{n+1}$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$T_n = q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n$$

$$T_n + (n+1)q^{n+1} = q + qT_n + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1} = qT_n + q(1+q+q^2+\ldots+q^n) =$$

$$= qT_n + q\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

INACZEJ

$$= q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + (n+1)q^{n+1} =$$

$$= \left.\begin{matrix} q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1} + \\ + q^2 + 2q^3 + \ldots + nq^{n+1} \end{matrix}\right\}$$

$$(1-q)T_n = q\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q} - (n+1)q^{n+1}$$

$$T_n = \frac{q\left(\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) - (n+1)q^n\right)}{1-q} = q\,\frac{1-q^{n+1} - (n+1)q^n + (n+1)q^{n+1}}{(1-q)^2} =$$

$$= q\,\frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

INNA METODA:

$$T_n = q(1+q+q^2+\ldots+q^n)' = q(1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}) = q+2q^2+3q^3+\ldots+nq^n$$

$$T_n = q\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)' = q\,\frac{-(n+1)q^n(1-q) + (1-q^{n+1})}{(1-q)^2} = q\,\frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

Funkcje tworzące

Dany jest ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ funkcją tworzącą tego ciągu jest funkcja

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad A(0) = 0.$$

Przykłady:

szereg geometryczny zbieżny

(1) $a_n \equiv 1$ $\quad A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$

(1a) $a_n = q^n$ $\quad A(x) = 1 + qx + q^2x^2 + q^3x^3 + \ldots = \frac{1}{1-q^x}$

(2) $a_n = \binom{m}{n}$ $\quad A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m$