Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 5

30 października 2019 r.

Zajęcia 5 listopada 2019 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

L5.1. 1 punkt Metodę siecznych definiuje wzór iteracyjny

$$x_{n+1} := x_n - f_n \frac{x_n - x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} \qquad (f_n \neq f_{n-1};\ n = 1, 2, \ldots;\ x_0,\ x_1 - \text{dane}),$$

gdzie $f_m := f(x_m)$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Wykaż, że wzór ten można również zapisać w postaci

$$x_{n+1} := \frac{f_n x_{n-1} - f_{n-1} x_n}{f_n - f_{n-1}} \qquad (f_n \neq f_{n-1};\ n = 1, 2, \ldots;\ x_0,\ x_1 - \text{dane}),$$

a następnie wyjaśnij, który z wzorów jest przydatniejszy w praktyce numerycznej.

L5.2. 1 punkt Metoda *regula falsi* jest pewnym wariantem metody siecznych[1]. Przedstaw jej ideę i zwięzły opis. Następnie wyjaśnij czym różni się ona od metody siecznych. Co jest główną zaletą tej metody?

L5.3. 1 punkt Załóżmy, że metoda iteracyjna postaci

$$x_0 - \text{dane}, \quad x_{k+1} = F(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

(metody takie nazywamy *metodami jednokrokowymi*; np. metodą taką jest metoda Newtona, dla której $F(x) := x - f(x)/f'(x)$) jest zbieżna do pierwiastka α równania $f(x) = 0$. Wykaż, że jeśli

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = \ldots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad F^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

to rząd metody jest równy p, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C \neq 0.$$

Jakim wzorem wyraża się stała asymptotyczna C?

L5.4. 1 punkt Niech α będzie pojedynczym zerem funkcji f (tzn. $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$). Wykaż, że metoda Newtona jest wówczas zbieżna kwadratowo. *Wskazówka*: Wykorzystaj zadanie **L5.3**.

[1] Zamiast do (polskiej) Wikipedii, lepiej zajrzeć tu: G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical methods in scientific computing*, Vol. I, SIAM, 2008 (par. 6.2.1.).

L5.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech α będzie podwójnym zerem funkcji f, zatem niech $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \neq f''(\alpha)$. Wykaż, że metoda Newtona jest wówczas zbieżna liniowo (pamiętaj też o sprawdzeniu odpowiedniej wartości stałej asymptotycznej).

L5.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ *Uproszczoną* metodę Newtona $x_{n+1} := x_n - f(x_n)/f'(x_0)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ stosujemy do wyznaczenia pojedynczego zera funkcji f. Jaki – przy koniecznych założeniach — jest rząd zbieżności tej metody?

L5.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zaproponuj numeryczną metodę wyznaczania wykładnika zbieżność jednokrokowej metody iteracyjnej (por. zadanie **L5.3**) rozwiązywania równania nieliniowego $f(x) = 0$.

L5.8. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ **Ustal eksperymentalnie** jaki jest rząd następującej *metody Olvera*:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]^2 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

rozwiązywania równania nieliniowego $f(x) = 0$.

L5.9. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Wiadomo, że liczba G jest granicą dwóch ciągów: $\{r_n\}$ i $\{a_n\}$. To znaczy,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = G, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = G.$$

Do tej pory wartość G znana była z dokładnością 10 cyfr dziesiętnych. Na tej podstawie obliczono:

$$\begin{aligned} |r_0 - G| &\approx 0.763907023, \\ |r_1 - G| &\approx 0.543852762, \\ |r_2 - G| &\approx 0.196247370, \\ |r_3 - G| &\approx 0.009220859 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} |a_0 - G| &\approx 0.605426053, \\ |a_1 - G| &\approx 0.055322784, \\ |a_2 - G| &\approx 0.004819076, \\ |a_3 - G| &\approx 0.000399783. \end{aligned}$$

Obecnie, konieczne okazało się wyznaczenie stałej G z dokładnością 100 cyfr. Na obliczenie jednego wyrazu ciągu $\{r_n\}$ lub $\{a_n\}$ z taką precyzją potrzeba około tygodnia. Rosjanie próbują przybliżyć stałą G używając ciągu $\{r_n\}$, a Amerykanie – ciągu $\{a_n\}$. Kto szybciej wyznaczy stałą G z żądaną dokładnością i ile będzie to trwało?

(–) Paweł Woźny