Zadanie 1. Wykaż, że $x_{n+1} := x_n - f_n \dfrac{x_n - x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}}$, gdzie $f_m := f(x_m)$

można zapisać w postaci $x_{n+1} := \dfrac{f_n x_{n-1} - f_{n-1} x_n}{f_n - f_{n-1}}$ dla

$f_n \neq f_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, x_0, x_1 - dane.

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$= \frac{x_n \cdot (f(x_n) - f(x_{n-1}))}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$= \frac{f(x_n) \cdot x_n - f(x_{n-1}) \cdot x_n - f(x_n) \cdot x_n + f(x_n) \cdot x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$= \frac{f(x_n) \cdot x_{n-1} - f(x_{n-1}) \cdot x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{f_n x_{n-1} - f_{n-1} x_n}{f_n - f_{n-1}} \qquad \blacksquare$$

Otrzymany wzór ma ~~w~~ mniejszą liczbę odejmowań, które są niebezpieczne; w obu wzorach dla $f(x_n)$ bliskich $f(x_{n-1})$ oraz dla x_n bliskich x_{n-1}, tzn. przy zbliżaniu się do miejsca zerowego mamy odejmowanie bliskich siebie wartości, więc drugi wzór jest lepszy.

Zadanie 2. Metoda regula falsi

Ideą tej metody jest założenie, że funkcja w coraz mniejszych przedziałach wokół pierwiastka zaczyna przypominać funkcję liniową, a więc przybliżenie pierwiastka otrzymujemy prowadząc prostą z punktów krańcowych przedziału, tj. od $(a, f(a))$ do $(b, f(b))$. Przybliżeniem pierwiastka jest punkt przecinający oś OX.

Warunki:

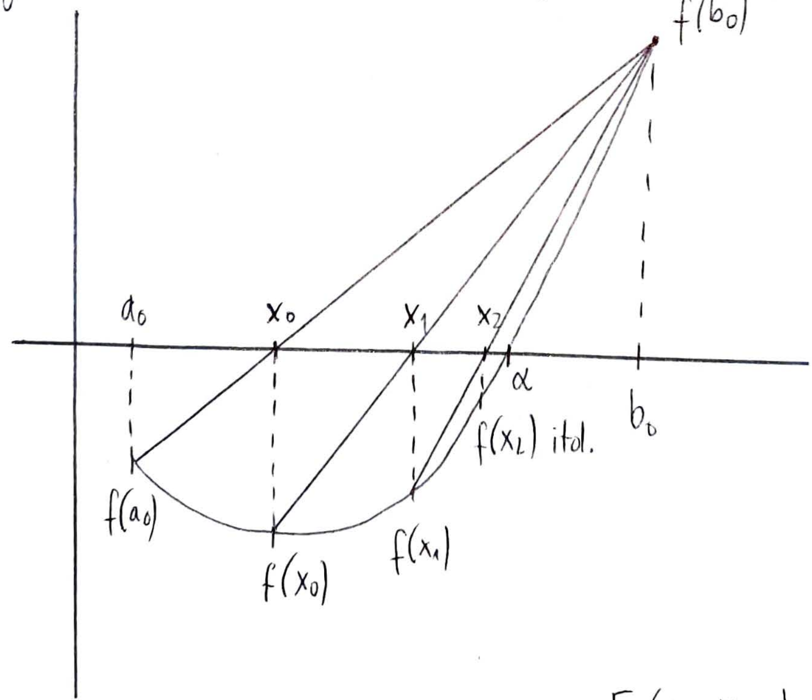
- $a_0 = a,\ b_0 = b \Rightarrow f(a)\cdot f(b) < 0$
- $(a_0, b_0) \supset (a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset \dots \Rightarrow f(a_n) f(b_n) < 0$

Wzór:

$$\frac{a\cdot f(b) - f(a) b}{f(b) - f(a)}$$

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)\frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)}, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Przykład szukania miejsca zerowego α metodą regula falsi:



Metoda siecznych $\rightarrow$ $x_{n+1} = F(x_n, x_{n+1})$

Metoda regula falsi $\rightarrow$ $x_{n+1} = F_1(x_{n-1}, x_n)$

$F_2(x_{n-1}, x_n)$

Zadanie 3. Założymy, że metoda iteracyjna postaci $x_{k+1} = F(x_k)$ ($k = 0, 1, \ldots$; x_0 - dane) jest zbieżna do pierwiastka α równania $f(x) = 0$. Wykaż, że jeśli $F(\alpha) = \alpha$, $F'(\alpha) = F''(\alpha) = \ldots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0$, $F^{(p)}(\alpha) \neq 0$, to rząd metody jest równy p, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C \neq 0.$$

Mamy: $F(x_k) = x_{k+1}$,

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) \overbrace{=}^{=\ldots} F^{(i)}(\alpha) = \ldots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0$$

$$F^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

Weźmy $F(x_k) = x_{k+1}$ i odejmijmy obustronnie α, otrzymamy wtedy $F(x_k) - \alpha = x_{k+1} - \alpha$, niech $\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \alpha$ będzie naszym błędem, a więc $F(\alpha + \varepsilon_k) - \alpha = \varepsilon_{k+1}$. Znając kolejne pochodne możemy wypisać $F(\alpha + \varepsilon_k)$ w szereg Taylora:

$$F(\alpha + \varepsilon_k) = F(\alpha) + \frac{F'(\alpha)}{1!} \cdot \varepsilon_k + \ldots + \frac{F^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!} \cdot \varepsilon_k^{p-1} + \frac{F^{(p)}(\gamma)}{p!} \cdot \varepsilon_k^p$$

$$= F(\alpha) + \frac{F^{(p)}(\gamma)}{p!} \cdot \varepsilon_k^p \overset{F(\alpha)=\alpha}{=\!=} \alpha + \frac{F^{(p)}(\gamma)}{p!} \varepsilon_k^p$$

$$F(\alpha + \varepsilon_k) - \alpha = \alpha + \frac{F^{(p)}(\gamma)}{p!} \varepsilon_k^p - \alpha = \frac{F^{(p)}(\gamma)}{p!} \varepsilon_k^p = \varepsilon_{k+1}$$

Czyli $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^p \dfrac{F^{(p)}(\gamma)}{p!}$, gdzie $C = \dfrac{F^{(p)}(\gamma)}{p!}$, a p - rząd zbieżności. ∎

$$\left| \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \right| \xrightarrow{k\to\infty} \left| \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!} \right| \neq 0$$

Zadanie 4. Niech α - pojedyncze miejsce zerowe $(f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)\neq 0)$.
Wykaż, że metoda Newtona jest zbieżna kwadratowo.

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$ chcemy pokazać, że $F(\alpha)=\alpha,\ F'(\alpha)=0,\ F''(\alpha)\neq 0$.

$$F(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$$

$$F'(x) = 1 - \frac{f'^2 - ff''}{f'^2} = 1 - 1 + \frac{ff''}{f'^2} = \frac{ff''}{f'^2}\Big|_{x=\alpha} = 0$$

$$F''(x) = \left(\frac{ff''}{f'^2}\right)' = \frac{(ff'')'f'^2 - (f'^2)'ff''}{f'^4} = \frac{f'^3f'' + ff'^2f''' - 2f'ff''^2}{f'^4}\Big|_{x=\alpha} =$$

$$= \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$ ∎

Zadanie 5. Niech α - podwójne miejsce zerowe $(f(\alpha)=f'(\alpha)=0,\ f''(\alpha)\neq 0)$.
Wykaż że metoda Newtona jest zbieżna ~~kwadratowo~~ liniowo.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n-\alpha) + \frac{1}{2!}f''(\xi_n)(x_n-\alpha)^2}{f'(\alpha) + f''(\delta_n)(x_n-\alpha)}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{f''(\xi_n)\varepsilon_n}{2f''(\delta_n)}$$

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{f''(\xi_n)}{f''(\delta_n)}, \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right| = \left|1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{f''(\alpha)}{f''(\alpha)}\right| = \frac{1}{2}$$

Zadanie 6. Uproszczona metoda Newtona – rząd zbieżności.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \Rightarrow F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}, \quad F(\alpha) = \alpha$$

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)} \Rightarrow F'(\alpha) = 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(x_0)}$$

$$\left| \frac{f'(\alpha)}{f'(x_0)} - 1 \right| < 1, \quad \text{czyli} \quad \frac{f'(\alpha)}{f'(x_0)} \in (0,2)$$

Zadanie 7. Numeryczna metoda wyznaczania wykładnika zbieżności jednokrokowej metody iteracyjnej rozwiązywania równania nieliniowego $f(x)=0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = C \neq 0 \Rightarrow |\varepsilon_{n+1}| \approx C \cdot |\varepsilon_n|^p \Rightarrow C \approx \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = \frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|^p}$$

$$\log \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = \log C = \log \frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|^p}$$

$$\log|\varepsilon_{n+1}| - p \cdot \log|\varepsilon_n| + p \cdot \log|\varepsilon_{n-1}| - \log|\varepsilon_n| = 0$$

$$\log \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = p \cdot \log \frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|}$$

$$p = \frac{\log \left| \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \right|}{\log \left| \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \right|} \quad \blacksquare$$

Zadanie 7. INNA METODA

$$x_{n+1} - \alpha = F(x_n) - \alpha = F(\alpha) - \alpha + F'(\xi_n)(x_n - \alpha)$$

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = F'(\xi_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} F'(\alpha)$$

$$x_{n+1} - x_n = (x_{n+1} - \alpha) - (x_n - \alpha)$$

$$x_{n+1} = F(x_n) = F(\alpha) + F'(\alpha)(x_n - \alpha) + \overbrace{\tfrac{1}{2} F''(\eta_n)}^{K_{n+1}} (x_n - \alpha)^2$$

$$x_n = F(x_{n-1}) = F(\alpha) + F'(\alpha)(x_{n-1} - \alpha) + \underbrace{\tfrac{1}{2} F''(\varphi_n)}_{K_n} (x_{n-1} - \alpha)^2$$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{F'(\alpha)(x_n - x_{n-1}) + K_{n+1}(x_n - \alpha)^2 - K_n (x_{n-1} - \alpha)^2}{x_n - x_{n-1}} =$$

$$= F'(\alpha) + \frac{K_{n+1}(x_n - \alpha)^2}{(x_n - \alpha) - (x_{n-1} - \alpha)} - \frac{K_n (x_{n-1} - \alpha)^2}{(x_n - \alpha) - (x_{n-1} - \alpha)}$$

Zadanie 8 wychodzi z powyższej metody (lub poprzedniej, obie poprawne), podobnie zadanie 9.

Do zadania 9: Asymptotycznie r jest lepsze od a, jednak nie znamy stałej, uzyskujemy ją z obliczeń:

$A: \varepsilon_{n+1} \approx 0.09 \cdot \varepsilon_n^{1.029}$ ← 55 wyrazów.

$R: \alpha_{n+1} \approx 1.21 \cdot \alpha_n^3$ ← 7 wyrazów

$$\varepsilon_{n+1} = K \cdot \varepsilon_n^p = K(K \cdot \varepsilon_{n-1}^p)^p = K^{1+p+p^2+\ldots+p^n} \varepsilon_1^{p^n}$$