Matematyka dyskretna, Lista 11, 10/01/2020

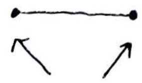
Zadanie 1. Dane jest drzewo T oraz jego automorfizm ϕ. Udowodnij, że istnieje taki wierzchołek v, że $\phi(v) = v$ lub istnieje krawędź $\{u,v\}$, taka że $\phi(\{u,v\}) = \{u,v\}$.

To zadanie jest rozwiązane prawie dobrze, jednak prawie cała grupa miała je skreślone.

Chcę pokazać, że centrum jest zawsze punktem stałym automorfizmu w automorfizmie drzewa. Przeprowadzę dowód indukcyjny po liczbie wierzchołków:

- $n = 1$, $n = 2$ (zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka lub dwóch sąsiednich – lista 10, zadanie 5b)

jedyny wierzchołek, centrum



dwa sąsiednie wierzchołki, centrum

- $n = 3$

jeden wierzchołek centralny, jako jedyny ma dwóch sąsiadów, więc zachowa ich po automorfizmie

Założenie: Dla każdego drzewa z $|V(G)| < n$ centrum drzewa jest zawsze punktem stałym automorfizmu.

- Weźmy dowolne n-wierzchołkowe drzewo. Usuńmy z niego wszystkie liście – centrum pozostanie takie samo. Z założenia wiemy, że centrum tego drzewa bez liści jest punktem stałym automorfizmu. Możemy więc przekształcić to drzewo bez początkowych liści z dokładnością do automorfizmu zachowującego centrum. Dopiszmy teraz wcześniej usunięte liście. W automorfizmie liść musi przechodzić na liść, a więc dopisanie liści nie zmieni nam centrum w drzewie, czyli możemy je dowolnie zapisać zachowując automorfizm. Stąd, każde n-wierzchołkowe drzewo możemy dowolnie przekształcić z dokładnością do automorfizmu zachowującego centrum, czyli punktem stałym w automorfizmie drzewa jest wierzchołek albo krawędź (pomiędzy parą centralnych wierzchołków.

Należy wspomnieć o tym, że stopnie wierzchołków wewnętrznych zmieniają się, więc mówimy o innym automorfiźmie niż Φ.

Zadanie 2. Graf prosty G jest samodopełniający wtw, gdy jest izomorficzny ze swoim dopełnieniem. Pokaż, że samodopełniający graf n wierzchołkowy istnieje dokładnie wtedy, gdy $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1 \pmod 4$.

$\Rightarrow$ n-wierzchołkowy graf G jest samodopełniający, to $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1 \pmod 4$.

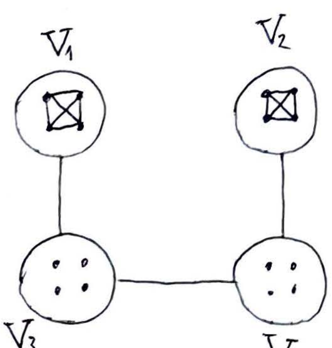
Skoro G jest izomorficzne z $\bar{G}$, to $|E(G)| = |E(\bar{G})|$. Dodatkowo po zsumowaniu G i $\bar{G}$ otrzymamy graf pełny, a więc będzie on miał $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi. Stąd mamy, że $\frac{n(n-1)}{2} = |E(G)| + |E(\bar{G})|$, a więc $|E(G)| = |E(\bar{G})| = \frac{n(n-1)}{4}$. Liczba krawędzi musi być liczbą naturalną oraz $NWD(n, n-1) = 1$, więc n musi być podzielne przez 4 lub $n-1$ musi być podzielne przez 4, czyli $n \equiv 0$ lub $n \equiv_4 1$. ∎

$\Leftarrow$ gdy graf G ma n wierzchołków (gdzie $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1 \pmod 4$), to istnieje graf G, który jest samodopełniający:

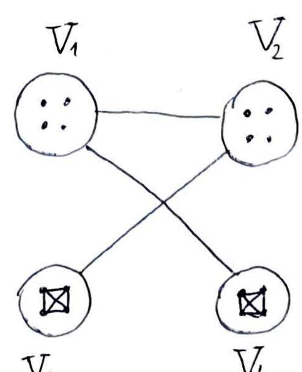
1° $n \equiv 0 \pmod 4$

Podzielmy wierzchołki G na 4 identyczne grupy V_1, V_2, V_3, V_4. Niech podgrafy V_1 oraz V_2 będą grafami pełnymi, a V_3 i V_4 pustymi. Połączmy teraz wierzchołki z V_1 z wierzchołkami z V_3, V_3 z V_4 oraz V_4 z V_2. Spójrzmy wtedy na $\bar{G}$. Jak widzimy, w $\bar{G}$ mamy

G:



$\bar{G}$:

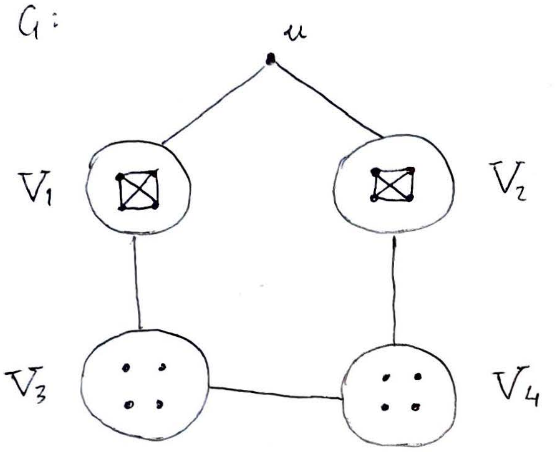


wewnątrz dwa podgrafy pełne i dwa puste. Wszystkie wierzchołki z podgrafów pustych są połączone ze sobą, wewnątrz każdy podgraf pełny jest połączony z jednym pustym. Nie pojawiają się żadne dodatkowe krawędzie, a więc izomorfizm pomiędzy G a $\bar{G}$ został zachowany. ∎

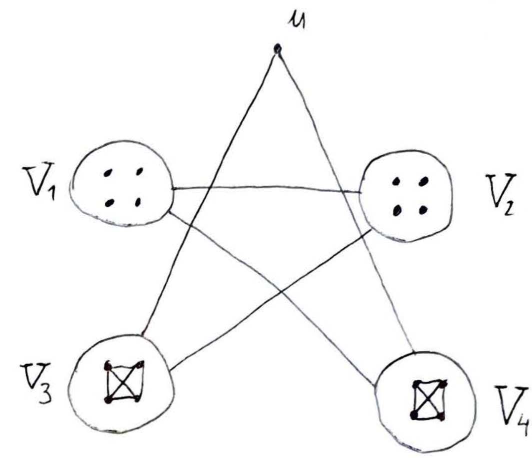
2° $n \equiv 1 \pmod 4$

W tym przypadku konstrukcja jest bardzo podobna, dodajemy jednak jeden wierzchołek poza podgrupy V_i $(i=1,\dots,4)$. Łączymy go z grupami V_1 oraz V_2.

G:



$\bar{G}$:



Nowy wierzchołek u jest połączony ze wszystkimi wierzchołkami z podgrafów pełnych, tak samo dzieje się dla grafu G oraz $\bar{G}$. Reszta pozostaje bez zmian, więc izomorfizm między G i $\bar{G}$ został zachowany. ∎

Zadanie 8. Turniejem nazywamy graf skierowany, którego każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jednym łukiem. Pokaż że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po drodze skierowanej długości co najwyżej 2 do każdego innego.

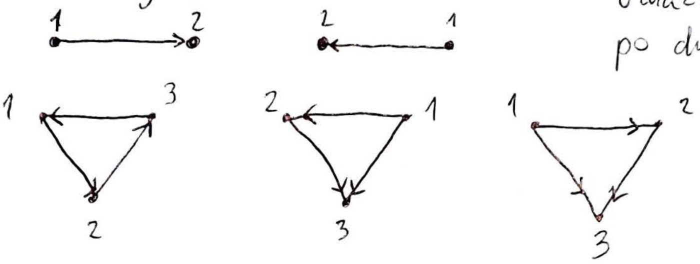
Weźmy wierzchołek v o największej liczbie łuków wychodzących (gdy jest ich kilka, weźmy dowolny). Załóżmy, że $\deg^{out}(v) < |E(G)|$, w przeciwnym wypadku z tego wierzchołka istniałaby droga do każdego innego, co kończyłoby dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje wierzchołek u, do którego nie da się dojść drogą skierowaną w dwóch ruchach. Ten wierzchołek u ma łuki do każdego innego wierzchołka, w szczególności do każdego wierzchołka, do którego można dojść z v jednym ruchem oraz do v. Aby nie można było dojść do u w dwóch krokach, to wymienione wcześniej łuki muszą wychodzić z u, co by oznaczało, że u ma więcej łuków wychodzących niż v, ponieważ z u wychodzą krawędzie skierowane do wierzchołków wychodzących z v oraz do v.

To oznacza, że $\deg^{out}(v) + 1 = \deg^{out}(u)$, co przeczy założeniu, że nie ma wierzchołka z większą ilością krawędzi wychodzących z v, czyli nie ma wierzchołka u, do którego nie da się dojść w dwóch ruchach. ∎

Zadanie 9. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) drogę Hamiltona, tzn. przechodzącą przez **wszystkie** wierzchołki.

Dowód indukcyjny po liczbie wierzchołków n:

- $n = 1$ — oczywiste
- $n = 2$
- $n = 3$



Numery przy wierzchołkach oznaczają kolejność przechodzenia po drodze Hamiltona. Narysowane zostały wszystkie turnieje z dokładnością do izomorfizmu.

Założenie: dla $n-1$ wierzchołkowego turnieju istnieje droga Hamiltona.

- Weźmy graf (turniej) o n wierzchołkach i usuńmy z niego dowolny wierzchołek u. Z założenia wiemy, że posiada on [turniej] teraz drogę Hamiltona $v_0 \to v_1 \to \dots \to v_{n-2}$. Dodajmy teraz usunięty wierzchołek. Aby graf pozostał turniejem, muszą istnieć łuki pomiędzy u a każdym innym wierzchołkiem. Jeżeli istnieje łuk (u, v_0) lub (v_{n-1}, u), to dowód się kończy. Jeśli te łuki nie istnieją, to weźmy najmniejsze i takie, że istnieje łuk (u, v_i). Musi on istnieć, gdyż założyliśmy że łuk między u a v_{n-1} wychodzi z u, tzn. istnieje łuk (u, v_{n-1}). Skoro wybieramy najmniejsze i, to istnieje również (v_{i-1}, u). Możemy teraz zmienić drogę Hamiltona z (v_{i-1}, v_i) na (v_{i-1}, u) i (u, v_i), aby objąć w drodze wszystkie wierzchołki. Pokazaliśmy, że istnieje droga Hamiltona w każdym turnieju n-wierzchołkowym. ∎

Zadanie 10. Czy istnieje sposób obejścia szachownicy 5 x 5 ruchem konika szachowego? A co jeśli wymagamy powrotu na to samo pole?

Przykładowe rozwiązanie:

3	20	9	14	1
10	15	2	19	24
21	4	25	8	13
16	11	6	23	18
5	22	17	12	7

Do drugiego pytania:

Ruch konia szachowego zawsze sprawia, że zmienia on kolor pola, na jakim stoi. Musimy obejść 25 pól, a więc wracając z jednego koloru, przy nieparzystej liczbie ruchów trafimy na pole innego koloru, przez co po wykonaniu wszystkich ruchów wylądujemy na innym polu niż wyjściowe.

Zadanie 12. Dany jest graf prosty G, w którym $n = |V(G)| > 3$ i dla dowolnych trzech wierzchołków u, v, w istnieją co najmniej dwie spośród trzech krawędzi $\{u,v\}, \{v,w\}, \{w,u\}$. Wykaż, że w G istnieje cykl Hamiltona.

Twierdzenie Ore'a:

Dla grafu prostego G, jeśli $n(G) \geq 3$ i $\forall u,v \in V(G): \{u,v\} \notin E(G)$ $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, to graf G zawiera cykl Hamiltona.

Dowód zadania:

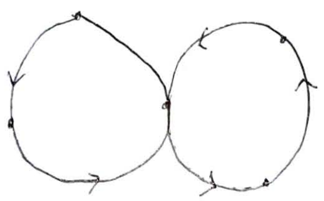
Weźmy dowolny graf n-wierzchołkowy. Jeśli G jest pełny, to zawiera cykl Hamiltona, rozpatrujemy więc grafy niepełne. Weźmy dwa dowolne wierzchołki u, v niepołączone krawędzią. Zostało nam więc $n-2$ wierzchołków, weźmy dowolny z nich i nazwijmy go w. Wiemy, że dla u, v, w muszą istnieć conajmniej dwie z krawędzi $\{v,u\}, \{v,w\}, \{u,w\}$. Skoro nie ma krawędzi $\{u,v\}$, to muszą być $\{u,w\}$ oraz $\{v,w\}$. Wierzchołek w został wybrany dowolnie, więc u oraz v są połączone z każdym z $n-2$ wierzchołków. Mamy więc $\deg(u) = \deg(v) = n-2$, czyli $\deg(u) + \deg(v) = 2n+4$. Z twierdzenia Ore'a wiemy, że $\deg(u) + \deg(v) = n$. $2n+4 \geq n$ dla $n \geq 4$, czyli istnieje cykl Hamiltona dla grafu z zadania.

Zadanie 4.

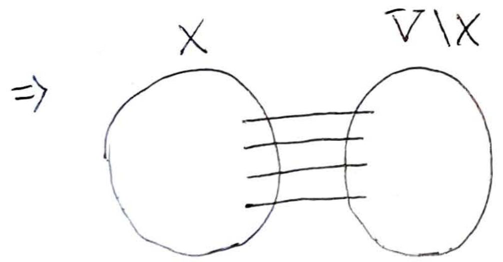
$\Rightarrow$ oczywiste (chyba)

$\Leftarrow$ $\forall v \in V(G) \quad deg^{in}(v) = deg^{out}(v)$

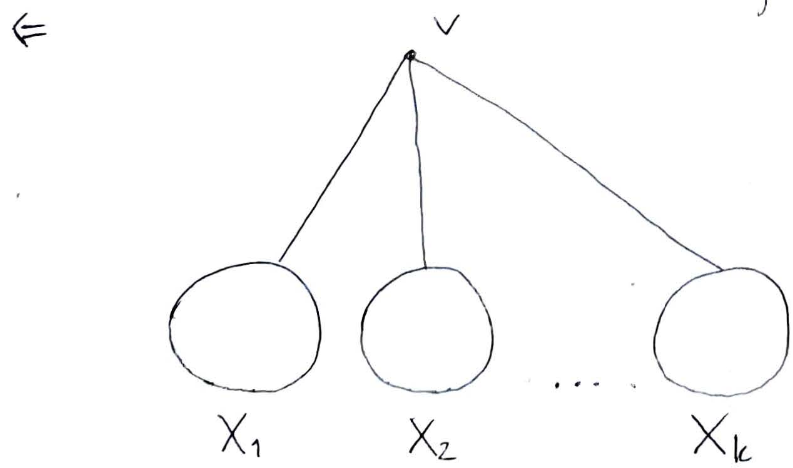
Weźmy dowolny wierzchołek v wychodzący do każdego wierzchołka. Z każdego kolejnego wierzchołka wybieramy krawędź dotychczas niewykorzystaną. Robimy to do momentu powrotu do v. Jeśli mamy niewykorzystaną krawędź, wybieramy wierzchołek najbliższy do niej i powtarzamy ten krok.



Zadanie 5.



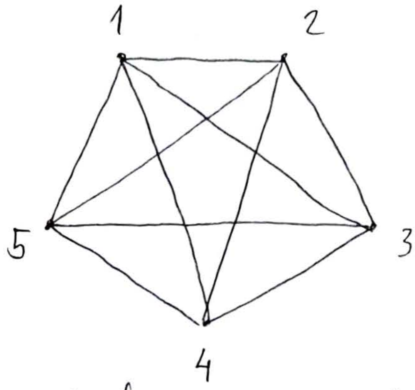
Aby mieć cykl Eulera pomiędzy dwoma spójnymi składowymi, musimy wrócić do wyjściowej pozycji, czyli minimalny cięcie zawiera parzysty liczbę krawędzi.



deg(v) jest parzysty, więc możemy przeprowadzić cykl Eulera w grafie.

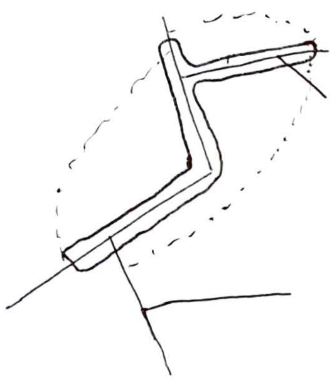
Zadanie 7.

1234531425 $\rightarrow$



Musimy znaleźć cykl Eulera w grafie pełnym n-wierzchołkowym, który wyznaczy nasz ciąg.

Zadanie 3.

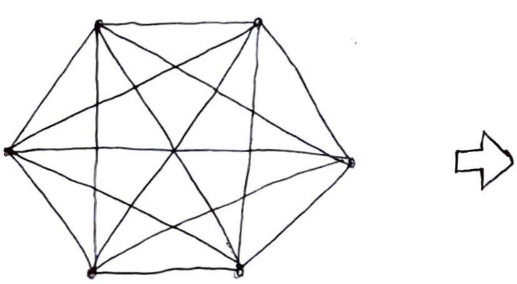


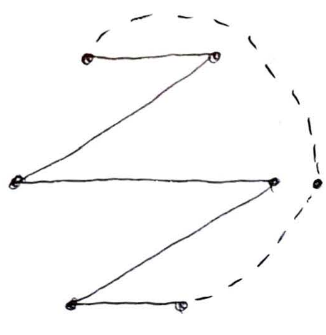
← Po każdej krawędzi przechodzimy parzystą liczbę razy, więc różnica symetryczna

$$C_1 \div C_2 \div C_3 \div \dots \div C_{m-n-1} = \emptyset$$

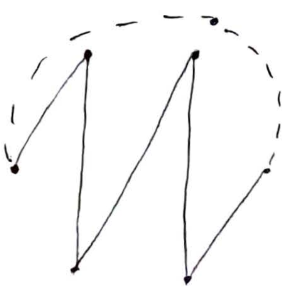
Zadanie 14.

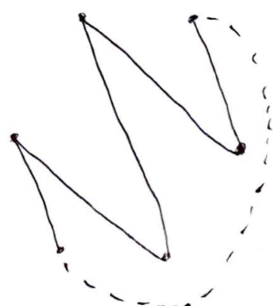
K_{2n}, niech $n = 3$





Powstają nam 3 rozłączne krawędziowo drogi Hamiltona.





Dla K_{2n+1} dodajemy wierzchołek, a skoro graf jest pełny, to będzie on połączony z końcami dróg Hamiltona, tworząc cykl Hamiltona (linie przerywane)

Zadanie 15.

Weźmy wierzchołki u, v z G, stwórzmy G' dodając do G wierzchołek połączony ze wszystkimi wierzchołkami z G (po zmianie ma $n+1$ wierzchołków).

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n-1 \quad /+2$$

$$\deg(u)+1 + \deg(v)+1 \geq n+1$$