Matematyka dyskretna, lista 10, 19/12/2019

Zadanie 2. Podaj przykłady (o ile istnieją):

(a) grafu prostego o ciągu stopni wierzchołków: 1, 2, 2, 3, 3.

$$\sum_{i=1}^{5} \deg(v_i) = 1+2+2+3+3 = 11 \overset{!}{=} 2m$$

(!) - lemat o uściskach dłoni, m - liczba krawędzi, czyli $m \in \mathbb{N}$

$$2m = 11$$

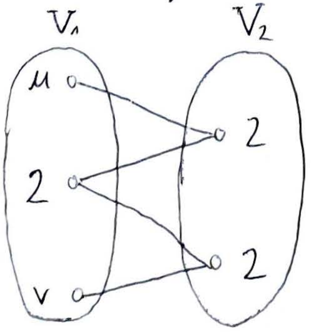
$m = 5.5$ więc sprzeczność, bo $m \in \mathbb{N}$, czyli graf nie istnieje

(b) grafu prostego o ciągu stopni wierzchołków: 1, 1, 1, 3, 4.

Mamy 5 wierzchołków, wybieramy dowolny z nich - niech jego stopień wynosi 4, tzn. łączy się z każdym innym wierzchołkiem. Kolejnym wierzchołkiem niech będzie ten o stopniu 3, łączy się on już z wierzchołkiem o stopniu 4, więc musielibyśmy od niego wyprowadzić jeszcze dwie krawędzie, jednak stopnie pozostałych wierzchołków mają 1, czyli nie da się stworzyć takiego grafu.

(c) grafu prostego dwudzielnego o ciągu stopni wierzchołków: 2, 2, 2, 2, 2.

Weźmy graf dwudzielny o 5 wierzchołkach. Aby każdy z nich miał stopień 2, to musimy je podzielić na dwie grupy: 3-wierzchołkową i 2-wierzchołkową. Połączmy wierzchołki z mniejszej grupy z grupą większej, tzn. będziemy w takiej sytuacji:



Jednak nie jesteśmy w stanie połączyć u oraz v w żaden sposób, gdyż wierzchołki z V_2 mają już stopień 2 i nie możemy ich modyfikować, a połączenie bezpośrednio u z v sprawiłoby, że graf nie byłby dwudzielny.

Zadanie 3. Średnicą $d(G)$ grafu G nazywamy maksymalną odległość między wierzchołkami grafu, tzn. $d(G) = \max \{d(x,y) \mid x,y \in V(G)\}$. Udowodnij, że jeżeli $d(G) > 3$, to $d(\overline{G}) < 3$.

Mamy graf G oraz wierzchołki $u,v \in V(G)$. Jeśli średnica jest określona, to graf G powinien być spójny, jednak gdy nie jest, to jeśli:

1° u,v są w jednej spójnej składowej, to wtedy w $\overline{G}$ istnieje ścieżka $u-x-v$, gdzie x jest w innej spójnej składowej w G, czyli $d(u,v) = 2$

2° u,v są w innych spójnych składowych, wtedy w $\overline{G}$ istnieje krawędź $\{u,v\}$, a więc $d(u,v) = 1$.

Jeśli graf G jest spójny, to musimy rozpatrzyć przypadki:

1° $d(u,v) > 1$ (nie ma krawędzi $\{u,v\}$ w G)
Skoro nie ma takiej krawędzi, to w $\overline{G}$ już istnieje i $d(u,v) = 1$.

2° $d(u,v) = 1$ (jest krawędź $\{u,v\}$ w G)
Weźmy graf $\overline{G}$, w nim nie ma krawędzi $\{u,v\}$. Możemy pokazać, że w grafie G istnieje wierzchołek w taki, że $d(u,w) > 1$ i $d(w,v) > 1$. Dzięki temu w $\overline{G}$ będzie istniała krawędź $\{u,w\}$ oraz $\{w,v\}$, czyli dla $\overline{G}$ będzie $d(u,v) = 2$. Warunek ten (dla G) możemy przedstawić tak:

$$\exists w: \{u,w\} \notin E \wedge \{w,v\} \notin E$$

Załóżmy więc, że taki wierzchołek w nie istnieje, tzn.

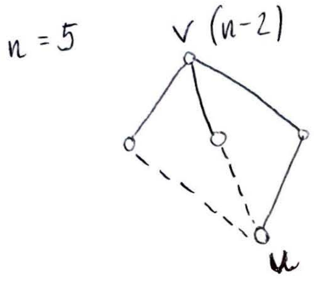
$$\neg(\exists w: \{u,w\} \notin E \wedge \{w,v\} \notin E) \equiv \forall w: \{u,w\} \in E \vee \{w,v\} \in E$$

Oznaczałoby to, że że z wierzchołków **u**,v możemy poprowadzić krawędź do każdego innego wierzchołka w G (tzn. takie krawędzie istnieją). Wtedy dla dwóch wierzchołków x,y w G maksymalna długość wynosić będzie 3: $x-u-v-y$, $x-v-u-y$, $x-u-y$, $x-v-y$, $x-y$, czyli dla dowolnych x,y jest $d(x,y) \leq 3$, co jest sprzeczne z założeniem z zadania ($d(G) > 3$). Stąd mamy, że istnieje taki wierzchołek w, że $d(u,w) > 1$ i $d(w,v) > 1$, czyli w $\overline{G}$ jest $d(u,v) = 2$ (ścieżka $u-w-v$).

Pokazaliśmy, że w $\overline{G}$ $d(u,v) = 1$ lub $d(u,v) = 2$, czyli $d(\overline{G}) < 3$. ∎

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli $d(G) = 2$ i $\max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\} = n-2$, to $m \geqslant 2n-4$.

Weźmy wierzchołek v o stopniu $\deg(v) = n-2$. Oznacza to, że wychodzi z niego $n-2$ krawędzi, jednak aby $d(G) = 2$ było spełnione, to musi istnieć jeszcze jeden wierzchołek, nazwijmy go u. Połączmy go z jednym z sąsiadów v, jednak wtedy u będzie odległe od pozostałych sąsiadów v o 3:



Jednak $d(G) = 2$, więc musimy dołączyć krawędzie wychodzące z u do sąsiadów v, tworzymy więc $n-3$ krawędzi (licząc przerywane). Teraz suma krawędzi to $\underbrace{(n-2)}_{\text{od } v} + \underbrace{1}_{\text{do } u} + \underbrace{(n-3)}_{\text{pozostałe}} = 2n-4$, czyli nierówność $m \geqslant 2n-4$ jest spełniona, również dodanie nowych krawędzi nie zmieni tego wyniku. ■

Zadanie 6. W drzewie mamy wierzchołki a, b, c, d. Pokaż, że jeśli drogi łączące a z b i c z d nie mają wspólnego wierzchołka, to mają wspólny wierzchołek drogi łączące a z c i b z d.

Dowód nie wprost: weźmy dowolne drzewo i załóżmy, że istnieją w nim drogi rozłączne $a \leftrightarrow b$ i $c \leftrightarrow d$ oraz $a \leftrightarrow c$ i $b \leftrightarrow d$. Możemy więc dojść do wierzchołka c z a na jeden ze sposobów: $a \to c$ lub $a \to b \to d \to c$. Skoro droga $a \to c$ jest rozłączna z $b \to d$, to na drodze $a \to c$ nie może być wierzchołka b ani d. W drzewie dwa wierzchołki może łączyć tylko jedna droga, co przeczy założeniu, że $a \to c$ i $b \to d$ są rozłączne, aby ten warunek był spełniony, to musiałby istnieć cykl w tym grafie, jednak przestałby on wtedy być drzewem. Stąd drogi $a \to c$ i $b \to d$ nie mogą być rozłączne, a więc muszą one przechodzić przez wspólny wierzchołek. ■

Zadanie 11. Losujemy drzewo o wierzchołkach $\{1,2,\dots,n\}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wierzchołek 1 jest liściem? Do czego prawdopodobieństwo to dąży przy $n \to \infty$?

Twierdzenie Cayley'a mówi, że liczba drzew o zbiorze wierzchołków $\{1,2,\dots,n\}$ wynosi n^{n-2} (z wykładu, tam również jest dowód).

Weźmy drzewo o n wierzchołkach i zabierzmy liść o indeksie 1, zostanie nam $n-1$ wierzchołkowe drzewo na zbiorze $\{2,3,\dots,n\}$, takich drzew jest $(n-1)^{(n-1)-2} = (n-1)^{n-3}$. Dodajmy teraz ten liść. Musi być połączony z którymś z $n-1$ wierzchołków, czyli możemy otrzymać $(n-1)\cdot(n-1)^{n-3} = (n-1)^{n-2}$ takich drzew. Prawdopodobieństwo, że otrzymamy takie zdarzenie wynosi:

$$\frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2}$$

z tw. Cayleya $\rightarrow$

Sprawdźmy dla $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{\frac{n-2}{-n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-2}{-n}} =$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \blacksquare$$

Zadanie 13. Pokaż, że każdy graf niezawierający trójkątów ma nie więcej niż $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ krawędzi.

Dowód indukcyjny względem $n = |V(G)|$:

- baza: $n = 0, 1, 2$ – trywialne
- krok: weźmy graf G bez trójkątów taki, że $|V(G)| = n+2$, wybierzmy w nim dowolną krawędź $\{u,v\}$. Weźmy graf $G-u-v$ (tzn. G bez wierzchołków u,v oraz krawędzi z nich wychodzących), niech będzie on nazwany H. H również nie ma trójkątów, wtedy z założenia indukcyjnego mamy $|E(H)| \leq \left\lfloor \frac{|V(H)|^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

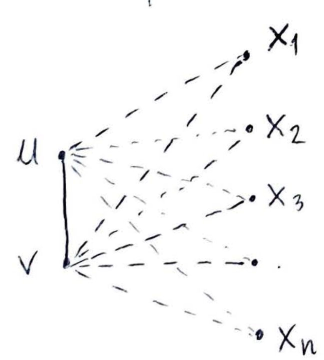
Wtedy graf G ma co najwyżej:

$$|E(G)| \leq |E(H)| + \overset{\{u,v\}}{1} + \overset{\text{obserwacja}}{|V(H)|} =$$

$$= \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1 + n = \left\lfloor \frac{n^2+4n+4}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+2)^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|V(G)|^2}{4} \right\rfloor$$

∎

Obserwacja:



Aby nie powstał żaden trójkąt w naszym grafie, to możemy dodać co najwyżej jedną krawędź wychodzącą z u lub v do wierzchołka x_i.

Zadanie 1. Załóżmy, że grafy G_1 i G_2 ...

ALGORYTM:

1° $N = zeros(n)$

2° dla wierzchołków $i = 1, 2, \dots, n$:

- count = 0
- dla j sąsiadów i w G_1:
  - $N[j] = 1$
  - count += 1
- dla j sąsiadów i w G_2:
  - jeśli $N[j] == 1$ return false
  - else:
    - $N[j] = 0$
    - count -= 1
- jeśli count == 0
  - return false

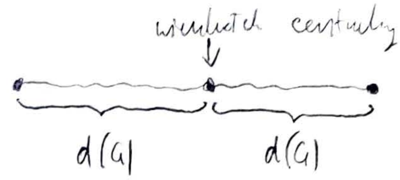
3° return true

Zadanie 5.

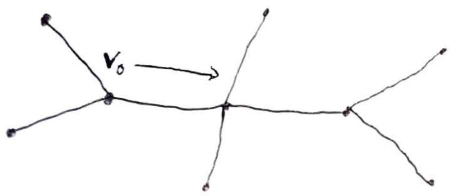
(a) $r(G) \le d(G) \le 2 \cdot r(G)$

trywialne z definicji promienia i średnicy (*)

(*) weźmy dwa dowolne wierzchołki połączone drogą



(b) Jordan



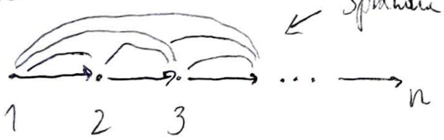
zaczynamy z dowolnego wierzchołka drzewa, sprawdzamy długość drogi do wszystkich liści, jeżeli mamy możliwość to przejdźmy do bliższego wierzchołka od najdalszego liścia...

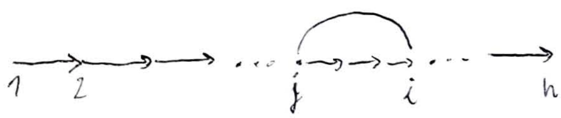
(c) Algorytm znajdujący wierzchołek centralny: opis wyżej ↗

Zadanie 7.

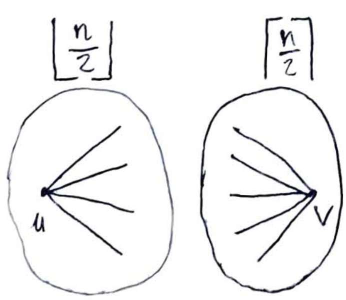
sprawdzamy $\frac{n(n-1)}{2}$ możliwości

(a)

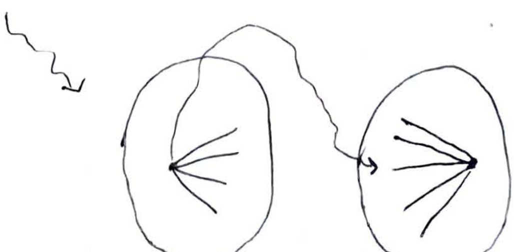




(b)



$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{4} \Rightarrow \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor & \text{w p.p.} \end{cases}$$

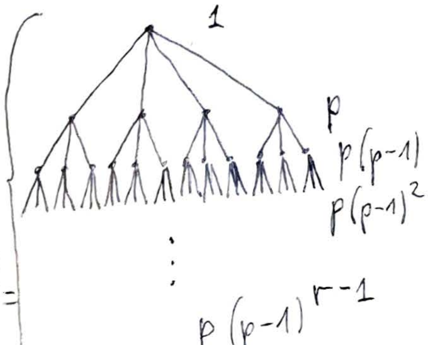


Zadanie 8. $C = B^TB - 2I$

$$(B^TB)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } e_i, e_j \text{ nie mają wspólnego wierzchołka} \\ 1 & \text{jeśli } e_i, e_j \text{ mają wspólny wierzchołek} \\ 2 & \text{jeśli } i = j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 \end{bmatrix} - 2I = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1\cdot 2 & & & \\ & 1\cdot 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c|c} & i \\ \hline j & \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \blacksquare$$

Zadanie 9. $r(G) \overset{?}{\geq} \dfrac{\log(np-n+1)}{\log p} - 1$



$$n \leq 1 + p\frac{(p-1)^r - 1}{p-1}$$

$$1 + \frac{n-1}{p}\cdot(p-1) \leq (p-1)^r / \log$$

$$n \leq \sum_{i=0}^{r-1} p(p-1)^i + 1 = 1 + p\frac{-(p-1)^r + 1}{-(p-1)+1} = 1 + p\frac{(p-1)^r - 1}{p-2}$$

(gdzieś jest błąd obliczeniowy, ale „jak się dobrze policzy, to wyjdzie" :)