Analiza numeryczna, Lista 6, 12/11/2019

Zadanie 1. Uzasadnienie numerycznej poprawności schematu Hornera.

ALGORYTM:

$$w_0 = x(\underbrace{x(\dots x(x\cdot \underbrace{a_n}_{w_n}+a_{n-1})}_{w_{n-1}}+a_{n-2})+a_{n-3})+\dots+a_1)+a_0$$

$w_n := a_n$

$w_k := w_{k+1}\cdot x - a_k \qquad (k=n-1, n-2, \dots, 0)$

$$w_0 = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$ czyli błędy algorytmu są postaci:

1° $a_n(1+\beta_n)$

błąd dla x ma indeks mniejszy o 1, ponieważ przy a_0 nie pojawia się x (tzn. ma stałą wartość $x^0=1$)

2° $$\left[x\cdot a_n(1+\beta_n)(1+\alpha_{n-1}) + a_{n-1}\right](1+\beta_{n-1}) =$$

$$= x\cdot a_n(1+\beta_n)(1+\alpha_{n-1})(1+\beta_{n-1}) + a_{n-1}(1+\beta_{n-1})$$

3° $$\left[x^2 a_n(1+\beta_n)(1+\beta_{n-1})(1+\alpha_{n-1})(1+\alpha_{n-2}) + x a_{n-1}(1+\beta_{n-1})(1+\alpha_{n-2}) + a_{n-2}\right](1+\beta_{n-2}) =$$

$$= x^2 a_n(1+\beta_n)(1+\beta_{n-1})(1+\beta_{n-2})(1+\alpha_{n-1})(1+\alpha_{n-2}) +$$

$$+ x a_{n-1}(1+\beta_{n-1})(1+\beta_{n-2})(1+\alpha_{n-2})$$

$$+ a_{n-2}(1+\beta_{n-1})$$

itd. w kolejnych przypadkach, więc dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$:

$$w_0 = \sum_{i=0}^{n}\left(x^i a_i \cdot \prod_{j=0}^{i}(1+\beta_j)\cdot\prod_{j=1}^{i}(1+\alpha_j)\right),$$

przyjmijmy teraz, że $(1+\beta)$ to największy błąd $(1+\beta_j)$ dla $j=0,1,\dots,$ a $(1+\alpha)$ to analogicznie największy błąd z $(1+\alpha_j)$, uzyskamy wtedy:

$$w_0 = \sum_{i=0}^{n}\left[x^i a_i \prod_{j=0}^{i}(1+\beta)\prod_{j=1}^{i}(1+\alpha)\right] \leq \sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\beta)^i(1+\alpha)^i$$

Przyjmijmy teraz, że $(1+\varepsilon)=(1+\alpha)(1+\beta)$, dzięki czemu mamy:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i (1+\beta)^i (1+\alpha)^i = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i \left((1+\alpha)(1+\beta)\right)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\varepsilon)^i = \sum_{i=0}^{n} \left[x(1+\varepsilon)\right]^i a_i = \sum_{i=0}^{n} \tilde{x}^i a_i,$$

otrzymany wynik jest mało zaburzonym wynikiem dokładnym dla mało zaburzonych danych, więc algorytm jest numerycznie poprawny. ■

Zadanie 2. Oszczędny algorytm zamiany postaci Newtona wielomianu na jego postać potęgową. Oszacuj jego złożoność.

(1) Postać wielomianu Newtona: $a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j) \overset{*}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$

(2) Postać potęgowa: $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

Najprostsze przejście* z (1) do (2) wymagałoby maksymalnie n dodawań oraz $\frac{(n^2+n)}{2}$ mnożeń, a więc złożoność byłaby $O(n^2)$. Możemy jednak zastosować algorytm Newtona-Hornera ← uogólniony algorytm Hornera, tj.:

$$w(x) = a_0 + (x-x_0)\left(a_1 + (x-x_1)\left(a_2 + \dots \overbrace{\left(a_{n-1} + (x-x_{n-1})\overbrace{a_n}^{w_n}\right)}^{w_{n-1}} \dots\right)\right),$$

cała wartość wielomianu dla w_0

dzięki czemu wykonamy n dodań oraz $2n-1$ mnożeń – czas algorytmu wynosi wtedy $O(n)$, TYLKO DLA OBLICZANIA WARTOŚCI, DOKOŃCZENIE (POPRAWNE) NA KOLEJNEJ STRONIE!!

↑ OBLICZANIE WSPÓŁCZYNNIKÓW

ALGORYTM:

$$\begin{cases} w_n := a_n \\ w_k := w_{k+1}(x-x_k) + a_k \quad (k=n-1, n-2, \dots, 0) \end{cases}$$

$w(x) = w_0.$

Zadanie 2. (z zajęć)

$$w_n(x) = 1 \cdot b_0 + b_1 \underbrace{(x-x_0)}_{p_1(x)} + b_2 \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)}_{p_2(x)} + \ldots + b_n \underbrace{\prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j)}_{p_n(x)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} b_i p_i(x), \quad p_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)$$

$$(t_{i-1}x^{i-1} + t_{i-2}x^{i-2} + \ldots + t_1 x + t_0)(x-x_i) =$$

$t_{-1} = 0$

$$= (t_{i-1})x^i + (t_{i-2} + (-x_i) \cdot t_{i-1})x^{i-1} + \ldots + (t_0 + (-x_i)t_1)x + (t_{-1} + (-x_0)t_0)$$

```
t ← [1 0 0 ... 0]
a ← [0 0 0 ... 0]

FOR i = 0, ..., n :
    a[i] = b_i
    t[i] = 1
    FOR j = i-1, ..., 0
        t[j] = t[j-1] + (-x_i) * t[j]
        a[j] = a[j] + b_i t[j]
    END
END
RETURN a
```

OBLICZANIE WSPÓŁCZYNNIKÓW

Złożoność $O(n^2)$

Zadanie 3. Algorytm Clenshawa

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x)$$

$$B_{n+1} = B_{n+2} = 0$$

$$B_k = 2x B_{k+1} - B_{k+2} + c_k$$

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' \left(B_k - 2x B_{k+1} + B_{k+2}\right) T_k(x) =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0 + B_1 T_1 - x B_1 T_0(x) + \sum_{k=2}^{n} B_k T_k - \sum_{k=1}^{n-1} 2x B_{k+1} T_k + \sum_{k=0}^{n-2}{}' B_{k+2} T_k =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0 + B_1 T_1 - x B_1 T_0(x) + \sum_{k=2}^{n}{}' B_k T_k - \sum_{k=2}^{n} 2x B_k T_{k-1} + \sum_{k=2}^{n}{}' B_k T_{k-2} =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0 + B_1 T_1 - x B_1 T_0(x) + \sum_{k=2}^{n} B_k \left(T_k - 2x T_{k-1} + T_{k-2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0 + x B_1 - x B_1 - \frac{1}{2} B_2 T_0 =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0 - B_2 T_0 =$$

$$= \frac{1}{2} (B_0 - B_2).$$

Zadanie 4. Niech T_n $(n=0,1,\dots)$ oznacza n-ty wielomian Czebyszewa:

$$T_k = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \quad (k \geq 2)$$
$$T_0(x) \equiv 1$$
$$T_1(x) \equiv x$$

(a) Podaj postać potęgową wielomianu T_6.

$$T_2(x) = 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x$$
$$T_4(x) = 2x(4x^3-3x) - (2x^2-1) =$$
$$= 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$T_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) =$$
$$= 16x^5 - 16x^3 + 2x - 4x^3 + 3x = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$T_6(x) = 2x(16x^5 - 20x^3 + 5x) - (8x^4 - 8x^2 + 1) =$$
$$= 32x^6 - 40x^4 + 10x^2 - 8x^4 + 8x^2 - 1 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

(b) Jakimi wzorami wyrażają się współczynniki wielomianu T_n przy x^n i x^{n-1}?

- przy x^n: $0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$, a więc 2^{n-1}

  (1) dla $n=1$ mamy $T_1(x) \equiv x = 2^{1-1}x = 2^0 \cdot x = x$

  (2) załóżmy, że dla $n_0 \leq n$ zachodzi, pokażę dla $n+1$:

  $$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) =$$
  $$= 2x \cdot (2^{n-1}x^{n-2} + \dots) - (2^{n-2}x^{n-3} + \dots) =$$
  $$= 2^n x^{n-1} + \dots,$$ pozostałe wyrazy nie mają znaczenia, gdyż stopień T_n to n, czyli odejmując kolejne wyrazy nie naruszamy n-tego stopnia ■

- przy x^{n-1} analogicznie, wynika to z poprzedniego dowodu.

(c) Korzystając z faktu, że $\forall x \in [-1,1]$ $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$:

(I) sprawdź, że $|T_n(x)| \leq 1$:

niech $n \cdot \arccos x = \beta$, wtedy $T_n(x) = \cos(\beta)$, a znając zbiór wartości cosinusa mamy, że $-1 \leq T_n(x) \leq 1$.

(II) wyznacz wszystkie punkty ekstremalne T_n, tzn. rozwiązania równania $|T_n(x)| = 1$

$|\cos(\alpha)| = 1$ dla $\alpha = k \cdot \pi$

Korzystając z faktu (c) wiemy, że $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, czyli mamy równanie:

$$\cos(\alpha) = \cos(n \arccos x)$$
$$\alpha = n \arccos x$$
$$k\pi = n \arccos x \qquad \cos(\arccos x) = x$$
$$\frac{k\pi}{n} = \arccos x$$
$$\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cos(\arccos x)$$
$$x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ dla } k = 0, \dots, n-1$$

(III) udowodnij, że T_{n+1} $(n \geq 0)$ ma $n+1$ rzeczywistych, pojedynczych miejsc zerowych leżących w przedziale $(-1,1)$.

$\cos((n+1)\arccos x) = 0$, $\cos\alpha = 0$ dla $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$, więc:

$$(n+1)\arccos x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$
$$\arccos x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{n+1}$$
$$x = \cos\frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{n+1} \text{ dla } k = 0, \dots, n$$

Skoro wielomian jest stopnia $n+1$, to ma tyle maksymalnie miejsc zerowych. Jednak x ma rozwiązanie dla $k=0,\dots,n$, więc ma łącznie $n+1$ miejsc zerowych, a więc T_{n+1} ma $n+1$ miejsc zerowych.

Zadanie 5. Udowodnij istnienie i jednoznaczność wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j},$$ $x_0, x_1, \dots, x_n$ to węzły interpolacji funkcji f, takie że mamy wartości $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, \dots, f(x_n)=y_n$.

ISTNIENIE WIELOMIANU INTERPOLUJĄCEGO

Weźmy $\lambda_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$. Jest ona wielomianem stopnia n dla $x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, ponieważ licznik jest iloczynem n wyrazów postaci $(x-x_j)$, a mianownik jest liczbą. Rozpatrzmy teraz przypadki:

(1) $x_k \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $k=i$:

$$\lambda_i(x_k) = \lambda_i(x_i) = \prod_{j=0 \wedge j\neq i}^{n} \frac{x_i-x_j}{x_i-x_j} = \prod_{j=0 \wedge j\neq i}^{n} 1 = 1$$

(2) $x_k \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $k \neq i$:

$$\lambda_i(x_k) = \prod_{j=0 \wedge j\neq i}^{n} \frac{x_k-x_j}{x_i-x_j} = \frac{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdot\ldots\cdot\overbrace{(x_k-x_k)}^{0,\text{ więc cały licznik to } 0}\cdot\ldots\cdot(x_k-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)} = 0$$

Niech $L_n(x) = y_0\lambda_0(x) + y_1\lambda_1(x) + \ldots + y_n\lambda_n(x)$, $L_n \in \Pi_n$.

Dla $x_i \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mamy:

$$L_n(x_i) = y_0\cdot\lambda_0(x_i) + y_1\cdot\lambda_1(x_i) + \ldots + y_i\lambda_i(x_i) + \ldots + y_n\lambda_n(x_i),$$

jednak z (2) wiemy, że składniki sum o indeksach różnych od i są równe 0 (bo dla $j\neq i$ $\lambda_i(x_j)=0$) oraz z (1), że składnik o indeksie i jest równy $\lambda_i(x_i)\cdot y_i = 1\cdot y_i = y_i$, a więc $L_n(x_i)=y_i$, czyli $L_n(x)$ jest wielomianem interpolującym funkcję $f(x)$ w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$. ∎

JEDNOZNACZNOŚĆ WIELOMIANU LAGRANGE'A

Załóżmy nie wprost, że istnieją dwa różne wielomiany $P(x)$ oraz $Q(x)$ stopnia n interpolujące te same wartości w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tzn.

$$P(x_i) = Q(x_i) = f(x_i)$$

Rozważmy wielomian $R(x)$ taki, że $R(x) = P(x) - Q(x)$. Wiemy o nim, że:

- jest stopnia co najwyżej n, jako że $P(x)$ oraz $Q(x)$ są n-tego stopnia, a te wyrazy od siebie odejmujemy,
- dla danych $x_i \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ zachodzi $R(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = y_i - y_i = 0$, czyli ma on $n+1$ miejsc zerowych.

Z drugiej strony mamy sprzeczność, ponieważ wielomian n-tego stopnia ma maksymalnie n miejsc zerowych, co oznacza że wielomian $R(x)$ musi być tożsamościowo równy zeru, stąd mamy:

$$R(x) = 0$$

$$P(x) - Q(x) = 0$$

$$P(x) = Q(x),$$

czyli interpolacja wielomianowa Lagrange'a jest jednoznaczna. ■

Zadanie 6. Podaj postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego dla danych:

	0	1	2	3
x_k	-3	-2	0	4
y_k	0	2	6	-10

$$L_3(x) = y_0\lambda_0(x) + y_1\lambda_1(x) + y_2\lambda_2(x) + y_3\lambda_3(x)$$

$$\lambda_0 = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_0-x_3} = -\frac{1}{21}(x+2)(x-0)(x-4)$$

$$\lambda_1 = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_1-x_3} = \frac{1}{12}(x+3)(x-0)(x-4)$$

$$\lambda_2 = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x-x_3}{x_2-x_3} = -\frac{1}{24}(x+3)(x+2)(x-4)$$

$$\lambda_3 = \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{1}{168}(x+3)(x+2)(x-0)$$

$$L_3(x) = 0 + \frac{1}{6}(x+3)(x-0)(x-4) - \frac{1}{4}(x+3)(x+2)(x-4) - \frac{5}{84}(x+3)(x+2)(x-0) =$$

$$= -\frac{x^3}{7} - \frac{5x^2}{7} + \frac{8x}{7} + 6$$

Zadanie 7. Niech $f(x) = 2019x^5 - 1977x^4 + 1410x^3 - 1939x + 1791$

(a) wyznacz wielomian stopnia ≤ 5 interpolujący funkcję...

$L_n(x) = f(x)$, mamy to z jednoznaczności interpolacji

(b) wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący f w punktach $-1, 0, 1$

$x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ y_0 = -1676,\ y_1 = 1791,\ y_2 = 1304$

$$L_2(x) = -1676\frac{x(x-1)}{-1\cdot(-2)} + 1791\frac{(x-1)(x+1)}{1\cdot(-1)} + 1304\frac{x(x+1)}{2\cdot 1} =$$

$$= -838x^2 + 838x - 1791x^2 + 1791 + 652x^2 + 652x =$$

$$= -1977x^2 + 1490x + 1791$$

Zadanie 6. Postać Newtona (tablica ilorazów różnicowych)

x_i	y_i			
	b_0	b_1	b_2	b_3
-3	0			
-2	2	2		
0	6	2	0	
4	-10	-4	-1	$-\frac{1}{7}$

$$w_3 = b_0 + b_1(x-x_0) + \dots$$

$$W_3(x) = 0 + 2(x+3) + 0(x+3)(x+2) - \frac{1}{7}(x+3)(x+2)(x-0) = \dots$$

Zadanie 8. Wykaż, że dla wielomianów $\lambda_k(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ $(k=0,1,\dots,n)$:

(a) $$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1$$

$$f(x) = 1$$

$$1 = f(x) = L_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_i)\lambda_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \blacksquare$$

(b) $$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0)\, x_k^j = \begin{cases} 1 : & j=0 \\ 0 : & j=1,2,\dots,n \end{cases}$$

$$f(x) = x^j$$

$$L_n(f) = \sum_{k=0}^{n} x_k^j \lambda_k(x) \equiv x^j$$

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^j \lambda_k(0) = 0^j = \begin{cases} 1 : & j=0 \\ 0 : & j=1,2,\dots,n \end{cases} \blacksquare$$