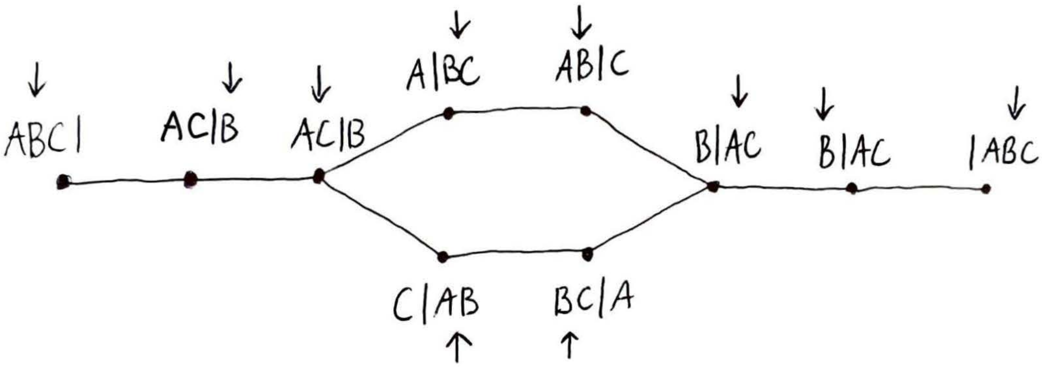
Matematyka dyskretna, Lista 9, 13/12/2019

Zadanie 1. Problem przewoźnika.

Oznaczmy wilka jako A, kozę jako B oraz kosz z kapustą jako C, niech strzałka oznacza stronę rzeki, na której jest przewoźnik oraz pionowa kreska oznacza rzekę, czyli

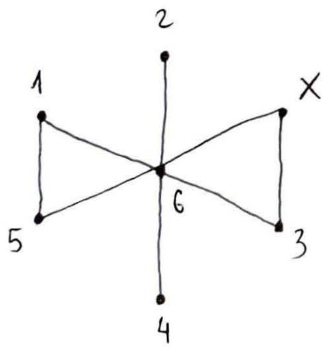
$$\overset{\downarrow}{AC|B}$$

oznacza, że na jednej stronie rzeki jest wilk i kosz z kapustą, a na drugiej przewoźnik oraz koza.



Zadanie 2. Rzędy grup automorfizmów, $|G| = |G_x||O_x|$

1°

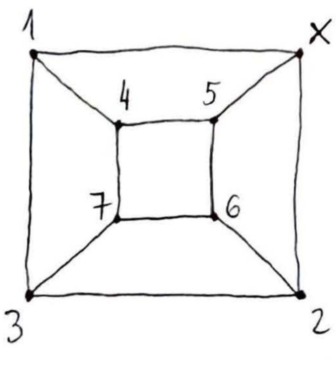


$|O_x| = |\{1, x, 3, 5\}| = 4$ ← gdzie możemy przenieść x

$|G_x| = |\{id, (1,5), (2,4), (1,5)(2,4)\}|$ ← permutacje grafu dla których x zostaje na swoim miejscu

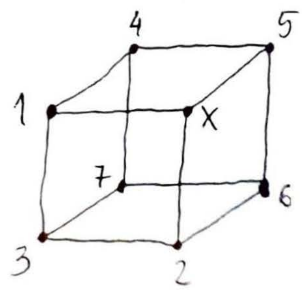
$|G| = |G_x||O_x| = 4 \cdot 4 = 16$

2°



$|O_x| = |\{1, x, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}|$

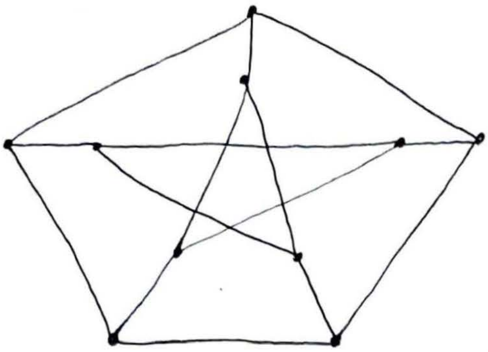
$|G_x| = 3!$ ← permutacje sąsiadów x, aby został zachowany automorfizm (czyli 1, 2, 5)



$|G| = |O_x||G_x| = 8 \cdot 3! = 48$

Zadanie 3. Graf **Petersena** (polecenie jak w zadaniu 2)

x



Każdy wierzchołek jest stopnia 3, więc mamy do czynienia z grafem 3-regularnym, stąd x możemy przenieść na każdy inny wierzchołek:

$|O_x| = 10$

Permutujemy najpierw sąsiadów wierzchołka x, ale możemy jeszcze zapermutować jednego sąsiada (a dokładniej sąsiadów sąsiada x), więc stabilizatorem jest:

$$|G_x| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nie permutujemy } x}}{3! \cdot 2!} = 6 \cdot 2 = 12$$

$$|G| = |G_x||O_x| = 10 \cdot 12 = 120$$

Zadanie 4. Wykaż, że z dokładnością do izomorfizmu...

(1) 3 wierzchołki: $|V| = 3$, $\max |E| = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$, czyli te grafy to:

(a)  $|E| = 0$

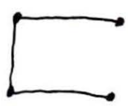
(b)  $|E| = 1$

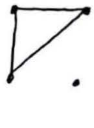
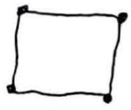
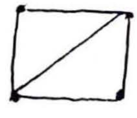
(c) $|E| = 2$

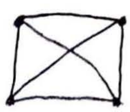
(d)  $|E| = 3$

$$\max |E| = \frac{|V| \cdot (|V| - 1)}{2}$$

(2) 4 wierzchołki: $|V| = 4$, $\max |E| = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

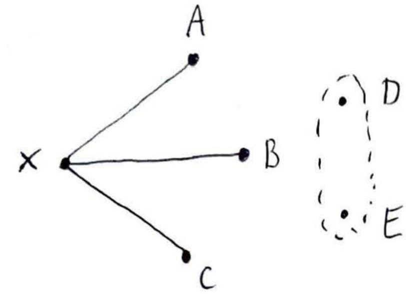
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

(f)  (g)  (h)  (i)  (j) 

(k) 

$\|E\|$	0	1	2	3	4	5	6
wszystkie grafy	a	b.	c, d	e, f, g	h, i	j	k

Zadanie 5. Narysuj wszystkie nieizomorficzne sześciowierzchołkowe grafy 3-regularne

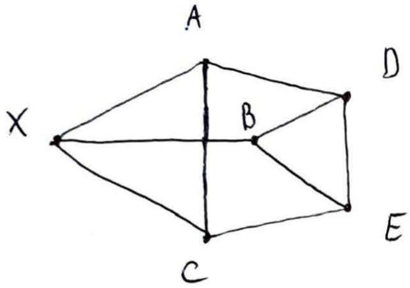


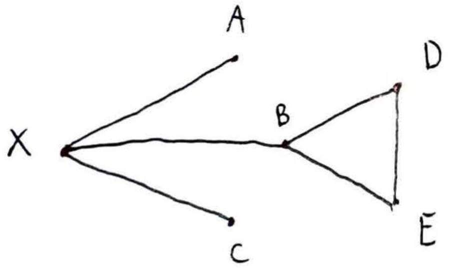
Bierzemy dowolny wierzchołek, niech będzie nim X. Skoro graf jest 3-regularny, to X musi mieć 3 sąsiadów - A, B, C. Pozostałe dwa wierzchołki (D, E) nie mogą być połączone z X, więc są dwie możliwości:

1° (D, E) jest krawędzią

2° (D, E) nie jest krawędzią.

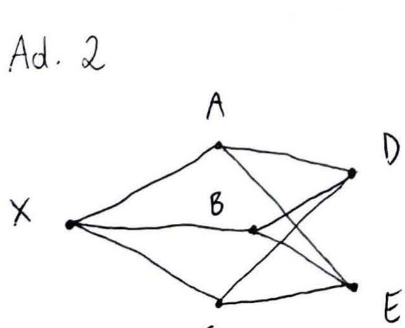
Ad. 1°





Skoro (D, E) jest krawędzią, to D oraz E potrzebują jeszcze dwóch sąsiadów (każdy), czyli 4 krawędzie muszą trafić do 3 wierzchołków (A, B, C), więc z zasady szufladkowej jeden z wierzchołków A, B, C musi mieć dwóch sąsiadów oprócz X. Niezależnie od jego wyboru powstanie nam graf, który możemy przekształcić zachowując izomorfizm. Wybieramy wierzchołek B (rysunek obok), a następnie łączymy wierzchołki (A, D) i (C, E) lub (A, E) i (D, C), aby nie zepsuć 3-regularności innych. Stąd A, C muszą być sąsiadami.

Ad. 2



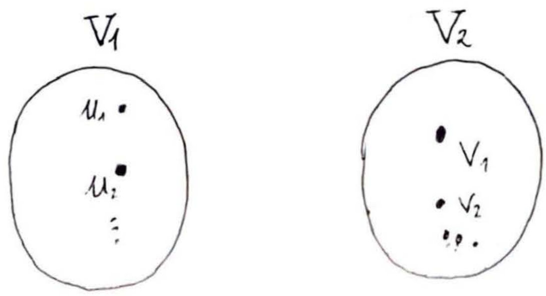
Skoro (D, E) nie są połączone, a graf jest 3-regularny, to ich sąsiadami mogą być tylko A, B, C.

Zadanie 9. Udowodnij, że chociaż jeden z grafów jest spójny (grafy $G, \overline{G}$)

Musimy rozpatrzyć dwa przypadki:

1° G jest spójny – trywialne, spełnia założenie z zadania.

2° G jest niespójny, więc jego wierzchołki dzielimy na dwie składowe spójne: V_1 oraz V_2, takie że między dowolnym wierzchołkiem $u_i \in V_1$ oraz $v_i \in V_2$ nie ma żadnej krawędzi.



Dopełnienie $\overline{G}$ sprawi, że powstaną krawędzie pomiędzy wszystkimi wierzchołkami z V_1 oraz V_2, a więc z tego wynika, że graf $\overline{G}$ jest spójny, bo dla każdej pary wierzchołków istnieje ścieżka, która je łączy. ∎

Ten dowód należy przeprowadzić dla dwóch spójnych składowych i pokazać, że jeżeli w składowej V1 istnieją punkty u oraz v niepołączone krawędzią, to dopełnienie grafu G (dla jakiegoś punktu x ze składowej V2) będzie łączyć punkty u, v poprzez punkt x, co sprawi, że dopełnienie będzie grafem spójnym.

Zadanie 6. Przez Q_k oznaczamy...

$n(Q_k) = 2^k$ ← liczba ciągów binarnych długości k

$m(Q_k) = \frac{k \cdot 2^k}{2} = k \cdot 2^{k-1}$

↖ graf nieskierowany, dlatego nie chcemy liczyć tej samej krawędzi 2 razy

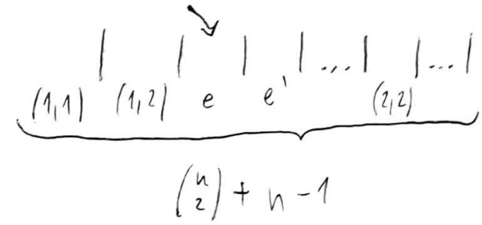
$$\left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right) \% 2$$

Zadanie 7. Niech $V = \{1, 2, \dots, n\}$...

(a) $2^{\binom{n}{2}}$

(b) $\binom{n}{2} + n - 1$ ← pętle

krawędzie nieskierowane



Wykorzystując własność tych „przedziałek" mamy

$$\binom{m + \binom{n}{2} + n - 1}{\binom{n}{2} + n - 1}$$

← rozbicie liczby a na b składników naturalnych ($b \in \{0, 1, \dots\}$), działa na tej samej zasadzie co zadania z 6. listy

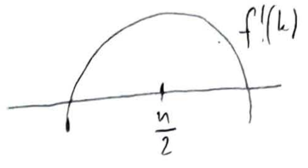
(c) $\binom{m + n^2 - 1}{n^2 - 1}$

Zadanie 8. Udowodnij, że w dwudzielnym grafie o n wierzchołkach, liczba krawędzi jest równa co najwyżej $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Mamy $G(V,E)$, $V = V_1 \cup V_2$, $E \subseteq V_1 \times V_2$.

Niech $|V_1| = k$, $|V_2| = n-k$, wtedy $|E| \leq (n-k)k$.

$$f(k) = k(n-k) \Rightarrow f'(k) = -2k + n$$



Aby zmaksymalizować $f(k)$ musimy wziąć $k = \frac{n}{2}$,

wtedy $|E| \leq \lfloor \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$

Zadanie 10. G prosty jest spójny wtw, gdy przynajmniej dwa grafy G_v...

$n(G) > 2$

Implikacja w obie strony, dużo machania rękami, jak coś znajdę to dam link.

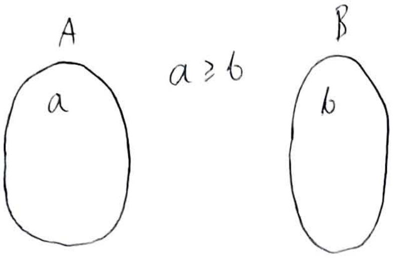
Zadanie 11. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe drogi proste mają wspólny wierzchołek.

Załóżmy, że istnieją dwie najdłuższe drogi P_1, P_2, które są odpowiednio złożone z wierzchołków $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ oraz $(y_1, y_2, \dots, y_k)$, $k \geq l$. Weźmy wtedy ścieżkę $P' = (x_i, v_1, v_2, \dots, v_n, y_j)$ i załóżmy, że $i \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$ oraz $j \geq \lceil \frac{l}{2} \rceil$. Wtedy

$\lceil \frac{k}{2} \rceil + \lceil \frac{l}{2} \rceil + 1 > l$, czyli wyznaczamy najdłuższą drogę przez drugą najdłuższą,

czyli te drogi mają wspólny wierzchołek.

Zadanie 12.



$a-(b-1) = a-b+1 \geq 0$

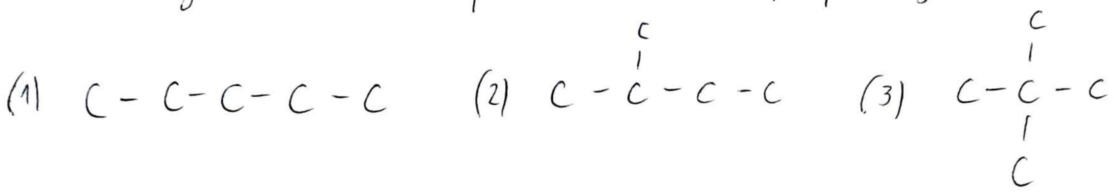
Niech $m(G) = \frac{(n-p)(n-p+1)}{2} = \sum_{i=1}^{p}{}'(v_i - 1) = -p+n$

Zadanie 13. C_kH_{2k+2} ...

$|V| = 3k+2$

$|E| = \frac{1}{2}\sum_{u \in V} d(u) = \frac{1}{2}\left[(4 \cdot k) + 1 \cdot (2k+2)\right] = 3k+1 \Rightarrow$ graf jest drzewem

Ile różnych izomerów istnieje dla C_5H_{12} (pomijam rysowanie H)?



Zadanie 14. $d_1, \dots, d_n$ – ciąg liczb naturalnych.

$(d_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ jest ciągiem stopni wierzchołków $\overbrace{\text{drzewa}}^{\text{PEWNEGO}}$ wtw, gdy $\sum' d_i = 2(n-1)$

$\Rightarrow$ oczywiste

$\Leftarrow$ • $n=1$: $d_1 = 0$

• $n=2$: $d_1 + d_2 = 2$

• dla $n+1$ będzie $\sum_{i=1}^{n+1}{}' d_i = 2((n+1)-1) = 2n$, wtedy $\exists d_j = 1$, $\exists d_i \geq 2$

aby $\sum d_i \neq 2n+2$ aby $\sum d_i \neq n+1$

Zadanie 15. l_1 – liczba wierzchołków wiszących

l_2 – liczba wierzchołków stopnia > 2 (≥ 3)

Pokaż, że $l_1 \geq l_2 + 2$.

Z lematu o uściskach dłoni:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2(n-1) = 2m(G) = 2n-2 \geq 1 \cdot l_1 + 2 \cdot (n - l_1 - l_2) + 3l_2 \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$2n-2 \geq l_1 + 2n - 2l_1 - 2l_2 + 3l_2$$

$$l_1 \geq l_2 + 2 \quad \blacksquare$$