Zadanie 1. Niech $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\lceil \log_2 k\rceil$, wykaż $f(n)=n-1+f(\lceil \frac{n}{2}\rceil)+f(\lfloor \frac{n}{2}\rfloor)$ dla $n\geq 1$.

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\lceil \log_2 k\rceil = \underbrace{\sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\lceil \log_2 (2k-1)\rceil}_{\text{nieparzyste}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\lceil \log_2 (2k)\rceil}_{\text{parzyste}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\left(1+\lceil \log_2 k\rceil\right) + \sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\left(1+\lceil \log_2 (k-\tfrac{1}{2})\rceil\right) =$$

$$= \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\lceil \log_2 k\rceil + \left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil + \sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\lceil \log_2 (k-\tfrac{1}{2})\rceil =$$

$$= n + f\left(\lfloor \tfrac{n}{2}\rfloor\right) + \sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\lceil \log_2 (k-\tfrac{1}{2})\rceil =$$

$$= n + f\left(\lfloor \tfrac{n}{2}\rfloor\right) + \lceil \log_2 \tfrac{1}{2}\rceil + \sum_{k=2}^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\lceil \log_2 (k-\tfrac{1}{2})\rceil =$$

$$= n + f\left(\lfloor \tfrac{n}{2}\rfloor\right) + (-1) + \sum_{k=2}^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\lceil \log_2 k\rceil =$$

$$= n-1 + f\left(\lfloor \tfrac{n}{2}\rfloor\right) + f\left(\lceil \tfrac{n}{2}\rceil\right) \quad \blacksquare$$

$$\left\{ \begin{aligned} \log_2(2k) &= \log_2 2 + \log_2 k = \\ &= 1 + \log_2 k \end{aligned} \right.$$

$$\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil = n$$

Jeśli wymagamy, aby $f(1)=0$, to f jest jedyną funkcją spełniającą tę zależność (tj. funkcja jest jednoznaczna):

$$\left.\begin{aligned} f(1)&=0\\ f(2)&=2-1+f(1)+f(1)\\ f(3)&=3-1+f(1)+f(2)\\ f(4)&=4-1+f(2)+f(2)\\ f(5)&=5-1+f(2)+f(3)\end{aligned}\right\}$$

dla każdych kolejnych wartości n funkcja $f(n)$ rekurencyjnie odwołuje się do $f(1)=0$, więc jeśli $f(1)$ byłoby inne, to funkcja przyjmowałaby inne wartości

Zadanie 3. Przedstawienie $n \in \mathbb{N}$ w układzie liczb Fibonacciego jako ciąg $a_2, \dots, a_k \in \{0,1\}$, takich że $n = a_2 F_2 + \dots + a_k F_k$ oraz $a_i + a_{i+1} \leq 1$ dla wszystkich i (tzn. dwie kolejne liczby Fibonacciego nie mogą wystąpić w tym zapisie).

REPREZENTACJA ZECKENDORFA

Fakt: Każda liczba Fibonacciego ma jednoznaczną reprezentację (samą siebie).

Dowód: dla $n = 1,2,3$ mamy $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, więc liczby te mają jednoznaczną reprezentację.

Podstawa indukcji: $n = 4 = F_4 + F_2 = 3+1$

Krok indukcyjny: jeśli każda liczba $n \leq k$ ma jednoznaczną reprezentację, to $k+1$ też ma. } założenie indukcyjne

1° $k+1$ jest liczbą Fibonacciego, więc ma jednoznaczną reprezentację (zgodnie z faktem).

2° $k+1$ nie jest liczbą Fibonacciego:

Istnieje takie $j \in \mathbb{Z}$, że $F_j < k+1 < F_{j+1}$ (czyli $k+1$ jest pomiędzy kolejnymi liczbami Fibonacciego).

Weźmy $n = k+1 - F_j$ (z założenia $n \leq k$, więc ma jednoznaczną reprezentację).

$$n = k+1 - F_j \implies F_j + n = k+1 < F_{j+1} = F_j + F_{j-1}$$
$$\implies n < F_{j-1},$$

więc reprezentacja n nie zawiera F_{j-1}, stąd wiemy, że $k+1$ ma jednoznaczną reprezentację jako $n + F_j$. ■

Dowód (jednoznaczności):

Załóżmy, że S i T są innymi reprezentacjami n. Weźmy teraz sumy bez wspólnych elementów, tzn. $S' = S \setminus T$, $T' = T \setminus S$. Skoro usunęliśmy wspólne elementy, to $\sum S = \sum T$ implikuje $\sum S' = \sum T'$. Gdyby S' był pusty, to T' musiałby być również pusty, aby suma elementów się zgadzała, lecz $S \neq T$, więc zbiory te nie mogą być puste.

Weźmy teraz największe elementy obu zbiorów: F_S dla zbioru S' oraz F_T dla zbioru T'. Załóżmy bez straty ogólności, że $F_S < F_T$. Wtedy $\sum S' < F_{S+1}$ oraz $\sum S' < F_T$, jednak wiedząc, że $\sum S' = \sum T'$ dochodzimy do sprzeczności, czyli S' oraz T' nie mogą być zbiorami niepustymi, a więc $S = T$, czyli reprezentacja liczb jest jednoznaczna. ■

Zadanie 4. Niech $x, k, n \in \mathbb{Z}$, skonstruuj algorytm obliczający $x^k \bmod n$. Powinien on korzystać ze wzorów $x^{2k} = x^k \cdot x^k$, $x^{2k+1} = x \cdot x^{2k}$. Określ liczbę mnożeń wykonywanych przez algorytm.

ALGORYTM:

```
f(x,k,n):
    if k == 1:   return x mod n
    else:        x_temp = f(x, k/2, n)
                 if k mod 2 == 0:  return (x_temp * x_temp) mod n
                 if k mod 2 == 1:  return (x * x_temp * x_temp) mod n
```

Liczba mnożeń algorytmu:

$$T(k) = T\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right) + c =$$

$$= T\left(\left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor\right) + c + c =$$

$$= T\left(\left\lfloor \frac{k}{8} \right\rfloor\right) + c + c + c = \ldots =$$

$$= T\left(\left\lfloor \frac{k}{2^{\log_2 k}} \right\rfloor\right) + c \cdot \log_2 k =$$

$$= c \cdot \log_2 k =$$

$$= O(\log_2 k)$$

Zadanie 11.

(a) przedstaw $\gcd(448, 721)$ w postaci $721x + 448y$ dla $x, y \in \mathbb{Z}$

721	448
448	$721 - 448 = 273$
273	$448 - 273 = 175$
175	$273 - 175 = 98$
98	$175 - 98 = 77$
77	$98 - 77 = 21$
21	$77 - 3\cdot 21 = 14$
14	$21 - 14 = 7$
7	$14 - 2\cdot 7 = 0$

więc $\gcd(448, 721) = 7$

$$7 = 21 - 14 = 21 - (77 - 3\cdot 21) =$$
$$= 4\cdot 21 - 77 = 4\cdot(98 - 77) - 77 =$$
$$= 4\cdot 98 - 5\cdot 77 = 4\cdot 98 - 5\cdot(175 - 98) =$$
$$= 9\cdot 98 - 5\cdot 175 = 9\cdot(273 - 175) - 5\cdot 175 =$$
$$= 9\cdot 273 - 14\cdot 175 =$$
$$= 9\cdot 273 - 14\cdot(448 - 273) =$$
$$= 23\cdot 273 - 14\cdot 448 =$$
$$= 23\cdot(721 - 448) - 14\cdot 448 =$$
$$= 23\cdot 721 - 37\cdot 448,$$

a więc $x = 23$, $y = -37$.

(b) oblicz x, y całkowite, takie że $333x + 1234y = 1$, ile wynosi 333^{-1} w pierścieniu $\mathbb{Z}_{1234}$?

1234	333
333	$1234 - 3\cdot 333 = 235$
235	$333 - 235 = 98$
98	$235 - 98\cdot 2 = 39$
39	$98 - 2\cdot 39 = 20$
20	$39 - 20 = 19$
19	$20 - 19 = 1$
1	$1 - 1 = 0$

$$1 = 20 - 19 = 20 - (39 - 20) =$$
$$= 2\cdot 20 - 39 = 2\cdot(98 - 2\cdot 39) - 39 =$$
$$= 2\cdot 98 - 5\cdot 39 = 2\cdot 98 - 5\cdot(235 - 2\cdot 98) =$$
$$= 12\cdot 98 - 5\cdot 235 =$$
$$= 12\cdot(333 - 235) - 5\cdot 235 =$$
$$= 12\cdot 333 - 17\cdot 235 =$$
$$= 12\cdot 333 - 17\cdot(1234 - 3\cdot 333) =$$
$$= 63\cdot 333 - 17\cdot 1234,$$

więc $x = 63$, $y = -17$

Wartość 333^{-1} w pierścieniu $\mathbb{Z}_{1234}$:

to działa jak modulo

$333\cdot x \bmod 1234 = 1$, ale mamy $63\cdot 333 - 17\cdot 1234 = 1$,

a więc $333^{-1} \equiv 63 \pmod{1234}$

(c) oblicz $-69^{-1} \bmod 1313 \equiv x$

$$(1313-69)x + 1313y = \gcd(1313, 1244)$$

1313	1244
1244	$1313 - 1244 = 69$
69	$1244 - 18 \cdot 69 = 2$
2	$69 - 34 \cdot 2 = 1$
1	$1 - 1 = 0$

$$\begin{aligned} 1 &= 69 - 34 \cdot 2 = \\ &= 69 - 34 \cdot (1244 - 18 \cdot 69) = \\ &= 613 \cdot 69 - 34 \cdot 1244 = \\ &= 613(1313 - 1244) - 34 \cdot 1244 = \\ &= 613 \cdot 1313 - 647 \cdot 1244, \end{aligned}$$

zatem $x = -647 \equiv 666 \pmod{1313}$

Zadanie 15. Niech $ax_0 + by_0 = c \ (\ast)$ dla pewnych $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$. Określ zbiór wszystkich rozwiązań (x, y) równania $ax + by = c$.

Niech $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$, wtedy

$$ax + by = c \Rightarrow ax_0 + ax' + by_0 + by' = c \overset{(\ast)}{\Rightarrow} ax' + by' = 0$$

$$\Rightarrow b \mid ax' \text{ oraz } a \mid by' \qquad (\text{z } ax' = -by')$$

Zatem:

$$\frac{b}{\gcd(a,b)} \Big| \, x' \cdot \frac{a}{\gcd(a,b)}, \text{ czyli } \frac{b}{\gcd(a,b)} \Big| \, x' \text{ oraz } \overset{\text{analogicznie}}{} \frac{a}{\gcd(a,b)} \Big| \, y'$$

Stąd dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ poniższa para jest rozwiązaniem:

$$\left(x_0 + \frac{b}{\gcd(a,b)} \cdot k, \; y_0 - \frac{a}{\gcd(a,b)} \cdot k \right),$$

ponieważ:

$$ax + by = ax_0 + by_0 + \frac{ab}{\gcd(a,b)} k - \frac{ab}{\gcd(a,b)} k = ax_0 + by_0 = c \quad \blacksquare$$

Zadanie 13. Jeśli $a \perp b$, $a > b$, to $\gcd(a^m - b^m, a^n - b^n) = a^{\gcd(m,n)} - b^{\gcd(m,n)}$ dla $0 \leq m < n$.

Dowód indukcyjny dla n:

1° $n = 1$ $\quad \gcd(a^m - b^m, a^1 - b^1) = a^{\gcd(m,1)} - b^{\gcd(m,1)} = a^1 - b^1 = a - b$

2° Załóżmy, że dla każdego $n_0 < n$ zachodzi

$\gcd(a^m - b^m, a^n - b^n) = \cancel{\gcd}\ a^{\gcd(m,n)} - b^{\gcd(m,n)}$, pokażę, że wtedy zachodzi dla wszystkich n.

skoro $0 \leq m < n$, to $\exists k > 0 : m + k = n$

$$\gcd(a^m - b^m, a^n - b^n) = \gcd(a^m - b^m, a^{m+k} - b^{m+k}) =$$

$$= \gcd(a^m - b^m, (a^{m+k} - a^m b^k) + (a^m b^k - b^{m+k})) =$$

$$= \gcd(\underbrace{a^m - b^m}_{m}, \underbrace{a^m (a^k - b^k)}_{r} + \underbrace{b^k (a^m - b^m)}_{qm}) \overset{(*1)}{=}$$

$$= \gcd(a^m - b^m, a^m (a^k - b^k)) \overset{(*2)}{=}$$

$$= \gcd(a^m - b^m, a^k - b^k) \overset{\text{zał. ind}}{=}$$

$$= a^{\gcd(m,k)} - b^{\gcd(m,k)} =$$

$$= a^{\gcd(m,n-m)} - b^{\gcd(m,n-m)} =$$

$$= a^{\gcd(m,n)} - b^{\gcd(m,n)} \quad \blacksquare$$

$*1$: $\gcd(m, qm + r) = \gcd(m, r)$

$*2$: $b \perp c \Rightarrow \gcd(ab, c) = \gcd(a, c)$

Zadanie 2. Zwarta postać funkcji $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \lceil \log_2 k \rceil$.

Rozważmy dwa przypadki:

1° $n = 2^k$:
$$f(2^k) = 2^k - 1 + f(2^{k-1}) + f(2^{k-1}) =$$
$$= (2^k - 1) + 2f(2^{k-1}) =$$
$$= (2^k - 1) + 2((2^{k-1}) + 2f(2^{k-2})) =$$
$$= (2^k - 1) + (2^k - 2) + 4f(2^{k-2}) =$$
$$= (2^k - 1) + (2^k - 2) + 4((2^{k-2} - 2) + 2f(2^{k-3})) =$$
$$= (2^k - 1) + (2^k - 2) + (2^k - 3) + 2^3 \cdot f(2^{k-3}) =$$
$$= \sum_{i=0}^{a-1} ((2^k - 2^i) + 2^a f(2^{k-a})), \text{ gdzie } a \leq k$$

Dla $a = k$ otrzymamy:
$$\sum_{i=0}^{k-1} (2^k - 2^i) + \underbrace{2^k \cdot f(1)}_{0, \text{ bo } f(1) = 0} = k \cdot 2^k - 2^k + 1 = 2^k(k-1) + 1$$

2° $n \neq 2^k$ $(n = 2^{\lceil \log_2 k \rceil})$
$$f(n) = f(2^{\lceil \log_2 n \rceil}) - \sum_{k=n+1}^{2^{\lceil \log_2 n \rceil}} = f(2^{\lceil \log_2 n \rceil}) - (2^{\lceil \log_2 n \rceil} - n) \cdot \lceil \log_2 n \rceil$$
$\blacksquare$

$$\sum_{k=1}^{n} \lceil \log_2 k \rceil = 0$$
$+ 1$
$+ 2 + 2$
$+ 3 + 3 + 3 + 3$
$+ 8 \cdot 4$
$+ 16 \cdot 5$
$+ \ldots$

a więc $\sum_{k=1}^{n} \lceil \log_2 k \rceil = \sum_{i=1}^{\log_2 n} i \cdot 2^{i-1} =$
$$2^0$$
$$+ 2^1 + 2^1$$
$$+ 2^2 + 2^2 + 2^2$$
$$+ 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3$$
$$+ \ldots + \ldots + \ldots$$
$$+ 2^{\log_2(n-1)} + \ldots + \ldots$$
$$= 2^{\log_2 n}$$

dodając wyniki z kolumn otrzymamy $\sum_{i=1}^{2^{\log_2 n}} (2^{\log_2 n} - 1 - (2^i$

Zadanie 8. Dany jest algorytm typu „dziel i zwyciężaj" wywołujący sam siebie a razy dla podproblemów rozmiaru $\frac{n}{b}$ i wykonujący poza tym cn^d operacji: $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$, oszacuj $T(n)$ jako $O(\cdot)$ w zależności od a, b, d.

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d, \quad T(1) = c$$

$$cn^d$$

$$c\left(\frac{n}{b}\right)^d \quad c\left(\frac{n}{b}\right)^d \quad c\left(\frac{n}{b}\right)^d$$

$$\vdots$$

$$c \quad c \quad c \quad \Leftarrow c \cdot a^{\log_b n}$$

$$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

k - poziom drzewa

$$a^k c\left(\frac{n}{b}\right)^d = cn^d \frac{a^k}{b^{dk}}$$

$$= cn^d \left(\frac{a}{b^d}\right)^k$$

$$T(n) \leq c \cdot a^{\log_b n} + \sum_{k=0}^{\log_b n - 1} cn^d \left(\frac{a}{b^d}\right)^k = c \cdot a^{\log_b n} + cn^d \sum_{k=0}^{\log_b n - 1} \left(\frac{a}{b^d}\right)^k$$

1° $a = b^d \Rightarrow \log_b a = d$

$$T(n) \leq cn^d + cn^d \sum_{k=0}^{\log_b n - 1} 1 = cn^d + cn^d \log_b n = O(n^d \log_b n)$$

2° $a < b^d \Rightarrow \log_b a < d$

$$T(n) < cn^d + cn^d \sum_{k=0}^{\log_b n - 1} \left(\frac{a}{b^d}\right)^k < cn^d + cn^d \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b^d}\right)^k < cn^d \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{a}{b^d}}\right) = O(n^d)$$

3° $a > b^d \Rightarrow \log_b a > d$

$$T(n) \leq cn^{\log_b a} + cn^d \sum_{k=1}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^{k-1} = cn^{\log_b a} + cn^d \left(\frac{\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n} - 1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1}\right) <$$

$$< cn^{\log_b a} + cn^d \left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n} \left(\frac{1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1}\right) = cn^{\log_b a} + cn^d \left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n} \cdot \Theta(1) =$$

$$= cn^{\log_b a} + cn^d \cdot \frac{a^{\log_b n}}{b^{d \log_b n}} \cdot \Theta(1) = cn^{\log_b a} + cn^d \frac{n^{\log_b a}}{n^d} \cdot \Theta(1) =$$

$$= cn^{\log_b a} + cn^{\log_b a} \Theta(1) = O(n^{\log_b a})$$

Zadanie 9. $T(n) \le T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lceil \frac{7n}{10} \right\rceil\right) + cn$, pokazać $T(n) < c'n$ dla pewnej stałej c'.

$n \ge 100$ $T(n) < kn$ ($k \equiv c'$, dla wygody)

$n < 100$, $T(n) \le d$

Dowód indukcyjny po n:

1° $n < 100k > d$, wtedy $T(n) < kn$

2° załóżmy $T(n') < kn'$ dla pewnego k, $n' < n$, $n \ge 100$

$$T(n) \le T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lceil \frac{7n}{10} \right\rceil\right) + cn \le$$

$$\le k\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + k\left\lceil \frac{7n}{10} \right\rceil + cn \le$$

$$\le k\left(\frac{n}{5} + 1\right) + k\left(\frac{7n}{10} + 1\right) + cn =$$

$$= \frac{nk}{5} + k + \frac{7nk}{10} + k + cn =$$

$$= \frac{9nk}{10} + 2k + cn =$$

$$= kn - \frac{kn}{10} + 2k + cn =$$

$$= kn + \underbrace{\left(cn + 2k - \frac{kn}{10}\right)}_{a}$$

2.1° $a \le 0$

2.2° $a \ge 0$

$$cn + 2k - \frac{kn}{10} > 0$$

$$2k - \frac{kn}{10} > -cn$$

$$\frac{kn}{10} - 2k < cn$$

$$\frac{kn - 20k}{10} < cn$$

$$k\left(\frac{n-20}{10}\right) < cn$$

$$k < cn\left(\frac{10}{n-20}\right)$$

$$k < 10c\left(\frac{n}{n-20}\right)$$

wystarczy $k = 50$ $\blacksquare$

Zadanie 12. Pokaż $\gcd(F_{n-1}, F_n) = 1$.

baza: $\left.\begin{array}{l} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_3 = 2 \\ F_4 = 3 \end{array}\right\}$ liczby względnie pierwsze

krok: załóżmy, że $\forall i \leq n \ \gcd(F_{i-1}, F_i)$

$$\left.\begin{array}{l} F_{n-2} = a \\ F_{n-1} = b \end{array}\right\} \gcd(F_n, F_{n+1}) = \gcd(a+b, a+2b) = \gcd(a+b, b) =$$
$$= \gcd(a, b) = 1 \ \blacksquare$$

Udowodnij $\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$. Indukcja względem $m+n$:

baza: $\gcd(F_1, F_1) = 1 = F_1$

krok: załóżmy, że $m \leq n$, $m \geq 2$, $n-m > 1$

lemat: $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$

$$F_n = F_{m+(n-m)} = F_m F_{(n-m+1)} + F_{n-1} F_{n-m}$$

$$\gcd(F_m, F_n) = \gcd(F_m, F_m F_{(n-m+1)} + F_{m+1} F_{n-m}) =$$
$$= \gcd(F_m, F_{m-1} F_{n-m}) =$$
$$= \gcd(F_m, F_{n-m}) \overset{\text{zał. ind.}}{=\!=}$$

$m + (n-m) < m + n$

$$= F_{\gcd(m, n-m)} =$$
$$= F_{\gcd(m,n)} \ \blacksquare$$

Zadanie 5.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{bmatrix}$$

Po podniesieniu $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ do n-tej potęgi $\underbrace{\text{można}}_{}$ (dla $n = 2,3,4,5,\ldots$) zauważyć, że $A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$

Algorytm:

$$\left.\begin{aligned} &n \text{ parzyste: } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\frac{n}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\frac{n}{2}} \\ &n \text{ nieparzyste: } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\frac{n}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\frac{n}{2}} \end{aligned}\right\} \text{szybkie potęgowanie}$$

F_n ma co najwyżej n cyfr, więc złożoność dla n-tej liczby Fibonacciego:

$$\sum_{i=1}^{\log_2 n} \left(8M(2^i) + 4 \cdot 2^i\right), \quad \sum_{i=1}^{\log_2 n} 8M(2^i) = 8\left[M(n) + M\left(\tfrac{n}{2}\right) + M\left(\tfrac{n}{4}\right) + M\left(\tfrac{n}{8}\right) + \ldots + M(1)\right] \leq$$

$$\leq 8\left[M(n) + \tfrac{1}{2}M(n) + \tfrac{1}{4}M(n) + \ldots + \tfrac{1}{2^{\log_2 n}} M(n)\right] =$$

$$= 8M(n) \sum_{i=1}^{\log_2 n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^i < 8M(n) \cdot 2$$

Zadanie 6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$

?

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M} = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \cdots & a_{n-k} \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_0 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \cdot M^{n-k} = \begin{bmatrix} a_n & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix}$$