Drzewo - graf spójny bez cykli

Twierdzenie: Niech T będzie grafem prostym o n wierzchołkach. Następujące warunki są równoważne:

(1) T jest drzewem (spójny graf bez cykli)

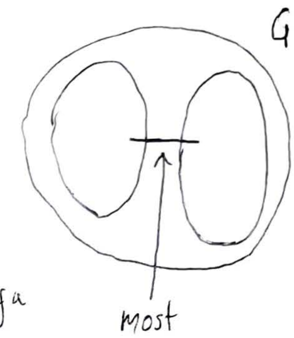
(2) T nie ma cykli i ma $n-1$ krawędzi

(3) T jest spójny i ma $n-1$ krawędzi

(4) T jest spójny i każda krawędź jest mostem

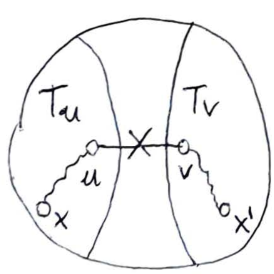
(5) dowolne dwa wierzchołki łączy dokładnie jedna droga

(6) T nie ma cykli ale dodanie jakiejkolwiek krawędzi tworzy cykl.



Dowód: indukcja po n

(1) $\Rightarrow$ (2) musimy pokazać, że T ma $n-1$ krawędzi

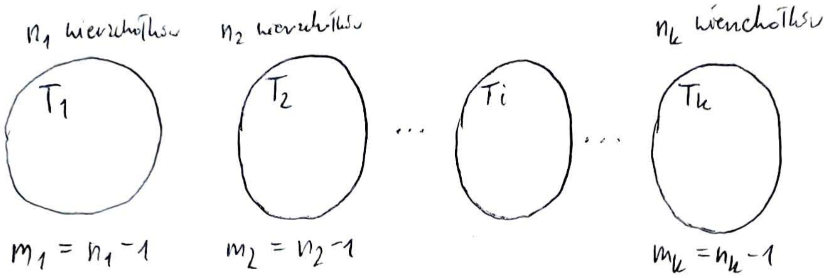


Usuwamy krawędź (u,v), graf wtedy nie będzie spójny, jednak powstaną dwie części spójne bez cykli T_u oraz T_v. Po dodaniu wierzchołka x dostaniemy się do części T_u, a z x' do T_v - nie przejdziemy pomiędzy częściami.

$$m(T) = m(T_u) + m(T_v) + 1 = n(T_u) - 1 + n(T_v) - 1 + 1 =$$
$$= n(T_u) + n(T_v) - 1 = n(T) - 1 \quad \blacksquare$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Musimy pokazać, że T jest spójny.

Załóżmy **nie wprost**, że T nie jest spójny mimo, że ma $n-1$ krawędzi i nie ma cykli.



T_i są spójne bez cykli, czyli są drzewami.

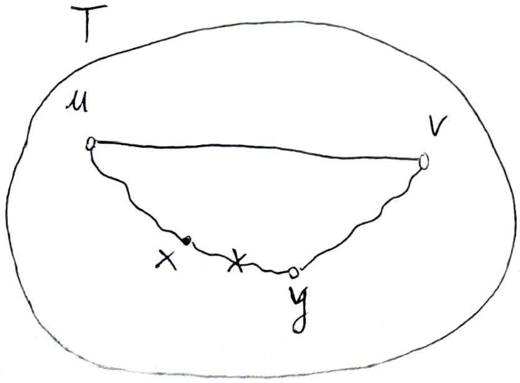
$m = n_1 - 1 + n_2 - 1 + \dots + n_k - 1 = n - k < n - 1$ (założenie), czyli dochodzimy do sprzeczności. ■

(3) $\Rightarrow$ (4) Mamy graf spójny T o $n-1$ krawędziach. Pokażemy, że każda krawędź jest mostem.

Załóżmy, że G ma krawędzie niebędące mostami. Usuwamy te krawędzie kolejno dopóki one istnieją. W efekcie otrzymamy graf spójny bez cykli o liczbie krawędzi $< n-1$. Pokazaliśmy już jednak, że drzewo ma $n-1$ krawędzi, więc otrzymaliśmy sprzeczność. ■

(4) $\Rightarrow$ (5) T jest spójny i każda krawędź jest mostem. Pokażemy, że dwa dowolne wierzchołki T łączy dokładnie jedna droga.

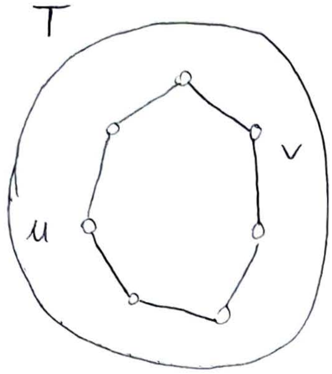
T - spójny $\Rightarrow$ istnieje (co najmniej jedna) droga z u do v.
Załóżmy nie wprost, że między wierzchołkami u i v mamy dwie drogi.



Pokażemy, że (x,y) nie jest mostem, ponieważ po usunięciu tej krawędzi T pozostanie nadal spójny.

(5) => (6) T nie ma cykli

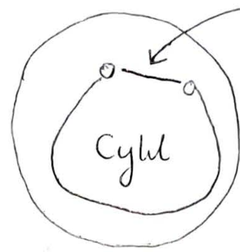
Załóżmy nie wprost, że T ma cykle.



istnieje cykl => są conajmniej dwie drogi z punktu u do v (sprzeczność z (1))

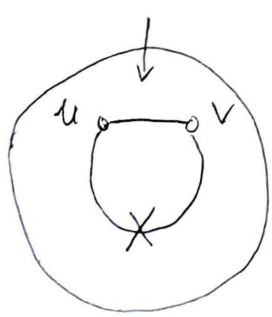
Dołożenie jakichkolwiek krawędzi tworzy cykli

dodana krawędź (nie istniała ona wcześniej)



(6) => (1) Musimy pokazać, że T jest spójny.

Załóżmy nie wprost, że T nie jest spójny. Wtedy istnieją dwa wierzchołki w T, między którymi nie ma drogi. Możemy więc dodać tam krawędź, jednak nie tworzy ona cykli.



Lemat: Każde drzewo posiada co najmniej dwa liście (wierzchołki wiszące, czyli stopnia 1).

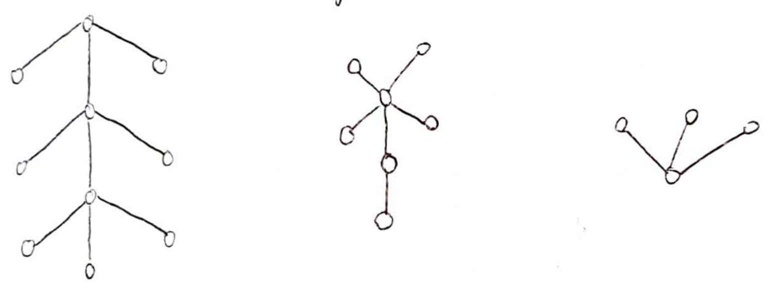
$$\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \deg(v_3) \leq \ldots \leq \deg(v_n)$$

Załóżmy nie wprost, że mamy mniej niż dwa wierzchołki wiszące.

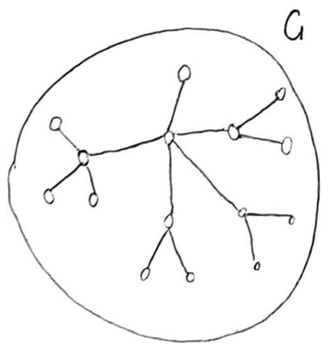
$$2n-1 \leq \underset{\substack{\vee\!/ \\ 1}}{\deg(v_1)} + \underset{\substack{\vee\!/ \\ 2}}{\deg(v_2)} + \ldots + \underset{\substack{\vee\!/ \\ 2}}{\deg(v_n)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{z lematu} \\ \text{o uściskach dłoni}}}{2m} = 2n-2 \implies 2n-1 \leq 2n-2,$$

sprzeczność ■

Las - graf, którego wszystkie składowe spójne są drzewami, inaczej jest to graf bez cykli.



Drzewo spinające dla grafu spójnego G



$V(G) = V(T)$

$E(G) \supseteq E(T)$

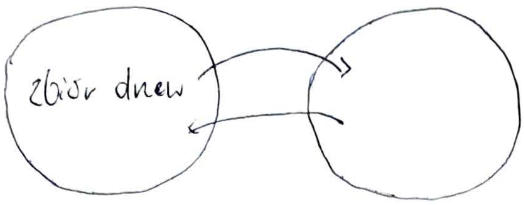
T - drzewo

Twierdzenie Cayley'a:

Liczba drzew o zbiorze wierzchołków $\{1,2,3,\dots,n\}$ wynosi n^{n-2}.

Dowód: Pokażemy to konstruując $\underbrace{\text{kody Prüfera}}_{}$ dla drzew.

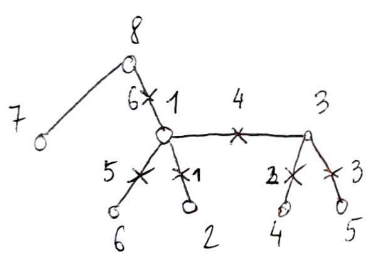
ciągi $(a_1,a_2,\dots,a_{n-2})$
takie, że $1 \leq a_i \leq n$,
jest ich n^{n-2}.



Konstrukcja kodu Prüfera:

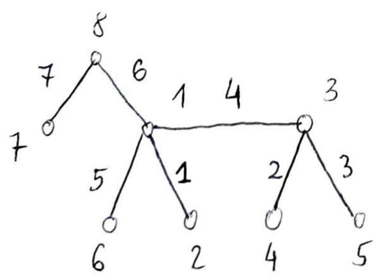
Wykonujemy $n-2$ następujących kroków:

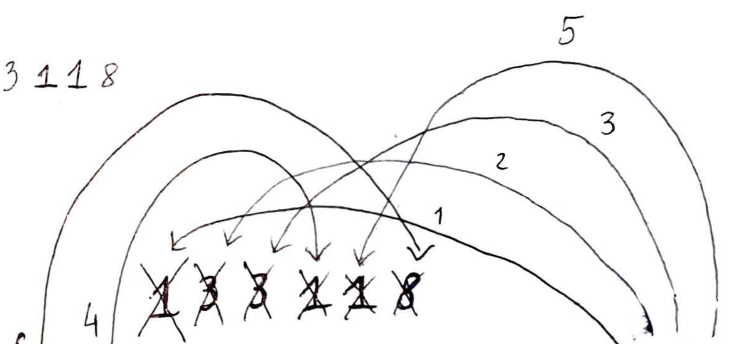
- wybieramy liść o najmniejszym numerze (ze zbioru $\{1,2,\dots,n\}$)
- usuwamy ten liść z drzewa
- do kodu dopisujemy a_i będące numerem sąsiada tego liścia



1 3 3 1 1 8

Odtworzenie kodu Prüfera





Niewystępujące numery to liście: 2,4,5,6,7

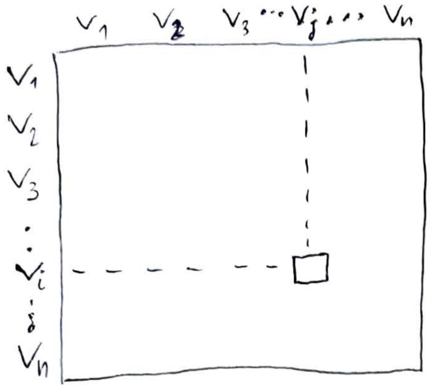
Po (3) kodu 3 zostaje liściem,

Po (5) kodu 1 zostaje liściem.

Zostają wierzchołki 7,8, łączymy je.

Reprezentowanie grafów za pomocą macierzy

Macierz sąsiedztwa



Dla grafów nieskierowanych:

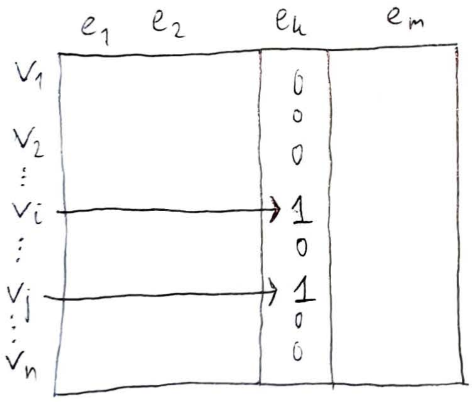
$$a_{ij} = \begin{cases} 0 : \{v_i, v_j\} \notin E \\ 1 : \{v_i, v_j\} \in E \end{cases}$$

Dla grafów skierowanych:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 : (v_i, v_j) \in E \\ 1 : (v_i, v_j) \in E \end{cases}$$

Dla grafów prostych $\forall i \ a_{ii} = 0$.

Macierz incydencji

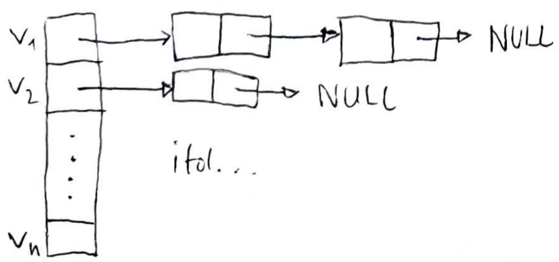


$e_k = \{v_i, v_j\}$

Reprezentowanie grafu w pamięci komputera:

(1) Macierz sąsiedztwa (grafy gęste), $O(n^2)$

(2) Lista sąsiadów (grafy rzadkie), $O(n)$



(3) Listy sąsiadów w tablicy:

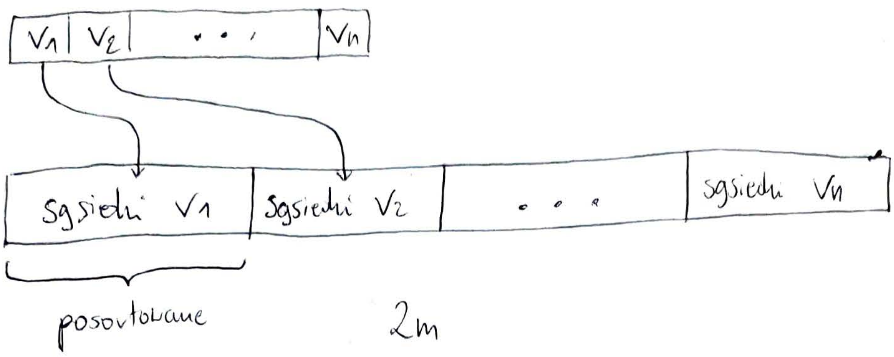
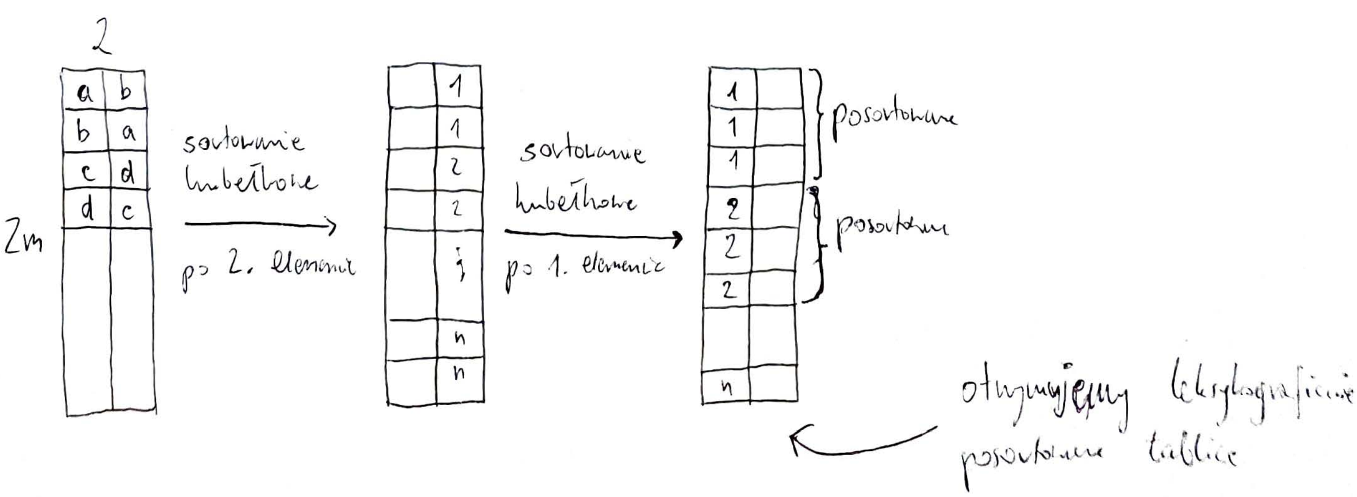
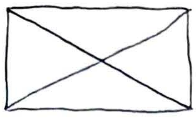


Tabela złożoności operacji/kryteriów na grafach

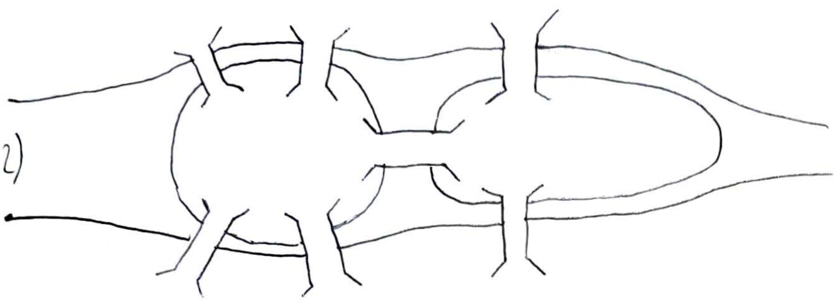
operacja/kryterium	macierz sąsiedztwa	listy sąsiadów	tablice sąsiadów
pamięć	$O(n^2)$	$O(m+n)$	$O(m+n)$
inicjalizacja (z listy E)	$O(n^2)$	$O(m+n)$	$O(m+n)$
czy $\{i,j\} \in E$?	$O(1)$	$O(\deg(i))$	$O(\log(\deg(i)))$
wypisz sąsiadów i	$O(n)$	$O(\deg(i))$	$O(\deg(i))$
dodaj $\{i,j\}$	$O(1)$	$O(1)$	$O(m)$
usuń $\{i,j\}$	$O(1)$	$O(\deg(i)+\deg(j))$	$O(m)$



Drogi Eulera

(P1) 

Czy można narysować taki kształt bez odrywania ołówka od kartki papieru rysując każdą linię tylko raz?

(P2) 

Czy można odbyć spacer po Królewcu tak, aby przez każdy most przejść dokładnie raz i wrócić do punktu początkowego?

warunek dodatkowy

Ogólny problem: Czy w G istnieje marszruta (zamknięta) przechodząca przez każdą krawędź dokładnie raz?

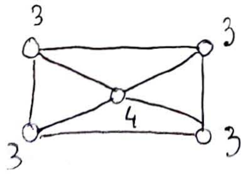
Marszruta przechodząca przez każdą krawędź dokładnie raz nazywa się drogą Eulera. Jeżeli jest ona zamknięta, mamy do czynienia z cyklem Eulera.

Problem ogólnie rozpatrujemy dla multigrafów (czyli grafów mogących mieć więcej niż jedną krawędź między dwoma wierzchołkami). Graf G posiadający cykl Eulera nazywamy grafem eulerowskim, a graf G posiadający drogę Eulera nazywamy grafem półeulerowskim.

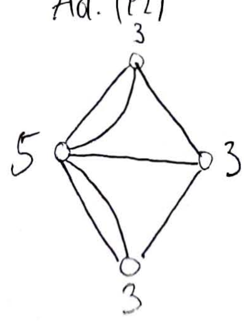
Lemat: W eulerowskim grafie G wszystkie wierzchołki mają stopień parzysty.

Lemat: W półeulerowskim grafie G co najwyżej dwa wierzchołki mają stopień nieparzysty.

Ad. (P1)



Ad. (P2)



P1 oraz P2 nie spełniają powyższych lematów.

Twierdzenie: Graf G jest eulerowski wtw, gdy wszystkie wierzchołki są stopnia parzystego i wszystkie krawędzie są w jednej składowej spójnej.

Twierdzenie: Graf G jest półeulerowski wtw, gdy co najwyżej dwa wierzchołki mają stopień nieparzysty i wszystkie krawędzie są w jednej składowej spójnej.