

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

## Lista zadań nr 10. Pierwszy tydzień maja

### Zadania

[Do zadań 1–6] Dane są obserwacje  $x_1, \dots, x_n$  pochodzące z niżej wymienionych rozkładów. Znaleźć estymator (metodą MLE) dla parametrów wymienionych poniżej:

1. Rozkład geometryczny  $\text{Geom}(p)$ , parametr  $p$ .
2. Rozkład Pareto,  $f(x; a, k) = \frac{ka^k}{x^{k+1}}$ ,  $x \in (a, \infty)$ , znane  $k$ , parametr  $a$ .
3. Rozkład Pareto,  $f(x; a, k) = \frac{ka^k}{x^{k+1}}$ , znane  $a$ , parametr  $k$ .
4. Rozkład wykładniczy,  $f(x; \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x)$ , dla  $x \in (0, \infty)$ . Parametr to  $\lambda$ .
5. Rozkład Weibulla,  $f(x; k, \lambda) = \frac{k}{\lambda} \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\}$ , dla  $x \in (0, \infty)$ . Znane jest  $k$ , parametr  $\lambda$ .

[Do zadań 6–7] Niezależne zmienne losowe  $X, Y$  podlegają rozkładom (odpowiednio):  $\chi^2(n), \chi^2(k)$ .

6. (0.5p.) Znaleźć gęstość 2-wymiarowej zmiennej  $(X, Y)$ .
7. (2p.) Znaleźć rozkład (gęstość) zmiennej  $F = \frac{X}{Y} \cdot \frac{k}{n}$ .
8. Dane są punkty  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Szukamy krzywej regresji w postaci  $y = a + bx + cx^2$ . Uzasadnić, że parametry  $a, b, c$  są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix}.$$

9. Dane są punkty  $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ . Szukamy równania regresji w postaci  $y = a + bx + cy$ . Uzasadnić, że parametry  $a, b, c$  są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum z_i \\ \sum x_i z_i \\ \sum y_i z_i \end{bmatrix}.$$

10. Znaleźć prostą regresji  $Y$  względem  $X$  dla poniższych danych:

$x_k$	1	3	4	6	8	9	11	14
$y_k$	1	2	4	4	5	7	8	9

11. Poniższa tabela zawiera dane dotyczące ciśnienia  $P$  i objętości  $V$  pewnej stałej masy gazu. Równanie łączące te dwie wielkości ma postać  $PV^k = C$ , gdzie  $k, C$  są pewnymi stałymi.

Objętość $V$	54.3	61.8	72.4	88.7	118.6	194.0
Ciśnienie $P$	61.2	49.5	37.6	28.4	19.2	10.1

Stosując regresję liniową znaleźć wartości  $C$  oraz  $k$ . Jaka jest przewidywana wartość  $P$  dla  $V = 100$ ?