

# Algorytmy i Struktury Danych

## Egzamin - Pierwszy termin

JG

24 czerwca 2019

1. Czy usunięcie wierzchołka z drzewa AVL może wymagać 3 rotacji dla przywrócenia balansu? Narysuj przykład albo napisz uzasadnienie dlaczego nie.
2. W algorytmie *LazySelect* znajdującym medianę ciągu  $C$  wyznaczana jest losowa próbka  $H$ . W tym celu  $n^{3/4}$  razy losujemy (ze zwracaniem) elementy ciągu  $C$ . Załóżmy, że  $C$  składa się z  $n$  różnych elementów. Co się stanie jeśli za każdym razem do  $H$  został wylosowany ten sam element? Co jeśli do  $H$  trafiły dokładnie dwa różne elementy?
3. Tworząc słownik statyczny (dwupoziomowy) losujemy funkcję  $h$  z rodziny uniwersalnej i rozrzucaamy  $n$  kluczy do tablicy  $n$ -elementowej. Co jeżeli do pewnego kubeczka, trafi  $\sqrt{n}$  kluczy?
4. Napisać *InsertSort* w pseudokodzie.
5. Podać (jak najdokładniejsze) asymptotyczne ograniczenie na głębokość sieci przełączników realizujących wszystkie przesunięcia cykliczne ciągu wejściowego
6. W której wersji *deletemin* na kopcu spodziewamy się wykonać mniej porównań i dlaczego? (usuwany element zastępujemy skrajnie prawym liściem z ostatniego poziomu **vs** przesuwanie dziury na dół).
7. Napisać procedurę wstawiania elementu do struktury van Emde Boasa w pseudokodzie i napisać jej złożoność z uzasadnieniem.
8. Ile elementów może liczyć zbiór  $\{w^2 \mid w \text{ jest } n\text{-tym pierwiastkiem zespolonym z jedności}\}$ ? Odpowiedź uzasadnij.
9. Podany na wykładzie równoległy algorytm mnożenia dwóch liczb redukuje dodawanie trzech liczb do dodawania dwóch liczb. Zmodyfikuj ten algorytm tak, by redukował dodawanie siedmiu liczb do dodawania trzech liczb. Jaką złożoność będzie miał ten algorytm?
10. Jaka jest maksymalna liczba rotacji podczas pojedynczej operacji słownikowej na drzewach *Splay* o  $n$  wierzchołkach?
11. Jaka jest oczekiwana liczba kolizji gdy do umieszczenia 30 różnych kluczy w tablicy 300 elementowej użyjemy funkcji losowo wybranej z uniwersalnej rodziny funkcji haszujących? Odpowiedź uzasadnij.
12. Czy wysokość drzew powstałych w kopcu Fibonacciego o  $n$  wierzchołkach da się ograniczyć przez  $\log^2 n$ ?

13. Rozważamy haszowanie metodą adresowania otwartego, w której konflikty rozwiązujemy metodą kwadratową. Czy funkcja  $h(k, i) = (h'(k) + 100i + 1000i^2) \bmod 10000$  jest sensownym wyborem?
14. Udowodnij, że jeśli po "przepuszczeniu" ciągu bitonicznego  $a_1, \dots, a_{2n}$  przez sieć łączącą otrzymamy ciąg  $b_1, \dots, b_{2n}$  to  $b_1, \dots, b_n$  oraz  $b_{n+1}, \dots, b_{2n}$  są ciągami bitonicznymi.
15. Zauważyłeś, że *Quicksort* (z deterministycznym pivotem) zachowuje się zadziwiająco regularnie na ciągach z pewnej rodziny  $A$ . Otóż okazało się, że w trakcie wszystkich wywołań rekurencyjnych procedura *Partition* dokonuje podziału ciągu wejściowego na podciągi o długościach nie mniejszych niż  $1/3$  i nie większych niż  $2/3$  długości ciągu wejściowego. W jakim czasie działa *Quicksort* na ciągach z rodziny  $A$ ?
16. Algorytm Boruvki-Sollina wykonuje pewną liczbę faz. W każdej fazie dorzuca do konstruowanego drzewa pewne krawędzie i tworzy nowy graf, który będzie rozważany w kolejnej fazie. Skonstruuj (jak najprostszy) graf, dla którego ten algorytm wykona dokładnie 3 fazy lub pokaż, że taki graf nie istnieje.
17. W analizie problemu *Union-Find* wykorzystywaliśmy pojęcia rzędu wierzchołka oraz grupy rzędu. Przypomnij definicje tych pojęć. Ile maksymalnie bitów potrzebujemy przeznaczyć na pamiętanie rzędu w każdym wierzchołku?
18. Oblicz funkcję  $\pi$  dla wzorca **aabaaabaaaba**.
19. Udowodnij, że przynajmniej jedna z operacji *min*, *deletemin* lub *insert* wykonywanych na kolejce priorytetowej wymaga w najgorszym przypadku czasu  $\Omega(\log n)$
20. W algorytmie *Shift-And* wykonywane są operacje logiczne na słowach maszynowych. Wytlumacz w jaki sposób?