Drzewce (TREAP)

<klucz, priorytet>

porządek BST ↑ ↑ porządek kopcowy

< , Pa >

drzewcowy karaś tu był

• Czy zawsze można utworzyć drzewiec?

Tak, dlaczego?

Losowy drzewiec

• chcemy mieć losowe BST, po to dokładamy porządek kopcowy z losowymi priorytetam

→ prawdopodobnie zbalansowane

Zał.

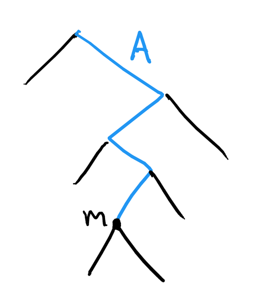
• jeśli klucze uporządkujemy malejąco wg. priorytetów, to każda ich permutacja jest równie prawdopodobna

• priorytety są różne

Operacje słownikowe

• insert:
  1) jak do BST
  2) wylosuj priorytet
  3) napraw porządek kopca rotacjami
• find: jak w BST
• delete:
  1) find
  2)

Mamy klucze $\{1,2 \dots m \dots n\}$



koszt $find(m)$: $|A|$

Niech: $M_{\leq} = \{1..m\}$

$M_{\geq} = \{m..n\}$

Wtedy $|A| = |A \cap M_{\geq}| + |A \cap M_{\leq}| - 2$

$|A \cap M_{\leq}|$: ($|A \cap M_{\geq}|$ symetrycznie)

H_m - # maksimów prefiksowych w a' (zmienna losowa)

$E(H_m) = ?$

$$X_k^m = \begin{cases} 1 & k \text{ jest maks. pref.} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$H_m = \sum X_k^m$$

$$E(H_m) = E\left(\sum X_k^m\right) =$$

$$= E(X_1^m) + E\left(\sum_2 X_k^m\right)$$

$E(X_1^m) = \frac{1}{m}$ ← 1 będzie maks. pref. jedynie kiedy będzie 1. w ciągu

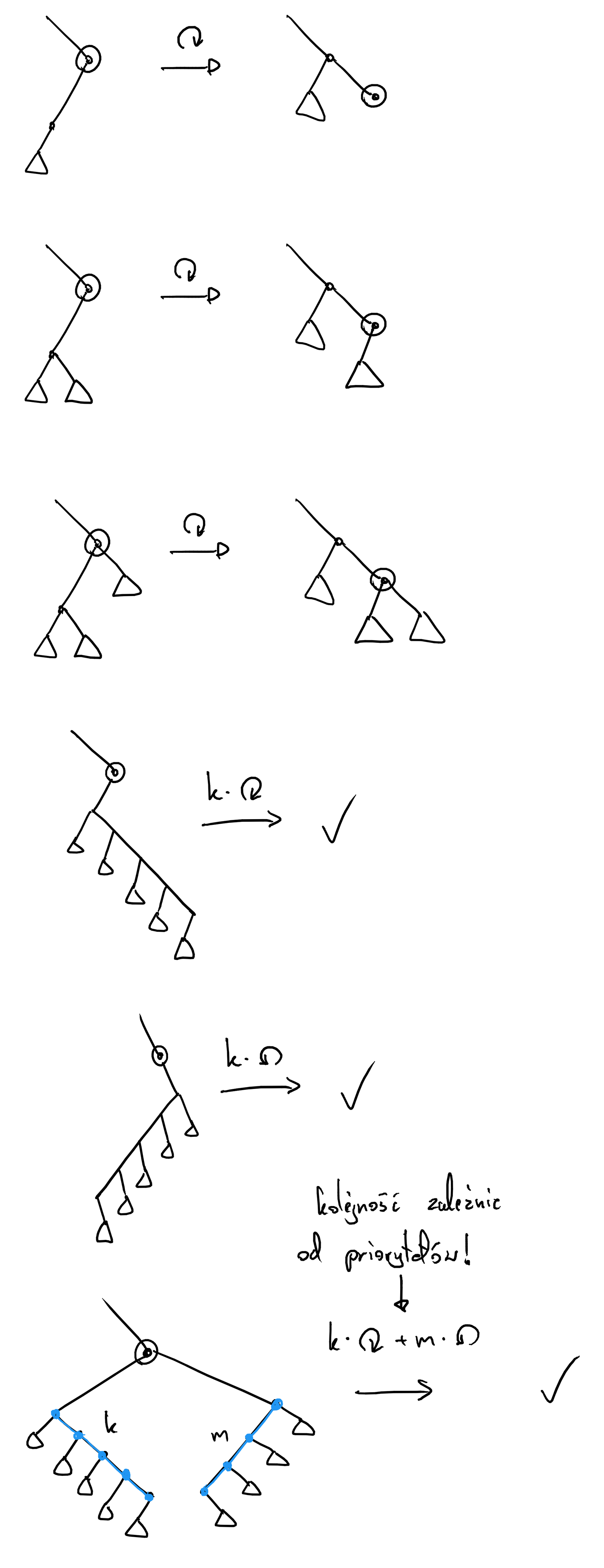
X_2^m: pozycja 1 nie ma znaczenia, możemy ją usunąć i rozpatrzeć pozostały ciąg

→ $E\left(\sum_2 X_k^m\right) = E(H_{m-1})$

5-minutowo-przerwowy karaś tu był

$$E(H_m) = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 = O(\log n)$$

• delete:
  1) find
  2) rotacjami do liścia
  3) usuwamy



• delete:
  1) find
  2) rotacjami do liścia
     • w każdym kroku z tym synem, który ma większy priorytet
     • #rotacji: dł. skrajnie prawej ścieżki w lewym poddrzewie + dł. skrajnie lewej w prawym
  3) usuwamy

Ad 2: oczekiwana liczba rotacji

$\sigma' = k_1 k_2 \cdots k_i \; m \; k_{i+1} \cdots k_{n-1}$

(w kolejności priorytetów)

Obserwacja:

Aby klucz leżał na skrajnie prawej ścieżce lewego poddrzewa, musi:
- leżeć na prawo od m
- być maksimum prefiksowym w ciągu $k_{i-1} k_{i+1} k_{i+2} \cdots k_{n-1}$

Niech $G_m = |$skr. prawa ścieżka lewego poddrzewa$|$

$$G_m = \sum Y_k^m$$

$\sigma = m\,1 \dots$

$$E(Y_1^m) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m-1}$$

~ podobnie jak wcześniej 1 nie ma wpływu na 2

$$E\left(\sum_2 Y_k^m\right) = E(G_{m-1})$$

$$E(G_m) = \frac{m-1}{m}$$

Jutro: hashowanie lub union-find