30 stycznia 2020 r.

PIZZO — Egzamin

Należy pracować w zespołach 3-4 osobowych. **Nie wolno** komunikować się z innymi zespołami, można natomiast komunikować się z wszystkimi innymi osobami. Można korzystać z wszelkich pomocy naukowych, takich jak książki. Rozwiązanie egzaminu należy dostarczyć najpóźniej o godzinie 14:15 do pokoju 336. Uwaga: zespół, który poprawnie rozwiąże części 3, 5 lub 6, dostanie automatycznie maksimum punktów za wszystkie wcześniejsze zadania, np. samo poprawne rozwiązanie części 5 da 26 punktów. Warto jednak dostarczyć rozwiązania wcześniejszych zadań na wypadek, gdyby któreś okazało się złe...

Graf danych to skierowany graf, którego każdy wierzchołek jest etykietowany liczbą całkowitą. Graf taki na taśmie maszyny Turinga jest reprezentowany nad alfabetem $\{0, 1, -, +, :, ;, \#\}$ tak:

> Na początku taśmy są kolejno wymieniane opisy wierzchołków postaci $w\colon sc;$ gdzie $w \in \{0,1\}^+$ to nazwa wierzchołka, $s \in \{+,-\}$ to znak liczby, a $c \in 1^*$ to **unarny** zapis wartości etykiety wierzchołka. Następnie jest #, a po nim są wymienione kolejne krawędzie postaci $w\colon w';$ gdzie w, w' są nazwami wierzchołków wymienionymi wcześniej. W ramach tego zadania zakładamy, że wejście jest zawsze poprawne i nie trzeba tego sprawdzać.

Przykład: $1\colon +1; 10\colon -11111; \#1\colon 10; 10\colon 1;$ oznacza graf pełny dwuwierzchołkowy, gdzie wierzchołek 1 ma wartość 1 a wierzchołek 10 ma wartość -5.

Część 1. (4 punkty) Udowodnij, że problem „czy w danym grafie skierowanym istnieje ścieżka (niekoniecznie prosta) z danego wierzchołka s do danego wierzchołka t o sumie etykiet wierzchołków co najwyżej n?” jest NL-zupełny, jeśli n jest dane unarnie.

Część 2. (4 punkty) Udowodnij, że problem „czy w danym grafie skierowanym istnieje ścieżka z danego wierzchołka s do danego wierzchołka t o sumie etykiet wierzchołków co najwyżej n?” jest NL-zupełny dla grafów, w których wszystkie etykiety są dodatnie, jeśli n jest dane binarnie.

Klasa złożoności obliczeniowej XNL ma się do NL podobnie, jak XP do P: sparametryzowany problem należy do klasy XNL, jeśli dla każdego ustalonego k istnieje niedeterministyczna maszyna Turinga rozwiązująca jego instancje postaci (n, k) w pamięci logarytmicznej $O(\log n)$[1].

Automat n-ścieżkowy to przypomina niedeterministyczny automat skończony, który wczytuje słowa nad alfabetem $\mathbb{Z}^n$. Stany, stan początkowy i stany akceptujące tego automatu są zdefiniowane jak w niedeterministycznym automacie skończonym, natomiast funkcja przejścia jest nieco inna: pozwala jedynie na porównywanie wartości w krotkach $\mathbb{Z}^n$. Odbywa się to za pomocą wyrażeń postaci $\pounds i < \pounds j$, mówiących, że wartość i-tego elementu jest mniejsza niż wartość j-tego elementu.

Formalnie, *n-wyrażeniem prostym* jest wyrażenie postaci $\pounds i < \pounds j$, gdzie $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Takie wyrażenie jest spełnione przez literę $(z_1, \dots, z_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z_i < z_j$. Natomiast *n-wyrażenie* to dowolna kombinacja Boolowska n-wyrażeń. Dla przykładu $\neg(\pounds 2 < \pounds 4) \wedge \neg(\pounds 4 < \pounds 2)$ oznacza, że druga i czwarta wartość są równe. Zbiór wszystkich n-wyrażeń oznaczamy przez $\mathbb{B}$. Wtedy funkcja przejścia automatu n-ścieżkowego jest postaci $Q \times \mathbb{B} \to Q$, gdzie Q jest zbiorem stanów. Przebieg i warunki akceptacji takiego automatu definiujemy jak zawsze.

Funkcja Złącz_G bierze ciąg ścieżek równej długości $p_1, \dots, p_n$ i zwraca ciąg $c_1, \dots, c_{|p_1|}$ taki, że $c_i = (l_1^i, \dots, l_n^i)$, gdzie l_j^i oznacza etykietę i-tego wierzchołka na ścieżce p_j.

Przykład. Jeśli mamy graf o wierzchołku v_1 etykietowanym liczbą 1 oraz v_2 etykietowanym liczbą -5, oraz ścieżki $p_1 = v_1v_1v_1$, $p_2 = v_2v_1v_1$, $p_3 = v_2v_2v_1$, to wtedy $\text{Złącz}_G(p_1, p_2, p_3) = (1, -5, -5)(1, 1, -5)(1, 1, 1)$.

[1] W internecie, w szczególności na *Complexity ZOO*, XNL ma nieco inną definicję, ale nie należy się tym przejmować.

Część 3. (8 punktów) Pokaż, że następujący problem jest w XNL:

> Dla danego grafu G oraz parametru składającego się z liczby n oraz automatu n-ścieżkowego A, czy w grafie G istnieje n ścieżek równej długości $p_1, \dots, p_n$ takich, że A akceptuje słowo $\text{Złącz}_G(p_1, \dots, p_n)$?

Sekwencją będziemy nazywać dowolny ciąg wierzchołków; każda ścieżka jest sekwencją, ale nie każda sekwencja jest ścieżką.

Automat n-sekwencyjny to uogólnienie automatu n-ścieżkowego, które działa na sekwencjach, a dodatkowo w wyrażeniach można używać nie tylko £i, ale też $\mathcal{L}i$, którego wartość wynosi 0, gdy automat jeszcze nic nie wczytał, a w przeciwnym razie odpowiada etykiety **poprzedniej** literki w i-tej sekwencji. Formalnie, automat n-sekwencyjny działa nad alfabetem $\mathbb{Z}^{2n}$, gdzie pierwsze n liczb odpowiada bieżącej pozycji (£i), a kolejne n poprzedniej pozycji ($\mathcal{L}i$).

Funkcja $\text{Złącz}^+_G(p_1, \dots, p_n)$ bierze ciąg sekwencji o równej długości i zwraca ciąg $c_1, \dots, c_{|p_1|}$ taki, że $c_i = (l^i_1, \dots, l^i_n, m^i_1, \dots, m^i_n)$, gdzie l^i_j oznacza etykietę i-tego wierzchołka na ścieżce p_j, zaś m^i_j oznacza etykietę $i-1$-tego wierzchołka na ścieżce p_j, jeśli taki istnieje, a 0 w przeciwnym przypadku.

Przykład. Jeśli mamy graf o wierzchołku v_1 etykietowanym liczbą 1 oraz v_2 etykietowanym liczbą -5, oraz ścieżki $p_1 = v_1v_1v_1$, $p_2 = v_2v_1v_1$, $p_3 = v_2v_2v_1$, to wtedy $\text{Złącz}^+_G(p_1, p_2, p_3) = (1, -5, -5, 0, 0, 0)(1, 1, -5, 1, -5, -5)(1, 1, 1, 1, 1, -5)$.

Część 4. (4 punkty) Pokaż, że istnieje automat 2-sekwencyjny, taki, że dla dowolnego grafu G i sekwencji p mamy następującą równoważność: istnieje sekwencja p' taka, że automat akceptuje $\text{Złącz}^+_G(p, p')$ wtedy i tylko wtedy, gdy etykiety pierwszego i ostatniego wierzchołka p są takie same.

Część 5. (6 punktów) Pokaż, że następujący problem jest w XNL:

> Dla danego grafu G oraz parametru składającego się z liczb n, k oraz automatu n-sekwencyjnego A, czy w grafie G istnieje n sekwencji równej długości $p_1, \dots, p_n$, z czego $p_1, \dots, p_k$ są ścieżkami, takich, że A akceptuje słowo $\text{Złącz}^+_G(p_1, \dots, p_n)$?

W dalszej części będziemy chcieli móc sprawdzać jednocześnie istnienie ścieżek akceptowanych przez automat, jak i spełniających zadane wyrażenia. W tym celu definiujemy pojęcie więzu. W więzach używa się zmiennych π_i, które mają odpowiadać ścieżce p_i. Więzem może być

- i automat n-sekwencyjny wraz z n zmiennymi sekwencyjnymi $\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_n}$
- ii wyrażenie postaci $\sum \pi_i < c$, gdzie c jest liczbą naturalną
- iii wyrażenie postaci $w \to^{\pi_i} v$

Graf G spełnia daną koniunkcję więzów, jeśli istnieją sekwencje $p_1, p_2 \dots$ tej samej długości grafu G takie, że

- Dla każdego więzu typu i, automat akceptuje słowo $\text{Złącz}^+_G(p_{i_1}, \dots, p_{i_n})$.
- Dla każdego więzu typu ii, suma etykiet sekwencji p_i jest mniejsza niż c.
- Dla każdego więzu typu iii, sekwencja p_i jest ścieżką w grafie (tzn. każde dwa kolejne wierzchołki są połączone krawędzią) zaczynającą się w w a kończącą się w v.

Część 6. (8 punktów) Pokaż, że problem

> Dla danego grafu G oraz parametru składającego się z koniunkcji więzów K, czy graf G spełnia K?

jest w XNL zakładając, że wszystkie liczby są podane unarnie i są dodatnie.