

Algorytmy i Struktury Danych

Lista 2, Zadanie 8

Jakub Grobelny

Treść zadania

8. (2pkt) Ułóż algorytm, który dla danych liczb naturalnych a i b , sprawdza, czy zachłanna strategia dla problemu wydawania reszty jest poprawna, gdy zbiór nominałów jest równy $X = \{1, a, b\}$.

Rozwiązanie

Założenie. Załóżmy, bez utraty ogólności, że $1 < a < b$.

Definicja 1. $G(x)$ oznacza liczbę monet w reprezentacji liczby x dla nominałów $\{1, a, b\}$ będącej wynikiem algorytmu zachłannego, $M(x)$ zaś liczbę monet w optymalnej reprezentacji liczby x .

Definicja 2. Kontrprzykładem nazywamy taki $x \in \mathbb{N}$, że $G(x) > M(x)$.

Definicja 3. Mówimy, że zachłanna strategia dla problemu wydawania reszty jest niepoprawna dla jakiegoś zbioru nominałów, jeżeli istnieje kontrprzykład.

Definicja 4. Notacja $x = (i, j, k)$ dla zbioru nominałów $\{1, a, b\}$ oznacza, że reszta x została wydana przy użyciu i monet nominału 1, j monet nominału a oraz k monet nominału b .

Lemat 1. Dla każdego x oraz dowolnej monety $y \in \{1, a, b\}$ zachodzi nierówność

$$M(x) \leq M(x - y) + 1$$

Dowód.

W oczywisty sposób nierówność zachodzi, gdyż z optymalnej reprezentacji $x - y$ możemy otrzymać reprezentację x o liczbie monet $M(x - y) + 1$ dodając jedną monetę y . \square

Lemat 2. Dla dowolnego x i dowolnego $y \in \{1, a, b\}$ równość $M(x) = M(x - y) + 1$ zachodzi wtedy, i tylko wtedy, gdy istnieje optymalna reprezentacja x używająca monety y .

Dowód.

\Rightarrow

Założmy, że $M(x) = M(x - y) + 1$. Wówczas reprezentacja optymalna x mogła zostać uzyskana poprzez dodanie monety y do optymalnej reprezentacji $x - y$, czyli istnieje optymalna reprezentacja x używająca monety y .

\Leftarrow

Założmy, że istnieje optymalna reprezentacja x używająca monety y . Wówczas możemy zabrać jedną monetę y i otrzymamy reprezentację $x - y$ o liczbie monet $M(x) - 1$. Z lematu 1 wynika, że ta reprezentacja $x - y$ jest optymalna, więc $M(x) = M(x - y) + 1$. \square

Lemat 3. Jeżeli istnieje kontrprzykład x dla nominałów $\{1, a, b\}$, to najmniejszy taki x spełnia nierówność $b + 1 < x < b + a$.

Dowód.

Założmy, że dla nominałów $\{1, a, b\}$ strategia zachłanna jest niepoprawna.

1) Ograniczenie dolne:

Niech x będzie kontrprzykładem. Rozpatrzmy przypadki:

1°. $x < b$. Wówczas $M(x) = G(x)$, gdyż mamy do wyboru jedynie monety $\{1, a\}$. x nie może być więc kontrprzykładem.

2°. $x = b$. Wówczas $M(x) = 1 = G(x)$, czyli tak jak w przypadku pierwszym.

3°. $x = b + 1$. Wówczas $M(x) = G(x)$, gdyż zachłanna reprezentacja jest identyczna jak optymalna, czyli $(1, 0, 1)$.

Widać w takim razie, iż każdy kontrprzykład musi być większy niż $b + 1$.

2) Ograniczenie górne:

Weźmy dowolny $x \geq b + a$. Założmy, że $\forall_{y < x} G(y) = M(y)$.

Rozpatrzmy przypadki:

1°. Moneta o nominale b jest w reprezentacji optymalnej. Wówczas

$$G(x) = G(x - b) + 1 \stackrel{\text{zał.}}{=} M(x - b) + 1 \stackrel{\text{lem.2}}{=} M(x)$$

2°. Moneta o nominale a jest w reprezentacji optymalnej.

$$\begin{aligned} G(x) &= G(x - b) + 1 \stackrel{\text{zał.}}{=} M(x - b) + 1 \stackrel{\text{lem.1}}{\leq} M(x - b - a) + 2 \leq G(x - b - a) + 2 = \\ &= G(x - a) + 1 \stackrel{\text{zał.}}{=} M(x - a) + 1 \stackrel{\text{lem.2}}{=} M(x) \leq G(x), \end{aligned}$$

z czego wynika, że $G(x) = M(x)$.

3°. Moneta o nominale 1 jest w reprezentacji optymalnej.

$$\begin{aligned} G(x) &= G(x - b) + 1 \stackrel{\text{zał.}}{=} M(x - b) + 1 \stackrel{\text{lem.1}}{\leq} M(x - b - 1) + 2 = \\ &\leq G(x - b - 1) + 2 = G(x - 1) + 1 \stackrel{\text{zał.}}{=} M(x - 1) + 1 \stackrel{\text{lem.2}}{=} \\ &\stackrel{\text{lem.2}}{=} M(x) \leq G(x), \end{aligned}$$

z czego wynika, że $M(x) = G(x)$.

Pokazaliśmy, że $G(x) = M(x)$ co daje nam sprzeczność z założeniem, że strategia zachłanna jest niepoprawna, więc istnieją kontrprzykłady mniejsze niż $b + a$. □

Twierdzenie. Strategia zachłanna dla problemu wydawania reszty dla zbioru nominałów $\{1, a, b\}$ jest niepoprawna wtedy, i tylko wtedy gdy $0 < r < a - q$, gdzie $b = qa + r$ (czyli $q = \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ oraz $r = b \bmod a$).

Dowód.

\Rightarrow

Niech $b = qa + r$. Założmy, że $0 < r < a - q$. Wówczas istnieje kontrprzykład $x = b + a - 1$, dla którego reprezentacja zachłanna to $(a - 1, 0, 1)$. Można przedstawić x również jako $(r - 1, q + 1, 0)$, co daje $r - 1 + q + 1 = r + q$ monet, podczas gdy $G(x) = a - 1 + 1 = a$.

Z założenia mamy $0 < r + q < a$, więc $G(x) > r + q$, czyli zgodnie z definicją strategia zachłanna jest

niepoprawna.

⇐

Założmy, że strategia zachłanna wydawania reszty jest niepoprawna dla nominałów $\{1, a, b\}$. Wówczas z lematu 3 wiemy, że najmniejszy kontrprzykład x spełnia nierówność $b + 1 < x < a + b$. W takim razie jego reprezentacja zachłanna to $(i, 0, 1)$, gdzie $0 < i < a$. Reprezentacja optymalna to $(j, k, 0)$, gdzie $k > 0$. Zauważmy, że w oczywisty sposób $j < i$. W takim razie jeżeli x jest minimalny, to $j = 0$, gdyż w przeciwnym razie $x - j$ byłby mniejszym kontrprzykładem. Mamy więc

$$x = b + i = ka$$

$$b = ka - i = ka - i - a + a = (k - 1)a + (a - i)$$

W takim razie $q = k - 1$ oraz $r = a - i$. Z nierówności $b + 1 < x < a + b$ mamy

$$0 < (a + b) - x = (a + b) - (b + i) = a - i.$$

$i \neq 0$, więc z powyższej nierówności mamy $0 < a - i < a$. Skoro x jest kontrprzykładem, to mamy również nierówność $M(x) = k < 1 + i = G(x)$.

Ostatecznie mamy więc

$$0 < a - i < a - (k - 1)$$

$$0 < r < a - q$$

□

Algorytm.

```

 $r \leftarrow b \bmod a$ 
 $q \leftarrow \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ 
if  $0 < r$  and  $r < a - q$  then return True
else return False
end if

```