

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M9

20 grudnia 2018 r.

- M9.1.** 1 punkt Niech  $\{P_k(x)\}$  będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w przedziale  $[-a, a]$ , z wagą  $p(x)$  o własności  $p(-x) = p(x)$ . Wykazać, że wówczas

$$P_{2m}(x) = S_m(x^2), \quad P_{2m+1}(x) = x R_m(x^2) \quad (m = 0, 1, \dots),$$

gdzie  $S_m, R_m$  są wielomianami stopnia  $m$ .

- M9.2.** 1 punkt Wykazać, że wielomiany  $\{S_m(t)\}$  z poprzedniego zadania są ortogonalne w przedziale  $[0, a^2]$  z wagą  $v(t) = p(\sqrt{t})/\sqrt{t}$ , a wielomiany  $\{R_m(t)\}$  są ortogonalne w przedziale  $[0, a^2]$  z wagą  $w(t) = \sqrt{t} p(\sqrt{t})$ .

- M9.3.** 1 punkt Wykazać, że wielomian  $\tilde{T}_n := 2^{1-n} T_n$  ma najmniejszą normę w przedziale  $[-1, 1]$  spośród wszystkich wielomianów stopnia  $\leq n$ , o współczynniku wiodącym równym 1.

- M9.4.** 2 punkty Niech dla  $f \in C[a, b]$  istnieją wszystkie pochodne i niech  $|f^{(k)}(x)| > 0$  dla każdego  $x \in [a, b]$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Wykazać, że dla każdego  $n \geq 0$  zachodzi wówczas nierówność  $E_n(f) > E_{n+1}(f)$ .

- M9.5.** 1 punkt Wyznaczyć trzeci wielomian optymalny w sensie normy jednostajnej na zbiorze  $\{0, 1, 2, 4, 6\}$  dla funkcji o wartościach

$x_k$	0	1	2	4	6
$f(x_k)$	1	9	23	93	259

- M9.6.** 2 punkty Wyznaczyć z dokładnością do 6 miejsc po przecinku współczynniki wielomianu  $w_2(x) = ax^2 + bx + c$ , będącego drugim wielomianem optymalnym w sensie normy jednostajnej dla funkcji  $\sin(x)$  w przedziale  $[0, 2\pi]$ .

*Wskazówka:*  $a + b + c \approx 0.465\dots$

- M9.7.** 2 punkty, Włącz komputer! Rozważyć aproksymację funkcji Rungego  $f(x) = \frac{1}{25x^2+1}$  w przedziale  $[-1, 1]$  za pomocą wielomianu  $w \in \Pi_9$ . Dla każdego z poniższych wielomianów podać wartość błędu  $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - w(x)|$  (wartość tę można przybliżyć obliczając  $|f(x_k) - w(x_k)|$  dla  $x_k = -1 + 2k/N$ , gdzie  $N$  jest bardzo duże, np.  $N = 1000$ ). Rozważyć następujące wielomiany:
- wielomian interpolujący funkcję  $f$  w węzłach równoodległych,
  - wielomian interpolujący funkcję  $f$  w zerach wielomianu  $T_{10}$ ,
  - wielomian interpolujący funkcję  $f$  w punktach ekstremalnych wielomianu  $T_9$ ,
  - 9-ty wielomian optymalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową  $p(x) \equiv 1$ ,
  - 9-ty wielomian optymalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową Czebyszewa.

15 grudnia 2018

Rafał Nowak