

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 9. Tydzień rozpoczynający się 23. kwietnia

Zadania

1. Niech zmienne X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależne i niech mają ten sam rozkład $\text{Exp}(\lambda)$. Niech $Y_i = X_1 + \dots + X_i$, dla $i = 1, \dots, n$. Wykazać, że dla gęstości zmiennej (Y_1, \dots, Y_n) zachodzi wzór $f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = \lambda^n \exp(-\lambda y_n)$, gdzie $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n$.
2. Dla gęstości $f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n)$ z poprzedniego zadania wykazać, że gęstość brzegowa $f_n(y_n)$ względem zmiennej Y_n wyraża się wzorem $f_n(y_n) = \lambda^n \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda y_n)$, gdzie $0 < y_n$.
3. Metodą MLE znaleźć estymator parametru θ rozkładu jednostajnego na przedziale $[\theta - a; \theta + a]$, przy założeniu, że znana jest wartość parametru a .
4. Metodą MLE znaleźć estymator parametru θ rozkładu jednostajnego na przedziale $[\theta - a; \theta + a]$, przy założeniu, że nie jest znana wartość parametru a .
5. Niezależne zmienne X_1, \dots, X_5 mają ten sam, ciągły, rozkład. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo $P(X_1 < X_2 > X_3 < X_4 > X_5)$. Wykazać, że p nie zależy od gęstości rozkładu $f(x)$ zmiennych X_k . Obliczyć wartość p .
6. X, Y, Z są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U[0, 1]$. Obliczyć $P(X \geq YZ)$.
7. X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\text{Exp}(\lambda)$. Znaleźć rozkład (3-wymiarowy) zmiennej $(Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1 + X_2, X_1 + X_3, X_2 + X_3)$.
8. (2p.) Niech X_1, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi o tym samym, ciągłym rozkładzie. Mówimy, że w chwili j notujemy rekord ($j \leq n$), jeśli $X_j \geq X_i$ dla $1 \leq i \leq j$. Niech zmienna losowa Z będzie liczbą rekordów w ciągu $\{X_k\}$. Wykazać, że $E(Z) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$.

[Do zadań 9–10] Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości:

$$f(x, y) = 1, \quad 0 < x, y \leq 1.$$

9. Znaleźć gęstość zmiennej $Z = X/Y$.
10. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pierwszą cyfrą znaczącą Z jest 1.

Witold Karczewski