

PIZZO

Lista na siódmy tydzień

Zadanie 1. Pokaż, że:

1. $3SAT \leq_P \text{Clique}$

Wskazówka: Dla każdego wystąpienia literału zdefiniuj jeden wierzchołek.

2. $\text{Clique} \leq_P \text{Independent-Set}$

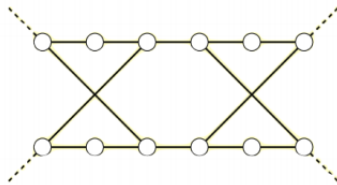
Wskazówka: \bar{V} .

3. $\text{Independent-Set} \leq_P \text{Vertex-Cover}$

Wskazówka: $|V| - k$.

4. $\text{Vertex-Cover} \leq_P \text{Hamiltonian-Cycle}$

Wskazówka: To jest znacznie trudniejsze; przyda się taki gadżet:



5. $\text{Hamiltonian-Cycle} \leq_P \text{TSP}$

6. $\text{Vertex-Cover} \leq_P \text{Subset-Sum}$

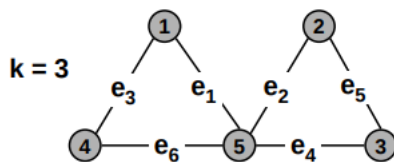
Wskazówka:

Subset Sum

Treat as base $k+1$ integer

Claim. $\text{VERTEX-COVER} \leq_P \text{SUBSET-SUM}$.

Proof. Given instance G, k of VERTEX-COVER , create following instance of SUBSET-SUM .



| | e_1 | e_2 | e_3 | e_4 | e_5 | e_6 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| v_1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| v_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| v_3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| v_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| v_5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Node-arc incidence matrix

| | e_1 | e_2 | e_3 | e_4 | e_5 | e_6 | decimal |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| x_1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5,184 |
| x_2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4,356 |
| x_3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 4,116 |
| x_4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4,161 |
| x_5 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5,393 |
| y_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,024 |
| y_2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 256 |
| y_3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 64 |
| y_4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 16 |
| y_5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| y_6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

| t | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 15,018 |
|-----|---|---|---|---|---|---|--------|
|-----|---|---|---|---|---|---|--------|

k

7. $3SAT \leq_P NAE-SAT$

gdzie

- $3SAT$ to problem spełnialności formuł w $3CNF$.
- $Clique$ to problem, dla danego grafu i liczby k , czy w tym grafie istnieje klika rozmiaru k .
- $Independent-Set$ to problem, dla danego grafu i liczby k , czy w tym grafie istnieje k wierzchołków, z których żadne dwa nie są połączone.
- $Vertex-Cover$ to problem, dla danego grafu i liczby k , czy można wybrać k wierzchołków tego grafu tak, by każda z krawędzi miała wybrany co najmniej jeden z końców.
- $Hamiltonian-Cycle$ to problem znalezienia w grafie cyklu Hamiltona, tzn. cyklu prostego przechodzącego przez wszystkie wierzchołki.
- TSP to problem, dla danego grafu pełnego z wagami na krawędziach oraz liczby k , czy istnieje w tym grafie cykl Hamiltona o łącznej wadze co najwyżej k .
- $Subset-Sum$ to problem, dla danego zbioru liczb całkowitych, czy można wybrać niepusty podzbiór tego zbioru tak, by suma jego elementów wynosiła 0.
- $NAE-SAT$ to problem, dla danej formuły w CNF , czy istnieje wartościowanie tej formuły takie, że w każdej klauzuli co najmniej jeden literal jest prawdziwy i co najmniej jeden literal jest fałszywy.

Wynioskuj z tego, że wszystkie powyższe problemy są NP-zupełne.

Zadanie 2. Pokaż, że następujące problemy są w P:

1. Problem SAT , gdy ograniczymy się do klauzul hornowskich.
2. Problem $k-Clique$, gdzie pytamy, czy w grafie istnieje klika rozmiaru k (które jest teraz częścią problemu, a nie instancji).
3. Problem $3Taut$, gdzie pytamy, czy dana formuła w $3CNF$ jest tautologią.