Algorytmy i Struktury Danych
Lista 2, Zadanie 8

Jakub Grobelny

Treść zadania

8. (2pkt) Ułóż algorytm, który dla danych liczb naturalnych a i b, sprawdza, czy zachłanna strategia dla problemu wydawania reszty jest poprawna, gdy zbiór nominałów jest równy $X = \{1, a, b\}$.

Rozwiązanie

Założenie. Załóżmy, bez utraty ogólności, że $1 < a < b$.

Definicja 1. $G(x)$ oznacza liczbę monet w reprezentacji liczby x dla nominałów $\{1, a, b\}$ będącej wynikiem algorytmu zachłannego, $M(x)$ zaś liczbę monet w optymalnej reprezentacji liczby x.

Fakt 1. $\forall_{x \in \mathbb{N}}\, G(x) \geq M(x)$.

Definicja 2. Kontrprzykładem nazywamy taki $x \in \mathbb{N}$, że $G(x) > M(x)$.

Definicja 3. Mówimy, że zachłanna strategia dla problemu wydawania reszty jest niepoprawna dla jakiegoś zbioru nominałów, jeżeli istnieje kontrprzykład.

Definicja 4. Notacja $x = (i, j, k)$ dla zbioru nominałów $\{1, a, b\}$ oznacza, że reszta x została wydana przy użyciu i monet nominału 1, j monet nominału a oraz k monet nominału b.

Lemat 1. Dla każdego x oraz dowolnej monety $y \in \{1, a, b\}$ zachodzi nierówność

$$M(x) \leq M(x - y) + 1$$

Dowód.
W oczywisty sposób nierówność zachodzi, gdyż z optymalnej reprezentacji $x - y$ możemy otrzymać reprezentację x o liczbie monet $M(x - y) + 1$ dodając jedną monetę y. W najlepszym przypadku otrzymamy w ten sposób reprezentację optymalną x, w każdym innym reprezentację o większej liczbie monet. □

Lemat 2. Dla dowolnego x i dowolnego $y \in \{1, a, b\}$ równość $M(x) = M(x - y) + 1$ zachodzi wtedy, i tylko wtedy, gdy istnieje optymalna reprezentacja x używająca monety y.

Dowód.
$\Rightarrow$
Załóżmy, że $M(x) = M(x - y) + 1$. Wówczas reprezentacja optymalna x mogła zostać uzyskana poprzez dodanie monety y do optymalnej reprezentacji $x - y$, czyli istnieje optymalna reprezentacja x używająca monety y.

$\Leftarrow$
Załóżmy, że istnieje optymalna reprezentacja x używająca monety y. Wówczas możemy zabrać jedną monetę y i otrzymamy reprezentację $x-y$ o liczbie monet $M(x)-1$. Z lematu 1 wynika, że ta reprezentacja $x-y$ jest optymalna, więc $M(x)=M(x-y)+1$. $\square$

Lemat 3. Jeżeli istnieje kontrprzykład x dla nominałów $\{1,a,b\}$, to najmniejszy taki x spełnia nierówność $b+1<x<b+a$.

Dowód.
Załóżmy, że dla nominałów $\{1,a,b\}$ strategia zachłanna jest niepoprawna.

1) Ograniczenie dolne:
Niech x będzie kontrprzykładem. Rozpatrzmy przypadki:
1°. $x<b$. Wówczas $M(x)=G(x)$, gdyż mamy do wyboru jedynie monety $\{1,a\}$. x nie może być więc kontrprzykładem.
2°. $x=b$. Wówczas $M(x)=1=G(x)$, czyli tak jak w przypadku pierwszym.
3°. $x=b+1$. Wówczas $M(x)=G(x)$, gdyż zachłanna reprezentacja jest identyczna jak optymalna, czyli $(1,0,1)$.
Widać w takim razie, iż każdy kontrprzykład musi być większy niż $b+1$.

2) Ograniczenie górne:
Weźmy dowolny $x\geq b+a$. Załóżmy, że $\forall_{y<x}\, G(y)=M(y)$.
Rozpatrzmy przypadki:
1°. Moneta o nominale b jest w reprezentacji optymalnej. Wówczas

$$G(x)=G(x-b)+1\overset{\text{zał.}}{=}M(x-b)+1\overset{\text{lem.2}}{=}M(x)$$

2°. Moneta o nominale a jest w reprezentacji optymalnej.

$$G(x)=G(x-b)+1\overset{\text{zał.}}{=}M(x-b)+1\overset{\text{lem.1}}{\leq}M(x-b-a)+2\leq G(x-b-a)+2=$$
$$=G(x-a)+1\overset{\text{zał.}}{=}M(x-a)+1\overset{\text{lem.2}}{=}M(x)\leq G(x),$$

z czego wynika, że $G(x)=M(x)$.
3°. Moneta o nominale 1 jest w reprezentacji optymalnej.

$$G(x)=G(x-b)+1\overset{\text{zał.}}{=}M(x-b)+1\overset{\text{lem.1}}{\leq}M(x-b-1)+2=$$
$$\leq G(x-b-1)+2=G(x-1)+1\overset{\text{zał.}}{=}M(x-1)+1\overset{\text{lem.2}}{=}$$
$$\overset{\text{lem.2}}{=}M(x)\leq G(x),$$

z czego wynika, że $M(x)=G(x)$.

Pokazaliśmy, że $G(x)=M(x)$ dla dowolnego $x\geq b+a$ jeżeli nie istnieje żaden kontrprzykład mniejszy niż $b+a$, więc w takim razie musi istnieć taki kontrprzykład mniejszy od $b+a$ jeżeli strategia zachłanna ma być niepoprawna.

Z 1) i 2) mamy, że każdy kontrprzykład jest większy niż $b+1$ oraz istnieją kontrprzykłady mniejsze niż $b+a$, więc z tego wynika, iż najmniejszy kontrprzykład x spełnia nierówność $b+1<x<b+a$. $\square$

Twierdzenie. Strategia zachłanna dla problemu wydawania reszty dla zbioru nominałów $\{1, a, b\}$ jest niepoprawna wtedy, i tylko wtedy gdy $0 < r < a - q$, gdzie $b = qa + r$ (czyli $q = \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ oraz $r = b \bmod a$).

Dowód.
$\Rightarrow$
Niech $b = qa + r$. Załóżmy, że $0 < r < a - q$. Wówczas istnieje kontrprzykład $x = b + a - 1$, dla którego reprezentacja zachłanna to $(a - 1, 0, 1)$. Można przedstawić x również jako $(r - 1, q + 1, 0)$, co daje $r - 1 + q + 1 = r + q$ monet, podczas gdy $G(x) = a - 1 + 1 = a$.
Z założenia mamy $0 < r + q < a$, więc $G(x) > r + q$, czyli zgodnie z definicją strategia zachłanna jest niepoprawna.

$\Leftarrow$
Załóżmy, że strategia zachłanna wydawania reszty jest niepoprawna dla nominałów $\{1, a, b\}$. Wówczas z lematu 3 wiemy, że najmniejszy kontrprzykład x spełnia nierówność $b + 1 < x < a + b$. W takim razie jego reprezentacja zachłanna to $(i, 0, 1)$, gdzie $0 < i < a$. Reprezentacja optymalna to $(j, k, 0)$, gdzie $k > 0$. Zauważmy, że w oczywisty sposób $j < i$. W takim razie jeżeli x jest minimalny, to $j = 0$, gdyż w przeciwnym razie $x - j$ byłby mniejszym kontrprzykładem. Mamy więc

$$x = b + i = ka$$

$$b = ka - i = ka - i - a + a = (k - 1)a + (a - i)$$

W takim razie $q = k - 1$ oraz $r = a - i$. Z nierówności $b + 1 < x < a + b$ mamy

$$0 < (a + b) - x = (a + b) - (b + i) = a - i.$$

$i \neq 0$, więc z powyższej nierówności mamy $0 < a - i < a$. Skoro x jest kontrprzykładem, to mamy również nierówność $M(x) = k < 1 + i = G(x)$.

Ostatecznie mamy więc

$$0 < a - i < a - (k - 1)$$

$$0 < r < a - q$$

$\square$

Na podstawie powyższego twierdzenia możemy już łatwo ułożyć algorytm sprawdzający, czy dla nominałów $\{1, a, b\}$ strategia zachłanna jest poprawna.

$r \leftarrow b \mod a$
$q \leftarrow \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$
if $0 < r$ `and` $r < a - q$ **then return** `True`
else return `False`
end if