Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M 4

8 listopada 2018 r.

M4.1. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Zaproponować schemat Hornera (podobny do tego z zadania **M3.9**) do obliczania wartości $p(z_0), p'(z_0), p''(z_0)$ i $p'''(z_0)$, gdzie $p(z)$ jest danym wielomianem o współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

M4.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyprowadzić wzory na metodę Newtona w dziedzinie liczb zespolonych dla funkcji

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

Załóżmy, że przybliżenie początkowe, to liczba zespolona $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, gdzie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Wyprowadzić wzory na kolejne przybliżenia $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$, w których wykonywane są operacje arytmetyczne tylko na liczbach rzeczywistych.

M4.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Metodę siecznych definiuje wzór iteracyjny

$$x_{n+1} := x_n - f_n \frac{x_n - x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} \qquad (f_n \neq f_{n-1};\ n = 1, 2, \ldots;\ x_0, x_1 \text{ - dane}),$$

gdzie $f_m := f(x_m)$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Wykazać, że wzór ten można również zapisać w postaci

$$x_{n+1} := \frac{f_n x_{n-1} - f_{n-1} x_n}{f_n - f_{n-1}} \qquad (f_n \neq f_{n-1};\ n = 1, 2, \ldots;\ x_0, x_1 \text{ - dane}),$$

a następnie wyjaśnić (również eksperymentalnie), który z wzorów jest przydatniejszy w praktyce numerycznej.

M4.4. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech α będzie podwójnym zerem funkcji f, czyli niech $0 = f(\alpha) = f'(\alpha) \neq f''(\alpha)$. Wykazać, że metoda Newtona jest wówczas (lokalnie?) zbieżna liniowo.

M4.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech α będzie punktem stałym przekształcenia $\phi \in C^{p+1}(\mathcal{J})$, gdzie $\mathcal{J} := (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ jest pewnym otoczeniem punktu α oraz $p \geqslant 1$. Udowodnić, że jeśli $\phi^{(i)}(\alpha) = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, p$ oraz $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, to metoda iteracyjna

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

jest metodą rzędu $p + 1$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}.$$

M4.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ *Metoda Halleya* rozwiązywania równania $f(x) = 0$ korzysta ze wzoru iteracyjnego

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\, f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - (f(x_n) f''(x_n))/2}.$$

Wykazać, że jest to metoda równoważna metodzie Newtona zastosowanej do funkcji $f/\sqrt{f'}$.

M4.7. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Rozważmy wielomian $p(z)$ o współczynnikach rzeczywistych $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Niech pierwiastki czynnika kwadratowego $z^2 - uz - v$ będą pojedynczymi pierwiastkami wielomianu p. Udowodnić, że wówczas w metodzie Bairstowa jakobian w punkcie (u, v) jest różny od zera.

M4.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ $\boxed{\text{Włącz komputer}}$ Rozważmy wielomian

$$w(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4.$$

Zastosować metodę Bairstowa do znalezienia wszystkich pierwiastków wielomianu w. Za przybliżenia początkowe należy przyjąć $u = 0.1$ i $v = 0.1$, a następnie wykonać maksymalnie 10 iteracji w arytmetyce 128 bitowej. Podać uzyskane czynniki kwadratowe, w postaci $z^2 - uz - z$, przez które dzieli się wielomian w. Podać przybliżenia otrzymanych pierwiastków z dokładnością do 16 cyfr dziesiętnych. Porównać otrzymane wyniki z tym, co daje metoda `roots` z pakietu `Polynomials` albo z metodami z pakietu `PolynomialRoots`.

M4.9. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Rozważmy wielokrotne stosowanie metody Newtona do znajdowania pierwiastków wielomianu

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Uzasadnić, że proces ten można wykonać bez wykonywania dzielenia syntetycznego — za pomocą tzw. metody Newtona-Maehly'ego. Mianowicie, jeśli znane są przybliżenia $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j$ pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$, to kolejne przybliżenia uzyskiwane w metodzie Newtona można obliczać za pomocą następującego wzoru:

$$z_{k+1} = z_k - p(z_k) \Big/ \left[p'(z_k) - p(z_k) \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{z_k - \xi_i} \right].$$

1 listopada 2018

Rafał Nowak