Ćwiczenia z analizy numerycznej (M)

Blok 3: lista M 13

24 stycznia 2019 r.

M13.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że nieosobliwa macierz $A = [a_{ij}^{(1)}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest symetryczna, tj. $a_{ij}^{(1)} = a_{ji}^{(1)}$ dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Załóżmy ponadto, że do rozwiązania układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ można zastosować metodę eliminacji bez wyboru elementów głównych.

a) Wykazać, że wówczas wielkości $a_{ij}^{(k)}$, otrzymywane w tej metodzie kolejno dla $k = 2, 3, \ldots, n$, są takie, że $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$ dla $i, j = k, k+1, \ldots, n$.

b) Wskazać, jak można wykorzystać ten fakt dla zmniejszenia kosztu metody eliminacji.

M13.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dla $p \in \{1, 2, \infty\}$ symbol $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ oznacza normę macierzy indukowaną przez p-tą normę wektorową. Wykazać, że dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zachodzi nierówność

$$\|AB\|_p \leqslant \|A\|_p \|B\|_p.$$

M13.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie *macierzą dominującą przekątniowo*, tj. taką, że

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wykazać, że metoda eliminacji Gaussa bez wyboru elementów głównych zachowuje tę własność, tzn. że wszystkie macierze $A^{(k)}$ są dominujące przekątniowo. Wywnioskować stąd, że każda macierz dominująca przekątniowo jest nieosobliwa i posiada rozkład LU.

M13.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełnia nierówność $\|E\| < 1$. Wykazać, że $I - E$ jest macierzą nieosobliwą, a jej odwrotność spełnia nierówność

$$\|(I-E)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|E\|}. \tag{1}$$

M13.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że wszystkie wartości własne λ_i macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ są rzeczywiste i spełniają nierówności

$$0 < \alpha \leqslant \lambda_i \leqslant \beta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wykazać, że metoda iteracyjna Richardsona

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (I - \tau A)\boldsymbol{x}^{(k)} + \tau\boldsymbol{b} \qquad (k \geqslant 0),$$

zastosowana do rozwiązania układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, jest zbieżna, jeśli $0 < \tau < 2/\beta$.

M13.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli A jest *macierzą ze ściśle dominującą przekątną*, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

to $\|B_J\|_\infty < 1$ i metoda Jacobiego jest zbieżna.

M13.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełnia warunki

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

(Mówimy, że A jest macierzą z dominującą przekątną kolumnowo.)
Pokazać, że metoda iteracyjna Jacobiego, zastosowana do układu równań o macierzy A, jest zbieżna.

M13.8. $\boxed{\text{2 punkty. Włącz komputer.}}$ Zaprogramować efektywnie metodę eliminacji Gaussa w języku Julia. Należy zaprezentować funkcję `solve!(A,b)`, która dla danej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i wektora $b \in \mathbb{R}^n$ znajduje rozwiązanie układu równań $Ax = b$. *Wskazówka.* Aby uzyskać efektywną implementację, można rozważyć układ równań $A^T x = b$. Efektywna implementacja to taka, która działa co najwyżej 30-razy dłużej niż wbudowana metoda `\(A,b)`. Ponadto, dla zaoszczędzenia na obliczeniach, można pominąć wybór elementów głównych.

17 stycznia 2019
Rafał Nowak