# Kurs języka Haskell

Lista zadań na pracownię nr 2

Zdalna, do zgłoszenia w SKOS-ie do 20 marca 2020

W poniższych zadaniach rozważamy następujące, niezbyt zgrabne definicje pewnych funkcji:

```
zipF :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zipF [] [] = []
zipF (a:as) (b:bs) = (a,b) : zipF as bs

subseqF :: [a] -> [[a]]
subseqF [] = [[]]
subseqF (x:xs) = foldr (\ ys zss -> (x:ys) : zss) yss yss where
   yss = subseqF xs

ipermF :: [a] -> [[a]]
ipermF [] = [[]]
ipermF (x:xs) = concatMap insert (ipermF xs) where
   insert [] = [[x]]
   insert ys'@(y:ys) = (x:ys') : map (y:) (insert ys)

spermF :: [a] -> [[a]]
spermF [] = [[]]
spermF xs = concatMap (\ (y,ys) -> map (y:) (spermF ys)) (select xs) where
   select [y] = [(y,[])]
   select (y:ys) = (y,ys) : map (\ (z,zs) -> (z,y:zs)) (select ys)

qsortF :: Ord a => [a] -> [a]
qsortF [] = []
qsortF (x:xs) = qsortF (filter (<= x) xs) ++ [x] ++ qsortF (filter (> x) xs)

(<+>) :: Ord a => [a] -> [a] -> [a]
[] <+> ys = ys
xs <+> [] = xs
xs'@(x:xs) <+> ys'@(y:ys)
   | x <= y = x : (xs <+> ys')
   | otherwise = y : (xs' <+> ys)
```

**Zadanie 1 (2 pkt).** Zaprogramuj z użyciem *list comprehensions* (tam gdzie to możliwe) funkcje:

```
subseqC :: [a] -> [[a]]
ipermC :: [a] -> [[a]]
spermC :: [a] -> [[a]]
qsortC :: Ord a => [a] -> [a]
```

równe odpowiednim funkcjom zdefiniowanym powyżej. Przeczytaj w dokumentacji GHC o rozszerzeniu `ParallelListComp` i zdefiniuj następnie za pomocą *list comprehensions* równą funkcji `zipF` funkcję

```
zipC :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
```

**Zadanie 2 (2 pkt).** Zaprogramuj w postaci bezpunktowej funkcje

```
subseqP :: [a] -> [[a]]
ipermP :: [a] -> [[a]]
spermP :: [a] -> [[a]]
qsortP :: Ord a => [a] -> [a]
zipP :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
(<++>) :: Ord a => [a] -> [a] -> [a]
```

równe odpowiednim funkcjom zdefiniowanym powyżej.

**Zadanie 3 (1 pkt).** Rozważmy kombinacje aplikatywne kombinatorów `S` i `K`:

```
data Combinator = S | K | Combinator :$ Combinator
infixl :$
```

Przypomnijmy, że z kombinatorami `S` i `K` są związane następujące reguły upraszczania:

$$\begin{aligned} \texttt{S :\$}\ x\ \texttt{:\$}\ y\ \texttt{:\$}\ z &\rightarrow x\ \texttt{:\$}\ z\ \texttt{:\$}\ (y\ \texttt{:\$}\ z) \\ \texttt{K :\$}\ x\ \texttt{:\$}\ y &\rightarrow x \end{aligned}$$

Zainstaluj typ `Combinator` w klasie `Show`. Np. wyrażenie `(S :$ K) :$ (K :$ S)` powinno zostać zamienione na napis `SK(KS)` (z minimalną liczbą nawiasów).

**Zadanie 4 (2 pkt).** Zaprogramuj funkcję

```
evalC :: Combinator -> Combinator
```

która wyznacza postać normalną podanej kombinacji aplikatywnej. Użyj leniwej strategii wartościowania, tj. zawsze zamykaj najbardziej zewnętrzny skrajnie lewy redeks w kombinacji. Uwaga: dla niektórych kombinacji funkcja będzie się zapętlać!

*Drzewa poszukiwań* to drzewa, w których każdy wierzchołek zawiera ciąg etykiet $a_1, \ldots, a_n$ i posiada poddrzewa $t_1, \ldots, t_{n+1}$ (które mogą być puste), gdzie $n \geq 1$ (oznacza to, że poddrzew jest zawsze o jeden więcej niż etykiet). W każdym wierzchołku jest spełniony następujący aksjomat, będący niezmiennikiem operacji wstawiania i usuwania wierzchołków:

> *Wszystkie etykiety drzewa $t_i$ są mniejsze niż $a_i$ oraz wszystkie etykiety drzewa $t_{i+1}$ są większe niż $a_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.*

Wynika stąd w szczególności, że ciąg $a_1, \ldots, a_n$ jest uporządkowany i że drzewo nie zawiera dwóch równych etykiet.

*Binarne drzewa poszukiwań*, to drzewa poszukiwań, w których każdy wierzchołek wewnętrzny ma dokładnie dwóch synów:

```
data BST a = NodeBST (BST a) a (BST a) | EmptyBST
```

**Zadanie 5 (1 pkt).** Zaprogramuj operacje

```
searchBST :: Ord a => a -> BST a -> Maybe a
insertBST :: Ord a => a -> BST a -> BST a
```

Operacja `searchBST` ujawnia etykietę wierzchołka drzewa równą podanemu elementowi (jeśli taka istnieje w drzewie). Operacja `insertBST` wstawia podany element do drzewa (bez powtórzeń).

**Zadanie 6 (1 pkt).** Zaprogramuj operacje

```
deleteMaxBST :: Ord a => BST a -> (BST a, a)
deleteBST :: Ord a => a -> BST a -> BST a
```

Operacja `deleteMaxBST` ujawnia i usuwa największą etykietę z drzewa (lub kończy się błędem w przypadku drzewa pustego — użyj funkcji `error`). Operacja `deleteBST` usuwa element z drzewa równy podanemu lub zwraca niezmienione drzewo jeśli takiego elementu w drzewie nie ma.

Wadą rozważanych w powyższych zadaniach niezbalansowanych drzew BST jest znaczna degradacja efektywności funkcji działających na drzewie w przypadku jego rozbalansowania. *2-3-drzewa*, to drzewa poszukiwań o wierzchołkach wewnętrznych etykietowanych elementami pewnego typu `a`, w których każdy wierzchołek może mieć dwóch lub trzech synów:

```
data Tree23 a = Node2 (Tree23 a) a (Tree23 a)
              | Node3 (Tree23 a) a (Tree23 a) a (Tree23 a)
              | Empty23
```

Drzewa te spełniają następujący dodatkowy aksjomat, będący niezmiennikiem operacji wstawiania i usuwania wierzchołków:

*Wszystkie ścieżki od korzenia do liścia w 2-3-drzewie są tej samej długości.*

2-3-drzewa są zatem drzewami zbalansowanymi (wysokość $h$ drzewa o $n$ wierzchołkach spełnia nierówność $\log_3 n \leq h \leq \log_2 n$).

**Zadanie 7 (1 pkt).** Zaprogramuj operację

```
search23 :: Ord a => a -> Tree23 a -> Maybe a
```

wyszukującą element w 2-3-drzewie.

**Zadanie 8 (2 pkt).** Zaprogramuj operację

```
insert23 :: Ord a => a -> Tree23 a -> Tree23 a
```

wstawiającą element do 2-3-drzewa. Wstawianie rozpoczyna się tak, jak dla drzew niezbalansowanych, wyszukaniem odpowiedniego miejsca wstawienia elementu. Teraz jednak wstawienie elementu zaburza niezmiennik drzewa. Podczas wychodzenia z rekursji należy przesuwać w kierunku korzenia miejsce, w którym jest zaburzony niezmiennik. Warto w tym celu zdefiniować pomocniczą operację

```
ins :: Ord a => a -> Tree23 a -> InsResult a
```

która wraz z nowym drzewem zwraca informację, czy drzewo urosło, czy nie:

```
data InsResult a = BalancedIns (Tree23 a) | Grown (Tree23 a)
```

Jeśli drzewo urosło, to można przywrócić niezmiennik lub przesunąć jego zaburzenie w kierunku korzenia korzystając z rotacji przedstawionych na Rysunku 1, w których wierzchołek pogrubiony, to wynik `Grown` operacji `ins`. Ponieważ w przypadku każdej rotacji argument konstruktora `Grown` trzeba rozłożyć na części i jest on zawsze 2-wierzchołkiem, to zamiast powyższej definicji typu `InsResult` można użyć następującej:

```
data InsResult a = BalancedIns (Tree23 a) | Grown (Tree23 a) a (Tree23 a)
```

w której konstruktor `Grown` przechowuje osobno etykietę korzenia i dwa poddrzewa wyniku wstawiania.

Rozważ podczas implementacji, czy rotacje lepiej umieścić wprost w kodzie funkcji `ins`, czy też zakodować je za pomocą osobnej nierekurencyjnej funkcji.

**Zadanie 9 (3 pkt).** Usuwanie podanego elementu oraz usuwanie największego elementu:

```
deleteMax23 :: Tree23 a -> (Tree23 a, a)
delete23 :: Ord a => a -> Tree23 a -> Tree23 a
```

mogą naruszyć niezmiennik w przeciwną stronę: drzewo stanie się zbyt płytkie. Możemy więc, podobnie jak podczas wstawiania elementu, zdefiniować funkcje pomocnicze

```
delMax :: Tree23 a -> (DelResult a, a)
del :: a -> Tree23 a -> DelResult a
```

zwracające oprócz drzewa także informację, czy uległo ono spłyceniu:

```
data DelResult a = BalancedDel (Tree23 a) | Shrinked (Tree23 a)
```

Rotacje wykonywane przez funkcje `del` i `delMax` przywracające zbalansowanie lub przesuwające jego naruszenie w kierunku korzenia są przedstawione na Rysunku 2, na którym krawędź pogrubiona odpowiada konstruktorowi `Shrinked`. Zaprogramuj powyższe funkcje.

**Zadanie 10 (1 pkt).** *2-3-4-drzewa*, to drzewa podobne do 2-3-drzew, w których wierzchołek wewnętrzny może mieć 2, 3 lub 4 synów:

```
data Tree234 a = N2 (Tree234 a) a (Tree234 a)
               | N3 (Tree234 a) a (Tree234 a) a (Tree234 a)
               | N4 (Tree234 a) a (Tree234 a) a (Tree234 a) a (Tree234 a)
               | E234
```

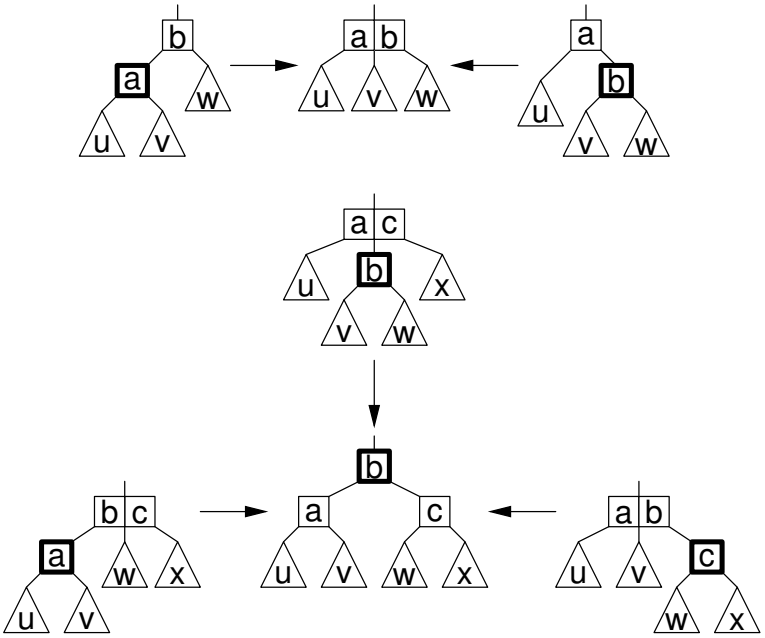
Okazuje się, że istnieje naturalna jednoznaczna odpowiedniość między 2-3-4-drzewami i drzewami *czerwono-czarnymi*:

```
data RBTree a = Black (RBTree a) a (RBTree a)
              | Red (RBTree a) a (RBTree a)
              | RBTEmpty
```

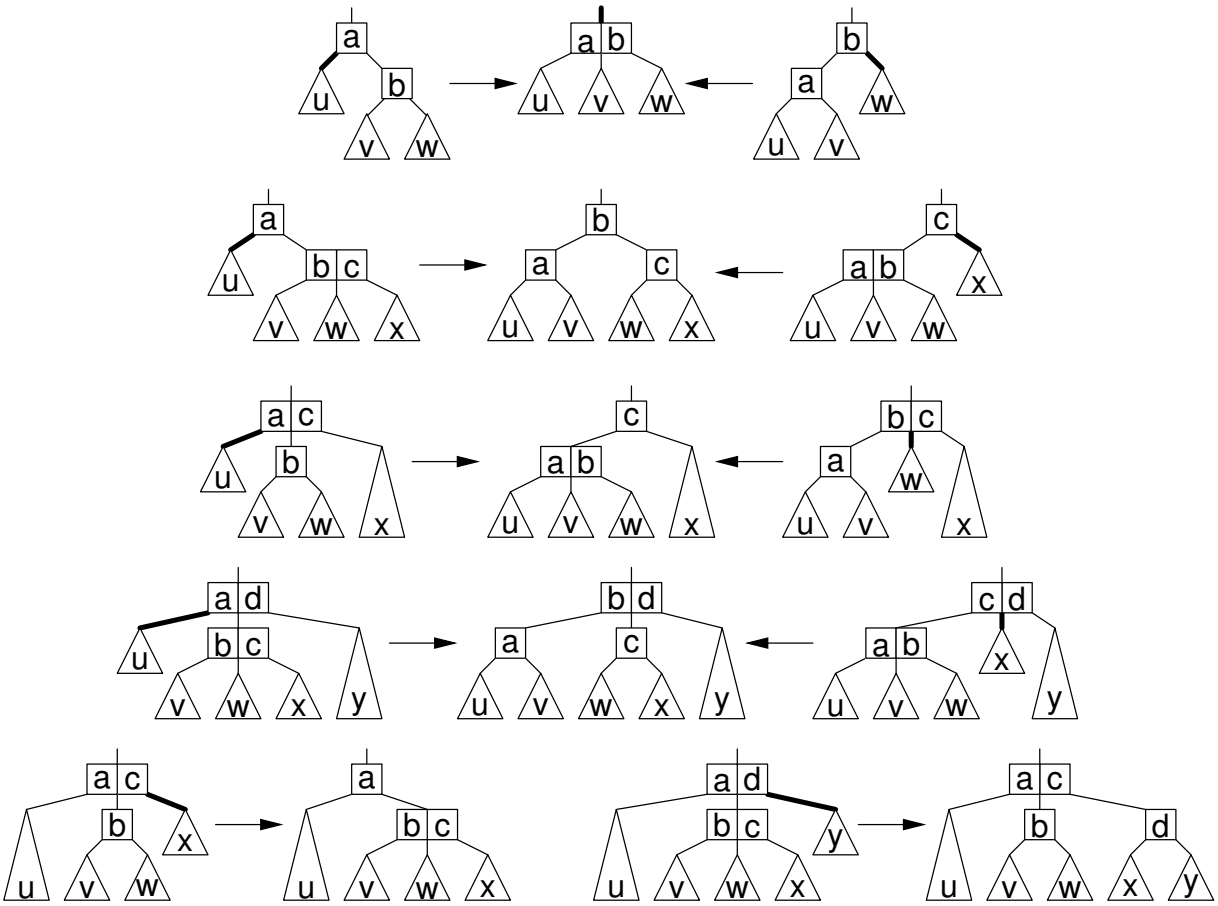
Zaprogramuj funkcje

```
from234 :: Tree234 a -> RBTree a
to234 :: RBTree a -> Tree234 a
```

dokonujące konwersji pomiędzy tymi rodzajami drzew.




Rysunek 1: Rotacje podczas wstawiania elementu do 2-3-drzewa




Rysunek 2: Rotacje podczas usuwania elementu z 2-3-drzewa