Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M 6

29 listopada 2018 r.

M6.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Uzasadnić następujący *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \tfrac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \ldots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x ($c_0, c_1, \ldots, c_n$ są danymi stałymi). Określamy pomocniczo wielkości $B_0, B_1, \ldots, B_{n+2}$ wzorami

$$\begin{aligned} &B_{n+2} := B_{n+1} := 0; \\ &B_k := 2xB_{k+1} - B_{k+2} + c_k \qquad (k = n, n-1, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Wówczas $w(x) = \frac{1}{2}(B_0 - B_2)$.

M6.2. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać poprawność algorytmu Wernera obliczania stałych

(1) $$\sigma_k \equiv \sigma_k^{(n)} := 1/p'_{n+1}(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

gdzie $p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

Algorytm 1 (Werner, 1984)**.**
a) Obliczamy pomocnicze wielkości $a_k^{(i)}$ wg wzorów

$$\begin{aligned} &a_0^{(0)} := 1, \quad a_k^{(0)} := 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \\ &\left.\begin{aligned} a_k^{(i)} &:= a_k^{(i-1)}/(x_k - x_i), \\ a_i^{(k+1)} &:= a_i^{(k)} - a_k^{(i)} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, i-1), \end{aligned}$$

b) Wówczas

$$\sigma_k := a_k^{(n)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

M6.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Określmy wielomian $H_{2n+1} \in \Pi_n$ za pomocą wzoru

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, h_k(x) + \sum_{k=0}^{n} f'(x_k)\, \bar{h}_k(x),$$

gdzie węzły $x_0, \ldots, x_n$ są parami różne, ponadto

$$\left.\begin{aligned} h_k(x) &:= [1 - 2(x - x_k)\lambda'{}_k(x_k)]\lambda_k^2(x), \\ \bar{h}_k(x) &:= (x - x_k)\lambda_k^2(x), \\ \lambda_k(x) &:= \frac{p_{n+1}(x)}{(x - x_k)p'_{n+1}(x_k)}, \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

oraz $p_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. Wykazać, że H_{2n+1} spełnia warunki

(2) $$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

M6.4. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech będzie $f \in C^{2n+2}[a, b]$ i niech wielomian $H_{2n+1}(x) \in \Pi_{2n+1}$ spełnia warunki (2) dla parami różnych węzłów $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$. Udowodnić, że dla każdego $x \in [a, b]$ istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) p_{n+1}^2(x).$$

Wskazówka: Dla $x \in [a,\, b]$, różnego od każdego z węzłów, rozważyć funkcję

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - K\, p_{n+1}^2(t),$$

gdzie stała K jest dobrana tak, żeby $g(x) = 0$.

M6.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć wielomian $H_5 \in \Pi_5$, spełniający warunki $H_5(x_i) = y_i$, $H_5'(x_i) = y_i'$ $(i = 0, 1, 2)$, gdzie x_i, y_i, y_i' mają następujące wartości:

i	x_i	y_i	y_i'
0	-1	7	-1
1	0	6	0
2	2	22	56

M6.6. $\boxed{\text{2 punkt, Włącz komputer!}}$ Niech $f(x) = e^{\arctan(x)}$. Rozważyć interpolację w przedziale $[a, b] := [-5, 5]$ w $n+1$ równoodległych węzłach. Znaleźć postać potęgową wielomianu interpolacyjnego $L_n(x)$ oraz naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia $s(x)$. Rozważyć $n = 10, 20, 30$ i podać wartości całek

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx, \qquad \int_a^b [L_n''(x)]^2 dx, \qquad \int_a^b [s''(x)]^2 dx.$$

Wyniki należy przedstawić z dokładnością do 8 cyfr dziesiętnych.

M6.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli s jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia, interpolującą funkcję f w węzłach $x_0,\, x_1,\, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$, to

$$\int_a^b [s''(x)]^2\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]\right) M_k,$$

gdzie $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

M6.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech s będzie funkcją określoną w zadaniu **M6.7**. Wykazać, że dla węzłów $x_k := a + k \cdot h$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, gdzie $h := (b-a)/n$, zachodzi wzór

$$\int_a^b s(x)\, dx = h \sum_{k=0}^{n}{}'' f(x_k) - \frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{n}{}'' M_k.$$

(Symbol $\sum''$ oznacza sumę, której pierwszy i ostatni składnik należy podzielić przez 2.) Jakie zastosowanie może mieć powyższa równość?

23 listopada 2018

Rafał Nowak