Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M 14

31 stycznia 2019 r.

M14.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Macierz B_ω, związana z metodą nadrelaksacji (SOR), określona jest wzorem

$$B_\omega := (D + \omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U],$$

gdzie ω jest parametrem. Wykazać, że promień spektralny macierzy B_ω spełnia nierówność

$$\varrho(B_\omega) \geqslant |\omega - 1|.$$

M14.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\boldsymbol{q}_j \in \mathbb{R}^m$ oznaczają wektory uzyskiwane w metodzie ortogonalizacji Gramma-Schmidta, dla danego układu liniowo niezależnych wektorów $\boldsymbol{a}_j \in \mathbb{R}^m$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Udowodnić, że zachodzi równość

$$I - P_k = (I - \boldsymbol{q}_k\boldsymbol{q}_k^T) \cdots (I - \boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^T)(I - \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^T),$$

gdzie P_k jest macierzą rzutu prostopadłego:

$$P_k := \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{q}_j\boldsymbol{q}_j^T.$$

M14.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą o elementach

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 1 && (i = 1, 2, \ldots, n),\\ b_{ij} &= -1 && (i < j),\\ b_{ij} &= 0 && (i > j). \end{aligned}$$

Sprawdzić, że $\det B \ll \operatorname{cond}_\infty(B)$, gdzie $\operatorname{cond}_\infty(B) := \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty$. Jaki stąd wniosek?

M14.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Jak ocenimy uwarunkowanie układu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, o macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix},$$

dla $0 < \varepsilon \leqslant 0.01$?

M14.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\tilde{\boldsymbol{x}}$ będzie przybliżonym rozwiązaniem układu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gdzie $\det A \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{\theta}$. Niech $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}$ oznacza *resztę*. Wykazać, że wówczas zachodzą nierówności

$$\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|A\|}, \qquad \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|},$$

gdzie $\boldsymbol{x} := A^{-1}\boldsymbol{b}$ jest dokładnym rozwiązaniem.

M14.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, to $\|B_S\|_\infty < 1$, a więc metoda Gaussa-Seidela jest zbieżna.

M14.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą trójprzekątniową

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć rokład trójkątny macierzy T – przy założeniu, że istnieje.

25 stycznia 2019

Rafał Nowak