Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 11. Tydzień rozpoczynający się 12. maja

1. Zadania 1–4. X_1, X_2 to niezależne zmienne losowe o gęstości $f(x) = \dfrac{x}{2}$ dla $x \in (0,2)$ każda. Niech, oprócz tego, $Y_1 = X_1 \cdot X_2,\ \ Y_2 = \dfrac{X_1}{X_2}$.
   (a) Znaleźć wartości oczekiwane $\mathrm{E}\,(X_1)$ oraz $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X_1}\right)$.
   (b) Obliczyć $\mathrm{E}\,(Y_1)$ i $\mathrm{E}\,(Y_2)$.
2. Obliczyć funkcję gęstości $g(y_1, y_2)$ zmiennej losowej (Y_1, Y_2).
3. Znaleźć gęstości brzegowe zmiennych Y_1, Y_2.
4. Czy zmienne Y_1, Y_2 są niezależne?
5. Zadania 5–6. Zmienna losowa X ma rozkład normalny
$$N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}\right).$$
   Obliczyć ρ_{x_1,x_3} (korelacjaX_1, X_3).
6. Niech $Y_1 = X_1 + 2X_3,\ \ Y_2 = X_2 - X_3$ oraz $Y = [Y_1, Y_2]^T$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej Y.
7. Zadania 7–8. Niech $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, czyli $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, dla $x \in (0,\infty)$. Bezpośrednio (z definicji) obliczyć $\mathrm{E}\,(X)$.
8. Sprawdzić, że $M_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$.
9. (X,Y) jest dyskretną zmienną losową o prawdopodobieństwach p_{ij}. Udowodnić, że prawdziwa jest równość $\mathrm{E}\,(X+Y) = \mathrm{E}\,(X) + \mathrm{E}\,(Y)$.
10. Uzupełnić wzór (oraz uzasadnić)
$$\mathrm{V}\,(X - Y) = V(X) \pm \ldots$$
   Symbol $\pm$ oznacza iż – być może – następuje przynajmniej jeden składnik, dodawany lub odejmowany.

---

11. **(E1)** Dane (w kolumnach) przedstawiają pomiar wagi przed i po okresie stosowania określonej diety dla 16 osób. Testujemy hipotezę: **dieta ma wpływ na wagę**.
12. **(E2)** 10 poletek doświadczalnych podzielono na dwie części, w jednej z nich przeprowadzono dodatkowe czynności *agrotechniczne*. W wierszu znajduje się wydajność części poddanej dodatkowym zabiegom i części poletka uprawianej tradycyjnie. Testujemy hipotezę: **dodatkowy czynnik ma wpływ na wydajność uprawy**, tzn. podać postać hipotezy zerowej i podać wartość_p.
13. **(E2)** Niezależne obserwacje $x_1, \ldots, x_n,\ \ y_1, \ldots, y_k$ pochodzą z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$. Znaleźć rozkład zmiennej Z:
$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma\sqrt{\frac{n+k}{nk}}}.$$

Witold Karczewski