Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M 11

10 stycznia 2019 r.

M11.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$T_{n+j}(u_k) = T_n(u_k) \cdot T_j(u_k)$$

gdzie u_k oznaczają punkty ekstremalne wielomianu T_n.

M11.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla każdej funkcji $f \in C[a,b]$ ciąg kwadratur Gaussa $\{G_n(f)\}$ jest przy $n \to \infty$ zbieżny do całki $\displaystyle\int_a^b p(x)f(x)\,dx$.

M11.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$

a) Stosując złożony wzór Simpsona S_n z odpowiednio dobranym n obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$ z błędem $\leqslant 2 \cdot 10^{-5}$.

b) Jaka wartość n gwarantuje uzyskanie tak dokładnego wyniku, jeśli zamiast wzoru S_n użyjemy złożonego wzoru trapezów T_n?

M11.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $w_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}' a_k\, T_k(x)$, gdzie T_k jest k-tym wielomianem Czebyszewa. Wykazać, że

$$\int_{-1}^{1} w_n(x)\,\mathrm{d}x = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}{}' \frac{a_{2i}}{1-4i^2}.$$

M11.5. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Uzasadnić poprawność poniższej procedury, zapisanej w języku Julia, do obliczania całki $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą kwadratury Clenshawa-Curtisa.

```
function ClenshawCurtis3(f,n)
  # Chebyshev extreme points
  x  = cos.(pi*(0:n)/n)
  fx = f.(x)/(2n)
  # Fast Fourier transform
  g  = real(FFTW.fft(vcat(fx,fx[n:-1:2])))
  # Chebyshev coefficients
  a  = vcat( g[1], g[2:n]+g[2*n:-1:n+2], g[n+1] )
  w  = zeros(length(a))
  w[1:2:end] = 2 ./ (1 .- (0:2:n) .^ 2 )
  LinearAlgebra.dot(w,a)
end
```

Jaka jest złożoność tej procedury?

M11.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć liczby c_j, dla których *wielomian trygonometryczny* $w_n(x) := \sum_{j=0}^{n} c_j \cos(jx)$ daje najmniejszą wartość całki

$$\int_0^\pi (\pi - x^2 - w_n(x))^2\,dx.$$

M11.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Udowodnić, że współczynniki $A_k^{(n)}$ kwadratury Gaussa-Czebyszewa spełniają równość

$$A_k^{(n)} = -\frac{\pi}{T'_{n+1}(t_k)\, T_{n+2}(t_k)},$$

gdzie T_j oznaczają wielomiany Czebyszewa, a t_k — zera wielomianu T_{n+1}.

M11.8. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Udowodnić, że wzór

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{n} \sideset{}{''}\sum_{k=0}^{n} f(\cos(k\pi/n)) \tag{1}$$

jest dokładny dla $f \in \Pi_{2n-1}$.

M11.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Podać przykład wielomianu $f \in \Pi_{2n}$, dla którego wzór (1) jest niedokładny. Co z tego wynika?

M11.10. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć, o ile to możliwe, takie wartości stałych A, B, C, żeby równość

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-1/2}\,dx = Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

zachodziła dla dowolnego wielomianu f stopnia $\leqslant 5$. Podać także przykład wielomianu stopnia 6, dla którego powyższa równość nie zachodzi.

3 stycznia 2019

Rafał Nowak