

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

## Lista zadań nr 4. Tydzień rozpoczynający się 18. marca

### Zadania

1. Dla funkcji  $f(x, y) = C(x + y) \exp\{-(x + y)\}$ , gdzie  $x > 0, y > 0$ 
  - (a) Wyznaczyć stałą  $C$  taką, aby podana wyżej funkcja była gęstością zmiennej  $(X, Y)$ .
  - (b) Sprawdzić, czy zmienne losowe  $X, Y$  są niezależne.
  - (c) Obliczyć momenty  $m_{10}, m_{01}$ .

W zadaniach 2–10 zakładamy, że zmienne losowe są ciągłe, stosujemy też oznaczenia: gęstość i dystrybuanta zmiennej losowej  $X$  to – odpowiednio –  $f_X(x)$  oraz  $F_X(x)$ .

2. Czy można tak dobrać stałą  $C$ , aby funkcja  $f_{XY}(x, y) = Cxy + x + y$ , dla  $0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2$ , była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej?

Do zadań 3–4. Dana jest funkcja  $f_{XY}(x, y) = -xy + x$  dla  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ .

3. Sprawdzić, czy zmienne  $X$  i  $Y$  są niezależne.
4. Obliczyć ppb  $P(1 \leq X \leq 3, 0 \leq Y \leq 0.5)$ .

Oznaczenie:  $X \sim U[a, b]$  oznacza, że zmienna losowa  $X$  podlega rozkładowi jednostajnemu na przedziale  $[a, b]$ . Innymi słowy:  $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ , dla  $x \in [a, b]$ .

5. Załóżmy, że  $X \sim U[0, 1]$  i niech  $Y = X^n$ . Udowodnić, że  $f_Y(y) = \frac{y^{1/n-1}}{n}$ , dla  $0 \leq y \leq 1$ .
6. Zmienna losowa  $X \sim U[-1; 1]$ . Znaleźć gęstość zmiennej losowej  $Y = |X|$ .
7. Niech  $X$  będzie ciągłą zmienną losową i niech  $Y = F_X(X)$ . Udowodnić, że  $Y \sim U[0; 1]$ .
8. Niech  $Y = X^2$  ( $X$  określona na  $\mathbb{R}$ ). Wykazać, że

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \text{ dla } y > 0.$$

9. Zmienna losowa  $X$  ma gęstość  $f_X(x) = xe^{-x}$ , dla  $x \geq 0$ . Znaleźć gęstość zmiennej losowej  $Y = X^2$ .
10. Niech  $X \sim U[a; b]$ . Obliczyć wartość  $V(X)$
11. Niech  $X$  podlega standardowemu rozkładowi Cauchy'ego,  $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Udowodnić, że  $Y = \frac{1}{X}$  ma również standardowy rozkład Cauchy'ego.