Algorytmy i Struktury Danych
Lista 2, Zadanie 8

Jakub Grobelny

Treść zadania

8. (2pkt) Ułóż algorytm, który dla danych liczb naturalnych a i b, sprawdza, czy zachłanna strategia dla problemu wydawania reszty jest poprawna, gdy zbiór nominałów jest równy $X = \{1, a, b\}$.

Rozwiązanie

Definicja. $G(x)$ oznacza liczbę monet w reprezentacji liczby x dla nominałów $\{1, a, b\}$ będącej wynikiem algorytmu zachłannego, $M(x)$ zaś liczbę monet w optymalnej reprezentacji liczby x.

Definicja. Kontrprzykładem nazywamy taki $x \in \mathbb{N}_+$, że $G(x) > M(x)$.

Definicja. Mówimy, że zachłanna strategia dla problemu wydawania reszty jest niepoprawna dla jakiegoś zbioru nominałów, jeżeli istnieje kontrprzykład.

Definicja. Notacja $x = (i, j, k)$ dla zbioru nominałów $\{1, a, b\}$ oznacza, że reszta x została wydana przy użyciu i monet nominału 1, j monet nominału a oraz k monet nominału b.

Twierdzenie. Strategia zachłanna dla problemu wydawania reszty dla zbioru nominałów $\{1, a, b\}$ jest niepoprawna wtedy, i tylko wtedy gdy $0 < r < a - q$, gdzie $b = qa + r$.

Dowód.
1) Dowód implikacji w prawą stronę:
Niech $b = qa + r$. Załóżmy, że $0 < r < a - q$. Wówczas istnieje kontrprzykład $x = b + a - 1$, dla którego reprezentacja optymalna to $(r - 1, q + 1, 0)$, zaś zachłanna $(a - 1, 0, 1)$.

$$M(x) = r - 1 + q + 1 = r + q$$

$$G(x) = a - 1 + 1 = a$$

Z założenia mamy $0 < r + q < a$, więc $G(x) > M(x)$, czyli zgodnie z definicją strategia zachłanna jest niepoprawna.

2) Dowód implikacji w lewą stronę:

$\square$