Algorytmy i Struktury Danych
Lista 2, Zadanie 8

Jakub Grobelny

Treść zadania

8. (2pkt) Ułóż algorytm, który dla danych liczb naturalnych a i b, sprawdza, czy zachłanna strategia dla problemu wydawania reszty jest poprawna, gdy zbiór nominałów jest równy $X = \{1, a, b\}$.

Rozwiązanie

Założenie. Załóżmy, bez utraty ogólności, że $1 < a < b$.

Definicja 1. $G(x)$ oznacza liczbę monet w reprezentacji liczby x dla nominałów $\{1, a, b\}$ będącej wynikiem algorytmu zachłannego, $M(x)$ zaś liczbę monet w optymalnej reprezentacji liczby x.

Definicja 2. Kontrprzykładem nazywamy taki $x \in \mathbb{N}$, że $G(x) > M(x)$.

Definicja 3. Mówimy, że zachłanna strategia dla problemu wydawania reszty jest niepoprawna dla jakiegoś zbioru nominałów, jeżeli istnieje kontrprzykład.

Definicja 4. Notacja $x = (i, j, k)$ dla zbioru nominałów $\{1, a, b\}$ oznacza, że reszta x została wydana przy użyciu i monet nominału 1, j monet nominału a oraz k monet nominału b.

Lemat 1. Jeżeli istnieje kontrprzykład x dla nominałów $\{1, a, b\}$, to najmniejszy taki x spełnia nierówność $b + 1 < x < b + a$.

Dowód.
Załóżmy, że dla nominałów $\{1, a, b\}$ strategia zachłanna jest niepoprawna.
1) Ograniczenie dolne:
Niech x będzie kontrprzykładem. Rozpatrzmy przypadki:
1°. $x < b$. Wówczas $M(x) = G(x)$, gdyż mamy do wyboru jedynie monety $\{1, a\}$. x nie może być więc kontrprzykładem.
2°. $x = b$. Wówczas $M(x) = 1 = G(x)$, czyli tak jak w przypadku pierwszym.
3°. $x = b + 1$. Wówczas $M(x) = G(x)$, gdyż zachłanna reprezentacja jest identyczna jak optymalna, czyli $(1, 0, 1)$.
Widać w takim razie, iż każdy kontrprzykład musi być większy niż $b + 1$.

2) Ograniczenie górne:
Weźmy dowolny $x \geq b + a$. Załóżmy, że $\forall_{y<x}\, G(y) = M(y)$. Wówczas

$$G(x) = G(x - b) + 1 \overset{\text{zał.}}{=} M(x - b) + 1 = M(x)$$

co daje nam sprzeczność z założeniem, że strategia zachłanna jest niepoprawna. $\square$

Twierdzenie. Strategia zachłanna dla problemu wydawania reszty dla zbioru nominałów $\{1, a, b\}$ jest niepoprawna wtedy, i tylko wtedy gdy $0 < r < a - q$, gdzie $b = qa + r$ (czyli $q = \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ oraz $r = b \bmod a$).

Dowód.
$\Rightarrow$
Niech $b = qa + r$. Załóżmy, że $0 < r < a - q$. Wówczas istnieje kontrprzykład $x = b + a - 1$, dla którego reprezentacja zachłanna to $(a - 1, 0, 1)$. Można przedstawić x również jako $(r - 1, q + 1, 0)$, co daje $r - 1 + q + 1 = r + q$ monet, podczas gdy $G(x) = a - 1 + 1 = a$.
Z założenia mamy $0 < r + q < a$, więc $G(x) > r + q$, czyli zgodnie z definicją strategia zachłanna jest niepoprawna.

$\Leftarrow$
Załóżmy, że strategia zachłanna wydawania reszty jest niepoprawna dla nominałów $\{1, a, b\}$. Wówczas z lematu 1 wiemy, że najmniejszy kontrprzykład x spełnia nierówność $b + 1 < x < a + b$. W takim razie jego reprezentacja zachłanna to $(i, 0, 1)$, gdzie $0 < i < a$. Reprezentacja optymalna to $(j, k, 0)$, gdzie $k > 0$. Zauważmy, że w oczywisty sposób $j < i$. W takim razie jeżeli x jest minimalny, to $j = 0$, gdyż w przeciwnym razie $x - j$ byłby mniejszym kontrprzykładem. Mamy więc

$$x = b + i = ka$$

$$b = ka - i = ka - i - a + a = (k - 1)a + (a - i)$$

W takim razie $q = k - 1$ oraz $r = a - i$. Z nierówności $b + 1 < x < a + b$ mamy

$$0 < (a + b) - x = (a + b) - (b + i) = a - i.$$

$i \neq 0$, więc z powyższej nierówności mamy $0 < a - i < a$. Skoro x jest kontrprzykładem, to mamy również nierówność $M(x) = k < 1 + i = G(x)$.

Ostatecznie mamy więc

$$0 < r < a - q$$

$\square$

Algorytm.

$r \leftarrow b \mod a$
$q \leftarrow \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$
if $0 < r$ `and` $r < a - q$ ***then return*** `True`
else return `False`
end if