Podstawy i Zastosowania Złożoności Obliczeniowej
Zadanie 1

Jakub Grobelny

Podpunkt a

Teza.
$3COL \leq_P Tutorzy$

Dowód.
Pokażemy, że istnieje obliczalna w czasie wielomianowym funkcja f taka, że $\forall_G (G \in 3COL \Leftrightarrow f(G) \in Tutorzy)$.

```
procedura f(G(V, E)):
    przemianuj(G)
    konflikty := []
    studenci := |V| + 1
    dla każdego v z V:
        dodaj {"zrzeda": |V| + 1, "nielubiany": v} do konflikty
        dla każdego w sąsiadującego z v:
            dodaj {"zrzeda": v, "nielubiany": w} do konflikty
    zwróć {"studenci": studenci, "konflikty": konflikty}

procedura przemianuj(G(V, E)):
    dla każdego i z 1...|V|:
        zmień nazwę wierzchołka V[i] na i
```

Funkcja f obliczana przez powyższy program zamienia dany graf G na instancję problemu $Tutorzy$ poprzez zamienienie każdego wierzchołka na studenta. Każdy wierzchołek v, od którego w grafie G wychodzi krawędź incydentna do wierzchołka w, staje się *zrzędą* v, która nie chce mieć tego samego tutora co student w. Dodatkowo tworzymy jednego sztucznego studenta o numerze $|V| + 1$, który nie lubi wszystkich innych studentów. Na początku wywołujemy procedurę `przemianuj`, która sprawia, że wszystkie wierzchołki mają nazwy będące liczbami z odpowiedniego zakresu.

Widać, że program działa w czasie $O(|V| \cdot |E| + T(G))$, gdzie $T(G)$ to czas działania procedury `przemianuj`, gdyż każdy wierzchołek grafu odwiedzamy jeden raz, a dla każdego wierzchołka sprawdzamy jego sąsiadów również tylko raz (w najgorszym przypadku każdy wierzchołek sąsiaduje z każdym). Dodawanie obiektów do listy można zrealizować w czasie stałym a pomocnicza procedura `przemianuj` działa w czasie wielomianowym. Funkcja f jest zatem obliczalna w czasie wielomianowym względem rozmiaru danego grafu.

Pokażemy teraz, że $\forall_G (G \in 3COL \Leftrightarrow f(G) \in Tutorzy)$:

$\Rightarrow$

Weźmy dowolny graf $G \in 3COL$. Skoro G jest 3-kolorowalny, to jeżeli dodamy do niego nowy wierzchołek v, taki że sąsiaduje z każdym innym istniejącym już wierzchołkiem, to graf ten będzie 4-kolorowalny (wystarczy wziąć dowolne 3-kolorowanie G a nowy wierzchołek pomalować na nowy, czwarty kolor). Niech G^+ będzie grafem G z dodanym wyżej opisanym wierzchołkiem v. Wówczas każdy wierzchołek z G ma odpowiadającego mu studenta w $f(G)$, zaś dodatkowy wierzchołek v odpowiada sztucznie dodanemu studentowi, który nie lubi nikogo. Każda krawędź z G^+ jest reprezentowana przez *konflikty*.

Wprowadźmy bijekcję $g : Kolor \rightarrow Tutor$, która odwzorowuje kolory na tutorów. Każdemu studentowi s możemy przydzielić tutora $g(c)$, gdzie c jest kolorem wierzchołka w z G^+ odpowiadającego studentowi s. Skoro G^+ jest 4-kolorowalny, a g jest bijekcją, to żaden student z $f(G)$ nie będzie w grupie ze studentem, którego nie lubi, czyli $f(G) \in Tutorzy$.

$\Leftarrow$

Weźmy dowolny graf G taki, że $f(G) \in Tutorzy$. Pokażemy, że $G \in 3COL$.

Niech `T` $= f(G)$ i niech H będzie grafem o poniższej konstrukcji:

- Zbiór wierzchołków grafu H to $\{1, 2, ...,$ `T.studenci`$\}$
- Dla dowolnych v i w, jeżeli `T.konflikty` zawiera `{"zrzeda":` v`, "nielubiany":` w `}`, to wówczas w H istnieje krawędź pomiędzy v a w.

H jest w oczywisty sposób 4-kolorowalny, gdyż wybór jednego spośród czterech tutorów odpowiada wyborowi jednego spośród czterech kolorów, a skoro krawędzie w grafie H opisują relację *konflikty* z obiektu `T`, to wówczas mamy gwarancję, że dwa wierzchołki o tym samym kolorze (tutorze) nie sąsiadują ze sobą w grafie H.

Z definicji f wiemy również, że w `T` istnieje student s, który jest *zrzędą* i nie lubi wszystkich innych studentów. W takim razie w H istnieje wierzchołek v, taki że jest połączony z każdym innym wierzchołkiem w tym grafie. Skoro $f(G) \in Tutorzy$, to student s jest jedynym studentem przypisanym do swojego tutora t, bo w przeciwnym razie byłby w grupie razem z kimś, kogo nie lubi. Z tego wynika, że w 4-kolorowaniu grafu H odpowiadającemu przydziałowi tutorów, wierzchołek v jako jedyny ma swój kolor c. Niech H^- będzie grafem powstałym poprzez usunięcie wierzchołka v oraz incydentnych do niego krawędzi z grafu H. W oczywisty sposób H^- jest 3-kolorowalny.

Możemy zauważyć, że $\forall_{G',H'}(f(G') = f(H') \Leftrightarrow G'$ jest izomorficzny z $H')$. Własność ta wynika z tego, że pomocnicza procedura `przemianuj` przeetykietowała jedynie wierzchołki (graf otrzymany po zaaplikowaniu `przemianuj` do grafu jest izomorficzny z oryginalnym) a dalsza część przekształcenia f jest w pełni odwracalna. Widać, że $f(G) = f(H^-)$, bo H^- powstał na podstawie $f(G)$ z odjętym wierzchołkiem, dodanym przez f. W takim razie grafy H^- oraz G są izomorficzne. Zaaplikowanie izomorfizmu nie zmienia kolorowalności grafu, więc G jest 3-kolorowalny, czyli $G \in 3COL$.

□

Podpunkt b

Teza.
Problem *Tutorzy* można rozwiązać w czasie wielomianowym, przy założeniu, że będzie co najwyżej 15 zrzęd.

Dowód.

Pokażemy, że dla dowolnej stałej liczby zrzęd Z istnieje algorytm działający w czasie wielomianowym, który rozwiązuje problem $Tutorzy$.