

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

## Lista zadań nr 6. Tydzień rozpoczynający się 1. kwietnia

### Zadania

1. Niech  $X \sim \text{Geom}(p)$  (rozkład geometryczny). Wykazać, że  $M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$ .
2. Niech  $X \sim \text{Geom}(p)$ . Korzystając z funkcji  $M_X(t)$  obliczyć  $E(X)$  oraz  $V(X)$ .
3. Dla  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$   $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .  
Udowodnić, że zachodzi  $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$ .
4. Zmienne  $X_1, \dots, X_n$  są niezależne i  $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Znaleźć funkcję tworzącą momenty  $M_{\bar{X}}(t)$  zmiennej  $\bar{X}$  ( $\bar{X}$  to średnia z  $X_1, \dots, X_n$ ), a następnie zidentyfikować rozkład zmiennej  $\bar{X}$ .  
[Z. 5–6] Zmienna  $X \sim \text{Gamma}(b, p)$  ma MGF postaci  $M_X(t) = (1 - \frac{t}{b})^{-p}$ . Odpowiedzi proszę podać w postaci tego rozkładu. Jeżeli będzie to potrzebne – proszę przyjąć, bez dowodu, że  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .
5. Niech  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Znaleźć rozkład zmiennej  $Y = \left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^2$ .
6. Zmienne  $X_1, \dots, X_n$  są niezależne a także  $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Znaleźć rozkład zmiennej  $Z_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{X_k - \mu}{\sigma}\right)^2$ .  
[Z. 7–8] Znaleźć rozkład, któremu podlega zmienna  $Z = \sum_{k=1}^n X_k$ . O występujących w tych zadaniach zmiennych zakładamy, że są niezależne. Rozwiązujemy zadania używając ”MGFy” (funkcje generujące momenty).
7.  $X_k \sim \text{Gamma}(b, p_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .
8.  $X_k \sim B(m_k, p)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .
9. Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma gęstość  $f(x, y) = \frac{15}{2}x^2y$  (na trójkącie o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$ ).  
Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej  $T = X/Y$ .
10. Zakładamy, że zysk firmy jest zmienną losową  $U$ . MGF tego zysku przedstawia się wzorem  $M_U(t) = \frac{2}{2 - 3t}$ .  
Wyznaczyć:
  - (a) wartość oczekiwaną zysku,
  - (b) wariancję zysku,
  - (c) MGF podatku od zysku, przy założeniu stopy podatkowej liniowej, 90%.
11. Zmienna losowa  $X$  ma MGF o postaci  $M_X(t)$ . Zmienna losowa  $Y$  jest pewną funkcją zmiennej  $X$ . Co można powiedzieć o  $Y$  (założenia i od jakich zmiennych zależy  $Y$ ) jeżeli:
  - (a)  $M_Y(t) = M_X(2t) \cdot M_X(4t)$ ,
  - (b)  $M_Y(t) = e^{2t} M_X(t)$ ,
  - (c)  $M_Y(t) = 4M_X(t)$ .