

# Dolne granice

## Gra z przeciwnikiem

Problem: min-max

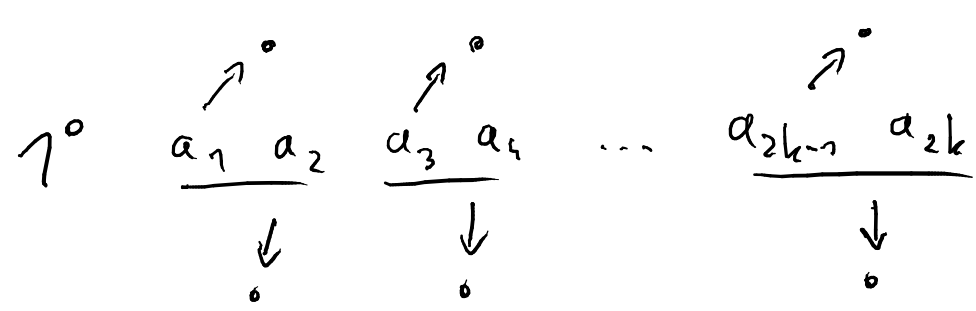
Dane:  $a_1 \dots a_n$

Wynik:  $\min\{a_i\}, \max\{a_i\}$

Algorytm naiwny:  $2n-3$  porównania

Algorytm v1

$$n=2k$$



(k porównań)

$$2^\circ \quad \min: k-1 \\ \max: k-1$$

$$T(n) = 3k-2 = \frac{3}{2}n-2$$

$$n=2k+1 \rightarrow T(n) = \lceil \frac{3}{2}n-2 \rceil$$

Tw.

Każdy algorytm rozwiązujący problem min-max

(wykonujący jedynie porównania) wykonuje  $\geq \lceil \frac{3}{2}n-2 \rceil$  porównań.

D-d

Konstruujemy grę:

Uczestnicy: algorytm, przeciwnik

Stan początkowy:

- przeciwnik twierdzi, że zna jakiś zbiór  $S = \{a_1 \dots a_n\}$  (na którym przeciwnik -algorytm- musi wykazać przynajmniej  $\lceil \frac{3}{2}n-2 \rceil$  porównań)
- algorytm nie zna  $S$  (wie tylko  $|S|=n$ )
- przeciwnik zna algorytm

Cel gry:

- algorytm: wskazanie min i max w  $< \lceil \frac{3}{2}n-2 \rceil$  porównaniach
- przeciwnik: zmuszenie algorytmu do  $\geq \lceil \frac{3}{2}n-2 \rceil$  porównań

Regły:

- algorytm: pytanie o relację między 2 elementami
- przeciwnik: odpowiedź na to pytanie (mniejszy/większy/równy)  
↑ raczej nie

Strategia przeciwnika:

Przeciwnik rozróżnia 4 podzbiory  $S$ :

$N$ : elementy, które nie były porównane

(konwencja:  $a < b \rightarrow a$  przegrał,  $b$  wygrał)

$W$ : elementy, które wygrały coś, a nie nie przegrały

$P$ : elementy, które przegrały coś, ale nie nie wygrały

$O$ : elementy, które coś przegrały i coś wygrały

Na początku:

$$|N|=n \quad |W|=|P|=|O|=0$$

Na końcu: [musi być, żeby algorytm mógł wygrać]

$$|N|=0$$

$$|W|=1$$

$$|P|=1$$

$$|O|=n-2$$

Strategia przeciwnika

$$\forall \substack{p \in P \\ n \in N \\ w \in W \\ o \in O} \cdot p < n < w \quad p < o < w$$

Fakt: jest wygrywająca

	$ N $	$ W $	$ P $	$ O $
NN	-2	+1	+1	.
NW	-1	.	+1	.
NP	-1	+1	.	.
NO	-1	.	+1	.
OW	.	.	.	.
OP	.	.	.	.
OO	.	.	.	.
PW	.	.	.	.
WW	.	-1	.	+1
PP	.	.	-1	+1

Wycinamy z  $N$  (do  $P$  i  $W$ )

przekładamy do  $O$  (z  $P$  i  $W$ )

$$\left\lceil \frac{|N|}{2} \right\rceil + n-2$$

$$T \in \{N, W, P, O\}$$

$$x:T ? y:T \rightarrow x < y$$

$$x:W ? y:P \rightarrow x > y$$

$$x:W ? y:O \rightarrow x > y$$

$$x:P ? y:O \rightarrow x < y$$

$$x:N ? y:P \rightarrow x > y$$

$$x < y \\ P+O+W$$

$$x:N ? y:W \rightarrow x < y$$

$$x:N ? y:O \rightarrow x < y$$

$$x > y \\ W+$$

