

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M8

13 grudnia 2018 r.

- M8.1.** 2 punkty Niech  $\{P_k\}$  będzie ciągiem standardowych wielomianów ortogonalnych w przedziale  $[a, b]$ , z wagą  $p(x)$ . Wykazać, że zachodzi związek rekurencyjny

$$\begin{aligned}P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x - c_1, \\P_k(x) &= (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) & (k = 2, 3, \dots),\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}c_k &= \langle xP_{k-1}, P_{k-1} \rangle / \langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle & (k \geq 1), \\d_k &= \langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle / \langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle & (k \geq 2).\end{aligned}$$

- M8.2.** 1 punkt Niech  $\bar{T}_k(x)$  będą standardowymi wielomianami ortogonalnymi w przedziale  $[-1, 1]$ , z wagą  $(1 - x^2)^{-1/2}$ . Znaleźć związek rekurencyjny spełniany przez te wielomiany.

- M8.3.** 1 punkt Jakim wzorem wyraża się  $n$ -ty wielomian optymalny dla funkcji  $f$  w sensie normy

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-1/2} f^2(x) dx}?$$

- M8.4.** 1 punkt Niech  $p_n, q_n \in \Pi_n$  będą wielomianami optymalnymi dla funkcji ciągłej  $f$  na odcinku  $[a, b]$  w sensie normy jednostajnej. Udowodnić, że  $p_n \equiv q_n$ . Co z tego wynika?

- M8.5.** 1 punkt (Część twierdzenia Czebyszewa o alternansie) Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą na odcinku  $[a, b]$ , a  $w_n$  — wielomianem stopnia nie wyższego niż  $n$ . Udowodnić, że jeśli istnieją takie  $n + 2$  punkty  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in [a, b]$ , że  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  i że
- (i)  $f(x_j) - w_n(x_j) = -[f(x_{j-1}) - w_n(x_{j-1})] \quad (j = 1, 2, \dots, n + 1)$ ,
  - (ii)  $|f(x_k) - w_n(x_k)| = \|f - w_n\|_{\infty}^{[a,b]} \quad (k = 0, 1, \dots, n + 1)$ ,
- to  $w_n$  jest  $n$ -tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji  $f$ .

- M8.6.** 1,5 punktu (Charles Jean de la Vallée-Poussin) Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą na odcinku  $[a, b]$ , a  $p_n$  — wielomianem stopnia nie wyższego niż  $n$ . Udowodnić, że jeśli istnieją takie  $n + 2$  punkty  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in [a, b]$ , że  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  i że

$$\text{sign}(f(x_j) - p_n(x_j)) = \lambda(-1)^j \quad (j = 0, 1, \dots, n + 1),$$

gdzie  $\lambda \in \{-1, 1\}$  jest ustaloną liczbą, to dla dowolnego wielomianu  $w_n \in \Pi_n$  zachodzi nierówność

$$\min_{0 \leq j \leq n+1} |f(x_j) - p_n(x_j)| \leq \|f - w_n\|_{\infty}^{[a,b]}.$$

Wynioskować, stąd, że

$$\min_{0 \leq j \leq n+1} |f(x_j) - p_n(x_j)| \leq \inf_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|_{\infty}^{[a,b]}.$$

- M8.7.** 1 punkt Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą w przedziale  $[a, b]$ . Wykazać, że dla dowolnego podprzedziału  $[c, d]$  tego przedziału zachodzi nierówność  $E_n(f; [c, d]) \leq E_n(f; [a, b])$ .

**M8.8.** 1 punkt Znaleźć 5-ty wielomian optymalny dla funkcji  $f(x) := 2018x^7 + 12x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  w sensie normy jednostajnej na przedziale  $[-1, 1]$ .

**M8.9.** 1 punkt Normę jednostajną funkcji  $f \in C[a, b]$  podaje wzór  $\|f\|_\infty \equiv \|f\|_\infty^{[a,b]} := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ . Sprawdzić, że  $n$ -ty błąd aproksymacji optymalnej funkcji  $f$  z przestrzeni  $C[a, b]$ , określony wzorem

$$E_n(f) \equiv E_n(f; [a, b]) := \inf_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|_\infty^{[a,b]},$$

ma następujące własności:

a)  $E_n(\alpha f) = |\alpha| E_n(f)$ ;

b)  $E_n(f + g) \leq E_n(f) + E_n(g)$ ;

c)  $E_n(f + w) = E_n(f)$ ;

d)  $E_n(f) \leq \|f\|_\infty$ ,

gdzie  $f, g$  są dowolnymi funkcjami z  $C[a, b]$ ,  $w$  jest dowolnym wielomianem stopnia  $\leq n$ , natomiast  $\alpha$  – dowolną liczbą rzeczywistą.

**M8.10.** 1 punkt Wyznaczyć pierwszy wielomian optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$  w przedziale  $[0, 1]$ .