Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M 1

11 października 2018 r.

M1.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech B będzie liczbą naturalną większą od 1. Wykazać, że każda niezerowa liczba rzeczywista x ma jednoznaczne przedstawienie w *postaci znormalizowanej* $x = smB^c$, gdzie s jest znakiem liczby x, c – liczbą całkowitą (*cechą*), a m – liczbą z przedziału $[1, B)$, zwaną *mantysą*.

M1.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zapoznać się ze standardem IEEE 754 (zob. np. `http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754`) Ile jest liczb zmiennopozycyjnych w arytmetyce *single*, a ile w arytmetyce *double* w tym standardzie?

M1.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Obliczyć wartość $w(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 0.149$ w punkcie $x = 4.71$ używając arytmetyki `Float16`, `Float32` i `Float64` w języku Julia. Podać błąd względny wyniku, biorąc pod uwagę wartość dokładną $w(4.71) = -14.636489$. Powtórzyć obliczenia dla równoważnego wyrażenia $w(x) = ((x - 6)x + 3)x - 0.149$. Porównać wyniki.
Podczas prezentacji należy przedstawić plik źródłowy, np. na wydruku.

M1.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dla danych: naturalnej liczby t oraz niezerowej liczby rzeczywistej $x = s\,m\,2^c$, gdzie s jest znakiem liczby x, c – liczbą całkowitą, a m – liczbą z przedziału $[1, 2)$, o rozwinięciu dwójkowym $m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_{-k}2^{-k}$, w którym $e_{-k} \in \{0, 1\}$ dla $k \geqslant 1$, definiujemy *zaokrąglenie liczby* x do $t + 1$ cyfr za pomocą wzoru

$$\mathrm{rd}\,(x) := s\,\bar{m}\,2^c,$$

gdzie $\bar{m} = 1 + \sum_{k=1}^{t} e_{-k}2^{-k} + e_{-t-1}2^{-t}$.
Wykazać, że

$$|\mathrm{rd}\,(x) - x| \leqslant 2^c\mathsf{u},$$

gdzie $\mathsf{u} := 2^{-t-1}$ jest *precyzją arytmetyki*.
Wywnioskować stąd, że błąd względny zaokrąglenia liczby x nie przekracza precyzji arytmetyki u.

M1.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że $|\alpha_j| \leqslant \mathsf{u}$ i $\rho_j \in \{-1, +1\}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz że $n\mathsf{u} < 1$, gdzie $\mathsf{u} := 2^{-t-1}$. Wykazać, że zachodzi równość

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j)^{\rho_j} = 1 + \theta_n,$$

gdzie θ_n jest wielkością spełniającą nierówność $|\theta_n| \leqslant \gamma_n$, gdzie z kolei

$$\gamma_n := \frac{n\mathsf{u}}{1 - n\mathsf{u}}.$$

M1.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Załóżmy, że $|\alpha_j| \leqslant \mathsf{u}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz że $n\mathsf{u} < 0.01$. Wykazać, że zachodzi równość

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j) = 1 + \eta_n,$$

gdzie

$$|\eta_n| \leqslant 1.01n\mathsf{u}.$$

M1.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Napisać w języku Julia funkcję odwrotną do funkcji bibliotecznej `bitstring(...)`, tzn. która dla danego słowa `s` (łańcuch 64 znaków '0' lub '1') oblicza liczbę rzeczywistą `x` typu `Float64`. *Wystarczy, aby program działał dla słów maszynowych reprezentujących liczby normalne.*

M1.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć liczbę maszynową x (`double`, w standardzie IEEE 754) z przedziału $(1, 2)$, dla której $\mathrm{fl}(x \cdot \mathrm{fl}(1/x)) \neq 1$.

4 października 2018 r.
Rafał Nowak