

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 12, стр. 144–144 (2015)

DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx

УДК 519.632.4

MSC 74Q15

ИССЛЕДОВАНИЯ И РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНЫХ  
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

С.Ю. ПОЛИЩУК

**ABSTRACT.** The effective thermal conductivities of composite materials are computed via a numerical scheme on the basis of multiscale discontinuous Galerkin methods. Numerical experiments are conducted in three dimensional space. The computational scheme is verified using standard finite element method. Different concentrations and properties are examined. The results are compared with the results obtained from theoretical models.

**Keywords:** homogenization, multiscale methods, discontinuous Galerkin, effective coefficient.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В математике и физике гомогенизация может быть определена как процесс замены уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами на уравнения со взвешенными осредненными коэффициентами (эффективными характеристиками). Получение эффективных свойств композитных материалов имеет важное значение во многих инженерных приложениях. В настоящее время существует большое количество теоретических и эмпирических моделей, но большинство из них имеют существенные ограничения по классу решаемых задач и применимы лишь для некоторых частных случаев. Использование же современных методов математического моделирования позволяет проводить гомогенизацию среды с учётом всех её особенностей, таких как распределение, форма, ориентация и контрастность включений. С развитием вычислительной техники численная гомогенизация на основе многомасштабных методов стала весьма популярна и в настоящее время используется для получения эффективных характеристик совершенно различных объектов [47, 46].

POLISHCHUK, S.Y., NUMERICAL HOMOGENIZATION ON THE BASIS OF MULTISCALE DISCONTINUOUS GALERKIN METHODS TO DETERMINE THE EFFECTIVE THERMAL CHARACTERISTICS.

© 2016 Полищук С.Ю.

В работе были проведены исследования и расчет эффективного коэффициента теплопроводности сред с контрастными мелкомасштабными включениями. Для решения задачи был выбран многомасштабный разрывный метод Галёркина. Метод предоставляет большие возможности моделирования процессов в средах с любыми включениями за счёт использования базисных функций специального вида, имеет естественную параллельную структуру, а также предоставляет возможности гибкого использования несогласованных сеток и работу с различным порядком базисных функций.

## 2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Задача получения эффективных характеристик восходит как минимум к началу 19 века [22]. Впервые аналитические формулы были представлены в работах Пуассона [39], Максвелла [34] и Рэлея [40]. В 1881 Максвелл [34] получил аналитическое представление для вычисления эффективной проводимости сред с небольшой концентрацией случайно разбросанных включений. Рэлей [40] исследовал схожую задачу для сред с периодической структурой в 1892. В 1906 Эйнштейн [23] исследовал эффективную вязкость суспензий с твёрдыми сферическими частицами в несжимаемых вязких жидкостях.

В 1930 Войт [45] рассчитал эффективные параметры тензора жёсткости для поликристаллов с помощью осреднения значений по объёму и ориентациям, в то время как Реусс [42] использовал осреднение для расчёта обратного тензора для той же проблемы. Позже Хилл [24, 25] и П'ишинуа [30] строго доказали, что методы Войта и Реусса дают верхнюю и нижнюю оценку этих эффективных характеристик.

Первая асимптотически точная схема для расчёта эффективных параметров ламинированных сред была представлена в 1946 Лифшицем [31] и Розентсвейгом [32]. В дальнейшем в 1964 Марченко и Хруслов [33] представили общий подход базирующийся на асимптотических приближениях, охватывающий большое количество физических задач, включая краевые задачи в областях с мелкозернистой границей.

С ранних 70-х дальнейшее развитие математических исследований явлений в гетерогенных средах были проделаны с помощью осреднения дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и первые результаты были представлены в [3, 7, 8, 9, 11, 12, 16, 35, 44].

Само же название "гомогенизация" было предложено Бабушкой в 1974 [4]. Некоторое количество методов гомогенизации, основанные на специальных асимптотических способах усреднения дифференциальных операторов для идеализированных структур, было разработано в 70-ых годах, и, таким образом, гомогенизация стала предметом исследований в математике.

Другой подход к решению задачи определения эффективных характеристик позволяет реализовывать численная гомогенизация на базе конформных

и неконформных конечноэлементных методах. Численные гомогенизации на базе классических конечноэлементных методах (МКЭ (CG)) практически невозможно использовать для решения реальных задач из-за катастрофически возрастающей размерности дискретных аналогов [19]. В связи с этим в настоящее время применяется численная гомогенизация на основе многомасштабных методов, активное развитие которых началось с 1990-х годов [6]. Методы допускают высокую степень распараллеливания и обеспечивают значительное сокращение времени решения дискретной задачи без потери точности определения эффективного коэффициента [48, 49]. К примеру, в работах [1, 5, 15, 18, 21, 26, 27, 28, 37, 38, 43] исследуются свойства многомасштабных методов при решении абстрактной эллиптической задачи в условиях сильно-контрастных осциллирующих коэффициентов. Среди приложений можно выделить задачи течения жидкости в пористых средах, определения электромагнитных, теплофизических характеристик композитных материалов [13, 17].

### 3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

**3.1. Математическая модель.** Процесс стационарного теплообмена в образце с контрастными включениями описывается эллиптическим уравнением следующего вида:

$$(1) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}(\lambda(x) \operatorname{grad} u) &= f \quad \text{в объёме } \Omega, \\ u &= \gamma \quad \text{на границе } \Gamma_1, \\ -\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{на границе } \Gamma_2, \end{aligned}$$

где  $\Omega$  — выпуклая область,  $\lambda(x)$  — коэффициент диффузии,  $f \in L_2(\Omega)$ , и  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

Многомасштабный разрывный метод Галёркина основан на том, что многомасштабная структура решения отражается в локализованных базисных функциях. Данный метод использует декомпозицию пространства решения на “грубое” подпространство, отвечающее за эффективные свойства среды и имеющее низкую размерность, и на “мелкое”, позволяющее точно учитывать контрастные характеристики включений. На каждом из подпространств необходимо решать разные задачи, поэтому далее приводятся вариационные формулировки для каждой из них в отдельности.

**3.2. Вариационная постановка на макроуровне.** Многомасштабные базисные функции являются решением следующей дополнительной задачи:

$$(2) \quad \begin{aligned} \nabla(\lambda \nabla \phi) &= 0 \quad \text{в } K, \\ \phi &= \mu_i \quad \text{на } \partial K, \end{aligned}$$

Для того чтобы найти эти базисные функции, рассмотрим Гильбертово пространство  $H^1(K)$  функций, определённых в области макроэлемента  $K$ , с нормой и скалярным произведением следующего вида:

$$(3) \quad \|u\|_{H^1(K)}^2 = (u, u)_{H^1(K)},$$

$$(4) \quad (u, v)_{H^1(K)} = \int_K (uv + \nabla u \cdot \nabla v) \, dK.$$

Введём подпространство

$$H_0^1(K) = \{u \in H^1(K) : u|_{\partial K} = 0\} \subset H^1(K),$$

где  $\partial K$  — внешняя граница макроэлемента  $K$ .

Также введём подпространство

$$V_f(K) = \{u \in H^1(K) : u|_S = \mu\} \subset H^1(K).$$

Сформулируем слабую вариационную постановку для задачи (2):  
найти  $\phi \in V_f(K)$  такое, что  $\forall \hat{\phi} \in H_0^1(K)$  выполняется

$$(5) \quad \int_K (\lambda \nabla \phi \cdot \nabla \hat{\phi}) dK = 0.$$

В работе для решения вариационной задачи (5) определяется разбиение макроэлемента  $K$  на микроэлементы (тетраэдры). Для построения тетраэдральной сетки используется триангулятор Gmsh [20]. На каждом тетраэдре определены стандартные базисные функции  $\{\phi_1^{loc}, \dots, \phi_m^{loc}\}$  через барицентрические координаты. Тогда на каждом конечном макроэлементе многомасштабная базисная функция  $\phi$  может быть представлена в виде линейной комбинации локальных базисных функций  $\phi = \sum_i \alpha_i \phi_i^{loc}$ , как решение дискретной задачи (5) и как линейная комбинация базисных функций, определённых на макроэлементе  $\phi = \sum_k \beta_k \phi_k$ .

Общий алгоритм метода выглядит следующим образом: Значение эффек-

---

**Algorithm 1** Общее решение задачи

---

- 1: Определить грубое разбиение области с учётом мелкомасштабных включений
  - 2: **for**  $i = 1 \dots M$ , где  $M$  — количество макроэлементов **do**
  - 3:   **if** макроэлемент содержит включения **then**
  - 4:     разбить  $K_i$  макроэлемент на микроэлементы
  - 5:     **for**  $j = 1 \dots D_m$ , где  $D_m$  — количество степеней свободы макроэлемента **do**
  - 6:       Решить  $\nabla(\lambda \nabla \phi_j^{K_i}) = 0$  с краевыми условиями  $\phi_j^{K_i} = \mu_j$
  - 7:        $j := j + 1$
  - 8:     **end for**
  - 9:   **end if**
  - 10:    $i := i + 1$
  - 11: **end for**
  - 12: Собрать глобальную матрицу и вектор правой части для макромасштабной сетки в идеологии разрывного метода Галёркина
  - 13: Решить глобальную СЛАУ
  - 14: Вычислить эффективный коэффициент теплопроводности
- 

тивного коэффициента теплопроводности образца определяется по соотношению [19]:

$$(6) \quad \lambda_e = \frac{\int_{\Omega} \lambda \nabla T \nabla T d\Omega}{\left(\frac{T_2 - T_1}{L_1}\right)^2 L_1 L_2 L_3},$$

где тепловые потоки и температурное поле было вычислено многомасштабным разрывным методом Галёркина,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  – линейные размеры образца,  $T_1$ ,  $T_2$  – температуры верхней и нижней граней.

#### 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

**4.1. Среды с внутренней периодической структурой.** Для исследований был рассмотрен образец (рисунок 1) размером  $1\text{ м} \times 1\text{ м} \times 1\text{ м}$ , имеющий сферические включения радиусом  $0.05\text{ м}$ . На верхней и нижней гранях заданы постоянные температуры:  $T_1 = 280\text{ К}$  и  $T_2 = 260\text{ К}$ , остальные грани теплоизолированы. Коэффициент теплопроводности  $\lambda_0$  скелета был равен единице, в то время как коэффициент включений  $\lambda_d$  варьировался от  $10^{-7}\text{ Вт/м К}$  до  $10^{-3}\text{ Вт/м К}$ . Макросетка строилась таким образом, что каждый макроэлемент (параллелепипед) включал в себя только одно сферическое включение (рисунок 2). На рисунке 3 изображено сечение многомасштабной базисной функции для  $\lambda_d = 10^{-3}\text{ Вт/м К}$  включения. На рисунке 4 показано распределение теплового поля для  $7 \times 7 \times 7$  включений в плоскости  $y = 0.5$ .

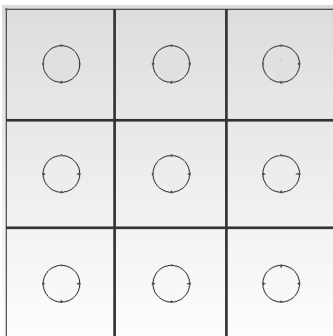


Рис. 1. Разбиение области на макроэлементы

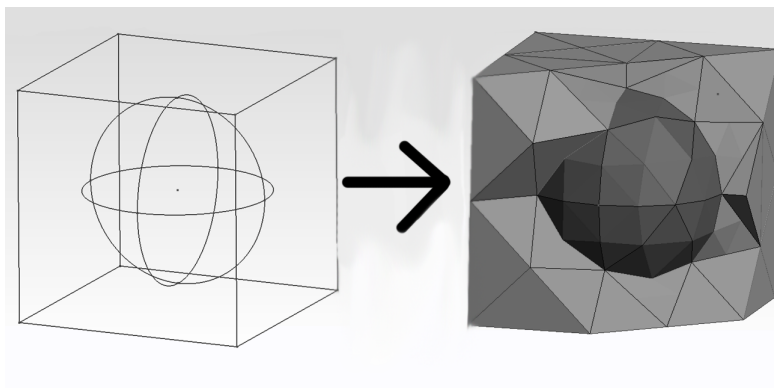
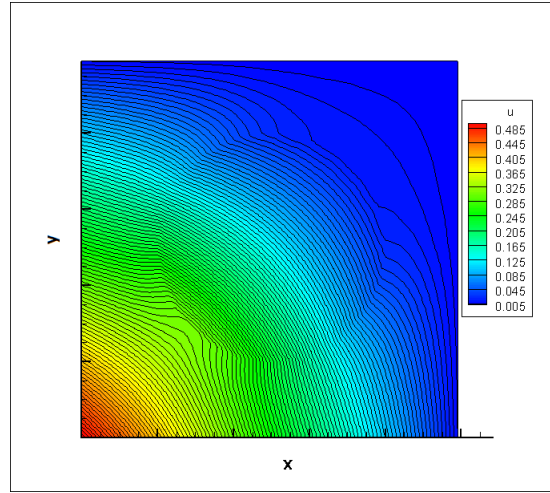
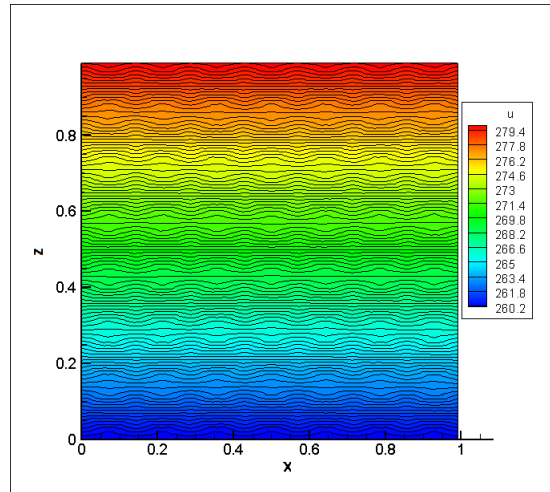


Рис. 2. Макроэлемент и его внутреннее разбиение

Рис. 3. Многомасштабная базисная функция в сечении  $z = 0.5$ Рис. 4. Распределение теплового поля с 343 включениями в плоскости  $y = 0.5$ 

В таблице 1 приведено сравнение времени вычислений многомасштабного разрывного метода Галёркина (MDG) с классическим методом конечных элементов (FEM) для решения задачи теплопроводности в области с микровключениями различной концентрации. За точное решение принималось решение полученное классическим методом конечных элементов на мелкой сетке, для которого выполнялось условие:

$$\frac{\|u_{h/2} - u_h\|_{L_2}}{\|u_{h/2}\|_{L_2}} \leq 10^{-5}.$$

Как видно из таблицы MDG метод даёт заметное преимущество при увеличении количества микровключений, нежели метод конечных элементов.

ТАБЛИЦА 1. Сравнение по времени вычислений

Количество включений	$\lambda_d$ , Вт/м К	$t_{FEM}$ , с	$t_{MDG}$ , с
$3 \times 3 \times 3 = 27$	1e-3	4.2	10.2
	1e-5	4.4	12.8
	1e-7	5.0	15.1
$4 \times 4 \times 4 = 64$	1e-3	30.8	24.9
	1e-5	32.6	27.6
	1e-7	35.2	34.2
$5 \times 5 \times 5 = 125$	1e-3	108.4	38.5
	1e-5	116.1	39.3
	1e-7	120.9	42.7
$6 \times 6 \times 6 = 216$	1e-3	231.0	65.8
	1e-5	243.1	66.2
	1e-7	259.0	68.9
$7 \times 7 \times 7 = 343$	1e-3	408.2	152.3
	1e-5	436.7	154.4
	1e-7	459.1	160.8
$8 \times 8 \times 8 = 512$	1e-3	1021.7	236.1
	1e-5	1105.4	248.1
	1e-7	1193.71	251.6

В таблице 2 приведены значения эффективного коэффициента теплопроводности  $\lambda_e$ , вычисленных MDG методом и полученных по эмпирическим формулам. Численные решения сравнивались с расчётными аналитическими зависимостями по наиболее распространённым моделям теплопроводности композитных материалов.

Модель Максвелла (в таблице обозначается как  $\lambda_{ml}$ ) [34]:

$$(7) \quad \lambda_e^* = (2 + \lambda_d^* - 2\xi(1 - \lambda_d^*)) / (2 + \lambda_d^* + \xi(1 - \lambda_d^*)),$$

где  $\lambda_e^* = \lambda_e / \lambda_0$ ,  $\lambda_d^* = \lambda_d / \lambda_0$  и  $\xi$  — объёмная доля включений,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_d$  — коэффициенты теплопроводности основного материала и включений.

Модель Бруггемана (в таблице обозначается как  $\lambda_{bn}$ ) [14]:

$$(8) \quad \lambda_e^{*1/3}(1 - \xi) = (\lambda_e^* - \lambda_d^*) / (1 - \lambda_d^*).$$

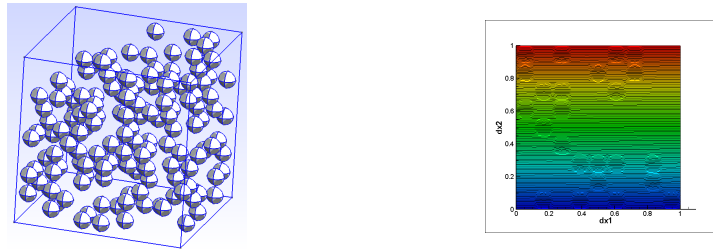
Модель Мередита и др. (в таблице обозначается как  $\lambda_{mh}$ ) [36]:

$$(9) \quad \begin{aligned} \lambda_e^* &= (2 + 2x\xi)(2 + \xi(2x - 1)) / (2 - x\xi)(2 - \xi(x + 1)), \\ x &= (\lambda_d^* - 1) / (\lambda_d^* + 2). \end{aligned}$$

ТАБЛИЦА 2. Сравнение с аналитическими выражениями

Количество включений	Занимаемый объём, %	$\lambda_d$	$\lambda_{MDG}$	$\lambda_{ml}$	$\lambda_{bn}$	$\lambda_{mh}$
27	1.4	1e-3	0.97909	0.97918	0.97910	0.97914
		1e-5	0.97908	0.97915	0.97907	0.97911
		1e-7	0.97908	0.97915	0.97907	0.97911
64	3.4	1e-3	0.95107	0.95138	0.95098	0.95118
		1e-5	0.94959	0.94985	0.94944	0.94965
		1e-7	0.94959	0.94985	0.94944	0.94965
125	6.5	1e-3	0.90496	0.90571	0.90425	0.90499
		1e-5	0.90482	0.90557	0.90410	0.90485
		1e-7	0.90481	0.90557	0.90410	0.90485
216	11.3	1e-3	0.83774	0.83979	0.83563	0.83778
		1e-5	0.83748	0.83957	0.83539	0.83756
		1e-7	0.83747	0.83957	0.83538	0.83755
343	18.0	1e-3	0.75797	0.75263	0.74293	0.74805
		1e-5	0.75753	0.75230	0.74255	0.74772
		1e-7	0.75752	0.75229	0.74254	0.74771
512	26.8	1e-3	0.65278	0.64597	0.62684	0.63722
		1e-5	0.65122	0.64551	0.62628	0.63678
		1e-7	0.65120	0.64550	0.62628	0.63677

**4.2. Среды с внутренней неперIODической структурой.** Исследуем поведение эффективного коэффициента теплопроводности в зависимости от внутренней структуры среды. Для этого рассмотрим несколько образцов с хаотическим расположением включений сферической формы радиусом 0.05 м. На рисунках 5-7 изображены поведения решения в сечениях  $y = 0.5$  для различных концентраций включений.

Рис. 5.  $V = 8.7\%$ ,  $\lambda_d = 10^{-2}$ 

Как видно из таблицы 3 значения эффективного коэффициента теплопроводности, полученного с помощью MDG отличаются от значений, полученных через эмпирические выражения. Это может объясняться тем, что аналитические выражения не учитывают внутреннюю структуру среды и пригодны лишь для узкого класса задач.



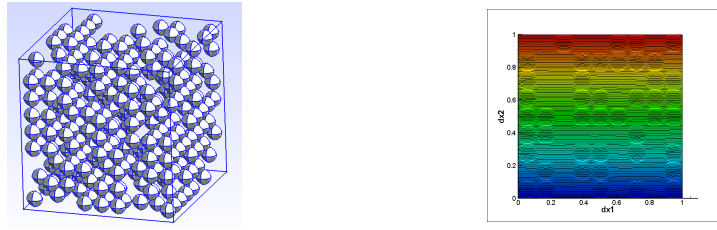
Рис. 6.  $V = 18.3\%$ ,  $\lambda_d = 10^{-2}$ Рис. 7.  $V = 36.1\%$ ,  $\lambda_d = 10^{-2}$ 

ТАБЛИЦА 3. Эффективные характеристики для сред с неперидической структурой

Занимаемый объём, %	$\lambda_d$	$\lambda_{MDG}$	$\lambda_{ml}$	$\lambda_{bn}$	$\lambda_{mh}$
2.1	1e1	1.05898	1.04801	1.189	1.04845
	1e-2	0.978766	0.969288	0.969134	0.969208
8.7	1e1	1.24548	1.20941	1.783	1.21783
	1e-2	0.913334	0.876730	0.874285	0.875481
18.3	1e1	1.53192	1.47725	2.647	1.52035
	1e-2	0.81836	0.751954	0.742370	0.747187
36.1	1e1	2.08358	2.11382	4.249	2.34219
	1e-2	0.643713	0.57076	0.544296	0.55816

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы был проведён расчёт эффективного коэффициента теплопроводности трёхмерных гетерогенных сред с контрастными мелкомасштабными включениями с помощью многомасштабного разрывного метода Галёркина. Разработанный и реализованный алгоритм MDG метода для решения задачи теплопроводности в среде с мелкомасштабными контрастными включениями был верифицирован на классе модельных задач. Для среды с регулярным расположением включений с контрастными коэффициентами теплопроводности был проведен сравнительный анализ вычисленного MDG эффективного коэффициента теплопроводности с эффективными коэффициентами, полученных с помощью эмпирических соотношений. Для заданного периодического расположения включений все эмпирические соотношения применимы и полученные оценки совпали. Реализованный метод востребован особенно тогда, когда

структура включений имеет хаотичное распределение, для которой эмпирические соотношения не применимы. В дальнейшем планируется провести валидацию разработанной вычислительной схемы, воспользовавшись данными измерений, полученными в институте теплофизики СО РАН.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю к. т. н., доценту Н. Б. Иткиной, а также профессору кафедры вычислительных технологий Новосибирского Государственного Технического Университета д. т. н. Э. П. Шуриной.

#### REFERENCES

- [1] G. Allaire, R. Brizzi, *A multiscale finite element method for numerical homogenization*, SIAM MMS, **4** (2005), 790–812.
- [2] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, D. Marini, *Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal., **39** (2002), 1749–1779.
- [3] I. Babuska, *Homogenization approach in engineering*, *Lecture notes in economics and mathematical systems*, M Beckman and H.P. Kunzi (eds.), Springer-Verlag (1975), 137–153.
- [4] I. Babuska, *Solution of problem with interfaces and singularities*, in *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations*, C. de Boor ed., Academic Press, New York (1974), 213–277.
- [5] I. Babuska, R. Lipton, *Optimal Local Approximation Spaces for Generalized Finite Element Methods with Application to Multiscale Problems*, Tech. Rep. ICES, The University of Texas at Austin, 2010.
- [6] I. Babuska, M. Melenk, *The Partition of Unity Method*, Int. J. Numer. Meths. Eng., **40** (1997), 727–758.
- [7] N.S. Bakhvalov, *Averaged characteristics of bodies with periodic structure*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR, **218** (1974), 1046–1048.
- [8] N.S. Bakhvalov, *Averaging of nonlinear partial differential equations with rapidly oscillating coefficients*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR, **225** (1975), 249–252.
- [9] N.S. Bakhvalov, *Averaging of partial differential equations with rapidly oscillating coefficients*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR, **221** (1975), 516–519.
- [10] C.E. Baumann and J.T. Oden, *A discontinuous hp finite element method for convection-diffusion problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **175** (1999), 311–341.
- [11] A. Bensoussan, J.L. Lions and G. Papanicolaou, *Sur quelques phénomènes asymptotiques stationnaires*, C. R. Acad. Sci. Paris **281** (1975), 89–94.
- [12] A.L. Berdichevskii, *Spatial averaging of periodic structures*, DAN SSSR, **222** (1975), 565–567.
- [13] P. Bochev, *A Mathematical Framework for Multiscale Science and Engineering: The Variational Multiscale Method and Interscale Transfer Operators*, SAND REPORT. **2871** (2004), 1–20.
- [14] D.A.G. Bruggeman, *Berechnung verschiedener physikalischer konstanten von heterogenen substanzen*, Ann. Physik., **24** (1935), 636–664.
- [15] C.C. Chu, I. Graham, T. Hou, *A New Multiscale Finite Element Method for High-Contrast Elliptic Interface Problems*, Math. Comput. **79** (2010), 1915–1955.
- [16] E. De Giorgi and S. Spagnolo, *Convergence of integrals of energy for elliptic operators of the second order*, Boll. Un. Mat. Ital., **8** (1973), 391–411.
- [17] Y. Efendiev, V. Ginting, T. Hou, *Accurate multiscale finite element methods for two-phase flow simulations*, Journal of Computational Physics. **220** (2006), 155–174.
- [18] Y.R. Efendiev, T.Y. Hou, X.H. Wu, *Convergence of a nonconforming multiscale finite element method*, SIAM J. Numer. Anal. **37** (2000), 888–910.
- [19] M.I. Epov, V.I. Terekhov, M.I. Nizovtsev, E.P. Shurina, N.B. Itkina, E.S. Ukolov, *Effective thermal conductivity of dispersed materials with contrast inclusions*, High Temperature. **53** (2015), 45–50. - DOI: 10.1134/S0018151X15010046.

- [20] C. Geuzaine, J.F. Remacle, *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*, International Journal for Numerical Methods in Engineering. **79** (2009), 1309–1331.
- [21] A. Gilbert, *A Comparison of Multiresolution and Classical One-dimensional Homogenization Schemes*, Applied and computational harmonic analysis. **5** (1998), 1–35.
- [22] Hermann Douanla, *Two-scale Convergence and Homogenization of Some Partial Differential Equations*, University of Gothenburg, April 2013.
- [23] A. Einstein, Ann. Phys., **19**, **289** (1906).
- [24] R. Hill, *Elastic properties of composite media, some theoretical principles*, Mechanics, **5** (1964), Collection of translations.
- [25] R. Hill, *Theory of mechanical properties of fibers-strengthened materials*, Journ. Mech. Phys. Solids **12** (1964), 199–218.
- [26] T.Y. Hou, X.H. Wu, *A Multiscale Finite Element Method for Elliptic Problems in Composite Materials and Porous Media*, Journal of Computational Physics. **134** (1997), 169–189.
- [27] T.Y. Hou, X.H. Wu, Z. Cai, *Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients*, Mathematics of Computation. **68** (1999), 913–943.
- [28] T.Y. Hou, X.H. Wu, Y. Zhang, *Removing the cell resonance error in the multiscale finite element method via a Petrov-Galerkin formulation*, Comm. Math. Sci. **2** (2004), 185–205.
- [29] T.J.R. Hughes, G.R. Feijoo, L. Mazzei, J-B. Quincy J-B, *The variational multiscale method a paradigm for computational mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **166** (1998), 3–24.
- [30] E.A. Il'iushina, *A version of moment plasticity theory for a one-dimensionnal continuous medium of inhomogeneous periodic structure*, P.P.M., **36** (1972), 1086–1093.
- [31] I.M. Lifshits and L.N. Rozentsveig, *On the theory of elastic properties of polycrystals*, ZhETF, **16** (1946).
- [32] I.M. Lifshits and L.N. Rozentsveig, *On the construction of Green's tensor for the basic equation of elasticity theory in the case of an unbounded elastic anisotropic medium*, ZhETF, **17** (1947).
- [33] V.A. Marchenko and E.Y. Khruslov, *Boundary-value problems with fine-grained boundary*, Mat. Sb. (N.S.), **65(107)** (1964), 458–472.
- [34] J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, 3rd Ed., Clarendon Press, Oxford, 1881.
- [35] O.A. Oleinik, *On the convergence of solutions of elliptic and parabolic equations with weak convergence of the coefficients*, UMN, **30** (1975), 257–258.
- [36] R.E. Meredith, C.W. Tobias, *Conductivity of Emulsions*, J.Electroch. Soc. **103** (1961), 286.
- [37] P. Ming, X. Yue, *Numerical methods for multiscale elliptic problems*, Journal of Computational Physics. **214** (2006), 421–445.
- [38] M. Picasso, J. Rappaz, V. Rezzonico, *Multiscale algorithm with pathces of finite elements*, Commun. Numer. Meth. Engng. **24** (2008), 477–491.
- [39] S. Poisson, *Second memory on the theory of magnetism*, Mem. Acad. France, **5** ( 1822).
- [40] J.W. Rayleigh, *On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium*, Phil. Mag., (1892), 481–491.
- [41] W.H. Reed and T.R. Hill, *Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation*, Tech. Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, NM, 1973.
- [42] A. Reuss, *Calculation of the flow limit of mixed crystals due to the plasticity condition for monocrystals*, Z. Angew. Math. und Mech., **9** (1929), 49–58.
- [43] B. Engquist, P. Lotstedt, O. Runborg, *Wavelets and Wavelet Based Numerical Homogenization*, Springer, Lecture Notes in Computational Science and Engineering., **66** (2009), 195–235.
- [44] E. Sanchez-Palencia, *Local and macroscopic behavior of a type of physical heterogeneous media*, Intern. Jour. Engin. Sci., **12** (1974), 331–351.
- [45] W. Voight, *Textbook of Crystallophysics*, Berlin, Teubner, 1928.
- [46] Y.I. Shokin, E.P. Shurina, N.B. Itkina, *Modern multigrid methods. Part I. Multiscale methods*, Novosibirsk, NSTU, 2009.
- [47] Y.I. Shokin, E.P. Shurina, N.B. Itkina, *Modern multigrid methods. Multilevel methods. Application of multiscale methods*, Novosibirsk, NSTU, 2012.

- [48] M.I. Epov, E.P. Shurina, M.K. Artemyev, *Numerical homogenization of electric characteristics of media with contrast small-scale inclusions*, Dokl. Akad. Nauk, **442** (2012), 118.
- [49] M.I. Epov, E.P. Shurina, M.K. Artemyev, *Numerical homogenization of multiscale heterogeneous media*, Geophysic Journal, NAN Ukraine, **34** (2012), 16.

STANISLAV YURIEVICH POLISHCHUK  
NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY,  
PR. K. MARKSA, 20,  
630073, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*E-mail address:* `exsidia@gmail.com`