

ma Σ prof \int .ru

Высшая математика – просто и доступно!

**Интенсивный курс
«Как найти производную?»**

*Данная методичка позволяет в кратчайшие сроки (буквально часы) **научиться дифференцировать (находить производные)** функции одной переменной. Материал предназначен для учащихся средней школы и студентов-заочников с начальным уровнем подготовки.*

Автор: Александр Емелин

Оглавление

1. Как найти производную?	3
2. Производная сложной функции	11
3. Производная очень сложной функции :)	19
4. Логарифмическая производная	27
5. Производные второго и более высоких порядков	31
6. Производная функции, заданной неявно	36
7. Производная параметрически заданной функции	41
8. Решения и ответы	45

1. Как найти производную?

Или, что то же самое, **как взять производную?** Для прохождения этого интенсивного курса нам потребуются *Приложения Горячие школьные формулы и Правила дифференцирования и таблица производных*. По возможности их лучше распечатать (особенно второе) и положить рядышком – чтобы справочные материалы постоянно были под рукой, перед глазами и в сердце =)

Есть? Приступим. У меня для вас есть **две новости**: хорошая и очень хорошая.

Хорошая новость состоит в следующем: чтобы научиться находить производные совсем не обязательно знать и понимать, что такое производная. И очень хорошая новость состоит в том, что научиться брать производные не так сложно – существует довольно чёткий алгоритм решения (и объяснения) этого задания. Интегралы или пределы, например, освоить труднее.

В рамках данной методички я не буду останавливаться на понятии производной, а попытаюсь в доступной форме, шаг за шагом, **научить вас находить** эти самые производные. Вся информация изложена подробно, простыми словами. Собственно, сразу рассмотрим пример:

Пример 1

Найти производную функции $y = \sqrt{x}$. И здесь нужно сделать **немедленное замечание**: функцию можно равноценно записать через $f(x) = \sqrt{x}$, однако, на практике чаще встречается «игрек», и поэтому я буду пользоваться буквой «игрек».

Решение: $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Это простейший пример, пожалуйста, найдите его в таблице производных. До сих пор не под рукой?! ...Ай-яй-яй..., негоже пренебрегать рабочей таблицей!

Теперь посмотрим на решение и проанализируем, что же произошло? А произошла следующая вещь: у нас была функция $y = \sqrt{x}$, которая в результате решения превратилась в функцию $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Говоря совсем просто, для того чтобы найти производную функции, нужно по определенным правилам превратить её в другую функцию. Посмотрите еще раз на таблицу производных – там функции превращаются в другие функции. Единственным исключением является экспоненциальная функция $y = e^x$, которая превращается сама в себя.

Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Обозначения: производную обозначают y' , $f'(x)$ или $\frac{dy}{dx}$

Вернемся к нашей таблице производных. Из данной таблицы желательно **запомнить наизусть**: правила дифференцирования и производные некоторых элементарных функций, особенно:

производную константы:

$$(C)' = 0, \text{ где } C - \text{постоянное число};$$

производную степенной функции:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \text{ в частности: } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x)' = 1, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Зачем запоминать? Данные знания являются элементарными знаниями о производных. И если вы не сможете ответить преподавателю на вопрос «Чему равна производная числа?», то учеба в ВУЗе может для вас закончиться (лично знаком с двумя подобными случаями из жизни). Кроме того, это наиболее распространенные формулы, которыми приходится пользоваться практически каждый раз, когда мы сталкиваемся с производными.

В реальности простые табличные примеры – редкость, обычно при нахождении производных **сначала** используют правила дифференцирования, а **затем** – таблицу.

В этой связи переходим к рассмотрению **правил дифференцирования**:

1) Постоянное число можно (и нужно) вынести за знак производной

$$(Cu)' = Cu', \text{ где } C - \text{постоянное число (константа)}$$

Пример 2

Найти производную функции $y = 3 \cos x$

Смотрим в таблицу производных. Производная косинуса там есть, но у нас $3 \cos x$.

Решаем:

$$y' = (3 \cos x)'$$

Самое время использовать правило, выносим постоянный множитель за знак производной:

$$y' = (3 \cos x)' = 3(\cos x)'$$

А теперь превращаем наш косинус по таблице:

Ну и результат желательно немного «причесать» – ставим минус на первое место, заодно избавляясь от скобок:

2) Производная суммы равна сумме производных

$$(u + v)' = u' + v'$$

! Напоминаю, что разность всегда можно представить в виде суммы:

$u - v = u + (-v)$, следовательно: $(u - v)' = (u + (-v))' = u' + (-1 \cdot v)' = u' - v'$ (по Правилу 1)

Данное правило, очевидно, справедливо не только для двух, но и для большего количества слагаемых:

Пример 3

Найти производную функции $y = 6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11\operatorname{ctgx}$

Решаем. Как вы, наверное, уже заметили, **первое действие**, которое всегда выполняется при нахождении производной, состоит в том, что мы заключаем в скобки всё выражение и ставим штрих справа сверху:

$$y' = \left(6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11\operatorname{ctgx} \right)'$$

Применяем второе правило:

$$\begin{aligned} y' &= \left(6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11\operatorname{ctgx} \right)' = \\ &= (6)' + (x)' + (3x^2)' - (\sin x)' - \left(2x^{\frac{1}{3}} \right)' + (x^{-2})' - (11\operatorname{ctgx})' \end{aligned}$$

Обратите внимание, что для дифференцирования все корни, степени нужно представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$, а если они находятся в знаменателе, то переместить их вверх. Как это сделать – рассмотрено в *Приложениях*.

Теперь вспоминаем о первом правиле дифференцирования – постоянные множители (числа) выносим за знак производной:

$$\begin{aligned} y' &= \left(6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11\operatorname{ctgx} \right)' = \\ &= (6)' + (x)' + (3x^2)' - (\sin x)' - \left(2x^{\frac{1}{3}} \right)' + (x^{-2})' - (11\operatorname{ctgx})' \end{aligned}$$

Обычно в ходе решения эти два правила применяют одновременно (чтобы не переписывать лишний раз длинное выражение).

Все функции, находящиеся под штрихами, являются элементарными табличными функциями, с помощью таблицы осуществляем превращение:

$$\begin{aligned}
y' &= \left(6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11 \operatorname{ctgx} \right)' = \\
&= (6)' + (x)' + (3x^2)' - (\sin x)' - \left(2x^{\frac{1}{3}} \right)' + (x^{-2})' - (11 \operatorname{ctgx})' = \\
&= (6)' + (x)' + 3(x^2)' - (\sin x)' - 2 \left(x^{\frac{1}{3}} \right)' + (x^{-2})' - 11(\operatorname{ctgx})'
\end{aligned}$$

Можно всё оставить в таком виде, так как штрихов больше нет, и производная найдена. Тем не менее, подобные выражения обычно упрощают:

$$\ldots = 1 + 6x - \cos x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \frac{11}{\sin^2 x}$$

Все степени вида $x^{\frac{a}{b}}$ желательно снова представить в виде корней, степени с отрицательными показателями – сбросить в знаменатель. Хотя этого можно и не делать, ошибкой не будет.

Пример 4

Найти производную функции $y = 5 \ln x + \frac{2}{\sqrt[5]{x^7}} + \operatorname{arctgx} - \lg 20 \cdot 2^x + \operatorname{tg} 3$

Попробуйте решить данный пример самостоятельно.

3) Производная произведения функций

Вроде бы по аналогии напрашивается формула $(uv)' = u'v' \dots$, но неожиданность состоит в том, что:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Эта необычное правило (как, собственно, и другие) следует из определения производной, но с теорией мы пока повременим – сейчас важнее научиться решать:

Пример 5

Найти производную функции $y = x^3 \arcsin x$

Здесь у нас произведение двух функций, зависящих от x . Сначала применяем наше странное правило, а затем превращаем функции по таблице производных:

$$\begin{aligned}
y' &= (x^3 \arcsin x)' = (x^3)' \arcsin x + x^3 (\arcsin x)' = \\
&= 3x^2 \arcsin x + x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Сложно? Вовсе нет, вполне доступно даже для чайника.

Пример 6

Найти производную функции $y = (x^2 + 7x - 1) \log_3 x$

В данной функции содержится произведение двух функций – квадратного трехчлена $(x^2 + 7x - 1)$ и логарифма $\log_3 x$. Со школы мы помним, что умножение и деление имеют приоритет перед сложением и вычитанием.

Здесь всё так же. **СНАЧАЛА** мы используем правило дифференцирования произведения:

$$y' = ((x^2 + 7x - 1) \log_3 x)' = (x^2 + 7x - 1)' \log_3 x + (x^2 + 7x - 1)(\log_3 x)'$$

Теперь для скобки $(x^2 + 7x - 1)'$ используем два первых правила:

$$\begin{aligned} y' &= ((x^2 + 7x - 1) \log_3 x)' = (x^2 + 7x - 1)' \log_3 x + (x^2 + 7x - 1)(\log_3 x)' = \\ &= ((x^2)' + 7(x)' - (1)') \log_3 x + (x^2 + 7x - 1)(\log_3 x)' \end{aligned}$$

В результате применения правил дифференцирования под штрихами у нас остались только элементарные функции, по таблице производных превращаем их в другие функции:

$$\begin{aligned} y' &= ((x^2 + 7x - 1) \log_3 x)' = (x^2 + 7x - 1)' \log_3 x + (x^2 + 7x - 1)(\log_3 x)' = \\ &= ((x^2)' + 7(x)' - (1)') \log_3 x + (x^2 + 7x - 1)(\log_3 x)' = \\ &= (2x + 7 \cdot 1 - 0) \log_3 x + (x^2 + 7x - 1) \cdot \frac{1}{x \ln 3} = \end{aligned}$$

Готово.

При определенном опыте нахождения производных, простые производные вроде $(x^2 + 7x - 1)'$ не обязательно расписывать так подробно. Вообще, они обычно находятся в уме, и сразу записывается, что $(x^2 + 7x - 1)' = 2x + 7$.

Пример 7

Найти производную функции $y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^2} \cos x$

Это пример для самостоятельного решения.

4) Производная частного

В потолке открылся люк, не пугайся, это глюк.

А вот это вот суровая действительность:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Пример 8

Найти производную функции $y = \frac{2(3x - 4)}{x^2 + 1}$

Чего здесь только нет – сумма, разность, произведение, дробь.... С чего бы начать?! Есть сомнения, нет сомнений, но, **В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ** для начала рисуем скобочки и справа сверху ставим штрих:

$$y' = \left(\frac{2(3x - 4)}{x^2 + 1}\right)'$$

Теперь смотрим на выражение в скобках, как бы его упростить? В данном случае замечаем множитель, который согласно первому правилу целесообразно вынести за знак производной:

$$y' = \left(\frac{2(3x - 4)}{x^2 + 1}\right)' = 2 \cdot \left(\frac{3x - 4}{x^2 + 1}\right)'$$

Заодно избавляемся от скобок в числителе, которые теперь не нужны.

Вообще говоря, постоянные множители при нахождении производной можно и не выносить, но в этом случае они будут «путаться под ногами», что загромождает и затрудняет решение.

Смотрим на наше выражение в скобках. У нас есть сложение, вычитание и деление. Со школы мы помним, что деление выполняется в первую очередь. И здесь – сначала применяем правило дифференцирования частного:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{3x - 4}{x^2 + 1}\right)' = 2 \cdot \left(\frac{3x - 4}{x^2 + 1}\right)' = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{(3x - 4)'(x^2 + 1) - (3x - 4)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}\right) \end{aligned}$$

Таким образом, наша страшная производная свелась к производным от двух простых скобок. Применяем первое и второе правило, здесь это сделаем устно, надеюсь, вы уже немного освоились в производных:

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\frac{2(3x-4)}{x^2+1} \right)' = 2 \cdot \left(\frac{3x-4}{x^2+1} \right)' = \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{(3x-4)'(x^2+1) - (3x-4)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \right) = \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{3 \cdot (x^2+1) - (3x-4) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \right)
 \end{aligned}$$

Штрихов больше нет, задание выполнено.

На практике обычно (но не всегда) ответ упрощают «школьными» методами:

$$\dots = 2 \cdot \left(\frac{3x^2 + 3 - 6x^2 + 8x}{(x^2+1)^2} \right) = \frac{2(-3x^2 + 8x + 3)}{(x^2+1)^2}$$

Самостоятельно:

Пример 9

Найти производную функции $y = \frac{3^x + 5}{\cos x}$

Время от времени встречаются хитрые задачи:

Пример 10

Найти производную функции $y = \frac{x^2 + \sqrt{x} - 3}{x}$

Смотрим на данную функцию. Здесь снова дробь. Однако перед тем как использовать правило дифференцирования частного (а его можно использовать), всегда имеет смысл посмотреть, а нельзя ли упростить саму дробь, или вообще избавиться от нее?

Дело в том, что формула $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ достаточно громоздка, и применять ее совсем не хочется.

В данном случае можно почленно поделить числитель на знаменатель.

Преобразуем функцию:

$$y = \frac{x^2 + \sqrt{x} - 3}{x} = x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x}$$

Ну вот, совсем другое дело, теперь дифференцировать просто и приятно:

$$y' = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} \right)' = (x)' + \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' - 3(x^{-1})' =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - 3(-1)x^{-2} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{3}{x^2}$$

Готово.

Пример 11

Найти производную функции $y = \frac{x}{e^{-x}}$

Здесь ситуация похожа, превратим нашу дробь в произведение, для этого поднимем экспоненту в числитель, сменив у показателя знак:

$$y = \frac{x}{e^{-x}} = x e^x$$

Произведение все-таки дифференцировать проще:

$$y' = (x e^x)' = (x)' e^x + x(e^x)' = 1 \cdot e^x + x e^x = e^x (x + 1)$$

Вот и всё.

Пример 12

Найти производную функции $y = -\frac{\operatorname{arccot} x}{\sqrt[3]{x}}$

Это пример для самостоятельного решения.

Поздравляю вас с первыми успехами!

Однако если что-то осталось непонятым, то перечитайте материал ещё раз! Хотя проблемы здесь, как правило, бывают не с производными, а с алгебраическими действиями, в частности, с преобразованием степеней. В случае подобных затруднений следует немного освежить в памяти школьную программу.

Едем дальше:

2. Производная сложной функции

На практике с производной сложной функции приходится сталкиваться очень часто, я бы даже сказал, почти всегда, когда вам даны задания на нахождение производных.

Смотрим в таблицу на правило (№5) дифференцирования сложной функции:

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

Разбираемся. Прежде всего, обратим внимание на запись $u(v)$. Здесь у нас две функции – u и v , причем функция v , образно говоря, вложена в функцию u . Функция такого вида (когда одна функция вложена в другую) и называется сложной функцией.

Функцию u я буду называть **внешней функцией**, а функцию v – **внутренней (или вложенной) функцией**.

***! Примечание:** данные определения не являются теоретическими и не должны фигурировать в чистовом оформлении заданий. Я применяю неформальные выражения «внешняя» функция и «внутренняя» функция только для того, чтобы вам легче было понять материал.*

Проясним ситуацию на конкретном примере:

Пример 13

Найти производную функции $y = \sin(3x - 5)$

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение $3x - 5$, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя:

~~$$\sin(3x - 5) = \sin(3x) - \sin 5$$~~

В данном примере уже из этих объяснений интуитивно понятно, что функция $y = \sin(3x - 5)$ – это сложная функция, причем двучлен $3x - 5$ является внутренней функцией (вложением), а $\sin(3x - 5)$ – внешней функцией.

Первый шаг, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы **разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней**.

В случае простых примеров вроде $\sin(3x - 5)$ понятно, что под синус вложен двучлен $3x - 5$. Но как же быть, если всё не очевидно? Как точно определить, какая функция является внешней, а какая внутренней? Для этого я предлагаю использовать следующий прием, который можно проводить мысленно или на черновике, перелистываем страничку:

Представим, что нам нужно вычислить на калькуляторе значение выражения $\sin(3x - 5)$ при $x = 1$ (вместо единицы может быть любое число).

Что мы вычислим в первую очередь? **В первую очередь** нужно выполнить следующее действие: $3 \cdot 1 - 5 = -2$, поэтому двучлен $3x - 5$ и есть внутренняя функция v :

$$y = \sin(3x - 5)$$

v

Во вторую очередь нужно найти $\sin(-2)$, поэтому синус – внешняя функция:

$$y = \sin(3x - 5)$$

$u(v)$

После того, как мы **РАЗОБРАЛИСЬ** с внутренней и внешней функциями самое время применить правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.

Начинаем решать. Как мы помним из предыдущего параграфа, оформление решения любой производной всегда начинается так – заключаем выражение в скобки и ставим справа сверху штрих:

$$y' = (\sin(3x - 5))'$$

Сначала находим производную внешней функции $u'(v)$ (синуса). Для этого смотрим в таблицу производных и замечаем, что $(\sin x)' = \cos x$. Но это только цветочки! **Все табличные формулы применимы и в том случае, если «икс» заменить сложным выражением!**

В данном случае:

$$u'(v) = \cos(3x - 5)$$

Обратите внимание, что внутренняя функция $v = 3x - 5$ не изменилась, её мы не трогаем.

Ну и совершенно понятно, что $v' = (3x - 5)'$.

Результат применения формулы $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ в чистовом оформлении выглядит так:

$$y' = (\sin(3x - 5))' = \cos(3x - 5) \cdot (3x - 5)'$$

Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:

$$y' = (\sin(3x - 5))' = \cos(3x - 5) \cdot (3x - 5)' = \cos(3x - 5) \cdot (3 - 0)$$

Постоянный множитель обычно выносят в самое начало:

$$y' = (\sin(3x - 5))' = \cos(3x - 5) \cdot (3x - 5)' = \cos(3x - 5) \cdot (3 - 0) = 3 \cos(3x - 5)$$

Если осталось какое-либо недопонимание, перепишите решение своей рукой и еще раз прочитайте объяснения.

Разминаемся:

Пример 14

Найти производную функции $y = \cos 2x$

И продолжаем:

Пример 15

Найти производную функции $y = (2x + 1)^5$

Как всегда записываем:

$$y' = ((2x + 1)^5)'$$

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения $(2x + 1)^5$ при $x = 1$. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: $2 \cdot 1 + 1 = 3$, значит, двучлен $(2x + 1)$ – и есть внутренняя функция:

$$y = (2x + 1)^5$$

v

И только потом выполняется возведение в степень 3^5 , следовательно, степенная функция – это внешняя функция:

$$y = (2x + 1)^5$$

u(v)

Согласно формуле $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу:

$(x^n)' = nx^{n-1}$. Повторяем еще раз: **любая табличная формула справедлива не только для «икс», но и для сложного выражения**. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ следующий:

$$y' = ((2x + 1)^5)' = 5 \cdot (2x + 1)^4 \cdot (2x + 1)'$$

Снова подчёркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции $u'(v)$, внутренняя функция v у нас не меняется:

$$5 \cdot (2x + 1)^4$$

не меняется

Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

$$\begin{aligned} y' &= ((2x+1)^5)' = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)' = \\ &= 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2+0) = 10 \cdot (2x+1)^4 \end{aligned}$$

Готово.

Самостоятельно:

Пример 16

Найти производную функции $y = \frac{1}{(x^2 - 1)^7}$

Для закрепления понимания производной сложной функции приведу пример без комментариев, попробуйте самостоятельно разобраться, порассуждать, где внешняя и где внутренняя функция, почему задания решены именно так?

Пример 17

а) Найти производную функции $y = \arctg \sqrt{x}$

$$y' = (\arctg \sqrt{x})' = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

б) Найти производную функции $y = \sqrt{\arctg x}$

$$y' = (\sqrt{\arctg x})' = \frac{1}{2\sqrt{\arctg x}} \cdot (\arctg x)' = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\arctg x}}$$

Есть? Тогда добавим оборотов. И «наворотов».)

Пример 18

Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2 + \tg x + 15}$

Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y = \sqrt[3]{x^2 + \tg x + 15} = (x^2 + \tg x + 15)^{\frac{1}{3}}$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$y' = \left((x^2 + t g x + 15)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + t g x + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + t g x + 15)'$$

Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$\begin{aligned} y' &= \left((x^2 + t g x + 15)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + t g x + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + t g x + 15)' = \\ &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + t g x + 15)^2}} \cdot ((x^2)' + (t g x)' + (15)') = \end{aligned}$$

Готово. Можно еще в скобках привести выражение к общему знаменателю и записать всё одной дробью. Красиво, конечно, но когда получаются громоздкие длинные производные – лучше этого не делать (легко запутаться, допустить ненужную ошибку, да и преподавателю будет неудобно проверять).

Пример 19

Найти производную функции $y = \frac{5}{\sqrt[5]{x + \ln x}}$

Интересно отметить, что в последних примерах можно было использовать правило дифференцирования частного $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, но подобное решение смотрелось бы необычно. Вот ещё более характерный пример:

Пример 20

Найти производную функции $y = -\frac{1}{\cos x}$

Здесь можно применить формулу $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, но гораздо выгоднее найти производную через правило дифференцирования сложной функции. Для этого поднимаем косинус вверх:

$$y = -\frac{1}{\cos x} = -\cos^{-1} x$$

Минус (константу -1) сразу выносим за знак производной:

$$y' = -(\cos^{-1} x)'$$

Косинус – внутренняя функция, возведение в степень – внешняя функция.

Используем наше правило:

$$y' = -(\cos^{-1} x)' = -(-1) \cdot \cos^{-2} x \cdot (\cos x)'$$

Находим производную внутренней функции, а косинус сбрасываем обратно вниз:

$$\begin{aligned} y' &= -(\cos^{-1} x)' = -(-1) \cdot \cos^{-2} x \cdot (\cos x)' = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Готово. В рассмотренном примере важно не запутаться в знаках. Кстати, попробуйте решить его с помощью правила $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, ответы должны совпасть.

Пример 21

Найти производную функции $y = \frac{1}{\arccos^2 x}$

Это пример для самостоятельного решения.

Как вы уже успели заметить, правило дифференцирования сложной функции очень часто применяется в комбинации с остальными правилами дифференцирования.

Пример 22

Найти производную функции $y = -2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x$

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)'$$

Сначала используем правило дифференцирования суммы $(u + v)' = u' + v'$ и заодно в первом слагаемом выносим постоянный множитель за знак производной по правилу $(Cu)' = Cu'$:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)'$$

В обоих слагаемых под штрихами у нас находится произведение функций, следовательно, нужно дважды применить правило $(uv)' = u'v + uv'$:

$$\begin{aligned} y' &= (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = \\ &= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2 - 4x + 3)' \sin 7x \end{aligned}$$

Замечаем, что под некоторыми штрихами у нас находятся сложные функции e^{3x} , $\sin 7x$. Несмотря на то, что этой простейшие из сложных функций (такой вот каламбур), я распишу их производные подробно. Согласно правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, получаем:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' =$$

$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2 - 4x + 3)' \sin 7x$$

Готово.

! Обратите внимание на приоритет (порядок) применения правил: правило дифференцирования сложной функции применяется в последнюю очередь.

Пример 23

Найти производную функции $y = \sqrt{x^2 + 4} \cdot \ln(\sin x)$

Это пример для самостоятельного решения.

В ходе изучения математического анализа дифференцировать придется часто, и поэтому **крайне желательно научиться находить не очень трудные производные УСТНО**. Более того, во многих заданиях и не требуется подробная роспись –

предполагается, что вместо длинной цепочки $(\operatorname{tg} 2x)' = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot (2x)' = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{2}{\cos^2 2x}$ студент сразу сможет записать, что $(\operatorname{tg} 2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$.

...Представьте, что в 3 часа ночи у вас раздался телефонный звонок, и приятный голос спросил: «Чему равна производная тангенса двух икс?». На это должен последовать почти мгновенный и вежливый ответ, что $(\operatorname{tg} 2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$! И как раз отработке этого навыка будет посвящён:

Математический диктант

Найти следующие производные устно, в одно действие, например: $(e^{2x})' = 2e^{2x}$. Очень хорошо, если у вас всё на бумаге – записывайте ответы прямо тут – справа:

$$(\sqrt{1-x^2})' =$$

$$\left(\frac{1}{2x+1} \right)' =$$

$$\left(\left(\frac{x}{3} + 4 \right)^{10} \right)' =$$

$$\left(7^{\frac{1}{2}x^2}\right)' =$$

$$(\sin^2 x)' =$$

$$(\cos(2x^2 - x + 1))' =$$

$$(\operatorname{ctg}(3x + 5))' =$$

$$(\sqrt{\log_3 x})' =$$

$$(\operatorname{arctg}(\ln x))' =$$

$$(\operatorname{arctg} 4x)' =$$

$$(\arcsin(2x^3))' =$$

Пожалуй, достаточно. Свериться с правильными ответами можно в конце методички. И ничего страшного, если где-то попутались – это быстро проходит =)

Теперь лучше сделать небольшой перерыв, чтобы с новыми силами приступить к изучению следующего параграфа.

3. Производная очень сложной функции :)

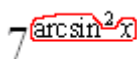
До сих пор мы рассматривали случаи, когда у нас в сложной функции было только одно вложение. В практических же заданиях часто можно встретить производные, где как матрёшки, одна в другую, вложены сразу 3, а то и 4-5 функций.

Пример 24

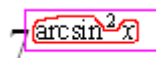
Найти производную функции $y = 7^{\arcsin^2 x}$

Разбираемся во вложениях этой функции. Для этого вспоминаем наш технический вспомогательный приём, а именно пробуем вычислить выражение $7^{\arcsin^2 x}$ с помощью подопытного значения $x = 1$. Как бы мы считали на калькуляторе?

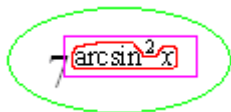
Сначала нужно найти $\arcsin 1$, значит, арксинус – самое глубокое вложение:



Затем этот арксинус единицы следует возвести в квадрат $\arcsin^2 1$:



И, наконец, семёрку возводим в степень $7^{\arcsin^2 1}$:



То есть, в данном примере у нас два вложения, при этом, самой внутренней функцией является арксинус, а самой внешней функцией – показательная функция.

Начинаем решать:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})'$$

Согласно правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ сначала нужно взять производную от внешней функции. Смотрим в таблицу производных и находим производную показательной функции: $(a^x)' = a^x \ln a$. Единственное отличие – вместо «икс» у нас сложное выражение $\arcsin^2 x$, что не отменяет справедливость данной формулы. Итак, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ следующий:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)'$$

Под штрихом у нас снова сложная функция! Но она уже проще. Как мы только что убедились, внутренняя функция – арксинус, внешняя функция – степень.

Согласно правилу дифференцирования сложной функции сначала нужно взять производную от степени:

$$\begin{aligned} y' &= (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' = \\ &= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2 \arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)' \end{aligned}$$

Теперь все просто, находим по таблице производную арксинуса и немного «причесываем» выражение:

$$\begin{aligned} y' &= (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' = \\ &= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2 \arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)' = \\ &= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{2 \ln 7 \cdot 7^{\arcsin^2 x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Готово.

Пример 25

Найти производные следующих функций:

а) $y = \ln^2(2x-1)$

б) $y = \cos \sqrt{\arctg(x^3)}$

Это пример для самостоятельного решения.

...ну как оно, сложно? Следует отметить, что сложность сложности рознь – зачастую, то, что кажется сложным, вовсе не является таковым! Давайте, наконец, сформулируем это **золотое правило**:

Перед тем, как находить производную, всегда целесообразно посмотреть, а нельзя ли как-нибудь упростить запись функции ещё ДО дифференцирования?

Зачем? Чтобы жить было легче:

Пример 26

Найти производную функции $y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)}$

Изучаем нашу функцию. По первой оглядке, здесь нужно взять производную от корня, затем от 4-й степени, затем от синуса, и в последнюю очередь ещё и от дроби. Перспектива, так скажем, малоприятная. И поэтому зададимся вопросом, а нельзя ли записать функцию как-нибудь попроще?

Во-первых, можно преобразовать корень:

$$y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)} = \sin^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x-3}{x}\right) \text{ (корень 5-й степени относится именно к синусу)}.$$

И во-вторых, можно упростить начинку синуса, ибо использовать правило

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ как-то... да ну его. Разделим почленно числитель на знаменатель:}$$

$$y = \sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)} = \sin^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x-3}{x}\right) = \sin^{\frac{4}{5}}\left(1 - \frac{3}{x}\right)$$

Таким образом, на поверку здесь оказалось не три, а всего лишь два вложения: под степень вложен синус, а под синус вложено выражение $\left(1 - \frac{3}{x}\right)$. Найдем производную, используя правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ два раза:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sin^{\frac{4}{5}}\left(1 - \frac{3}{x}\right)\right)' = \frac{4}{5} \cdot \sin^{-\frac{1}{5}}\left(1 - \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\sin\left(1 - \frac{3}{x}\right)\right)' = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{\sin\left(1 - \frac{3}{x}\right)}} \cdot \cos\left(1 - \frac{3}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{x}\right)' \end{aligned}$$

Ну и для красоты можно восстановить первоначальный марафет:

$$\dots = \frac{12 \cos\left(\frac{x-3}{x}\right)}{5x^2 \cdot \sqrt[5]{\sin\left(\frac{x-3}{x}\right)}}$$

Готово.

Следующая интересность для самостоятельного разбора:

Пример 27

Найти дифференциал функции $y = \sqrt[5]{\frac{2}{\sqrt{x} + 1}}$

Рациональное решение и ответ в конце методички.

Готовы? Тогда без комплексов и страхов переходим к следующим примерам:

Пример 28

Найти производную функции $y = \sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}$

Нет-нет-нет, я вовсе не изверг, такие штуки реально встречаются на практике, и более того, их любят предлагать на зачётах и экзаменах, в том числе студентам-заочникам! И поэтому я не рекомендую вам пропускать ближайшие примеры.

Как уже отмечалось, при нахождении производной сложной функции, прежде всего, необходимо **правильно** РАЗОБРАТЬСЯ во вложениях. В тех случаях, когда есть сомнения, берём подопытное значение «икс», например, $x = 1$ и пробуем (мысленно или на черновике) подставить данное значение в «страшное выражение».

1) Сначала нам нужно вычислить выражение $1 + \sqrt{1} = 2$, значит, сумма $(x + \sqrt{x})$ – самое глубокое вложение.

2) Затем необходимо вычислить логарифм: $\ln 2$

3) Далее косинус: $\cos(\ln 2)$

4) Потом косинус возвести в куб: $\cos^3(\ln 2)$

5) На пятом шаге – разность: $3 - \cos^3(\ln 2)$

6) И, наконец, самая внешняя функция – это квадратный корень: $\sqrt{3 - \cos^3(\ln 2)}$

Формула дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ применяется в обратном порядке, от самой внешней функции, до самой внутренней. Сначала полное решение, затем комментарии:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))} \right)' \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}} \cdot (3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x})))' \stackrel{(2)}{=} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}} \cdot ((3)' - (\cos^3(\ln(x + \sqrt{x})))') \stackrel{(3)}{=} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}} \cdot (0 - 3\cos^2(\ln(x + \sqrt{x})) \cdot (\cos(\ln(x + \sqrt{x})))') \stackrel{(4)}{=} \\ &= \frac{-3\cos^2(\ln(x + \sqrt{x})) \cdot (-\sin(\ln(x + \sqrt{x}))) \cdot (\ln(x + \sqrt{x}))'}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}} \stackrel{(5)}{=} \\ &= .. \end{aligned}$$

...

- (1) Берем производную от квадратного корня.
- (2) Берем производную от разности, используя правило $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- (3) Производная тройки равна нулю. Во втором слагаемом берем производную от степени (куба).
- (4) Берем производную от косинуса.
- (5) Берем производную от логарифма.
- (6) И, наконец, берем производную от самого глубокого вложения $(x + \sqrt{x})$.
- Вроде без ошибок....

Самостоятельно:

Пример 29

Найти производную функции $y = 5x^2 + x \arctg(\sqrt[3]{\sin e^{3x}})$

***Подсказка:** в первую очередь используем свойство линейности, затем правило дифференцирования произведения*

Настало время перейти к чему-нибудь более компактному и симпатичному. Не редка ситуация, когда в примере дано произведение не двух, и трёх функций. Как найти производную от произведения трёх множителей?

Пример 30

Найти производную функции $y = x^2 e^{3-2x} \log_2 x$

Сначала смотрим, а нельзя ли произведение трех функций превратить в произведение двух функций? Например, если бы у нас в произведении было два многочлена, то можно было бы раскрыть скобки. Но в рассматриваемом примере все функции разные: степень, экспонента и логарифм.

В таких случаях нужно **последовательно** применить правило дифференцирования произведения $(uv)' = u'v + uv'$ **два раза**.

Фокус состоит в том, что за «у» мы обозначим произведение двух функций: $u = x^2 e^{3-2x}$, а за «вэ» – логарифм: $v = \log_2 x$. Почему так можно сделать? А разве $(x^2 e^{3-2x}) \cdot \log_2 x$ – это не произведение двух множителей и правило не работает?! Ничего сложного нет:

$$y' = (x^2 e^{3-2x} \cdot \log_2 x)' = (x^2 e^{3-2x})' \cdot \log_2 x + x^2 e^{3-2x} \cdot (\log_2 x)'$$

Теперь осталось применить правило $(uv)' = u'v + uv'$ к скобке $(x^2 e^{3-2x})'$:

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 e^{3-2x} \cdot \log_2 x)' = (x^2 e^{3-2x})' \cdot \log_2 x + x^2 e^{3-2x} \cdot (\log_2 x)' = \\ &= ((x^2)' e^{3-2x} + x^2 (e^{3-2x})') \cdot \log_2 x + x^2 e^{3-2x} \cdot \frac{1}{x \ln 2} = (2x e^{3-2x} - 2x^2 e^{3-2x}) \cdot \log_2 x + \frac{x e^{3-2x}}{\ln 2} \end{aligned}$$

Ответ лучше оставить именно в таком виде – легче будет проверять.

Данный пример можно решить вторым способом:

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 \cdot e^{3-2x} \log_2 x)' = (x^2)' \cdot e^{3-2x} \log_2 x + x^2 \cdot (e^{3-2x} \log_2 x)' = \\ &= 2x e^{3-2x} \log_2 x + x^2 \cdot ((e^{3-2x})' \log_2 x + e^{3-2x} (\log_2 x)') \end{aligned}$$

Следует отметить, что этот путь совершенно равноценен в плане правильности решения, разница здесь может быть только в простоте, и, разумеется, во вкусе – кому как удобнее, кому как нравится.

Пример 31

Найти производную функции $y = (x+1) \cdot \sqrt{x^3+2} \cdot (2x^2-1)$

Это пример для самостоятельного решения, в образце он решен первым способом.

Рассмотрим аналогичные примеры с дробями.

Пример 32

Найти производную функции $y = \frac{x \cos x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}$

Здесь можно пойти несколькими путями:

$$y' = \left(x \cdot \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} \right)' = (x)' \cdot \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} + x \cdot \left(\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} \right)'$$

или так:

$$y' = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} \cdot \cos x \right)' = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} \right)' \cdot \cos x + \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} \cdot (\cos x)'$$

Но решение запишется более компактно, если в первую очередь использовать правило дифференцирования частного $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, приняв за u весь числитель:

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{x \cos x}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}} \right)' = \frac{(x \cos x)' \cdot \sqrt[3]{x^3 + 3x + 1} - x \cos x \cdot ((x^3 + 3x + 1)^{\frac{1}{3}})'}{(\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1})^2} = \\
&= \frac{((x)' \cos x + x(\cos x)') \cdot \sqrt[3]{x^3 + 3x + 1} - x \cos x \cdot \frac{1}{3} (x^3 + 3x + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^3 + 3x + 1)'}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^2}} = \\
&= \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot \sqrt[3]{x^3 + 3x + 1} - \frac{x \cos x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^2}} \cdot (3x^2 + 3)}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^2}}
\end{aligned}$$

В принципе, пример решён, и если ответ оставить в таком виде, то это не будет ошибкой. Но при наличии времени всегда желательно проверить на черновике, а нельзя ли его упростить?

$$\begin{aligned}
&\dots = \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot \sqrt[3]{x^3 + 3x + 1} - \frac{x(x^2 + 1) \cos x}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^2}} = \\
&= \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot (x^3 + 3x + 1) - x(x^2 + 1) \cos x}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^2}} = \\
&= \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot (x^3 + 3x + 1) - x(x^2 + 1) \cos x}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^4}}
\end{aligned}$$

Минус дополнительных упрощений состоит в том, что есть риск допустить ошибку уже не при нахождении производной, а при банальных «школьных» преобразованиях. В частности, следует очень внимательно (и аккуратно!) разбираться с трёхэтажной дробью (см. Приложение **Горячие школьные формулы**).

С другой стороны, преподаватели нередко бракуют задание и просят «довести до ума» производную. В результате, чего, кстати, может получиться и «конфетка».

Такая вот дилемма.

Более простой пример для самостоятельного решения:

Пример 33

Найти производную функции

Продолжаем осваивать приёмы нахождения производной, и сейчас мы рассмотрим типовой случай, когда для дифференцирования предложен «страшный» логарифм:

Пример 34

Найти производную функции $y = \ln \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}$

Тут можно пойти длинным путём, используя правило дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left(\ln \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}} \right)' = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}} \right)'$$

Но первый же шаг сразу повергает в уныние – предстоит взять неприятную производную от дробной степени $\frac{1}{5}$, а потом ещё и от дроби $\frac{1-x}{1+x}$.

Поэтому **перед тем** как брать производную от «навороченного» логарифма, его предварительно упрощают, используя известные школьные свойства; ввиду важности и актуальности выпишу их из *Приложения Горячие школьные формулы*:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^b = b \ln a$$

Совершенно понятно, что функцию выгодно преобразовать:

$$y = \ln \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}} = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{5} (\ln(1-x) - \ln(1+x))$$

Вот теперь находим производную:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{5} (\ln(1-x) - \ln(1+x)) \right)' = \frac{1}{5} ((\ln(1-x))' - (\ln(1+x))') = \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{1-x} \cdot (1-x)' - \frac{1}{1+x} \cdot (1+x)' \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) \end{aligned}$$

Как видите, предварительное преобразование самой функции значительно упростило решение. Таким образом, когда для дифференцирования предложен подобный логарифм, то его всегда целесообразно «развалить».

И это уже даже не золотое, а дважды платиновое правило =)

А сейчас пара несложных примеров для самостоятельного решения:

Пример 35

Найти производную функции

Пример 36

Найти производную функции

Успехов!

4. Логарифмическая производная

Если производная от логарифмов – это такая сладкая музыка, то возникает вопрос, а нельзя ли в некоторых случаях организовать логарифм искусственно?

Можно! И даже нужно:

Пример 37

Найти производную функции $y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$

Похожие примеры мы недавно рассмотрели. Что делать? Можно последовательно применить правило дифференцирования частного, а потом правило дифференцирования произведения. Недостаток способа состоит в том, что получится огромная трехэтажная дробь, с которой совсем не хочется иметь дела.

Но в теории и практике есть такая замечательная вещь, как логарифмическая производная. Логарифмы можно организовать искусственно, «навесив» их на обе части:

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$$

Теперь нужно максимально «развалить» логарифм правой части (формулы перед глазами?). Я распишу этот процесс очень подробно:

$$\ln y = \ln \sqrt[5]{(x+4)^3} - \ln((x-1)^2(x+3)^5)$$

$$\ln y = \ln(x+4)^{\frac{3}{5}} - (\ln(x-1)^2 + \ln(x+3)^5)$$

$$\ln y = \frac{3}{5} \ln(x+4) - (2 \ln(x-1) + 5 \ln(x+3))$$

$$\ln y = \frac{3}{5} \ln(x+4) - 2 \ln(x-1) - 5 \ln(x+3)$$

Собственно приступаем к дифференцированию.

Закключаем под штрих обе части:

$$(\ln y)' = \left(\frac{3}{5} \ln(x+4) - 2 \ln(x-1) - 5 \ln(x+3) \right)'$$

Производная правой части достаточно простая, её я комментировать не буду, поскольку если вы читаете этот текст, то должны уверенно с ней справиться.

Как быть с левой частью?

В левой части у нас **сложная функция**. Предвижу вопрос: «Почему, там же одна буковка «игрек» под логарифмом?».

Дело в том, что эта «одна буковка игрек» – **САМА ПО СЕБЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ**. Поэтому логарифм – это внешняя функция, а «игрек» – внутренняя функция. И здесь мы используем то же самое правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{3}{5} (\ln(x+4))' - 2 (\ln(x-1))' - 5 (\ln(x+3))'$$

В левой части как по мановению волшебной палочки у нас «нарисовалась» производная y' . Далее по правилу пропорции перекидываем «игрек» из знаменателя левой части наверх правой части:

$$y' = \left(\frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{(x+3)} \right) \cdot y$$

А теперь вспоминаем, о каком таком «игреке»-функции мы рассуждали при дифференцировании? Смотрим на условие: $y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$

Окончательный ответ:

Пример 38

Найти производную функции $y = x \cdot \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$

Это пример для самостоятельного решения. Примерный образец чистового оформления задания в конце методички.

С помощью логарифмической производной можно решить любой из примеров №№30-33 (*ссылки живые*), другое дело, что там функции проще, и, скорее всего, использование логарифмической производной не слишком-то и оправдано.

Производная степенно-показательной функции

Данную функцию мы еще не рассматривали. Степенно-показательная функция – это функция, у которой **и степень и основание зависят от «икс»**. Классический пример, который вам приведут в любом учебнике или на любой лекции:

$$y = x^x$$

Как найти производную от степенно-показательной функции?

Необходимо использовать только что рассмотренный приём – логарифмическую производную. Навешиваем логарифмы на обе части:

$$\ln y = \ln x^x$$

Как правило, в правой части из-под логарифма выносятся степень:

$$\ln y = x \ln x$$

В результате в правой части у нас получилось произведение двух функций, которое будет дифференцироваться по стандартной формуле $(uv)' = u'v + uv'$.

Находим производную, для этого заключаем обе части под штрихи:

$$(\ln y)' = (x \ln x)'$$

Дальнейшие действия прозрачны:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x)' \ln x + x(\ln x)'$$

Окончательно:

$$y' = \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot y = (\ln x + 1) \cdot x^x$$

Если какое-то преобразование не совсем понятно, пожалуйста, внимательно перечитайте объяснения Примера №37.

В практических заданиях степенно-показательная функция само собой будет сложнее, чем рассмотренный лекционный пример:

Пример 39

Найти производную функции $y = (\ln x)^{3x}$

Выполняем стандартное действие:

$$\ln y = \ln(\ln x)^{3x}$$

$$\ln y = 3x \ln \ln x$$

В правой части у нас константа и произведение двух множителей – «икса» и «логарифма логарифма икс» (в логарифм вложен еще один логарифм). При дифференцировании константу, как мы помним, лучше сразу вынести за знак производной, чтобы она не мешалась под ногами; после чего применяем знакомое правило:

И как обычно, отправляем «игрек» вверх:

$$y' = 3 \left(\ln \ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' \right) \cdot y = 3 \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right) \cdot (\ln x)^{3x}$$

Как видите, алгоритм применения логарифмической производной не содержит в себе каких-то особых хитростей или уловок, и нахождение производной степенно-показательной функции обычно не связано с «мучениями».

Заключительные примеры параграфа предназначены для самостоятельного решения.

Пример 40

Найти производную функции

Пример 41

Найти производную функции

...Ну что же, после таких героических усилий пришло время сбавить обороты:

5. Производные второго и более высоких порядков

На самом деле здесь тоже есть трудные примеры, но я ограничусь достаточно простыми заданиями – чтобы у вас было **само понимание**, как находить вторую, третью, четвертую, ... и т.д. производные.

Начнём с производной второго порядка. Всё очень просто. Вторая производная – это **производная от первой производной**: $(y')'$

Распространённые обозначения второй производной:

y'' , $f''(x)$ или $\frac{d^2 y}{dx^2}$ (дробь читается так: «дэ два игрек по дэ икс квадрат»).

Чаще всего вторую производную обозначают первыми двумя вариантами. Но третий вариант тоже встречается, причем, его очень любят включать в условия контрольных заданий, например: «Найдите $\frac{d^2 y}{dx^2}$ функции...». А студент сидит и битый час чешет репу, что это вообще такое.

Рассмотрим простейший пример. Найдём вторую производную от функции $y = 2x - 1$.

Для того чтобы найти вторую производную, как многие догадались, нужно сначала найти первую производную:

$$y' = (2x - 1)' = 2$$

Теперь находим вторую производную:

$$y'' = (y')' = (2)' = 0$$

Готово.

Рассмотрим более содержательные примеры.

Пример 42

Найти вторую производную функции $y = \sin^2 \frac{x}{3}$

Найдём первую производную:

$$y' = \left(\sin^2 \frac{x}{3} \right)' = 2 \sin \frac{x}{3} \left(\sin \frac{x}{3} \right)' = 2 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} \cdot \left(\frac{x}{3} \right)' = \frac{2}{3} \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}$$

Теперь нам предстоит дифференцировать произведение двух функций, но мы избежим от этой неприятности (*золотое правило!*), применив известную тригонометрическую формулу $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Точнее говоря, использовать формулу будем в обратном направлении:
 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$, в данном случае $\alpha = \frac{x}{3}$:

$$y' = \frac{2}{3} \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{2x}{3} = \frac{1}{3} \sin \frac{2x}{3}$$

Находим вторую производную:

Готово.

Можно было пойти другим путём – понизить степень функции еще перед дифференцированием, используя формулу:

$$y = \sin^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2x}{3} \right)$$

Для интереса возьмите первую и вторую производные снова. Результаты, естественно, должны совпасть.

Формулы запишите, зазубрите, запомните!

Для самостоятельного решения:

Пример 43

Найти вторую производную функции $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

На каждом шаге смотрим, нельзя ли что-нибудь упростить!

Наверное, многим уже понятно, что такое третья, четвёртая, пятая и т.д. производная.

Найдём третью производную, например, в Примере 42. Для этого нужно взять производную от второй производной:

$$\begin{aligned} y''' &= (y'')' = \frac{2}{9} \left(\cos \frac{2x}{3} \right)' = \frac{2}{9} \cdot \left(-\sin \frac{2x}{3} \right) \cdot \left(\frac{2x}{3} \right)' = \\ &= -\frac{2}{9} \sin \frac{2x}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{27} \sin \frac{2x}{3} \end{aligned}$$

Вот и всё! ... всё только начинается =):

Распишем каноничный пример с многочленом:

$$y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

Найдём первую производную этой функции:

$$y' = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)' = 3x^2 + 4x + 3$$

И вторую:

$$y'' = (y')' = (3x^2 + 4x + 3)' = 6x + 4$$

Третья производная – есть производная от 2-й производной:

$$y''' = (y'')' = (6x + 4)' = 6$$

Четвёртая производная – это производная от 3-й производной:

$$y^{IV} = (y''')' = (6)' = 0$$

Пятая производная: $y^V = (y^{IV})' = (0)' = 0$, и очевидно, что все производные более высоких порядков тоже будут равны нулю:

$$y^VI = y^VII = y^VIII = y^IX = y^X = \dots = 0$$

Помимо римской нумерации на практике часто используют следующие **обозначения**:

$y^{(4)}, y^{(5)}, y^{(6)}, y^{(7)}, y^{(8)}, y^{(9)}, y^{(10)}, \dots$, производную же n -го порядка обозначают через $y^{(n)}$. **При этом надстрочный индекс нужно обязательно заключать в скобки** – чтобы отличать производную от «играка» в степени.

Иногда встречается такая запись: $\frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \frac{d^5 y}{dx^5}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}, \dots$ – третья, четвёртая, пятая, ..., n -ая производные соответственно.

Вперёд без страха и сомнений:

Пример 44

Дана функция $y = e^{3x}$. Найти $y^{(4)}$.

Решение: что тут попишешь... – вперёд за четвёртой производной:)

$$y' = (e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$$

$$y'' = (y')' = (3e^{3x})' = 3(e^{3x})' = 3e^{3x} \cdot 3 = 3^2 e^{3x}$$

$$y''' = (y'')' = (3^2 e^{3x})' = 3^2 e^{3x} \cdot 3 = 3^3 e^{3x}$$

Четыре штриха ставить уже не принято, поэтому переходим на числовые индексы:

$$y^{(4)} = (y''')' = (3^3 e^{3x})' = 3^3 e^{3x} \cdot 3 = 3^4 e^{3x}$$

Ответ: $y^{(4)} = 3^4 e^{3x}$

Хорошо, а теперь задумаемся над таким вопросом: что делать, если по условию требуется найти не 4-ю, а например, 20-ю производную? Если для 3-4-5-й производной

решение оформляется достаточно быстро, то до производных более высоких порядков мы «доберёмся» ой как не скоро. Не записывать же, в самом деле, 20 строк!

В подобной ситуации нужно **проанализировать несколько найдённых производных, увидеть закономерность и составить формулу n -й производной**. Так, в рассмотренном примере легко увидеть, что при каждом следующем дифференцировании перед экспонентой будет «выскакивать» дополнительная «тройка», причём на любом шаге степень «тройки» равна номеру производной, следовательно:

$$y^{(n)} = 3^n e^{3x}, \text{ где } n - \text{произвольное натуральное число.}$$

И действительно, если $n = 1$, то получается в точности 1-я производная: $y' = 3^1 e^{3x} = 3e^{3x}$, если $n = 2$ – то 2-я: $y'' = 3^2 e^{3x}$ и т.д. Таким образом, двадцатая производная определяется мгновенно: $y^{(20)} = 3^{20} e^{3x}$ – и никаких «километровых простыней»!

Решаем самостоятельно:

Пример 45

Найти $y^{(5)}$ функции $y = 5^x$. Записать производную n -го порядка

После бодрящей разминки рассмотрим более сложные примеры, в которых отработаем вышеприведённый алгоритм решения:

Пример 46

Найти $y^{(10)}$ для функции $y = \ln(2x - 1)$.

Решение: чтобы прояснить ситуацию найдём несколько производных:

$$y' = (\ln(2x - 1))' = \frac{1}{2x - 1} \cdot (2x - 1)' = \frac{1 \cdot 2}{2x - 1}$$
 – полученные наверху числа перемножать не спешим! ;-)

$$y'' = \left(\frac{1 \cdot 2}{2x - 1} \right)' = 1 \cdot 2 \cdot ((2x - 1)^{-1})' = -1 \cdot 2 \cdot (2x - 1)^{-2} \cdot (2x - 1)'$$

$$y''' = \left(-\frac{1 \cdot 2^2}{(2x - 1)^2} \right)' = -1 \cdot 2^2 \cdot ((2x - 1)^{-2})' = -1 \cdot 2^2 \cdot (-2) \cdot (2x - 1)^{-3} \cdot 2$$

$$y^{(4)} = \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 2^3}{(2x - 1)^3} \right)' = 1 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot ((2x - 1)^{-3})' = 1 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot (-3) \cdot (2x - 1)^{-4} \cdot 2$$

Пожалуй, хватит....

На следующем шаге лучше всего составить формулу «энной» производной (*коль скоро, условие этого не требует, то можно обойтись черновиком*). Для этого **смотрим на полученные результаты и выявляем закономерность**, по которой получается каждая следующая производная.

Во-первых, они знакопереваются. Поскольку 1-я производная положительна, то в общую формулу войдёт «мигалка»: $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot \dots$. Подойдёт и эквивалентный вариант $(-1)^{n-1}$, но лично я, как оптимист, люблю знак «плюс» =)

Во-вторых, в числителе «накручивается» **факториал**, причём он «отстаёт» от номера производной на одну единицу: $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot \dots$

И, в-третьих, в числителе растёт степень «двойки», которая равна номеру производной. То же самое можно сказать о степени знаменателя. Окончательно:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 2^n}{(2x-1)^n}$$

В целях проверки подставим парочку значений «эн», например, $n=3$ и $n=4$:

$$n=3 \Rightarrow y^{(3)} = \frac{2! \cdot 2^3}{(2x-1)^3};$$

$$n=4 \Rightarrow y^{(4)} = -\frac{3! \cdot 2^4}{(2x-1)^4}.$$

! Ещё надёжнее проверить все найденные производные, т.е. подставить 1 и 2

Замечательно, теперь допустить ошибку – просто грех:

$$n=10 \Rightarrow y^{(10)} = \frac{(-1)^{11} \cdot 9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}} = -\frac{9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}}$$

Ответ: $y^{(10)} = -\frac{9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}}$

Повторюсь, что составлять энную производную здесь вовсе не обязательно, но она практически 100%-но убережёт от ошибки! Поэтому настоятельно рекомендую.

Более простая функция для самостоятельного решения:

Пример 47

Найти $y^{(20)}$ функции $y = \frac{1}{x-2}$.

Справились? Отлично!

Переходим к **важнейшему** параграфу:

6. Производная функции, заданной неявно

Или короче – производная неявной функции. Встречается часто и повсеместно. Начнём с традиционного вопроса: что это такое? И что такое вообще функция? Таки сформулирую:

Функция одной переменной $y = f(x)$ – это правило, по которому каждому значению независимой переменной x соответствует одно и только одно значение функции y .

Переменная x называется **независимой переменной** или **аргументом**.
Переменная y называется **зависимой переменной** или **функцией**.

Грубо говоря, буковка «игрек» в данном случае – и есть функция.

До сих пор мы рассматривали функции, заданные в *явном* виде. Что это значит? Устроим разбор полётов на конкретных примерах.

Рассмотрим функцию $y = 3x^4 + x^2 - 1$

Мы видим, что слева у нас одинокий «игрек» (функция), а справа – «**только** **иксы**». То есть, функция y в **явном виде** выражена через независимую переменную x .

Рассмотрим другую функцию: $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$

Здесь переменные x и y расположены «вперемешку». Причём **никакими способами невозможно** выразить «игрек» в виде $y = f(x)$. Что это за способы? Перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, вынесение за скобки, перекидывание множителей по правилу пропорции и другие «школьные» методы. Перепишите равенство $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$ на бумагу и попробуйте выразить «игрек» в явном виде: $y = \text{всё зависит от } x$. Можно крутить-вертеть уравнение часами, но у вас этого не получится.

Разрешите познакомиться: $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$ – пример **неявной функции**.

В курсе математического анализа доказано, что неявная функция **существует** (однако не всегда), у неё есть график (точно так же, как и у «нормальной» функции). У неявной функции точно так же **существует** (при определённых условиях) первая производная, вторая производная и т.д. Как говорится, все права секс-меньшинств соблюдены. ...Хотя, если задуматься, то это большинство =)

И на этом уроке мы научимся находить производную от функции, заданной неявно. Это не так сложно! Тем более что **все правила дифференцирования и таблица производных остаются в силе!** Разница будет в одном своеобразном моменте, который мы рассмотрим прямо сейчас.

Да, и сообщу хорошую новость – рассмотренные ниже задания выполняются по довольно жесткому и чёткому алгоритму:

Пример 48

Найти производную от функции, заданной неявно $3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$

Поехали:

1) На первом этапе навешиваем штрихи на обе части:

$$(3x^2y^2 - 5x + \sin y)' = (3y - 1)'$$

2) Используем правило линейности производной (*помним такое?*):

3) Непосредственное дифференцирование.

Как дифференцировать $(x)'$ и $(1)'$ совершенно понятно. Что делать там, где под штрихами есть «игреки»?

$(y)'$ – просто до безобразия, *производная от функции равна её производной*:
 $(y)' = y'$.

Как дифференцировать $(\sin y)' = ?$

Здесь у нас **сложная функция**. Почему? Потому что буква «игрек» – **САМА ПО СЕБЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ** (см. определение в начале параграфа). Таким образом, синус – внешняя функция, y – внутренняя функция. Используем правило дифференцирования сложной функции:

$$(\sin y)' = \cos y \cdot y' = y' \cos y$$

Произведение дифференцируем по обычному правилу:

$$(x^2y^2)' = (x^2)'y^2 + x^2(y^2)'$$

Обратите внимание, что $(y^2)'$ – тоже сложная функция, и вообще – **любой «игрек с наворотами» – это сложная функция**:

$$(x^2y^2)' = (x^2)'y^2 + x^2(y^2)' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' = 2xy^2 + 2x^2yy'$$

Само оформление решения должно выглядеть примерно так:

$$(x^2y^2)' = (x^2)'y^2 + x^2(y^2)' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' = 2xy^2 + 2x^2yy'$$

Если есть скобки, то раскрываем их:

$$6xy^2 + 6x^2yy' - 5 + y' \cos y = 3y'$$

4) В левой части собираем слагаемые, в которых есть «игрек» со штрихом. В правую часть переносим всё остальное:

$$6x^2yy' + y'\cos y - 3y' = 5 - 6xy^2$$

5) В левой части выносим производную y' за скобки:

$$(6x^2y + \cos y - 3)y' = 5 - 6xy^2$$

6) И по правилу пропорции сбрасываем эти скобки в знаменатель правой части:

$$y' = \frac{5 - 6xy^2}{6x^2y + \cos y - 3}$$

Производная найдена. Готово.

Интересно отметить, что в неявном виде можно переписать и «обычную» функцию. Например, функцию $y = 3x^4 + x^2 - 1$ можно переписать так: $1 - x^2 = 3x^4 - y$. И более того, продифференцировать её по только что рассмотренному алгоритму.

На самом деле фразы «функция, заданная в неявном виде» и «неявная функция» отличаются одним смысловым нюансом. Фраза «функция, заданная в неявном виде» более общая и корректная, $1 - x^2 = 3x^4 - y$ — эта функция задана в неявном виде, но здесь можно выразить «игрек» и представить функцию в явном виде. Под фразой «неявная функция» чаще понимают «классическую» неявную функцию, когда «игрек» выразить нельзя.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 49

Найти производную от функции, заданной неявно $3x^4y^5 + e^{7x-4y} = 4x^5 + 2y^4$

Навешиваем штрихи на обе части:

$$(3x^4y^5 + e^{7x-4y})' = (4x^5 + 2y^4)'$$

Используем свойство линейности:

$$3(x^4y^5)' + (e^{7x-4y})' = 4(x^5)' + 2(y^4)'$$

Находим производные:

$$\begin{aligned} 3((x^4)'y^5 + x^4(y^5)') + e^{7x-4y} \cdot (7x - 4y)' &= 4 \cdot 5x^4 + 2 \cdot 4y^3y' \\ 3(4x^3y^5 + x^4 \cdot 5y^4y') + e^{7x-4y} \cdot (7 - 4y') &= 20x^4 + 8y^3y' \end{aligned}$$

Раскрываем все скобки:

$$12x^3y^5 + 15x^4y^4y' + 7e^{7x-4y} - 4y'e^{7x-4y} = 20x^4 + 8y^3y'$$

Переносим все слагаемые с y' в левую часть, остальное собираем в правой части:

В левой части выносим y' за скобку:

Окончательный ответ:

$$y' = \frac{20x^4 - 7e^{7x-4y} - 12x^3y^5}{15x^4y^4 - 8y^3 - 4e^{7x-4y}}$$

Пример 50

Найти производную от функции, заданной неявно

Это пример для самостоятельного решения.

Не редкость, когда после дифференцирования возникают дроби. В таких случаях от дробей нужно избавляться:

Пример 51

Найти производную от неявной функции $e^{xy} + \frac{y}{x} = \cos 3x$

Закключаем обе части под штрихи и используем свойство линейности:

$$\begin{aligned} \left(e^{xy} + \frac{y}{x} \right)' &= (\cos 3x)' \\ (e^{xy})' + \left(\frac{y}{x} \right)' &= (\cos 3x)' \end{aligned}$$

Дифференцируем, используя правило дифференцирования сложной функции

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v' \text{ и правило дифференцирования частного } \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} :$$

$$e^{xy} \cdot (xy)' + \frac{y'x - y(x)'}{x^2} = -\sin 3x \cdot (3x)'$$

$$e^{xy} \cdot ((x)'y + xy') + \frac{y'x - y}{x^2} = -3\sin 3x$$

Раскрываем скобки:

$$ye^{xy} + xy'e^{xy} + \frac{y'x - y}{x^2} = -3\sin 3x$$

Теперь нам нужно избавиться от дроби. Это можно сделать и позже, но рациональнее сделать сразу же. В знаменателе дроби находится x^2 . Умножаем обе части на x^2 . Если подробно, то выглядеть это будет так:

$$x^2 \cdot \left(ye^{xy} + xy'e^{xy} + \frac{y'x - y}{x^2} \right) = x^2 \cdot (-3 \sin 3x)$$

$$x^2 \cdot ye^{xy} + x^2 \cdot xy'e^{xy} + x^2 \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = -3x^2 \sin 3x$$

$$x^2 ye^{xy} + x^3 y'e^{xy} + y'x - y = -3x^2 \sin 3x$$

Примечание: иногда после дифференцирования появляется 2-3 дроби. Если бы у нас была еще одна дробь, то операцию нужно было бы повторить – умножить обе части.

Далее алгоритм работает стандартно, после того, как все скобки раскрыты, все дроби устранены, слагаемые, где есть «игрек штрих», собираем в левой части, а в правую часть переносим всё остальное:

$$x^3 y'e^{xy} + y'x = y - 3x^2 \sin 3x - x^2 ye^{xy}$$

В левой части выносим y' за скобку:

$$(x^3 e^{xy} + x)y' = y - 3x^2 \sin 3x - x^2 ye^{xy}$$

Окончательный ответ:

$$y' = \frac{y - 3x^2 \sin 3x - x^2 ye^{xy}}{x^3 e^{xy} + x}$$

Пример 52

Найти производную от неявной функции $\ln y = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$

Это пример для самостоятельного решения. Единственное, в нём, перед тем как избавиться от дроби, предварительно нужно будет избавиться от трехэтажности самой дроби (см. Приложение *Горячие школьные формулы*).

7. Производная параметрически заданной функции

Не напрягаемся, в заключительном параграфе тоже всё просто. Можно записать общую формулу параметрически заданной функции, но для того, чтобы было понятно, я сразу запишу конкретный пример. В параметрическом виде функция задается двумя уравнениями: $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = t^3 \end{cases}$. Частенько уравнения записывают не под фигурными скобками, а последовательно: $x = 3t + 1$, $y = t^3$.

Переменная t называется параметром и может принимать значения от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности». Рассмотрим, например, значение $t = 1$ и подставим его в оба уравнения. Или по человечески: «если x равен четырем, то y равно единице». На координатной плоскости можно отметить точку $(4; 1)$, и эта точка будет соответствовать значению параметра $t = 1$. Аналогично можно найти точку для любого значения параметра « t ». Как и для «обычной» функции, для параметрически заданной функции все права обычно тоже соблюдены: можно построить график, найти производные и т.д.

В простейших случаях есть возможность представить функцию в явном виде. Выразим из первого уравнения параметр:

$$x = 3t + 1 \Rightarrow 3t = x - 1 \Rightarrow t = \frac{x-1}{3} \text{ – и подставим его во второе уравнение:}$$

$y = t^3 = \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}(x-1)^3$ – в результате получена обыкновенная кубическая функция.

В более «тяжелых» случаях такой фокус не прокатывает. Но это не беда, потому что для нахождения производной параметрической функции существует формула:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Находим производную от «игрека по переменной t »:

$$y'_t = (t^3)'_t = 3t^2$$

Все правила дифференцирования и таблица производных справедливы, естественно, и для буквы t , таким образом, **какой-то новизны в самом процессе нахождения производных нет**. Просто мысленно замените в таблице все «иксы» на букву « t ».

Находим производную от «икса по переменной t »:

$$x'_t = (3t + 1)'_t = 3$$

Теперь только осталось подставить найденные производные в нашу формулу:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{3} = t^2$$

Готово. Производная, как и сама функция, тоже зависит от параметра t .

Что касается обозначений, то в формуле вместо записи y'_x можно было просто записать y' без подстрочного индекса, поскольку это «обычная» производная по «икс». Но в литературе чаще встречается вариант y'_x , поэтому я не буду отклоняться от стандарта.

Пример 53

Найти производную от функции, заданной параметрически
$$\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2} \\ y = \arcsin(t - 1) \end{cases}$$

Используем формулу $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

В данном случае:

$$y'_t = (\arcsin(t - 1))'_t = \frac{1}{\sqrt{1 - (t - 1)^2}} \cdot (t - 1)'_t = \frac{1}{\sqrt{1 - (t^2 - 2t + 1)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2 + 2t - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2t - t^2}}$$

$$x'_t = (\sqrt{2t - t^2})'_t = \frac{1}{2\sqrt{2t - t^2}} \cdot (2t - t^2)'_t = \frac{(2 - 2t)}{2\sqrt{2t - t^2}} = \frac{1 - t}{\sqrt{2t - t^2}}$$

Таким образом:

И здесь у нас снова актуален «золотой» мотив: **на каждом шаге результат выгодно максимально упрощать**. Так, в рассмотренном примере при нахождении y'_t я раскрыл скобки под корнем (хотя мог этого и не делать). Велик шанс, что при подстановке x'_t и y'_t в формулу многие вещи хорошо сократятся. Хотя встречаются, конечно, примеры и с корявыми ответами.

Самостоятельно:

Пример 54

Найти производную функции

Для параметрически заданной функции довольно часто предлагают найти и вторую производную. Без проблем – вот готовая формула: $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Пример 55

Найти первую и вторую производные от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = tg^2 t \end{cases}$$

Сначала найдем первую производную. Используем формулу $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

В данном случае:

$$y'_t = (tg^2 t)'_t = 2tg t \cdot (tg t)'_t = \frac{2tg t}{\cos^2 t}$$

$$x'_t = (\cos^2 t)'_t = 2\cos t \cdot (\cos t)'_t = -2\cos t \sin t$$

Подставляем найденные производные в формулу. В целях упрощений используем тригонометрическую формулу $tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$:

Вот так-то оно лучше, брать производную от $-\frac{1}{\cos^4 t}$ гораздо проще, чем от $-\frac{tg t}{\cos^3 t \sin t}$. Распечатайте, кстати, [тригонометрические формулы](#), если вы ещё не успели этого сделать – материал крайне полезный.

Вторую производную найдём по формуле $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Знаменатель x'_t уже найден на предыдущем шаге. Осталось найти числитель – производную от первой производной по переменной «тэ»:

$$\begin{aligned} (y'_x)'_t &= \left(-\frac{1}{\cos^4 t} \right)'_t = -(\cos^{-4} t)'_t = -(-4)\cos^{-5} t \cdot (\cos t)'_t = \\ &= \frac{4}{\cos^5 t} \cdot (-\sin t) = -\frac{4\sin t}{\cos^5 t} \end{aligned}$$

Подставляем завоёванные трофеи в формулу и проводим финальное упрощение.

Готово.

Для закрепления материала:

Пример 56

Найти y'_x и y''_{xx} параметрически заданной функции

а)

б)

Решения и ответы совсем близко.

**Поздравляю вас с прохождением курса,
теперь вы сможете найти практически любую производную!**

И это не преувеличение – ведь я задал достаточно высокую планку.

Более подробную информацию и дополнительные примеры можно найти в [соответствующем разделе](#) портала mathprofi.ru (*ссылка на аннотацию к разделу*).

Желаю успехов!

8. Решения и ответы

Пример 4. Решение:

В ходе решения данного примера следует обратить внимание, на тот факт, что a и b – постоянные числа, неважно чему они равны, важно, что это константы. Поэтому выносятся за знак производной, a .

Пример 7. Решение:

Пример 9. Решение:

Пример 12. Решение:

Пример 14. Решение:

Пример 16. Решение:

Пример 19. Решение:

Пример 21. Решение:

Пример 23. Решение:

Ответы на Математический диктант:

Пример 25. Решение:

а)

б)

Примечание: ответ лучше оставить именно в таком виде – это значительно облегчает его проверку

Пример 27. Решение: преобразуем функцию:

Найдем производную:

Пример 29. Решение:

Пример 31. Решение:

Примечание: перед дифференцированием можно было раскрыть скобки и использовать правило один раз.

Пример 33. Решение:

Пример 35. Решение: сначала преобразуем функцию:

Найдем производную. Используем правило дифференцирования сложной функции:

Пример 36. Решение: сначала преобразуем функцию:

Найдем производную:

Пример 38. Решение: используем логарифмическую производную:

Дифференцируем обе части:

Таким образом:

Пример 40. Решение: используем логарифмическую производную:

Пример 41. Решение: используем логарифмическую производную:

Пример 43. Решение: найдем первую производную:

Найдем вторую производную:

Пример 45. Решение: найдём пятую производную:

Очевидно, что

Ответ:

Пример 47. Решение: найдём несколько производных:

Запишем «энную» производную:

Таким образом:

Ответ:

Пример 50. Решение:

Таким образом:

Пример 52. Решение:

Пример 54. Решение: используем формулу. В данном случае:

Таким образом:

Пример 56. Решение:

а) Найдём первую производную. Используем формулу:

В данном случае:

Вторую производную найдём по формуле.

Таким образом:

б) Найдём первую производную:

Вторая производная:

В результате: