Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych z Metod Numerycznych

Gabriel Naleźnik

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

01.04.2020 r.

Laboratoria V : *Diagonalizacja macierzy symetrycznej metodą potęgową z redukcją Hotellinga.*

1. Wstęp Teoretyczny.

Macierz symetryczna – macierz kwadratowa (tzn. o tej samej liczbie wierszy i kolumn), której wyrazy położone symetrycznie względem przekątnej głównej są równe.

Problem własny - poszukiwanie rozwiązania jednorodnego układu równań liniowych (równania własnego), w którym macierz współczynników $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I\lambda}$ zależy od jednego parametru λ.

$$Ax = \lambda x$$

Równanie. 1.1 Postać równania własnego

Gdzie: A-macierz kwadratowa, x-szukany wektor własny, λ- szukana wartość własna

Istotą algebraicznego problemu własnego jest dobór takiego wektora y, do którego byłby proporcjonalny wektor x. Zatem powinien zachodzić związek:

$$y = \lambda x$$

Metoda potęgowa wyznaczania pojedynczych wartości własnych i wektorów własnych:

Załóżmy że istnieje n liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy A, stanowią bazę przestrzeni liniowej: $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n}$

Wówczas dla dowolnego wektora $\boldsymbol{v_0} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i x_i}$

Jeśli λ_i stanowią wartości własne macierzy, to:

$$\boldsymbol{Av_0} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i \lambda_i x_i} \quad oraz \quad \boldsymbol{v_m} = \boldsymbol{A^m v_0} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i \lambda_i^m x_i}$$

Jeśli λ_1 jest dominującą wartością własną, oraz wektor $\boldsymbol{v_0}$ ma składową w kierunku $\boldsymbol{x_1}$ to wówczas zachodzi: $\lim_{m\to\infty} \frac{\boldsymbol{A^m v_0}}{\boldsymbol{\lambda_1^m}} = \boldsymbol{a_1 x_1}$

Z powyższego wynika że wartość własną można obliczyć ze wzoru:

$$\boldsymbol{\lambda_1} = \lim_{m\to\infty} \frac{\boldsymbol{y^T v_{m+1}}}{\boldsymbol{y^T v_m}}$$

Równanie. 1.2 Wzór na wartość własną macierzy

Ponieważ $v_m \approx a_i \lambda_i^m x_i$ to unormowany wektor własny ma postać:

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{\boldsymbol{v_m}}{|\boldsymbol{v_m}|}$$

Równanie. 1.3 Wzór na unormowany wektor własny macierzy

Redukcja macierzy - Jedna z metod wyznaczania pozostałych wartości własnych macierzy. Jeśli $\boldsymbol{\lambda_1}$ jest wartością własną macierzy **A** i $\boldsymbol{x_1}$ odpowiadającym jej wektorem własnym oraz dla dowolnego wektora **v** o własności $\boldsymbol{v^T x_1 = 1}$, macierz zredukowana postaci: $\boldsymbol{W_1 = A - \lambda_1 x_1 v^T}$ Ma te same wartości co macierz **A** oprócz wartości własnej λ_1 która jest zerem.

Redukcja Hotellinga - przykład metody redukcji macierzy, która jest skuteczna tylko w przypadku macierzy symetrycznych (wtedy lewe wektory własne są identyczne z prawymi). Wtedy za wektor **v** podstawiamy lewy wektor własny $\boldsymbol{x_1}$ przynależny wartości własnej $\boldsymbol{\lambda_1}$. Macierz zredukowana ma postać: $\boldsymbol{W_1 = A - \lambda_1 x_1 x_1^T}$

2. Opis problemu.

Problemem w tym zadaniu z laboratoriów było rozwiązanie macierzowego problemu własnego korzystając z metody potęgowej (oraz redukcji Hotellinga), czyli wyznaczenie wartości własnych i wektorów własnych dla macierzy symetrycznej **A** o rozmiarze **n=7** zadanej wzorem:

$$A_{i,j} = \frac{\boldsymbol{1 + |i + j|}}{\boldsymbol{1 + |i - j|}} \quad \boldsymbol{i, j = 0, 1, 2, \ldots, n - 1}$$

3. Wyniki

Napisałem program w języku C w którym zaimplementowałem metodę potęgową do wyznaczenia wartości i wektorów własnych macierzy, która korzystała z redukcji Hotellinga. Poniżej zamieszczam uzyskane wyniki:

Uzyskane wartości własne po wykonaniu maksymalnej liczby iteracji **IT_MAX = 12**:

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 24.5585}$$

$$\boldsymbol{\lambda_2 = 8.85119}$$

$$\boldsymbol{\lambda_3 = 5.86621}$$

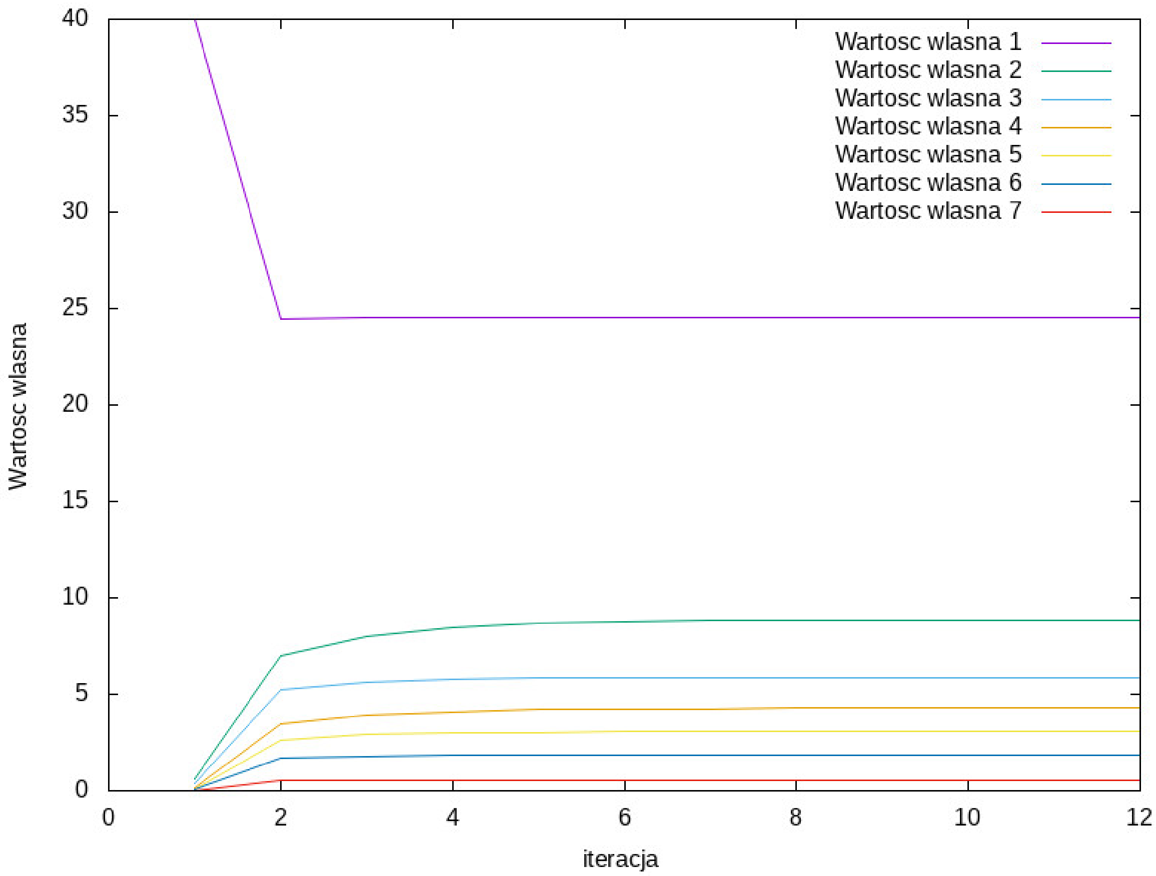
$$\boldsymbol{\lambda_4 = 4.29356}$$

$$\boldsymbol{\lambda_5 = 3.05836}$$

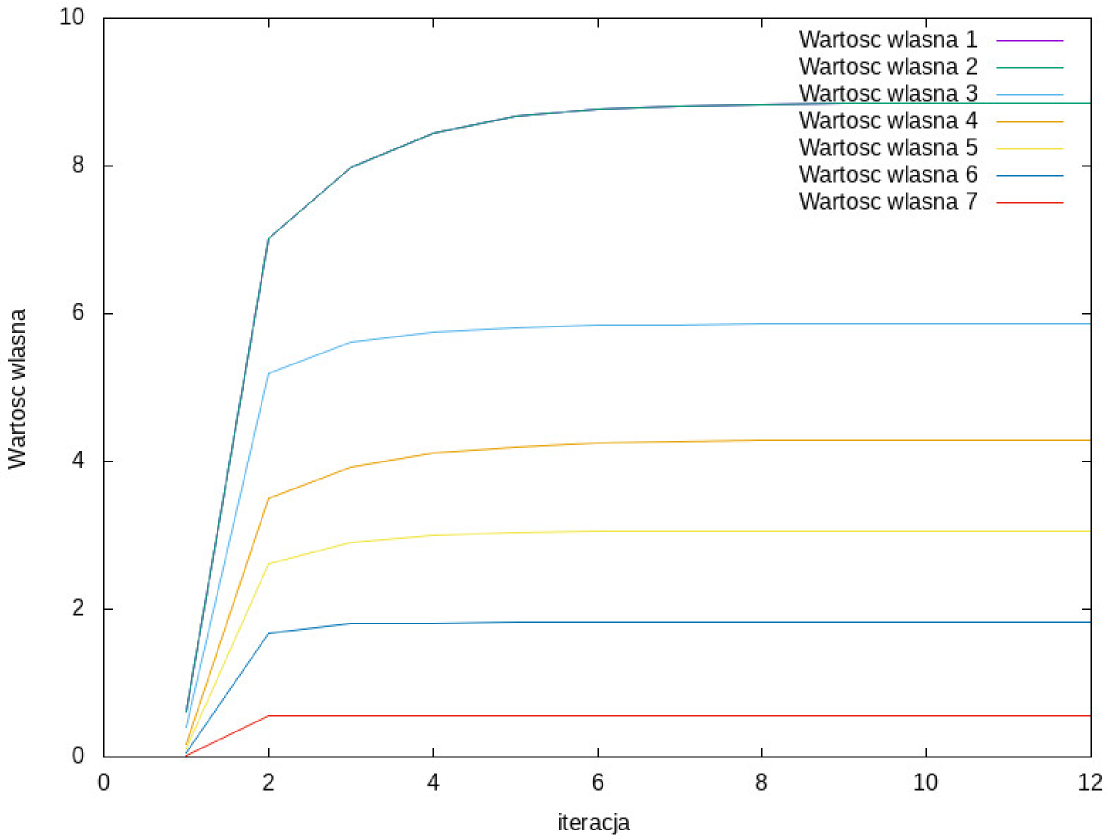
$$\boldsymbol{\lambda_6 = 1.81862}$$

$$\boldsymbol{\lambda_7 = 0.552968}$$

Jak widać, kolejne, znalezione wartości własne macierzy były coraz mniejsze.

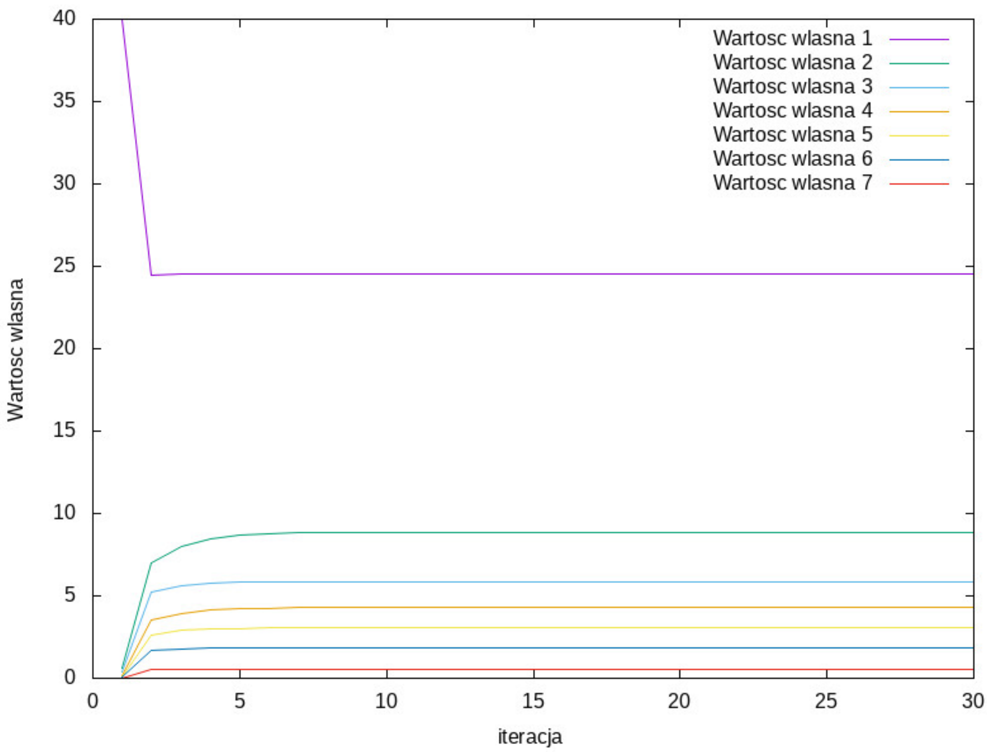


Rys. 3.1 Wykresy kolejnych przybliżeń znalezionych wartości własnych dla IT_MAX = 12



Rys. 3.2 Wykresy kolejnych przybliżeń znalezionych wartości własnych (przybliżenie zakresu y=[0, 10])

Jak można zaważyć na powyższych wykresach, wartości własne stabilizują się po upływie około 3 iteracji.



Rys. 3.3 Wykresy kolejnych przybliżeń znalezionych wartości własnych dla IT_MAX = 30

Następnie zadałem warunek STOP-u dla procesu iteracyjnego - jeżeli dwa kolejne przybliżenia $\boldsymbol{\lambda_k}$ różniły się o mniej niż 10^{-6} , pętla była przerywana. Poniżej zamieszczam informację ile iteracji potrzebowały poszczególne wartości własne do spełnienia warunku STOP-u:

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 6}$$

$$\boldsymbol{\lambda_2 = 17}$$

$$\boldsymbol{\lambda_3 = 18}$$

$$\boldsymbol{\lambda_4 = 18}$$

$$\boldsymbol{\lambda_5 = 12}$$

$$\boldsymbol{\lambda_6 = 7}$$

$$\boldsymbol{\lambda_7 = 2}$$

Elementy macierzy $D = X^T * A * X$:

24.5585	-3.47625e-05	-4.06504e-08	-2.92213e-10	-4.15967e-12	-1.42109e-14	-3.44169e-15
-3.47625e-05	**8.85152**	-0.0693512	-0.000498601	-7.09966e-06	-1.67894e-08	-1.93318e-14
-4.06504e-08	-0.0693512	**5.86672**	-0.055973	-0.000774815	-1.83125e-06	-2.3582e-12
-2.92213e-10	-0.000498601	-0.055973	**4.29417**	-0.0563398	-0.000125826	-1.61839e-10
-4.15924e-12	-7.09966e-06	-0.000774815	-0.0563398	**3.05862**	-0.00703293	-8.70659e-09
-1.43011e-14	-1.67894e-08	-1.83125e-06	-0.000125826	-0.00703293	**1.81862**	-4.15696e-06
-3.46858e-15	-1.92355e-14	-2.35837e-12	-1.61838e-10	-8.70659e-09	-4.15696e-06	**0.552968**

Rys. 3.4 Elementy macierzy D po wykonaniu 12 iteracji

Jak widać, macierz D z pewną dokładnością jest macierzą diagonalną, gdzie na głównej diagonali znajdują się przewidziane wartości własne macierzy A. Elementy pozadiagonalne to bardzo małe wartości które wynikają z błędów numerycznych powstałych w programie. Otrzymany wynik zgadza się z moimi przewidywaniami, jednak elementy pozadiagonalne nie są moim zdaniem wystarczająco bliskie zeru.

24.5585	-3.62377e-13	3.55271e-15	-1.77636e-15	-6.43929e-15	-5.05151e-15	2.61458e-14
-3.62377e-13	**8.85177**	-4.21922e-05	-1.13461e-09	-3.74492e-14	2.91434e-16	-3.64986e-15
1.33227e-15	-4.21922e-05	**5.86649**	-0.000201414	-6.55296e-09	-9.92262e-16	5.68989e-16
-1.44329e-15	-1.13461e-09	-0.000201414	**4.29395**	-0.000121101	-2.42745e-11	2.63678e-16
-5.95704e-15	-3.73451e-14	-6.55295e-09	-0.000121101	**3.05775**	-5.95842e-07	-4.61436e-16
-5.93622e-15	6.00214e-16	-1.03216e-15	-2.42744e-11	-5.95842e-07	**1.81861**	-1.22764e-15
2.59116e-14	-3.66287e -15	6.70471e -16	2.22045e-16	-4.11224e-16	-1.17677e-15	**0.552968**

Rys. 3.5 Elementy macierzy D po wykonaniu 30 iteracji

Po wykonaniu 30 iteracji, elementy pozadiagonalne macierzy D są bliższe zeru, zatem można tutaj mówić o dokładniejszym przybliżeniu macierzy D.

Macierz $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \ldots, \boldsymbol{x_n}]$ przechowująca w kolumnach wyznaczone wektory własne macierzy A:

0.096045	**0.0733327**	**0.0864702**	**0.0893316**	**0.13063**	**0.233283**	**0.947638**
0.152429	**0.178058**	**0.218061**	**0.257462**	**0.402841**	**0.754008**	**-0.315433**
0.231605	**0.335488**	**0.374139**	**0.399704**	**0.410934**	**-0.603493**	**-0.0291693**
0.333205	**0.472131**	**0.314388**	**0.0368502**	**-0.744309**	**0.10547**	**-0.0257051**
0.446651	**0.385351**	**-0.25313**	**-0.705051**	**0.299038**	**-0.0347235**	**-0.0181773**
0.541721	**-0.114054**	**-0.671228**	**0.484767**	**-0.0909673**	**-0.011642**	**-0.0150949**
0.5567	**-0.682609**	**0.437641**	**-0.180325**	**-0.00971285**	**-0.0195682**	**-0.0203301**

Rys. 3.6 Elementy macierzy X (wektory własne zapisane w kolumnach)

4. Wnioski

Wyniki uzyskane przez program pokrywają się z moimi przewidywaniami. Wraz ze zwiększającą się liczbą iteracji, przybliżenia były coraz to dokładniejsze, co potwierdza, że metoda potęgowa zwraca tym bardziej precyzyjne wyniki im więcej iteracji zadamy w programie. Metoda potęgowa z redukcją Hotellinga bardzo szybko wyznaczyła wartości i wektory własne zadanej macierzy symetrycznej jak i macierz diagonalną D, jednak należy przyjąć pewien zakres niedokładności, gdyż uzyskane wyniki nie są idealne (wartości niezerowe poza główną diagonalą macierzy D). Jest to metoda bardzo wydajna w celach diagonalizacji macierzy symetrycznych (program wykonał się bardzo szybko, a sam algorytm jest dosyć prosty).