Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych z Metod Numerycznych

Gabriel Naleźnik

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

05.05.2020 r.

Laboratoria X : *Minimalizacja wartości funkcji metodą złotego podziału*

1. Wstęp Teoretyczny.

Optymalizacja matematyczna - problem matematyczny polegający na znalezieniu ekstremum (minimum lub maksimum) zadanej funkcji celu.

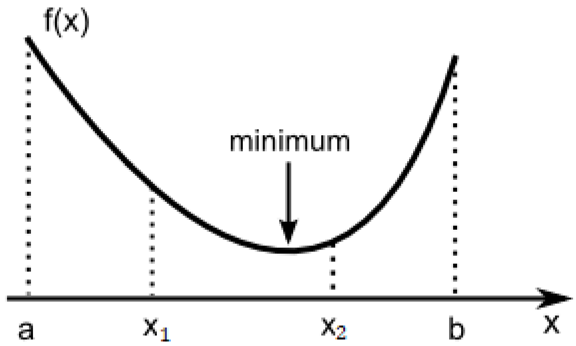
Minimum lokalne - punkt **x*** stanowi minimum lokalne jeżeli:

$$\exists\, \varepsilon :\ \varepsilon > 0, \varepsilon \in R \quad \bigwedge_{x:\|x-x^*\|<\varepsilon} f(x) > f(x^*)$$

Metoda złotego podziału - Metoda numeryczna służąca do poszukiwania minimum jednowymiarowej funkcji celu **f(x)**. Algorytm polega na poszukiwaniu minimum lokalnego w danym przedziale w którym spodziewamy się minimum i który zostaje zawężany z kolejnymi iteracjami algorytmu. Przedział $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ jest dzielony na 3 części poprzez wyznaczenie 2 punktów wewnątrz przedziału: $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\lambda_1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ oraz $\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\lambda_2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$, gdzie $\boldsymbol{\lambda_1} = \boldsymbol{r^2}$ i $\boldsymbol{\lambda_2} = \boldsymbol{r}$, $\left(r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}61803398\right)$

W celu znalezienia minimum funkcji f(x) sprawdzamy następujący warunek: jeżeli $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})$ to zmieniamy granice przedziału na $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x_2}]$, w przeciwnym przypadku zmieniamy granice przedziału na $[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{b}]$**.**

Algorytm jest powtarzany aż do spełnienia warunku: $|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}| < \boldsymbol{\varepsilon}$, a za minimum funkcji przyjmujemy środek ostatniego wyznaczonego podprzedziału: $\boldsymbol{x_{min}} = \frac{\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}}{\boldsymbol{2}}$



Metoda opiera się na wykorzystaniu metody heurystycznej do znalezienia jak najbardziej optymalnej wartości stałych λ_1 i λ_2 użytej we wzorze na punkty dzielące przedział [a, b] tak by uzyskać jak najmniejszą liczbę podziałów. W znalezieniu tych stałych zostaje wykorzystana zależność **złotej proporcji**.

2. Opis problemu.

Problemem w tym zadaniu z laboratoriów było znalezienie minimum wartości funkcji f(x) oraz g(x) za pomocą metody złotego podziału stosując złotą proporcję oraz podział na 3 równe odcinki.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \;=\; \boldsymbol{ln}\;(\;\boldsymbol{x^5} + \boldsymbol{3x^2} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{9})$$

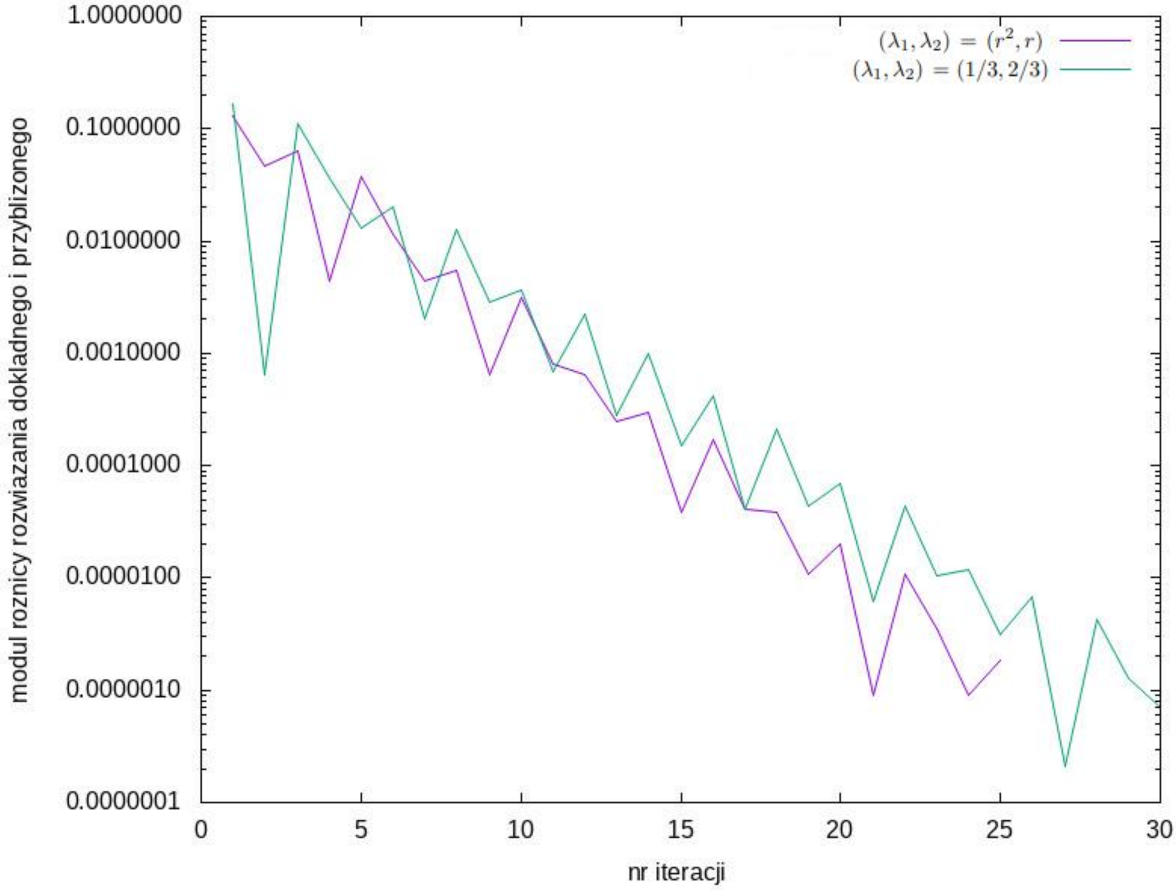
w przedziale $x \in [-0.5, 1]$, gdzie rozwiązanie dokładne to $x_{min} = -0.1673198$,

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^6}$$

w przedziale $x \in [-4, 1]$, gdzie rozwiązanie dokładne to $x_{min} = 0$,

3. Wyniki

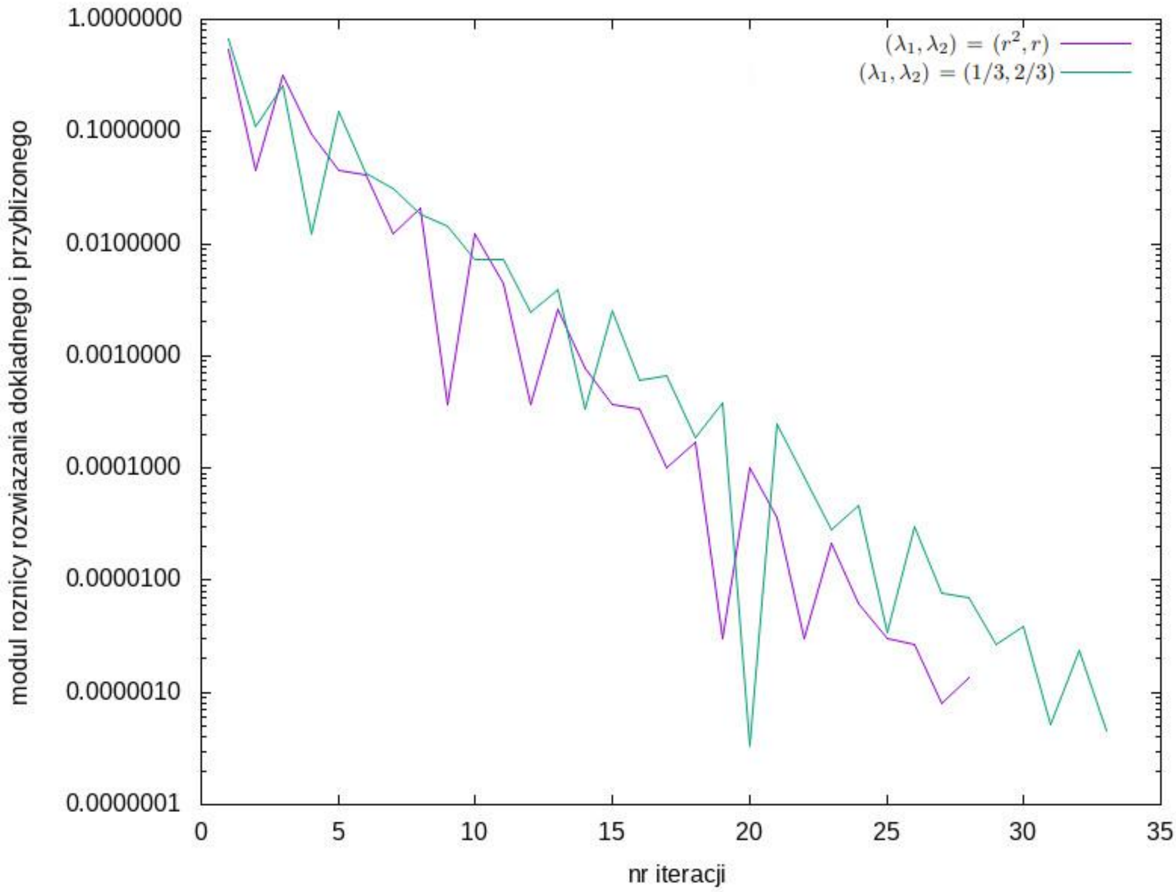
Napisałem program w języku C, w którym zaimplementowałem metodę złotego podziału do poszukiwania minimum wartości funkcji. Poniżej zamieszczam uzyskane wyniki:



Rys. 3.1 Porównanie Modułów różnicy dokładnego i przybliżonego minimum f(x) w funkcji numeru iteracji dla dwóch sposobów jego wyznaczenia

Jak można zauważyć, korzystając ze stałych wyznaczonych przy pomocy złotej proporcji, algorytm zakończył się szybciej (25 iteracji) po uzyskaniu wystarczająco małego podprzedziału z wyznaczonym $\boldsymbol{x_{min} = -0.167322}$ i o module różnicy z rozwiązaniem dokładnym $\boldsymbol{1.85816 * 10^{-6}}$**.** Za pomocą podziału na 3 równe odcinki algorytm zakończył swoje działanie po 5 dodatkowych iteracjach z rozwiązaniem $\boldsymbol{x_{min} = -0.16732}$ i modułem różnicy z rozwiązaniem dokładnym $\boldsymbol{6.97541 * 10^{-7}}$**.** Interesujące jest to że druga metoda dostarczyła nam dokładniejsze przybliżenie (jednak po większej liczbie iteracji) oraz, że przed zakończeniem działania algorytmu w niektórych iteracjach uzyskiwaliśmy dokładniejsze przybliżenia niż to uzyskane na jego końcu.

Wynikać to może ze zbiegu okoliczności gdy rozpatrywany podprzedział był jeszcze duży, ale jego krańce były prawie równoodległe od rzeczywistego minimum funkcji.



Rys. 3.2 Porównanie Modułów różnicy dokładnego i przybliżonego minimum g(x) w funkcji numeru iteracji dla dwóch sposobów jego wyznaczenia

Tutaj widać, że również algorytm wykorzystujący złotą proporcję kończy swoje działanie nieco szybciej (28 iteracji) niż ten wykorzystujący podział na 3 równe części (33 iteracji), ponownie 5 iteracji szybciej. Pierwszy sposób pozwolił wyznaczyć przybliżenie minimum $\boldsymbol{x_{min}} = \mathbf{-1.36796 * 10^{-6}}$ o module różnicy z rozwiązaniem dokładnym $\mathbf{1.36796 * 10^{-6}}$ natomiast drugi sposób wyznaczył przybliżenie $\boldsymbol{x_{min}} = \mathbf{-4.53589 * 10^{-7}}$ z modułem różnicy z rozwiązaniem dokładnym $\mathbf{4.53589 * 10^{-7}}$**.** Po raz kolejny metoda podziału na 3 równe odcinki dała nam lepsze przybliżenie przy większej liczbie iteracji oraz w poprzednich iteracjach algorytmu znajdują się lepsze przybliżenia naszego poszukiwanego minimum. Mimo to metoda wykorzystująca złotą proporcję jest lepsza ze względu na szybsze zakończenie algorytmu przy niewielkim błędzie bezwzględnym.

4. Wnioski

Metoda złotego podziału jest bardzo wydajną, dokładną i prostą w implementacji metodą poszukiwania minimum funkcji. Jej wadą natomiast jest to, że musimy znać przedział w którym możemy spodziewać się co najwyżej jednego minimum oraz rozpatrywana funkcja musi być jednowymiarowa i ciągła w całym przedziale. Wykorzystując ją do wyznaczenia minimum dwóch zadanych funkcji, udało się uzyskać przybliżenia niezbyt odbiegające od rozwiązań dokładnych, zatem można wywnioskować, że jest ona bardzo skuteczna dla tego typu problemów.