Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych z Metod Numerycznych

Gabriel Naleźnik

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

13.05.2020 r.

Laboratoria XI : *Aproksymacja sygnału okresowego przy użyciu FFT*

1. Wstęp Teoretyczny.

Dyskretna transformata Fouriera (DFT) - transformata Fouriera wyznaczona dla sygnału próbkowanego, a więc dyskretnego. Dla liczb zespolonych $x_{0,\dots,}x_{n-1}$ i k=0, 1, ..., N-1 określona jest wzorem:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}nk}$$

Obliczanie sum za pomocą powyższego wzoru ma złożoność obliczeniową $O(N^2)$

Szybka transformata Fouriera (FFT) - algorytm wyznaczania dyskretnej transformaty Fouriera oraz transformaty do niej odwrotnej. Pozwala on zmniejszyć liczbę wykonywanych operacji do $O(N\ log_2 N)$.

Algorytm radix-2 - najprostsza i najbardziej powszechna forma algorytmu Cooleya-Tukeya, opracowana w latach 60 XX wieku w celu szybkiej analizy danych sejsmologicznych. Jej zadaniem jest obliczenie współczynników dyskretnej transformaty Fouriera (DFT), ale wykonując jak najmniej obliczeń. W algorytmie zakładamy że całkowita liczba węzłów jest potęgą 2 tj.: $N = 2^k,\ k \in N$

Węzły definiujemy jako $\boldsymbol{x_j = \frac{2\pi}{N} j}$, j=0, 1, ..., N-1

Współczynniki wyznaczamy za pomocą wzoru:

$$c_k = \langle E_K, f\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} E_k^*(x_j) f(x_j) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \exp\,(-I x_j k) = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp\,(-I \frac{2\pi}{N} jk)$$

A po grupowaniu osobno składników parzystych i nieparzystych dostajemy

Parzyste: $\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N} 2mk\right) + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N} (2m+1)k\right)$

Nieparzyste: $\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp\left(-I \frac{2\pi}{\frac{N}{2}} mk\right) + \exp\,(-I \frac{2\pi}{N} k) \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \exp\left(-I \frac{2\pi}{\frac{N}{2}} mk\right)$

Przy oznaczeniach:

$$\boldsymbol{p_k} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp\left(-I \frac{2\pi}{\frac{N}{2}} mk\right), \boldsymbol{q_k} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \exp\left(-I \frac{2\pi}{\frac{N}{2}} mk\right)\ oraz\ \boldsymbol{\varphi_k} = \exp\,(-I \frac{2\pi}{N} k)$$

Współczynniki można zapisać jako: $\boldsymbol{c_k = p_k + \varphi_k q_k}$

Korzystamy z okresowości wyrazów $\boldsymbol{p_k}$ i $\boldsymbol{q_k}$: $\boldsymbol{p_{k+N/2} = p_k}$ oraz $\boldsymbol{q_{k+N/2} = q_k}$

Jak również z własności czynnika fazowego: $\boldsymbol{\varphi_{k+N/2} = -\varphi_k}$

Metoda ta pozwala nam wyliczyć współczynniki dzięki DFT nakładem $\boldsymbol{O}(\frac{\boldsymbol{N^2}}{\boldsymbol{4}})$ oraz dodatkowo oszczędzić czas wyznaczając tylko współczynniki dla **k < N/2** ponieważ:

$$\boldsymbol{c_k} = \begin{cases} \boldsymbol{p_k + \varphi_k q_k} & dla\ k < N/2 \\ \boldsymbol{p_{k+N/2} - \varphi_k q_{k+N/2}} & dla\ k \geq N/2 \end{cases}$$

Kolejnym krokiem FFT jest podział sum w $\boldsymbol{p_k}$ oraz w $\boldsymbol{q_k}$ na sumy zawierające tylko elementy parzyste i nieparzyste, a po podziale liczba elementów w każdej z dwóch powstałych sum jest dwukrotnie mniejsza niż w elemencie macierzystym.
Proces **rekurencyjnego** podziału kończymy, gdy liczba elementów jest równa 1.

2. Opis problemu.

Problemem w tym zadaniu z laboratoriów było zastosowanie FFT do odszumienia sygnału periodycznego. Sygnał okresowy nie zaszumiony ma postać:

$$\boldsymbol{y_0(i) = sin(\omega * i) + sin(2\omega * i) + sin(3\omega * i)}$$

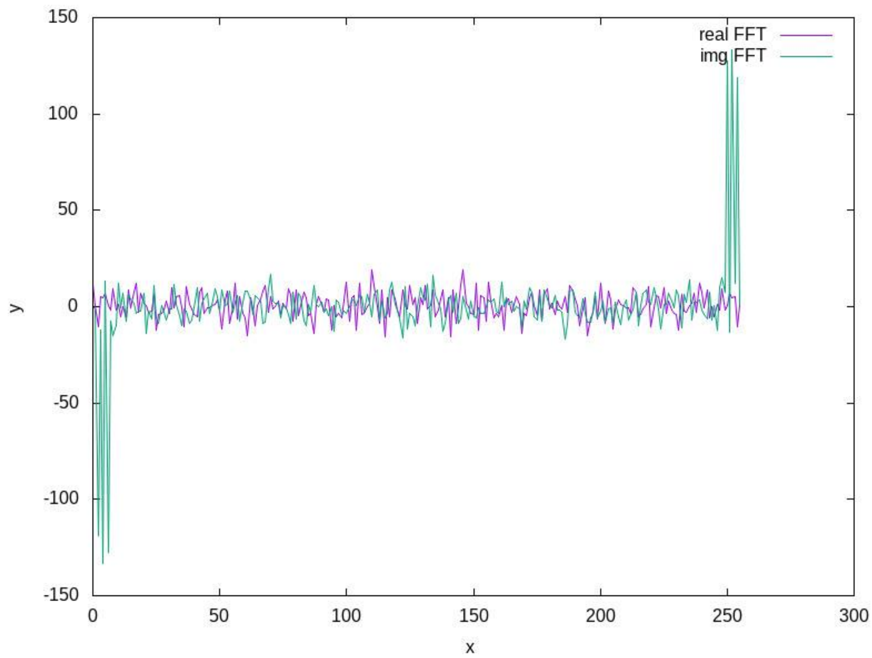
gdzie $i = 0,1,\dots,N-1 \quad \omega = 2\frac{2\pi}{N} \quad N = 2^k$

W zadaniu należało wygenerować sygnał dla **k = 8, 10, 12**.
Szum z przedziału **(-1, 1]** wygenerowany został przy pomocy wzoru:

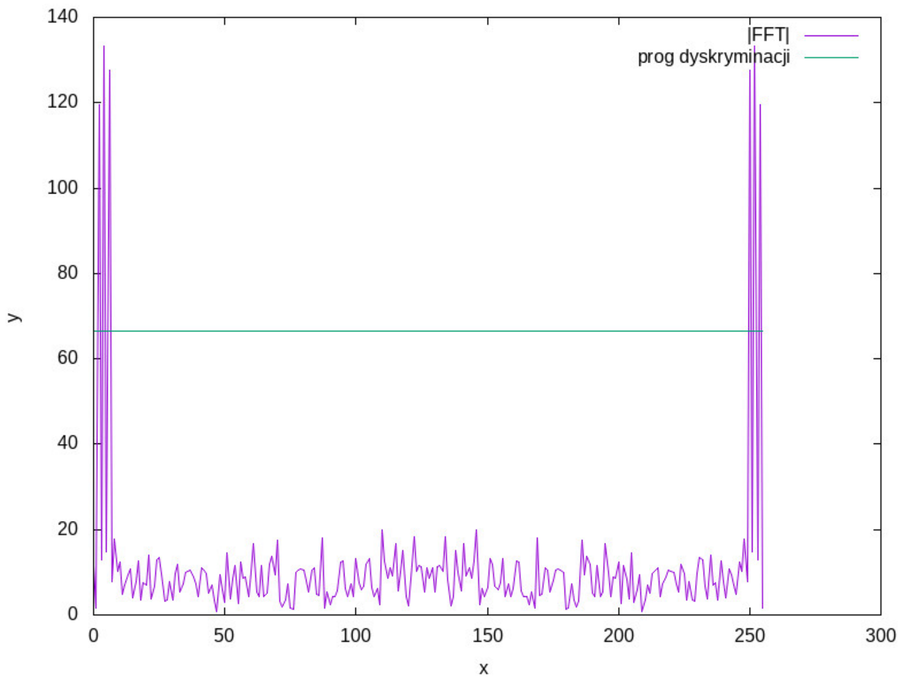
$$\Delta = \boldsymbol{2} * \frac{\boldsymbol{rand}()}{\boldsymbol{RAND\_MAX + 1}} - \boldsymbol{1}$$

3. Wyniki

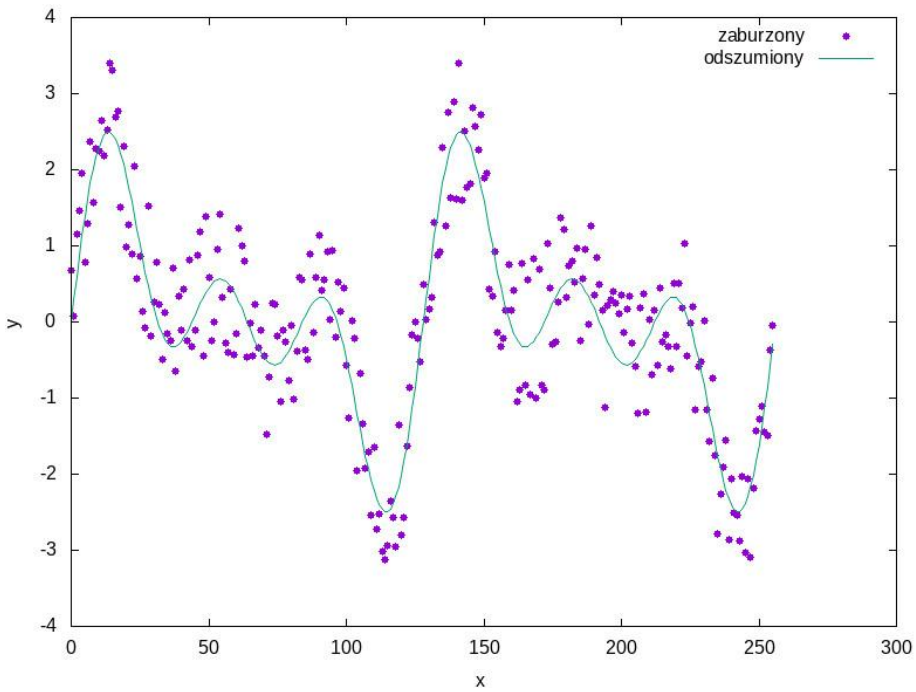
Napisałem program w języku C, w którym zaimplementowałem metodę do odszumiania sygnału periodycznego za pomocą FFT. Poniżej zamieszczam uzyskane wyniki:



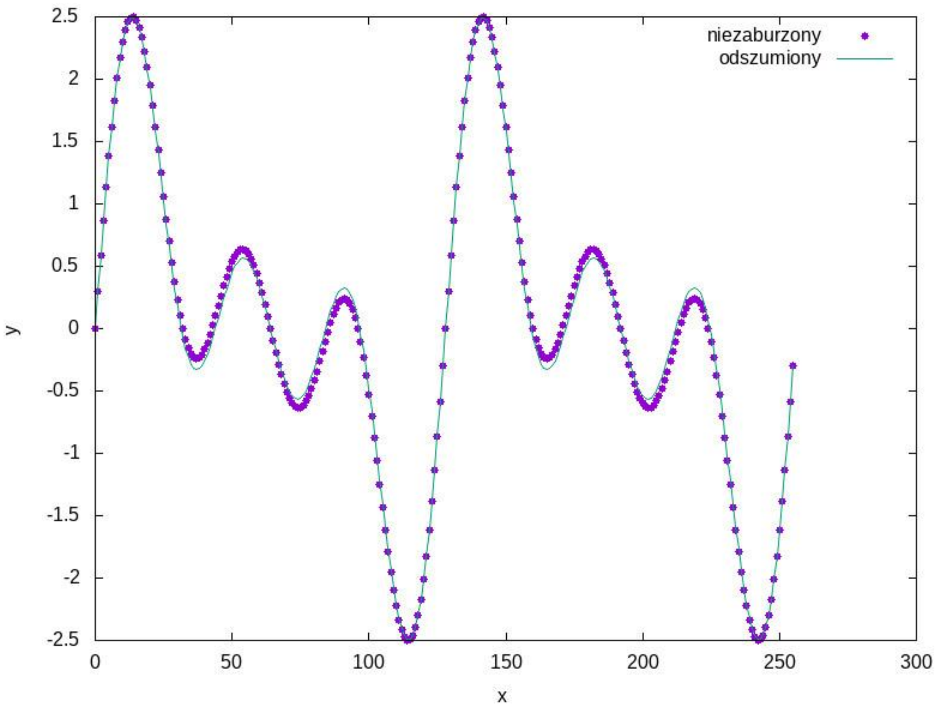
Rys. 3.1 Wykres pokazujący część rzeczywistą i urojoną transformaty dla k=8



Rys. 3.2 Wykres pokazujący wartości modułów współczynników transformaty i próg dyskryminacji sygnału na poziomie max|ck|/2 dla k=8

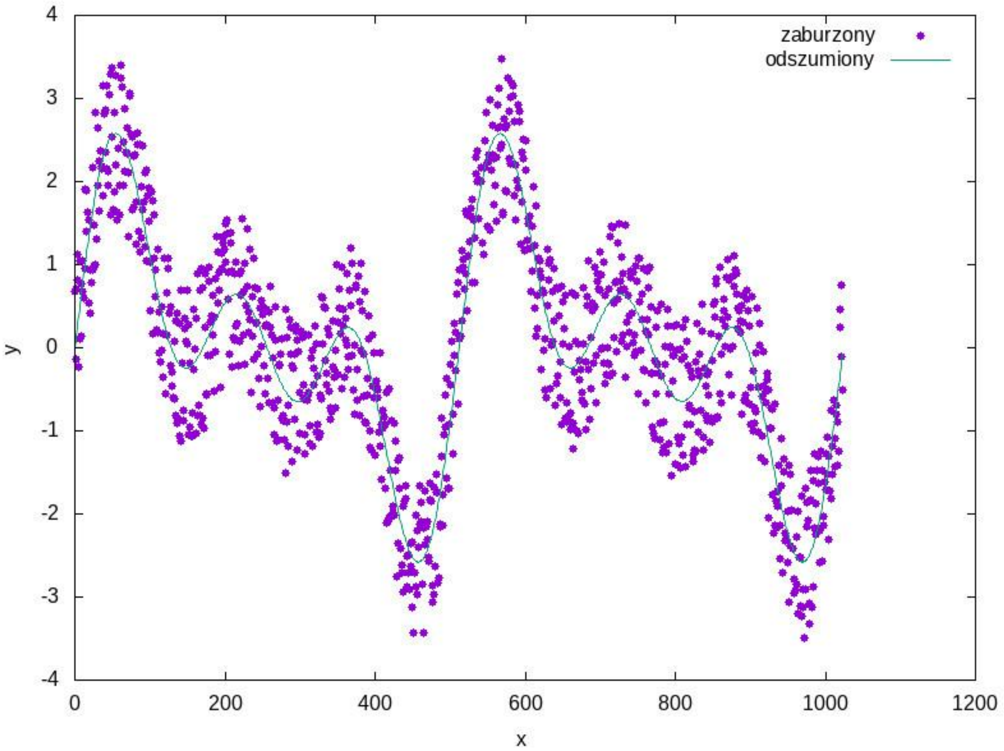


Rys. 3.3 Rysunek sygnału zaburzonego i odszumionego dla k=8

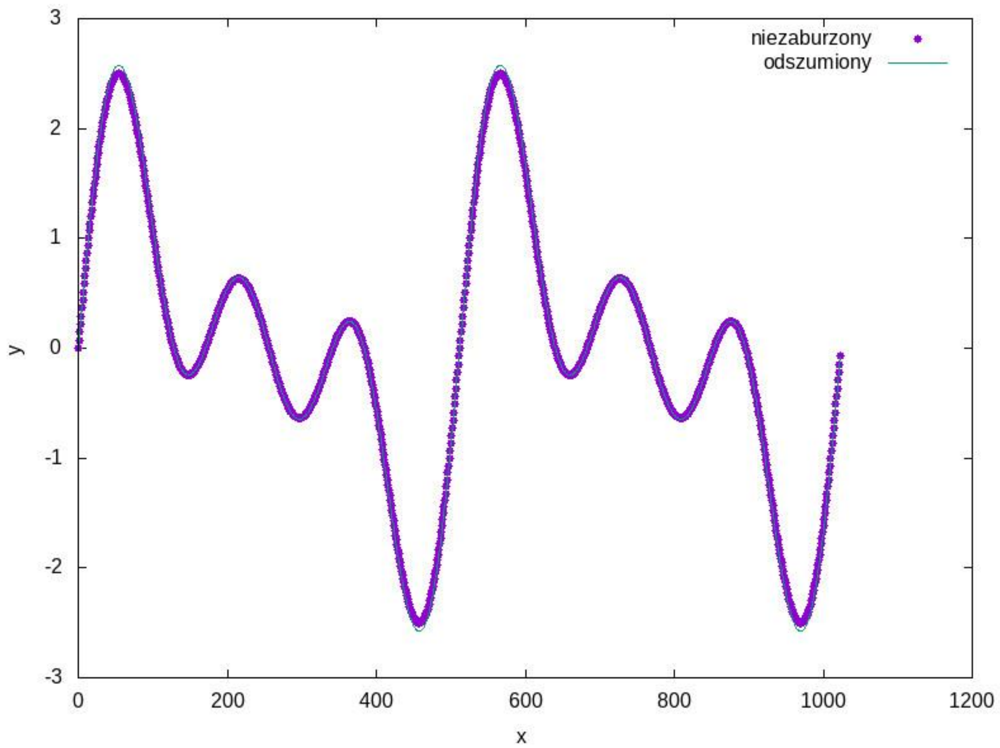


Rys. 3.4 Rysunek sygnału niezaburzonego i odszumionego dla k=8

Jak można zauważyć metoda bardzo dobrze odszumiła zaburzony zbiór danych z rysunku 3.3 dla liczby próbek: 2^8, jednak na rysunku 3.4 w miejscu kilku ekstremów lokalnych można dopatrzeć się niedopasowań wykresu do danych. Sama funkcja w miejscach ekstremów zdaje się nie być gładka.

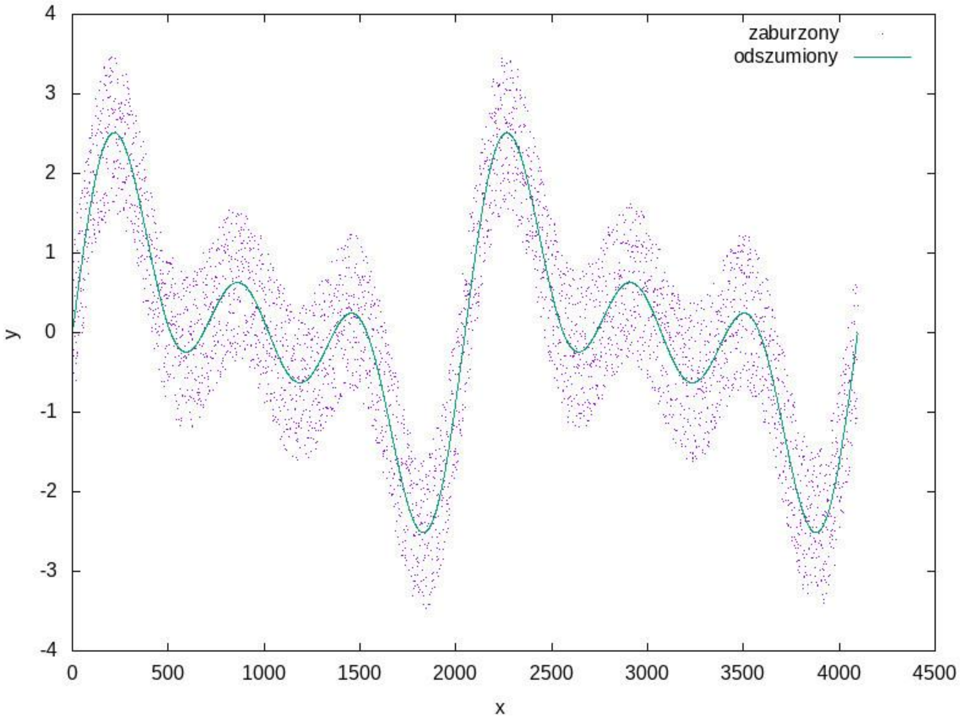


Rys. 3.5 Rysunek sygnału zaburzonego i odszumionego dla k=10

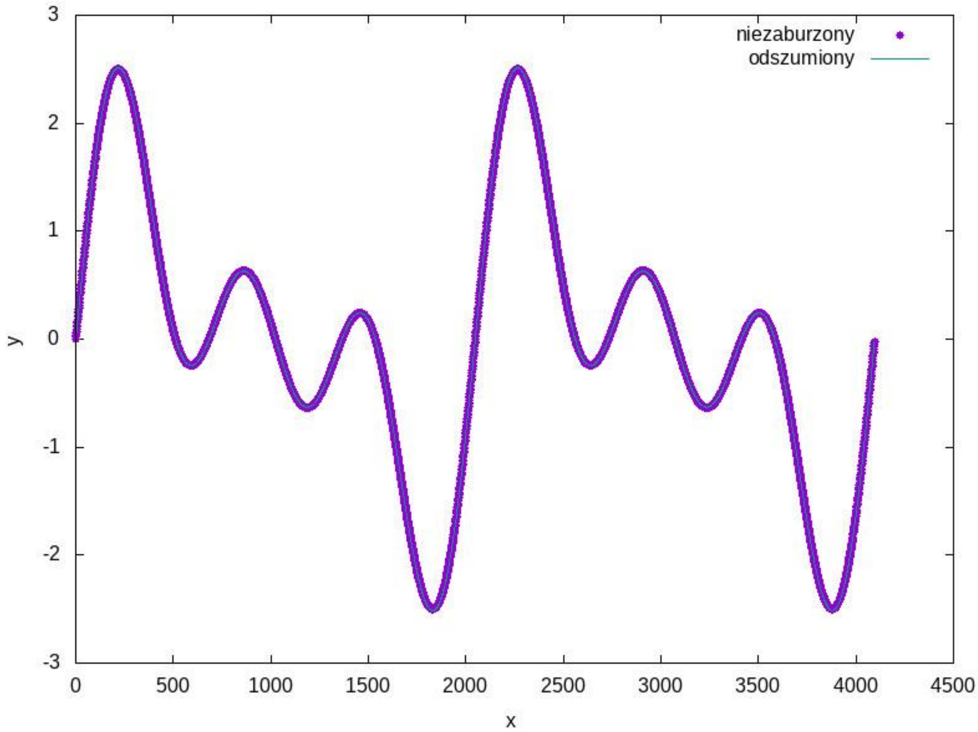


Rys. 3.6 Rysunek sygnału niezaburzonego i odszumionego dla k=10

W przypadku k=10, gdy liczba próbek została zwiększona do 2^{10}, wykres funkcji odszumionej pokrywa więcej ekstremów i jest gładszy niż w poprzednim przypadku. Dalej w niektórych punktach występują pewne odstępstwa.



Rys. 3.7 Rysunek sygnału zaburzonego i odszumionego dla k=12



Rys. 3.8 Rysunek sygnału niezaburzonego i odszumionego dla k=12

Dla liczby prób: 2^{12} uzyskane zostało najlepsze odszumienie sygnału. Uzyskana funkcja niemal całkiem pokrywa wygenerowane, niezaburzone punkty oraz jest bardzo gładka w całej rozpatrywanej dziedzinie.

4. Wnioski

Zwiększenie ilości próbek dało lepszą jakość przybliżenia i szybka transformacja Fouriera pozwoliła na dokładne przybliżenie początkowej funkcji dopiero przy liczbie prób wynoszącej $N=2^{12}$. Dla mniejszych liczb prób kształt funkcji również był zachowany, jednak w punktach ekstremów lokalnych występowały niedopasowania, a odszumiony wykres nie był wystarczająco gładki.
Podsumowując, wykorzystana metoda okazała się być skuteczna w celu odszumienia sygnału periodycznego. Jej wydajność również potwierdza szybkie wykonanie programu.