

# Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych z Metod Numerycznych

---

Gabriel Naleźnik

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej  
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

21.04.2020 r.

## *Laboratoria VII : Interpolacja Lagrange'a z optymalizacją położeń węzłów.*

### 1. Wstęp Teoretyczny.

**Interpolacja wielomianowa** - metoda numeryczna przybliżania funkcji interpolowanej tzw. **wielomianem Lagrange'a** (funkcją interpolującą) stopnia  $n$  przyjmującym w  $n+1$  punktach, zwanych **węzłami interpolacji**, wartości takie same jak przybliżana funkcja. Interpolacja polega na wyznaczeniu przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami oraz na oszacowaniu błędu przybliżonych wartości. Interpolacja znajduje zastosowanie w naukach doświadczalnych, gdzie dysponuje się zazwyczaj skończoną liczbą danych do określenia zależności między wielkościami. Ułatwia również całkowanie i numeryczne obliczanie wartości wyrażeń.

**Interpolacja Lagrange'a** - iteracyjna metoda interpolacyjna. Dla każdego z węzłów znajdujemy wielomian węzłowy Lagrange'a:

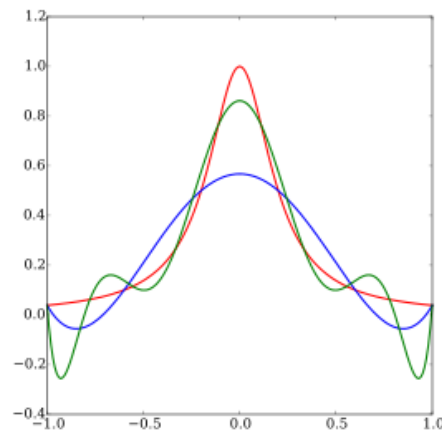
$$\phi_j(x) = \frac{(x - x_0) * (x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0) * (x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}$$

Wtedy nasz szukany wielomian interpolacyjny (Wzór interpolacyjny Lagrange'a) ma postać:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{w_n(x)}{(x - x_j)w'_n(x_j)}$$

Gdzie  $w_n(x) = (x - x_0) * (x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)$

**Efekt Rungego** - Opisuje sytuację gdy, zadanie jest źle uwarunkowane i przy zwiększaniu liczby węzłów interpolacji zamiast zwiększyć dokładność przybliżenia, występują niedopasowania wielomianu interpolacyjnego na krańcach przedziału. Wynika to z oscylacji wielomianów wyższych rzędów. Aby uniknąć tego efektu - stosuje się metody optymalizujące położenia węzłów (np. zera wielomianów Czebyszewa).



Rys. 1.1 Przykład efektu Rungego - Zielona krzywa jako wielomian interpolujący 9. rzędu daje duży błąd przybliżenia

**Wielomiany Czebyszewa** - układ wielomianów ortogonalnych tworzący bazę przestrzeni wielomianów. Ich zera stanowią optymalne położenia węzłów w metodach interpolacyjnych i można je wyznaczyć ze wzoru:

$$x_m = \frac{1}{2} \left[ (x_{max} - x_{min}) * \cos \left( \pi \frac{2m+1}{2n+2} \right) + (x_{max} + x_{min}) \right], \quad m=0, 1, \dots, n$$

Węzły nie są rozmieszczone równomiernie, ale są zagęszczone na krańcach przedziału. Wielomian wyznaczony przy takim ułożeniu węzłów na ogół nie daje najmniejszego błędu tylko jego najmniejsze oszacowanie.

## 2. Opis problemu.

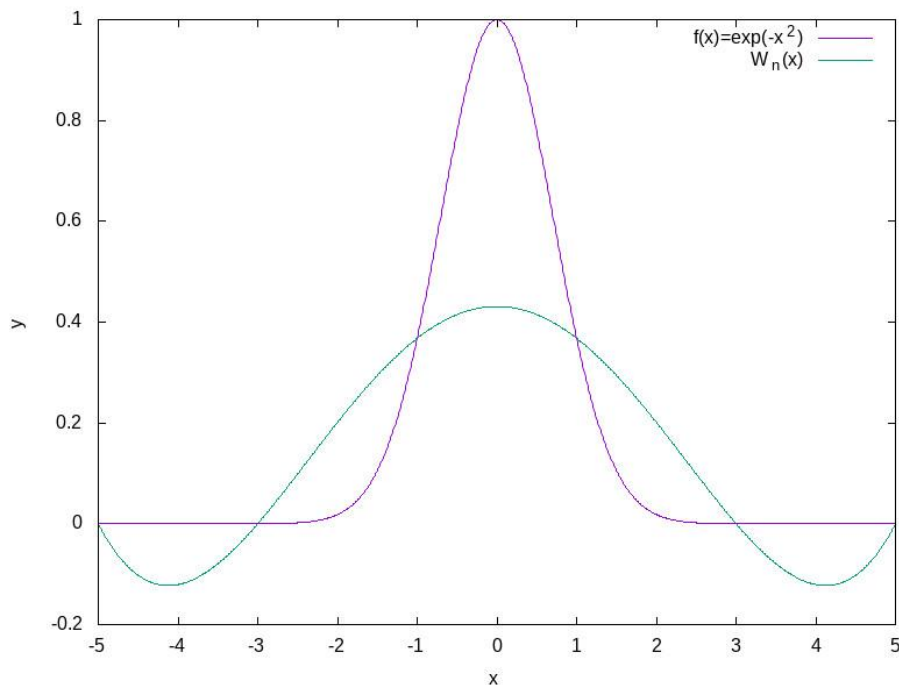
Problemem w tym zadaniu z laboratoriów było znalezienie wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a ( $W_n(x)$ ) w przedziale  $x \in [-5, 5]$  dla funkcji:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

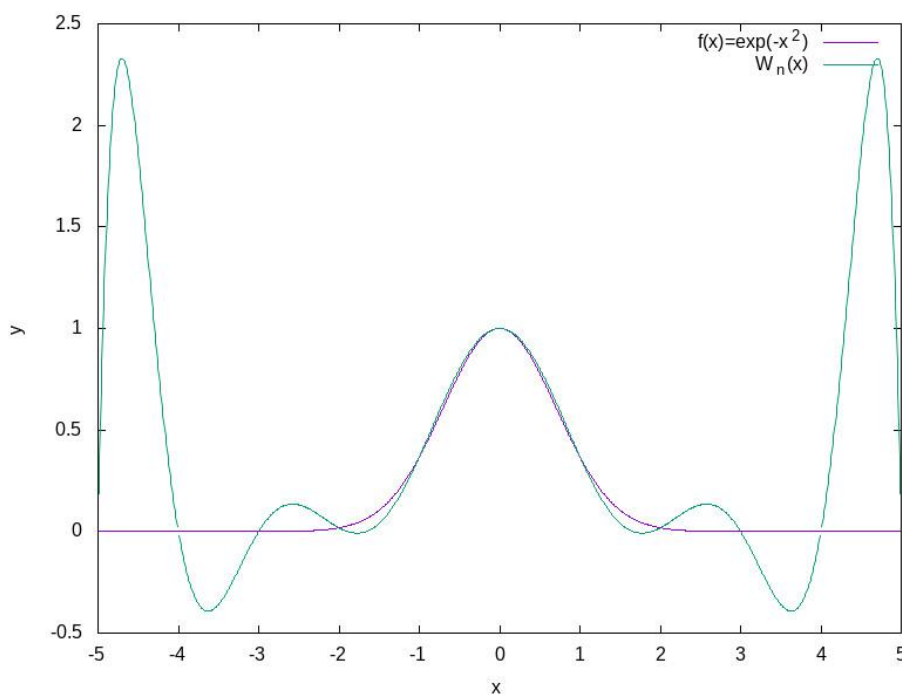
Zadaniem było przeprowadzić interpolację funkcji  $f(x)$  dla stopni wielomianu  $n = 5, 10, 15, 20$  najpierw dla węzłów równoodległych od siebie w zadanym przedziale, a następnie dla węzłów o zoptymalizowanym położeniu korzystając z własności wielomianów Czebyszewa.

### 3. Wyniki

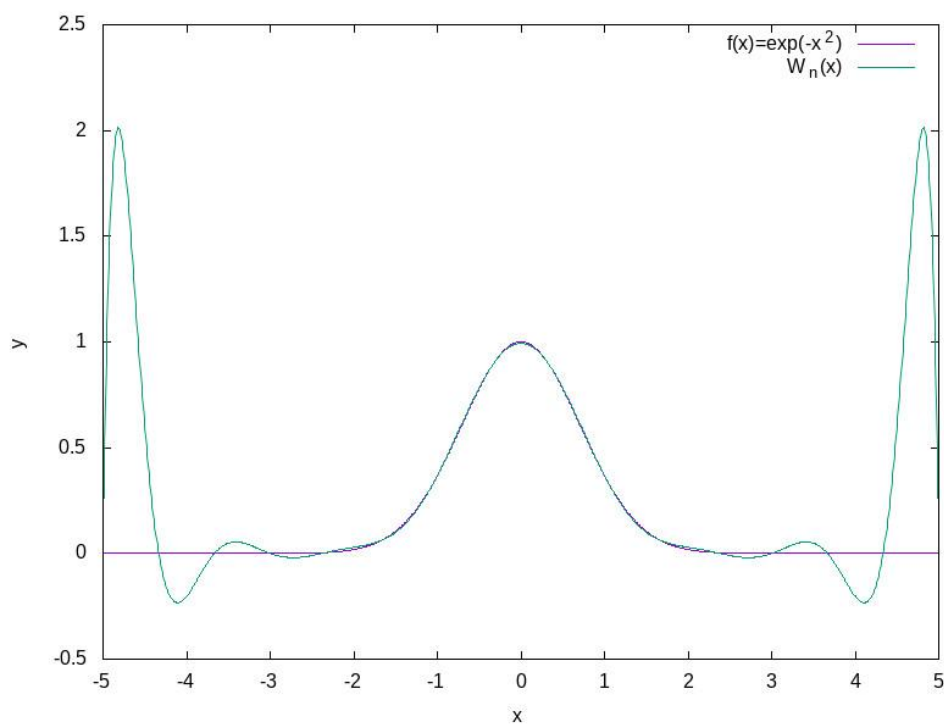
Napisałem program w języku C w którym zaimplementowałem metodę wyznaczającą przybliżoną wartość funkcji w położeniu międzywęzłowym wykorzystując wielomian interpolacyjny Lagrange'a. Poniżej zamieszczam uzyskane wyniki:



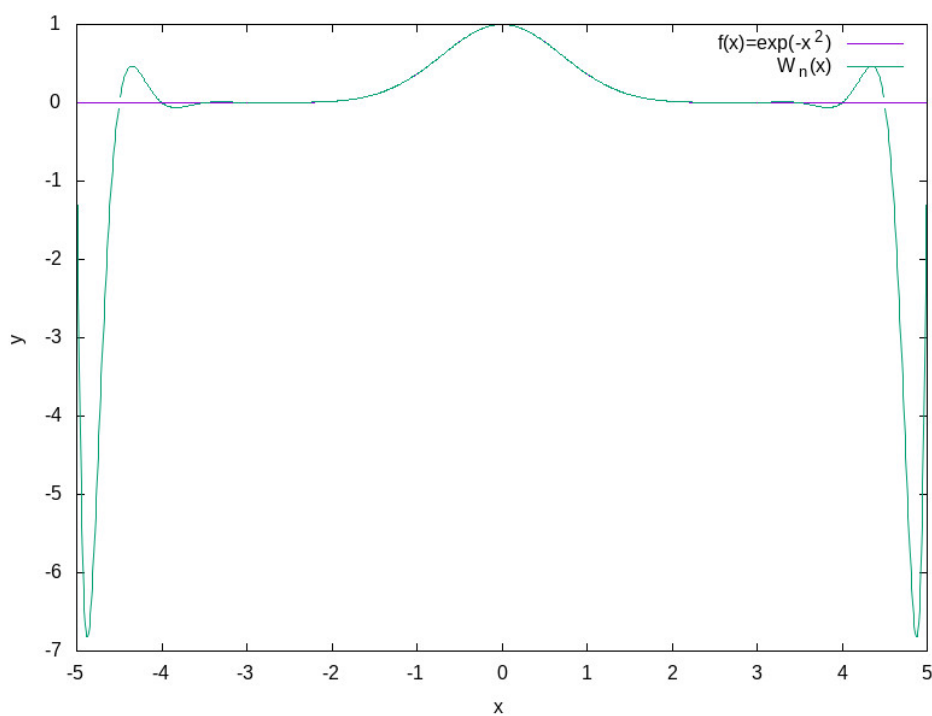
Rys. 3.1 Wykres funkcji interpolowanej i interpolującej dla  $n=5$ , przy klasycznym doborze położenia węzłów



Rys. 3.2 Wykres funkcji interpolowanej i interpolującej dla  $n=10$ , przy klasycznym doborze położenia węzłów

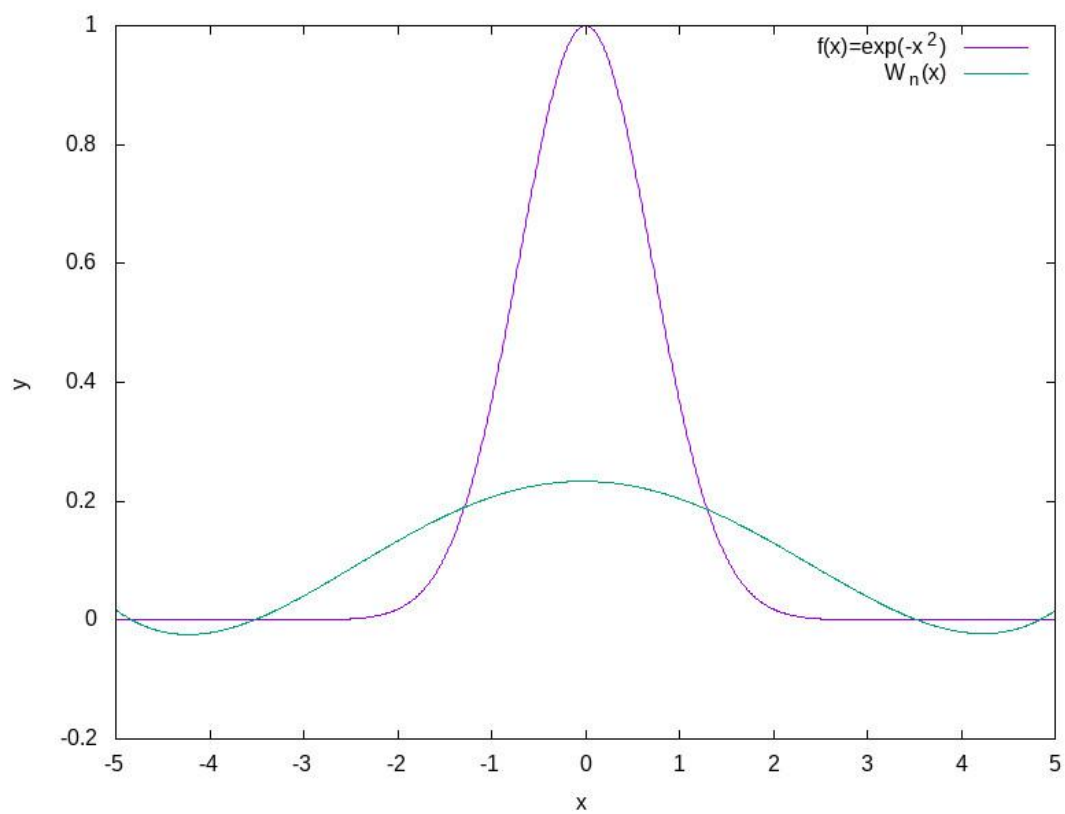


Rys. 3.3 Wykres funkcji interpolowanej i interpolującej dla  $n=15$ , przy klasycznym doborze położenia węzłów

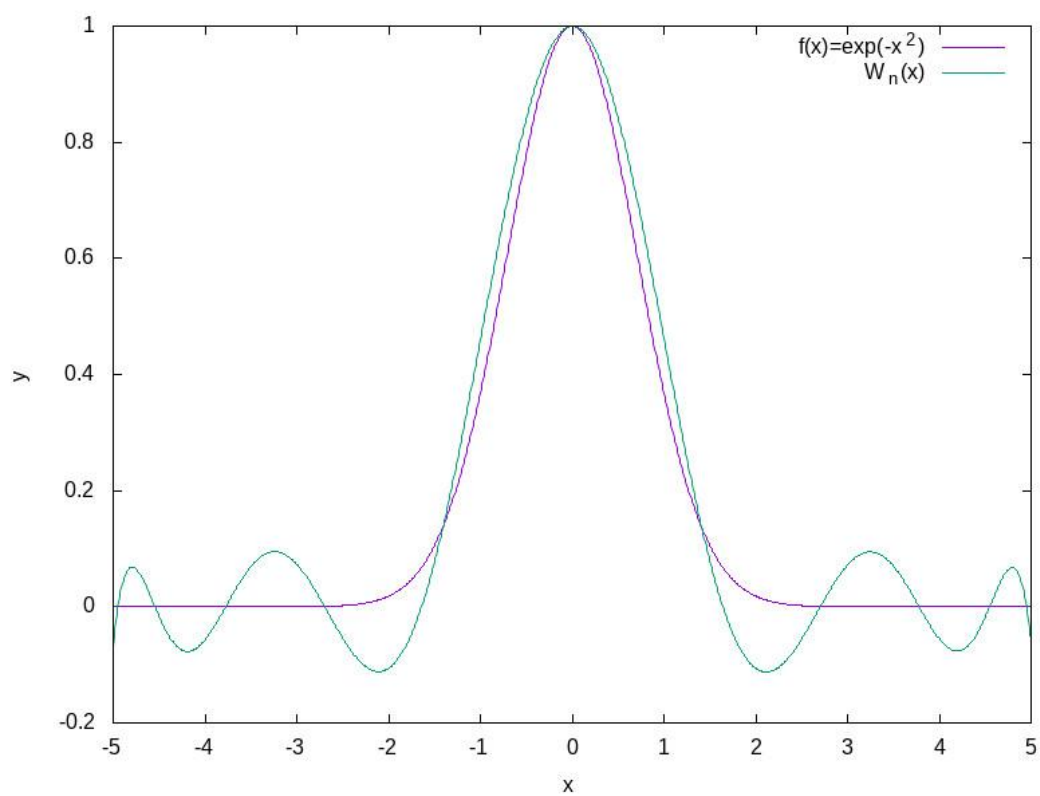


Rys. 3.4 Wykres funkcji interpolowanej i interpolującej dla  $n=20$ , przy klasycznym doborze położenia węzłów

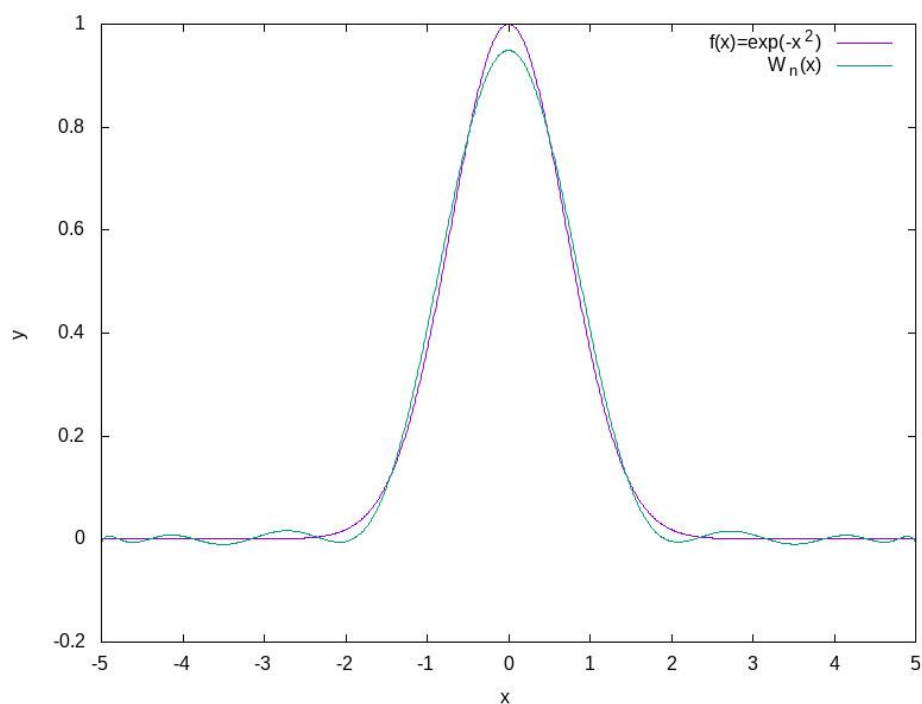
Jak można zauważyć, zwiększenie liczby węzłów przy ich klasycznym doborze pozwoliło nam na zwiększenie dopasowania funkcji interpolującej w środku przedziału, jednak dla jego krańców można zauważyć silne oscylacje i niedokładności (efekt Rungego).



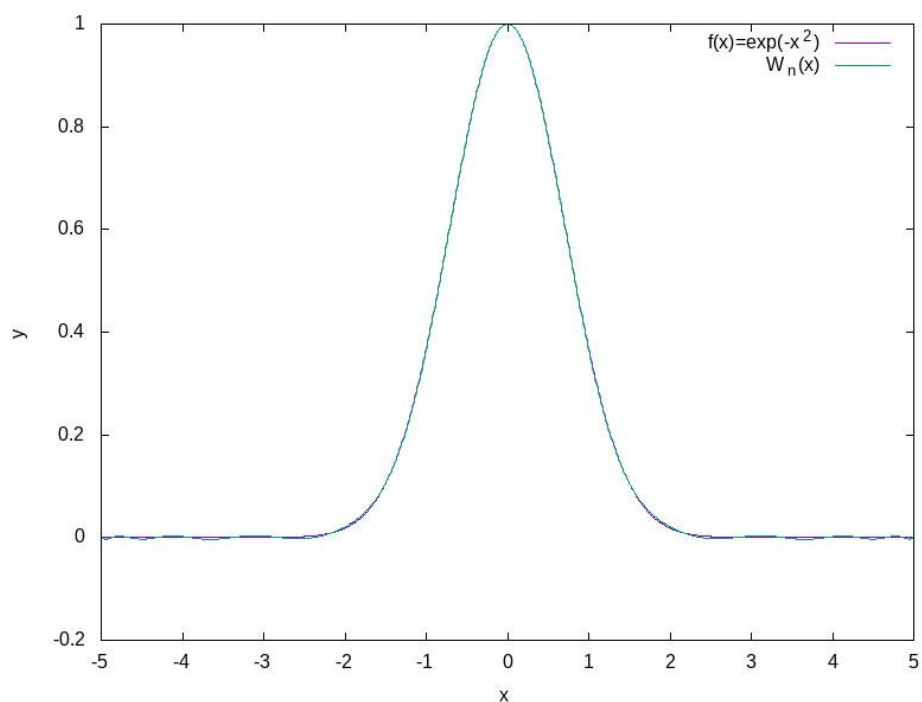
Rys. 3.5 Wykres funkcji interpolowanej i interpolującej dla  $n=5$ , przy zoptymalizowanym doborze położenia węzłów



Rys. 3.6 Wykres funkcji interpolowanej i interpolującej dla  $n=10$ , przy zoptymalizowanym doborze położenia węzłów



Rys. 3.7 Wykres funkcji interpolowanej i interpolującej dla  $n=15$ , przy zoptymalizowanym doborze położenia węzłów



Rys. 3.8 Wykres funkcji interpolowanej i interpolującej dla  $n=20$ , przy zoptymalizowanym doborze położenia węzłów

Wyznaczając położenia węzłów jako zera wielomianów Czebyszewa, udało się uniknąć oscylacji na krańcach przedziału, jednak dla mniejszych stopni wielomianu uzyskaliśmy gorsze przybliżenie w środku rozpatrywanego przedziału, niż w przypadku poprzedniego doboru węzłów

## 4. Wnioski

Metoda interpolacji Lagrange'a pozwoliła nam uzyskać bardzo dobre przybliżenia funkcji  $f(x)$  za pomocą mało skomplikowanego algorytmu. Większa liczba węzłów pozwoliła nam uzyskać dokładniejszą interpolację, jednak należy jednak zwrócić uwagę na ich dobór, gdyż przy klasycznym wyborze ich położenia dostaliśmy silne oscylacje funkcji interpolującej na krańcach przedziału. Optymalizacja położenia węzłów daje nam znacznie lepsze wyniki na całym przedziale przybliżenia, za wyjątkiem jego środka.

Jak można zobaczyć na rysunku 3.8, wielomian stopnia 20 przy odpowiednim doborze węzłów prawie idealnie przybliża nam wykres funkcji, która składa się z sumy nieskończonej liczby wielomianów, co pokazuje, że interpolacja Lagrange'a ze zoptymalizowanym doбором położenia węzłów jest metodą bardzo skuteczną i wydajną.