Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych z Metod Numerycznych

Gabriel Naleźnik

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

26.02.2020 r.

Laboratoria I : Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU.

1. Wstęp Teoretyczny.

Macierz – układ liczb, symboli lub wyrażeń zapisanych w postaci prostokątnej tablicy o wymiarach *i* oraz *j*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Rys 1.1 - Postać macierzy prostokątnej

Na macierzach można wykonać wiele działań takich jak: dodawanie, odejmowanie czy mnożenie. Na potrzeby tych laboratoriów interesować nas będzie również odwracanie macierzy oraz wyznaczanie wyznacznika.

Macierz trójkątna – macierz kwadratowa, której wszystkie współczynniki pod główną przekątną lub wszystkie współczynniki nad tą przekątną są równe zero.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Rys 1.2 - Macierz trójkątna dolna

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Rys 1.3 - Macierz trójkątna górna

Macierz kwadratowa - ma postać kwadratowej tablicy o wymiarach *i* na *i*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix}$$

Rys 1.4 - Macierz kwadratowa

Macierz odwrotna – element odwrotny w pierścieniu macierzy kwadratowych. Macierz **B** jest macierzą odwrotną do macierzy **A**, jeśli zachodzi własność: $\mathbf{A} * \mathbf{B} = \mathbf{I}$, gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową (same jedynki na diagonali i w każdym innym miejscu zera)

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Rys 1.5 - Macierz jednostkowa

Wtedy macierz **B** oznaczamy $\boldsymbol{A^{-1}}$**.**

Wyznacznik macierzy – funkcja przyporządkowująca każdej macierzy kwadratowej $\boldsymbol{M_{n\,x\,n}}\ (\boldsymbol{R})$ o współczynnikach z pierścienia przemiennego **R** pewien element tego pierścienia.

Metoda LU (ang. *lower* – dolny, *upper* górny) – metoda rozwiązywania układu równań liniowych. Nazwa pochodzi od użytych w tej metodzie macierzy trójkątnych, tj. dolnotrójkątnej (dolnej) i górnotrójkątnej (górnej). Metoda polega na zamianie macierzy na jej odpowiednik złożony z dwóch macierzy trójkątnych. Co pozwala efektywnie wyliczyć wyznacznik macierzy oraz rozwiązać układ równań.

A = U * L

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Metoda LU pozwala sprowadzić układ równań liniowych $\boldsymbol{A} * \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ do postaci $\boldsymbol{U} * \boldsymbol{L} * \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$,a jego rozwiązanie sprowadza się wtedy do rozwiązania dwóch układów równań z macierzami trójkątnymi $\begin{cases} L * \vec{y} = \vec{b} \\ U * \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$

Rozkład LU - Dekompozycja macierzy na A na dwie inne (L i U), gdzie macierz L jest macierzą trójkątną dolną i zawiera same jedynki na diagonali, a macierz U jest macierzą trójkątną górną. Wyznaczenie macierzy L oraz U umożliwia nam metoda Gaussa. Rozkład LU pozwala nam również w bardzo łatwy sposób obliczyć wyznacznik macierzy początkowej, gdyż z prawa Gaussa: det(A) = det(U*L) = det(U) * det(L) = $(\prod_{i=1}^{n} u_{ii}) * 1$

Wskaźnik uwarunkowania określa, w jakim stopniu błąd reprezentacji numerycznej danych wejściowych danego problemu wpływa na błąd wyniku.

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|.$$

Rys 1.6 - Wzór na wskaźnik uwarunkowania macierzy

Normę definiujemy: $\|\boldsymbol{A}\|_{1,\infty} = \max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|$

2. Opis problemu.

Na zajęciach naszym problemem było odwrócenie macierzy, obliczenie jej wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU. W tym celu zdefiniowaliśmy macierz o wymiarach 4x4 , której elementy były opisane wzorem $\boldsymbol{a_{ij}} = \frac{1}{i+j+\rho}$,

gdzie *i* - numer wiersza, *j* - numer kolumny, $\boldsymbol{\rho}$ - stała równa 2 (ponieważ w języku C tablice zaczynają się od indeksu 0, musieliśmy ją wprowadzić).

3. Wyniki.

W celu wykonania zadania napisaliśmy program w języku C, wykorzystujący bibliotekę **GSL** (Gnu Scientific Library). Poniżej zamieszczam wyniki które uzyskałem:

Macierz **A** = $\begin{bmatrix} \mathbf{0.5} & \mathbf{0.33} & \mathbf{0.25} & \mathbf{0.2} \\ \mathbf{0.33} & \mathbf{0.25} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.167} \\ \mathbf{0.25} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.167} & \mathbf{0.14} \\ \mathbf{0.2} & \mathbf{0.167} & \mathbf{0.14} & \mathbf{0.125} \end{bmatrix}$

Elementy na diagonali macierzy **U** : $[\mathbf{0.5} \quad \mathbf{0.033} \quad -\mathbf{0.001389} \quad \mathbf{0.000102}]$

Wyznacznik macierzy **A** : det(A) = **- 2.36206 *** $\mathbf{10^{-9}}$

Rozwiązując *4* układy równań postaci $\boldsymbol{A} * \vec{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\boldsymbol{b_i}}$ z wyrazami wolnymi, kolejno:

$$b1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, b2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, b3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, b4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Wyznaczyłem macierz odwrotną do macierzy A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{200} & \mathbf{-1200} & \mathbf{2100} & \mathbf{-1120} \\ \mathbf{-1200} & \mathbf{8100} & \mathbf{-15120} & \mathbf{8400} \\ \mathbf{2100} & \mathbf{-15120} & \mathbf{29400} & \mathbf{-16800} \\ \mathbf{-1120} & \mathbf{8400} & \mathbf{-16800} & \mathbf{9800} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy $A * A^{-1}$:

$$A * A^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2.27374 * 10^{-13}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2.84217 * 10^{-14}} & \mathbf{1} & \mathbf{4.54747 * 10^{-13}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2.27374 * 10^{-13}} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Obliczenie wskaźnika uwarunkowania macierzy dla podanej w zadaniu normy:

$\|A\|$= 0.5

$\|A^{-1}\| = 29400$

$\mathrm{K}(\mathbf{A}) = \|A\| * \|A^{-1}\|$ = **14700**

4. Wnioski

Rozkład LU pozwolił nam w bardzo łatwy sposób obliczyć wyznacznik macierzy A (korzystając z prawa Gaussa, wymnażając elementy na diagonali macierzy U) oraz szybko znaleźć macierz odwrotną do macierzy A. Pozwolił on również zaoszczędzić pamięć, gdyż macierzami L i U nadpisaliśmy macierz A.

Iloczyn $A * A^{-1}$ powinien dawać w rezultacie macierz jednostkową, jednak u mnie w paru miejscach, poza główną diagonalą, pojawiły się niezerowe, bardzo małe wartości.

Świadczy to o wystąpieniu błędów numerycznych, co potwierdza również bardzo duża wartość wskaźnika uwarunkowania macierzy, która pokazuje że nasza macierz jest niestabilna i nawet mała zmiana jej współczynników może znacząco wpłynąć na wynik.

Można uznać, że metoda LU jest bardzo wydajna i skuteczna w celu obliczenia wyznacznika oraz macierzy odwrotnej, jednak dla tych danych wejściowych dała rozwiązanie zawierające błędy numeryczne.