

Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych z Metod Numerycznych

Gabriel Naleźnik

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

04.03.2020 r.

Laboratoria II : Rozkład LU macierzy trójdagonalnej -
rozwiązanie równania Poissona w jednym wymiarze

1. Wstęp Teoretyczny.

Równanie Poissona: Niejednorodne równanie różniczkowe cząstkowe liniowe drugiego rzędu. Równanie Poissona opisuje wiele procesów zachodzących w przyrodzie, np. rozkład pola prędkości cieczy wypływającej ze źródła, potencjał pola grawitacyjnego w obecności źródeł czy też potencjał pola elektrostatycznego w obecności ładunków

$$\nabla^2 V(x) = -\rho(x)$$

Rys 1.1 - Równanie Poissona

Wzór Taylora: przedstawienie funkcji $(n+1)$ -razy różniczkowalnej za pomocą wielomianu zależnego od kolejnych jej pochodnych oraz dostatecznie małej reszty.

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x, a)$$

Rys 1.2 - Wzór Taylora

Macierz Trójdagonalna: Kwadratowa macierz rzadka, która jest szczególnym przypadkiem macierzy wstęgowej. Wszystkie jej elementy są zerowe poza diagonalą i wstęgą wokół niej, gdzie szerokość wstęgi wynosi 1.

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & B_{32} & B_{33} & B_{34} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & B_{43} & B_{44} & B_{45} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{54} & B_{55} & B_{56} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & B_{65} & B_{66} \end{bmatrix}$$

Rys 1.3 - Postać macierzy trójdzielnej

Dyskretyzacja równania: Transformacja równania ciągłego na jego dyskretny odpowiednik.

W celu rozwiązania równania Poissona należy je zdyskretyzować. W tym celu do przekształceń równania można wykorzystać rozwinięcie funkcji w szereg Taylora.

Na początku wprowadzamy siatkę z węzłami $x_i = -Xb + h * (i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, N$

Następnie w odległości $h = 2Xb/(N - 1)$ od punktu x rozwijamy funkcję V w szereg Taylora:

$$V(x+h) = V(x) + V'(x) * h + V''(x) * \frac{h^2}{2!} + V'''(x) * \frac{h^3}{3!} + O(h^4)$$

$$V(x-h) = V(x) - V'(x) * h + V''(x) * \frac{h^2}{2!} - V'''(x) * \frac{h^3}{3!} + O(h^4) \Rightarrow$$

$$V(x+h) + V(x-h) = 2 * V(x) + V''(x) * h^2 \Rightarrow$$

$$V''(x) = \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{V_{i-1} - 2 * V_i + V_{i+1}}{h^2} = -\rho(x)$$

Równanie to generuje układ równań postaci:

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_1 \\ -\rho_2 \\ -\rho_3 \\ \vdots \\ -\rho_{n-1} \\ -\rho_n \end{bmatrix}$$

Rozkład LU dla macierzy trójdzielnej – Rozkład LU tak jak w przypadku zwykłej macierzy kwadratowej tutaj również bardzo ułatwia rozwiązywanie układów równań. Jednak w przypadku rozkładu dla macierzy trójdzielnej, macierze L i U są specjalnej postaci:

$$L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & l_{n-1} & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & c_3 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_n \end{bmatrix}$$

2. Opis problemu.

Na zajęciach naszym problemem było rozwiązanie równania Poissona: $\nabla^2 V(x) = -\rho(x)$ w przedziale $x \in [-X_b, X_b]$ z warunkiem brzegowym $V(-X_b) = V(X_b) = 0$ dla rozkładu gęstości:

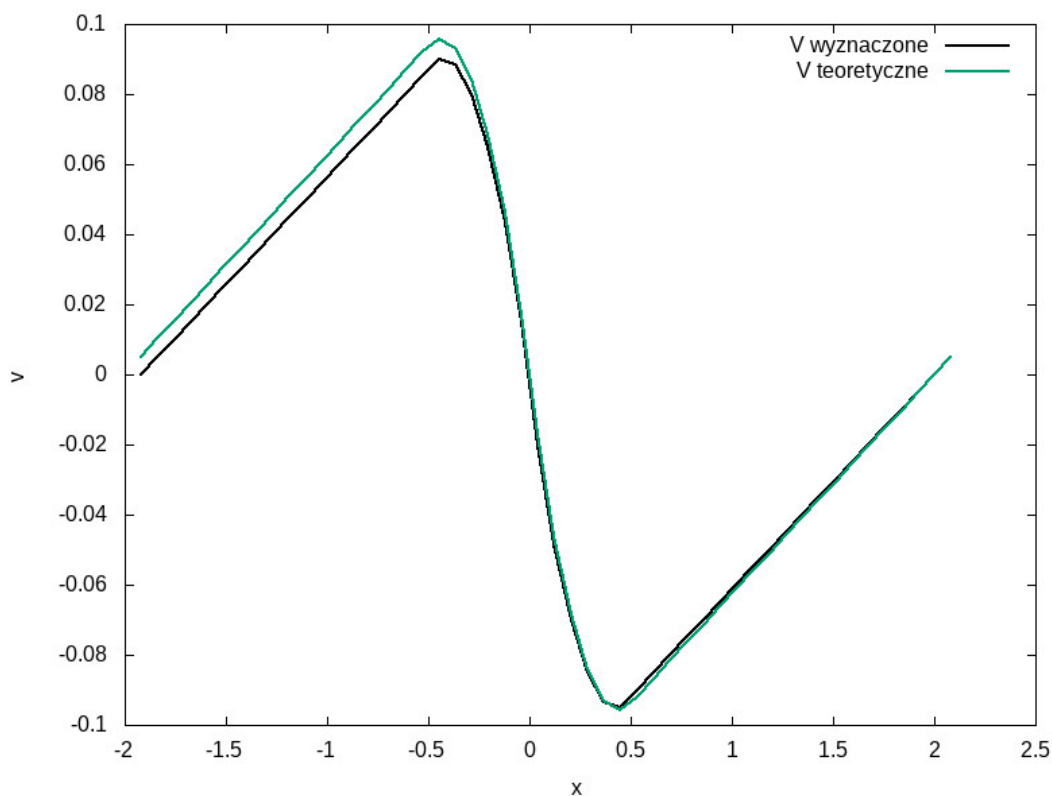
$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-X_b, -X_a) \\ +1, & x \in [-X_a, 0) \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x \in (0, X_a] \\ 0, & x \in (X_a, X_b] \end{cases}$$

Następnie należało porównać otrzymane rozwiązanie z rozwiązaniem dokładnym:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{x}{16} + \frac{1}{8}, & x \in [-X_b, -X_a] \\ -\frac{x^2}{2} - \frac{7}{16}x, & x \in [-X_a, 0] \\ \frac{x^2}{2} - \frac{7}{16}x, & x \in [0, X_a] \\ \frac{x}{16} - \frac{1}{8}, & x \in [X_a, X_b] \end{cases}$$

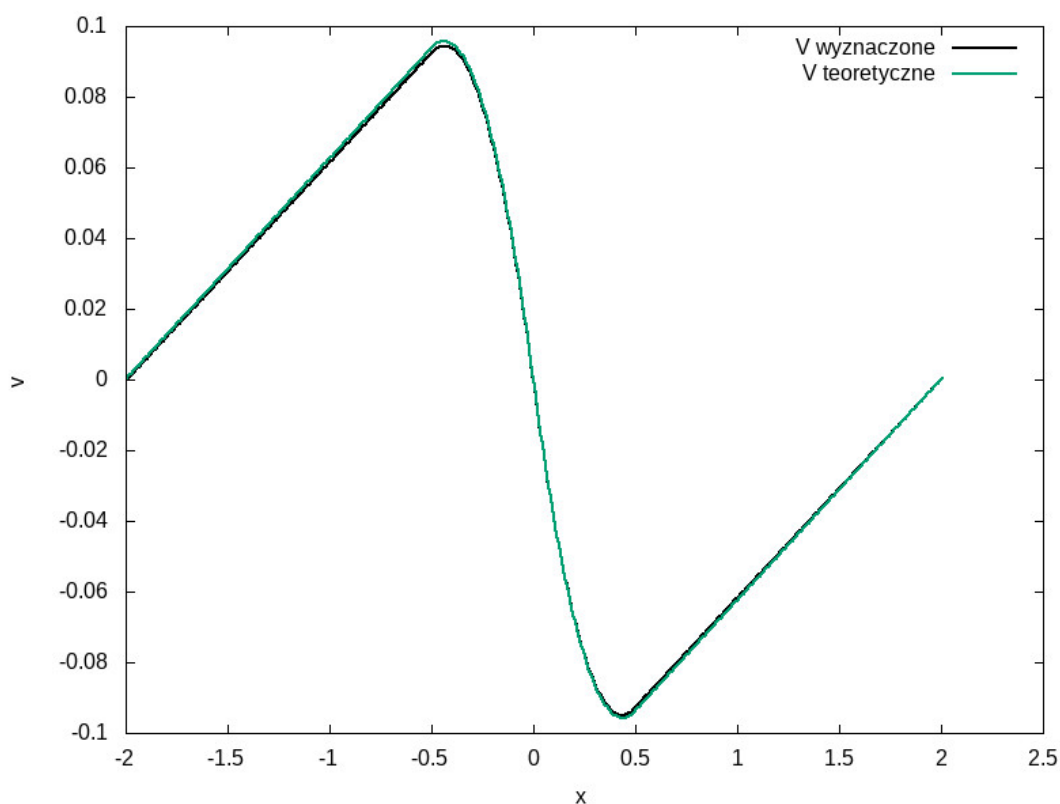
3. Wyniki.

Na zajęciach napisałem program w języku C rozwiązujący zdyskretyzowane równanie Poissona. Wykres otrzymanego rozwiązania porównałem z rozwiązaniem dokładnym, najpierw dla liczby węzłów $N = 50$:



Rys 3.1 - Wykres rozwiązania numerycznego i dokładnego dla $N = 50$

Jak można zauważyć na wykresie, dla liczby 50 węzłów moje rozwiązanie jest zbliżone do teoretycznego rozwiązania, jednak w przedziale $-2 \leq x \leq 0$ widać bardzo dużą różnicę między krzywymi.



Rys 3.2 - Wykres rozwiązania numerycznego i dokładnego dla $N = 500$

Po zwiększeniu liczby węzłów siatki do 500 otrzymany wykres jest dużo lepiej dopasowany do wykresu rozwiązania teoretycznego.

4. Wnioski

Metoda rozwiązania równania Poissona zastosowana w programie okazała się być bardzo skuteczna dla dużej siatki ($N \geq 500$) o czym świadczy wysoka dokładność dopasowania wykresu otrzymanego rozwiązania do wykresu rozwiązania teoretycznego. Nasze przybliżenie jest tym lepsze im większa jest liczba węzłów w siatce.

Sama prędkość wykonywania się programu również jest bardzo szybka, zatem można stwierdzić że metoda wybrana do rozwiązania problemu jest bardzo wydajna, a wynik zadowalający.