Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych z Metod Numerycznych

Gabriel Naleźnik

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

29.04.2020 r.

Laboratoria IX : *Aproksymacja Padego funkcji sin(x)*

1. Wstęp Teoretyczny.

Aproksymacja - proces określania rozwiązań przybliżonych na podstawie rozwiązań znanych, które są bliskie rozwiązaniom dokładnym w ściśle sprecyzowanym sensie.

Aproksymacja liniowa funkcji f(x) - wyznaczenie współczynników $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m)$ funkcji aproksymującej F(x)= $a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$, gdzie: φ_i(x) - są funkcjami bazowymi (m+1) wymiarowej podprzestrzeni liniowej X_{m+1}. Aby uzyskać bardzo dobre przybliżenie funkcji aproksymowanej, żądamy by norma różnicy wartości funkcji f(x) i F(x) była jak najmniejsza w każdym punkcie: $\|f(x) - F(x)\| = minimum.$

Przykłady norm stosowanych w aproksymacji:

- Norma Czebyszewa: $\|f(x) - F(x)\| = \sup|f(x) - F(x)|$

- Norma L_2: $\|f(x) - F(x)\| = (\int_a^b |f(x) - F(x)|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}$

- Norma L_2 w wagą: $\|f(x) - F(x)\| = (\int_a^b w(x)|f(x) - F(x)|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}$
gdzie: w(x) jest nieujemną ciągłą funkcją wagową.

Aproksymacja Padego - metoda aproksymacji funkcji za pomocą funkcji wymiernej. Funkcja aproksymująca ma postać:

$$R_{N,M}(x) = \frac{L_N(x)}{Q_M(x)}$$

Gdzie:

$$L_N(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N$$

$$Q_M(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_M x^M$$

Po rozwinięciu funkcji f(x) w szereg Maclaurina $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$,w celu otrzymania zależności na współczynniki funkcji L_N i Q_M liczymy błąd aproksymacji $f(x) - \frac{L_N(x)}{Q_M(x)}$. Warunki przyrównania pochodnych funkcji f(x) i $R_{N,M}(x)$ dla rzędu k = 0, 1, . . . , N +M generuje nam układ równań: $\sum_{m=1}^{N+M} b_m * c_{N-m+k} = -c_{N+k}$, który w postaci macierzowej ma postać :

$$\begin{bmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{n+1} \\ -c_{n+2} \\ \vdots \\ -c_{n+m} \end{bmatrix}$$

Jego rozwiązaniem jest wektor współczynników funkcji Q(x). Współczynniki funkcji L(x) można wyliczyć ze wzoru: $a_i = \sum_{m=1}^{N+M} b_j * c_{i-j}$

2. Opis problemu.

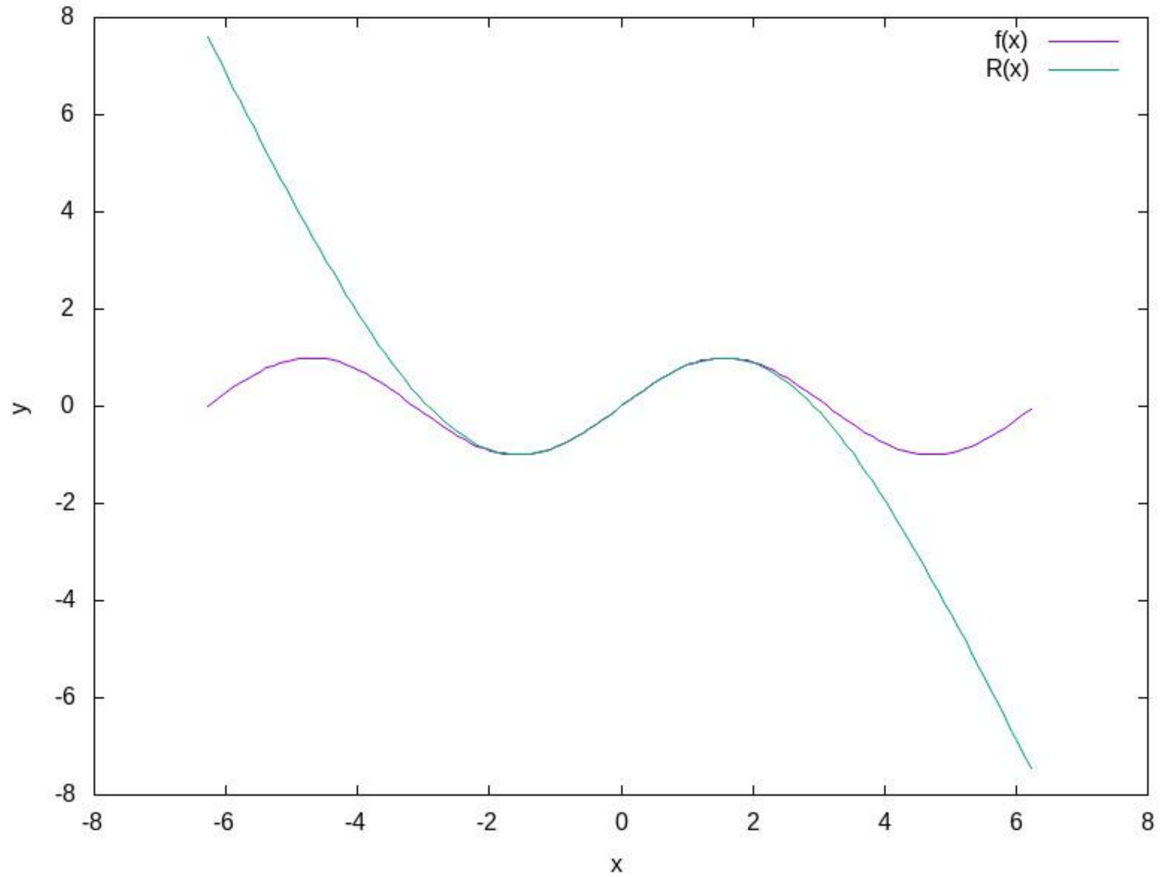
Problemem w tym zadaniu z laboratoriów było wykonanie aproksymacji Padego kolejno dla N = M = 3, 5, 7 w zakresie $x \in [-2\pi, 2\pi]$, dla funkcji:

$$\boldsymbol{f(x) = sin(x)}$$

Za wyraz wolny funkcji $Q_M(x)$ przyjęliśmy: $b_0 = 1$.

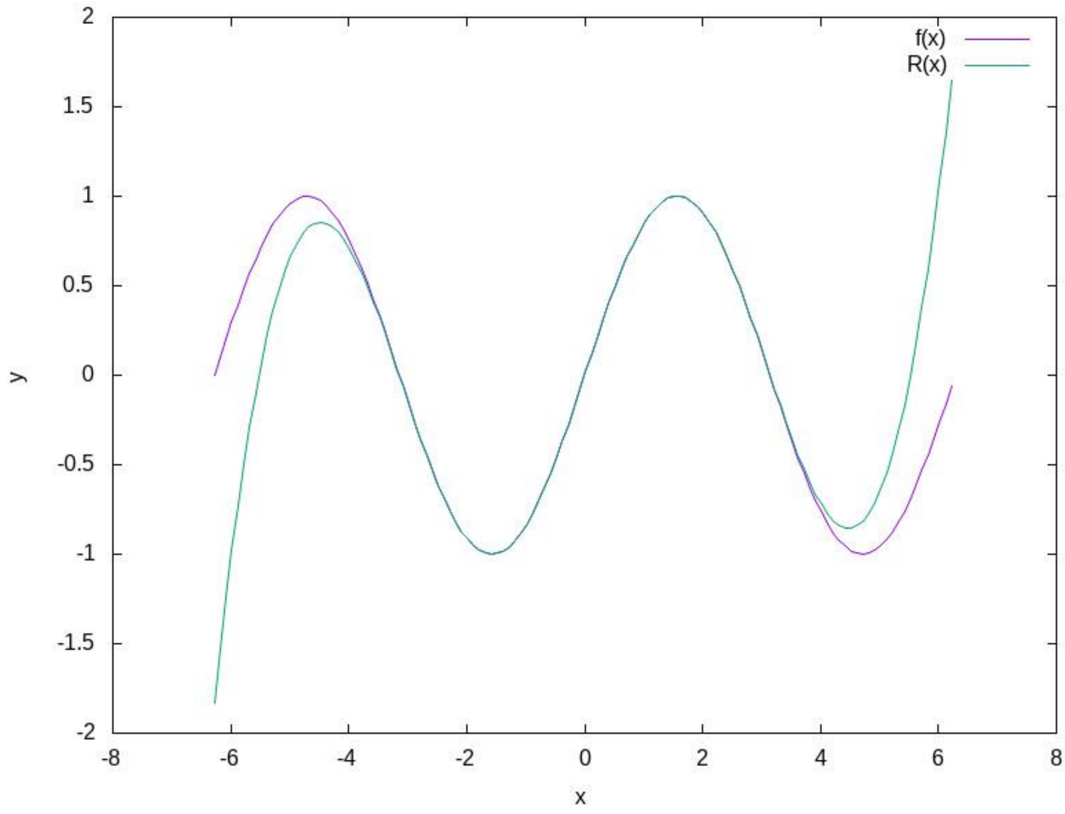
3. Wyniki

Napisałem program w języku C wykorzystujący bibliotekę GSL, w którym zaimplementowałem procedurę do aproksymacji Padego funkcji sin(x). Poniżej zamieszczam uzyskane wyniki:

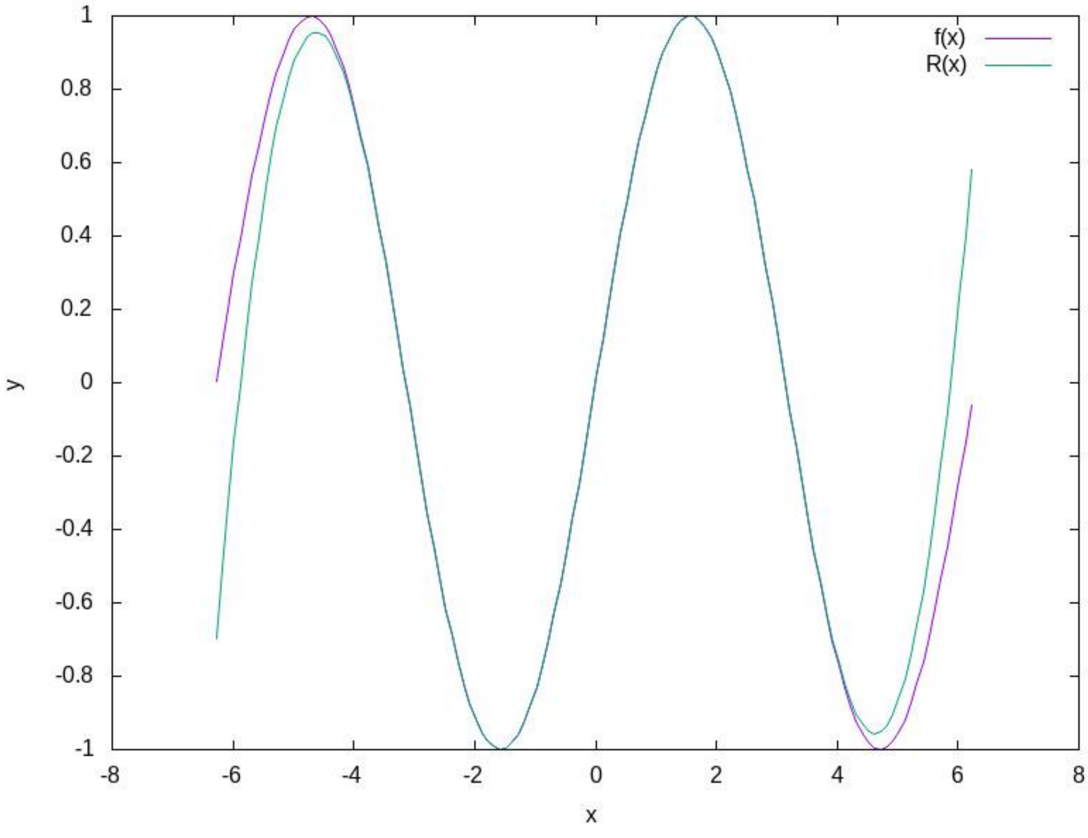


Rys. 3.1 Wykres funkcji aproksymowanej f(x) i aproksymującej $R_{N,M}(x)$, dla N=M=3

Jak można zauważyć, dla N i M równych 3, funkcja aproksymująca przybliża bardzo dokładnie wykres funkcji f(x) tylko w środku rozpatrywanego zakresu. Dzieje się tak dlatego, że funkcja $R_{N,M}(x)$ jest ilorazem dwóch funkcji rzędu co najwyżej 3. i nie może uzyskać przez to więcej punktów przegięcia.



Rys. 3.2 Wykres funkcji aproksymowanej f(x) i aproksymującej $R_{N,M}(x)$*, dla N=M=5*



Rys. 3.3 Wykres funkcji aproksymowanej f(x) i aproksymującej $R_{N,M}(x)$*, dla N=M=7*

Dla N=M=5 funkcja aproksymująca jest ilorazem dwóch wielomianów rzędu co najwyżej 5. dzięki czemu przybliża rozpatrywaną funkcję na większym przedziale. Przybliżenie jest bardzo dokładne w środku zakresu, gdzie znajdują się ekstrema funkcji $R_{N,M}(x)$ jednak na jego krańcach funkcja przestaje go przybliżać, gdyż funkcja zaczyna dążyć cały czas do $+\infty$ od strony prawej i do $-\infty$ od strony lewej.

Dla N=M=7 uzyskaliśmy najlepsze przybliżenie funkcji f(x) w danym przedziale. Funkcja $R_{N,M}(x)$ lepiej aproksymuje zadaną funkcję na krańcach przedziału, jednak dalej można dopatrzeć się minimalnych różnic.

4. Wnioski

Dokładność przybliżenia funkcji aproksymowanej zwiększała się wraz ze zwiększaniem stopnia wielomianów w liczniku i w mianowniku funkcji $R_{N,M}(x)$, a zadowalający rezultat uzyskaliśmy dopiero dla N=M=7. Aproksymacja w przeciwieństwie do interpolacji nie wymaga, by pewne wartości funkcji aproksymacyjnej dokładnie odpowiadały danym wartościom funkcji, a mimo to potrafi dokładnie ją przybliżyć. Pozwala ona również szybciej uzyskać dokładne przybliżenie w środku przedziału niż metody interpolacyjne. Zaletą tego przybliżenia są mniejsze błędy niż aproksymacja wielomianem stopnia N (otrzymanych np. z rozwinięć Taylora czy Maclaurina). Metoda ta okazała się skuteczna i bardzo wydajna (szybkie wykonanie programu) w celu aproksymacji funkcji okresowej sin(x) w zadanym przedziale, jednak by zwiększyć jej dokładność w większej dziedzinie, należałoby zwiększyć stopnie wielomianów w liczniku i mianowniku funkcji $R_{N,M}(x)$.