Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych z Metod Numerycznych

Gabriel Naleźnik

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

21.04.2020 r.

Laboratoria VIII : *Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.*

1. Wstęp Teoretyczny.

Interpolacja - metoda numeryczna przybliżania funkcji interpolowanej w zadanym przedziale funkcją interpolującą, która w punktach zwanych ***węzłami interpolacji*** przyjmuje wartości takie same jak przybliżana funkcja. Metoda ta znajduje zastosowanie w naukach doświadczalnych, gdzie dysponuje się zazwyczaj skończoną liczbą danych do określenia zależności między wielkościami. Ułatwia również całkowanie i numeryczne obliczanie wartości wyrażeń.

Funkcja sklejana - Funkcję s(x) określoną na przedziale [a, b] nazywamy funkcją sklejaną stopnia **m** (m≥1) jeżeli:

- $s(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej **m** na każdym podprzedziale $(x_i\,;\,x_{i+1})$, i=0,1,..., n-1
- $s(x) \in C^m$

Interpolacja funkcjami sklejanymi - W przedziale [a, b] mamy **n+1** punktów takich że:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Punkty te określają podział przedziału [a, b] na **n** podprzedziałów tj. $(x_i\,;\,x_{i+1})$. Punkty x_j nazywamy węzłami funkcji sklejanej. W każdym przedziale $(x_i\,;\,x_{i+1})$.

Funkcja s(x) jest wielomianem stopnia co najwyżej m, a funkcja interpolująca jest kombinacją liniową elementów bazy $\{s_i(x)\}$:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x), \quad x \in [a, b]$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach - Metoda przybliżania wartości funkcji za pomocą wyznaczenia wartości interpolacyjnych funkcji sklejanych trzeciego stopnia w zadanym przedziale interpolacji. Przy oznaczeniu: $m_j = s^{(2)}(x_j)$:

$$s_{i-1}^{(2)}(x) = m_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + m_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad \text{gdzie: } x \in (x_i\, ;\, x_{i+1}) \text{ i } h_i = x_i - x_{i-1}$$

Po dwukrotnym scałkowaniu otrzymujemy wzór na funkcję sklejaną:

$$s_{i-1}(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i$$

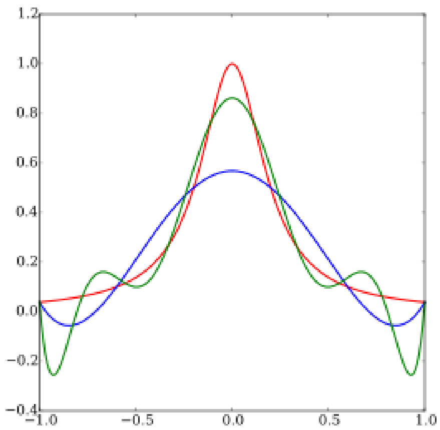
Gdzie: $A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m - m_{i-1})$, $B_i = y_{i-1} - m_{i-1}\frac{h_i^2}{6}$, $h_i = x_i - x_{i-1}$

Aby wyznaczyć wektor wartości drugich pochodnych $(\vec{m})$, należy rozwiązać układ równań liniowych, o postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ \beta \end{bmatrix}$$

Gdzie: $d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)$, $\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$

Efekt Rungego - Opisuje sytuację gdy, zadanie jest źle uwarunkowane i przy zwiększaniu liczby węzłów interpolacji zamiast zwiększyć dokładność przybliżenia, występują niedopasowania wielomianu interpolacyjnego na krańcach przedziału. Wynika to z oscylacji wielomianów wyższych rzędów.



Rys. 1.1 Przykład efektu Rungego - Zielona krzywa jako wielomian interpolujący 9. rzędu daje duży błąd przybliżenia

2. Opis problemu.

Problemem w tym zadaniu z laboratoriów było napisanie programu do interpolacji funkcji przy pomocy funkcji sklejanych będących wielomianami 3 stopnia, poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach. Przy użyciu programu, należało przeprowadzić interpolację dwóch funkcji w przedziale $\boldsymbol{x} \in [-\mathbf{5}, \mathbf{5}]$ dla liczby węzłów **n = 5, 8, 21**:

$$\boldsymbol{f_1(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{x}^2}$$

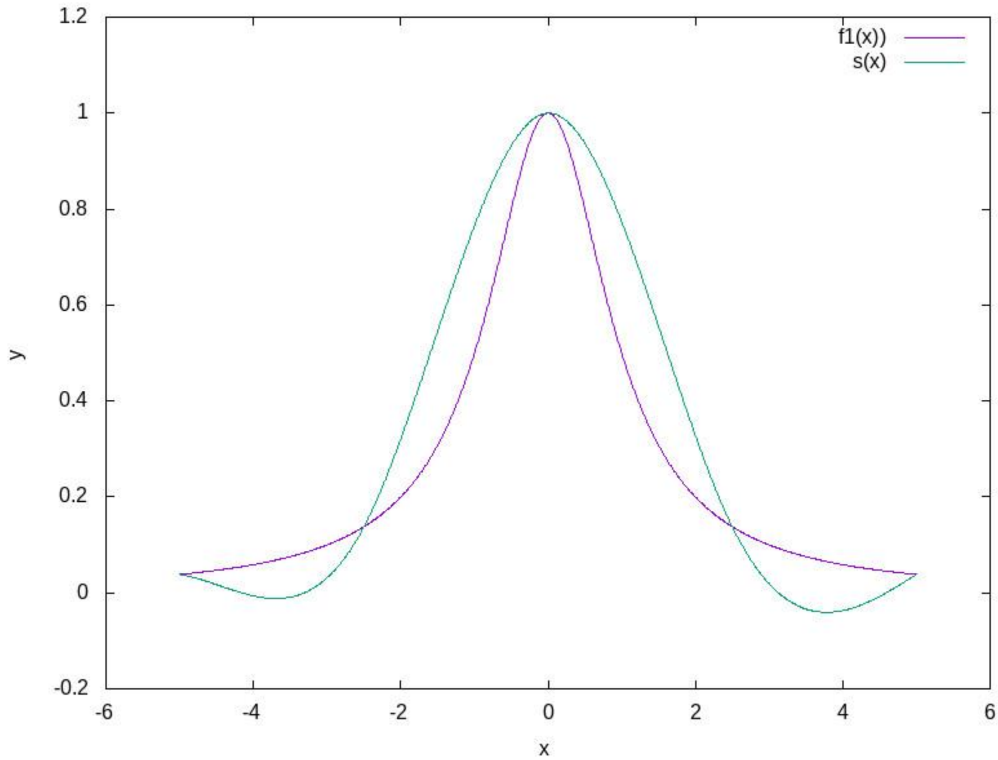
$$\boldsymbol{f_2(x)} = \boldsymbol{cos(2x)}$$

Następnie dla funkcji $\boldsymbol{f_1(x)}$ i liczby węzłów **n=10** należało wyznaczyć wartości drugich pochodnych w węzłach i porównać je z "dokładniejszymi" wartościami wyliczonymi zgodnie ze wzorem:

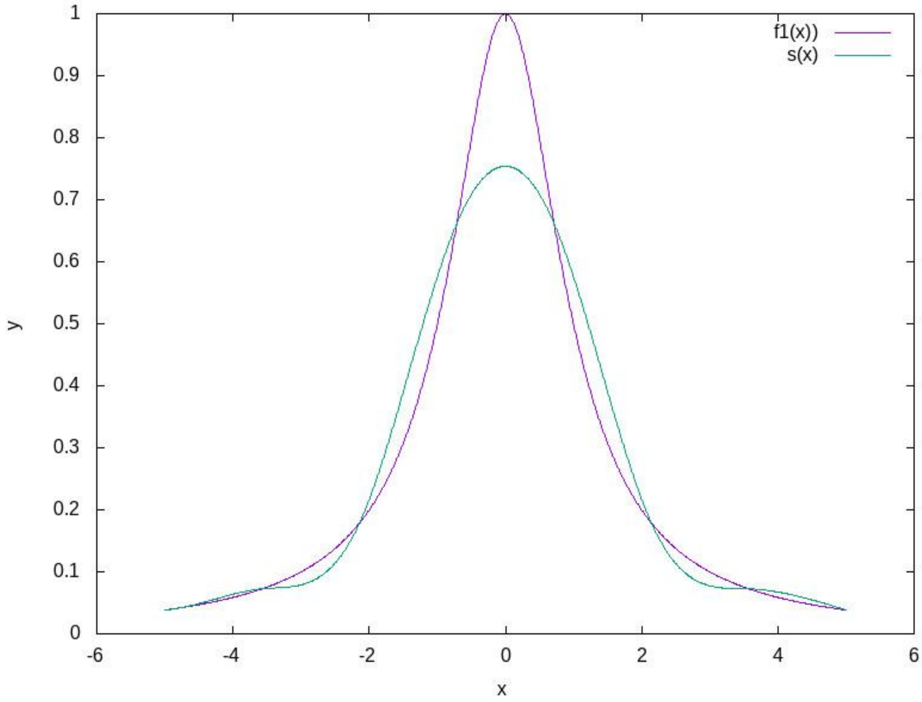
$$\frac{\boldsymbol{d^2f}}{\boldsymbol{dx^2}} \approx \frac{f(x - \delta x) - 2f(x) + f(x + \delta x)}{(\delta x)^2}$$

3. Wyniki

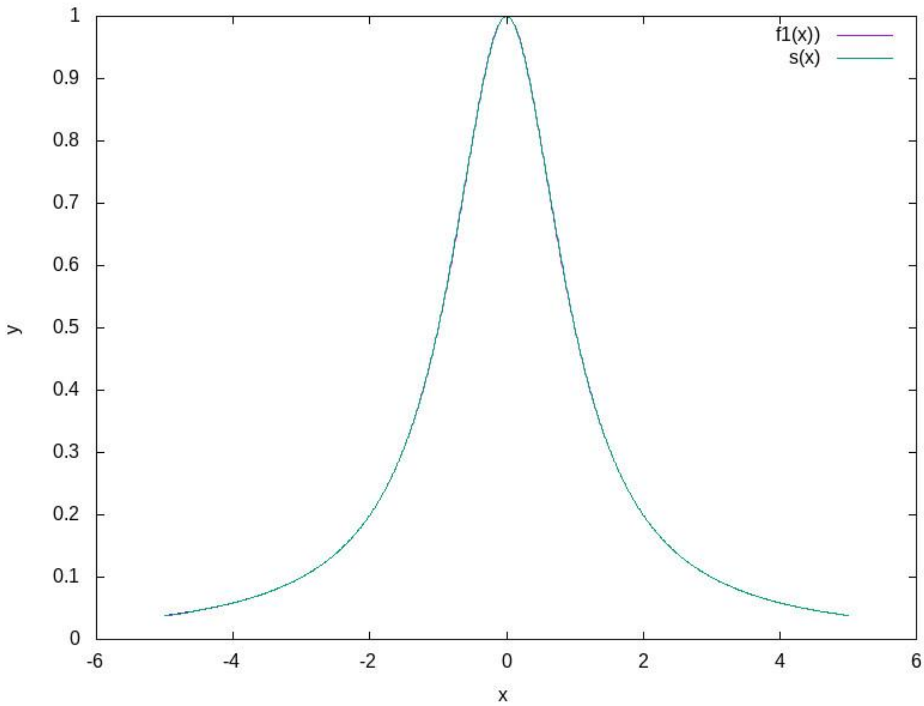
Napisałem program w języku C wykorzystujący bibliotekę GSL, w którym zaimplementowałem procedurę do wyznaczania wartości drugich pochodnych w węzłach oraz procedurę do wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym. Poniżej zamieszczam uzyskane wyniki:



Rys. 3.1 Wykres funkcji interpolowanej - f1(x) i interpolującej s(x), dla n=5

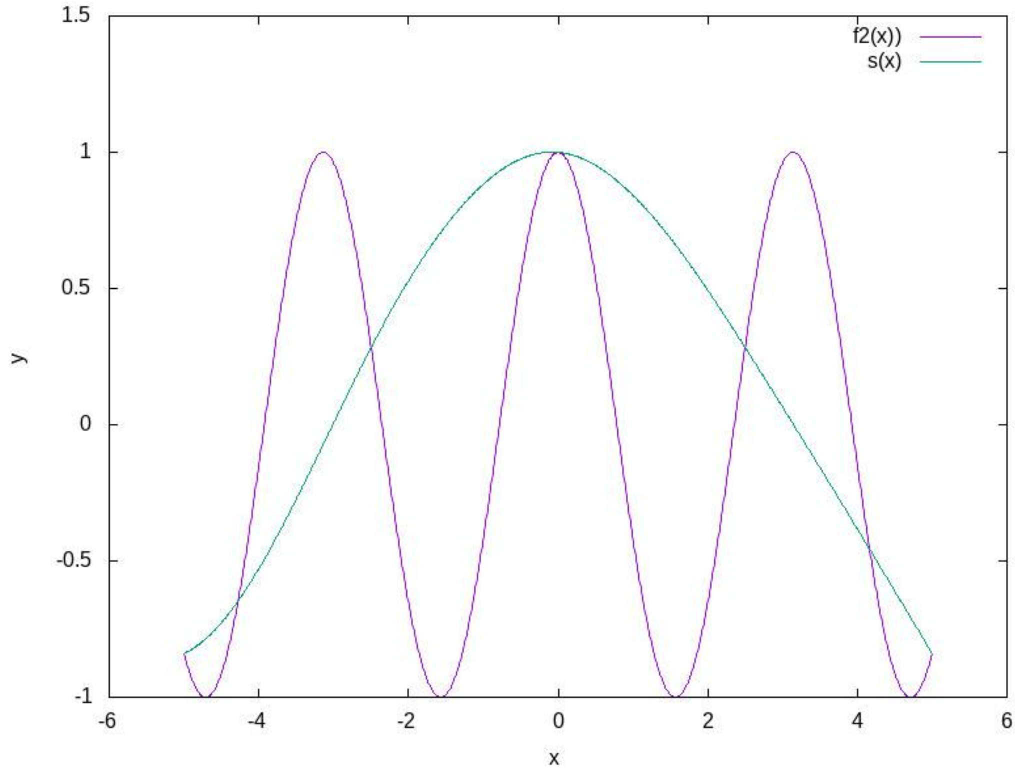


Rys. 3.2 Wykres funkcji interpolowanej - f1(x) i interpolującej s(x), dla n=8

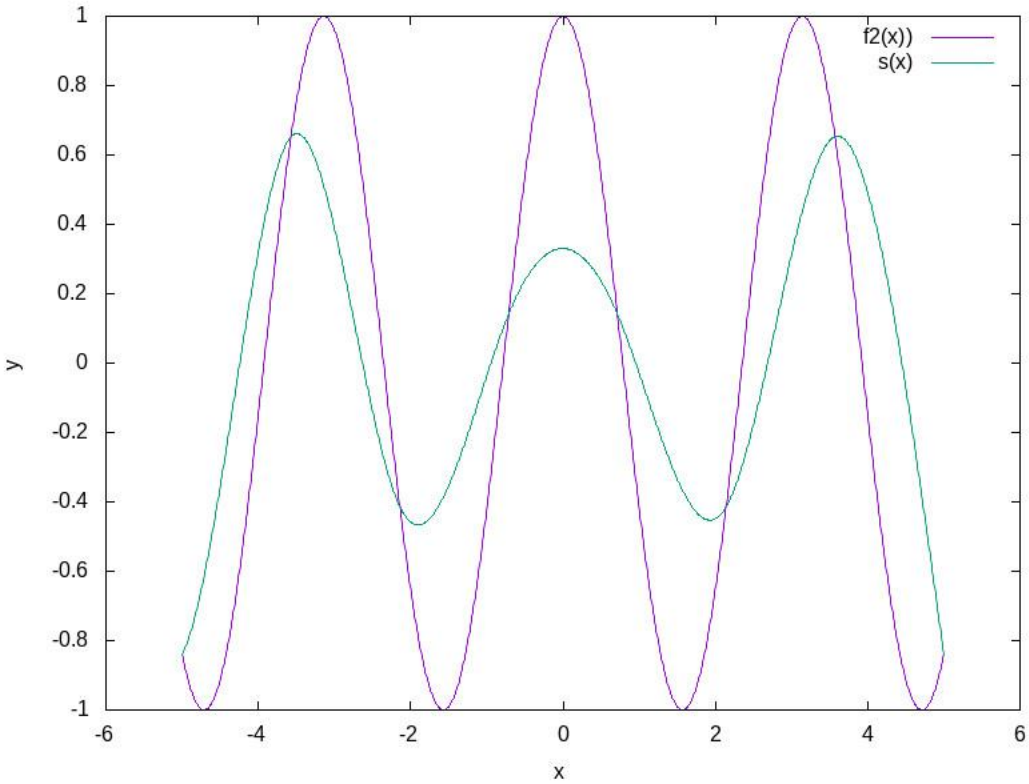


Rys. 3.3 funkcji interpolowanej - f1(x) i interpolującej s(x), dla n=21

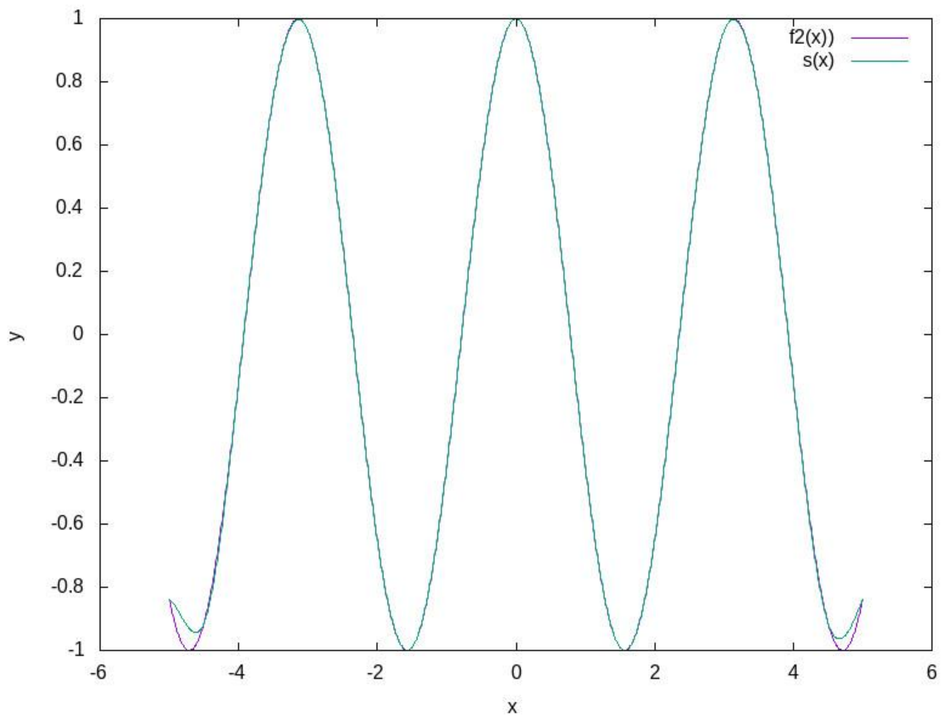
Jak można zauważyć, dla większej liczby węzłów zwiększamy dopasowanie funkcji interpolującej do funkcji f1. Na żadnym wykresie nie można dopatrzeć się widocznego efektu Rungego, a dla n=21 możemy już zauważyć bardzo dobre przybliżenie funkcji.



Rys. 3.4 Wykres funkcji interpolowanej - f2(x) i interpolującej s(x), dla n=5



Rys. 3.5 Wykres funkcji interpolowanej - f2(x) i interpolującej s(x), dla n=8

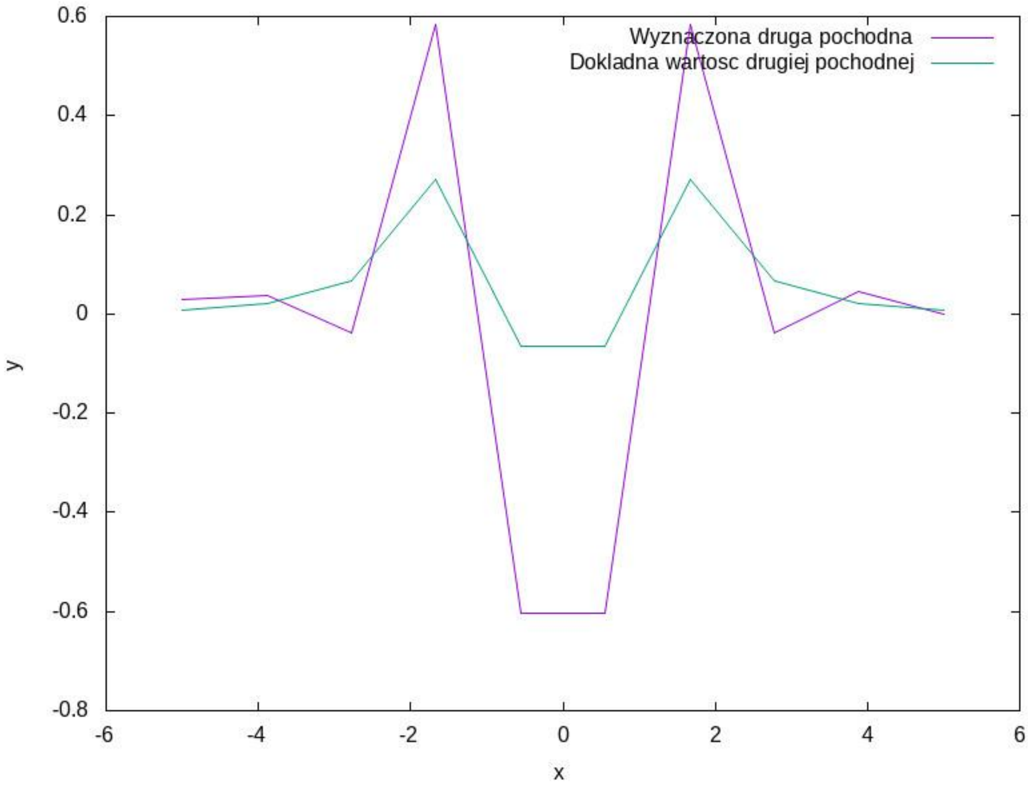


Rys. 3.6 Wykres funkcji interpolowanej - f2(x) i interpolującej s(x), dla n=21

W przypadku drugiej funkcji również można zauważyć wzrost dokładności przybliżenia wraz ze wzrostem liczby węzłów. Ponownie dla n=21 otrzymaliśmy bardzo dobre przybliżenie, jednak w tym przypadku widać rozbieżności na krańcach interpolowanego przedziału.

Porównanie obu sposobów wyliczania drugich pochodnych funkcji f_1:

Położenie węzła	Wartość wyznaczonej drugiej pochodnej	Dokładniejsza, wyliczona wartość drugiej pochodnej
-5	0.0292608	0.00842062
-3.88889	0.0374285	0.0211715
-2.77778	-0.0373081	0.0668981
-1.66667	0.584514	0.272036
-0.555556	-0.602325	-0.0661888
0.555556	-0.602516	-0.0661888
1.66667	0.585088	0.272036
2.77778	-0.0394118	0.0668981
3.88889	0.0452696	0.0211715
5	0	0.00842062



Rys. 3.7 Wykres wartości drugich pochodnych funkcji f1 w zależności od położenia węzłów, pokazujący porównanie obu sposobów obliczania drugich pochodnych

Jak widać, wykres wyznaczonych pochodnych zachowuje kształt wykresu ich dokładnych wartości, jednak im bliżej środka wykresu - tym większa jest różnica między wykresami.

4. Wnioski

Metoda interpolacji funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach pozwoliła nam uzyskać bardzo dobre przybliżenia funkcji f1 oraz f2. Algorytm tej metody jest bardziej skomplikowany niż metody interpolacji Lagrange'a, jednak by uzyskać bardzo dobrą jakość przybliżenia nie trzeba optymalizować położenia węzłów (np. metodą Czebyszewa).

Dla obu interpolowanych funkcji, zwiększenie liczby węzłów polepszyło dokładność przybliżenia, a na krańcach przedziału interpolacji nie było widać dużych rozbieżności z funkcją interpolowaną (brak efektu Rungego). Metoda ta jednak daje bardzo słabe rezultaty dla małej liczby węzłów.

Na podstawie zebranych wniosków metodę tę można uznać za bardzo wydajną i skuteczną w przypadku gdy nie optymalizujemy położeń węzłów.