Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych z Metod Numerycznych

Gabriel Naleźnik

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

20.05.2020 r.

Laboratoria XII : *Całkowanie numeryczne metodą Simpsona*

1. Wstęp Teoretyczny.

Całkowanie numeryczne – metoda numeryczna polegająca na przybliżonym obliczaniu całek oznaczonych. Termin **kwadratura numeryczna**, często po prostu *kwadratura*, jest synonimem całkowania numerycznego, w szczególności w odniesieniu do całek jednowymiarowych.

Proste metody całkowania numerycznego polegają na przybliżeniu całki za pomocą odpowiedniej sumy ważonej wartości całkowanej funkcji w kilku punktach. Aby uzyskać dokładniejsze przybliżenie dzieli się przedział całkowania na niewielkie fragmenty. Ostateczny wynik jest sumą oszacowań całek w poszczególnych podprzedziałach. Najczęściej przedział dzieli się na równe podprzedziały, ale bardziej wyszukane algorytmy potrafią dostosowywać krok do szybkości zmienności funkcji.

Kwadratury Newtona-Cotesa - Rozważamy przypadek z węzłami równoodległymi $x_i = a + i * h, i = 0,1,2, \dots, N$. Jeśli końce przedziału są również węzłami wówczas kwardatury noszą nazwę kwadratur zamkniętych. Przybliżamy funkcję podcałkową wielomianem Lagrange'a stopnia conajwyżej N:

$$f(x_i) = L_N(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$L_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)\phi_k(x), \quad \phi_k(x) = \prod_{j=0,j\neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Po wprowadzeniu zmiennej t = a + ht otrzymujemy $\varphi_k(t) = \prod_{j=0,j\neq k} \frac{t-j}{k-j}$

Przyjmujemy oznaczenia: $h = \frac{b-a}{N}$ oraz $f_k = f(a+kh)$, co daje nam wzór:

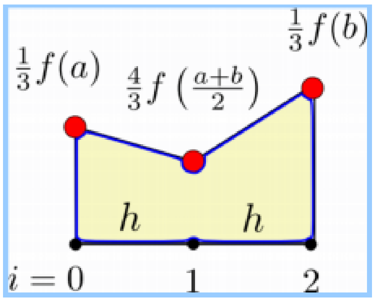
$$S(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{N} f_k \int_a^b \Phi_k(x)dt = \sum_{k=0}^{N} f_k h \int_0^N \varphi_k(t)dt = \sum_{k=0}^{N} f_k A_k$$

oraz współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa:

$$A_k = h\frac{(-1)^{N-k}}{k!\,(N-k)!}\int_0^N \frac{t(t-1)\dots(t-N)}{(t-k)}$$

W praktyce przedział całkowania dzieli się na m podprzedziałów. W każdym podprzedziale określa się N (N=1,2,3) i przeprowadza całkowanie. Taka procedura prowadzi do uzyskania kwadratur złożonych.

Metoda Simpsona (wzór parabol) - jedna z metod przybliżania wartości całki oznaczonej funkcji rzeczywistej. Metoda ma zastosowanie do funkcji stablicowanych w nieparzystej liczbie równo odległych punktów (wliczając końce przedziału całkowania). Metoda opiera się na przybliżaniu funkcji całkowanej przez interpolację wielomianem drugiego stopnia.



Znając wartości funkcji f(x) w punktach x_0, x_1, x_2 (gdzie $x_1 = \frac{x_0+x_2}{2} = h$), przybliża się funkcję wielomianem Lagrange'a i całkując w przedziale $[x_0, x_2]$ otrzymuje się przybliżoną wartość całki:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big)$$

Błąd, który przy tym popełniamy, jest równy: $E(f) = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)$

Wzór złożony parabol - przy całkowaniu przedziału [a, b] dzielimy go na m (parzystych) podprzedziałów. W podprzedziałach [a, a+2h] ,..., [a+(m-1)h, b] stosuje się wzór parabol a wyniki cząstkowe sumuje:

$$S(f) = \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k})$$

2. Opis problemu.

Problemem w tym zadaniu z laboratoriów było obliczenie numeryczne całki typu:

$$\boldsymbol{I = \int_0^{\pi} x^m sin(kx)dx}$$

metodą Simpsona dla liczby węzłów n = 2*p + 1 = 11, 21, 51, 101, 201.

W celu sprawdzenia poprawności metody należało skorzystać z rozwinięcia funkcji sin(x) w szereg: $\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$

Po wstawieniu wyrażenia pod całkę otrzymujemy: $I = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{(kx)^{2i+m+2}}{k^{m+1}(2i+1)!(2i+m+2)}\Big|_a^b$

Należało zbadać zmianę sumy dla różnej liczby sumowanych wyrazów (1, 2, ..., 30).

3. Wyniki

Napisałem program w języku C, w którym zaimplementowałem metody do numerycznego obliczenia wartości całki metodą rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg oraz metodą Simpsona. Poniżej zamieszczam uzyskane wyniki:

Liczba sumowanych wyrazów	Wartość sumy	Różnica z rozwiązaniem dokładnym
1	4.934802	2.9348
2	0.876090	1.12391
3	2.211353	0.211353
4	1.976022	0.0239778
5	2.001829	0.0018291
6	1.999900	0.00010047
7	2.000004	4.16781e-06
8	2.000000	1.3526e-07
9	2.000000	3.52908e-09
10	2.000000	7.56506e-11
11	2.000000	1.35669e-12
12	2.000000	2.02061e-14
13	2.000000	8.88178e-16
14	2.000000	4.44089e-16
. . .	. . .	. . .
30	2.000000	4.44089e-16

Tab. 3.1 Tabela wartości sum szeregu dla różnej liczby sumowanych wyrazów dla m=0 i k=1

Jak można zauważyć wartość sumy szeregu dla m=0 i k=1 zaczęła być bardzo bliska oczekiwaniu teoretycznemu po dodaniu 8 elementów. Po dodaniu 14 wyrazów różnica przestała się zmieniać i cały czas wynosiła: $4.44089 * 10^{-16}$.

Liczba sumowanych wyrazów	Wartość sumy	Różnica z rozwiązaniem dokładnym
1	10.335426	7.19383
2	0.134769	3.00682
3	3.730357	0.588764
4	3.073189	0.0684032
5	3.146894	0.00530114
6	3.141298	0.000294494
7	3.141605	1.23208e-05
8	3.141592	4.02514e-07
9	3.141593	1.0558e-08
10	3.141593	2.27316e-10
11	3.141593	4.09006e-12
12	3.141593	6.26166e-14
13	3.141593	4.44089e-16
. . .	. . .	. . .
30	3.141593	4.44089e-16

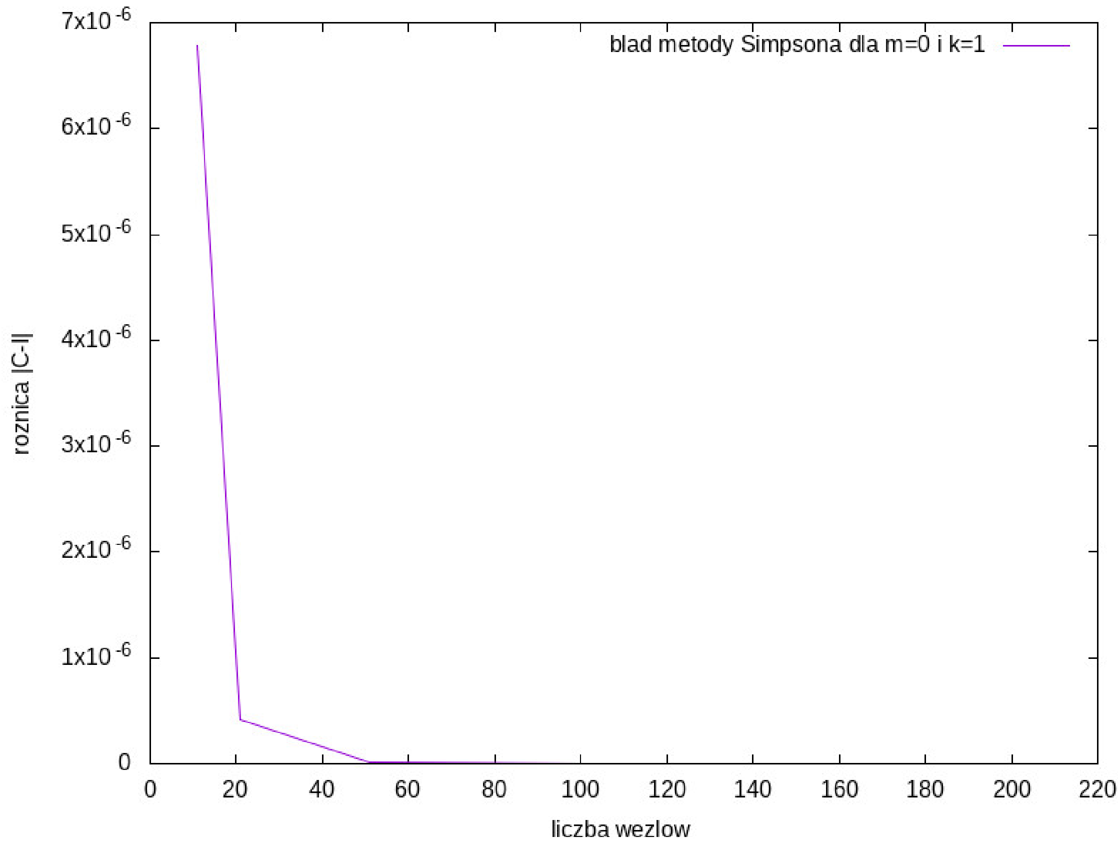
Tab. 3.2 Tabela wartości sum szeregu dla różnej liczby sumowanych wyrazów dla m=1 i k=1

Dla m=1 i k=1 wartość zaczęła być bardzo dokładna po zsumowaniu 8 elementów. Wartość sumy przestała się zmieniać już po dodaniu 13 wyrazów szeregu i ponownie różnica wyznaczonej wartości z teoretyczną ustabilizowała się na $4.44089 * 10^{-16}$.

Liczba sumowanych wyrazów	Wartość sumy	Różnica z rozwiązaniem dokładnym
1	2157.352	2100.99
2	-66845.192	66901.6
3	629660.531	629604
4	-2.83264e+06	2.83269e+06
5	7.45046e+06	7.4504e+06
6	-1.29018e+07	1.29019e+07
7	1.59002e+07	1.59002e+07
8	-1.47179e+07	1.47179e+07
9	1.06416e+07	1.06416e+07
10	-6.19063e+06	7.56506e-11
11	2.96544e+06	2.96539e+06
12	-1.1914e+06	1.19146e+06
13	407744	407688
14	-120262	120318
15	31013.5	30957.2
16	-6952.2	7008.56
17	1463.78	1407.42
18	-196.104	252.468
19	97.0724	40.7088
20	50.4304	5.93318
21	57.1491	0.785554
22	56.2687	0.0949094
23	56.3741	0.0105079
24	56.3625	0.00106895
25	56.3637	0.000101369
26	56.3636	7.89865e-06
27	56.3636	1.55232e-06
28	56.3636	7.929e-07
29	56.3636	8.4974e-07
30	56.3636	8.45767e-07

Tab. 3.3 Tabela wartości sum szeregu dla różnej liczby sumowanych wyrazów dla m=5 i k=5

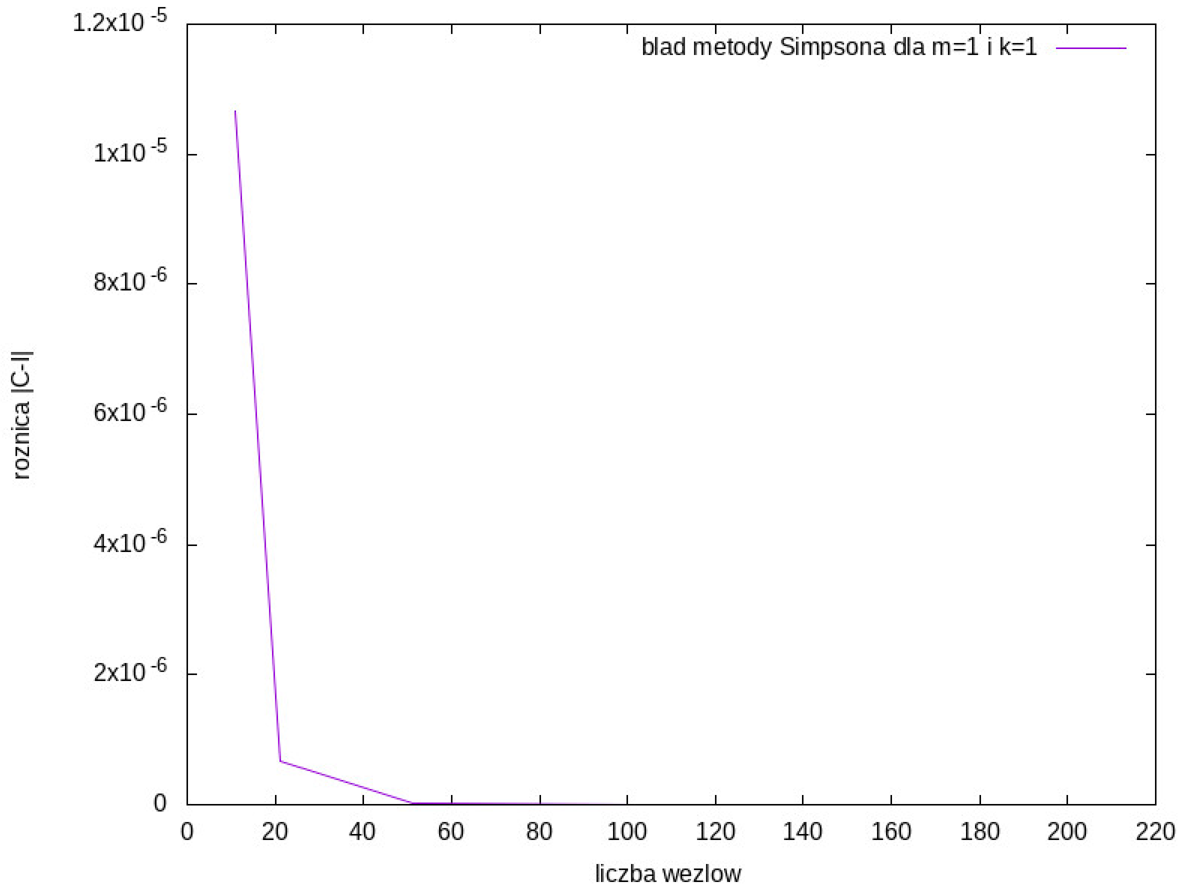
Dla m=5 i m=5 różnica wyznaczonej wartości z rozwiązaniem dokładnym nie przestała się zmieniać podczas sumowania pierwszych 30 wyrazów, jednak można zaobserwować, że po zsumowaniu 26 wyrazów była ona już bardzo niewielka.
Dla sumy 30 wyrazów uzyskaliśmy bardzo dobrą dokładność rzędu 10^{-7}.



Rys. 3.4 Wykres zależności różnicy wartości dokładnej całki, a całki obliczonej numerycznie od ilości przyjętych węzłów dla m=0 i k=1

Liczba węzłów	Przybliżona wartość całki	Różnica z wartością teoretyczną
11	2.000007	6.78444e-06
21	2.000000	4.23093e-07
51	2.000000	1.08245e-08
101	2.000000	6.76472e-10
201	2.000000	4.22777e-11

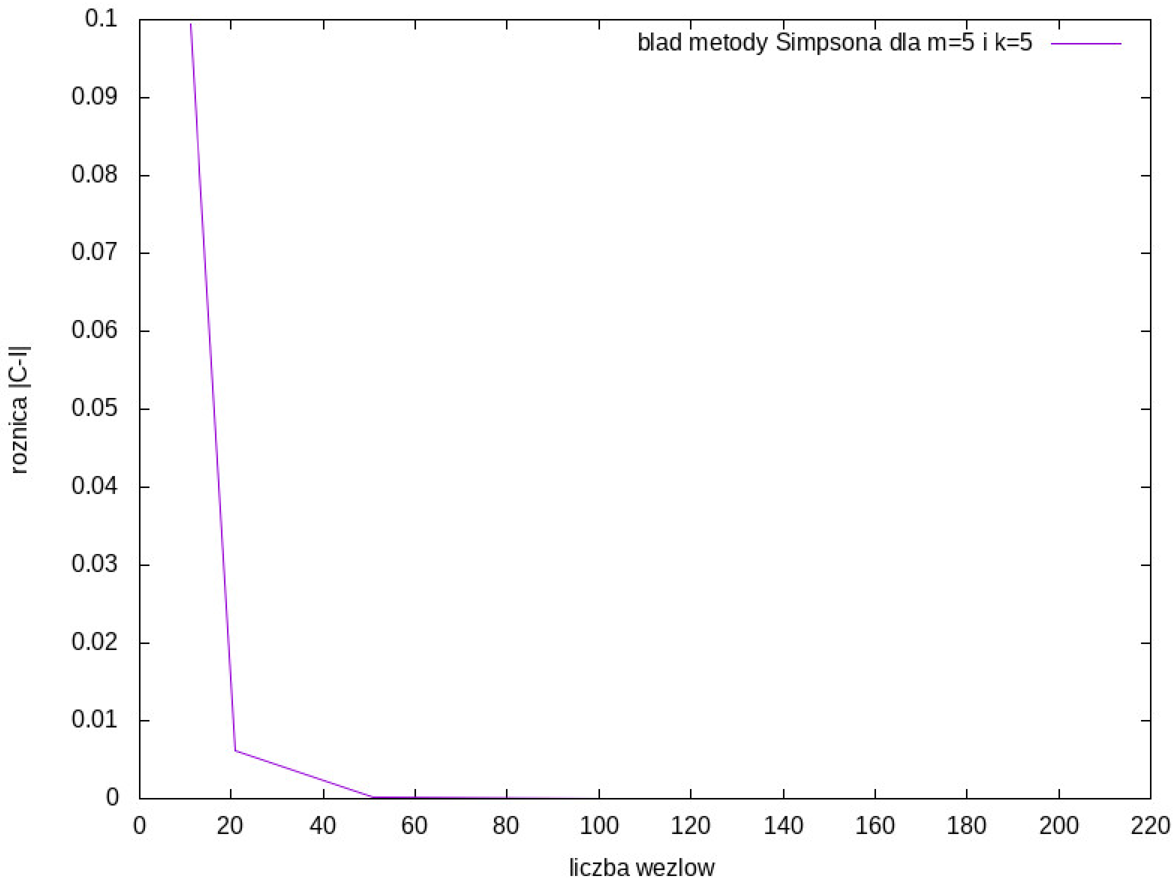
Wartość całki obliczona metodą Simpsona dla przypadku m=0 i k=1 jest bardzo dokładna (rząd błędu 10^{-11}). Wraz ze wzrostem liczby węzłów, zwiększała się dokładność przybliżenia.



Rys. 3.5 Wykres zależności różnicy wartości dokładnej całki, a całki obliczonej numerycznie od ilości przyjętych węzłów dla m=1 i k=1

Liczba węzłów	Przybliżona wartość całki	Różnica z wartością teoretyczną
11	3.141603	1.0657e-05
21	3.141593	6.64593e-07
51	3.141593	1.70031e-08
101	3.141593	1.0626e-09
201	3.141593	6.64095e-11

Dla przypadku m=1 i k=1 również zwiększenie liczby węzłów dawało coraz lepsze przybliżenie.



Rys. 3.6 Wykres zależności różnicy wartości dokładnej całki, a całki obliczonej numerycznie od ilości przyjętych węzłów dla m=5 i k=5

Liczba węzłów	Przybliżona wartość całki	Różnica z wartością teoretyczną
11	56.462920	0.0993507
21	56.369718	0.00614874
51	56.363727	0.000157636
101	56.363580	1.06398e-05
201	56.363570	1.45813e-06

Dla przypadku m=5 i k=5 zwiększenie liczby węzłów dawało coraz lepsze przybliżenie, jednak nie było one tak dokładne jak dla przypadków m=0, k=1 oraz m=1, k=1.

4. Wnioski

Metoda Simpsona okazała się być skuteczną i szybką metodą do numerycznego obliczenia wartości całki oznaczonej typu $I = \int_0^{\pi} x^m sin(kx)dx$.
Podobnie jak dla metod interpolacji, zwiększenie liczby węzłów zwiększa dokładność wyniku. Dla przyjętych 201 węzłów otrzymałem przybliżenie o zadowalającej dokładności.