Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych z Metod Numerycznych

Gabriel Naleźnik

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

26.03.2020 r.

Laboratoria IV : *Uogólniony (symetryczny) problem własny - wyznaczanie modów własnych struny w 1D*

1. Wstęp Teoretyczny.

Drgania – procesy, w trakcie których pewne wielkości fizyczne na przemian rosną i maleją w czasie.

Drgania własne – drgania ciała wywołane wychyleniem z położenia równowagi trwałej, kiedy na ciało nie działają żadne siły, poza siłami określającymi położenie równowagi i siłami dążącymi do jej przywrócenia.

Równanie falowe struny - równanie różniczkowe rzędu drugiego opisujące dynamikę struny za pomocą funkcji wychylenia w czasie i przestrzeni: *φ(x, t)*.

$$\frac{N}{\rho(x)} * \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{x}^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{t}^2}$$

Równanie. 1.1 Równanie falowe struny

Gdzie: N - naciąg struny, ρ(x)- liniowy rozkład gęstości

Wykonując podstawienie φ (x, t) = u(x) * θ(t) oraz dokonując separacji zmiennych, otrzymujemy:

$$-\frac{N}{\rho(x)}\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{x}^2} = \frac{1}{\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \mathrm{t}^2} = const = -\lambda \quad =>$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{x}^2} = \lambda\, u \frac{\rho(x)}{N}$$

Równanie. 1.2 Równanie różniczkowe zależne tylko od zmiennej położeniowej

Podstawiając trójpunktowy iloraz różnicowy centralny za drugą pochodną dokonujemy dyskretyzacji równania 1.2:

$$-\frac{u_{i-1} - 2\,u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \lambda\,\frac{\rho_i}{N} u_i$$

Równanie te można zapisać w postaci macierzowej, będącej postacią **uogólnionego problemu własnego:**

$$Au = \lambda Bu$$

Problem własny - poszukiwanie rozwiązania jednorodnego układu równań liniowych (równania własnego), w którym macierz współczynników $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I\lambda}$ zależy od jednego parametru λ.

$$Ax = \lambda x$$

Równanie. 1.3 Postać równania własnego

Gdzie: A-macierz kwadratowa, x-szukany wektor własny, λ- szukana wartość własna

Istotą algebraicznego problemu własnego jest dobór takiego wektora y, do którego byłby proporcjonalny wektor x. Zatem powinien zachodzić związek:

$$y = \lambda x$$

W mechanice klasycznej równanie własne występuje np. w zagadnieniu wyznaczenia tzw. **modów własnych** układu, czyli drgań harmonicznych, jakie może wykonywać układ. Drgania rzeczywistych układów fizycznych można traktować jako ruch harmoniczny lub złożenie ruchów harmonicznych, gdy ograniczy się do przypadku tzw. **małych drgań**, czyli drgań w pobliżu położenia równowagi układu.

Uogólniony problem własny - problem własny, uogólniony o dodatkową macierz, stojącą po prawej stronie równania

$$Ax = \lambda Bx \quad => \quad (A - \lambda B)x = 0$$

Równanie. 1.4 Postać uogólnionego równania własnego

Problem ten można rozwiązać przekształcając powyższe równanie do zwykłego problemu własnego: $\boldsymbol{B^{-1}Ax} = \boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{\lambda x}$. W celu znalezienia macierzy podobnej do macierzy $\boldsymbol{B^{-1}A}$ można posłużyć się rozkładem $\boldsymbol{LL^T}$**:** $\boldsymbol{L^T}(\boldsymbol{B^{-1}A})(\boldsymbol{L^T})^{-1}$ **= G.** Otrzymujemy przekształcenie: **Gy = λy.** Aby wyznaczyć wektory własne macierzy **A**, można rozwiązać układ równań: $\boldsymbol{L^T x} = \boldsymbol{y}$

Zwykły problem własny z macierzą symetryczną można obsłużyć **metodą Hauseholdera.**

2. Opis problemu.

Problemem w tym zadaniu z laboratoriów było wyznaczanie modów własnych struny w 1D, za pomocą rozwiązania uogólnionego równania własnego: $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{\lambda Bu}$, dla macierzy kwadratowych **A** i **B** o rozmiarze **n = 200** zdefiniowanych:

$$A_{i,j} = (-\delta_{i,j+1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1})/\Delta x^2$$

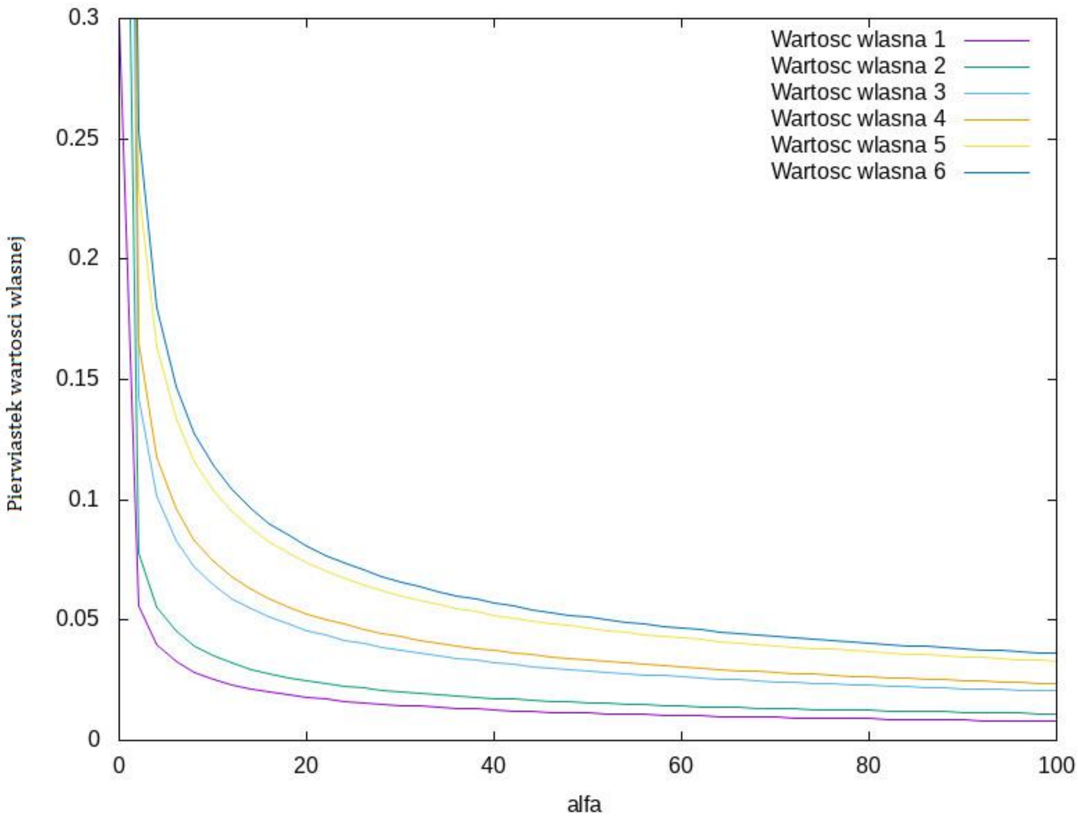
$$B_{i,j} = \frac{\rho_i}{N}\delta_{i,j}$$

Gdzie: $\boldsymbol{\delta}$ **-** delta Kroneckera,
Długość struny: $\mathbf{L = 10}$,
Naciąg struny: $\mathbf{N = 1}$,
Liniowy rozkład gęstości: $\boldsymbol{\rho(x) = 1 + 4\,\alpha x^2}$,
Odległość między węzłami: $\boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{\frac{L}{n+1}}$

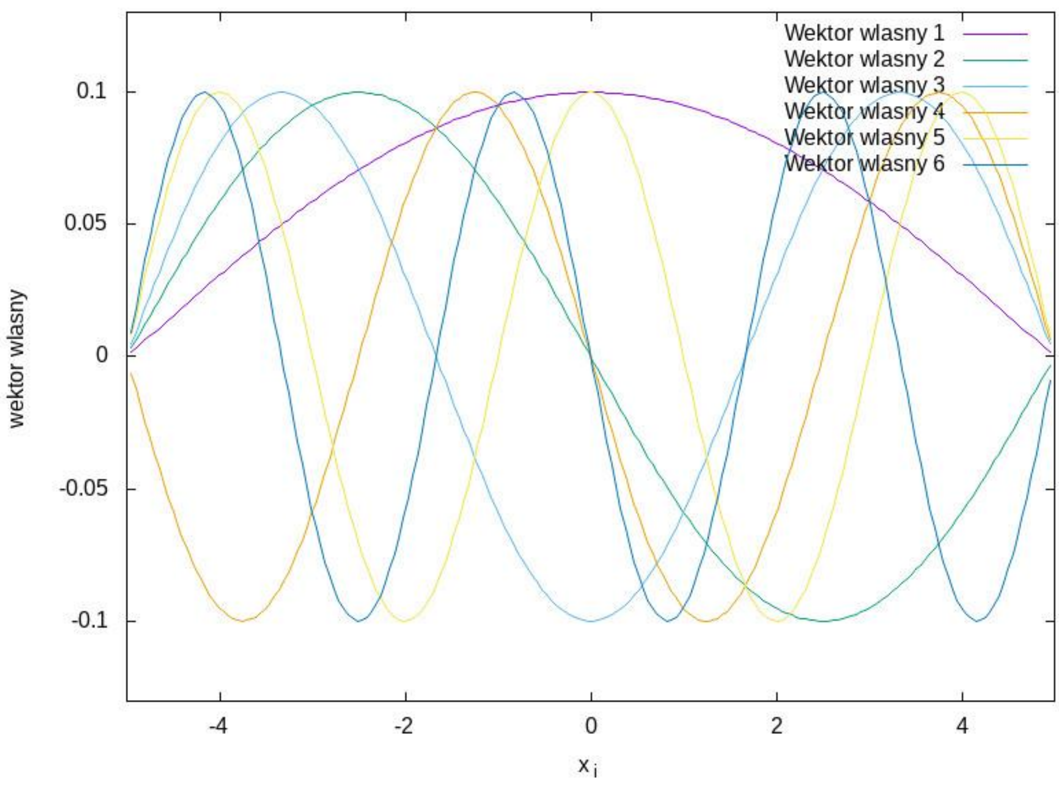
Rozwiązanie należało przeprowadzić 50 razy dla $\boldsymbol{\alpha}$ z przedziału $\mathbf{[0, 100]}$ i skoku $\mathbf{\Delta\alpha = 2}$.

3. Wyniki.

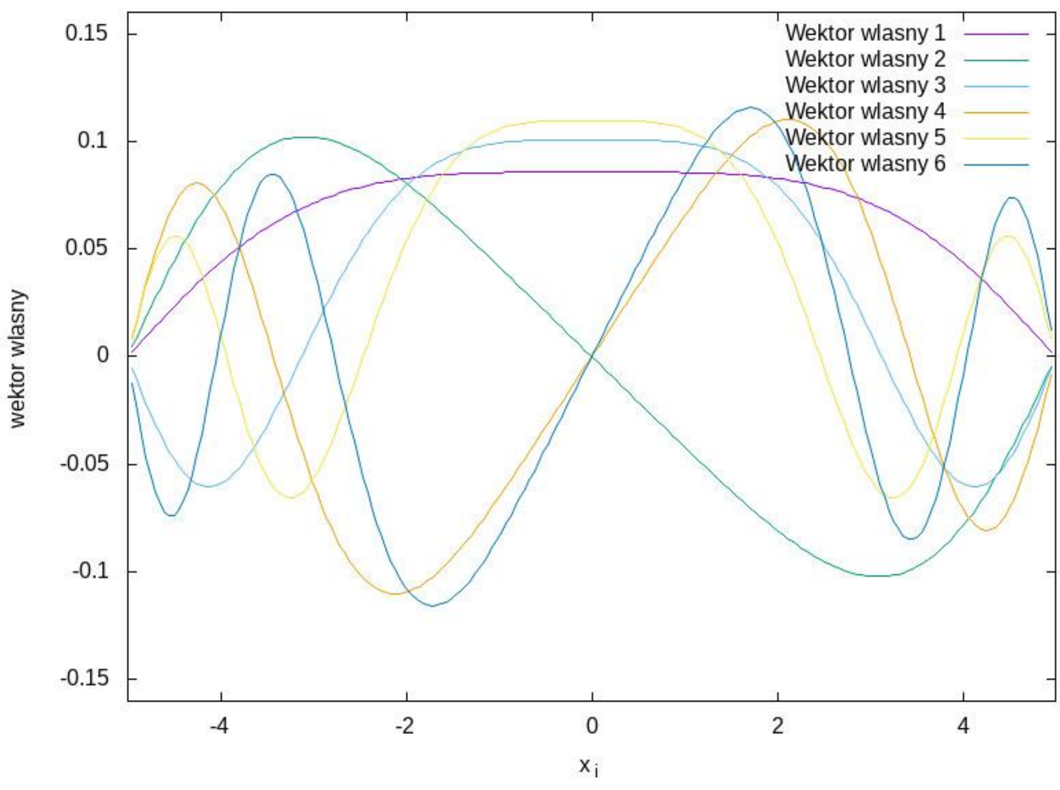
Napisałem program w języku C, wykorzystujący bibliotekę GSL w celu rozwiązania zadanego w postaci macierzowej układu równań. Poniżej zamieszczam uzyskane wyniki:



Rys. 3.1 Wykresy zmiany 6 najmniejszych pierwiastków z wartości własnych (częstości własnych struny) w funkcji parametru α



Rys. 3.2 Wykresy wektorów własnych odpowiadających 6 najniższym wartościom własnym dla α = 0



Rys. 3.3 Wykresy wektorów własnych odpowiadających 6 najniższym wartościom własnym dla α = 100

4. Wnioski

Rysunek 3.1 pokazuje że częstości własne struny są odwrotnie proporcjonalne do parametru α, a w nieskończoności częstość ta dąży do 0. Ponadto, kolejne wykresy pierwiastków pierwszych 6 wartości własnych łączą się w pary (różnica pomiędzy punktami sparowanych funkcji jest znacznie mniejsza niż między punktami pozostałych wykresów).

Rysunki 3.2 i 3.3 przedstawiają wykresy funkcji podobnych do funkcji sinusoidalnych, gdzie dla α=0 wektory własne są nieparzystymi wielokrotnościami "połówek" sinusa ze stałą amplitudą, gdyż dla α=0 funkcja liniowego rozkładu gęstości: $\rho(\mathrm{x}) = 1 + 4\,\alpha x^2$ jest stała. Natomiast dla α=100 środek struny staje się masywny przez co wektory 1,3,5 mają płaską centralną część. Wynika to z tego że dla niezerowego i dużego α funkcja gęstości rośnie wraz z odległością od węzła i mody struny zostały zniekształcone. Ponadto sinusoidalne kształty wykresów wektorów własnych dla równania struny mogą świadczyć o poprawności uzyskanego rozwiązania.

Podsumowując, rozwiązanie uogólnionego problemu własnego, za pomocą biblioteki GSL, pozwoliło w tym zadaniu na wyznaczenie modów własnych struny w sposób bardzo wydajny i prosty. Uzyskane wyniki świadczą o poprawnym rozwiązaniu, zatem przyjęta metoda okazała się być skuteczna dla tego problemu.