

Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych z Metod Numerycznych

Gabriel Naleźnik

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

07.06.2020 r.

Laboratoria XIV : Generowanie ciągu liczb pseudolosowych o rozkładzie jednorodnym w kuli 3D.

1. Wstęp Teoretyczny.

Generatory liniowe– Generatory liniowe tworzą ciąg liczb według schematu:

$$X_{n+1} = (a_1X_n + a_2X_{n-1} + \dots + a_kX_{n-k+1} + c) \bmod m$$

gdzie: $a_1, a_2, \dots, a_k, c, m$ – parametry generatora (ustalone liczby).

Operację $r = (a \bmod n)$ nazywamy dzieleniem modulo a jej wynikiem jest reszta z dzielenia liczb całkowitych a i n.

Generatory wykorzystujące operację dzielenia modulo to generatory kongruentne lub kongruencyjne.

Aby wygenerować ciąg liczb pseudolosowych należy zdefiniować jego parametry. Liczby $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ nazywamy ziarnem generatora.

Najprostszy generator liniowy ma dwie odmiany: jest generatorem multiplikatywnym gdy $c = 0$ i generatorem mieszanym gdy $c \neq 0$.

Generator multiplikatywny - generator liniowy, który tworzy ciąg liczb według wzoru:

$$X_{i+1} = aX_{i-1} \bmod m$$

Korzystając z faktu, że $k_i = \left\lfloor \frac{aX_{i-1}}{m} \right\rfloor$ można wyznaczyć kolejne generowane liczby:

$$X_1 = aX_0 - mk_1$$

$$X_2 = a^2X_0 - mk_2 - mk_1a$$

$$X_n = a^nX_0 - m(k_n + k_{n-1}a + \dots + k_1a^{n-1})$$

Ostatnie równanie można zapisać w postaci:

$$X_n = a^nX_0 \bmod m$$

Z tego wynika, że wybór X_0 determinuje wszystkie liczby w generowanym ciągu i uzyskany ciąg liczb jest deterministyczny.

Okres generatora multiplikatywnego określa wzór:

$$T = \min \{i: X_i = X_0, i > 0\}$$

Maksymalny okres generatora multiplikatywnego uzyskujemy dla

$$a^{(m-1)/p} \neq 1 \bmod m$$

Gdy m jest liczbą pierwszą a p jest czynnikiem pierwszym liczby $(m-1)$.

Metoda Boxa-Mullera - Definiujemy fgp w 2D jako funkcję gaussowską

$$f(x, y) = f(x) * f(y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Docelowo chcemy policzyć prawdopodobieństwo: $p(x) = f(x)f(y)dxdy$ (czyli że wylosowana liczba znajdzie się w obszarze $dxdy$).

Wprowadzamy nowe zmienne (radialne):

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), & r \in [0, \infty) \\ y = r \sin(\theta), & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo wyrażamy za pomocą nowych zmiennych:

$$p(x) = f(r, \theta)r drd\theta$$

$$p(r, \theta) = r e^{-\frac{r^2}{2}} drd\theta$$

Wprowadzamy nową zmienną z :

$$z = \frac{r^2}{2} \rightarrow dz = r dr$$

$$f(z) = e^{-z} \Rightarrow z = -\ln(1 - U_1), U_1 \in (0, 1)$$

Dla pary (U_1, U_2) dostajemy (x, y) dla rozkładu $N(0, 1)$

$$x = r \cos(\theta) = \sqrt{-2 \ln(1 - U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

$$y = r \sin(\theta) = \sqrt{-2 \ln(1 - U_1)} \sin(2\pi U_2)$$

2. Opis problemu.

Problemem w tym zadaniu z laboratoriów było wylosować $N = 2000$ liczb pseudolosowych z generatorów multiplikatywnych:

$$U_1(0,1): X_i = 17 * X_{i-1} \bmod (2^{13} - 1)$$

gdzie: $X_0 = 10$

$$U_2(0,1): X_i = 85 * X_{i-1} \bmod (2^{13} - 1)$$

gdzie: $X_0 = 10$

$$U_3(0,1): X_i = (1176 * X_{i-1} + 1476 * X_{i-2} + 1776 * X_{i-3}) \bmod (2^{32} - 5)$$

gdzie: $X_0 = X_{-1} = X_{-2} = 10$

Stosując metodę Boxa-Mullera należało utworzyć $N = 2000$ trójwymiarowych wektorów o rozkładzie normalnym, które później, stosując odpowiednie przekształcenia, należało umieścić na powierzchni sfery, a następnie w rozłożyć w kuli 3D.

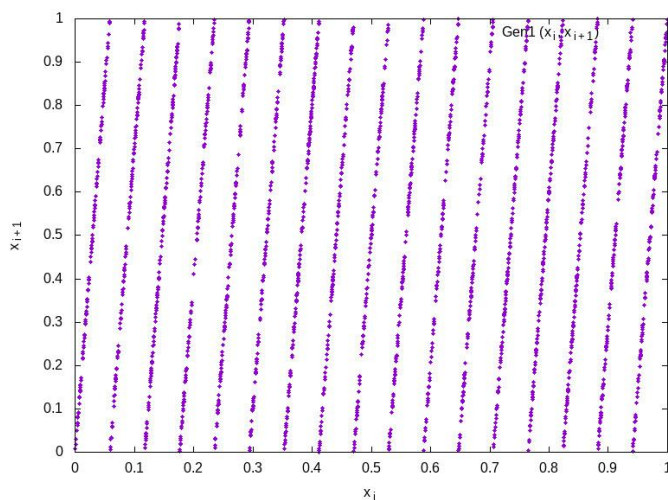
Dla $N = 2000, 10^4, 10^7$ wygenerowanych w kuli punktów, należało zbadać gęstość dla każdego z 10 podprzedziałów kuli o równej długości za pomocą wzoru:

$$g_j = \frac{n_j}{V_j - V_{j-1}}$$

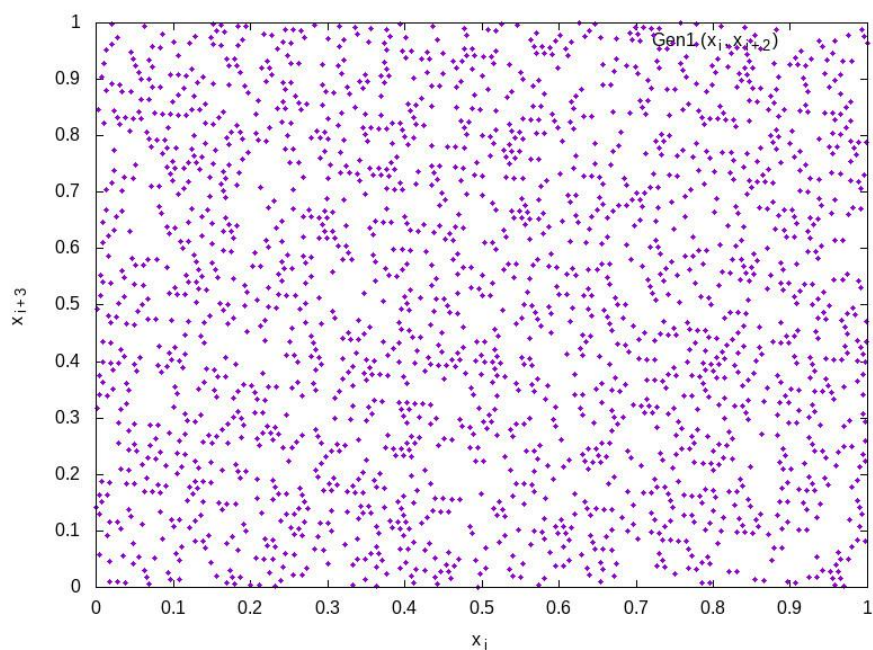
gdzie: n_j - liczba punktów w podprzedziale, $(V_j - V_{j-1})$ - objętość podprzedziału j

3. Wyniki

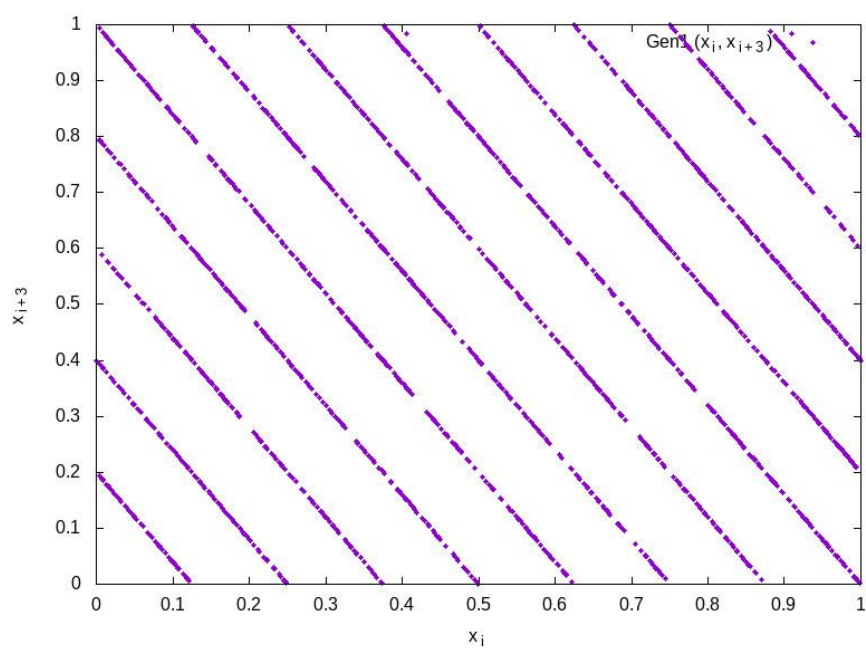
Napisałem program w języku C, w którym zaimplementowałem generowanie liczb pseudolosowych z danych generatorów oraz generujący ich rozkład na powierzchni sfery i w kuli. Poniżej zamieszczam uzyskane wyniki:



Rys. 3.1 Wykres zależności elementu x_i od x_{i+1} dla generatora $U_1(0,1)$.

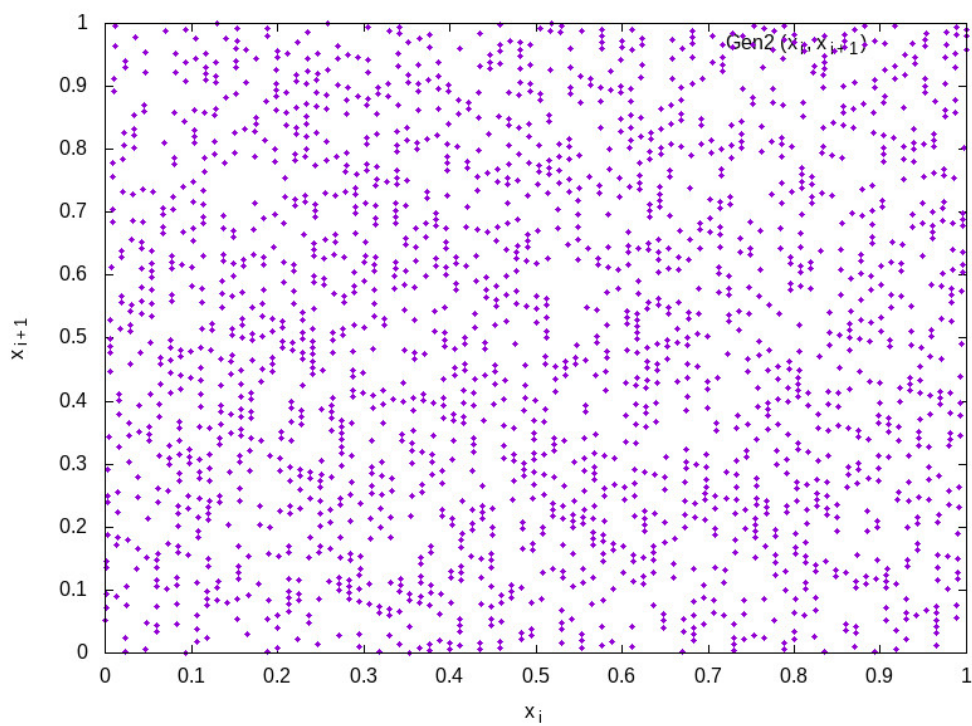


Rys. 3.2 Wykres zależności elementu x_i od x_{i+2} dla generatora $U_1(0,1)$.

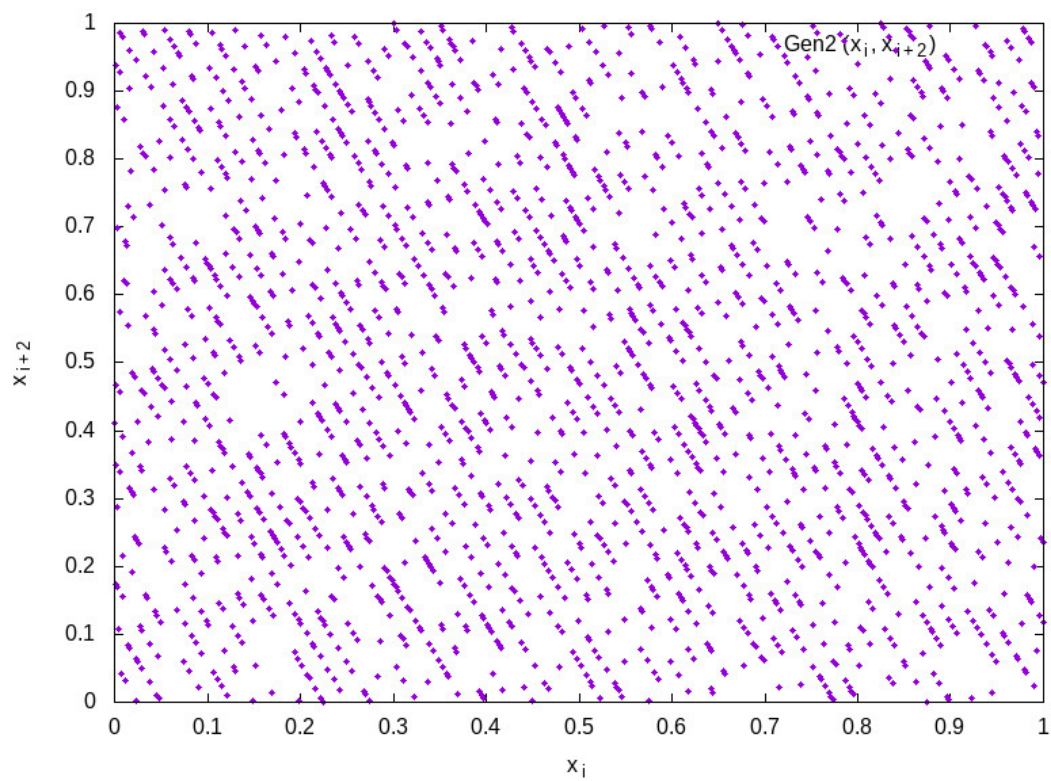


Rys. 3.3 Wykres zależności elementu x_i od x_{i+3} dla generatora $U_1(0,1)$.

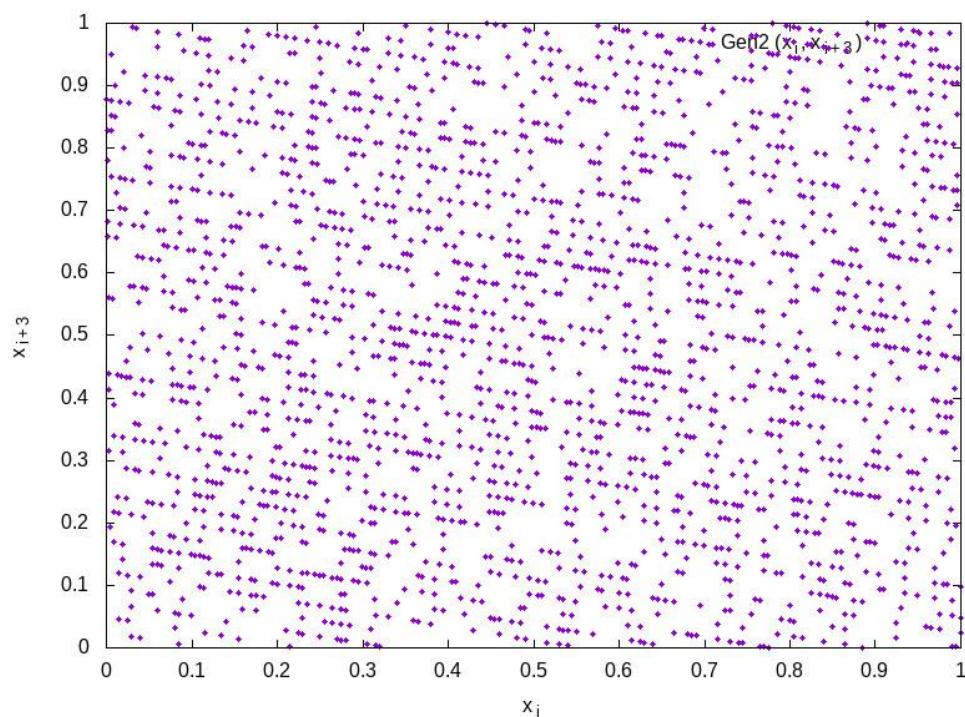
Jak można zauważyć, punkty pozyskane z generatora U_1 są bardzo od siebie zależne (szczególnie pary (x_i, x_{i+1}) oraz (x_i, x_{i+3})). Wynika to z faktu, że parametry generatora są bardzo małe, co spowodowało wyraźną okresowość generowanych wyrazów.



Rys. 3.4 Wykres zależności elementu x_i od x_{i+1} dla generatora $U_2(0,1)$.

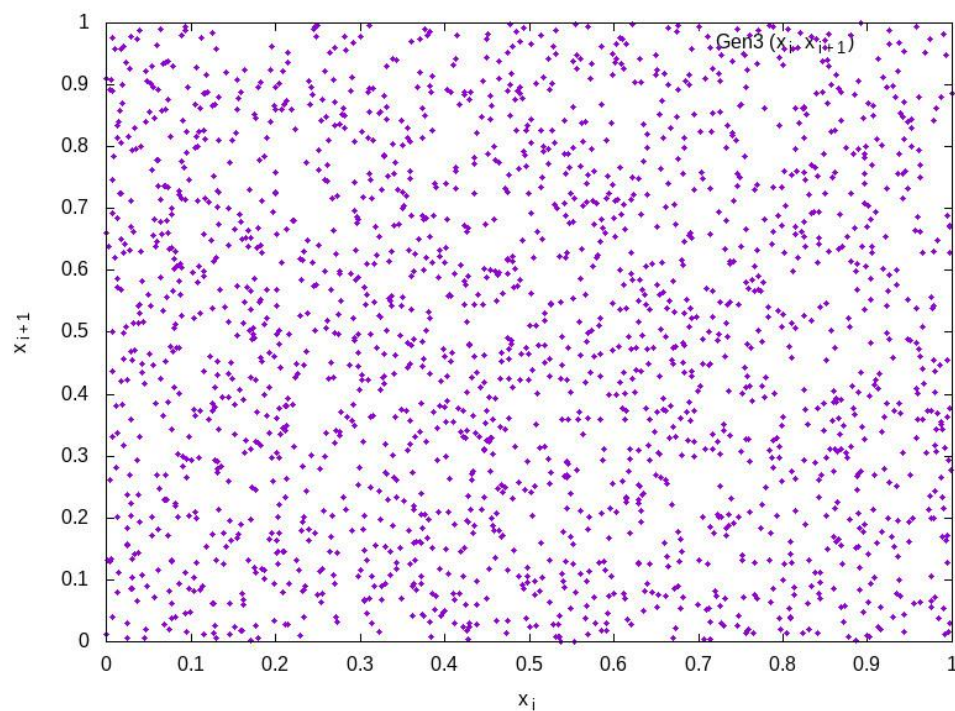


Rys. 3.5 Wykres zależności elementu x_i od x_{i+2} dla generatora $U_2(0,1)$.

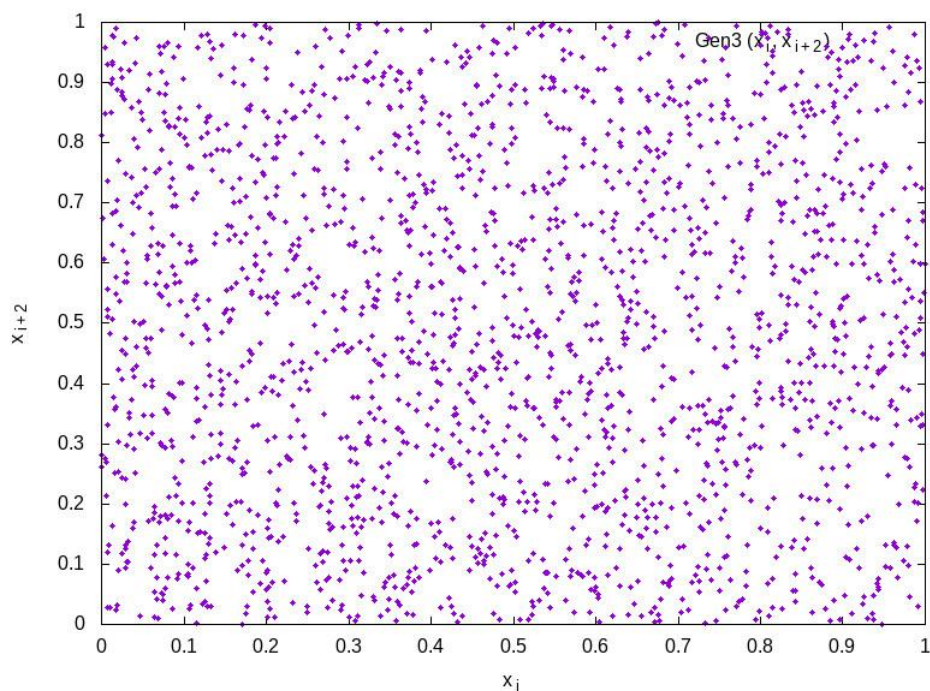


Rys. 3.6 Wykres zależności elementu x_i od x_{i+3} dla generatora $U_2(0,1)$.

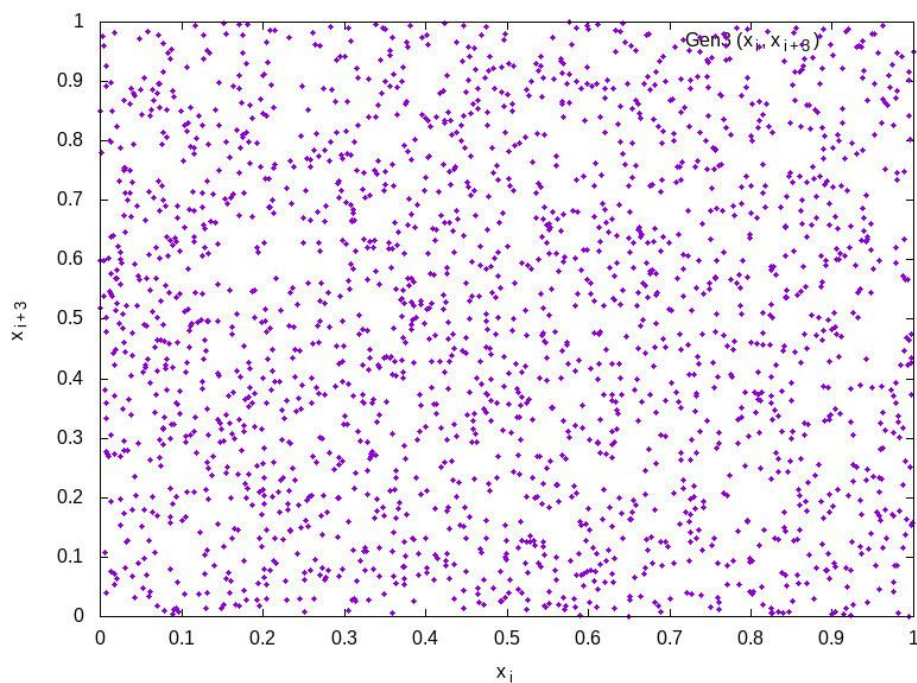
Dla generatora U2, po zwiększeniu mnożnika elementu poprzedniego, uzyskaliśmy mniejsze zależności niż w generatorze U1 i wyrazy zostały wygenerowane gęściej, jednak zależności między nimi są dalej widoczne.



Rys. 3.7 Wykres zależności elementu x_i od x_{i+1} dla generatora $U_3(0,1)$.

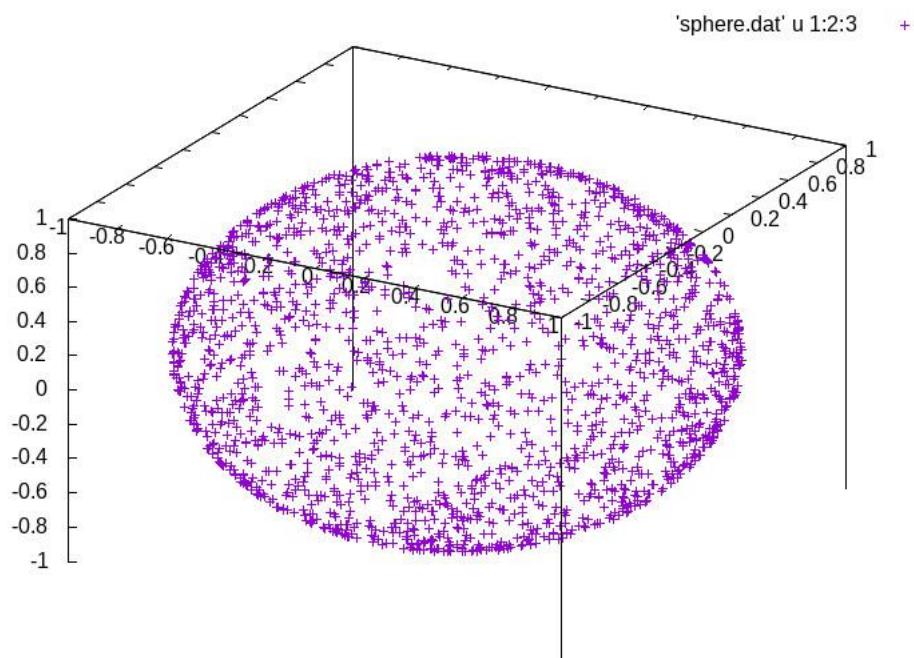


Rys. 3.8 Wykres zależności elementu x_i od x_{i+2} dla generatora $U_3(0,1)$.

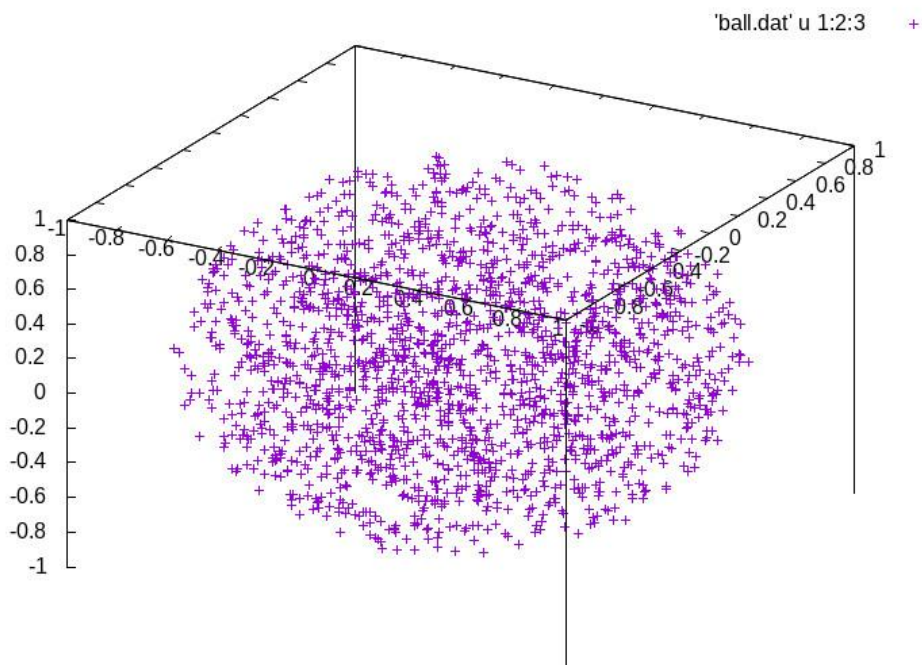


Rys. 3.9 Wykres zależności elementu x_i od x_{i+3} dla generatora $U_3(0,1)$.

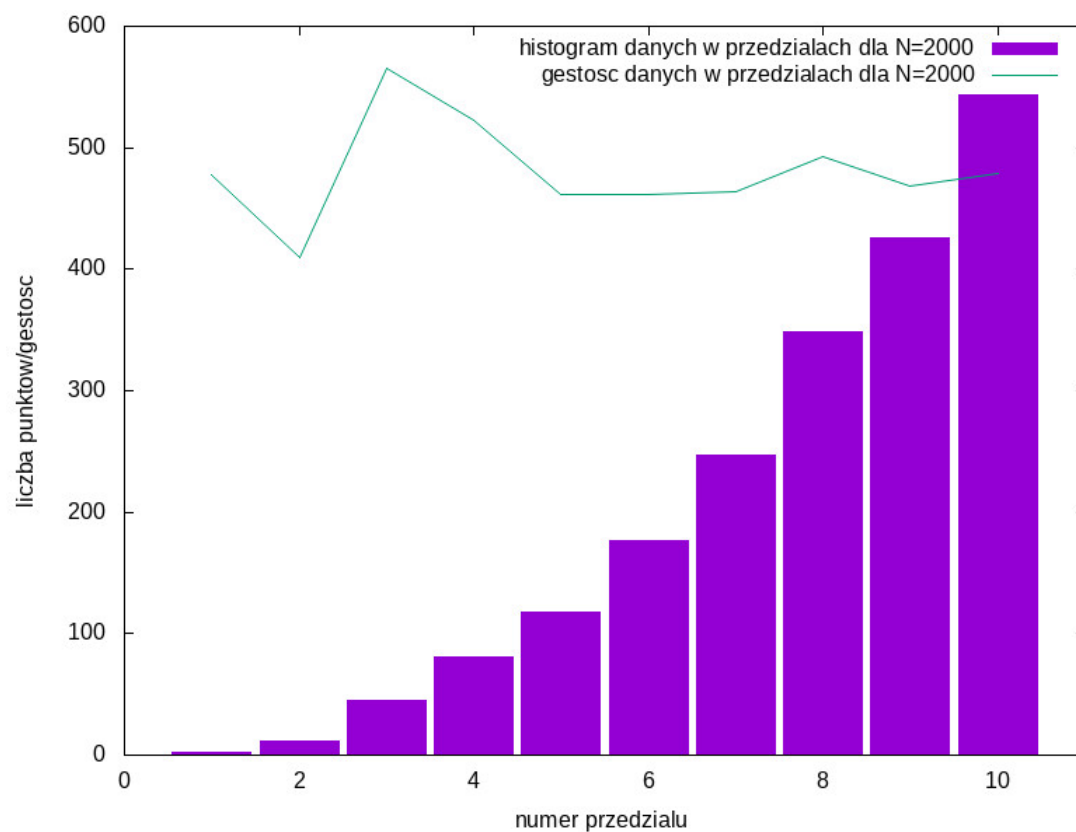
W przypadku generatora U3 nie widać wyraźnych zależności między kolejnymi wygenerowanymi liczbami i sam ich rozkład na płaszczyźnie jest bardzo jednorodny, co świadczy o dobrej jakości generatora liczb pseudolosowych. Uzyskane rezultaty były bardzo dobre, gdyż ziarno generatora zależało teraz od 3 czynników oraz same parametry zostały znacznie zwiększone.



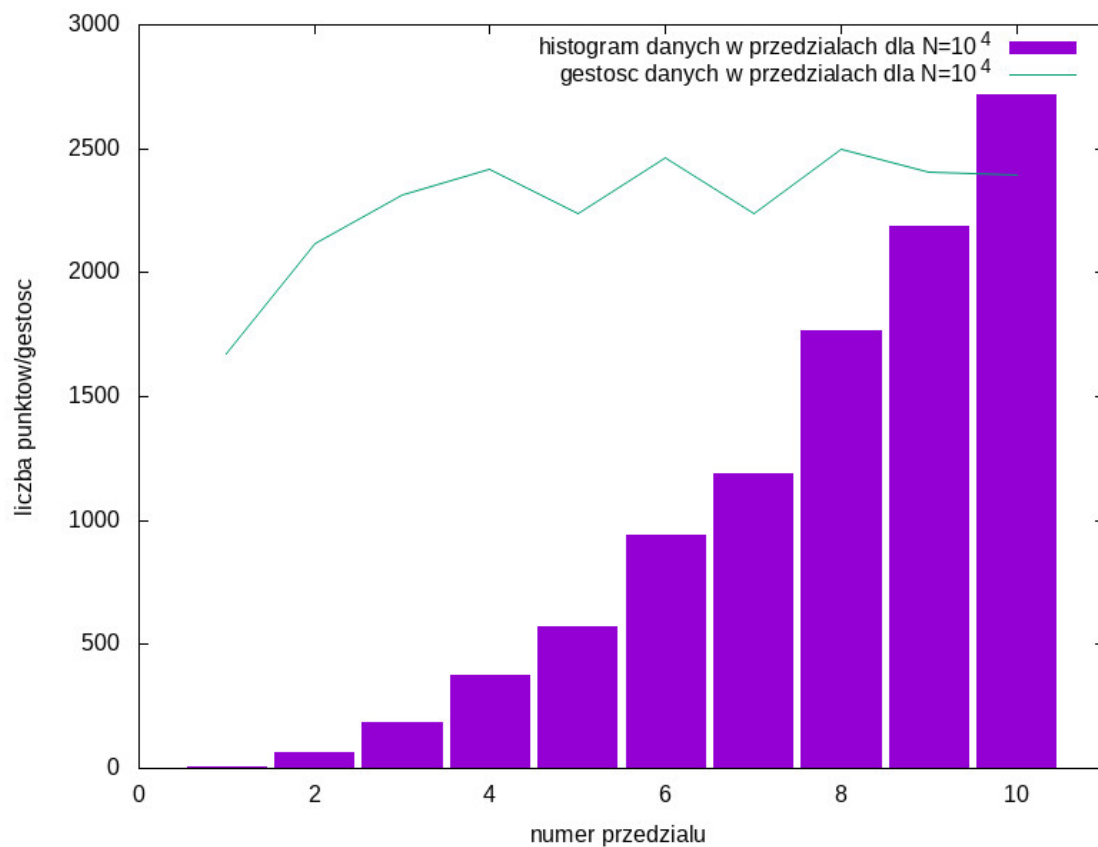
Rys. 3.10 Rozkład wygenerowanych punktów 3D na powierzchni sfery



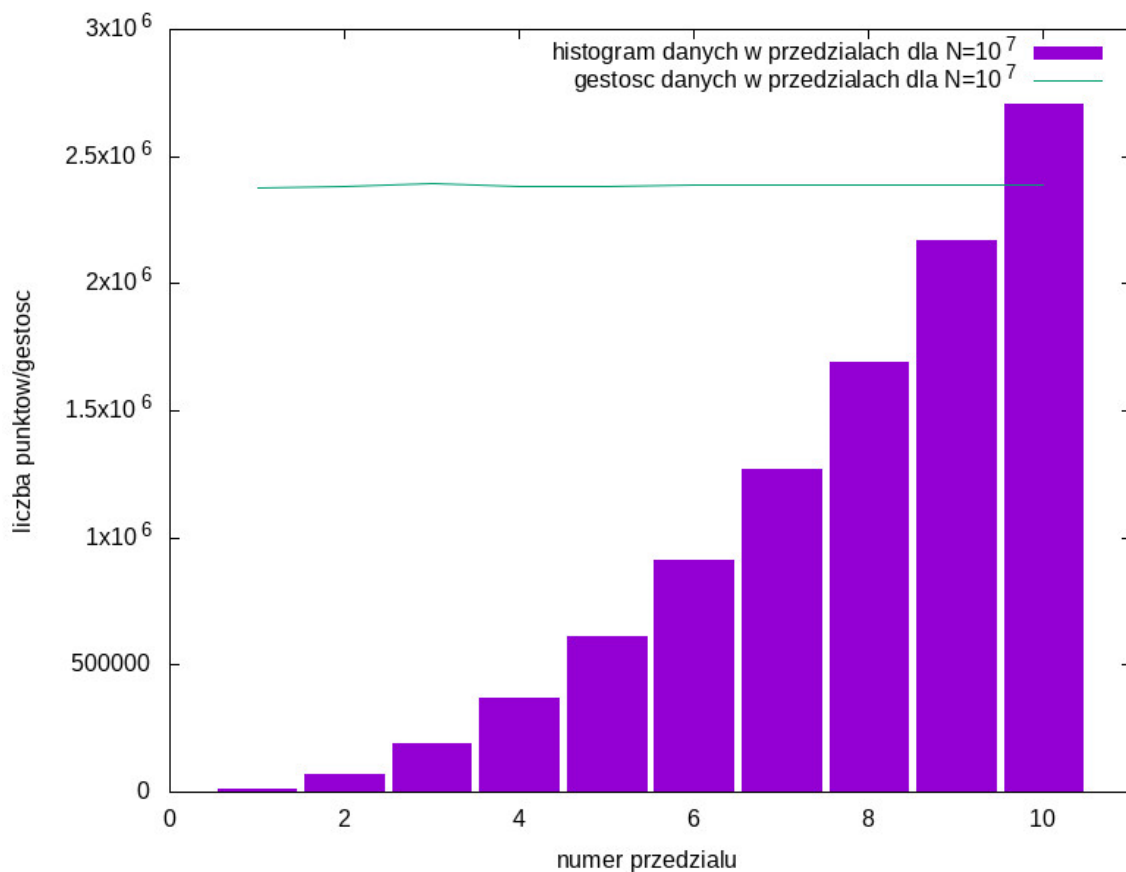
Rys. 3.11 Rozkład wygenerowanych punktów 3D w kuli



Rys. 3.12 Wykres prezentujący liczbę i gęstość losowanych punktów w każdym podprzedziale dla $N=2000$



Rys. 3.13 Wykres prezentujący liczbę i gęstość losowanych punktów w każdym podprzedziale dla $N=10^4$



Rys. 3.14 Wykres prezentujący liczbę i gęstość losowanych punktów w każdym podprzedziale dla $N=10^7$

Dla 2000 i 10^4 generowanych punktów można zauważyć, że ich gęstość nie jest jednakowa w każdym z przedziałów kuli i występują wyraźne odchylenia. Natomiast, dla 10^7 wygenerowanych punktów, gęstość wylosowanych punktów jest niemal stała, zatem dla bardzo dużej liczby generowanych punktów, ich rozkład staje się bardziej jednorodny.

4. Wnioski

Do wygenerowania liczb pseudolosowych w tym projekcie, wykorzystane zostały proste w implementacji generatory multiplikatywne. Po odpowiednim zwiększeniu ich parametrów, wylosowane liczby pseudolosowe bardzo dobrze imitowały rozkład losowy.

Przeprowadzone operacje pokazały, że uzyskany rozkład staje się bardziej jednorodny, gdy zwiększa się liczbę wylosowanych wyrazów. Zbyt małe parametry generatora powodują widoczną okresowość w generowanych liczbach.

Generatory multiplikatywne z odpowiednio dobranymi parametrami, generują dobrej jakości rozkład.