

Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych z Metod Numerycznych

Gabriel Naleźnik

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

16.03.2020 r.

Laboratoria III : Metoda największego spadku dla macierzy wstęgowej

1. Wstęp Teoretyczny.

Macierz rzadka – macierz, w której większość elementów ma wartość zero.

Macierz wstęgowa: kwadratowa macierz rzadka, której wszystkie elementy są zerowe poza diagonalą i wstęgą wokół niej. Macierz wstęgową można zapamiętać na $n * (k_1 + k_2 + 1)$ komórkach pamięci (Zamiast na n^2).

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & B_{32} & B_{33} & B_{34} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & B_{43} & B_{44} & B_{45} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{54} & B_{55} & B_{56} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & B_{65} & B_{66} \end{bmatrix}$$

Rys 1.1 Postać macierzy wstęgowej

Układ równań liniowych – koniunkcja pewnej liczby równań liniowych (równań pierwszego stopnia).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Rys 1.2 Układ równań liniowych

Dowolny układ równań można zapisać jako macierzowe równanie liniowe: $A * \vec{x} = \vec{b}$

Rozwiązywanie układów równań z macierzą rzadką jest znacznie wydajniejsze korzystając z metod iteracyjnych (Pozwala zaoszczędzić zaalokowaną w komputerze pamięć oraz liczba elementów różnych od 0 jest rzędu N)

Metoda największego spadku - algorytm numeryczny mający na celu znalezienie minimum zadanej funkcji celu. Algorytm polega na wyznaczaniu przybliżonego rozwiązania w i+1 iteracji za pomocą rozwiązania wyznaczonego w poprzedniej iteracji.

Wzór na przybliżone rozwiązanie w i+1 iteracji:

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i * v_i$$

Metoda ta może zostać wykorzystana w celu znalezienia rozwiązania układu równań liniowych.

Jako v_i wybieramy kierunek gradientu Q:

$$\Delta Q = Ax_i - b = v_i = -r_i$$

Po zróżniczkowaniu $Q(x_{i-1})$ po parametrze wariacyjnym w celu znalezienia minimum, wyznaczamy z wyrażenia wzór na współczynnik alfa:

$$\alpha_i = -\frac{r_i^T r_i}{r_i^T A r_i}$$

I w ten sposób, podstawiając do pierwszego wzoru, dostajemy wyrażenie na kolejne przybliżenie w metodzie największego spadku:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{r_i^T r_i}{r_i^T A r_i} r_i$$

2. Opis problemu.

Problemem w tym zadaniu z laboratoriów było rozwiązanie układu równań liniowych:

$A\vec{x} = \vec{b}$ metodą największego spadku.

W tym celu utworzyłem macierz kwadratową **A** o rozmiarze **n = 1000** i wypełniłem jej elementy zgodnie ze wzorem (gdzie m=10):

$$A_{i,j} = \frac{1}{1.0 + |i - j|}, \quad \text{gdzie } |i - j| \leq m, \quad i, j = 0, \dots, n - 1$$
$$A_{i,j} = 0, \quad \text{gdzie } |i - j| > m$$

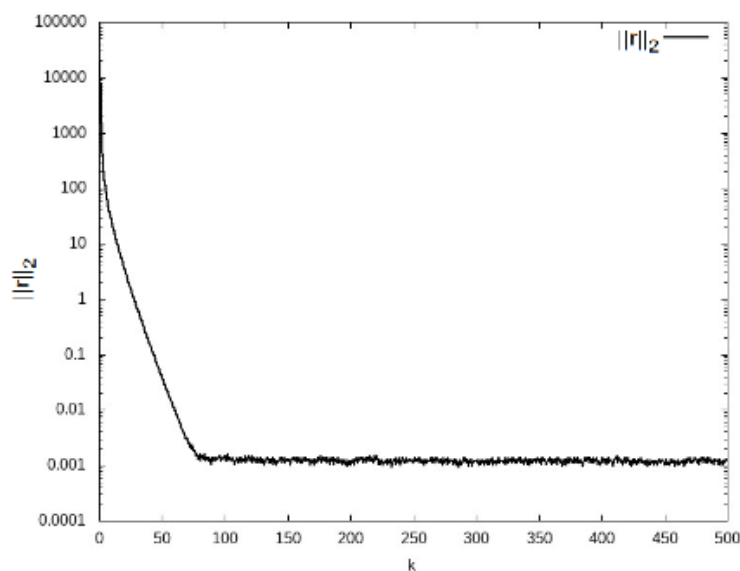
Następnie utworzyłem wektor wyrazów wolnych **b** o elementach:

$$b_i = i; \text{ dla } i = 0, \dots, n - 1.$$

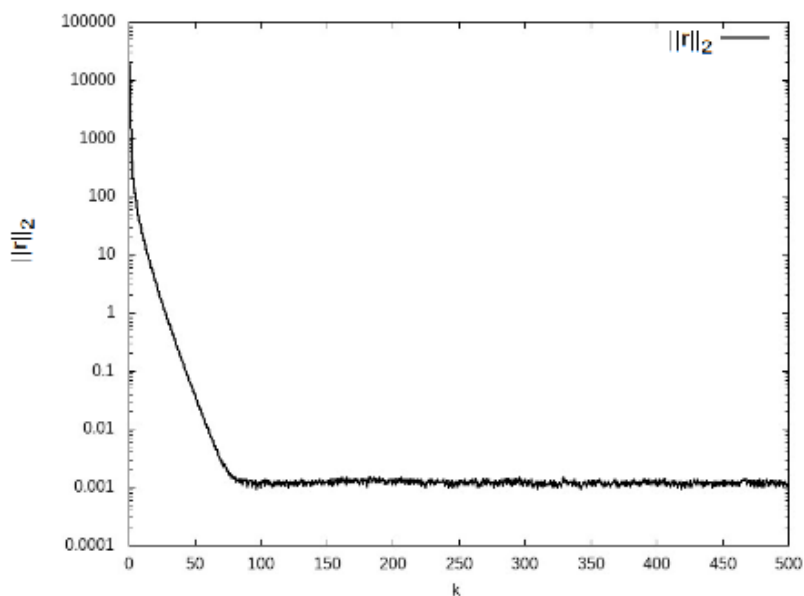
3. Wyniki.

Napisałem program w języku C++ rozwiązujący układ równań liniowych metodą największego spadku.

Najpierw przetestowałem algorytm dla liczb o pojedynczej precyzji:

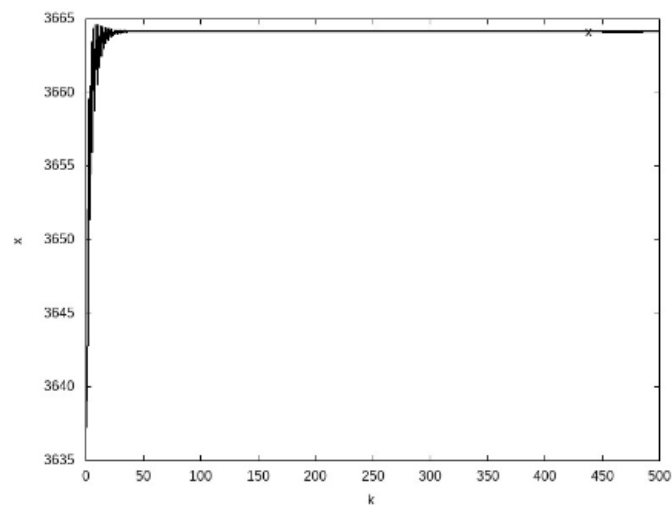


Rys. 3.1 Wykres wartości normy euklidesowej wektora reszt od numeru iteracji dla pojedynczej precyzji oraz wektora startowego $X=0$

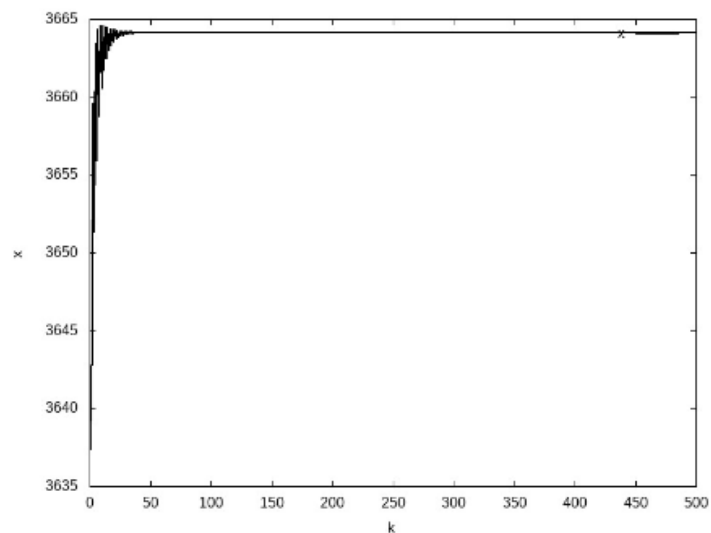


Rys. 3.2 Wykres wartości normy euklidesowej wektora reszt od numeru iteracji dla pojedynczej precyzji oraz wektora startowego $X=1$

Jak widać przyjęta wartość wektora startowego nie wpływa na liczbę iteracji (W obu przypadkach osiągnęliśmy maksymalną liczbę 500 iteracji) oraz nie wpływa znacząco na wygląd wykresu.

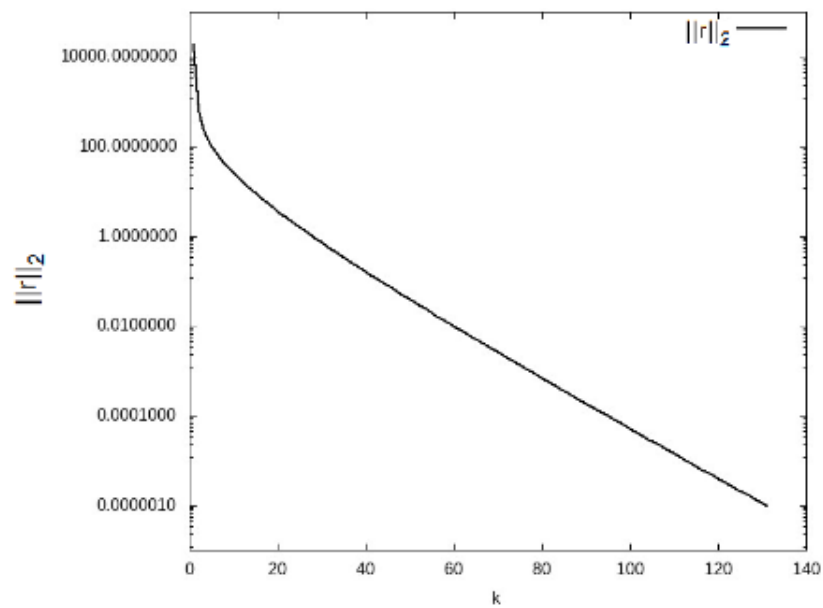


Rys. 3.3 Wykres wartości normy euklidesowej wektora rozwiązań od numeru iteracji dla pojedynczej precyzji oraz wektora startowego $X=0$

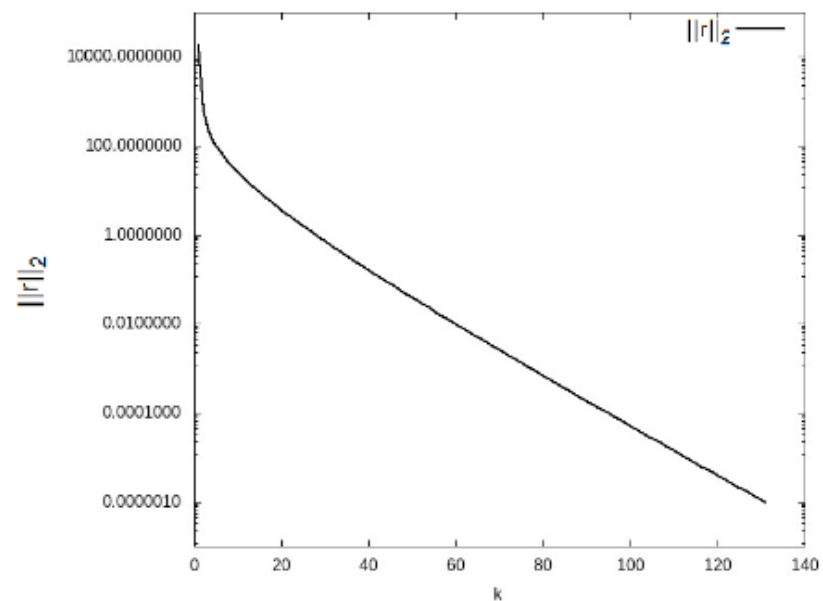


Rys. 3.4 Wykres wartości normy euklidesowej wektora rozwiązań od numeru iteracji dla pojedynczej precyzji oraz wektora startowego $X=1$

Również tutaj przyjęta wartość wektora startowego nie wpływa na liczbę iteracji ani wygląd wykresu.

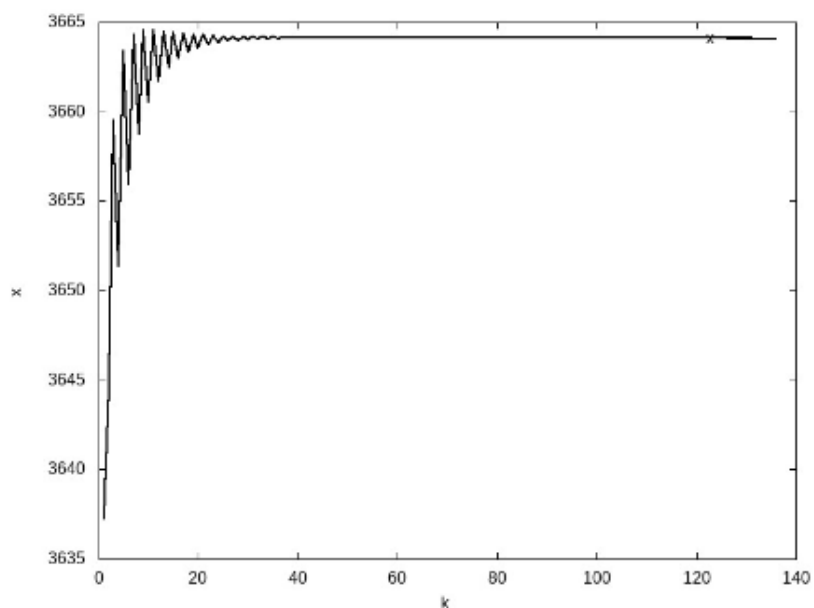


Rys. 3.5 Wykres wartości normy euklidesowej wektora reszt od numeru iteracji dla podwójnej precyzji oraz wektora startowego $X=0$

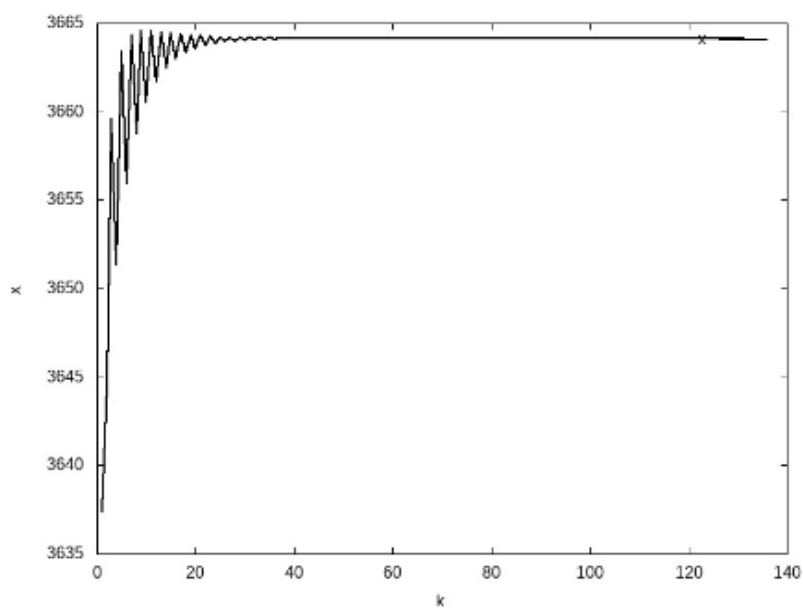


Rys. 3.6 Wykres wartości normy euklidesowej wektora reszt od numeru iteracji dla podwójnej precyzji oraz wektora startowego $X=1$

Wykresy normy euklidesowej wektora reszt dla podwójnej precyzji różnią się od tych dla których została przyjęta pojedyncza precyzja, tym że są mniej strome i dla podwójnej precyzji liczba iteracji zakończyła się zanim norma zaczęła oscylować wokół pewnej wartości (spowodowane jest to tym że spełniony został warunek dostatecznie małej wartości normy euklidesowej wektora reszt. Wartość wektora startowego nie ma znaczenia na liczbę iteracji, ani wygląd wykresu tak jak to było w przypadku pojedynczej precyzji).



Rys. 3.7 Wykres wartości normy euklidesowej wektora rozwiązań od numeru iteracji dla podwójnej precyzji oraz wektora startowego $X=0$



Rys. 3.8 Wykres wartości normy euklidesowej wektora rozwiązań od numeru iteracji dla podwójnej precyzji oraz wektora startowego $X=1$

Wykres normy euklidesowej wektora rozwiązań dla podwójnej precyzji ma podobny kształt do tego dla precyzji pojedynczej i również tutaj wartość początkowa wektora rozwiązań nie miała wpływu na liczbę iteracji.

4. Wnioski

Metoda największego spadku, okazała się być bardzo dobrym wyborem dla rozwiązania układu równań liniowych, ze względu na to, że mieliśmy do czynienia z macierzą A która była macierzą rzadką.

Kluczową rolę w tym zadaniu odegrał wybór precyzji dla liczb. Obliczenia wykonane w podwójnej precyzji zakończyły się po upływie 131 iteracji, poprzez osiągnięcie dostatecznie małej wartości normy wektora reszt, natomiast obliczenia wykonane w pojedynczej precyzji zakończyły się poprzez przekroczenie ogólnego limitu 500 iteracji. Tutaj wartość normy wektora reszt po około 80 iteracjach zaczął oscylować w granicach 10^{-3} i nigdy nie osiągnąłby oczekiwanej wartości $< 10^{-6}$.

Program również wykonał się bardzo szybko, co świadczy o dobrej wydajności użytej metody.