

Agata Jasionowska 229726

Laboratorium – Lista 3

1. Zadanie 1

1.1. Opis problemu

Implementacja funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

1.2. Opis rozwiązania

Przebieg tej metody następuje zgodnie z widocznym Algorytmem 1.

Niektóre elementy pseudokodu warto uzupełnić dodatkowym komentarzem. Jako pierwszym ze spostrzeżeń można uczynić sposób obliczania punktu środkowego, czyli instrukcję: $r \leftarrow a + (b - a)/2$. Okazuje się, że w obliczeniach numerycznych o wiele lepszym rozwiązaniem jest obliczanie nowej wielkości poprzez niewielką poprawkę poprzedniej. Dlatego też wyżej wspomniane przypisanie nie ma postaci: $r \leftarrow (a + b)/2$. W pewnych przypadkach zastosowanie takiej konstrukcji mogłoby prowadzić do uzyskania wartości znajdującej się nawet poza przedziałem $[a, b]$. Drugą sprawą będzie sposób badania zmiany znaku wartości funkcji. Otóż wykorzystanie nierówności $fa \cdot fb < 0$ może prowadzić do nadmiaru lub niedomiaru spowodowanego mnożeniem. Zamiast tego skorzystano z $\text{sgn}(fa) \neq \text{sgn}(fb)$, unikając w ten sposób zbędnego działania. Ostatnim spostrzeżeniem będzie zwrócenie uwagi na warunki zakończenia obliczeń przez funkcję. Uwzględnia ona warunek $e > \epsilon$ (czy w zadanym przedziale możliwa jest kolejna iteracja), $|e| < \delta$ (gdy uzyskano już wystarczająco mały błąd) oraz $|v| < \epsilon$ (wartość funkcji w punkcie jest dostatecznie bliska zeru). Rozpatrywanie aż trzech kryteriów zakończenia pracy daje algorytmowi pewność w działaniu nawet dla przypadków patologicznych.

2. Zadanie 2

2.1. Opis problemu

Implementacja funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą stycznych (Newtona).

2.2. Opis rozwiązania

Działanie metody jest zgodnie z Algorytmem 2.

Algorytm 1: Metoda bisekcji

Input : $(f, a, b, \delta, \epsilon)$, gdzie:

f — funkcja $f(x)$ zadana jako anonimowa funkcja,
 a, b — końce przedziału początkowego,
 δ, ϵ — dokładność obliczeń

Output: (r, v, it, err) , gdzie:

r — przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
 v — wartość $f(r)$,
 it — liczba wykonanych iteracji,
 err — sygnalizacja błędu:
0 — brak błędu,
1 — funkcja nie zmienia znaku w przedziale $[a, b]$.

```
1 Function mbisekcji(a, b,  $\delta$ ,  $\epsilon$ )
2    $r \leftarrow 0$ 
3    $v \leftarrow 0$ 
4    $fa \leftarrow f(a)$ 
5    $fb \leftarrow f(b)$ 
6    $e \leftarrow b - a$ 
7    $it \leftarrow 0$ 
8   if  $\text{sgn}(fa) = \text{sgn}(fb)$  then
9     return ( $r, v, it, 1$ )
10  end
11  while  $e > \epsilon$  do
12     $it \leftarrow it + 1$ 
13     $e \leftarrow e/2$ 
14     $r \leftarrow a + e$ 
15     $v \leftarrow f(r)$ 
16    if  $|e| < \delta \vee |v| < \epsilon$  then
17      return ( $r, v, it, 0$ )
18    end
19    if  $\text{sgn}(v) \neq \text{sgn}(fa)$  then
20       $b \leftarrow r$ 
21       $fb \leftarrow v$ 
22    else
23       $a \leftarrow r$ 
24       $fa \leftarrow v$ 
25    end
26  end
27  return ( $r, v, it, 0$ )
```

Algorytm 2: Metoda stycznych

Input : $(f, pf, x0, \delta, \epsilon, \text{maxit})$, gdzie:

f, pf — funkcja $f(x)$ oraz $f'(x)$ zadane jako anonimowe funkcje,
 $x0$ — przybliżenie początkowe,
 δ, ϵ — dokładność obliczeń,
 maxit — maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Output: (r, v, it, err) , gdzie:

r — przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
 v — wartość $f(r)$,
 it — liczba wykonanych iteracji,
 err — sygnalizacja błędu:
0 — metoda zbieżna,
1 — nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji,
2 — pochodna bliska zeru.

```
1 Function mstycznych(f, pf, x0,  $\delta$ ,  $\epsilon$ , maxit)
2    $r \leftarrow x0$ 
3    $v \leftarrow f(r)$ 
4    $it \leftarrow 0$ 
5   if  $|pf(r)| < \epsilon$  then
6     return  $(r, v, it, 2)$ 
7   end
8   for  $it \leftarrow 1$  to maxit do
9      $x \leftarrow r - (v/pf(r))$ 
10     $v \leftarrow f(x)$ 
11    if  $|r - x| < \delta \vee |v| < \epsilon$  then
12       $r \leftarrow x$ 
13      return  $(r, v, it, 0)$ 
14    end
15     $r \leftarrow x$ 
16  end
17  return  $(r, v, it, 1)$ 
```

3. Zadanie 3

3.1. Opis problemu

Implementacja funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych(Eulera).

3.2. Opis rozwiązania

Przebieg tej metody następuje zgodnie z Algorytmem 3.

Algorytm 3: Metoda siecznych

Input : $(f, x0, x1, \delta, \epsilon, \text{maxit})$, gdzie:

f — funkcja $f(x)$ zadana jako anonimowa funkcja,
 $x0, x1$ — przybliżenia początkowe,
 δ, ϵ — dokładność obliczeń,
 maxit — maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Output: $(r, v, \text{it}, \text{err})$, gdzie:

r — przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
 v — wartość $f(r)$,
 it — liczba wykonanych iteracji,
 err — sygnalizacja błędu:
0 — metoda zbieżna,
1 — nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji.

```
1 Function msiecznych(f, x0, x1,  $\delta$ ,  $\epsilon$ , maxit)
2   a  $\leftarrow$  x0
3   b  $\leftarrow$  x1
4   fa  $\leftarrow$  f(a)
5   fb  $\leftarrow$  f(b)
6   it  $\leftarrow$  0
7   for it  $\leftarrow$  1 to maxit do
8     if |fa| > |fb| then
9       swap(a, b)
10      swap(fa, fb)
11    end
12    s  $\leftarrow$  (b - a)/(fb - fa)
13    b  $\leftarrow$  a
14    fb  $\leftarrow$  fa
15    a  $\leftarrow$  a - (fa · s)
16    fa  $\leftarrow$  f(a)
17    if |fa| <  $\epsilon$   $\vee$  |b - a| <  $\delta$  then
18      return (a, fa, it, 0)
19    end
20  end
21  return (a, fa, it, 1)
```

W widocznym Algorytmie 3 wartym podkreślenia jest cel zastosowania funkcji **swap**. Przedstawia ona końce przedziału a i b , gdy utrzymanie $|f(a)| \leq |f(b)|$ tego wymaga. Dlatego też, począwszy od drugiego kroku, wartości bezwzględne funkcji w kolejnych punktach są nierosnące.

4. Zadanie 4

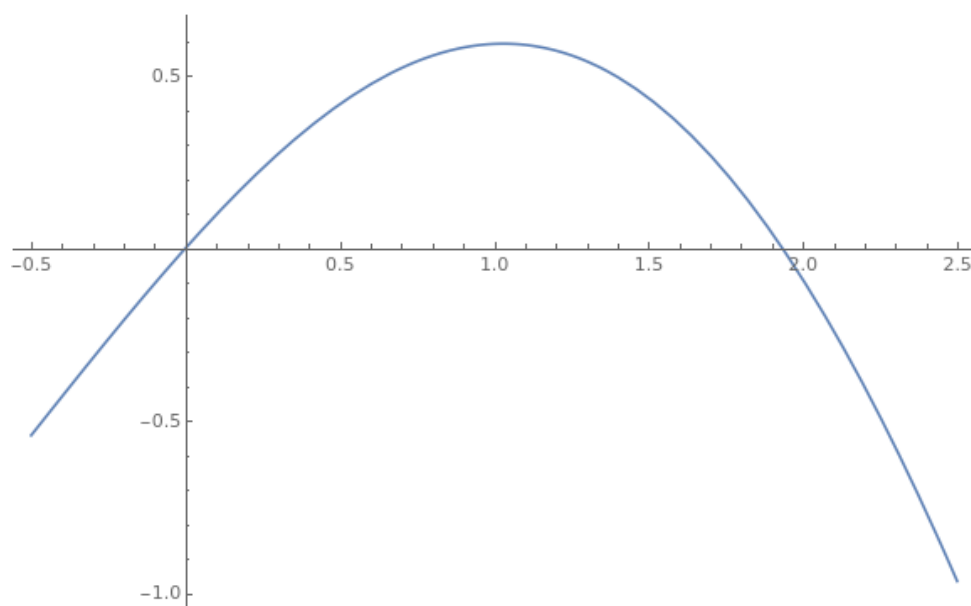
4.1. Opis problemu

Przy użyciu metod zaprogramowanych w poprzednich zadaniach wyznaczenie pierwiastka równania $\sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ dla poniższych danych:

1. Metodą bisekcji z przedziałem początkowym $[1.5, 2]$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$;
2. Metodą Newtona z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1.5$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$;
3. Metodą siecznych z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$.

4.2. Opis rozwiązania

Zastosowano metody utworzone w zadaniach 1-3 wraz z zaimplementowaną funkcją $f(x) = \sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2$ oraz jej pochodną $pf(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}x$ (niezbędną przy korzystaniu z metody stycznych). Miejsca zerowe zadanej funkcji widoczne są na Rysunku 1.



Rysunek 1: Wykres funkcji $\sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$.

4.3. Wyniki

Uzyskane rezultaty widoczne są w Tabeli 1.

podpunkt	x_0	$f(x_0)$	liczba iteracji
1.	1.933 753 967 285 156 2	$-2.702\,768\,013\,840\,284\,3 \times 10^{-7}$	16
2.	1.933 753 779 789 742	$-2.242\,331\,631\,485\,683\,4 \times 10^{-8}$	4
3.	1.933 750 900 535 632 1	$3.783\,706\,985\,283\,075 \times 10^{-6}$	4

Tabela 1: $\sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ dla danych z zadania.

4.4. Wnioski

Przykład funkcji podanej w tym zadaniu pokazuje różnice w liczbie iteracji wykonywanych przez każdą z trzech metod wyznaczania pierwiastków równań. Funkcja metody bisekcji wykonała ich najwięcej, bo aż 17, aby uzyskać wynik z zadaną dokładnością. O wiele lepiej radzą

tu sobie funkcje siecznych oraz stycznych - wymagana precyzja została osiągnięta już po 4 przebiegach. Uzyskane rezultaty znajdują swoje potwierdzenie w teoretycznej zbieżności wyżej wymienionych metod. Otóż posortowanie według tego współczynnika daje w efekcie następującą kolejność metod: Newtona (kwadratowo), siecznych (≈ 1.62 , nadliniowo) oraz bisekcji (liniowo). Przeprowadzenie analizy otrzymanych w Tabeli 1 wyników mogłoby prowadzić do śmiałego wniosku, iż ostatnia z nich jest nie tylko najwolniejsza, ale także najmniej dokładna. Bardziej trafnym jest jednak zauważenie, że zwrócona przez metodę bisekcji wartość jest najbliższa zadanej dokładności (przez co można by nazwać ją najbardziej "stabilną" z wszystkich badanych). W przypadku dwóch pozostałych — zbiegały one szybciej, co doprowadziło finalnie do osiągnięcia większej dokładności oraz obliczenia pierwiastka najbliższego rzeczywistemu. Warto mieć na uwadze, iż wybór odmiennej funkcji bądź przedziałów skutkować może uzyskaniem zupełnie innych rezultatów.

5. Zadanie 5

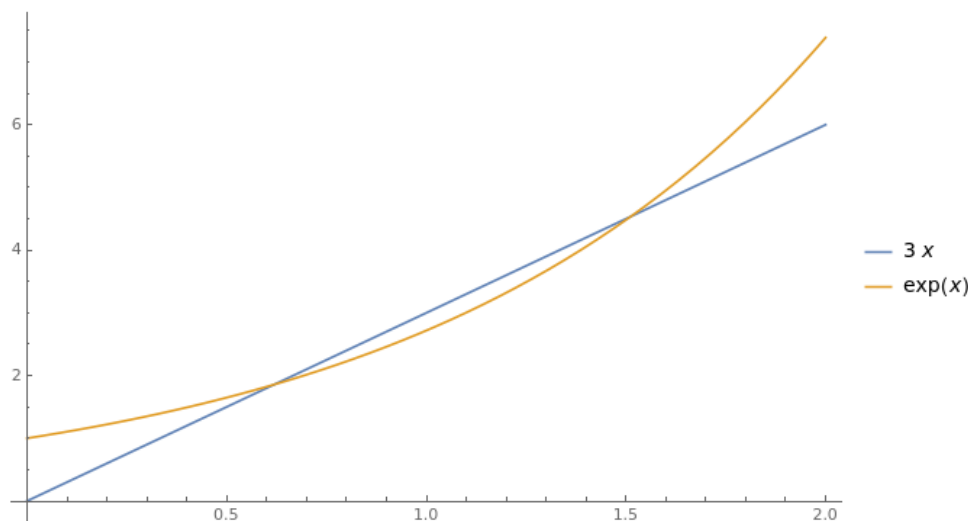
5.1. Opis problemu

Wyznaczenie przy pomocy metody bisekcji wartości zmiennej x , dla której następuje przecięcie wykresów funkcji $y = 3x$ oraz $y = \exp(x)$ dla dokładności $\delta = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-4}$.

5.2. Opis rozwiązania

W celu rozwiązania zadania zastosowano metodę `mbisekcji` utworzoną w zadaniu 1. Aby określić miejsce przecięcia zadanych funkcji należy znaleźć taki punkt, dla którego przyjmują one identyczną wartość dla tego samego argumentu, czyli $f(x) = 3x - \exp(x)$.

Najprostszym sposobem określenia przedziałów początkowych będzie analiza wykresu obu funkcji. Z Rysunku 2 wywnioskować można, iż poszukiwane wyniki znajdują się w przedziałach $[0.0, 1.0]$ oraz $[1.0, 2.0]$.



Rysunek 2: Wykres funkcji $y = 3x$ oraz $y = \exp(x)$.

5.3. Wyniki

Poniższa tabela prezentuje otrzymane rozwiązania:

przedział	x	liczba iteracji
[0.0, 1.0]	0.619 140 625	9
[1.0, 2.0]	1.512 084 960 937 5	13

Tabela 2: Miejsca zerowe $f(x) = 3x - \exp(x)$ obliczone z pomocą metody bisekcji.

5.4. Wnioski

Ważnym czynnikiem wpływającym na pomyślne znalezienie pierwiastków funkcji metodą bisekcji jest umiejętny dobór przedziału początkowego. Należy zwrócić uwagę, iż w tym przypadku uruchomienie jej dla przedziału $[0.0, 2.0]$ zwróci błąd związany z niezmiennością znaku. Jednak po wyszczególnieniu $[0.0, 1.0]$ i $[1.0, 2.0]$ znalezienie miejsc zerowych $f(x)$ nie nastręcza problemów. Pomocna w czynności wyboru startowego przedziału może być na przykład analiza wykresu funkcji, którą zastosowano w rozwiązaniu tego problemu. Zadanie okazałoby się jednak znacznie trudniejsze, gdyby takie rozwiązanie nie było dostępne. W związku ze stosunkowo niewielką długością przedziałów, niezbędna byłaby dobra znajomość przebiegu zadanej funkcji bądź przeprowadzenie wielu eksperymentów.

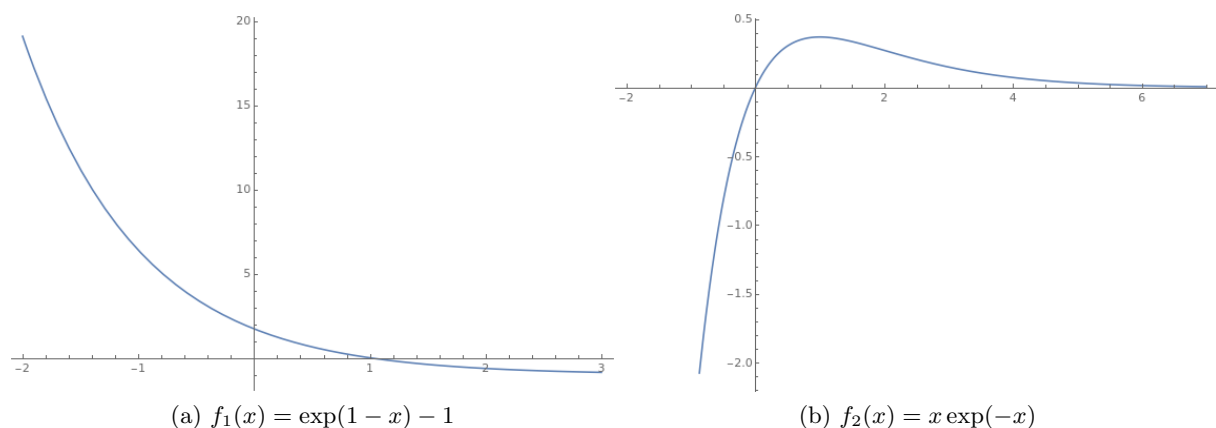
6. Zadanie 6

6.1. Opis problemu

Znalezienie pierwiastków funkcji $f_1(x) = \exp(1-x) - 1$ oraz $f_2(x) = x \exp(-x)$ przy pomocy metod: bisekcji, stycznych oraz siecznych z dokładnością obliczeń $\delta = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-4}$. Należy zadbać o dobór odpowiedniego przedziału oraz przybliżeń początkowych.

6.2. Opis rozwiązania

W rozwiązaniu zadania zastosowano metody **mbisekcji**, **msiecznych** oraz **mstycznych**, utworzone w zadaniach 1-3. Rozpoczęto od przeprowadzenia analizy wykresów (Rysunek 3) zadanych funkcji w celu określenia najlepszych parametrów.



Rysunek 3

6.3. Wyniki

Z wykresu z łatwością odczytać można prawidłowe rozwiązanie $f_1(x) = \exp(1-x) - 1$, jakim jest $x = 1.0$. Dla metody bisekcji unikano sytuacji, gdy pierwiastek znajduje się w środku

przedziału początkowego. Podczas używania metody Newtona należało uważać przy dobieraniu x_0 , gdyż pochodna dąży do 0, co jest niepożądane dla tej metody. W funkcji metody siecznych wybranie zbyt dużych wartości przybliżeń sprawi, że obliczenia wykonane są na bliskich sobie wartościach i działanie zakończy się szybko ze względu na osiągnięcie założonej precyzji.

W przypadku funkcji $f_2(x) = x \exp(-x)$ już sam jej wzór wskazuje właściwy pierwiastek, czyli $x = 0.0$. Zastosowano podobne środki ostrożności co w przypadku funkcji $f_1(x)$.

metoda	początkowe dane	x	$f(x)$	liczba iteracji
bisekcji	$[a, b] = [0.1, 1.2]$	0.999 993 896 484 374 8	6.103 534 251 789 $\times 10^{-6}$	14
bisekcji	$[a, b] = [-0.1, 1.4]$	1.000 006 103 515 625	-6.103 496 998 477 453 $\times 10^{-6}$	14
bisekcji	$[a, b] = [0.0, 150]$	0.999 999 046 325 683 6	9.536 747 711 536 009 $\times 10^{-7}$	21
stycznych	$x_0 = 0.3$	0.999 999 986 696 949 3	1.330 305 066 105 097 5 $\times 10^{-8}$	4
siecznych	$x_0 = -0.4, x_1 = 1.3$	1.000 002 616 071 405 7	-2.616 067 983 796 1 $\times 10^{-6}$	7
siecznych	$x_0 = -2.0, x_1 = 2.0$	1.000 006 385 490 303 6	-6.385 469 916 381 226 $\times 10^{-6}$	23

Tabela 3: $f_1(x) = \exp(1 - x) - 1$.

metoda	początkowe dane	x	$f(x)$	liczba iteracji
bisekcji	$[a, b] = [-0.4, 0.7]$	-4.577 636 718 739 907 4 $\times 10^{-6}$	-4.577 657 673 545 798 $\times 10^{-6}$	16
stycznych	$x_0 = 0.4$	-8.878 980 981 560 664 $\times 10^{-6}$	-8.879 059 818 213 929 $\times 10^{-6}$	4
siecznych	$x_0 = -1.0, x_1 = 0.3$	9.441 344 253 735 55 $\times 10^{-6}$	9.441 255 115 175 028 $\times 10^{-6}$	23
siecznych	$x_0 = -0.1, x_1 = 0.9$	1.102 336 180 988 65 $\times 10^{-6}$	1.102 334 965 844 264 $\times 10^{-6}$	6

Tabela 4: $f_2(x) = x \exp(-x)$.

x_0	x	$f(x)$	liczba iteracji	błąd
f_1				
1.5	0.999 999 998 473 621 5	1.526 378 579 086 440 4 $\times 10^{-9}$	4	0
2.5	0.999 993 498 258 966 2	6.501 762 170 207 925 $\times 10^{-6}$	6	0
5.5	0.999 999 854 378 833 9	1.456 211 766 726 056 6 $\times 10^{-7}$	89	0
7.5	—	—	—	1
13	—	—	—	2
f_2				
1.0	—	—	—	2
2.0	14.398 662 765 680 003	8.036 415 344 217 211 $\times 10^{-6}$	10	0
5.0	15.194 283 983 439 147	3.827 247 505 782 993 $\times 10^{-6}$	9	0
10.0	14.380 524 159 896 261	8.173 205 649 825 554 $\times 10^{-6}$	4	0
50.0	50.0	9.643 749 239 819 589 $\times 10^{-21}$	0	2

Tabela 5: Metoda Newtona dla $f_1(x) = \exp(1 - x) - 1$ oraz $f_2(x) = x \exp(-x)$.

6.4. Wnioski

Zestawienie wyników z Tabel 3 oraz 4 widocznych powyżej pozwala na wyciągnięcie kilku wniosków. Otóż metoda bisekcji nie ma żadnych ograniczeń związanych z przebiegiem zadanej funkcji oraz jej pochodnej (w przeciwieństwie np. do metody Newtona). Niezależnie od przesunięć przedziału względem poprawnego pierwiastka wylicza wynik w tym samym tempie zależnym od wielkości przedziału (ma to sens, gdyż metoda ta polega na sukcesywnym dzieleniu przedziału na pół aż do momentu uzyskania takiego o satysfakcjonująco małym rozmiarze). Metoda stycznych najlepiej radzi sobie z wyznaczaniem pierwiastka, gdy kluczem jest szybkość — ze wszystkich

badanych metod zwracała ona rozwiązanie po najmniejszej liczbie wykonanych iteracji. Nie oznacza to jednak, że jest najlepszym wyborem w każdej sytuacji — należy brać pod uwagę jej ograniczenia, nakładane przez konieczność obliczania pochodnej funkcji.

Zadanie TEMP NOTES:

Wnioski dla wyników metody Newtona przy szczególnych argumentach!!! Dla pierwszego: nie udało się wyliczyć dla $x_0 = 8$ - wciąż niewystarczająca była obrana liczba iteracji wynosząca $it = 10000000000$. Dla drugiego: podanie argumentu początkowego $x_0 = 1.0$ powodowało zwrócenie błędu — pochodna bliska wartości 0.0.