Agata Jasionowska 229726

Laboratorium – Lista 4

1. Zadanie 1

1.1. Opis problemu

Zadanie polegało na implementacji funkcji obliczającej ilorazy różnicowe na podstawie podanego wektora węzłów oraz wartości funkcji, jednak bez użycia tablicy dwuwymiarowej.

Iloraz różnicowy k-tego rzędu spełnia poniższą zależność:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0},$$

zaś ilorazy rzędu zerowego oraz pierwszego równe są kolejno:

$$f[x_0] = f(x_0), \qquad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

1.2. Opis rozwiązania

Znając węzły x_k i wartości funkcji $f(x_k)$ (czyli również ilorazy $f[x_k]$ zerowego rzędu) można za pomocą tego wzoru utworzyć dwuwymiarową tablicę ilorazów różnicowych wyższych rzędów. Jednak algorytm takiej konstrukcji jest nieefektywny, gdyż wystarczy użyć jednowymiarowej tablicy d zmiennych z jednym wskaźnikiem. Początkowymi wartościami zmiennych d_i są odpowiadające im $f[x_i]$, czyli każde d_i obliczane jest ze wzoru:

$$d_i = \frac{d_i - d_{i-1}}{x_i - x_{i-j}},$$

gdzie j oznacza numer kolumny. Każda kolejna wartość uaktualniana jest kolumnami, zaś wewnątrz każdej kolumny - z dołu do góry. Dzięki takiej kolejności obliczeń tablica d zawiera w każdej chwili ilorazy, które będą później potrzebne.

Szczegółowy przebieg metody został przedstawiony w Algorytmie 1.

```
Algorytm 1: Ilorazy różnicowe
          x  — wektor długości n+1 zawierający węzły x_0,...,x_n,
Input  :  f  — wektor długości n+1 zawierający wartości interpolowanej funkcji
               w węzłach f(x_0),...,f(x_n).
Output:   fx — wektor długości n+1 zawierający obliczone ilorazy różnicowe.
Function ilorazyRoznicowe(x, f)
    for i ← 1 to n do
        fx[i] ← f[i]
    end
    for j ← 1 to n do
        for i ←n downto i do
            fx[i] ← (fx[i] − fx[i − 1])/(x[i] − x[i − j])
        end
    end
    return fx
```

2. Zadanie 2

2.1. Opis problemu

Zadanie polegało na implementacji funkcji obliczającej wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona $N_n(x)$ w zadanym punkcie za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera.

$$N_n(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j),$$

gdzie c_i jest ilorazem różnicowym stopnia i, zaś x_j — węzłem interpolacji.

Metoda Newtona, pomimo iż jest trudniejsza w implementacji niż np metoda Lagrange'a i wymaga większej ilości oddzielnych "kroków", jest dużo lepiej uwarunkowana numerycznie, przez co warta poznania pod kątem stosowania na maszynach cyfrowych. W metodzie najpierw wyznaczane są odpowiednie ilorazy różnicowe, a dopiero później z ich użyciem — interpolowana funkcja.

2.2. Opis rozwiązania

W rozwiązaniu zadania posłużono się uogólnionym algorytmem Hornera, który prezentuje się następująco:

$$\begin{aligned}
&w_n(x) := f[x_0, x_1, \ldots, x_n];\\
&w_k(x) := w_{k+1}(x - x_k) + f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \quad (k = n-1, n-2, \ldots, 0);\\
&N_n(x) = w_0(x).
\end{aligned}$$

Na jego podstawie możliwe było napisanie funkcji wyznaczającej wartość wielomianu w punkcie w czasie O(n). Szczegóły przedstawiono poniżej (Algorytm 2).

3. Zadanie 3

3.1. Opis problemu

Zadanie polegało na implementacji funkcji obliczającej współczynniki postaci naturalnej wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona.

Algorytm 2: Wielomian interpolacyjny Newtona.

Input : x — wektor długości $n+1$ zawierający węzły $x_0, \ldots, x_n$,
fx — wektor długości $n+1$ zawierający ilorazy różnicowe,
t — punkt, w którym należy obliczyć wartość wielomianu.

Output: nt — wartość wielomianu w punkcie t.

```
Function warNewton(x, fx, t)
    n ← length(fx)
    nt ← fx[n]
    for i ← n − 1 downto 1 do
        nt ← fx[i] + (t − x[i]) ∗ nt
    end
    return nt
```

3.2. Opis rozwiązania

U podstaw rozwiązania problemu wyznaczenia współczynników naturalnych leży stosunkowo prosty mechanizm. Otóż w wielomianie interpolacyjnym współczynnik a_n przy najwyższej potędze argumentu jest równe c_n, zaś z tego faktu, posługując się wspomnianym już wcześniej uogólnionym algorytmem Hornera, wynika także, że w_n jest również równy a_n. Bazując na uzyskanej równości każdy kolejny krok algorytmu będzie polegał na tworzeniu wartości a_i w oparciu o współczynniki uprzednio policzone (stojące przy wyższych potęgach). Znalezienie zależności pomiędzy kolejnymi a_i polega na przejściu po wszystkich w_i w dół (poczynając od $i = n$) i modyfikowaniu współczynników tak, aby dla każdego w_i doprowadzić w danym momencie do postaci naturalnej. Nietrudno wyliczyć zmiany wprowadzane w każdym a_i, zatem uzyskanie takiej postaci przy każdym przebiegu nie nastręcza problemów.

Działanie tej metody prezentuje Algorytm 3.

Algorytm 3: Współczynniki naturalne wielomianu interpolacyjnego.

Input : x — wektor długości $n+1$ zawierający węzły $x_0, \ldots, x_n$,
fx — wektor długości $n+1$ zawierający ilorazy różnicowe.

Output: a — wektor długości $n+1$ zawierający obliczone współczynniki postaci naturalnej.

```
Function naturalna(x, fx)
    m ← length(fx)
    a [m ] ← fx[m]
    for i ← m − 1 downto 1 do
        p ← a[i + 1] ∗ x[i]
        a[i] ← fx[i] − p
        for k ← i + 1 to m − 1 do
            p ← a[k + 1] ∗ x[i]
            a[k] ← a[k] − p
        end
    end
    return a
```

4. Zadanie 4

4.1. Opis problemu

Zadanie polegało na implementacji funkcji, która interpoluje zadaną funkcję $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona, a następnie rysuje ten wielomian oraz $f(x)$.

4.2. Opis rozwiązania

Funkcja `rysujNnfx` rozpoczyna od wyznaczenia węzłów interpolacji oraz wartości, jakie przyjmuje w nich funkcja f, a następnie oblicza ilorazy różnicowe (`ilorazyRoznicowe` z Zadania 1.) dla zadanych węzłów. W celu uzyskania bardziej precyzyjnych wykresów, funkcję jak i wielomian interpolacyjny poddano próbkowaniu — $25 \cdot (n + 1)$ równooddalonych punktów, dla których to obliczane są wartości wielomianu z wykorzystaniem funkcji `warNewton` z Zadania 2. Wygenerowane w ten sposób dane służą narysowaniu finalnych wykresów, które zrealizowano przy pomocy funkcji pakietu `Gadfly`.

Przebieg tej metody następuje zgodnie z Algorytmem 4.

Algorytm 4: Rysowanie funkcji oraz wielomianu ją interpolującego.

Input :
- f — funkcja $f(x)$ zadane jako anonimowa funkcja,
- a,b — przedział interpolacji,
- n — stopień wielomiany interpolacyjnego.

Output: — Funkcja rysuje wielomian interpolacyjny i interpolowaną funkcję w przedziale [a, b].

```
Function rysujNnfx(f, a, b, n)
    kh ← 0
    max ← n + 1
    h ← (b − a)/(max − 1)
    mult ← 25
    for i ← 1 to max do
        x[i] ← a + kh
        y[i] ← f(x[i])
        kh ← kh + h
    end
    fx ← ilorazyRoznicowe(x, y)
    kh ← 0
    max ← max * mult
    h ← (b − a)/(max − 1)
    for i ← 1 to max do
        plot_x[i] ← a + kh
        plot_h[i] ← warNewton(x, fx, plot_x[i])
        plot_y[i] ← f(plot_x[i])
        kh ← kh + h
    end
    rysuj(plot_x, plot_y)
    rysuj(plot_x, plot_h)
```

5. Zadanie 5

5.1. Opis problemu

Celem zadania było przetestowanie utworzonej w Zadaniu 4. funkcji `rysujNnfx` na następujących przykładach:

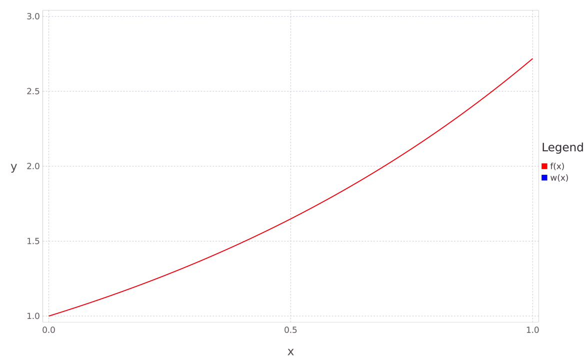
(a) $\exp x,\ [0,1],\ n = 5, 10, 15,$
(b) $x^2 \sin x,\ [-1,1],\ n = 5, 10, 15.$

5.2. Opis rozwiązania

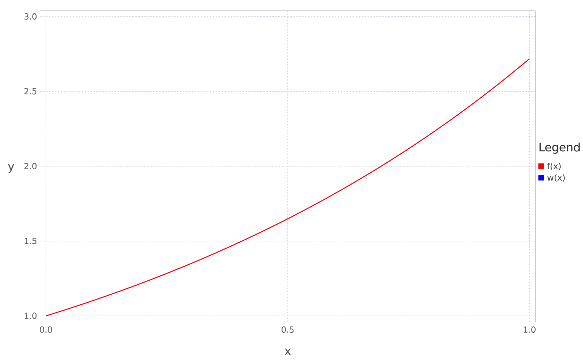
Funkcję `rysujNnfx` wywołano dla powyższych danych.

5.3. Wyniki

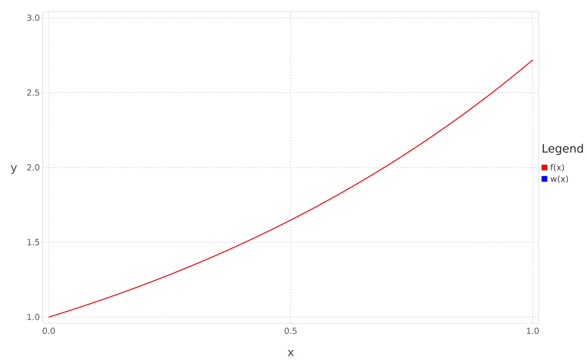
Uzyskane wykresy przedstawiono na Rysunkach 1-2.



(a) $n = 5$



(b) $n = 10$

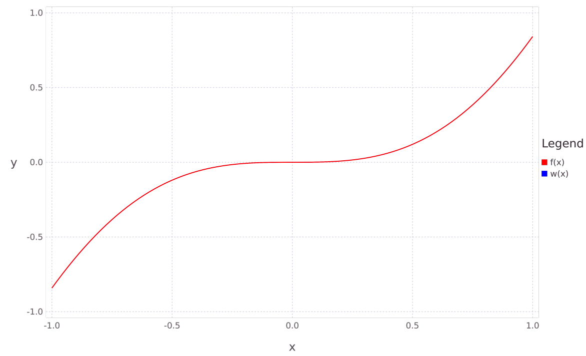


(c) $n = 15$

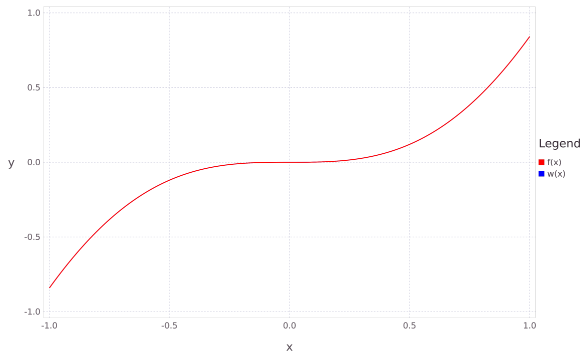
Rysunek 1: Wykres funkcji $\exp x$ oraz jej wielomianu interpolacyjnego o zadanym stopniu.

5.4. Wnioski

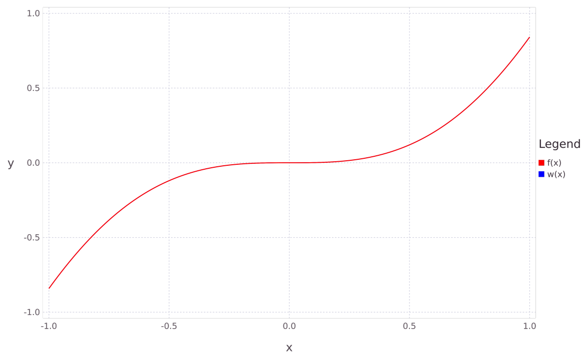
Analiza przedstawionych powyżej wykresów pozwala na zaobserwowanie braku rozbieżności w przypadku obu funkcji — na zadanych przedziałach wielomiany interpolacyjne niemal pokrywają się z odpowiadającą funkcją. Już w przypadku wielomianu o stopniu $n = 5$ powstałe



(a) $n = 5$



(b) $n = 10$



(c) $n = 5$

Rysunek 2: Wykres funkcji $x^2 \cdot \sin x$ oraz jej wielomianu interpolacyjnego o zadanym stopniu.

różnice są rzędu 10^{-6}, malejąc wraz ze zwiększaniem stopnia. W tych konkretnych przypadkach zastosowanie równoodległych węzłów interpolacji (na których to użyciu oparto rozwiązanie Zadania 4.) poskutkowało uzyskaniem niezwykle dobrych przybliżeń.

6. Zadanie 6

6.1. Opis problemu

Celem zadania było przetestowanie utworzonej w Zadaniu 4 funkcji `rysujNnfx` na następujących przykładach:

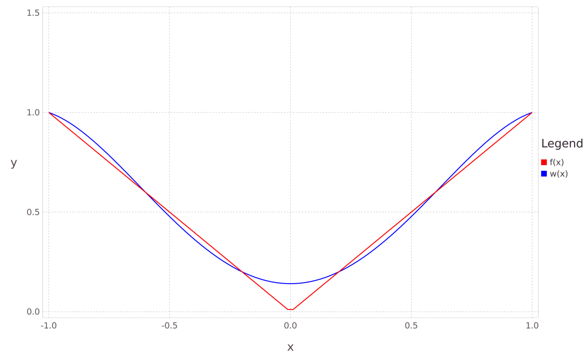
(a) $|x|, \ [-1, 1], \ n = 5, 10, 15,$
(b) $\frac{1}{1+x^2}, \ [-5, 5], \ n = 5, 10, 15.$

6.2. Opis rozwiązania

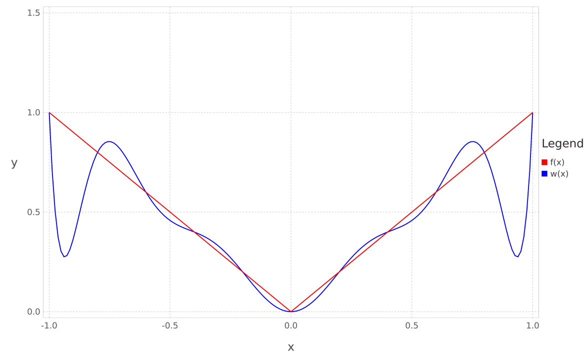
Funkcję `rysujNnfx` wywołano dla powyższych danych.

6.3. Wyniki

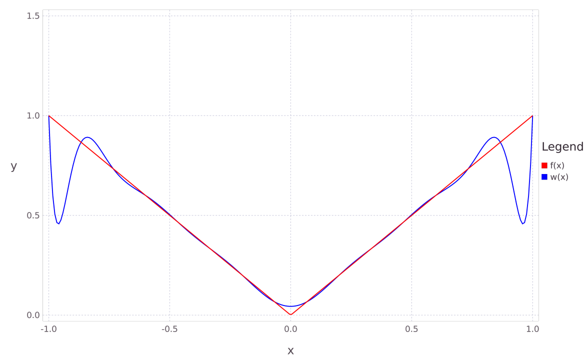
Uzyskane wykresy przedstawiono na Rysunkach 3-4.



(a) $n = 5$



(b) $n = 10$



(c) $n = 15$

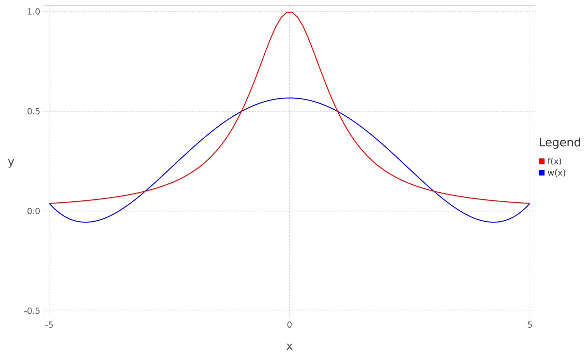
Rysunek 3: Wykres funkcji $|x|$ oraz jej wielomianu interpolacyjnego o zadanym stopniu.

6.4. Wnioski

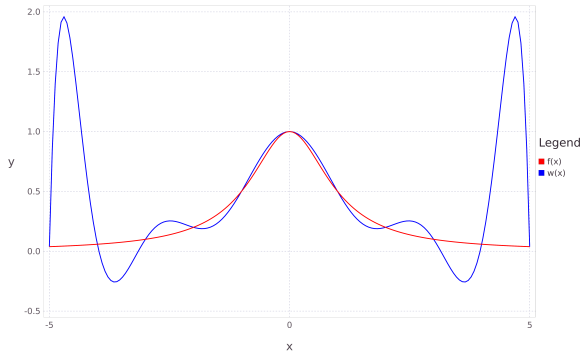
Wyniki uzyskane dla tego zadania pokazują wyraźne rozbieżności pomiędzy wykresem funkcji a jej wielomianami interpolacyjnymi. W przypadku $|x|$ duże odchylenia spowodowane były głównie faktem, iż nie jest ona różniczkowalna.

Dla drugiej funkcji zaobserwować można ciekawe zjawisko. Otóż początkowo ze wzrostem liczby węzłów przybliżenie poprawia się, jednak sytuacja ulega zmianie wraz z dalszym zwiększaniem n — widoczne jest znaczne odchylenie, szczególnie uwydatnione na końcach przedziałów. Taki efekt nosi nazwę zjawiska Rungego i oznacza pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Zastosowanie podziału równoległego skutkuje stosunkowo niewielką liczbą punktów na krawędziach przedziału, przez co wielomian interpolacyjny zdecydowanie odbiega tam od właściwej wartości funkcji, zaś stan ten pogarsza się przy zagęszczeniu węzłów równoodległych. Aby zwiększyć dokładność interpolacji należy zatem zmienić rozkład punktów. Taki problem sformułował rosyjski matematyk P.L. Czebyszew, jako problem znalezienia wielomianu, który najlepiej przybliżałby zero na danym przedziale.

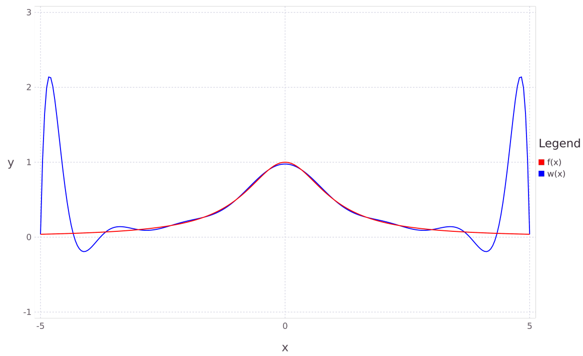
W celu uniknięcia zaobserwowanych błędów najlepszym rozwiązaniem byłoby zastosowanie interpolacji z węzłami rozmieszczonymi gęściej w pobliżu miejsc "oscylacji" (np. miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa).



(a) $n = 5$



(b) $n = 10$



(c) $n = 15$

Rysunek 4: Wykres funkcji $\frac{1}{1+x^2}$ oraz jej wielomianu interpolacyjnego o zadanym stopniu.