Agata Jasionowska 229726

Laboratorium – Lista 3

1. Zadanie 1

1.1. Opis problemu

Implementacja funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

1.2. Opis rozwiązania

Przebieg tej metody jest następujący:

1. Jeżeli funkcja f nie zmienia znaku w przedziale $[a, b]$ — zwrócenie informacji o błędzie;
2. Dopóki $|a - b| > epsilon$, obliczenie $x = \frac{a+b}{2}$;
3. Jeżeli $f(x) = 0$ to zwrócenie x jako rozwiązania;
4. Obranie nowego przedziału ($[a, x]$ lub $[b, x]$), w którym funkcja zmienia znak na przeciwny i powrót do 2.

Niektóre elementy Algorytmu 1 warto uzupełnić dodatkowym komentarzem. Jako pierwszym ze spostrzeżeń można uczynić sposób obliczania punktu środkowego, czyli instrukcję: $r \leftarrow a + (b - a)/2$. Okazuje się, że w obliczeniach numerycznych o wiele lepszym rozwiązaniem jest obliczanie nowej wielkości poprzez niewielką poprawkę poprzedniej. Dlatego też wyżej wspomniane przypisanie nie ma postaci: $r \leftarrow (a + b)/2$. W pewnych przypadkach zastosowanie takiej konstrukcji mogłoby prowadzić do uzyskania wartości znajdującej się nawet poza przedziałem $[a, b]$. Drugą sprawą będzie sposób badania zmiany znaku wartości funkcji. Otóż wykorzystanie nierówności $fa \cdot fb < 0$ może prowadzić do nadmiaru lub niedomiaru spowodowanego mnożeniem. Zamiast tego skorzystano z $\texttt{sgn}(fa) \neq \texttt{sgn}(fb)$, unikając w ten sposób zbędnego działania. Ostatnim spostrzeżeniem będzie zwrócenie uwagi na warunki zakończenia obliczeń przez funkcję. Uwzględnia ona warunek $e > \epsilon$ (czy w zadanym przedziale możliwa jest kolejna iteracja), $|e| < \delta$ (gdy uzyskano już wystarczająco mały błąd) oraz $|v| < \epsilon$ (wartość funkcji w punkcie jest dostatecznie bliska zeru). Rozpatrywanie aż trzech kryteriów zakończenia pracy daje algorytmowi pewność w działaniu nawet dla przypadków patologicznych.

Algorytm 1: Metoda bisekcji

Input : f- funkcja $f(x)$ zadana jako anonimowa funkcja,
a, b - końce przedziału początkowego,
δ, ϵ - dokładność obliczeń

Output: (r, v, it, err), gdzie:
r - przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
v - wartość f‘(r),
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu:
  0 - brak błędu,
  1 - funkcja nie zmienia znaku w przedziale [a, b].

Function `mbisekcji`(a, b, δ, ϵ)
  r $\leftarrow 0$
  v $\leftarrow 0$
  fa $\leftarrow$ `f(a)`
  fb $\leftarrow$ `f(b)`
  e $\leftarrow$ b $-$ a
  it $\leftarrow 0$
  if sgn(fa) $=$ sgn(fb) **then**
    return (r, v, it, 1)
  end
  while e $> \epsilon$ **do**
    it $\leftarrow$ it $+ 1$
    e $\leftarrow$ e$/2$
    r $\leftarrow$ a $+$ e
    v $\leftarrow$ `f(r)`
    if $|$e$| < \delta \lor |$v$| < \epsilon$ **then**
      return (r, v, it, 0)
    end
    if sgn(v) $\neq$ sgn(fa) **then**
      b $\leftarrow$ r
      fb $\leftarrow$ v
    else
      a $\leftarrow$ r
      fa $\leftarrow$ v
    end
  end
  return (r, v, it, 0)

2. Zadanie 2

2.1. Opis problemu

Implementacja funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą stycznych (Newtona).

2.2. Opis rozwiązania

Przebieg tej metody jest następujący:

1. Za x_1 przyjmowany jest punkt przecięcia stycznej wyprowadzonej dla x_0 z osią `OX`;
2. Dopóki nie osiągnięto wymaganego przybliżenia, $x_0 = x_1$;
3. Kolejne przybliżenie obliczane jest ze wzoru: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{pf(x_0)}$, powrót do kroku 2;
4. Jeżeli $f(x_0) > \mathit{epsilon}$ zwracany jest błąd, w przeciwnym przypadku rozwiązaniem jest x_0.

Algorytm 2: Metoda stycznych

Input : `f`, `pf` - funkcja $f(x)$ oraz $f'(x)$ zadane jako anonimowe funkcje,
x_0 - przybliżenie początkowe,
δ, ϵ - dokładność obliczeń
maxit - maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Output: (r, v, it, err), gdzie:
r - przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
v - wartość f(r),
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu:
0 - metoda zbieżna,
1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji,
2 - pochodna bliska zeru.

Function `mstycznych(f, pf,` x_0, δ, ϵ, maxit)
    r $\leftarrow x_0$
    v $\leftarrow$ `f(r)`
    it $\leftarrow 0$
    if |`pf(r)`| $< \epsilon$ **then**
        return (r, v, it, 2)
    end
    for it $\leftarrow 1$ **to** maxit **do**
        x $\leftarrow$ r $-$ (v/`pf(r)`)
        v $\leftarrow$ `f(x)`
        if |r $-$ x| $< \delta \vee$ |v| $< \epsilon$ **then**
            r $\leftarrow$ x
            return (r, v, it, 0)
        end
        r $\leftarrow$ x
    end
    return (r, v, it, 1)

---

3. Zadanie 3

3.1. Opis problemu

Implementacja funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych(Eulera).

3.2. Opis rozwiązania

Przebieg tej metody jest następujący:

1. Obliczane są wartości $f_1 = f(x_1)$ oraz $f_2 = f(x_2)$;
2. Dopóki nie osiągnięto wymaganej liczby iteracji, $x_0 = x_1 - f_1 \cdot \frac{x_1 - x_2}{f_1 - f_2}$, $f_0 = f(x_0)$;
3. Jeżeli $|x_1 - x_2| < epsilon$, zwrócenie x_0 i zakończenie działania;
4. Zamiana parametrów i wartości funkcji odpowiednio dla $x_2 \leftarrow x_1$ oraz $x_1 \leftarrow x_0$, powrót do kroku 2.

Algorytm 3: Metoda siecznych

Input : f - funkcja $f(x)$ zadana jako anonimowa funkcja,
x_0, x_1 - przybliżenia początkowe,
δ, ϵ - dokładność obliczeń
maxit - maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Output: (r, v, it, err), gdzie:
r - przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
v - wartość $f(\mathsf{r})$,
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu:
0 - metoda zbieżna,
1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji.

```
Function msiecznych(f, x0, x1, δ, ε, maxit)
    a ← x0
    b ← x1
    fa ← f(a)
    fb ← f(b)
    it ← 0
    for it ← 1 to maxit do
        if |fa| > |fb| then
            swap(a, b)
            swap(fa, fb)
        end
        s ← (b − a)/(fb − fa)
        b ← a
        fb ← fa
        a ← a − (fa · s)
        fa ← f(a)
        if |fa| < ε ∨ |b − a| < δ then
            return (a, fa, it, 0)
        end
    end
    return (a, fa, it, 1)
```

W widocznym Algorytmie 3 wartym podkreślenia jest cel zastosowania funkcji `swap`. Przestawia ona końce przedziału a i b, gdy utrzymanie $|f(a)| \leq |f(b)|$ tego wymaga. Dlatego też, począwszy od drugiego kroku, wartości bezwzględne funkcji w kolejnych punktach są nierosnące.

4. Zadanie 4

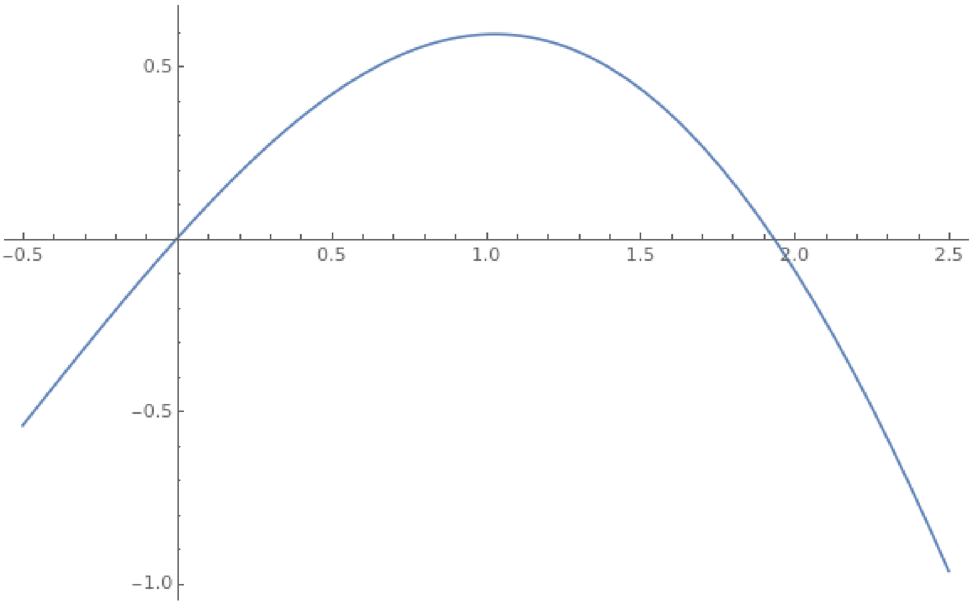
4.1. Opis problemu

Przy użyciu metod zaprogramowanych w poprzednich zadaniach wyznaczenie pierwiastka równania $\sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ dla poniższych danych:

1. Metodą bisekcji z przedziałem początkowym $[1.5, 2]$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$;
2. Metodą Newtona z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1.5$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$;
3. Metodą siecznych z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$.

4.2. Opis rozwiązania

Zastosowano metody utworzone w zadaniach 1-3 wraz z zaimplementowaną funkcją $f(x) = \sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2$ oraz jej pochodną $pf(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}x$ (niezbędną przy korzystaniu z metody stycznych). Miejsca zerowe zadanej funkcji widoczne są na Rysunku 1.



Rysunek 1: Wykres funkcji $\sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$.

4.3. Wyniki

Uzyskane rezultaty widoczne są w Tabeli 1.

podpunkt	x_0	$f(x_0)$	liczba iteracji
1.	1.933 753 967 285 156 2	$-2.702\,768\,013\,840\,284\,3 \times 10^{-7}$	16
2.	1.933 753 779 789 742	$-2.242\,331\,631\,485\,683\,4 \times 10^{-8}$	4
3.	1.933 750 900 535 632 1	$3.783\,706\,985\,283\,075 \times 10^{-6}$	4

Tabela 1: $\sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ dla danych z zadania.

4.4. Wnioski

Przykład funkcji podanej w tym zadaniu pokazuje różnice w liczbie iteracji wykonywanych przez każdą z trzech metod wyznaczania pierwiastków równań. Funkcja metody bisekcji wykonała ich najwięcej, bo aż 17, aby uzyskać wynik z zadaną dokładnością. O wiele lepiej radzą tu sobie funkcje siecznych oraz stycznych - wymagana precyzja została osiągnięta już po 4 przebiegach. Uzyskane rezultaty znajdują swoje potwierdzenie w teoretycznej zbieżności wyżej wymienionych metod. Otóż posortowanie według tego współczynnika daje w efekcie następującą kolejność metod: Newtona (kwadratowo), siecznych (≈ 1.62, nadliniowo) oraz bisekcji (liniowo). Przeprowadzenie analizy otrzymanych w Tabeli 1 wyników mogłoby prowadzić do śmiałego wniosku, iż ostatnia z nich jest nie tylko najwolniejsza, ale także najmniej dokładna. Bardziej trafnym jest jednak zauważenie, że zwrócona przez metodę bisekcji wartość jest najbliższa zadanej dokładności (przez co można by nazwać ją najbardziej "stabilną" z wszystkich badanych). W przypadku dwóch pozostałych — zbiegały one szybciej, co doprowadziło finalnie do osiągnięci większej dokładności oraz obliczenia pierwiastka najbliższego rzeczywistemu. Warto mieć na uwadze, iż wybór odmiennej funkcji bądź przedziałów skutkować może uzyskaniem zupełnie innych

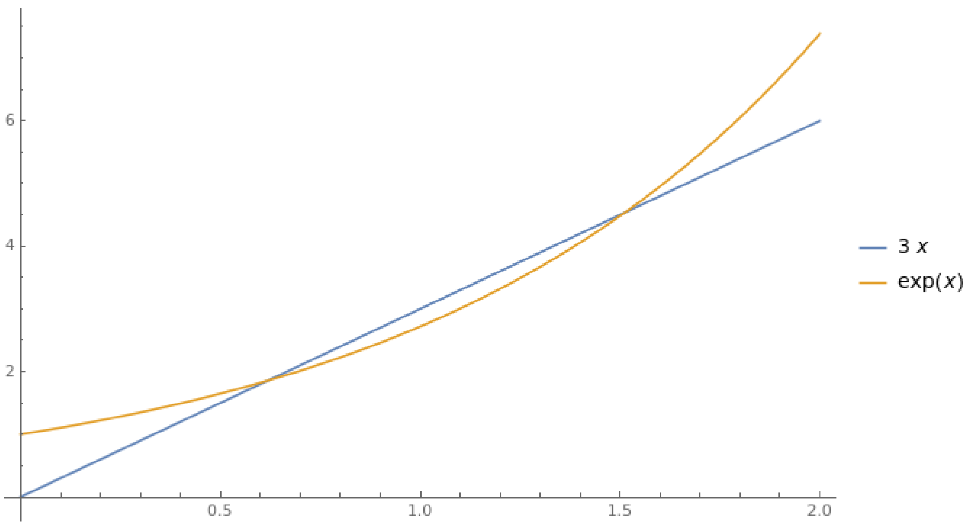
5. Zadanie 5

5.1. Opis problemu

Wyznaczenie przy pomocy metody bisekcji wartości zmiennej x, dla której następuje przecięcie wykresów funkcji $y = 3x$ oraz $y = \exp(x)$ dla dokładności $\delta = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-4}$.

5.2. Opis rozwiązania

W celu rozwiązania zadania zastosowano metodę `mbisekcji` utworzoną w zadaniu 1. Aby określić miejsce przecięcia zadanych funkcji należy znaleźć taki punkt, dla którego przyjmują one identyczną wartość dla tego samego argumentu, czyli $f(x) = 3x - \exp(x)$.
Najprostszym sposobem określenia przedziałów początkowych będzie analiza wykresu obu funkcji. Z Rysunku 2 wywnioskować można, iż poszukiwane wyniki znajdą się w przedziałach $[0.0, 1.0]$ oraz $[1.0, 2.0]$.



Rysunek 2: Wykres funkcji $y = 3x$ oraz $y = \exp(x)$.

5.3. Wyniki

Poniższa tabela prezentuje otrzymane rozwiązania:

przedział	x	liczba iteracji
$[0.0, 1.0]$	0.619 140 625	9
$[1.0, 2.0]$	1.512 084 960 937 5	13

Tabela 2: ...

5.4. Wnioski

Ważnym czynnikiem wpływającym na pomyślne znalezienie pierwiastków funkcji metodą bisekcji jest umiejętny dobór przedziału początkowego. Należy zwrócić uwagę, iż w tym przypadku uruchomienie jej dla przedziału $[0.0, 2.0]$ zwróci błąd związany z niezmiennością znaku. Jednak po wyszczególnieniu $[0.0, 1.0]$ i $[1.0, 2.0]$ znalezienie miejsc zerowych $f(x)$ nie nastręcza problemów. Pomocne w czynności wyboru startowego przedziału może być na przykład analiza wykresu funkcji.

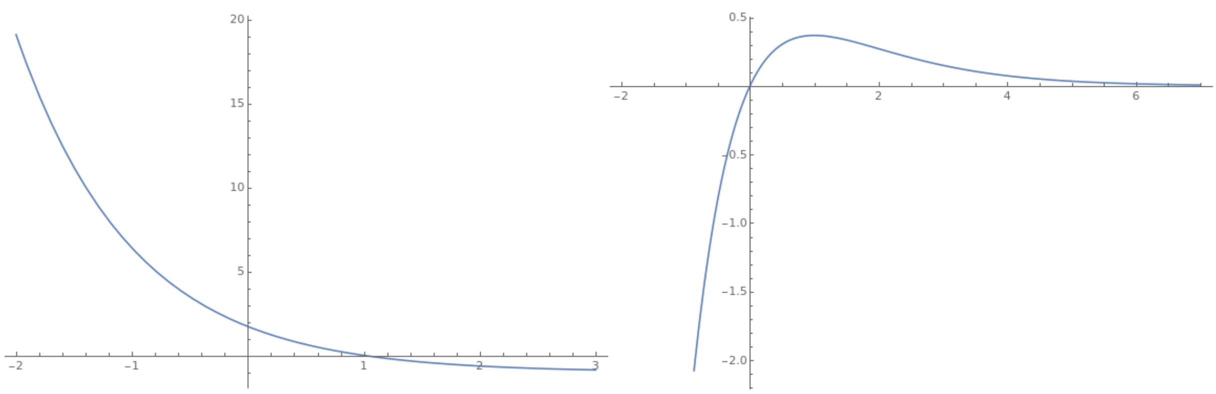
6. Zadanie 6

6.1. Opis problemu

Znalezienie pierwiastków funkcji $f_1(x) = \exp(1-x)-1$ oraz $f_2(x) = x\exp(-x)$ przy pomocy metod: bisekcji, stycznych oraz siecznych z dokładnością obliczeń $\delta = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-4}$. Należy zadbać o dobór odpowiedniego przedziału oraz przybliżeń początkowych.

6.2. Opis rozwiązania

W rozwiązaniu zadania zastosowano metody `mbisekcji`, `msiecznych` oraz `mstycznych`, utworzone w zadaniach 1-3. Rozpoczęto od przeprowadzenia analizy wykresów (Rysunek 3) zadanych funkcji w celu określenia trafnych parametrów.



(a) $f_1(x) = \exp(1-x) - 1$ (b) $f_2(x) = x\exp(-x)$

Rysunek 3: ...

1) $f_1(x)$
   Z wykresu z łatwością można odczytać prawidłowe rozwiązanie, jakim jest $x = 1.0$. Dla metody bisekcji unikano sytuacji, gdy pierwiastek znajduje się w środku przedziału początkowego.

Wykonywanie funkcji kończy się wtedy już po pierwszej iteracji, co nie jest interesujące w tym zadaniu. Podczas używania metody Newtona należało uważać przy dobieraniu x_0, gdyż pochodna dąży do 0, co jest niepożądane dla tej metody. W funkcji metody siecznych wybranie zbyt dużych wartości przybliżeń sprawi, że obliczenia wykonane są na bliskich sobie wartościach i działanie zakończy się szybko ze względu na osiągnięcie założonej precyzji.

2) $f_2(x)$
Już sam wzór funkcji wskazuje właściwy pierwiastek, czyli $x = 0.0$. Podczas używania metody bisekcji ponownie unikano obierania takich przedziałów, że pierwiastek leżał dokładnie w ich połowie. Tym razem jednak wybrano przedział, w którym wartość 0.0 znajduje się znacznie bliżej środka niż dla funkcji $f_1(x)$. Dla pozostałych dwóch metod zastosowano podobne środki ostrożności co w przypadku funkcji z punktu 1).

6.3. Wyniki

metoda	początkowe dane	x	$f(x)$	liczba iteracji
bisekcji	$[a, b] = [0.1, 1.2]$	0.999 993 896 484 374 8	$6.103\,534\,251\,789 \times 10^{-6}$	14
stycznych	$x_0 = 0.3$	0.999 999 986 696 949 3	$1.330\,305\,066\,105\,097\,5 \times 10^{-8}$	4
siecznych	$x_0 = -0.4,\ x_1 = 1.3$	1.000 002 616 071 405 7	$-2.616\,067\,983\,796\,1 \times 10^{-6}$	7
siecznych	$x_0 = -2.0,\ x_1 = 2.0$	1.000 006 385 490 303 6	$-6.385\,469\,916\,381\,226 \times 10^{-6}$	23

Tabela 3: $f_1(x) = \exp(1 - x) - 1$.

metoda	początkowe dane	x	$f(x)$	liczba iteracji
bisekcji	$[a, b] = [-0.4, 0.7]$	$-4.577\,636\,718\,739\,907\,4 \times 10^{-6}$	$-4.577\,657\,673\,545\,798 \times 10^{-6}$	16
stycznych	$x_0 = 0.4$	$-8.878\,980\,981\,560\,664 \times 10^{-6}$	$-8.879\,059\,818\,213\,929 \times 10^{-6}$	4
siecznych	$x_0 = -1.0,\ x_1 = 0.3$	$9.441\,344\,253\,735\,55 \times 10^{-6}$	$9.441\,255\,115\,175\,028 \times 10^{-6}$	23
siecznych	$x_0 = -0.1,\ x_1 = 0.9$	$1.102\,336\,180\,988\,65 \times 10^{-6}$	$1.102\,334\,965\,844\,264 \times 10^{-6}$	6

Tabela 4: $f_2(x) = x \exp(-x)$.

x_0	x	$f(x)$	liczba iteracji
1.5	0.999 999 981 006 100 2	$1.899\,390\,000\,836\,831\,4 \times 10^{-8}$	5
2.5	0.999 999 971 078 324 1	$2.892\,167\,638\,712\,806 \times 10^{-8}$	9
4.5	0.999 999 999 527 823 4	$4.721\,765\,201\,054\,495 \times 10^{-10}$	21
5.0	0.999 999 642 709 568 2	$3.572\,904\,956\,339\,329 \times 10^{-7}$	54
7.5	0.999 999 957 359 040 6	$4.264\,096\,031\,825\,204 \times 10^{-8}$	147
10.0	0.999 999 948 416 536 2	$5.158\,346\,505\,496\,07 \times 10^{-8}$	401

Tabela 5: Metoda Newtona dla $f_1(x) = \exp(1 - x) - 1$ i $x_0 \in (1, \infty)$.

x_0	x	$f(x)$	liczba iteracji
2.0	0.999 999 981 006 100 2	$1.899\,390\,000\,836\,831\,4 \times 10^{-8}$	5
3.0	0.999 999 971 078 324 1	$2.892\,167\,638\,712\,806 \times 10^{-8}$	9
4.0	0.999 999 999 527 823 4	$4.721\,765\,201\,054\,495 \times 10^{-10}$	21
5.0	0.999 999 642 709 568 2	$3.572\,904\,956\,339\,329 \times 10^{-7}$	54
6.0	0.999 999 957 359 040 6	$4.264\,096\,031\,825\,204 \times 10^{-8}$	147
7.0	0.999 999 948 416 536 2	$5.158\,346\,505\,496\,07 \times 10^{-8}$	401

Tabela 6: Metoda Newtona dla $f_2(x) = x \exp(-x)$ i $x_0 > 1$.

6.4. Wnioski

Zestawienie wyników z tabel widocznych powyżej pozwala na wyciągnięcie kilku wniosków. Otóż metoda bisekcji nie ma żadnych ograniczeń związanych z przebiegiem zadanej funkcji oraz jej pochodnej (w przeciwieństwie np. do metody Newtona). Niezależnie od przesunięć przedziału względem poprawnego pierwiastka wylicza wynik w tym samym tempie zależnym od wielkości przedziału (ma to sens, gdyż metoda ta polega na sukcesywnym dzieleniu przedziału na pół aż do momentu uzyskania takiego o satysfakcjonująco małym rozmiarze). Metoda stycznych najlepiej radzi sobie z wyznaczaniem pierwiastka, gdy kluczem jest szybkość — ze wszystkich badanych metod zwracała ona rozwiązanie po najmniejszej liczbie wykonanych iteracji. Nie oznacza to jednak, że jest najlepszym wyborem w każdej sytuacji — należy brać pod uwagę jej ograniczenia, nakładane przez konieczność obliczania pochodnej funkcji.

TEMP NOTES:
Wnioski dla wyników metody Newtona przy szczególnych argumentach!!! Dla pierwszego: nie udało się wyliczyć dla $x_0 = 8$ - wciąż niewystarczająca była obrana liczba iteracji wynosząca $it =$ 10000000000. Dla drugiego: podanie argumentu początkowego $x_0 = 1.0$ powodowało zwrócenie błędu — pochodna bliska wartości 0.0.