Agata Jasionowska 229726

Laboratorium – Lista 3

1. Zadanie 1

1.1. Opis problemu

Implementacja funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

1.2. Opis rozwiązania

Zastosowanie metody bisekcji wymaga spełnienia pewnych założeń:

1. funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$,
2. funkcja przyjmuje różne znaki na końcach przedziału $f(a)f(b) < 0$.

Przebieg algorytmu dla tej metody jest następujący:

1. Jeżeli funkcja f nie zmienia znaku w przedziale $[a, b]$ — zwrócenie informacji o błędzie;
2. Dopóki $|a - b| > epsilon$, obliczenie $x = \frac{a+b}{2}$;
3. Jeżeli $f(x) = 0$ to zwrócenie x jako rozwiązania;
4. Obranie nowego przedziału ($[a, x]$ lub $[b, x]$), w którym funkcja zmienia znak na przeciwny i powrót do 2.

2. Zadanie 2

2.1. Opis problemu

Implementacja funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą stycznych (Newtona).

2.2. Opis rozwiązania

W przypadku stosowania metody Newtona przyjmuje się kilka założeń co do danej funkcji f:

1. w przedziale domkniętym $[a, b]$ znajduje się dokładnie jeden pierwiastek,
2. funkcja przyjmuje różne znaki na końcach przedziału $f(a)f(b) < 0$,

Algorithm 1: Metoda bisekcji

```
mbisekcji (f, a, b, delta, epsilon);
Input  : f - funkcja f(x) zadana jako anonimowa funkcja,
         a, b - końce przedziału początkowego,
         delta, epsilon - dokładność obliczeń
Output: (r, v, it, err), gdzie:
         r - przybliżenie pierwiastka równania f(x) = 0,
         v - wartość f(r),
         it - liczba wykonanych iteracji,
         err - sygnalizacja błędu:
            0 - brak błędu,
            1 - funkcja nie zmienia znaku w przedziale [a, b].
r ← 0;
v ← 0;
fa ← f(a);
fb ← f(b);
e ← b − a;
it ← 0;
if sgn(fa) = sgn(fb) then
    err ← 1;
    return (r, v, it, err);
end
while e > epsilon do
    it ← it + 1;
    e ← e/2;
    r ← a + e;
    v ← f(r);
    if |e| < delta OR |v| < epsilon then
        return (r, v, it, err);
    end
    if sign(v) ≠ sign(fa) then
        b ← r;
        fb ← v;
    else
        a ← r;
        fa ← v;
    end
end
return (r, v, it, err);
```

3. pierwsza i druga pochodna f mają stały znak w tym przedziale.

Przebieg tej metody jest następujący:

1. Za x_1 przyjmowany jest punkt przecięcia stycznej wyprowadzonej dla x_0 z osią `OX`;
2. Dopóki nie osiągnięto wymaganego przybliżenia, $x_0 = x_1$;
3. Kolejne przybliżenie obliczane jest ze wzoru: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{pf(x_0)}$, powrót do kroku 2;
4. Jeżeli $f(x_0) > epsilon$ zwracany jest błąd, w przeciwnym przypadku rozwiązaniem jest x_0.

Algorithm 2: Metoda stycznych

<u>mstycznych</u> (f, pf, x_0, $delta$, $epsilon$, $maxit$);

Input : f, pf - funkcja $f(x)$ oraz $f'(x)$ zadane jako anonimowe funkcje,
x_0 - przybliżenie początkowe,
$delta$, $epsilon$ - dokładność obliczeń,
$maxit$ - maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Output: (r, v, it, err), gdzie:
r - przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
v - wartość f(r),
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu:
0 - metoda zbieżna,
1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w $maxit$ iteracji,
2 - pochodna bliska zeru.

r $\leftarrow x_0$;
err $\leftarrow 0$;
v $\leftarrow f$(r);
it $\leftarrow 0$;
if $|pf$(r)$| < epsilon$ **then**
    err $\leftarrow 2$;
    return (r, v, it, err);
end
for it $\leftarrow 1$ **to** $maxit$ **do**
    x $\leftarrow$ r $-$ (v$/pf$(r));
    v $\leftarrow f$(x);
    if $|$r $-$ x$| < delta$ or $|$v$| < epsilon$ **then**
        r $\leftarrow$ x;
        return (r, v, it, err);
    end
    r $\leftarrow$ x;
end
if $|$v$| > epsilon$ **then**
    err $\leftarrow 1$;
end
return (r, v, it, err);

3. Zadanie 3

3.1. Opis problemu

Implementacja funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych(Eulera).

3.2. Opis rozwiązania

Dla metody siecznych przyjmuje się kilka założeń co do funkcji f:

1. f jest ciągła,
2. w przedziale domkniętym $[a, b]$ pierwsza pochodna jest różna od zera,
3. funkcja przyjmuje różne znaki na końcach przedziału $f(a)f(b) < 0$.

Przebieg tej metody jest następujący:

1. Obliczane są wartości $f_1 = f(x_1)$ oraz $f_2 = f(x_2)$;
2. Dopóki nie osiągnięto wymaganej liczby iteracji, $x_0 = x_1 - f_1 \cdot \dfrac{x_1 - x_2}{f_1 - f_2}$, $f_0 = f(x_0)$;
3. Jeżeli $|x_1 - x_2| < epsilon$, zwrócenie x_0 i zakończenie działania;
4. Zamiana parametrów i wartości funkcji odpowiednio dla $x_2 \leftarrow x_1$ oraz $x_1 \leftarrow x_0$, powrót do kroku 2.

4. Zadanie 4

4.1. Opis problemu

Przy użyciu metod zaprogramowanych w poprzednich zadaniach wyznaczenie pierwiastka równania $sinx - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ dla poniższych danych:

1. Metodą bisekcji z przedziałem początkowym $[1.5, 2]$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$;
2. Metodą Newtona z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1.5$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$;
3. Metodą siecznych z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$.

4.2. Opis rozwiązania

Zastosowanie funkcji utworzonych w zadaniach 1-3.

4.3. Wyniki

Uzyskane rezultaty widoczne są w Tabeli 1.

4.4. Wnioski

Funkcja metody biekcji wykonała znacznie więcej iteracji, bo aż 17. Jednak w efekcie końcowym to ona zwróciła wynik z najmniejsza dokładnością. O wiele lepiej radzą tu sobie funkcje siecznych oraz stycznych, osiągając wymaganą dokładność już po 4 iteracjach. Jako zwycięzcę wytypować można metodę Newtona, bowiem osiągnęła ona najdokładniejszy wynik.

Algorithm 3: Metoda siecznych

```
msiecznych (f, x0, x1, delta, epsilon, maxit);
Input  : f - funkcja f(x) zadana jako anonimowa funkcja,
         x0, x1 - przybliżenia początkowe,
         delta, epsilon - dokładność obliczeń,
         maxit - maksymalna dopuszczalna liczba iteracji
Output: (r, v, it, err), gdzie:
         r  - przybliżenie pierwiastka równania f(x) = 0,
         v  - wartość f(r),
         it  - liczba wykonanych iteracji,
         err  - sygnalizacja błędu:
           0 - metoda zbieżna,
           1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji.
a ← x0;
b ← x1;
fa ← f(a);
fb ← f(b);
it ← 0;
err ← 0;
for it ← 1 to maxit do
    if |fa| > |fb| then
        swap(a, b);
        swap(fa, fb);
    end
    s ← (b − a)/(fb − fa);
    b ← a;
    fb ← fa;
    a ← a − (fa · s);
    fa ← f(a);
    if |fa| < epsilon OR |b − a| < delta then
        return (a, fa, it, err);
    end
end
if |fa| > epsilon AND |b − a| > delta then
    err ← 1;
end
return (a, fa, it, err);
```

podpunkt	x_0	$f(x_0)$	liczba iteracji
1.	1.933 753 967 285 156 2	$-2.702\,768\,013\,840\,284\,3 \times 10^{-7}$	16
2.	1.933 753 779 789 742	$-2.242\,331\,631\,485\,683\,4 \times 10^{-8}$	4
3.	1.933 750 900 535 632 1	$3.783\,706\,985\,283\,075 \times 10^{-6}$	4

Tabela 1: $sinx - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ dla danych z zadania

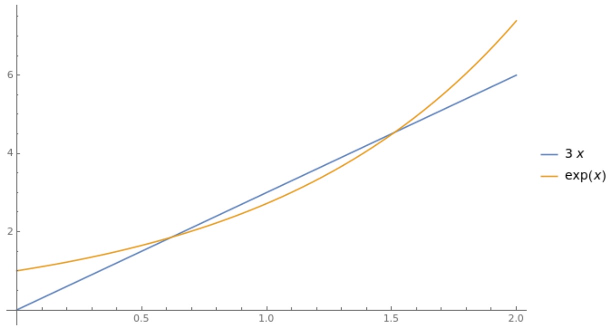
5. Zadanie 5

5.1. Opis problemu

Wyznaczenie przy pomocy metody bisekcji wartości zmiennej x, dla której następuje przecięcie wykresów funkcji $y = 3x$ oraz $y = \exp^x$ dla dokładności $\delta = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-4}$.

5.2. Opis rozwiązania

W celu rozwiązania zadania zastosowano metodę `mbisekcji` utworzoną w zadaniu 1. Aby określić miejsce przecięcia zadanych funkcji należy znaleźć taki punkt, dla którego przyjmują one identyczną wartość dla tego samego argumentu, czyli $f(x) = 3x - \exp^x$.
Najprostszym sposobem określenia przedziałów początkowych będzie analiza wykresu obu funkcji. Z Rysunku 1 wywnioskować można, iż poszukiwane wyniki znajdą się w przedziałach $[0.0, 1.0]$ oraz $[1.0, 2.0]$.



Rysunek 1: Wykres funkcji w programie Mathematica.

5.3. Wyniki

Poniższa tabela prezentuje otrzymane rozwiązania:

przedział	x	liczba iteracji
$[0.0, 1.0]$	0.619 140 625	9
$[1.0, 2.0]$	1.512 084 960 937 5	13

Tabela 2: ...

5.4. Wnioski

Ważnym czynnikiem wpływającym na pomyślne znalezienie pierwiastków funkcji metodą bisekcji jest umiejętny dobór przedziału początkowego. Należy zwrócić uwagę, iż w tym przypadku uruchomienie jej dla przedziału $[0.0, 2.0]$ zwróci błąd związany z niezmiennością znaku. Jednak po wyszczególnieniu $[0.0, 1.0]$ i $[1.0, 2.0]$ znalezienie miejsc zerowych $f(x)$ nie nastręcza problemów. Pomocne w czynności wyboru startowego przedziału może być na przykład analiza wykresu funkcji.

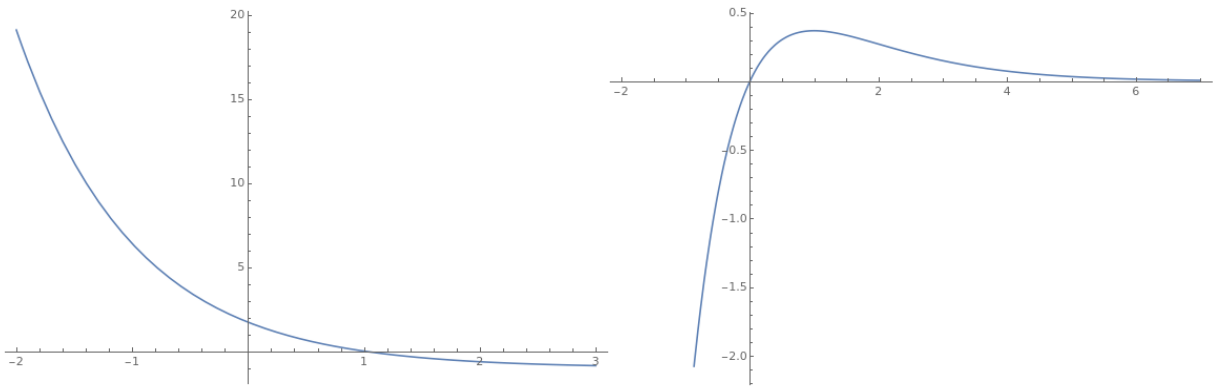
6. Zadanie 6

6.1. Opis problemu

Znalezienie pierwiastków funkcji $f_1(x) = exp^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = x\exp^{-x}$ przy pomocy metod: bisekcji, stycznych oraz siecznych z dokładnością obliczeń $\delta = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-4}$. Należy zadbać o dobór odpowiedniego przedziału oraz przybliżeń początkowych.

6.2. Opis rozwiązania

W rozwiązaniu zadania zastosowano metody `mbisekcji`, `msiecznych` oraz `mstycznych`, utworzone w zadaniach 1-3. Rozpoczęto od przeprowadzenia analizy wykresów (Rysunek 2) zadanych funkcji w celu określenia trafnych parametrów.



(a) $f_1(x) = exp^{1-x} - 1$

(b) $f_2(x) = x\exp^{-x}$

Rysunek 2: ...

1) $f_1(x)$
   Z wykresu z łatwością można odczytać prawidłowe rozwiązanie, jakim jest $x = 1.0$. Dla metody bisekcji unikano sytuacji, gdy pierwiastek znajduje się w środku przedziału początkowego. Wykonywanie funkcji kończy się wtedy już po pierwszej iteracji, co nie jest interesujące w tym zadaniu. Podczas używania metody Newtona należało uważać przy dobieraniu x_0, gdyż pochodna dąży do 0, co jest niepożądane dla tej metody. W funkcji metody siecznych wybranie zbyt dużych wartości przybliżeń sprawi, że obliczenia wykonane są na bliskich sobie wartościach i działanie zakończy się szybko ze względu na osiągnięcie założonej precyzji.
2) $f_2(x)$
   Już sam wzór funkcji wskazuje właściwy pierwiastek, czyli $x = 0.0$. Podczas używania metody bisekcji ponownie unikano obierania takich przedziałów, że pierwiastek leżał dokładnie w ich połowie. Tym razem jednak wybrano przedział, w którym wartość 0.0 znajduje się znacznie bliżej środka niż dla funkcji $f_1(x)$. Dla pozostałych dwóch metod zastosowano podobne środki ostrożności co w przypadku funkcji z punktu 1).

6.3. Wyniki

6.4. Wnioski

Zestawienie wyników z tabel widocznych powyżej pozwala na wyciągnięcie kilku wniosków. Otóż metoda bisekcji nie ma żadnych ograniczeń związanych z przebiegiem zadanej funkcji oraz jej pochodnej (w przeciwieństwie np. do metody Newtona). Niezależnie od przesunięć przedziału

metoda	początkowe dane	x	$f(x)$	liczba iteracji
bisekcji	$[a,b]=[0.1,1.2]$	0.999 993 896 484 374 8	6.103 534 251 789 $\times 10^{-6}$	14
stycznych	$x_0=0.3$	0.999 999 986 696 949 3	1.330 305 066 105 097 5 $\times 10^{-8}$	4
siecznych	$x_0=-0.4,\ x_1=1.3$	1.000 002 616 071 405 7	−2.616 067 983 796 1 $\times 10^{-6}$	7
siecznych	$x_0=-2.0,\ x_1=2.0$	1.000 006 385 490 303 6	−6.385 469 916 381 226 $\times 10^{-6}$	23

Tabela 3: $f_1(x) = exp^{1-x} - 1$.

metoda	początkowe dane	x	$f(x)$	liczba iteracji
bisekcji	$[a,b]=[-0.4,0.7]$	−4.577 636 718 739 907 4 $\times 10^{-6}$	−4.577 657 673 545 798 $\times 10^{-6}$	16
stycznych	$x_0=0.4$	−8.878 980 981 560 664 $\times 10^{-6}$	−8.879 059 818 213 929 $\times 10^{-6}$	4
siecznych	$x_0=-1.0,\ x_1=0.3$	9.441 344 253 735 55 $\times 10^{-6}$	9.441 255 115 175 028 $\times 10^{-6}$	23
siecznych	$x_0=-0.1,\ x_1=0.9$	1.102 336 180 988 65 $\times 10^{-6}$	1.102 334 965 844 264 $\times 10^{-6}$	6

Tabela 4: $f_2(x) = x\exp^{-x}$.

x_0	x	$f(x)$	liczba iteracji
1.5	0.999 999 981 006 100 2	1.899 390 000 836 831 4 $\times 10^{-8}$	5
2.5	0.999 999 971 078 324 1	2.892 167 638 712 806 $\times 10^{-8}$	9
4.5	0.999 999 999 527 823 4	4.721 765 201 054 495 $\times 10^{-10}$	21
5.0	0.999 999 642 709 568 2	3.572 904 956 339 329 $\times 10^{-7}$	54
7.5	0.999 999 957 359 040 6	4.264 096 031 825 204 $\times 10^{-8}$	147
10.0	0.999 999 948 416 536 2	5.158 346 505 496 07 $\times 10^{-8}$	401

Tabela 5: Metoda Newtona dla $f_1(x) = exp^{1-x} - 1$ i $x_0 \in (1, \infty)$.

x_0	x	$f(x)$	liczba iteracji
2.0	0.999 999 981 006 100 2	1.899 390 000 836 831 4 $\times 10^{-8}$	5
3.0	0.999 999 971 078 324 1	2.892 167 638 712 806 $\times 10^{-8}$	9
4.0	0.999 999 999 527 823 4	4.721 765 201 054 495 $\times 10^{-10}$	21
5.0	0.999 999 642 709 568 2	3.572 904 956 339 329 $\times 10^{-7}$	54
6.0	0.999 999 957 359 040 6	4.264 096 031 825 204 $\times 10^{-8}$	147
7.0	0.999 999 948 416 536 2	5.158 346 505 496 07 $\times 10^{-8}$	401

Tabela 6: Metoda Newtona dla $f_2(x) = x\exp^{-x}$ i $x_0 > 1$.

względem poprawnego pierwiastka wylicza wynik w tym samym tempie zależnym od wielkości przedziału (ma to sens, gdyż metoda ta polega na sukcesywnym dzieleniu przedziału na pół aż do momentu uzyskania takiego o satysfakcjonująco małym rozmiarze). Metoda stycznych najlepiej radzi sobie z wyznaczaniem pierwiastka, gdy kluczem jest szybkość — ze wszystkich badanych metod zwracała ona rozwiązanie po najmniejszej liczbie wykonanych iteracji. Nie oznacza to jednak, że jest najlepszym wyborem w każdej sytuacji — należy brać pod uwagę jej ograniczenia, nakładane przez konieczność obliczania pochodnej funkcji.

TEMP NOTES:
Wnioski dla wyników metody Newtona przy szczególnych argumentach!!! Dla pierwszego: nie udało się wyliczyć dla $x_0 = 8$ - wciąż niewystarczająca była obrana liczba iteracji wynosząca $it = 10000000000$. Dla drugiego: podanie argumentu początkowego $x_0 = 1.0$ powodowało zwrócenie błędu — pochodna bliska wartości 0.0.