Agata Jasionowska 229726

Laboratorium – Lista 3

1. Zadanie 1

1.1. Opis problemu

Implementacja funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

1.2. Opis rozwiązania

Przebieg tej metody jest następujący:

1. Jeżeli funkcja f nie zmienia znaku w przedziale $[a, b]$ — zwrócenie informacji o błędzie;
2. Dopóki $|a - b| > epsilon$, obliczenie $x = \frac{a+b}{2}$;
3. Jeżeli $f(x) = 0$ to zwrócenie x jako rozwiązania;
4. Obranie nowego przedziału ($[a, x]$ lub $[b, x]$), w którym funkcja zmienia znak na przeciwny i powrót do 2.

Niektóre elementy widocznego algorytmu warto uzupełnić dodatkowym komentarzem. Jako pierwszym ze spostrzeżeń można uczynić sposób obliczania punktu środkowego, czyli instrukcję: $r \leftarrow a + (b - a)/2$. Okazuje się, że w obliczeniach numerycznych o wiele lepszym rozwiązaniem jest obliczanie nowej wielkości poprzez niewielką poprawkę poprzedniej. Dlatego też wyżej wspomniane przypisanie nie ma postaci: $r \leftarrow (a + b)/2$. W pewnych przypadkach zastosowanie takiej konstrukcji mogłoby prowadzić do uzyskania wartości znajdującej się nawet poza przedziałem $[a, b]$.
Drugą sprawą będzie sposób badania zmiany znaku wartości funkcji. Otóż wykorzystanie nierówności $fa \cdot fb < 0$ może prowadzić do nadmiaru lub niedomiaru spowodowanego mnożeniem. Zamiast tego skorzystano z $sgn(fa) \neq sgn(fb)$, unikając w ten sposób zbędnego działania.
Ostatnim spostrzeżeniem będzie zwrócenie uwagi na warunki zakończenia obliczeń przez funkcję. Uwzględnia ona warunek $e > \epsilon$ (czy w zadanym przedziale możliwa jest kolejna iteracja), $|e| < \delta$ (gdy uzyskano już wystarczająco mały błąd) oraz $|v| < \epsilon$ (wartość funkcji w punkcie jest dostatecznie bliska zeru). Uwzględnienie aż trzech kryteriów zakończenia pracy daje algorytmowi pewność w działaniu nawet dla przypadków patologicznych.

Algorytm 1: Metoda bisekcji

Input : f- funkcja $f(x)$ zadana jako anonimowa funkcja,
a, b - końce przedziału początkowego,
δ, ϵ - dokładność obliczeń

Output: (r, v, it, err), gdzie:
r - przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
v - wartość f‘(r),
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu:
  0 - brak błędu,
  1 - funkcja nie zmienia znaku w przedziale [a, b].

```
Function mbisekcji(a, b, δ, ϵ)
    r ← 0
    v ← 0
    fa ← f(a)
    fb ← f(b)
    e ← b − a
    it ← 0
    if sgn(fa) = sgn(fb) then
        return (r, v, it, 1)
    end
    while e > ϵ do
        it ← it + 1
        e ← e/2
        r ← a + e
        v ← f(r)
        if |e| < δ ∨ |v| < ϵ then
            return (r, v, it, 0)
        end
        if sgn(v) ≠ sgn(fa) then
            b ← r
            fb ← v
        else
            a ← r
            fa ← v
        end
    end
    return (r, v, it, 0)
```

2. Zadanie 2

2.1. Opis problemu

Implementacja funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą stycznych (Newtona).

2.2. Opis rozwiązania

Przebieg tej metody jest następujący:

1. Za x_1 przyjmowany jest punkt przecięcia stycznej wyprowadzonej dla x_0 z osią `OX`;
2. Dopóki nie osiągnięto wymaganego przybliżenia, $x_0 = x_1$;
3. Kolejne przybliżenie obliczane jest ze wzoru: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{pf(x_0)}$, powrót do kroku 2;
4. Jeżeli $f(x_0) > epsilon$ zwracany jest błąd, w przeciwnym przypadku rozwiązaniem jest x_0.

Algorytm 2: Metoda stycznych

Input : `f`, `pf` - funkcja $f(x)$ oraz $f'(x)$ zadane jako anonimowe funkcje,
x_0 - przybliżenie początkowe,
δ, ϵ - dokładność obliczeń
maxit - maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Output: (r, v, it, err), gdzie:
r - przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
v - wartość f(r),
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu:
0 - metoda zbieżna,
1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji,
2 - pochodna bliska zeru.

Function `mstycznych(f, pf,` x_0, δ, ϵ, maxit)
    r $\leftarrow x_0$
    v $\leftarrow$ `f(r)`
    it $\leftarrow 0$
    if $|$`pf(r)`$| < \epsilon$ **then**
        return (r, v, it, 2)
    end
    for it $\leftarrow 1$ **to** maxit **do**
        x $\leftarrow$ r $-$ (v/`pf(r)`)
        v $\leftarrow$ `f(x)`
        if $|$r $-$ x$| < \delta \vee |$v$| < \epsilon$ **then**
            r $\leftarrow$ x
            return (r, v, it, 0)
        end
        r $\leftarrow$ x
    end
    return (r, v, it, 1)

3. Zadanie 3

3.1. Opis problemu

Implementacja funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych(Eulera).

3.2. Opis rozwiązania

Przebieg tej metody jest następujący:

1. Obliczane są wartości $f_1 = f(x_1)$ oraz $f_2 = f(x_2)$;
2. Dopóki nie osiągnięto wymaganej liczby iteracji, $x_0 = x_1 - f_1 \cdot \frac{x_1 - x_2}{f_1 - f_2}$, $f_0 = f(x_0)$;
3. Jeżeli $|x_1 - x_2| < epsilon$, zwrócenie x_0 i zakończenie działania;
4. Zamiana parametrów i wartości funkcji odpowiednio dla $x_2 \leftarrow x_1$ oraz $x_1 \leftarrow x_0$, powrót do kroku 2.

Algorytm 3: Metoda siecznych

Input : f - funkcja $f(x)$ zadana jako anonimowa funkcja,
x_0, x_1 - przybliżenia początkowe,
δ, ϵ - dokładność obliczeń
maxit - maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Output: (r, v, it, err), gdzie:
r - przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
v - wartość f(r),
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu:
0 - metoda zbieżna,
1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji.

```
Function msiecznych(f, x0, x1, δ, ϵ, maxit)
    a ← x0
    b ← x1
    fa ← f(a)
    fb ← f(b)
    it ← 0
    for it ← 1 to maxit do
        if |fa| > |fb| then
            swap(a, b)
            swap(fa, fb)
        end
        s ← (b − a)/(fb − fa)
        b ← a
        fb ← fa
        a ← a − (fa · s)
        fa ← f(a)
        if |fa| < ϵ ∨ |b − a| < δ then
            return (a, fa, it, 0)
        end
    end
    return (a, fa, it, 1)
```

4. Zadanie 4

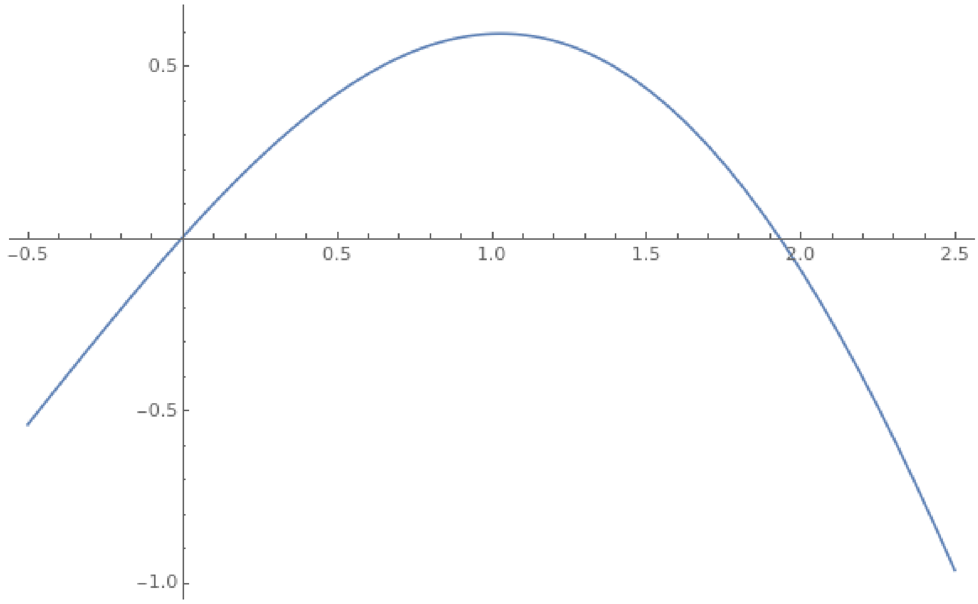
4.1. Opis problemu

Przy użyciu metod zaprogramowanych w poprzednich zadaniach wyznaczenie pierwiastka równania $\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ dla poniższych danych:

1. Metodą bisekcji z przedziałem początkowym $[1.5, 2]$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$;
2. Metodą Newtona z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1.5$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$;
3. Metodą siecznych z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$.

4.2. Opis rozwiązania

Zastosowanie funkcji utworzonych w zadaniach 1-3. Miejsca zerowe zadanej funkcji widoczne są na Rysunku 1.



Rysunek 1: Wykres funkcji $\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$.

4.3. Wyniki

Uzyskane rezultaty widoczne są w Tabeli 1.

podpunkt	x_0	$f(x_0)$	liczba iteracji
1.	1.933 753 967 285 156 2	$-2.702\,768\,013\,840\,284\,3 \times 10^{-7}$	16
2.	1.933 753 779 789 742	$-2.242\,331\,631\,485\,683\,4 \times 10^{-8}$	4
3.	1.933 750 900 535 632 1	$3.783\,706\,985\,283\,075 \times 10^{-6}$	4

Tabela 1: $\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ dla danych z zadania.

4.4. Wnioski

Funkcja metody biekcji wykonała znacznie więcej iteracji, bo aż 17. Jednak w efekcie końcowym to ona zwróciła wynik z najmniejsza dokładnością. O wiele lepiej radzą tu sobie funkcje siecznych oraz stycznych, osiągając wymaganą dokładność już po 4 iteracjach. Jako zwycięzcę wytypować można metodę Newtona, bowiem osiągnęła ona najdokładniejszy wynik.

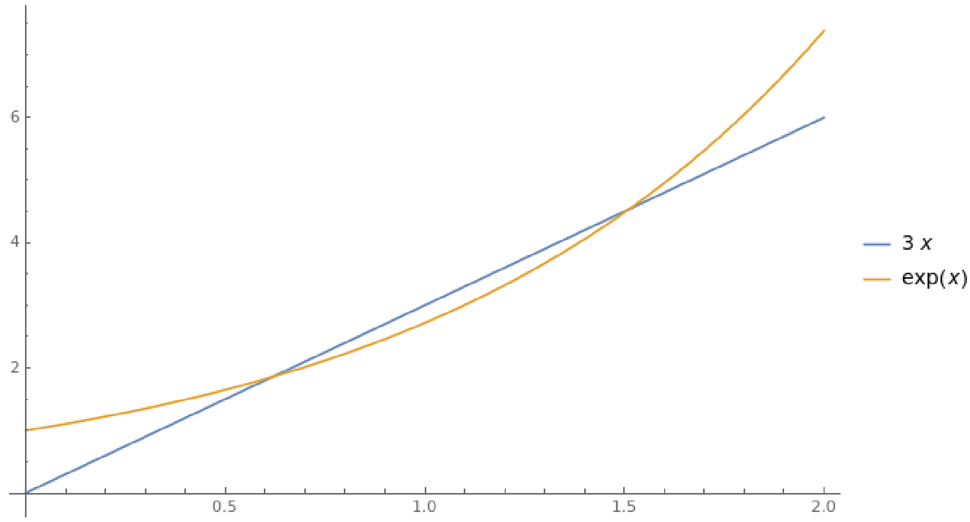
5. Zadanie 5

5.1. Opis problemu

Wyznaczenie przy pomocy metody bisekcji wartości zmiennej x, dla której następuje przecięcie wykresów funkcji $y = 3x$ oraz $y = \exp^x$ dla dokładności $\delta = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-4}$.

5.2. Opis rozwiązania

W celu rozwiązania zadania zastosowano metodę `mbisekcji` utworzoną w zadaniu 1. Aby określić miejsce przecięcia zadanych funkcji należy znaleźć taki punkt, dla którego przyjmują one identyczną wartość dla tego samego argumentu, czyli $f(x) = 3x - \exp^x$.
Najprostszym sposobem określenia przedziałów początkowych będzie analiza wykresu obu funkcji. Z Rysunku 2 wywnioskować można, iż poszukiwane wyniki znajdą się w przedziałach $[0.0, 1.0]$ oraz $[1.0, 2.0]$.



Rysunek 2: Wykres funkcji $y = 3x$ oraz $y = \exp^x$.

5.3. Wyniki

Poniższa tabela prezentuje otrzymane rozwiązania:

przedział	x	liczba iteracji
$[0.0, 1.0]$	0.619 140 625	9
$[1.0, 2.0]$	1.512 084 960 937 5	13

Tabela 2: ...

5.4. Wnioski

Ważnym czynnikiem wpływającym na pomyślne znalezienie pierwiastków funkcji metodą bisekcji jest umiejętny dobór przedziału początkowego. Należy zwrócić uwagę, iż w tym przypadku uruchomienie jej dla przedziału $[0.0, 2.0]$ zwróci błąd związany z niezmiennością znaku. Jednak po wyszczególnieniu $[0.0, 1.0]$ i $[1.0, 2.0]$ znalezienie miejsc zerowych $f(x)$ nie nastręcza problemów. Pomocne w czynności wyboru startowego przedziału może być na przykład analiza wykresu funkcji.

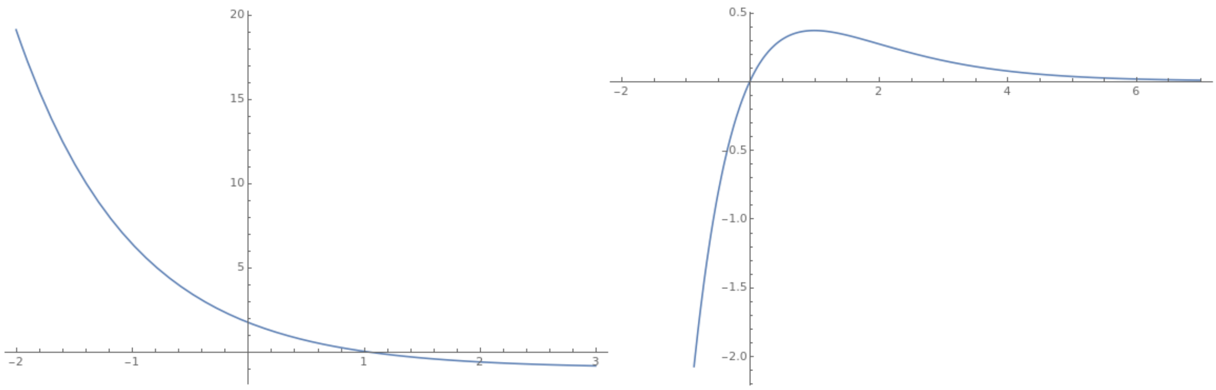
6. Zadanie 6

6.1. Opis problemu

Znalezienie pierwiastków funkcji $f_1(x) = \exp^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = x\exp^{-x}$ przy pomocy metod: bisekcji, stycznych oraz siecznych z dokładnością obliczeń $\delta = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-4}$. Należy zadbać o dobór odpowiedniego przedziału oraz przybliżeń początkowych.

6.2. Opis rozwiązania

W rozwiązaniu zadania zastosowano metody `mbisekcji`, `msiecznych` oraz `mstycznych`, utworzone w zadaniach 1-3. Rozpoczęto od przeprowadzenia analizy wykresów (Rysunek 3) zadanych funkcji w celu określenia trafnych parametrów.



(a) $f_1(x) = \exp^{1-x} - 1$ (b) $f_2(x) = x\exp^{-x}$

Rysunek 3: ...

1) $f_1(x)$
   Z wykresu z łatwością można odczytać prawidłowe rozwiązanie, jakim jest $x = 1.0$. Dla metody bisekcji unikano sytuacji, gdy pierwiastek znajduje się w środku przedziału początkowego. Wykonywanie funkcji kończy się wtedy już po pierwszej iteracji, co nie jest interesujące w tym zadaniu. Podczas używania metody Newtona należało uważać przy dobieraniu x_0, gdyż pochodna dąży do 0, co jest niepożądane dla tej metody. W funkcji metody siecznych wybranie zbyt dużych wartości przybliżeń sprawi, że obliczenia wykonane są na bliskich sobie wartościach i działanie zakończy się szybko ze względu na osiągnięcie założonej precyzji.
2) $f_2(x)$
   Już sam wzór funkcji wskazuje właściwy pierwiastek, czyli $x = 0.0$. Podczas używania metody bisekcji ponownie unikano obierania takich przedziałów, że pierwiastek leżał dokładnie w ich połowie. Tym razem jednak wybrano przedział, w którym wartość 0.0 znajduje się znacznie bliżej środka niż dla funkcji $f_1(x)$. Dla pozostałych dwóch metod zastosowano podobne środki ostrożności co w przypadku funkcji z punktu 1).

6.3. Wyniki

6.4. Wnioski

Zestawienie wyników z tabel widocznych powyżej pozwala na wyciągnięcie kilku wniosków. Otóż metoda bisekcji nie ma żadnych ograniczeń związanych z przebiegiem zadanej funkcji oraz jej pochodnej (w przeciwieństwie np. do metody Newtona). Niezależnie od przesunięć przedziału

metoda	początkowe dane	x	$f(x)$	liczba iteracji
bisekcji	$[a,b]=[0.1,1.2]$	$0.999\,993\,896\,484\,374\,8$	$6.103\,534\,251\,789 \times 10^{-6}$	14
stycznych	$x_0 = 0.3$	$0.999\,999\,986\,696\,949\,3$	$1.330\,305\,066\,105\,097\,5 \times 10^{-8}$	4
siecznych	$x_0=-0.4,\ x_1=1.3$	$1.000\,002\,616\,071\,405\,7$	$-2.616\,067\,983\,796\,1 \times 10^{-6}$	7
siecznych	$x_0=-2.0,\ x_1=2.0$	$1.000\,006\,385\,490\,303\,6$	$-6.385\,469\,916\,381\,226 \times 10^{-6}$	23

Tabela 3: $f_1(x) = \exp^{1-x} -1$.

metoda	początkowe dane	x	$f(x)$	liczba iteracji
bisekcji	$[a,b]=[-0.4,0.7]$	$-4.577\,636\,718\,739\,907\,4 \times 10^{-6}$	$-4.577\,657\,673\,545\,798 \times 10^{-6}$	16
stycznych	$x_0 = 0.4$	$-8.878\,980\,981\,560\,664 \times 10^{-6}$	$-8.879\,059\,818\,213\,929 \times 10^{-6}$	4
siecznych	$x_0=-1.0,\ x_1=0.3$	$9.441\,344\,253\,735\,55 \times 10^{-6}$	$9.441\,255\,115\,175\,028 \times 10^{-6}$	23
siecznych	$x_0=-0.1,\ x_1=0.9$	$1.102\,336\,180\,988\,65 \times 10^{-6}$	$1.102\,334\,965\,844\,264 \times 10^{-6}$	6

Tabela 4: $f_2(x) = x\exp^{-x}$.

x_0	x	$f(x)$	liczba iteracji
1.5	$0.999\,999\,981\,006\,100\,2$	$1.899\,390\,000\,836\,831\,4 \times 10^{-8}$	5
2.5	$0.999\,999\,971\,078\,324\,1$	$2.892\,167\,638\,712\,806 \times 10^{-8}$	9
4.5	$0.999\,999\,999\,527\,823\,4$	$4.721\,765\,201\,054\,495 \times 10^{-10}$	21
5.0	$0.999\,999\,642\,709\,568\,2$	$3.572\,904\,956\,339\,329 \times 10^{-7}$	54
7.5	$0.999\,999\,957\,359\,040\,6$	$4.264\,096\,031\,825\,204 \times 10^{-8}$	147
10.0	$0.999\,999\,948\,416\,536\,2$	$5.158\,346\,505\,496\,07 \times 10^{-8}$	401

Tabela 5: Metoda Newtona dla $f_1(x) = \exp^{1-x} -1$ i $x_0 \in (1,\infty)$.

x_0	x	$f(x)$	liczba iteracji
2.0	$0.999\,999\,981\,006\,100\,2$	$1.899\,390\,000\,836\,831\,4 \times 10^{-8}$	5
3.0	$0.999\,999\,971\,078\,324\,1$	$2.892\,167\,638\,712\,806 \times 10^{-8}$	9
4.0	$0.999\,999\,999\,527\,823\,4$	$4.721\,765\,201\,054\,495 \times 10^{-10}$	21
5.0	$0.999\,999\,642\,709\,568\,2$	$3.572\,904\,956\,339\,329 \times 10^{-7}$	54
6.0	$0.999\,999\,957\,359\,040\,6$	$4.264\,096\,031\,825\,204 \times 10^{-8}$	147
7.0	$0.999\,999\,948\,416\,536\,2$	$5.158\,346\,505\,496\,07 \times 10^{-8}$	401

Tabela 6: Metoda Newtona dla $f_2(x) = x\exp^{-x}$ i $x_0 > 1$.

względem poprawnego pierwiastka wylicza wynik w tym samym tempie zależnym od wielkości przedziału (ma to sens, gdyż metoda ta polega na sukcesywnym dzieleniu przedziału na pół aż do momentu uzyskania takiego o satysfakcjonująco małym rozmiarze). Metoda stycznych najlepiej radzi sobie z wyznaczaniem pierwiastka, gdy kluczem jest szybkość — ze wszystkich badanych metod zwracała ona rozwiązanie po najmniejszej liczbie wykonanych iteracji. Nie oznacza to jednak, że jest najlepszym wyborem w każdej sytuacji — należy brać pod uwagę jej ograniczenia, nakładane przez konieczność obliczania pochodnej funkcji.

TEMP NOTES:
Wnioski dla wyników metody Newtona przy szczególnych argumentach!!! Dla pierwszego: nie udało się wyliczyć dla $x_0 = 8$ - wciąż niewystarczająca była obrana liczba iteracji wynosząca $it = 10000000000$. Dla drugiego: podanie argumentu początkowego $x_0 = 1.0$ powodowało zwrócenie błędu — pochodna bliska wartości 0.0.