1 Лемма(*)

$(\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\varphi \to \psi)$
Доказательство: по теореме о дедукции $(\varphi \to \neg\neg\psi), \varphi \vdash \psi$

1. $\neg\neg\psi \to \psi$ (схема аксиом 10)
2. $\varphi \to \neg\neg\psi$ (допущение)
3. φ (допущение)
4. $\neg\neg\psi$ (MP 2, 3)
5. ψ (MP 1, 4)

2 (a) $\neg\forall x\varphi \to \exists x\neg\varphi$

Сначала докажем, что $\neg\exists x\neg\varphi \to \varphi$

1. $\neg\varphi \to \exists x\neg\varphi$ (схема аксиом 12)
2. $\neg\exists x\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$ (по лемме о контрапозиции)
3. $\neg\exists x\neg\varphi \to \varphi$ (по *)

Применяя правило вывода, получаем $\neg\exists x\neg\varphi \to \forall x\varphi$.
По лемме о контрапозиции $\neg\forall x\varphi \to \neg\neg\exists x\neg\varphi$.
И по (*) снимаем двойное отрицание $\neg\forall x\varphi \to \exists x\neg\varphi$.

3 (e) $(\alpha\&\forall x\beta) \to \forall x(\alpha\&\beta)$, если x не входит свободно в α

Используем теорему о дедукции
$\alpha\&\forall x\beta \vdash \forall x(\alpha\&\beta)$

1. $(\alpha\&\forall x\beta)$ (допущение)
2. $(\alpha\&\forall x\beta) \to \forall x\beta$ (схема аксиом 5)
3. $\forall x\beta$ (MP 1, 2)
4. $\forall x\beta \to \beta$ (схема аксиом 11)
5. β (MP 3, 4)
6. $(\alpha\&\forall x\beta) \to \alpha$ (схема аксиом 4)
7. α (MP 1, 6)

8. $\alpha \to \beta \to (\alpha \& \beta)$ (схема аксиом 3)
9. $\alpha \& \beta$ (MP 5 и 7 с 8)
10. $(\alpha \& \beta) \to \alpha \to (\alpha \& \beta)$ (схема аксиом 1)
11. $\alpha \to (\alpha \& \beta)$ (MP 9, 10)
12. $\alpha \to \forall x(\alpha \& \beta)$ (правило вывода, 11)
13. $\forall x(\alpha \& \beta)$ (MP 7, 12)