

(e) $(\alpha \& \forall x \beta) \rightarrow \forall x(\alpha \& \beta)$, если x не входит свободно в α .

Используем теорему о дедукции

$\alpha \& \forall x \beta \vdash \forall x(\alpha \& \beta)$

1. $(\alpha \& \forall x \beta)$ (допущение)
2. $(\alpha \& \forall x \beta) \rightarrow \forall x \beta$ (схема аксиом 5)
3. $\forall x \beta$ (MP 1, 2)
4. $\forall x \beta \rightarrow \beta$ (схема аксиом 11)
5. β (MP 3, 4)
6. $(\alpha \& \forall x \beta) \rightarrow \alpha$ (схема аксиом 4)
7. α (MP 1, 6)
8. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow (\alpha \& \beta)$ (схема аксиом 3)
9. $\alpha \& \beta$ (MP 5 и 7 с 8)
10. $(\alpha \& \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow (\alpha \& \beta)$ (схема аксиом 1)
11. $\alpha \rightarrow (\alpha \& \beta)$ (MP 9, 10)
12. $\alpha \rightarrow \forall x(\alpha \& \beta)$ (правило вывода, 11)
13. $\forall x(\alpha \& \beta)$ (MP 7, 12)