1 Леммы

1.1 (b) $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ (и в интуиционистском, и в классическом, т. к. не используется схема аксиом 10)

1. $(\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$ (схема аксиом 9)
2. $\varphi \to \neg\varphi \to \varphi$ (схема аксиом 1)
3. $\neg\varphi \to \varphi$ (MP 1, 2)
4. $\neg\varphi \to \neg\varphi$
5. $\neg\neg\varphi$ (два раза MP)

1.2 $\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$

1. $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ (лемма 1)
2. $\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$ (лемма о контрапозиции)

1.3 $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to \neg\neg(\alpha \to \beta)$

$\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta, \neg(\alpha \to \beta) \vdash \neg\beta, \neg\neg\beta$:

1. $\beta \to \alpha \to \beta$ (схема аксиом 1)
2. $\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$ (лемма о контрапозиции)
3. $\neg(\alpha \to \beta)$ (допущение)
4. $\neg\beta$ (MP 2, 3)
5. $(\neg\alpha \to \alpha \to \beta) \to \neg(\alpha \to \beta) \to \neg\neg\alpha$ (лемма о контрапозиции)
6. $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$ (схема аксиом 10)
7. $\neg\alpha \to \alpha \to \beta$ (очевидно по теореме о дедукции)
8. $\neg\neg\alpha$ (два раза MP)
9. $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$ (допущение)
10. $\neg\neg\beta$ (MP)

По теореме о дедукции $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta, \neg(\alpha \to \beta) \to \neg\neg\beta$.

Докажем $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta \vdash \neg\neg(\alpha \to \beta)$

1. $(\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta) \to (\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\neg\beta) \to \neg\neg(\alpha \to \beta)$ (схема аксиом 9)
2. $\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$
3. $\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\neg\beta$ (2, 3 доказаны выше)
4. $\neg\neg(\alpha \to \beta)$ (два раза MP)

По теореме о дедукции получаем $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to \neg\neg(\alpha \to \beta)$.

1.4 (a) $\neg\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi)$

1. $\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$ (лемма 2)
2. $(\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \neg\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi)$ (лемма 3)
3. $\neg\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi)$ (MP 1, 2)

1.5 $\varphi \to \psi \vdash \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$

1. $\varphi \to \psi$ (допущение)
2. $\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$ (дважды применили лемму о контрапозиции к 1)

1.6 (c) $\neg\neg\varphi, \neg\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg\neg\psi$

1. $(\varphi \to \psi) \to \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$ (лемма 5)
2. $\neg\neg\varphi \to (\varphi \to \psi) \to \neg\neg\psi$
3. $\neg\neg\varphi$ (допущение)
4. $(\varphi \to \psi) \to \neg\neg\psi$ (MP 2, 3)
5. $\neg\neg(\varphi \to \psi) \to \neg\neg\neg\neg\psi$ (лемма 5)
6. $\neg\neg(\varphi \to \psi)$ (допущение)
7. $\neg\neg\neg\neg\psi$ (MP 5, 6)
8. $\neg\neg\neg\neg\psi \to \neg\neg\psi$ (лемма 2)
9. $\neg\neg\psi$ (MP 7, 8)

1.7 $\vdash_C \varphi \to \neg\varphi \to \psi$

Покажем, что $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$

1. φ (допущение)
2. $\neg\varphi$ (допущение)
3. $\varphi \to \neg\psi \to \varphi$ (схема аксиом 1)
4. $\neg\varphi \to \neg\psi \to \neg\varphi$ (схема аксиом 1)
5. $\neg\psi \to \varphi$ (MP 1, 3)
6. $\neg\psi \to \neg\varphi$ (MP 2, 4)
7. $(\neg\psi \to \varphi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\psi$ (схема аксиом 9)
8. $\neg\neg\psi$ (два раза MP)
9. $\neg\neg\psi \to \psi$ (схема аксиом 10)
10. ψ (MP 8, 9)

2 Теорема Гливенко

$\vdash_C \varphi \Leftrightarrow \vdash_I \neg\neg\varphi$.

$\Rightarrow$) Пусть доказано $\vdash_C \varphi$. Будем строить из доказательства φ в классической логике доказательство $\neg\neg\varphi$ в интуиционистской: вместо каждого пункта доказательства α_i вставим $\neg\neg\alpha_i$. Рассмотрим получившееся доказательство. Если в классической логике на i-ой строчке была не 10 схема аксиом, воспользуемся леммой 1 (b), если это была схема 10, вставим перед этой строкой доказательство леммы 4 (a), Если же строка была получена по правилу MP, то по лемме 6 в построенном доказательстве этот переход также будет верным.

$\Leftarrow$) Пусть доказано $\vdash_I \neg\neg\varphi$. Построим из этого доказательство в классической логике. Рассмотрим все строчки доказательства. Все схемы аксиом, кроме 10, совпадают, оставляем как есть. Вместо 10 схемы ставим доказательство, как в лемме 7. Строки, полученные по MP тоже оставляем. В конец доказательства добавляем схему 10 из классической логики $\neg\neg\varphi \to \varphi$ и по MP получаем φ.