

## 1 Лемма

$$(\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

Доказательство: по теореме о дедукции  $(\varphi \rightarrow \neg\neg\psi), \varphi \vdash \psi$

1.  $\neg\neg\psi \rightarrow \psi$  (схема аксиом 10)
2.  $\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$  (допущение)
3.  $\varphi$  (допущение)
4.  $\neg\neg\psi$  (MP 2, 3)
5.  $\psi$  (MP 1, 4)

## 2 Лемма

### 2.1 Доказательство $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$

1.  $\varphi \rightarrow \neg\varphi \rightarrow \varphi$  (схема аксиом 1)
2.  $\varphi$  (допущение)
3.  $\neg\varphi \rightarrow \varphi$  (MP 1, 2)
4.  $\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$  (лемма)
5.  $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\neg\varphi$  (схема аксиом 9)
6.  $\neg\neg\varphi$  (MP 6 сначала с 3, потом с 4)

По теореме о дедукции выводится  $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

### 2.2 $(\neg\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

Доказательство: по теореме о дедукции  $(\neg\neg\varphi \rightarrow \psi), \varphi \vdash \psi$

1.  $\varphi$  (допущение)
2.  $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$  (доказано в 2.1)
3.  $\neg\neg\varphi$  (MP 1, 2)
4.  $\neg\neg\varphi \rightarrow \psi$  (допущение)
5.  $\psi$  (MP 3, 4)

### 3 (a) $\neg\forall x\varphi \rightarrow \exists x\neg\varphi$

Сначала докажем, что  $\neg\exists x\neg\varphi \rightarrow \varphi$

1.  $\neg\varphi \rightarrow \exists x\neg\varphi$  (схема аксиом 12)
2.  $\neg\exists x\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$  (по лемме о контрапозиции)
3.  $\neg\exists x\neg\varphi \rightarrow \varphi$  (по лемме 1)

Применяя правило вывода, получаем  $\neg\exists x\neg\varphi \rightarrow \forall x\varphi$ .

По лемме о контрапозиции  $\neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\neg\exists x\neg\varphi$ .

И по лемме 1 снимаем двойное отрицание  $\neg\forall x\varphi \rightarrow \exists x\neg\varphi$ .

### 4 (b) $\neg\exists x\varphi \rightarrow \forall x\neg\varphi$

1.  $\varphi \rightarrow \exists x\varphi$  (схема аксиом 12)
2.  $\neg\exists x\varphi \rightarrow \neg\varphi$  (лемма о контрапозиции)
3.  $\neg\exists x\varphi \rightarrow \forall x\neg\varphi$  (правило вывода для  $\forall$ )

### 5 (c) $\forall x\neg\varphi \rightarrow \neg\exists x\varphi$

1.  $\forall x\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$  (схема аксиом 11)
2.  $\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi$  (лемма о контрапозиции)
3.  $\varphi \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi$  (лемма 2.2)
4.  $\exists x\varphi \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi$  (правило вывода для  $\exists$ )
5.  $\neg\neg\forall x\neg\varphi \rightarrow \neg\exists x\varphi$  (лемма о контрапозиции)
6.  $\forall x\neg\varphi \rightarrow \neg\exists x\varphi$  (лемма 2.2)

### 6 (d) $\exists x\neg\varphi \rightarrow \neg\forall x\varphi$

1.  $\forall x\varphi \rightarrow \varphi$  (схема аксиом 11)
2.  $\neg\varphi \rightarrow \neg\forall x\varphi$  (лемма о контрапозиции)
3.  $\exists x\neg\varphi \rightarrow \neg\forall x\varphi$  (правило вывода для  $\exists$ )

### 7 (e) $(\alpha \& \forall x\beta) \rightarrow \forall x(\alpha \& \beta)$ , если $x$ не входит свободно в $\alpha$

Используем теорему о дедукции

$\alpha \& \forall x\beta \vdash \forall x(\alpha \& \beta)$

1.  $(\alpha \& \forall x\beta)$  (допущение)
2.  $(\alpha \& \forall x\beta) \rightarrow \forall x\beta$  (схема аксиом 5)

3.  $\forall x\beta$  (MP 1, 2)
4.  $\forall x\beta \rightarrow \beta$  (схема аксиом 11)
5.  $\beta$  (MP 3, 4)
6.  $(\alpha \& \forall x\beta) \rightarrow \alpha$  (схема аксиом 4)
7.  $\alpha$  (MP 1, 6)
8.  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow (\alpha \& \beta)$  (схема аксиом 3)
9.  $\alpha \& \beta$  (MP 5 и 7 с 8)
10.  $(\alpha \& \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow (\alpha \& \beta)$  (схема аксиом 1)
11.  $\alpha \rightarrow (\alpha \& \beta)$  (MP 9, 10)
12.  $\alpha \rightarrow \forall x(\alpha \& \beta)$  (правило вывода для  $\forall$ , 11)
13.  $\forall x(\alpha \& \beta)$  (MP 7, 12)