

Возьмем формулу $(A \rightarrow P(y)) \rightarrow (A \rightarrow \forall xP(x))$

Она не общезначима: пусть не общезначима $P(y)$, и $\exists xP(x)$ истинна. Возьмем в качестве оценки A истину, для y — такое значение, на котором $P(y)$ истинна.

При такой оценке формула ложна, при этом ее можно вывести, если игнорировать ограничения в теореме о дедукции.

Введем допущение $(A \rightarrow P(y))$.

1. $\forall yP(y) \rightarrow P(x)$ (схема аксиом 11)
2. $\forall yP(y) \rightarrow \forall xP(x)$ (правило вывода, 1)
3. $A \rightarrow P(y)$ (допущение)
4. $A \rightarrow \forall yP(y)$ (правило вывода, 3)
5. $(\forall yP(y) \rightarrow \forall xP(x)) \rightarrow (A \rightarrow (\forall yP(y) \rightarrow \forall xP(x)))$ (схема аксиом 1)
6. $A \rightarrow (\forall yP(y) \rightarrow \forall xP(x))$ (MP 3, 5)
7. $(A \rightarrow \forall yP(y)) \rightarrow (A \rightarrow \forall yP(y) \rightarrow \forall xP(x)) \rightarrow (A \rightarrow \forall xP(x))$ (схема аксиом 2)
8. $(A \rightarrow \forall yP(y) \rightarrow \forall xP(x)) \rightarrow (A \rightarrow \forall xP(x))$ (MP 4, 7)
9. $A \rightarrow \forall xP(x)$ (MP 6, 8)

В этом выводе в 4 пункте используется правило для квантора, использующее свободное вхождение y .