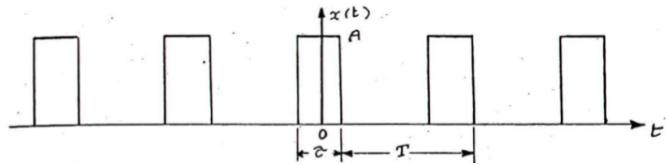


Calcolare e disegnare gli spettri di ampiezza e di fase di una successione periodica di impulsi rettangolari di ampiezza A, durata τ e periodo T (p. 2.13)



Si osservi che si tratta di una funzione discreta nei valori e tempo-continua
I coefficienti c_n della forma esponenziale dello sviluppo di Fourier sono dati da:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{I}{T} \frac{\sin \frac{n\omega_0 \tau}{2}}{\frac{n\omega_0 \tau}{2}} \quad (I = A\tau)$$

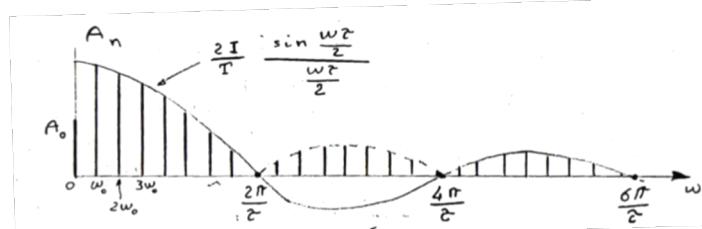
Ricordando che:

$$c_0 = A_0 = \frac{1}{2} a_0$$

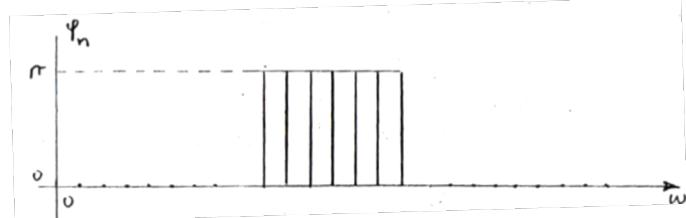
$$2c_n = A_n e^{-j\varphi_n} = a_n - jb_n \quad n \geq 1$$

Gli spettri di ampiezza e di fase sono espressi da:

$$A_n = \begin{cases} \frac{I}{T} & n = 0 \\ \frac{2I}{T} \left| \frac{\sin \frac{n\omega_0 \tau}{2}}{\frac{n\omega_0 \tau}{2}} \right| & n \geq 1 \end{cases}$$

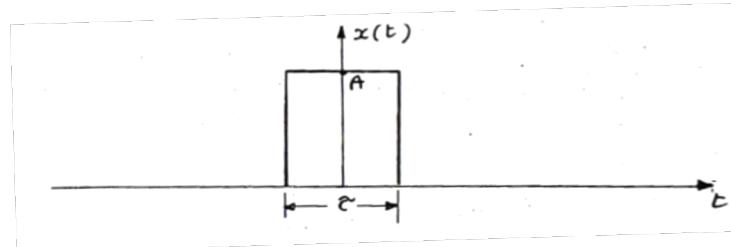


$$\varphi_n = \begin{cases} 0 & c_n > 0 \\ \pi & c_n < 0 \end{cases} \quad n \geq 1$$



Si osservi che, al diminuire della durata τ degli impulsi, aumenta il numero delle armoniche significative

Calcolare e disegnare gli spettri di ampiezza e fase di un impulso rettangolare di ampiezza A e durata τ (p. 2.14)



Si osservi che si tratta di una funzione discreta nei valori e tempo-continua di tipo aperiodico
La sua trasformata di Fourier è espressa da:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = I \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \quad (I = A\tau)$$

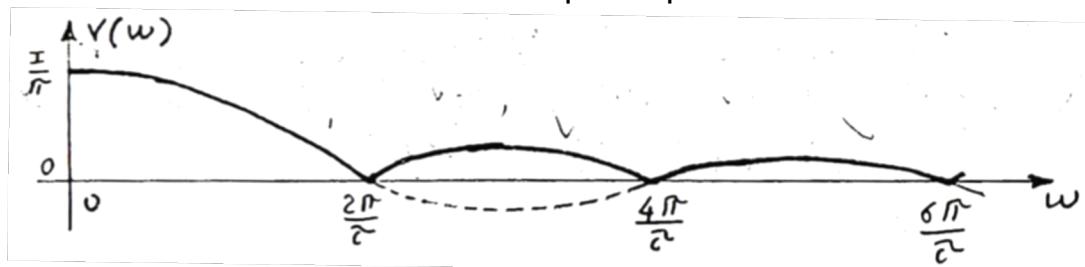
Ricordando che:

$$V(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\pi}, \quad \omega \geq 0$$

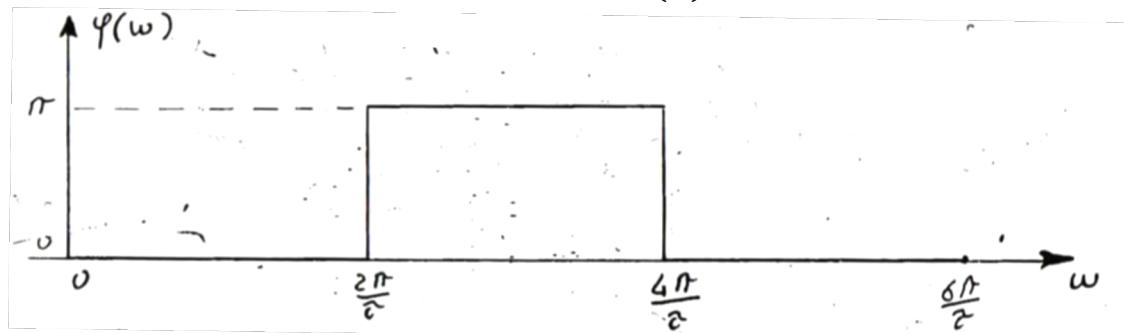
$$\varphi(\omega) = -\arg X(\omega), \quad \omega \geq 0$$

Gli spettri di ampiezza e fase sono dati da:

$$V(\omega) = \frac{I}{\pi} \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right|$$



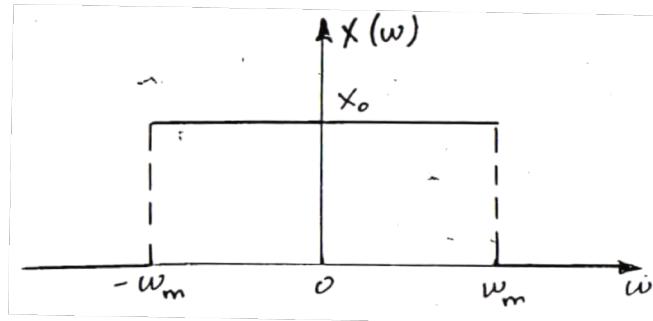
$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & X(\omega) > 0 \\ \pi & X(\omega) < 0 \end{cases}$$



Calcolare l'antitrasformata della funzione:

$$X(\omega) = \begin{cases} X_0 & |\omega| \leq \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} \quad (X_0 \text{ reale})$$

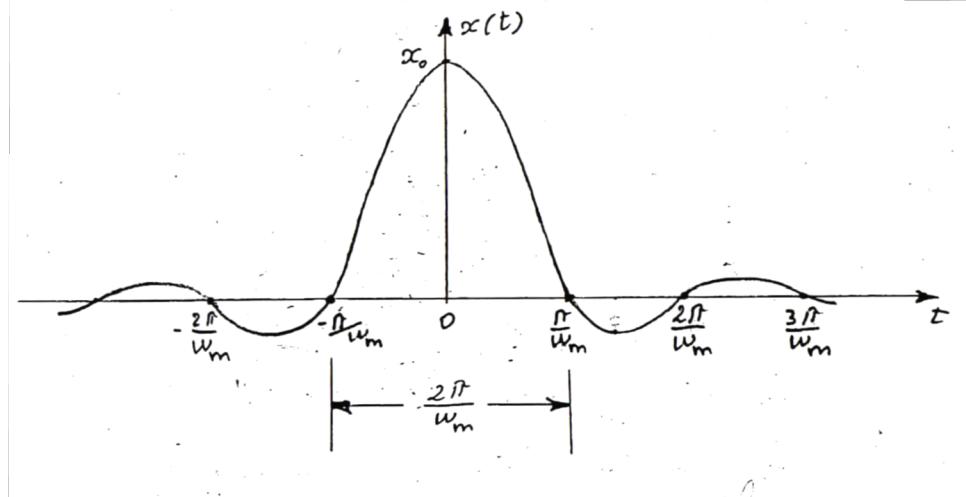
(p. 2.19)



Risulta:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{X_0}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{X_0}{2\pi} \left[\frac{e^{j\omega t}}{jt} \right]_{-\omega_m}^{\omega_m} = \frac{X_0}{2\pi} \frac{e^{j\omega_m t} - e^{-j\omega_m t}}{jt} = \frac{X_0 \omega_m}{\pi} \frac{e^{j\omega_m t} - e^{-j\omega_m t}}{2j\omega_m t} = x_0 \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t} \end{aligned}$$

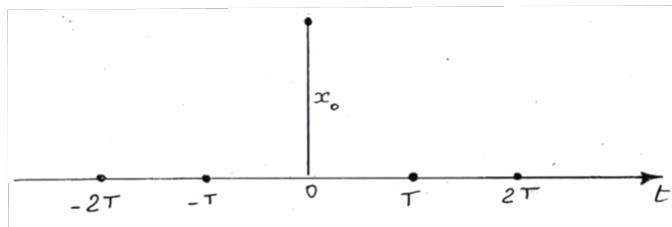
$$\text{con } x_0 = \frac{X_0 \omega_m}{\pi}$$



Esprimere nel dominio delle frequenze la condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $x(t)$ assuma i valori

$$x_n = x(nT) = \begin{cases} x_0 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

(p. 2.35)



La trasformata secondo Fourier della serie temporale $\{x_n\}$ i cui termini sono dati dalla x_n vale:

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-jn\omega T} = x_0$$

In virtù del fatto che:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega + k\omega_0)$$

Risulta:

$$x_0 = X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\omega + k\frac{2\pi}{T}\right)$$

Da cui:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\omega + k\frac{2\pi}{T}\right) \equiv x_0 T \quad *$$

Per l'unicità della trasformata quest'ultima rappresenta la condizione necessaria e sufficiente cercata

Poiché il primo membro della $*$ è funzione periodica di ω con periodo $\frac{2\pi}{T}$, basta verificare detta condizione nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$ o, più semplicemente, ricordando che $X(-\omega) = X^*(\omega)$, nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{T}\right)$

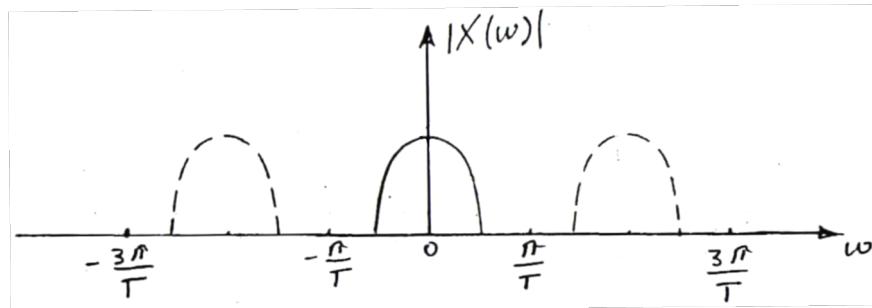
A partire da questo risultato discendono le seguenti considerazioni:

I - Se consideriamo generiche funzioni con banda

$$B_\omega < \frac{\pi}{T}$$

La $*$ non può mai essere verificata

Infatti, ripetendo periodicamente la trasformata $X(\omega)$ con periodo $\frac{2\pi}{T}$, restano sempre intervalli dell'asse ω in cui tale ripetizione è identicamente 0

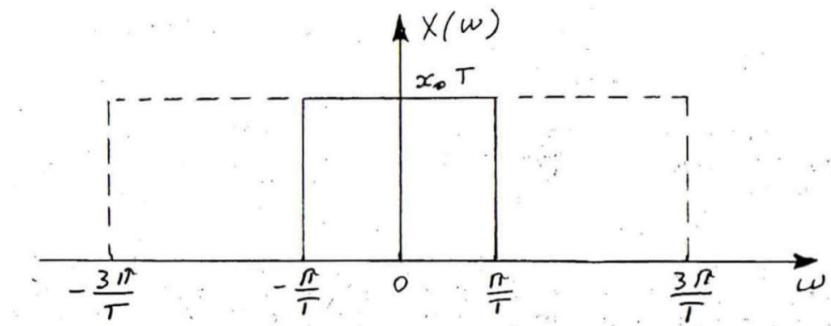


II - Se consideriamo generiche funzioni con banda

$$B_\omega = \frac{\pi}{T}$$

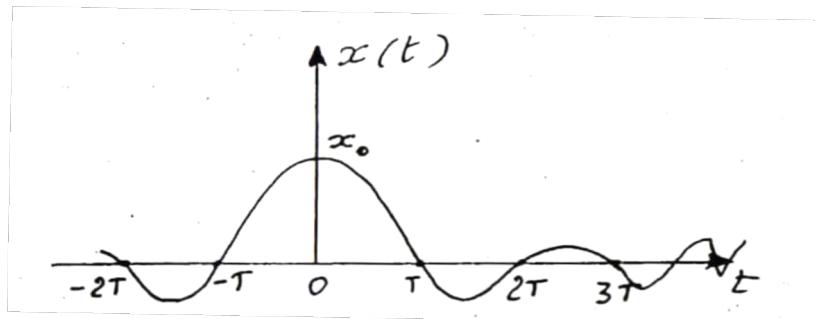
La \star può essere verificata se e solo se

$$X(\omega) = \begin{cases} x_0 T, & |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$



La corrispondente funzione $x(t)$ è:

$$x(t) = x_0 \frac{\sin \pi \frac{t}{T}}{\pi \frac{t}{T}}$$

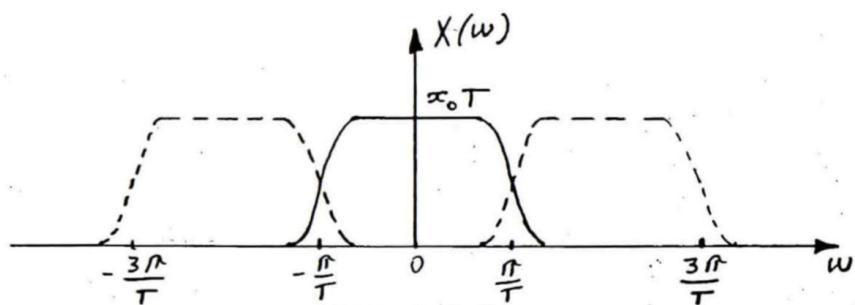


III - Se consideriamo generiche funzioni con banda

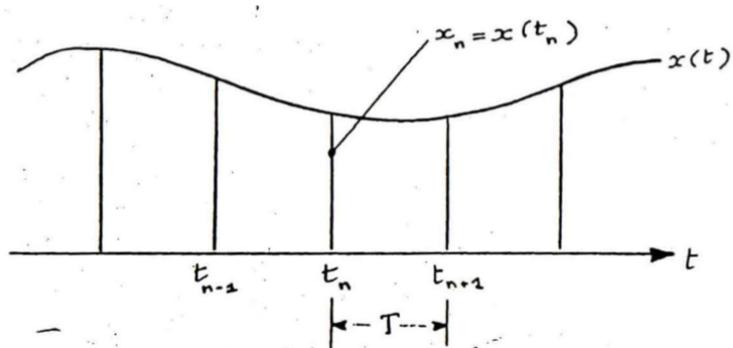
$$B_\omega > \frac{\pi}{T}$$

È possibile verificare la \star in infiniti modi

Fra questi rivestono particolare importanza pratica le trasformate $X(\omega)$ che si ottengono dalla \diamond sostituendo le discontinuità con raccordi continui di tipo antisimmetrico



Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi (p. 2.40)



I valori $x_n = x(t_n)$ sono detti valori campionati, gli istanti di "lettura" t_n sono detti istanti di campionamento, l'intervallo costante T che li separa è detto intervallo di campionamento e il suo inverso $f_0 = \frac{1}{T}$ è la frequenza di campionamento

Senza perdere la generalità possiamo porre $t_n = nT$ (a tal fine basta assumere l'origine dell'asse dei tempi in uno degli istanti di campionamento); la successione dei valori campionati costituisce quindi la serie temporale $x_n = x(nT) \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Poniamoci il problema se e quando la conoscenza dei soli valori campionati consente di ricostruire l'intera forma d'onda

Se non formuliamo alcuna condizione, la risposta è evidentemente negativa in quanto esistono infinite funzioni che negli istanti nT assumano i valori x_n

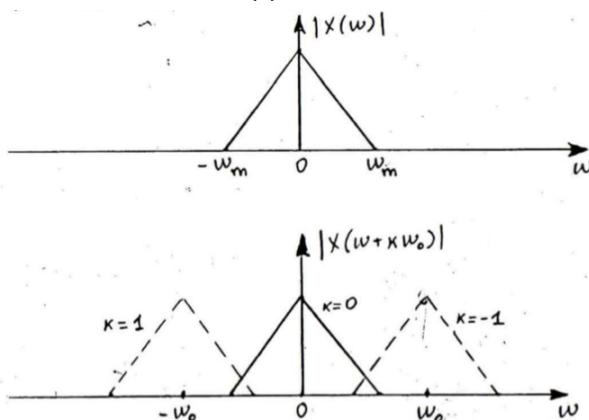
Osserviamo tuttavia che in virtù di

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} X(\omega + k\omega_0)$$

La conoscenza dei valori campionati equivale a quella della ripetizione periodica della trasformata $X(\omega)$ di $x(t)$ con periodo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$, che rappresenta la pulsazione corrispondente alla frequenza f_0 di campionamento

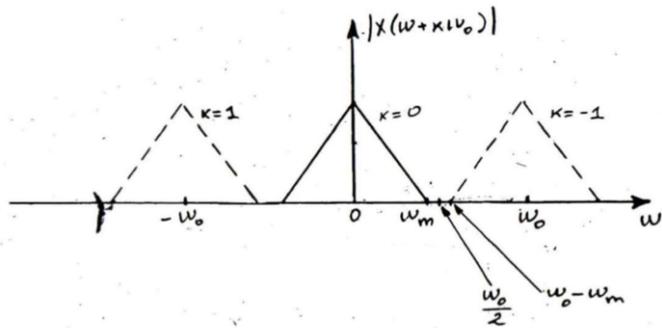
La trasformata $X(\omega)$ ed altri termini della serie A secondo membro, sono rappresentati, in modulo, in figura

Abbiamo fatto riferimento a una funzione passa-basso ed abbiamo indicato con ω_m la massima pulsazione a cui è apprezzabile lo spettro di $x(t)$ (la corrispondente frequenza è $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$)



Come tale figura pone in chiara evidenza, la conoscenza della ripetizione periodica $X_s(\omega)$ non consente in generale di risalire a $X(\omega)$ e quindi a $x(t)$

È sufficiente però che si presenti la circostanza mostrata in figura, nella quale i diversi termini occupano bande distinte, per poter risalire da $X_s(\omega)$ a $X(\omega)$



La separazione dei termini appena mostrata avviene quando

$$\omega_m \leq \omega_0 - \omega_m \Rightarrow \omega_0 \geq 2\omega_m$$

O con riferimento alle frequenze

$$f_0 \geq 2f_m$$

Che equivale a

$$T \leq \frac{1}{2f_m}$$

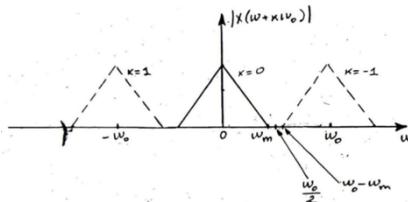
In conclusione, quando è verificata $\omega_0 \geq 2\omega_m$, cioè la frequenza di campionamento è maggiore del doppio della massima frequenza di $x(t)$, la conoscenza dei valori campionati individua in maniera univoca la funzione originaria $x(t)$

Notiamo la perfetta analogia fra il teorema del campionamento nel dominio dei tempi, ora discusso, e quello del campionamento nel dominio delle frequenze: sono semplicemente scambiati i ruoli delle variabili tempo e frequenza (si confrontino $T \geq T_d$ $f_0 \geq 2f_m$)

Sotto la condizione sufficiente $f_0 \geq 2f_m$ vogliamo ora esprimere $x(t)$ in funzione dei suoi valori campionati $x(nT)$

A tal fine, ricordando che:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} k X(\omega + k\omega_0)$$



E osservando la seguente figura

Possiamo affermare che $X(\omega)$ coincide con $T X_s(\omega)$ in ogni intervallo $(-\Omega, \Omega)$ con

$$\omega_m \leq \Omega \leq \omega_0 - \omega_m$$

Scegliamo $\Omega = \frac{\omega_0}{2}$, punto centrale di $(\omega_m, \omega_0 - \omega_m)$

Scriviamo dunque:

$$X(\omega) = \begin{cases} TX_s(\omega) & |\omega| < \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$F^{-1}[X(\omega)] = x(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_s(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ricordando che:

$$X_s(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} n x_n e^{-jn\omega T}$$

Abbiamo:

$$x(t) = \frac{T}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} n x_n \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{-jn\omega T} e^{j\omega t} d\omega = \sum_{-\infty}^{\infty} n x_n \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - nT)}{\frac{\pi}{T}(t - nT)}$$

In conclusione, posto:

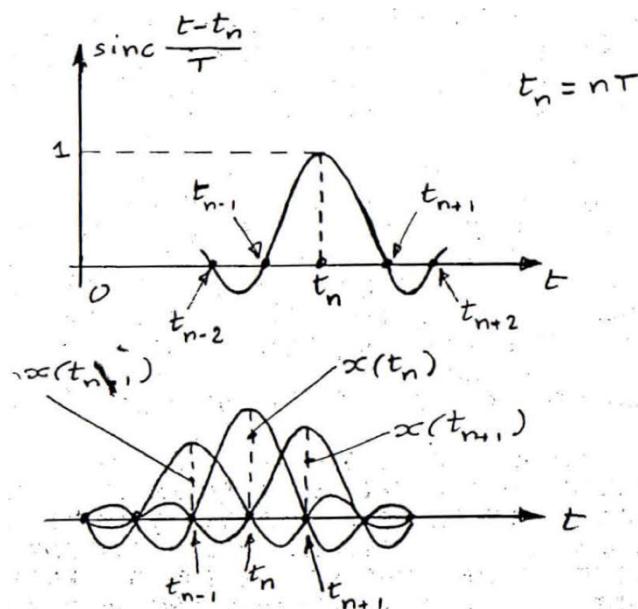
$$\text{sinc } z = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$$

Risulta:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} n x(nT) \text{sinc} \frac{t - nT}{T} \quad *$$

Funzione del dominio del tempo come combinazione di sinusoidi ortogonali i cui coefficienti sono i valori campionati

Interpretazione grafica:



Possiamo anche scrivere:

$$F \left[\text{sinc} \frac{t - nT}{T} \right] = \begin{cases} T e^{-j\omega T} & |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ossia le funzioni $\text{sinc} \frac{t - nT}{T}$ hanno banda $(0, \frac{\pi}{T})$

La $*$ è suscettibile di un'interessante interpretazione derivante dal fatto che le funzioni ora citate sono fra loro ortogonali

Infatti, in virtù del teorema di Parseval generalizzato

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega$$

Otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc} \frac{t - nT}{T} \text{sinc} \frac{t - mT}{T} dt = \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{-j\omega nT} e^{-j\omega mT} d\omega = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T & m = n \end{cases}$$

Dunque la $*$ rappresenta uno sviluppo di $x(t)$ in serie di funzioni ortogonali i cui coefficienti sono gli stessi valori campionati $x(nT)$

Tale interpretazione è resa possibile dalla scelta $\Omega = \frac{\omega_0}{2}$

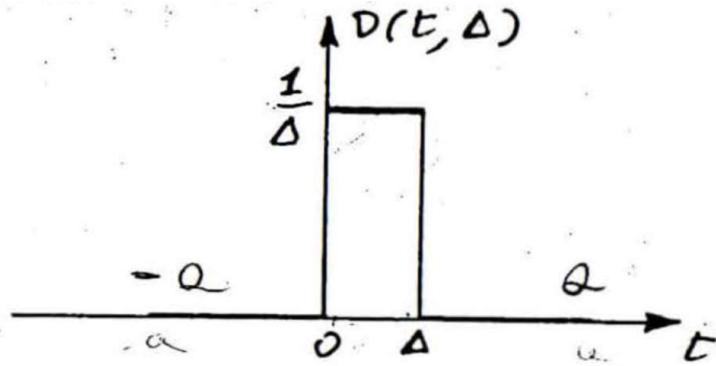
È importante sottolineare che il teorema del campionamento nel dominio dei tempi consente di sostituire ad una funzione tempo-continua una serie temporale, conservando tutto il contenuto informativo originario

L'operazione di campionamento, eseguita nel rispetto delle ipotesi di tale teorema, costituisce il primo passo per la conversione di un segnale analogico in forma numerica

Sottolineiamo che, mentre con l'analisi di Fourier una funzione è rappresentata mediante i suoi spettri di ampiezza e fase definiti nel dominio delle pulsazioni, la stessa funzione viene ora rappresentata tramite i suoi valori campionati, presi nel dominio dei tempi, e quindi operando esclusivamente in tale dominio

Definire la funzione impulsiva e calcolarne la trasformata secondo Fourier (p. 2.56)

Consideriamo l'impulso rappresentato in figura avente intensità unitaria, ed una funzione $x(t)$ continua in $t = a$



Calcoliamo:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) D(a-t, \Delta) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(a-t) D(t, \Delta) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} x(a-t) dt = x(a)$$

In altri termini, chiamando τ la variabile di integrazione e ponendo $a = t$ otteniamo:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) D(t-\tau, \Delta) d\tau \quad \diamond$$

O più semplicemente, in forma simbolica:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t) * \delta(t) \quad \star$$

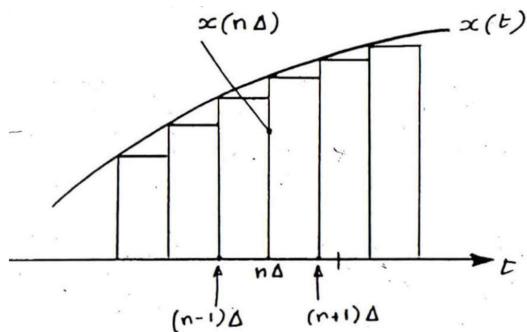
Questa coppia di relazioni definisce l'operatore di Dirac $\delta(t)$ o funzione impulsiva

Il significato alla \star è dato dalla \diamond , nella quale non è lecito scambiare l'ordine delle operazioni: prima l'integrazione, poi il passaggio al limite; infatti tale scambio darebbe 0

La \diamond è suscettibile di una interessante interpretazione

A tal fine osserviamo che, per Δ sufficientemente piccolo, essa può essere approssimata come segue:

$$x(t) \cong \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) D(t-\tau, \Delta) d\tau \cong \sum_{-\infty}^{\infty} x(n\Delta) D(t-n\Delta, \Delta) \Delta$$



Questa relazione, rappresentata in figura, esprime $x(t)$ come una somma di impulsi rettangolari di durata Δ , ampiezza $x(n\Delta)$ [e quindi intensità $x(n\Delta)\Delta$], che si succedono con intervallo Δ . Tale successione di impulsi approssima tanto meglio l'andamento di $x(t)$ quanto minore è Δ , come del resto è indicato dalla \diamond .

Facendo riferimento alla \star , che rappresenta in forma simbolica la \diamond , possiamo formalmente dire che essa esprime la funzione $x(t)$ come "somma" di funzioni impulsive, la generica delle quali è applicata all'istante τ ed ha intensità infinitesima $x(\tau)d\tau$

Trasformata secondo Fourier della funzione impulsiva

Dalla \star , assumendo $x(t) = e^{j\omega t}$ e $t = 0$ si ottiene:

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} \delta(-\tau) d\tau = e^{j\omega \cdot 0}$$

Ponendo $\tau = -t$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

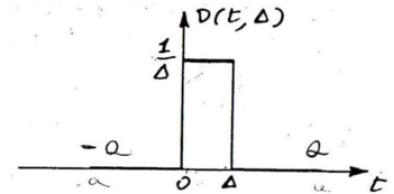
Quest'ultima ci consente di dare una definizione formale di trasformata secondo Fourier della funzione impulsiva, che risulta identicamente uguale a 1

Per meglio interpretare questo risultato, ricordiamo la \diamond e scriviamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} D(t, \Delta) e^{-j\omega t} dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} F[D(t, \Delta)]$$

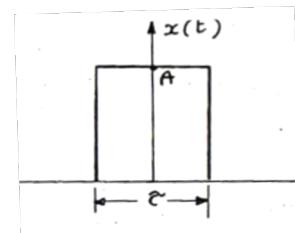
Con riferimento alla funzione ausiliaria rappresentata in figura, ricordando che

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = A\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$$



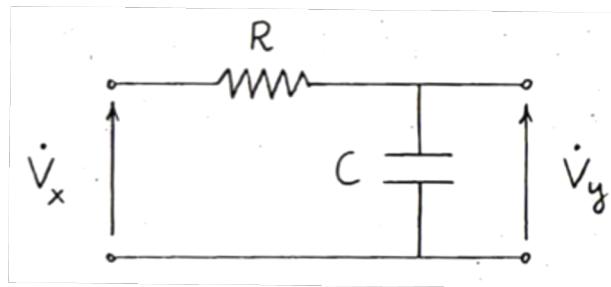
e osservando che l'impulso $D(t, \Delta)$ è centrato nell'istante $\frac{\Delta}{2}$ è:

$$F[D(t, \Delta)] = \frac{\sin \frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}} e^{-j\frac{\omega\Delta}{2}}$$



Il cui limite per $\Delta \rightarrow 0$ vale 1

Funzione di trasferimento e caratteristiche di ampiezza e fase di una rete RC (p. 3.11)

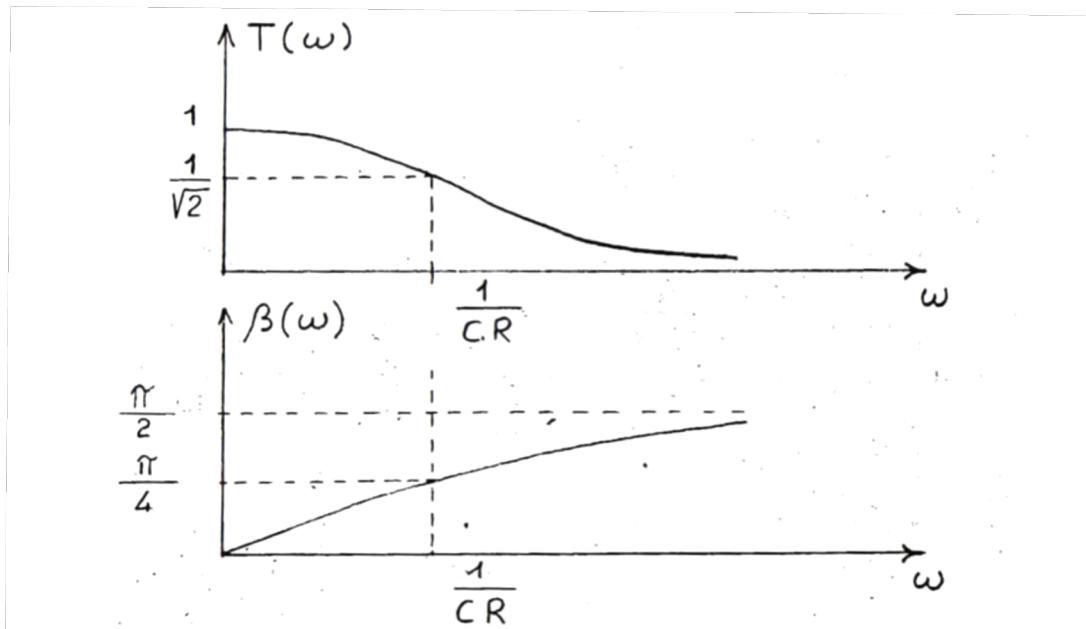


Risulta:

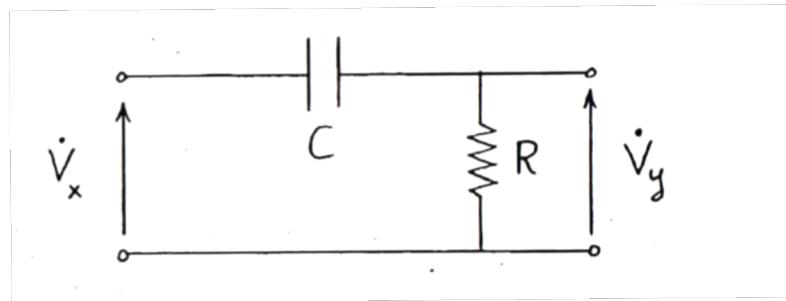
$$H(\omega) = \frac{\dot{V}_y}{\dot{V}_x} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

$$\beta(\omega) = \arg(1 + j\omega CR) = \arctg (\omega CR) = \text{fase di } H(\omega)$$



Funzione di trasferimento e caratteristiche di ampiezza e fase di una rete CR (p. 3.12)

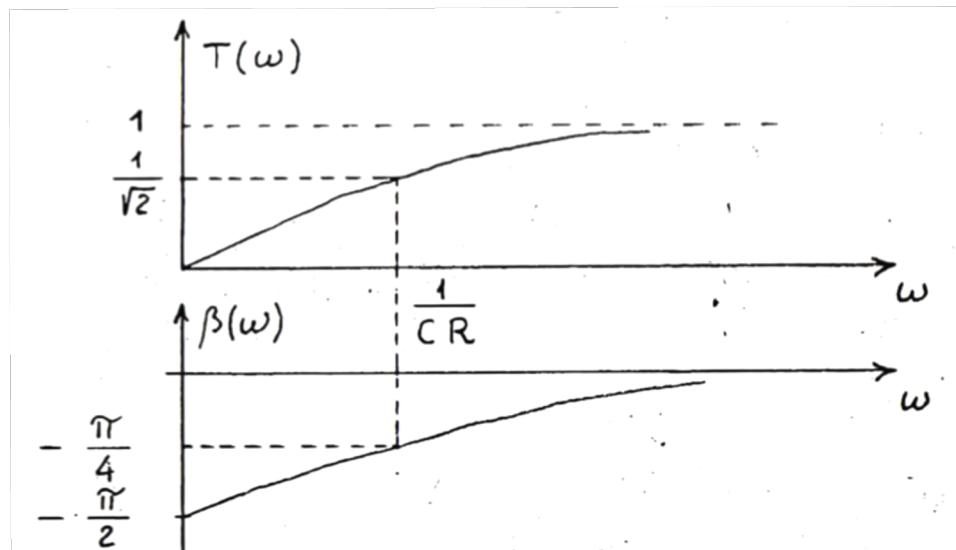


Risulta:

$$H(\omega) = \frac{\dot{V}_y}{\dot{V}_x} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$

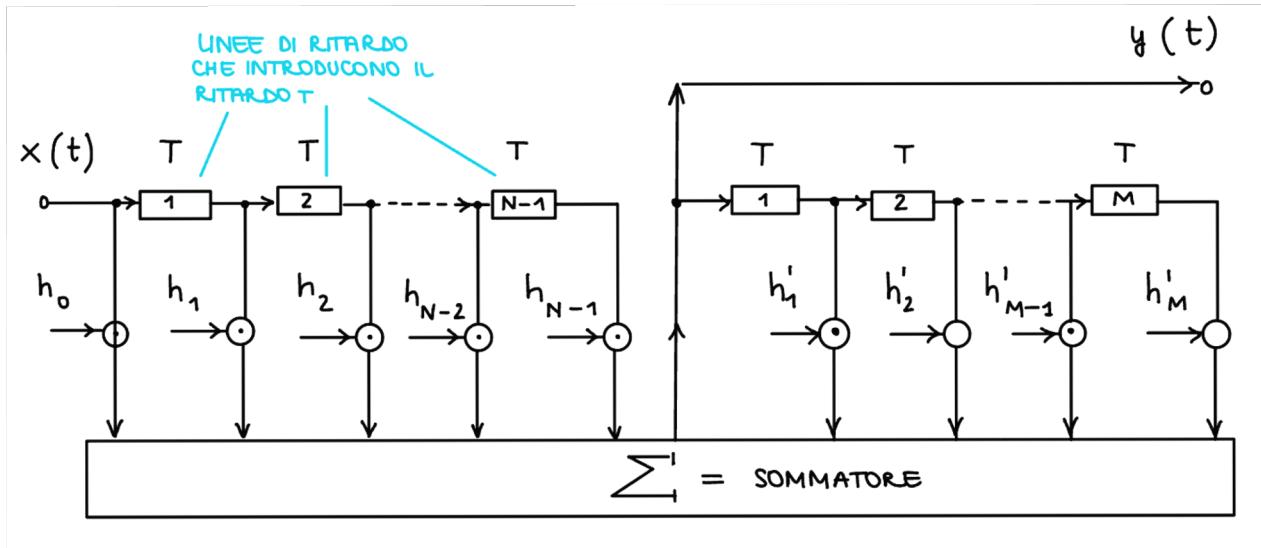
$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

$$\beta(\omega) = \arg(1 + j\omega CR) - \arg(j\omega CR) = \arctg(\omega CR) - \frac{\pi}{2} = \text{fase di } H(\omega)$$



Disegnare lo schema a blocchi di un filtro trasversale e la relativa funzione di trasferimento (p. 3.20)

Filtro ricorrente:



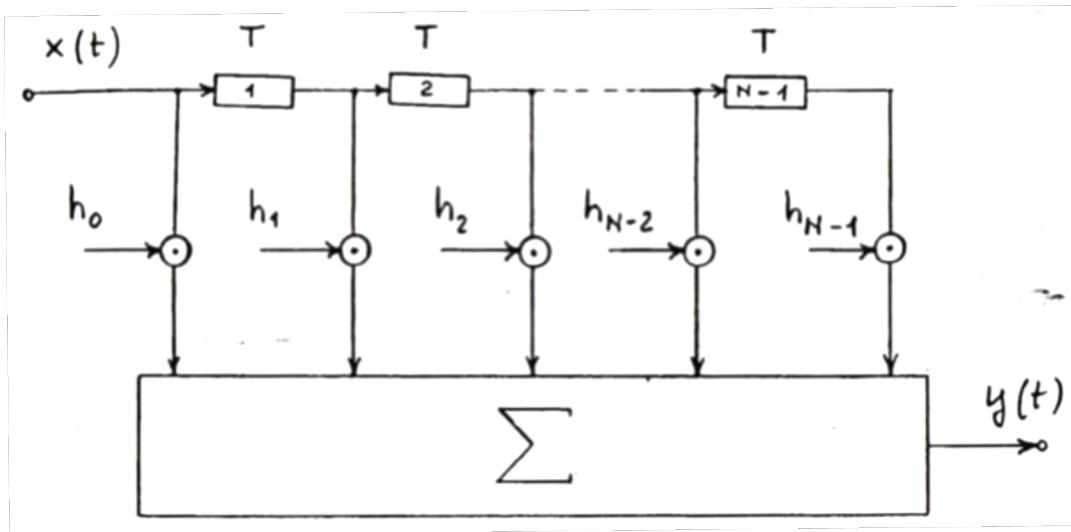
$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(t - kT) + \sum_{k=1}^M h'_k y(t - kT)$$

$$Y(\omega) = X(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-jk\omega T} + Y(\omega) \sum_{k=1}^M h'_k e^{-jk\omega T}$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-jk\omega T}}{1 - \sum_{k=1}^M h'_k e^{-jk\omega T}}$$

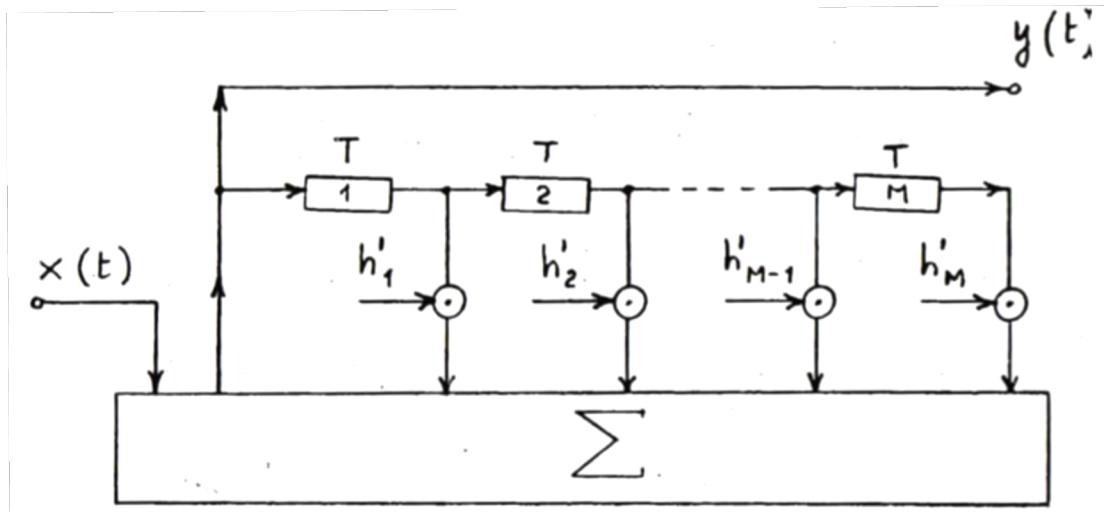
$$\begin{aligned} X(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-jk\omega T} &= Y(\omega) - Y(\omega) \sum_{k=1}^M h'_k e^{-jk\omega T} \\ \Rightarrow X(\omega) &= \frac{Y(\omega) [1 - \sum_{k=1}^M h'_k e^{-jk\omega T}]}{\sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-jk\omega T}} \\ \Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} &= \frac{Y(\omega)}{\frac{Y(\omega) [1 - \sum_{k=1}^M h'_k e^{-jk\omega T}]}{\sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-jk\omega T}}} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-jk\omega T}}{1 - \sum_{k=1}^M h'_k e^{-jk\omega T}} \end{aligned}$$

Filtro trasversale (h'_k nulli):



$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-jk\omega T}$$

Filtro puramente ricorrente (h_k nulli):



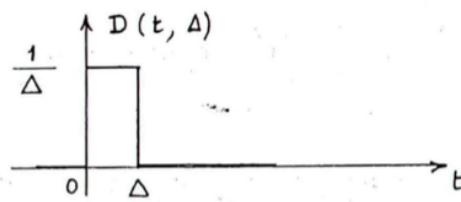
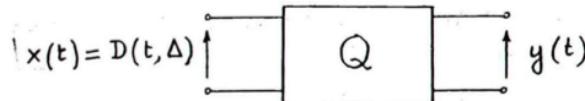
$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^M h'_k e^{-jk\omega T}}$$

Definire la risposta impulsiva di una rete lineare con relativi schemi e dimostrare il legame con la funzione di trasferimento di una rete lineare (p. 3.29)

La funzione di trasferimento caratterizza il comportamento di una rete lineare nel dominio delle frequenze

Introduciamo ora un'altra caratterizzazione, questa volta nel dominio dei tempi

Sollecitiamo a tal fine la rete con un impulso, come mostrato in figura

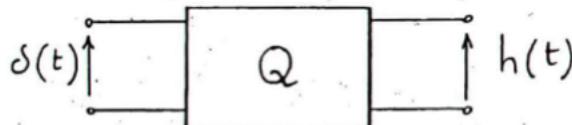


Con riferimento alla risposta $y(t)$ all'impulso $D(t, \Delta)$ poniamo:

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} y(t)$$

Il limite definisce la risposta impulsiva della rete

Rappresentiamo, nella figura sottostante, in forma simbolica la definizione ora data
(Attenzione a non confondere $\delta(t)$ con il $\lim_{\Delta \rightarrow 0} D(t, \Delta)$)



Per un sistema causale, condizione necessaria per la fisica realizzabilità è $h(t) \equiv 0, \quad t < 0$

La risposta impulsiva permette di descrivere l'uscita della rete quando al suo ingresso è presente un generico segnale $x(t)$

Ricordiamo la:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) * \delta(t)$$

E l'interpretazione formale che ne abbiamo dato come "somma" di funzioni impulsive, la generica delle quali è: $x(\tau) d\tau \delta(t - \tau)$, essa è applicata all'istante τ e ha intensità infinitesima $x(\tau) d\tau$

La risposta alla generica funzione impulsiva vale: $x(\tau) d\tau h(t - \tau)$

E quindi a $x(\tau)$ la rete risponde con

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

O anche:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Nota la risposta impulsiva di una rete possiamo determinare la sua uscita qualunque sia il segnale d'ingresso, operando nel dominio dei tempi

Possiamo quindi affermare che la risposta impulsiva caratterizza un quadripolo nel dominio dei tempi

Vediamo ora come tale rappresentazione è legata a quella nel dominio delle frequenze, espressa dalla funzione di trasferimento

A tal fine, con riferimento alla prima figura, scriviamo:

$$F[y(t)] = H(\omega) F[D(t, \Delta)]$$

Passando al limite per $\Delta \rightarrow 0$, ricordando che:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} F[D(t, \Delta)] = 1$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} F[y(t)] = \text{risposta impulsiva} = F[h(t)]$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} F[y(t)] = \lim_{\Delta \rightarrow 0} H(\omega) F[D(t, \Delta)]$$

$$F[h(t)] = H(\omega) \cdot 1$$

Risulta:

$$H(\omega) = F[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ed anche:

$$h(t) = F^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

In altri termini, risposta impulsiva e funzione di trasferimento di una rete lineare sono legate tra loro dalla trasformazione di Fourier

Segnali PAM: definizione e calcolo dei due spettri (p. 4.30)

Consideriamo la serie temporale $\{a_n\} = \{\dots a_{-1}, a_0, a_1, \dots\}$, avente valore medio $\langle a_n \rangle$ non necessariamente nullo e potenza finita:

$$\langle a_n^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N a_n^2 < \infty$$

Consideriamo poi un impulso di forma d'onda qualsiasi, rappresentato dalla funzione $g(t)$ che deve essere a energia finita: $F[g(t)] = G(\omega)$

Siano $\phi(\tau)$ e $G(\omega)$ rispettivamente la sua funzione di autocorrelazione e la sua trasformata di Fourier, che sono legate dalla relazione: $F[\phi(\tau)] = |G(\omega)|^2$ ◆

Ciò premesso il segnale:

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \quad \star$$

Rappresenta una successione di impulsi ottenuti da $g(t)$ mediante successive traslazioni di T e moltiplicazioni per i corrispondenti elementi della serie: esso è appunto un segnale PAM (Impulso la cui ampiezza viene modulata dai simboli della serie)

Il segnale può anche essere scritto come convoluzione fra la serie temporale e l'impulso $g(t)$:

$$s(t) = \{a_n\} * g(t)$$

Per effettuare l'analisi armonica generalizzata della \star introduciamo la serie temporale

$$\{x_n\}, \quad x_n = a_n - \langle a_n \rangle$$

Il cui valor medio è certamente nullo, ed esprimiamo $s(t)$ come somma di due componenti:

$$s(t) = s_m(t) + x(t)$$

Ove:

$$s_m(t) = \langle a_n \rangle \sum_{-\infty}^{\infty} n g(t - nT)$$

$s_m(t)$ corrisponde alla ripetizione periodica di $g(t)$ che mi genererà uno spettro a righe

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n g(t - nT)$$

$x(t)$ è un nuovo segnale che, per come è costruito, avrà valor medio nullo
 $x(t)$ esiste solo se x_n è parzialmente coerente

Procediamo al calcolo dei due spettri

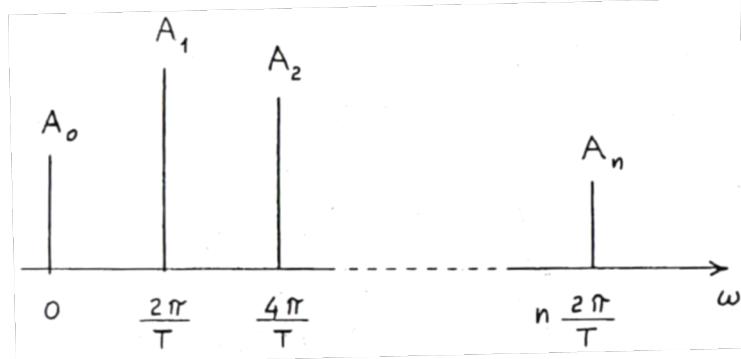
Lo spettro di ampiezza della prima componente può essere ottenuto ricordando che i coefficienti della forma esponenziale della serie di Fourier

$$s_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

Sono espressi da:

$$c_n = \frac{\langle a_n \rangle}{T} G\left(n \frac{2\pi}{T}\right) \quad \frac{2\pi}{T} = \omega_0$$

Ne deriva il seguente spettro a righe:



Per quanto concerne lo spettro di potenza $G_x(\omega)$ di $x(t)$ questo può essere determinato trasformando secondo Fourier la funzione di autocorrelazione

$$C(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle$$

Considerando:

$$G_x(\omega) = \frac{F[C(\tau)]}{\pi}$$

Presentiamo gli sviluppi analitici:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n g(t - nT)$$

$$x(t + \tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i g(t + \tau - iT)$$

$$C(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \int_{-NT}^{NT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_n x_i \cdot g(t - nT) g(t + \tau - iT) dt$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_n x_i \cdot g(t - nT) g(t + \tau - iT) dt$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \sum_{-N}^N n \sum_{-\infty}^{\infty} i x_n x_i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t - nT) g(t + \tau - iT) dt$$

Essendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - nT) g(t + \tau - iT) dt = \phi[\tau - (i - n)T]$$

Risulta:

$$C(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \sum_{-N}^N n \sum_{-\infty}^{\infty} i x_n x_i \phi[\tau - (i - n)T]$$

Ponendo $i = n + k$

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \sum_{-N}^N n \sum_{-\infty}^{\infty} k x_n x_{n+k} \phi(\tau - kT) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} k \phi(\tau - kT) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^N n x_n x_{n+k} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} k \mathcal{C}_k \phi(\tau - kT) \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di convoluzione tra una serie temporale ed una funzione tempo-continua possiamo anche scrivere:

$$C(\tau) = \frac{1}{T} \{C_k\} * \phi(\tau)$$

Da qui discende:

$$F[C(\tau)] = \frac{1}{T} F[\{C_k\}] F[\phi(\tau)]$$

Perciò:

$$G_x(\omega) = \frac{F[C(\tau)]}{\pi} = \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 \left[C_0 + 2 \sum_1^{\infty} k C_k \cos(k\omega T) \right]$$

D'altra parte, per $x_n = a_n - \langle a_n \rangle$ possiamo scrivere

$$C_k = \langle x_n x_{n+k} \rangle = \langle [a_n - \langle a_n \rangle] [a_{n+k} - \langle a_n \rangle] \rangle = \langle a_n a_{n+k} \rangle - [\langle a_n \rangle]^2$$

Sapendo che:

$$\begin{aligned} C_0 &= \langle [a_n - \langle a_n \rangle] [a_n - \langle a_n \rangle] \rangle \\ &= \langle a_n^2 - 2a_n \langle a_n \rangle + \langle a_n \rangle^2 \rangle \\ &= \langle a_n^2 \rangle - 2 \langle a_n \rangle^2 + \langle a_n \rangle^2 \\ &= \langle a_n^2 \rangle - \langle a_n \rangle^2 \end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo:

$$G_x(\omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 \left\{ \langle a_n^2 \rangle - [\langle a_n \rangle]^2 + 2 \sum_1^{\infty} k [\langle a_n a_{n+k} \rangle - [\langle a_n \rangle]^2] \cos(k\omega T) \right\}$$

Questa formula esprime appunto lo spettro di potenza distribuito della componente a valor medio nullo e parzialmente coerente del segnale PAM in esame

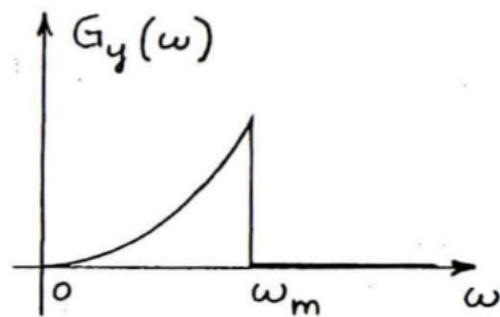
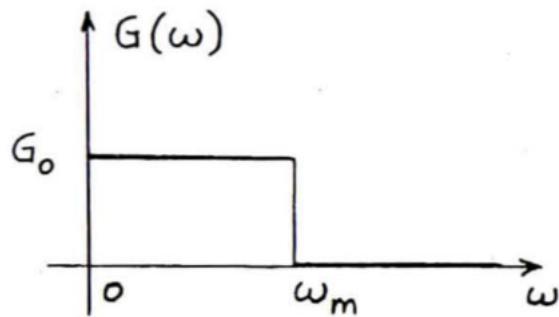
Tale spettro distribuito si sovrappone allo spettro a righe della componente periodica

Calcolare la densità di probabilità del primo ordine del processo stocastico $y(t)$ all'uscita di un derivatore al cui ingresso sia presente un processo stocastico $x(t)$ ergodico e gaussiano avente spettro di potenza costante e uguale a G_0 nella banda $(0, \omega_m)$ e nullo altrove (p. 5.29)

Il processo $y(t)$ è gaussiano

Il suo valor medio, come quello del processo d'ingresso, è nullo e il suo spettro di potenza è espresso da:

$$G_y(\omega) = \begin{cases} \omega^2 G_0, & \text{per } 0 \leq \omega \leq \omega_m \\ 0, & \text{per } \omega > \omega_m \end{cases}$$



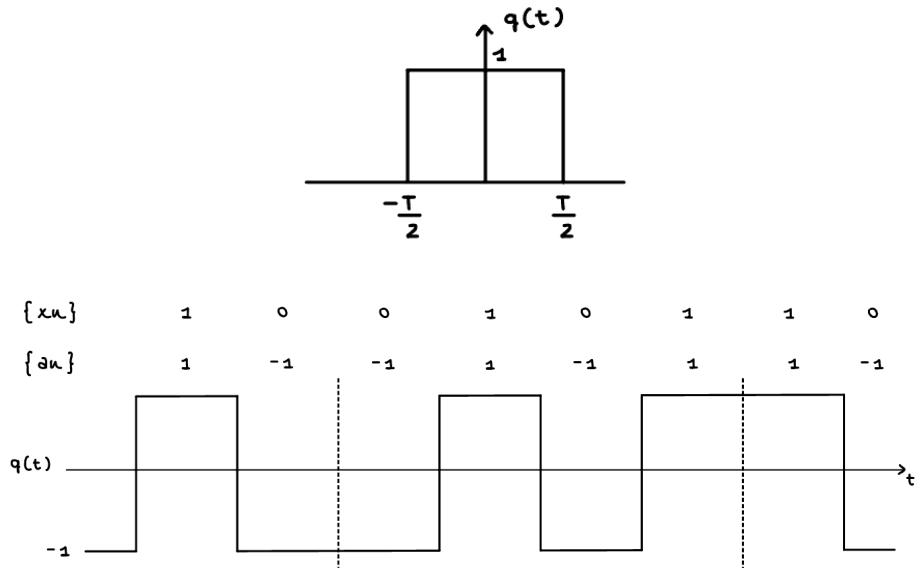
La sua potenza è pertanto:

$$P_y = E[y^2] = G_0 \int_0^{\omega_m} \omega^2 d\omega = \frac{G_0 \omega_m^3}{3} = \sigma^2$$

Tale potenza rappresenta anche la varianza di $y(t)$ e quindi:

$$p_1(y) = \sqrt{\frac{3}{2\pi G_0 \omega_m^3}} e^{-\frac{3y^2}{2G_0 \omega_m^3}}$$

Calcolare lo spettro di un segnale PAM con codice bipolare, simboli equiprobabili e indipendenti, impulsi rettangolari di ampiezza unitaria con duty cycle 1 (p. 5.43)



Il segnale in questione ha valor medio nullo

Pertanto, abbiamo solo uno spettro di potenza $G_s(\omega)$ distribuito che possiamo esprimere, ricordando la

$$G_x(\omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 \left\{ \langle a_n^2 \rangle - [\langle a_n \rangle]^2 + 2 \sum_1^{\infty} k [\langle a_n a_{n+k} \rangle - [\langle a_n \rangle]^2] \cos k\omega T \right\}$$

e che per un segnale con codice bipolare vale:

$$E[a_n] = \langle a_n \rangle = 0 \Rightarrow \langle a_n \rangle^2 = 0$$

$$E[a_n] E[a_{n+k}] = [E[a_n]]^2 = 0 = \langle a_n a_{n+k} \rangle$$

Quindi risulta:

$$G_s(\omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2$$

Sapendo che $x(t)$ è un impulso di durata T e ampiezza 1, la sua trasformata di Fourier è

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\omega t} dt$$

Da cui

$$G(\omega) = T \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)$$

E quindi

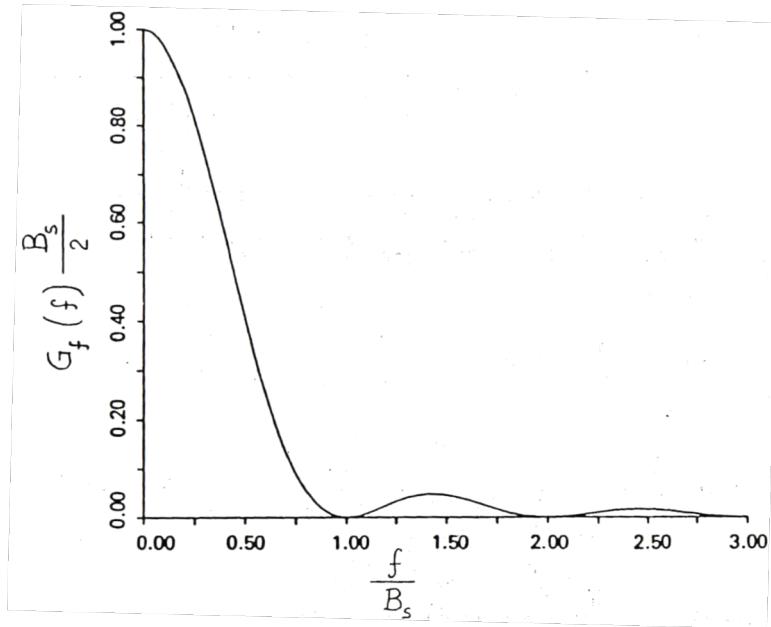
$$|G(\omega)|^2 = T^2 \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2$$

Perciò infine otteniamo:

$$G_s(\omega) = \frac{T}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2$$

Consideriamo lo spettro di potenza $G_f(f)$ riferito alle frequenze

$$G_f(f) = 2T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 = \frac{2}{B_s} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{f}{B_s} \right)$$



Calcolare lo spettro di un segnale PAM con codice AMI, cifre binarie prima della codifica equiprobabili e indipendenti, impulsi rettangolari di ampiezza unitaria con duty cycle 0,5 (p. 5.45)

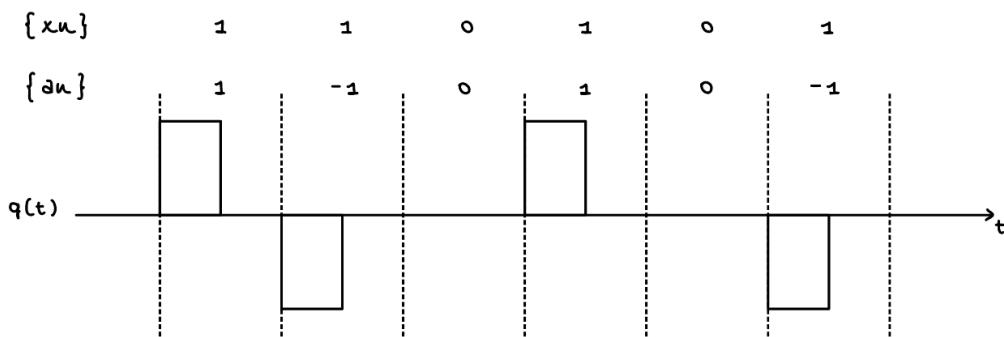
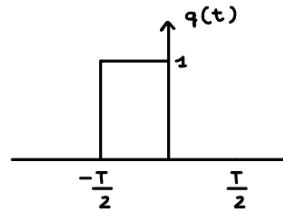
Codice AMI:

$$E[a_n] = 0$$

$$C_0 = E[a_n^2] = \frac{1}{2}$$

$$C_1 = E[a_n a_{n+1}] = -\frac{1}{4}$$

$$C_k = 0 \quad \text{per } k \geq 2$$



Il segnale in questione ha valor medio nullo

Pertanto, abbiamo solo uno spettro di potenza $G_s(\omega)$ distribuito che possiamo esprimere, ricordando la

$$G_x(\omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 \left\{ \langle a_n^2 \rangle - [\langle a_n \rangle]^2 + 2 \sum_1^{\infty} k [\langle a_n a_{n+k} \rangle - [\langle a_n \rangle]^2] \cos k\omega T \right\}$$

$$\text{e che} \quad \langle a_n^2 \rangle = E[a_n^2] = C_0 \quad \text{e} \quad \langle a_n a_{n+1} \rangle = E[a_n a_{n+1}] = C_1$$

Quindi risulta:

$$\begin{aligned} G_s(\omega) &= \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 (\langle a_n^2 \rangle + 2 \langle a_n a_{n+k} \rangle \cdot \cos k\omega T) \\ &= \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 (C_0 + 2C_1 \cdot \cos \omega T) \\ &= \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \omega T \right) \end{aligned}$$

Con la formula di bisezione otteniamo

$$G_s(\omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\omega T}{2}$$

Sapendo che $x(t)$ è un impulso di durata T e ampiezza 1, la sua trasformata di Fourier è

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{-j\omega t} dt$$

Da cui

$$G(\omega) = \frac{T}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{4}}{\frac{\omega T}{4}} \right)$$

E quindi

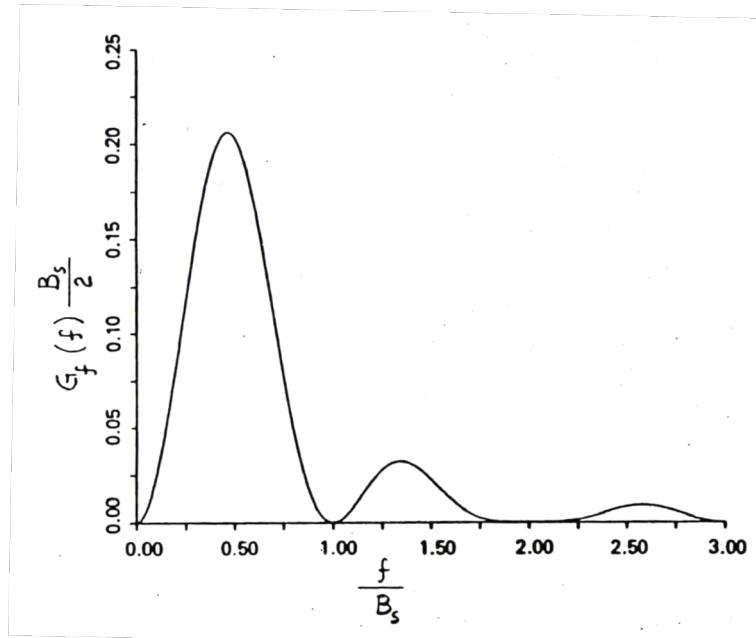
$$|G(\omega)|^2 = \frac{T^2}{4} \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{4}}{\frac{\omega T}{4}} \right)^2$$

Perciò infine otteniamo:

$$G_s(\omega) = \frac{T}{4\pi} \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{4}}{\frac{\omega T}{4}} \right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\omega T}{2}$$

Consideriamo lo spettro di potenza $G_f(f)$ riferito alle frequenze

$$G_f(f) = \frac{T}{2} \left(\frac{\sin \pi f \frac{T}{2}}{\pi f \frac{T}{2}} \right)^2 \operatorname{sin}^2(\pi f T) = \frac{1}{2B_s} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{f}{2B_s} \right) \operatorname{sin}^2 \left(\frac{\pi f}{B_s} \right)$$



Ricavare e disegnare gli spettri di ampiezza e di fase di un'oscillazione modulata a prodotto (p. 6.12)

Consideriamo l'oscillazione modulata

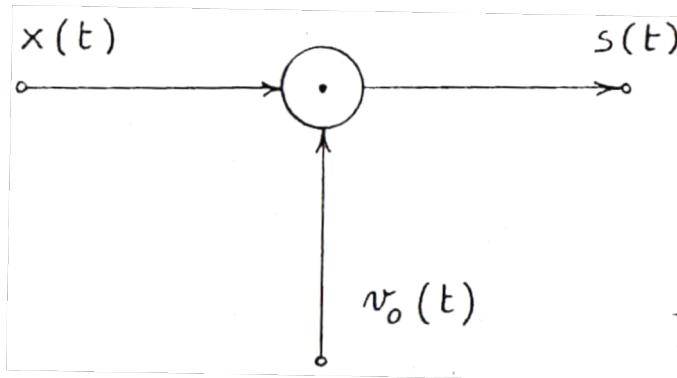
$$s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$$

Ottenuta come prodotto fra il segnale utile (segnale modulante) di cui diamo l'espressione come integrale di Fourier (suppongo che esista $F[x(t)]$, condizione per esprimere il segnale come integrale di Fourier)

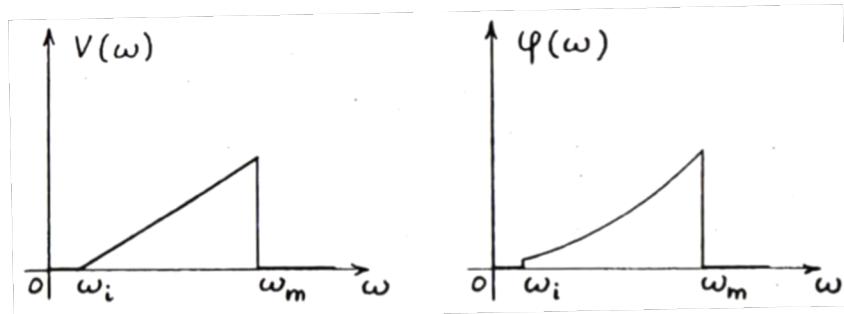
$$x(t) = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega \quad *$$

E il segnale portante

$$V_0(t) = \cos(\omega_0 t)$$



Nell'integrale di Fourier compaiono gli spettri di ampiezza $V(\omega)$ e di fase $\varphi(\omega)$ del segnale modulante, schematizzati qualitativamente in figura



Il mio obiettivo è esprimere $s(t)$ utilizzando la *

Dalle precedenti otteniamo:

$$s(t) = \cos(\omega_0 t) \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos(\omega_0 t) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega$$

Ricordando che: $\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$

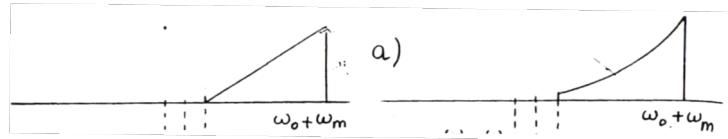
E ponendo:

$$s_s(t) = \frac{1}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega$$

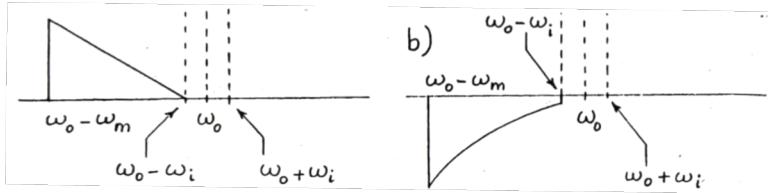
$$s_i(t) = \frac{1}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_0 - \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega$$

Abbiamo: $s(t) = s_s(t) + s_i(t)$

Gli spettri di ampiezza e di fase di $s_s(t)$ sono:



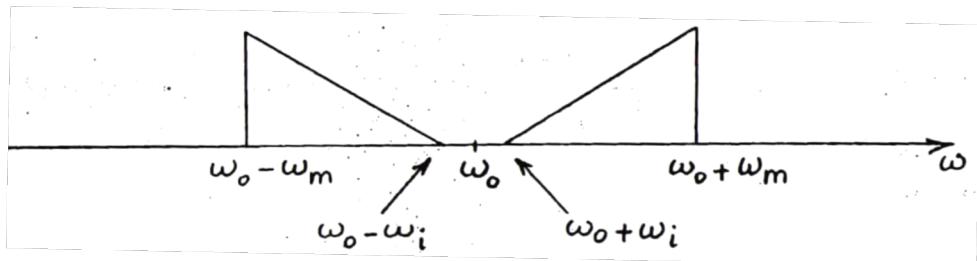
E quelli di $s_i(t)$ sono:



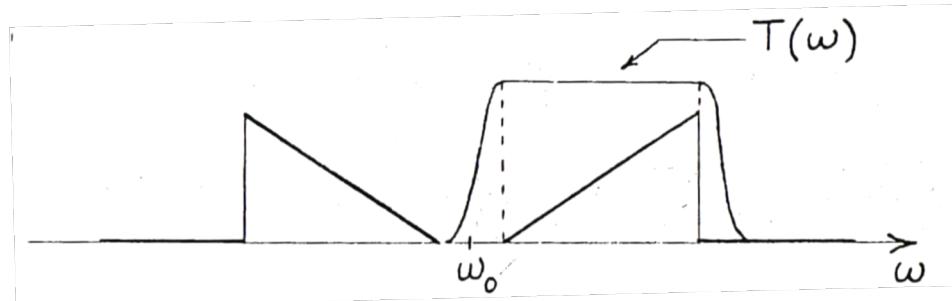
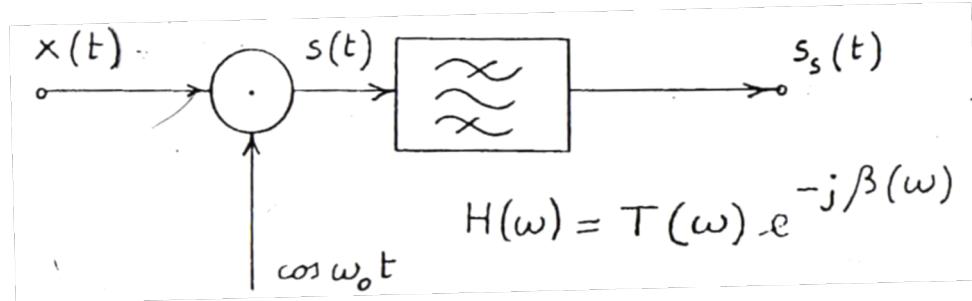
Gli spettri di ampiezza e di fase dell'oscillazione modulata comprendono dunque due bande laterali a cavallo di ω_0 :

- Quelli relativi alla banda laterale superiore si ottengono per semplice traslazione in alto, di una quantità pari a ω_0 , degli spettri di $x(t)$
- Quelli relativi alla banda laterale inferiore si ottengono con una traslazione in alto, di una quantità pari a ω_0 , degli spettri di $x(t)$, seguita da un ribaltamento attorno alla pulsazione ω_0 e, solo per quanto concerne lo spettro di fase, da un cambiamento di segno

Gli spettri di ampiezza e di fase di $s(t)$ sono quindi la somma di $s_s(t)$ e $s_i(t)$: il disegno è la sovrapposizione dei due disegni precedenti

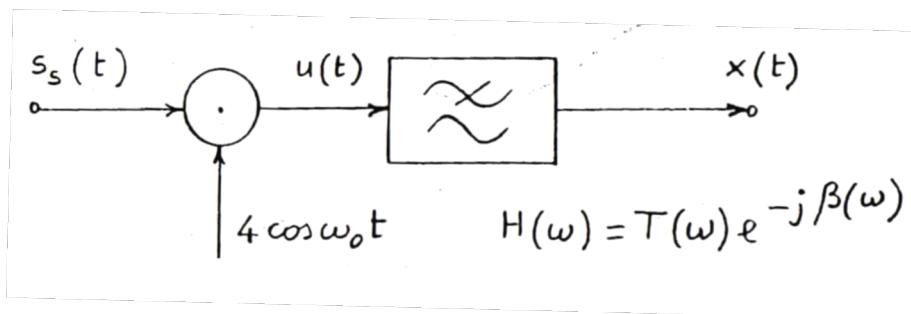


Ciascuno dei due segnali $s_s(t)$ e $s_i(t)$, in quanto contiene tutte le caratteristiche spettrali di $x(t)$, è in grado di rappresentare compiutamente $x(t)$ e può essere ottenuto dall'oscillazione modulata $s(t)$ con un filtro passa-banda



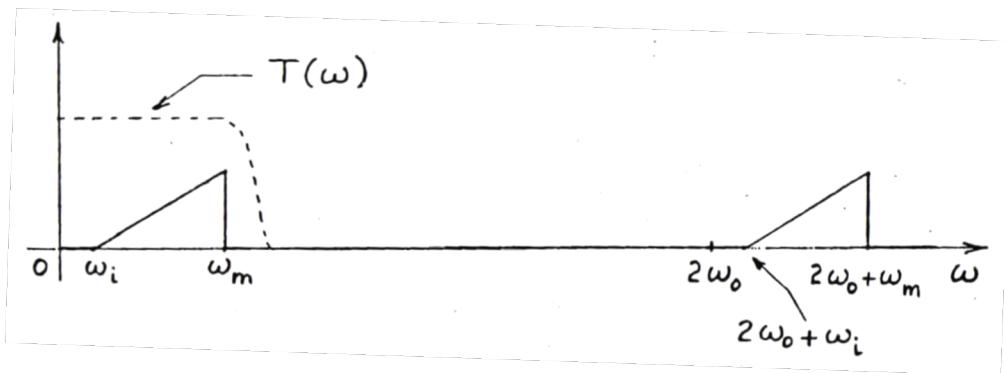
L'operazione che a partire da $x(t)$ ci porta ad $s_s(t)$ (oppure ad $s_i(t)$) viene detta conversione di frequenza in salita

L'operazione inversa (conversione in discesa) può essere effettuata come in figura con riferimento a $s_s(t)$ (si procede in maniera analoga quando si dispone di $s_i(t)$)



$$\begin{aligned}
 u(t) &= 4s_s(t) \cos(\omega_0 t) = 2 \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos(\omega_0 t) \cos[(\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega = \\
 &= \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega + \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(2\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega = \\
 &= x(t) + \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(2\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega
 \end{aligned}$$

$u(t)$ = segnale trasmesso + componente a doppia frequenza



— Spettro di ampiezza di $u(t)$

- - - - Caratteristica di ampiezza del filtro passa-basso

Descrivere i 3 passi della conversione A/D (grafici e schemi a blocchi) e il segnale numerico ottenuto aggiungendo opportuni commenti (p. 7.4)

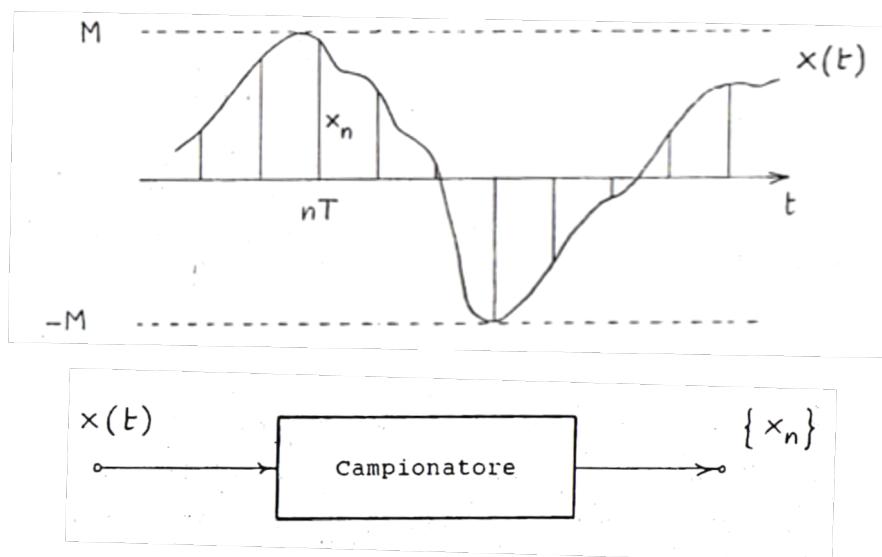
La conversione di un segnale analogico in un segnale digitale viene effettuata mediante le seguenti 3 operazioni:

Campionamento del segnale s

La frequenza di campionamento $f_0 = \frac{1}{T}$ (T = intervallo di campionamento) viene presa superiore al doppio della massima frequenza f_m a cui è apprezzabile lo spettro del segnale stesso (il che costituisce condizione sufficiente per evitare l'aliasing nel dominio delle frequenze e per poter quindi ricostruire il segnale originario)

$$f_0 = \frac{1}{T} \geq 2f_m$$

Il risultato di questa operazione è una discretizzazione dell'asse dei tempi: alla funzione $x(t)$ viene sostituita la serie temporale $\{x_n\}$ formata dai suoi valori campionati $x_n = x(nT)$



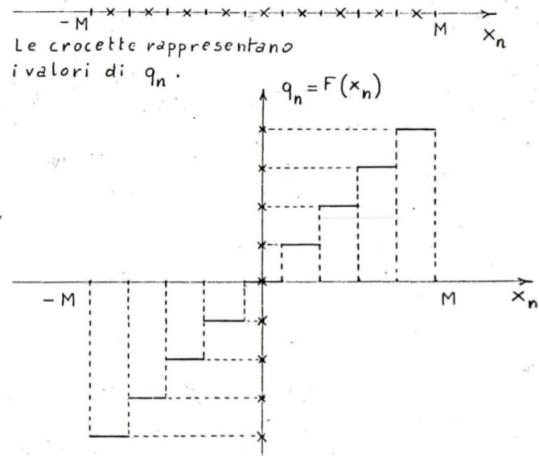
Il campionatore restituisce la serie temporale dei valori campionati

Quantizzazione dei valori campionati

Con questa operazione l'intervallo di variabilità $(-M, M)$ della funzione $x(t)$, e quindi di ciascun valore campionato x_n , viene suddiviso in un numero L finito di intervalli (detti intervalli di quantizzazione) e tutti i valori di x_n interni a ciascuno di questi intervalli, vengono identificati con uno di essi, che indichiamo con q_n

L'operazione di quantizzazione è evidentemente irreversibile

Essa è rappresentata in figura sia in una dimensione che in due dimensioni



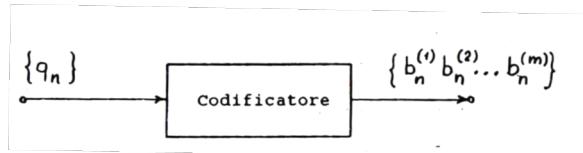
La funzione

$$q_n = F(x_n)$$

in cui la variabile indipendente q_n è suscettibile di L valori (detti livelli di quantizzazione) e quella indipendente x_n può assumere gli infiniti valori compresi tra $(-M, M)$, è detta legge di quantizzazione

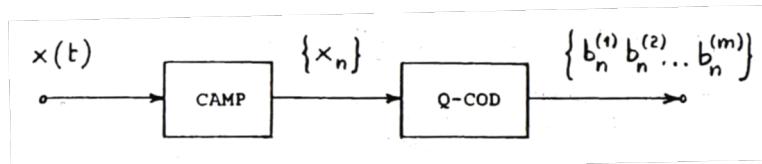
Codificazione dei valori campionati e quantizzati

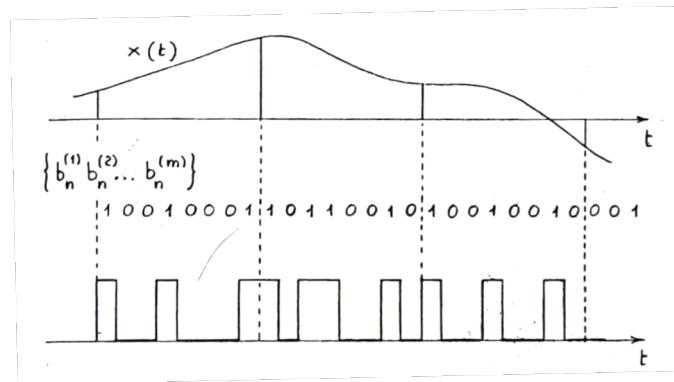
Con questa operazione ciascuno dei valori campionati e quantizzati, che formano la serie temporale $\{q_n\}$ viene codificato con una parola di m bit, $b_n^{(1)} b_n^{(2)} \dots b_n^{(m)}$, detta parola di codice, essendo m il più piccolo intero per cui è soddisfatta la relazione $m \geq \log_2 L$



In conclusione, la conversione analogico/digitale è sintetizzata in figura assieme al risultato che si ottiene: una forma d'onda analogica $x(t)$ viene rappresentata con una serie binaria, che a sua volta viene utilizzata per generare un segnale PAM (segnale numerico)

Si noti che abbiamo usato un unico blocco funzionale per indicare le operazioni di codificazione e quantizzazione in quanto esse, pur concettualmente distinte, vengono effettuate contemporaneamente con un unico circuito





Per poter trasmettere un messaggio numerico (funzione tempo-discreta e discreta nei valori) lo devo trasformare in un segnale numerico (segnale PAM ottenuto effettuando la convoluzione fra un messaggio numerico e una forma d'onda $g(t)$ ad energia finita)

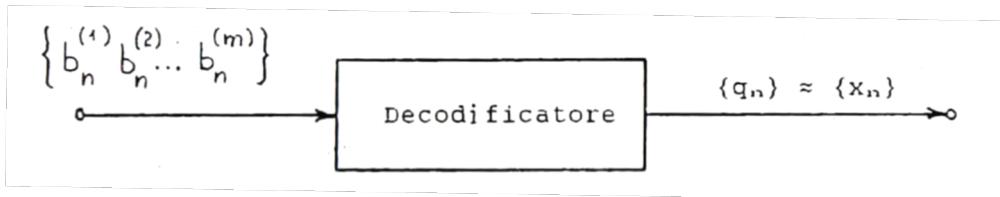
Il segnale numerico ottenuto viene anche chiamato segnale PCM (PCM = Pulse Code Modulation = modulazione di impulsi di codice)

Descrivere la conversione D/A rappresentando con opportuni blocchi e aggiungendo commenti opportuni (p. 7.8)

La ricostruzione del segnale originario $x(t)$, a partire dal corrispondente messaggio numerico, avviene con le seguenti operazioni:

Decodificazione

Mediante la quale si rigenerano i valori campionati e quantizzati dalla serie $\{q_n\}$, a partire dalle successive parole di codice $b_n^{(1)} b_n^{(2)} \dots b_n^{(m)}$



Dalla parola di m bit $\{b_n^{(1)} b_n^{(2)} \dots b_n^{(m)}\}$ non otterrò mai la serie $\{x_n\}$ poiché il processo di quantizzazione è irreversibile, perciò considereremo con un po' di approssimazione $\{q_n\}$, che corrisponde alla serie dei simboli quantizzati, come $\{x_n\}$

Essendo la quantizzazione un'operazione non reversibile, la serie $\{q_n\}$ deve essere necessariamente trattata come se fosse la serie $\{x_n\}$ dei valori campionati

A meno dell'errore dovuto alla quantizzazione, la decodificazione rende disponibile il segnale PAM

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT) g(t - nT) \quad \diamond$$

Ricostruzione di $x(t)$ a partire dal segnale PAM corrispondente

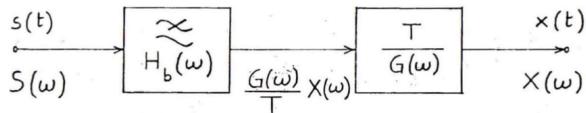
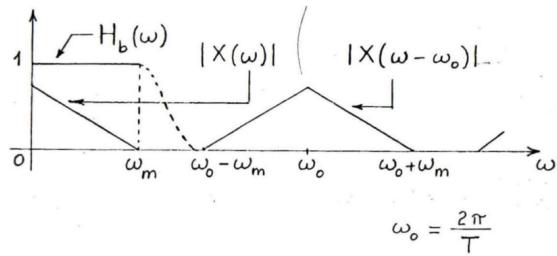
Consideriamo l'espressione della trasformata $S(\omega)$ di un segnale PAM:

$$S(\omega) = \frac{1}{T} G(\omega) \sum_{-\infty}^{\infty} X\left(\omega + k \frac{2\pi}{T}\right) \quad *$$

Poiché il campionamento di $x(t)$ è stato effettuato secondo il teorema del campionamento, la ripetizione periodica di $X(\omega)$ che compare nella * da luogo alla rappresentazione in figura, in cui i diversi termini della ripetizione stessa occupano intervalli di pulsazione distinti

Pertanto, l'impiego di un filtro passa-basso consente di isolare il termine della * corrispondente a $k = 0$ e, successivamente, di ricostruire $x(t)$ come mostrato in figura

(In figura non abbiamo considerato il ritardo cui da origine il filtro passa-basso e quindi abbiamo assunto reale la sua funzione di trasferimento $H_b(\omega)$)



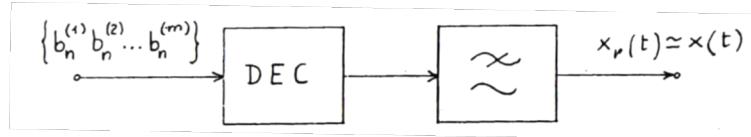
Si noti che oltre al filtro passa-basso, è indicata una rete (rete equalizzatrice) avente funzione di trasferimento $\frac{T}{G(\omega)}$

Tuttavia, se la durata τ dell'impulso $g(t)$ è molto minore di T , la sua trasformata $G(\omega)$ è praticamente costante ed eguale a τ nella banda $(0, \omega_m)$

La rete equalizzatrice può quindi essere omessa, se interessa $x(t)$ a meno di una costante moltiplicativa

In altri termini, per ricostruire – a meno di una costante moltiplicativa e del ritardo introdotto dal circuito – il segnale originario a partire dal segnale PAM \diamond è sufficiente un filtro passa-basso

Concludendo la conversione D/A avviene come mostrato in figura:



Il segnale ricostruito è stato indicato con $x_r(t)$, e non con $x(t)$, per mettere in evidenza il fatto che, a causa della quantizzazione, tale segnale non può riprodurre esattamente quello originario, anche prescindendo da ritardi e da costanti moltiplicative

La differenza $\varepsilon(t) = x_r(t) - x(t)$ viene chiamata rumore di quantizzazione

La ragione di tale denominazione è dovuta al fatto che, in virtù della definizione stessa, il segnale ricostruito può essere scritto:

$$x_r(t) = x(t) + \varepsilon(t)$$

Ossia nella consueta forma che esprime il segnale ricevuto come somma del segnale utile e di un termine che si sovrappone ad esso

Quest'ultimo, in generale, rappresenta un rumore additivo; nel caso in esame mette in conto la degradazione dovuta alla quantizzazione

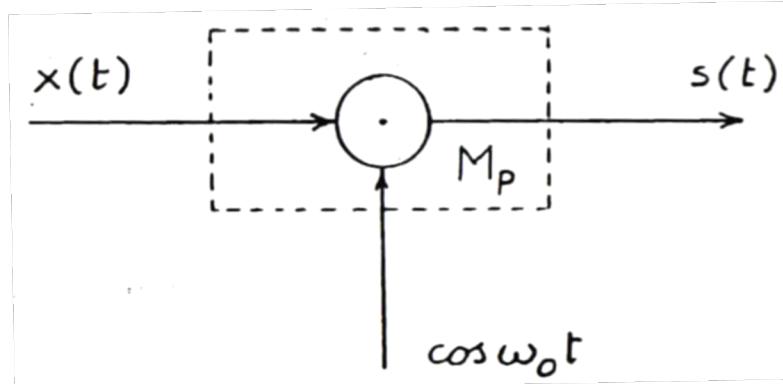
Tale degradazione può essere contenuta entro limiti stabiliti scegliendo opportunamente il numero L dei livelli di quantizzazione e la corrispondente legge di quantizzazione

Modulatori e demodulatori a prodotto (p. 9.34)

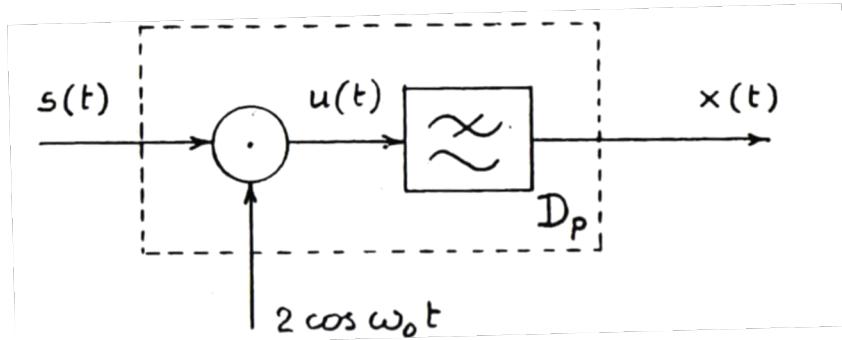
Consideriamo l'espressione di un'oscillazione modulata a prodotto (o DSB-SC):

$$s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$$

Essa può essere ottenuta a partire dall'oscillazione portante $\cos(\omega_0 t)$ e dal segnale modulante $x(t)$ semplicemente effettuandone il prodotto (in figura: modulatore a prodotto)



La demodulazione può essere effettuata con un demodulatore coerente come indicato in figura

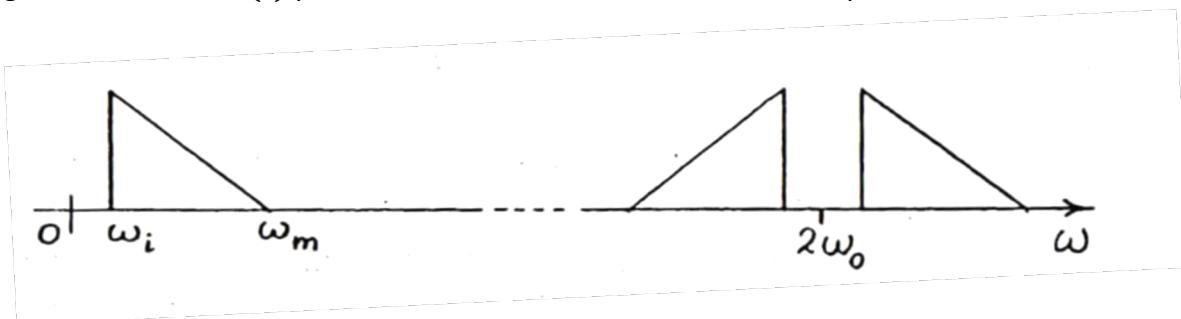


Infatti il prodotto

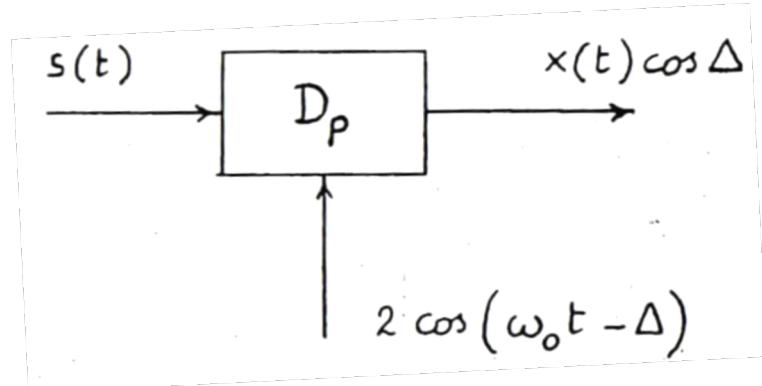
$$u(t) = x(t) \cos(\omega_0 t) \cdot 2 \cos(\omega_0 t) = x(t) + x(t) \cos(2\omega_0 t)$$

È costituito dalla somma del segnale modulante $x(t)$ e di una oscillazione modulata a prodotto, sempre da $x(t)$, con portante di pulsazione $2\omega_0$

Come si evince dalla seguente figura, ove sono indicati gli spettri dei due termini componenti $u(t)$, il segnale modulante $x(t)$ può essere facilmente isolato con un filtro passa-basso



Si noti che in presenza di un errore Δ nella fase di riferimento l'uscita del demodulatore a prodotto vale $x(t) \cos \Delta$: si ha dunque una diminuzione di livello del segnale demodulato



QAM: modulatore e demodulatore (p. 9.36)

Consideriamo due portanti in quadratura: $\cos \omega_0 t$ $-\sin \omega_0 t$

E due segnali modulanti: $x_1(t)$ $x_2(t)$

Formiamo i due segnali modulati a prodotto:

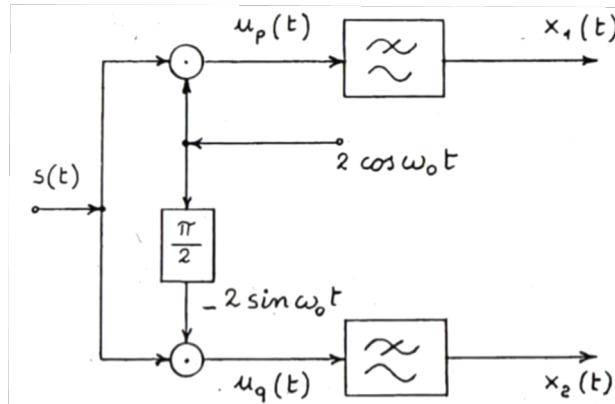
$$s_p(t) = x_1(t) \cos \omega_0 t$$

$$s_q(t) = -x_2(t) \sin \omega_0 t$$

E consideriamo la loro somma:

$$s(t) = s_p(t) + s_q(t) = x_1(t) \cos \omega_0 t - x_2(t) \sin \omega_0 t$$

Da tale somma è possibile estrarre i due segnali modulanti $x_1(t)$ e $x_2(t)$ com'è indicato nello schema in figura



Sapendo che

$$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \quad \text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen}\alpha \cos\alpha \quad 2\text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

Risulta infatti:

$$u_p(t) = s(t) \cdot 2 \cos(\omega_0 t) = [x_1(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - x_2(t) \cdot \sin(\omega_0 t)] \cdot 2 \cos(\omega_0 t) =$$

$$= x_1(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot 2 \cos(\omega_0 t) - x_2(t) \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot 2 \cos(\omega_0 t) =$$

$$u_p(t) = x_1(t) + x_1(t) \cos(2\omega_0 t) - x_2(t) \sin(2\omega_0 t)$$

$$u_q(t) = s(t) \cdot (-2 \sin(\omega_0 t)) = [x_1(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - x_2(t) \cdot \sin(\omega_0 t)] \cdot (-2 \sin(\omega_0 t)) =$$

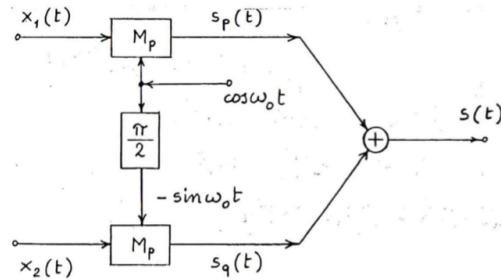
$$= x_1(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot (-2 \sin(\omega_0 t)) - x_2(t) \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot (-2 \sin(\omega_0 t)) =$$

$$u_q(t) = -x_1(t) \sin(2\omega_0 t) + x_2(t) + x_2(t) \cos(2\omega_0 t)$$

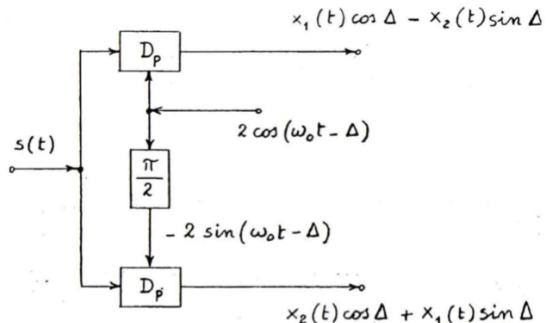
E le uscite dei due filtri passa-basso sono quindi costituite rispettivamente dai due segnali modulanti $x_1(t)$ e $x_2(t)$ come indicato in figura

L'oscillazione che consente dunque di trasmettere contemporaneamente due distinti segnali sulla stessa banda a radiofrequenza, conservando la possibilità di recuperare l'informazione che essi recano, viene detta oscillazione QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

Lo schema di un modulatore QAM è:



In presenza di un errore Δ nella fase di riferimento i due segnali all'uscita dei due demodulatori a prodotto (indicati nella figura precedente) sono:



L'effetto di tale errore è dunque quello di produrre un'interferenza reciproca fra i due segnali modulanti, oltre che una diminuzione di livello di quello utile

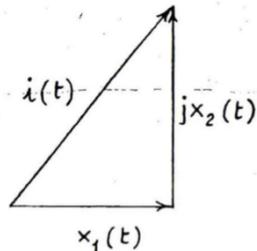
Ricaviamo ora l'espressione dell'inviluppo complesso di un'oscillazione QAM
Scriviamo a tal fine la $s(t)$ nella forma:

$$s(t) = \operatorname{Re}\{[x_1(t) + jx_2(t)]e^{j\omega_0 t}\}$$

Da cui discende l'inviluppo complesso

$$i(t) = x_1(t) + jx_2(t)$$

Rappresentato in figura



Formula di Carson (p. 9.43)

La formula di Carson esprime l'occupazione di banda a radiofrequenza di un segnale modulato ad angolo

L'occupazione di banda dipende dalla somma della deviazione di pulsazione massima e del massimo della pulsazione cui è apprezzabile il mio segnale utile

$$B_\omega = 2(\Delta\omega_{max} + \omega_m)$$

Con

$$\Delta\omega_{max} = \max |\Delta\omega(t)|$$

ω_m : massimo della pulsazione a cui è apprezzabile il mio segnale utile

$\Delta\omega_{max}$: deviazione di pulsazione massima

Risposta di quadripoli lineari a oscillazioni modulate. Equivalente passa-basso (p. 10.9)

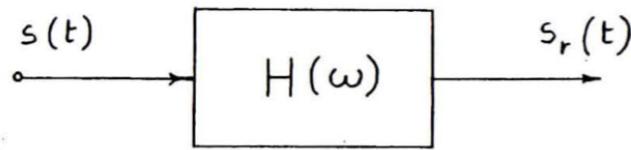
Consideriamo l'oscillazione modulata (o segnale passa-banda)

$$s(t) = \operatorname{Re}\{i(t) e^{j\omega_0 t}\}$$

Proponiamoci ora di esprimere la risposta $s_r(t)$ a $s(t)$ di un quadripolo lineare tempo-invariante, di cui sia nota la funzione di trasferimento $H(\omega)$

Affinché tale risposta non sia identicamente nulla, la funzione di trasferimento deve risultare diversa da 0 almeno su parte della banda B_ω di $s(t)$

In tal caso $s_r(t)$ è ancora un segnale passa-banda dato che il quadripolo non può dare origine a nuove componenti spettrali rispetto a quelle di ingresso



$$H(\omega) = T(\omega) e^{j\beta(\omega)}$$

Scriviamo allora:

$$s_r(t) = \operatorname{Re}\{i_r(t) e^{j\omega_0 t}\}$$

Il problema di determinare $s_r(t)$ equivale quindi a quello di trovare la relazione fra l'inviluppo complesso $i_r(t)$ dell'uscita e quello $i(t)$ dell'ingresso, una volta nota la funzione di trasferimento $H(\omega)$

A tal fine applichiamo la seguente formula

$$I(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega + \omega_0), & \text{per } |\omega| \leq \frac{B_\omega}{2} \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \quad *$$

alle grandezze di uscita:

$$I_r(\omega) = \begin{cases} 2S_r(\omega + \omega_0), & \text{per } |\omega| \leq \frac{B_\omega}{2} \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

D'altra parte:

$$S_r(\omega) = H(\omega) S(\omega)$$

E quindi otteniamo:

$$I_r(\omega) = \begin{cases} 2H(\omega + \omega_0) S(\omega + \omega_0), & \text{per } |\omega| \leq \frac{B_\omega}{2} \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \quad \diamond$$

Dal confronto tra $*$ e \diamond discende:

$$I_r(\omega) = H(\omega + \omega_0) I(\omega) \quad (*)$$

Introducendo la funzione:

$$H_0(\omega) = \begin{cases} H(\omega + \omega_0) & \omega + \omega_0 \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

E ricordando la natura passa-banda dei segnali in gioco, la $(*)$ si scrive semplicemente:

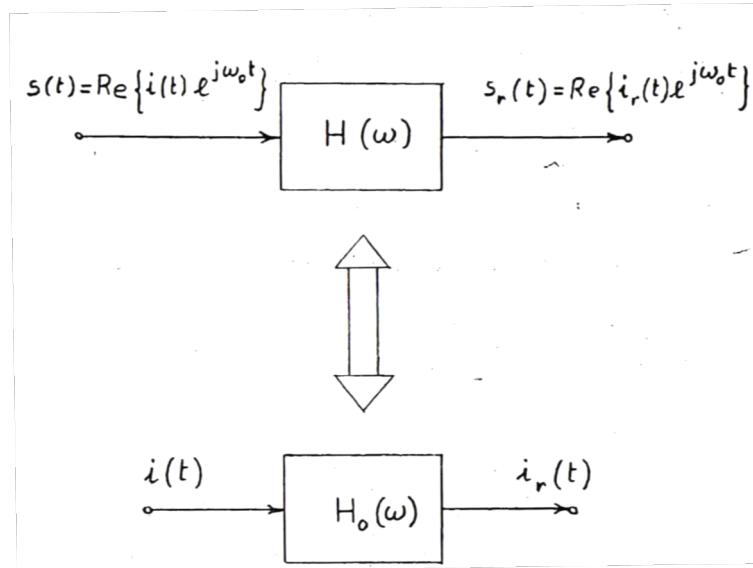
$$I_r(\omega) = H_0(\omega) I(\omega)$$

La funzione $H_0(\omega)$ viene chiamata funzione di trasferimento equivalente passa-basso del quadripolo considerato

Essa descrive la trasformazione lineare che, agendo sull'inviluppo complesso $i(t)$ del segnale d'ingresso $s(t)$, da origine all'analogico inviluppo $i_r(t)$ del segnale d'uscita $s_r(t)$ cioè alle leggi di modulazione di ampiezza e d'angolo di quest'ultimo

Noto $i_r(t)$ da $s_r(t) = \operatorname{Re}\{i_r(t)e^{j\omega_0 t}\}$ discende poi $s_r(t)$

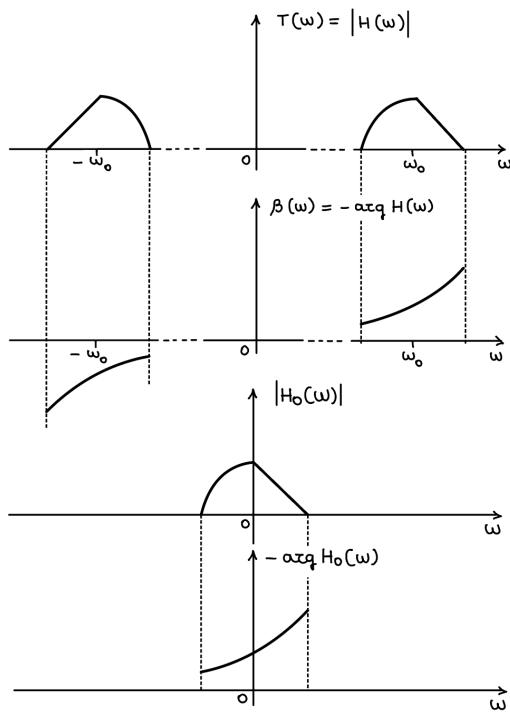
Tutto ciò è rappresentato simbolicamente nella figura sottostante, la parte inferiore della quale va intesa soltanto come un modello matematico e non come un modello fisico



È infatti importante sottolineare che l'operatore lineare $H_0(\omega)$ non rappresenta sempre la funzione di trasferimento di una rete fisicamente realizzabile; basta a tal fine osservare che, in generale, risulta:

$$H_0(-\omega) \neq H_0^*(\omega)$$

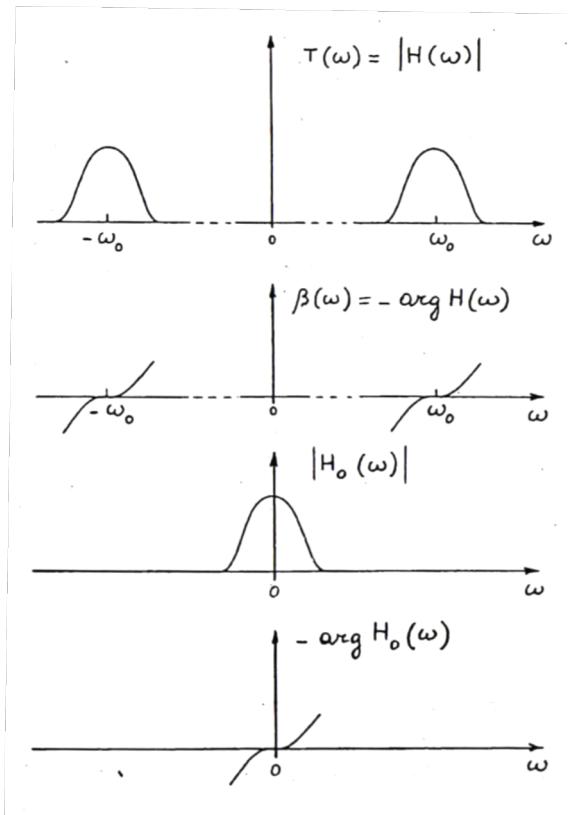
Come appare chiaro, ad esempio, dall'esame della figura sottostante che si riferisce a una rete passa-banda



Quando la rete passa-banda presenta caratteristica di ampiezza simmetrica rispetto a ω_0 e caratteristica di fase antisimmetrica con $\beta(\omega_0) = 0$, la corrispondente funzione di trasferimento equivalente passa-basso può rappresentare la funzione di trasferimento di un quadripolo passa-basso fisicamente realizzabile

Per essa vale infatti la relazione:

$$H_0(-\omega) = H_0^*(\omega)$$



Il protocollo ALOHA: ricavare l'espressione del throughput normalizzato in funzione del traffico (pdf Accesso multiplo, slide 5)

ALOHA è un protocollo ad accesso casuale, quindi del tipo a contesa

Il suo funzionamento era molto semplice:

1. Transmission mode: gli utenti possono trasmettere in qualunque momento;
2. Listening mode: dopo aver trasmesso, un utente si pone in attesa di un riscontro (ACK) dal ricevitore; in caso di collisione con altre stazioni si può ottenere un riscontro negativo (NAK);
3. Retransmission mode: con la ricezione di un NAK, un messaggio viene ritrasmesso ma dopo aver aspettato un ritardo casuale;
4. Timeout mode: se, dopo una trasmissione, non si riceve alcun riscontro entro un tempo massimo, si procede alla ritrasmessione del messaggio

A causa delle collisioni, alcuni pacchetti verranno respinti

Si definisce perciò frequenza totale in arrivo: $\lambda_t = \lambda + \lambda_r$ come somma della frequenza dei pacchetti trasmessi con successo con quelli che hanno colliso e vengono ritrasmessi

Sia di b bit la lunghezza di ogni pacchetto, da cui si definisce il throughput $\rho' = b\lambda$ sul canale in bit/s

Si definisce pure il traffico totale $G' = b\lambda_t$

Se la capacità del canale è R bit/s, si definisce throughput normalizzato ρ :

$$\rho = \frac{b\lambda}{R}$$

e traffico totale normalizzato G :

$$G = \frac{b\lambda_t}{R}$$

Si noti che $0 \leq \rho \leq 1$ mentre $0 \leq G \leq \infty$

Definendo inoltre il tempo di trasmissione di un pacchetto $\tau = \frac{b}{R}$, si ha che:

$$\rho = \lambda\tau$$

$$G = \lambda_t\tau$$

Un utente trasmette con successo il suo pacchetto se nessun altro utente inizia una trasmissione nei successivi τ secondi o non l'aveva iniziata nei precedenti τ s

Questo definisce la finestra di contesa che è pari a 2τ s

Il processo degli arrivi al satellite considerando tutti gli utenti indipendenti tra loro può essere modellato dalla distribuzione di Poisson:

$$P(k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$$

dove λ è la frequenza di arrivo media

Questa espressione viene usata per ricavare la probabilità che nessun altro utente trasmetta nell'intervallo di tempo 2τ

La probabilità di successo P_s sarà quindi: $P_s = Prob(k = 0) = e^{-2\lambda_t \tau}$

Ora, per definizione, $P_s = \frac{\lambda}{\lambda_t}$ da cui si ottiene:

$$\lambda = \lambda_t e^{-2\lambda_t \tau}$$

$$\lambda \cdot \tau = \lambda_t e^{-2\lambda_t \tau} \cdot \tau$$

$$\rho = G e^{-2G}$$

Che lega il throughput normalizzato ρ con il traffico totale normalizzato G

Il massimo valore di ρ è pari a $\frac{1}{2e} = 0.18$ in corrispondenza a $G = 0.5$

Il puro ALOHA può essere migliorato mediante un minimo coordinamento tra le stazioni

Con slotted ALOHA il satellite invia una sequenza di impulsi di sincronizzazione in modo broadcast a tutte le stazioni

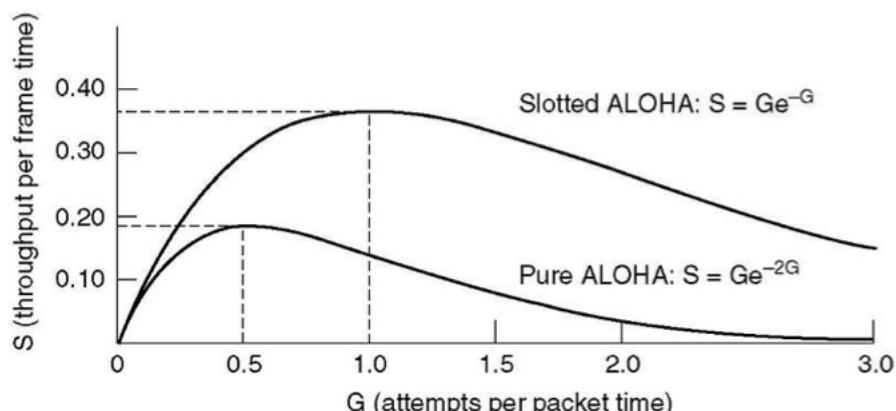
La lunghezza dei pacchetti è ancora costante e ora devono essere inviati all'interno di un time slot dato dagli impulsi di sincronizzazione

Questo, di fatto, dimezza la finestra di congestione, ora pari a τ

Di conseguenza si ottiene:

$$\rho = G e^{-G}$$

Ora il massimo valore di ρ è pari a $\frac{1}{e} = 0.36$ in corrispondenza a $G = 1$ con un raddoppio delle prestazioni



Protocollo CSMA/CD: ricavare l'espressione del throughput S in funzione del parametro α (pdf Accesso multiplo, slide 12)

Si supponga che il bus sia organizzato in time slot di durata doppia rispetto al ritardo di propagazione end-to-end

Il time slot rappresenta quindi il tempo massimo dall'inizio della trasmissione per rilevare una collisione

Si abbiano N stazioni tutte uguali, ognuna può trasmettere in un time slot con probabilità p

Vi sono due tipi di intervalli di tempo

Il primo è l'intervallo di trasmissione di durata $\frac{1}{2\alpha}$ slot, assumendo unitario il tempo di trasmissione di un frame

Il secondo è l'intervallo di contesa, dato da una sequenza di slot con o collisione o nessuna trasmissione

Il throughput sarà dato dalla percentuale di tempo speso per gli intervalli di trasmissione

Si calcola ora la probabilità A di avere una sola stazione in trasmissione in un certo time slot

$$A = \binom{N}{1} p^1 (1-p)^{(N-1)} = Np(1-p)^{(N-1)}$$

Che assume il massimo per $p = \frac{1}{N}$:

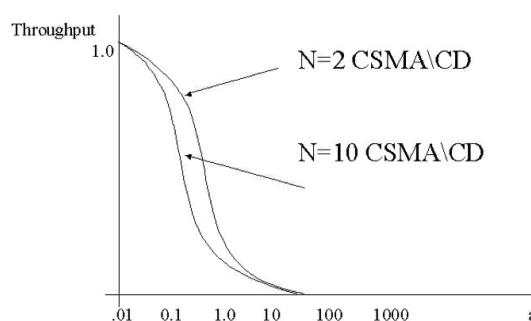
$$A = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{(N-1)}$$

Si determina ora la lunghezza media in slot dell'intervallo di contesa w :

$$E[w] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr\{i - slot - con - coll. - o - no - tx\} = \sum_{i=1}^{\infty} i (1-A)^i A = \frac{1-A}{A}$$

L'utilizzazione massima sarà quindi:

$$S = \frac{\frac{1}{2\alpha}}{\frac{1}{2\alpha} + \frac{1-A}{A}} = \frac{1}{1 + 2\alpha \frac{(1-A)}{A}}$$



Calcolare il ritardo medio di TDMA e FDMA (pdf Accesso multiplo, slide 25)

Si supponga che i canali di comunicazione, bande o time slot, siano sempre in uso

Il ritardo di un pacchetto D è dato da due contributi: $D = \omega + \tau$, dove ω è il tempo di attesa medio prima della trasmissione e τ è il tempo di trasmissione del pacchetto

In FDMA ogni pacchetto viene inviato in un tempo pari a T secondi, da cui $\tau_{FD} = T$

In TDMA, ogni pacchetto viene inviato in slot di T/M s

$$\text{In questo caso } \tau_{TD} = \frac{T}{M} = \frac{b}{R}$$

In FDMA, $\omega_{FD} = 0$

In TDMA, un utente occupa un generico time slot nella trama di T s

Perciò il pacchetto S_{mk} , k-esimo pacchetto della sorgente m comincerà ad essere trasmesso $(m - 1)T/M$ s dopo la sua generazione

Quindi:

$$\omega_{TD} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (m - 1) \frac{T}{M} = \frac{T}{M^2} \sum_{n=0}^{M-1} n = \frac{T}{M^2} \frac{(M-1)M}{2} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right)$$

Riepilogando:

$$D_{FD} = T$$

$$D_{TD} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) + \frac{T}{M} = D_{FD} - \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right)$$

Che può anche scriversi:

$$D_{TD} = D_{FD} - \frac{b}{2R} (M - 1)$$

Questo dimostra che TDMA è strutturalmente superiore a FDMA dal punto di vista del ritardo

Ricavare e spiegare l'efficienza dei protocolli sliding window in assenza di errori, con relativi diagrammi temporali (pdf *Reti di telecomunicazioni*, slide 75)

Il protocollo opera come segue:

1. A può inviare a B una serie di trame fino ad un numero massimo di W , tutte numerate in successione
2. Quando B riceve una trama opera in modo analogo allo stop-and-wait
 - a. Se una trama è corretta ed in sequenza invia una trama di conferma (acknowledgment)
 - b. Se una trama è errata o fuori sequenza tace oppure invia una trama apposita indicante la ricezione errata (Not ACK o NACK)

La gestione delle trame da inviare avviene come segue:

- A invia le trame in sequenza numerandole in modo progressivo
- L'insieme dei numeri delle W trame inviate viene detto finestra di trasmissione, e contiene i numeri delle trame già inviate e non ancora confermate con ACK dal ricevitore
- Quando il trasmettitore riceve un ACK per una certa trama toglie il relativo numero dalla finestra di trasmissione, lasciando un posto libero per una nuova trama da trasmettere

Parametri:

- D : numero di bit di dati contenuti in un frame
- H : numero di bit contenuti nell'header (intestazione o PCI) del frame
- $F = D + H$: lunghezza totale del frame
- A : lunghezza dell'ACK
- E : tempo di elaborazione necessario per la composizione del frame in partenza e per il controllo dell'errore sul frame in arrivo
- R : tempo di propagazione del segnale elettrico da un capo all'altro del collegamento
- $I = E + R$: tempo totale per la trasmissione di un frame
- C : capacità del canale di trasmissione (in bit al secondo)
- W : ampiezza della finestra, numero massimo di trame inviate in serie da A a B

Il tempo totale intercorso fra la trasmissione di due frame successivi senza errori è:

$$TT = \frac{F}{C} + I + \frac{A}{C} + I$$

Si definisce efficienza η di un protocollo il rapporto

$$\eta = \frac{D}{TT C}$$

pari al numero di bit utili trasmessi divisi per il numero totale di bit che si potrebbero trasmettere in TT

Premettiamo che:

- W : dimensione della finestra
- $F = D + H$: dimensione del frame

Perciò $W \cdot F$ indica la quantità di dati all'interno della finestra

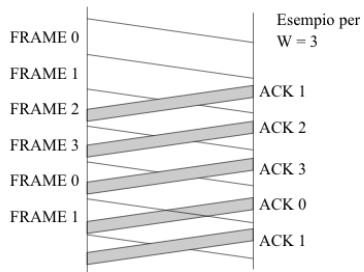
- C : velocità di trasmissione in bit/s
- TT : tempo di andata e ritorno da trasmettitore a ricevitore

Perciò $C \cdot TT$ indica la dimensione della bit-pipe, quindi la quantità massima di dati che la pipe può contenere

Per calcolare l'efficienza dei protocolli sliding-window è necessario distinguere due casi:

$$WF > CTT$$

La quantità di dati nella finestra è maggiore della quantità massima di dati che può essere contenuta nella pipe, perciò la trasmissione avviene in modo continuo (non ho tempi morti)

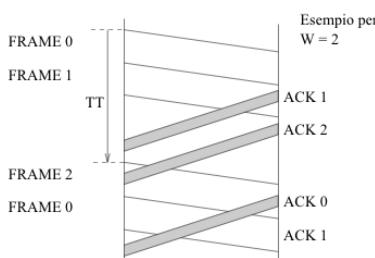


In questo caso il trasmettitore non interrompe mai la trasmissione delle trame per cui risulta:

$$\eta = \frac{D}{D + H}$$

$$WF \leq CTT$$

La quantità di dati nella finestra è minore della quantità massima di dati che può essere contenuta nella pipe, perciò vengono reintrodotti dei tempi morti poiché dopo la trasmissione la scheda si ferma e attende conferma, l'attesa introduce un ritardo

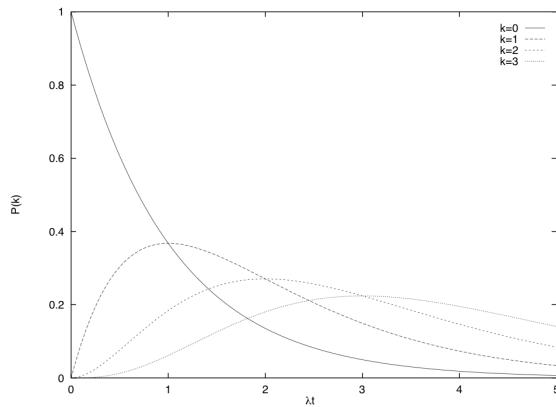


In questo caso si trasmettono W trame in un tempo pari a TT calcolato come per lo stop-and-wait, per cui:

$$\eta = \frac{WD}{D + 2H + 2IC}$$

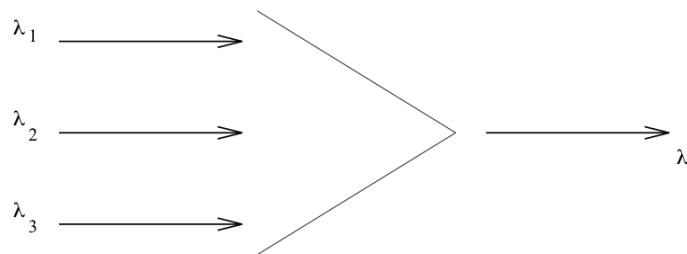
Distribuzione di Poisson (pdf *Reti di telecomunicazioni*, slide 106)

$$P(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$



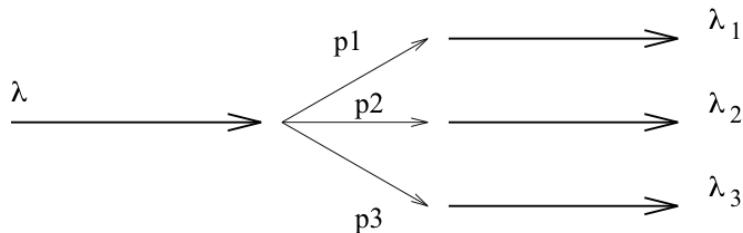
La sovrapposizione di h processi di Poisson aventi frequenze di arrivo λ_i $i = 1 \dots h$ è ancora un processo di Poisson con

$$\lambda = \sum_{i=1}^h \lambda_i$$



La scomposizione casuale di un processo di Poisson in h processi diversi da origine ancora ad h processi di Poisson aventi frequenze di arrivo

$$\lambda_i = p_i \lambda \quad \forall i$$



Il numero medio di arrivi in un tempo t è:

$$E[k] = \bar{k} = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{(\lambda t)^{i-1}}{i!}$$

Cambio di variabile $j = i - 1$

$$E[k] = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(\lambda t)^j}{j!} = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot e^{\lambda t} = \lambda t$$

La varianza del numero di arrivi in un tempo t è: $var[k] = \lambda t$

Distribuzione del tempo interarrivo

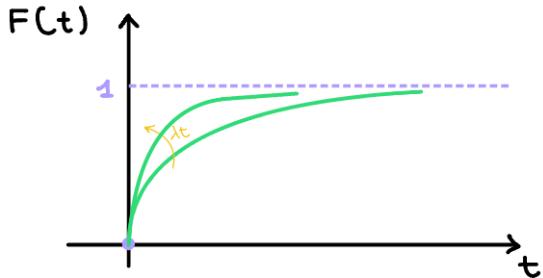
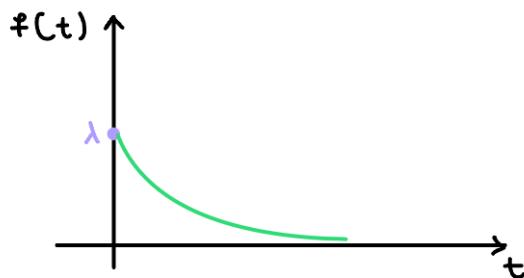
Si calcola la distribuzione di probabilità del tempo che intercorre fra due arrivi di un processo di Poisson

$$F(t) = P(\text{tempo interarrivo} \leq t) = 1 - p(0, t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$F(t)$ è detta distribuzione esponenziale negativa

La corrispondente densità di probabilità è

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

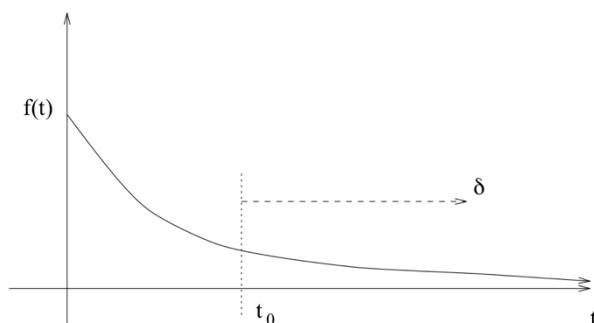


$$E[t] = \frac{1}{\lambda}$$

$$var(t) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribuzione del tempo residuo

Calcoliamo la distribuzione del tempo di attesa residuo (δ) per il prossimo arrivo dato che si è già atteso un tempo t_0



$$\begin{aligned}
F(\delta) &= P(t \leq t_0 + \delta \mid t > t_0) = \frac{P(t_0 < t \leq t_0 + \delta)}{P(t > t_0)} = \frac{P(t \leq t_0 + \delta) - P(t \leq t_0)}{P(t > t_0)} = \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda(\delta+t_0)} - (1 - e^{-\lambda t_0})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_0})} = \frac{e^{-\lambda t_0}(1 - e^{-\lambda \delta})}{e^{-\lambda t_0}} = 1 - e^{-\lambda \delta}
\end{aligned}$$

La distribuzione esponenziale è priva di memoria (memoryless)

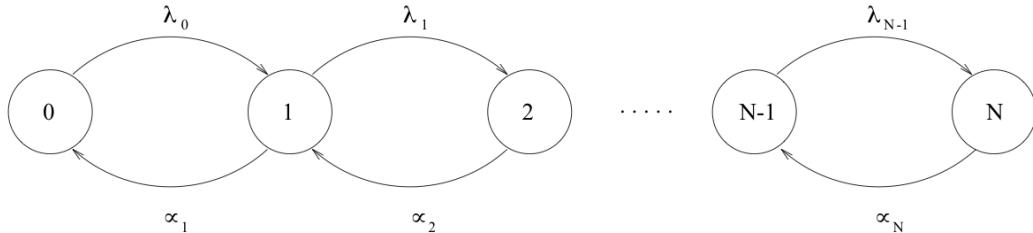
La distribuzione esponenziale è l'unica distribuzione continua avente questa proprietà

Processi di nascita e morte, probabilità di stato (pdf *Reti di telecomunicazioni*, slide 110)

Processi di nascita e morte

Un processo di nascita e morte è un processo stocastico tempo continuo a valori discreti tale che:

1. La probabilità di trovarsi in un certo stato nel futuro dipende solamente dallo stato attuale del sistema
2. Il suo stato può variare di una sola unità alla volta



λ_k : frequenza di nascita dello stato k

μ_k : frequenza di morte dello stato k

Probabilità di stato

Preso un intervallo Δt supponiamo di trascurare le probabilità che avvengano più di una nascita o di una morte per intervallo

Allora possiamo scrivere le seguenti equazioni che legano fra loro le probabilità di stato

$$P_k(t + \Delta t) = P_{k-1}(t) p_{k-1,k}(\Delta t) + P_{k+1}(t) p_{k+1,k}(\Delta t) + P_k(t) p_{k,k}(\Delta t)$$

$$P_0(t + \Delta t) = P_1(t) p_{1,0}(\Delta t) + P_0(t) p_{0,0}(\Delta t)$$

Inoltre:

$$p_{k,k}(\Delta t) = 1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t$$

$$p_{k-1,k}(\Delta t) = \lambda_{k-1} \Delta t$$

$$p_{k+1,k}(\Delta t) = \mu_{k+1} \Delta t$$

Da queste facendo il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ otteniamo:

$$P_k(t + \Delta t) = P_{k-1}(t) \cdot \lambda_{k-1} \cdot \Delta t + P_{k+1}(t) \cdot \mu_{k+1} \cdot \Delta t + P_k(t) \cdot [1 - (\lambda_k + \mu_k) \cdot \Delta t]$$

$$P_k(t + \Delta t) = P_{k-1}(t) \cdot \lambda_{k-1} \cdot \Delta t + P_{k+1}(t) \cdot \mu_{k+1} \cdot \Delta t + P_k(t) - P_k(t) \cdot (\lambda_k + \mu_k) \cdot \Delta t$$

$$P_k(t + \Delta t) - P_k(t) = P_{k-1}(t) \cdot \lambda_{k-1} \cdot \Delta t + P_{k+1}(t) \cdot \mu_{k+1} \cdot \Delta t - P_k(t) \cdot (\lambda_k + \mu_k) \cdot \Delta t$$

$$\frac{P_k(t + \Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = \frac{P_{k-1}(t) \cdot \lambda_{k-1} \cdot \Delta t + P_{k+1}(t) \cdot \mu_{k+1} \cdot \Delta t - P_k(t) \cdot (\lambda_k + \mu_k) \cdot \Delta t}{\Delta t}$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = P_{k-1}(t) \cdot \lambda_{k-1} + P_{k+1}(t) \cdot \mu_{k+1} - P_k(t) \cdot (\lambda_k + \mu_k)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$$

Se il processo è stazionario, una volta raggiunto l'equilibrio, le P_k non dipendono dal tempo, perciò otteniamo:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = 0 \quad \forall t$$

E quindi:

$$\begin{cases} -\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1 = 0 \\ -(\lambda_k + \mu_k) P_k + \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1} = 0 \\ \sum_{i=0}^N P_i = 1 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema otteniamo:

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

Domande:

1. La banda di Nyquist è la banda minima di una funzione che assume valore x_0 per $n = 0$ e 0
ALTROVE
2. Una funzione $x(t)$, continua o discreta nei valori, periodica di periodo T non può essere rappresentata da **INTEGRALE DI FOURIER**
3. Un filtro trasversale presenta **SOLO ZERI**
4. Un filtro ricorrente presenta **POLI E ZERI**
5. Un filtro puramente ricorrente presenta **SOLO POLI**
6. Spettro di energia e funzione di autocorrelazione sono legate tra loro, a meno di una costante moltiplicativa, da **TRASFORMATA SECONDO FOURIER**
7. L'oscillazione AM viene anche chiamata **DSB**
8. Il criterio di Nyquist enuncia una condizione per **ANNULLARE INTERFERENZA INTERSIMBOLO**
9. Un'oscillazione modulata è un segnale passa-banda **SEMPRE**
10. Un codice di linea si dice sistematico se **I K BIT DI INFORMAZIONE SONO DISTINTI DAGLI I BIT DI RIDONDANZA**
11. Il parametro a nelle reti di telecomunicazioni può generare problemi quando **GRANDE, MAGGIORE DI 1**
12. La simmetria dello spettro di ampiezza e l'antisimmetria dello spettro di fase sono condizione necessaria e sufficiente perché un segnale passa-banda sia **UN'OSCILLAZIONE MODULATA A PRODOTTO**
13. La funzione $x(t)$ è a potenza finita, quindi non ammette **TRASFORMATA SECONDO FOURIER**
14. La formula di Carson esprime la larghezza di banda di un segnale modulato **CENTRATO SU ω_0**
15. Il ritardo che un pacchetto subisce in un sistema TDMA rispetto a FDMA è **MINORE**
16. Il protocollo di accesso multiplo slotted ALOHA ha un valore massimo di throughput normalizzato pari a **DOPPIO DI ALOHA**
17. Un modulatore PM diventa FM **ANTEPONENDO RETE INTEGRATRICE**
18. Un modulatore FM diventa PM **ANTEPONENDO RETE DERIVATRICE**
19. Un demodulatore coerente **FA USO DELLA PORTANTE DEL SEGNALE MODULATO**

- 20.** Per avere conoscenza completa dal punto di vista energetico di una funzione aleatoria occorre conoscere **LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DEL SECONDO ORDINE**
- 21.** Un'oscillazione modulata a prodotto ha uno spettro di ampiezza che è **CON DUE BANDE LATERALI A FIANCO DELLA FREQUENZA PORTANTE**
- 22.** La stazionarietà di un processo stocastico è condizione **NECESSARIA AFFINCHÈ QUESTO SIA ERGODICO**
- 23.** Le prestazioni delle reti possono essere compromesse quando il rapporto tra il tempo di propagazione e il tempo di trasmissione è **MAGGIORE DI 0,1**
- 24.** La modulazione SSB-SC è sinonimo di **CONVERSIONE A FREQUENZA IN SALITA**
- 25.** Livelli ISO/OSI: **1) FISICO, 2) LINEA, 3) RETE, 4) TRASPORTO, 5) SESSIONE, 6) PRESENTAZIONE, 7) APPLICAZIONE**
- 26.** Da un punto di vista della velocità di trasmissione FDMA rispetto TDMA **HA LE STESSE PRESTAZIONI**
- 27.** La conversione di frequenza è una modulazione di tipo **SSB-SC**
- 28.** Formula di Carson **SEGNALE MODULATO AD ANGOLO**