

SCHEMI DELLE LEZIONI  
DI  
**Comunicazioni  
elettriche**

Leonardo Calandrino • Gianni Immovilli



Pitagora Editrice Bologna

*Prima edizione: 1991  
Ristampa: giugno 1998*

LEONARDO CALANDRINO  
GIANNI IMMOVILLI

Ordinari di Comunicazioni Elettriche  
Facoltà di Ingegneria  
Università degli Studi di Bologna

ISBN 88-371-0568-1

© Copyright 1991 by Pitagora Editrice S.r.l., Via del Legatore 3, Bologna, Italy.

Tutti i diritti sono riservati, nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta, memorizzata o trasmessa per mezzo elettronico, elettrostatico, fotocopia, ciclostile, senza il permesso dell'Editore.

*Stampa:* Tecnoprint S.n.c., Via del Legatore 3, Bologna.  
*Codice:* 26/298

sito INTERNET: <http://www.pitagoragroup.it>  
e-mail: [pited@pitagoragroup.it](mailto:pited@pitagoragroup.it)

Il presente volume costituisce la raccolta dei lucidi che gli autori intendono utilizzare per le lezioni e le esercitazioni in aula dell'insegnamento di Comunicazioni Elettriche dei Corsi di Laurea del Settore dell'Informazione della Facoltà di Ingegneria.

Avendo già deciso questa raccolta, gli autori hanno riportato sui lucidi frasi di introduzione, spiegazione e commento che di norma vengono presentate solo verbalmente. Ciò allo scopo di fornire agli studenti un ausilio didattico sufficientemente autonomo, anche se concepito nella forma di schemi di lezione.

L'appendice, contenente esercizi e quesiti proposti all'attenzione dello studente, fornisce un'ulteriore guida alla preparazione dell'esame.

Bologna, settembre 1991

Gli autori

## I N D I C E

### CAPITOLO I

#### SCENARIO DEL MONDO DELLE TELECOMUNICAZIONI CONTENUTO DEL VOLUME

1.1	SEGNALI E COLLEGAMENTI .....	pag. 1.02
1.2	RETI DI TELECOMUNICAZIONE .....	" 1.06
1.3	ORGANISMI INTERNAZIONALI .....	" 1.18
1.4	CONTENUTO DEL VOLUME .....	" 1.19

### CAPITOLO II

#### ANALISI DELLE FUNZIONI DETERMINISTICHE

2.1	PREMESSA .....	pag. 2.02
2.2	FUNZIONI PERIODICHE TEMPO CONTINUE ....	" 2.04
2.3	FUNZIONI APERIODICHE TEMPO-CONTINUE ...	" 2.07
2.4	ALCUNE PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI FOURIER .....	" 2.10
2.5	ESERCIZI .....	" 2.13
2.6	RIPETIZIONE PERIODICA DI UNA FUNZIONE .	" 2.25
2.7	SERIE TEMPORALI .....	" 2.29
2.8	ESERCIZI .....	" 2.32
2.9	TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DEI TEMPI .....	" 2.40

2.10 ALCUNE PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI UNA SERIE TEMPORALE .....	pag.	2.45
2.11 ESERCIZIO N. 9 .....	"	2.47
2.12 CORRISPONDENZE INTRODOTTE DALL'ANALISI DI FOURIER .....	"	2.49
2.13 LA TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA ....	"	2.50
2.14 L'OPERATORE DI DIRAC (LA "FUNZIONE IMPULSIVA") .....	"	2.56
2.15 ESERCIZI .....	"	2.59

### CAPITOLO III

#### APPLICAZIONE DELL'ANALISI DEI SEGNALI ALLO STUDIO DEI SISTEMI LINEARI

3.1 APPLICAZIONE DELL'ANALISI DI FOURIER ALLO STUDIO DEI SISTEMI LINEARI TEMPO-CONTINUI .....	pag.	3.02
3.2 CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE .....	"	3.13
3.3 I FILTRI ELETTRICI .....	"	3.15
3.4 FILTRI TRASVERSALI .....	"	3.20
3.5 RISPOSTA IMPULSIVA DI UNA RETE LINEARE ..	"	3.29
3.6 ESERCIZI .....	"	3.32
3.7 SISTEMI LINEARI TEMPO-DISCRETI .....	"	3.39

## CAPITOLO IV

### FUNZIONI AD ENERGIA FINITA E A POTENZA FINITA SPETTRI DI ENERGIA E DI POTENZA

4.1	FUNZIONI TEMPO-CONTINUE AD ENERGIA FINITA E A POTENZA FINITA ...	pag. 4.03
4.2	FUNZIONI AD ENERGIA FINITA: SPETTRO DI ENERGIA E FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE .....	" 4.06
4.3	FUNZIONI A POTENZA FINITA: FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE .....	" 4.13
4.4	FUNZIONI A POTENZA FINITA: SPETTRO DI POTENZA .....	" 4.19
4.5	RELAZIONE FRA SPETTRO DI POTENZA ED ANALISI DI FOURIER .....	" 4.23
4.6	ESERCIZI .....	" 4.25
4.7	SERIE TEMPORALI A POTENZA FINITA .....	" 4.28
4.8	SEGNALI PAM .....	" 4.30

## CAPITOLO V

### PROCESSI STOCASTICI

5.1	FUNZIONI ALEATORIE O PROCESSI STOCASTICI	pag. 5.03
5.2	DESCRIZIONE STATISTICA DI UN PROCESSO STOCASTICO CONTINUO NEI VALORI E TEMPO-CONTINUO ..	" 5.07
5.3	VALORI MEDI .....	" 5.13
5.4	PROCESSI STAZIONARI. PROCESSI ERGODICI .	" 5.17
5.5	TRASFORMAZIONI LINEARI DI PROCESSI STOCASTICI .....	" 5.23
5.6	PROCESSI GAUSSIANI .....	" 5.24

5.7	ESERCIZI .....	pag. 5.26
5.8	PROCESSI STOCASTICI DISCRETI NEI VALORI E TEMPO-CONTINUI .....	" 5.35
5.9	PROCESSI STOCASTICI TEMPO-DISCRETI ....	" 5.37
5.10	SEGNALI PAM ALEATORI .....	" 5.41

## CAPITOLO VI

### SEGNALI PASSA-BASSO ANALOGICI E RELATIVI SERVIZI

6.1	SEGNALI ANALOGICI CHE PIU' INTERESSANO LE TELECOMUNICAZIONI .....	pag. 6.03
6.2	I SEGNALI AUDIO .....	" 6.05
6.3	IL SEGNALE TELEVISIVO .....	" 6.06
6.4	FACSIMILE E VIDEOLENTO ANALOGICI .....	" 6.11
6.5	ALCUNE ANTICIPAZIONI SULLA TEORIA DELLA MODULAZIONE .....	" 6.12
6.6	SEGNALI MULTICANALE A DIVISIONE DI FREQUENZA .....	" 6.17

## CAPITOLO VII

### SEGNALI PASSA-BASSO NUMERICI E RELATIVI SERVIZI

7.1	GENERALITA' SUI SEGNALI NUMERICI .....	pag. 7.03
7.2	CONVERSIONE A/D .....	" 7.04
7.3	CONVERSIONE D/A .....	" 7.08
7.4	SEGNALI MULTICANALE A DIVISONE DI TEMPO	" 7.12

7.5	SEGNALI TDM-PCM .....	pag. 7.13
7.6	SERVIZI TELEMATICI .....	" 7.21

## CAPITOLO VIII

### IL RUMORE DI FONDO CALCOLO DI MASSIMA DI ALCUNI COLLEGAMENTI

8.1	IL RUMORE NEI CIRCUITI ELETTRICI .....	pag. 8.03
8.2	POTENZA DISPONIBILE DI UNA SORGENTE DI SEGNALE. GUADAGNO DISPONIBILE DI UN QUADRIPOLO LINEARE .....	" 8.11
8.3	CIFRA DI RUMORE E TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE .....	" 8.17
8.4	ESERCIZI .....	" 8.24
8.5	TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE DI UNA SORGENTE DI SEGNALE .....	" 8.28
8.6	CALCOLO DEI COLLEGAMENTI IN PRESENZA DI RUMORE .....	" 8.29
8.7	LE LINEE DI TRASMISSIONE: IMPEDENZA CA- RATTERISTICA E COSTANTE DI ATTENUAZIONE	" 8.34
8.8	ESERCIZI .....	" 8.39
8.9	ALCUNI CALCOLI DI MASSIMA SU UN COLLEGAMENTO NUMERICO SU LINEA ..	" 8.47
8.10	CENNI SUI COLLEGAMENTI NUMERICI SU FIBRA OTTICA. IL LIMITE QUANTICO .....	" 8.65

## CAPITOLO IX

### INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLA MODULAZIONE

9.1	DEFINIZIONI RELATIVE ALLA MODULAZIONE DI PORTANTE SINUSOIDALE .....	pag. 9.03
9.2	RAPPRESENTAZIONE SIMBOLICA DI OSCILLAZIONI SINUSOIDALI MODULATE: L'INVILUPPO COMPLESSO .....	" 9.10
9.3	MODULATORI E DEMODULATORI COME BLOCCHI FUNZIONALI .....	" 9.13
9.4	CARATTERISTICHE SPETTRALI DI UNA OSCILLAZIONE AM. OSCILLAZIONI DSB, SSB, VSB, DSB-SC, SSB-SC .....	" 9.20
9.5	ESERCIZI .....	" 9.29
9.6	MODULATORI E DEMODULATORI A PRODOTTO. MODULAZIONE QAM .....	" 9.34
9.7	CARATTERISTICHE SPETTRALI DI OSCILLAZIONI MODULATE IN ANGOLO ...	" 9.39
9.8	ESERCIZI .....	" 9.45
9.9	NATURA DI UN SEGNALE PASSA-BANDA .....	" 9.48
9.10	OSCILLAZIONI MODULATE CON SEGNALI MODULANTI A POTENZA FINITA .....	" 9.54
9.11	SISTEMI DI MODULAZIONE PER SEGNALI NUMERICI .....	" 9.57

## CAPITOLO X

### TRASMISSIONE DI SEGNALI PASSA-BANDA ALCUNE APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLA MODULAZIONE

10.1	SISTEMI DI TRASMISSIONE DI TIPO PASSA-BANDA. PRINCIPALI BANDE DI FREQUENZA .....	pag. 10.03
10.2	RISPOSTA DI QUADRIPOLI LINEARI AD OSCILLAZIONI MODULATE. EQUIVALENTE PASSA-BASSO .....	" 10.09
10.3	CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE DI GRUPPO DI UNA RETE LINEARE PASSA-BANDA .....	" 10.14
10.4	RISPOSTA DI RETI PASSA-BANDA AD OSCILLAZIONI MODULATE A PRODOTTO E DI TIPO QAM .....	" 10.25
10.5	CENNI SULLE PRINCIPALI APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLA MODULAZIONE .....	" 10.31
10.6	CENNI SULLA RADIODIFFUSIONE DEI PROGRAMMI SONORI E TELEVISIVI ....	" 10.32

### APPENDICE

ESERCIZI E QUESITI PROPOSTI .....	pag. A.01
-----------------------------------	-----------

CAPITOLO I

SCENARIO DEL MONDO DELLE TELECOMUNICAZIONI

CONTENUTO DEL VOLUME

### 1.1 SEGNALI E COLLEGAMENTI.

CONSIDERIAMO UNA SORGENTE DI INFORMAZIONE CHE GENERA UN MESSAGGIO ED UN UTENTE, FISICAMENTE DISTINTO DALLA SORGENTE (MA NON NECESSARIAMENTE DISTANTE DA essa), A CUI IL MESSAGGIO È DESTINATO (FIG. 1.1.1). IL PROBLEMA È QUELLO DI STABILIRE UN COLLEGAMENTO CHE RENDA DISPONIBILE IL MESSAGGIO ALL'UTENTE SENZA DETRIORARLO IN MODO DA IMPREDIRNE L'UTILIZZAZIONE, CIOÈ CON UNA PREFISSATA QUALITÀ DI TRASMISSIONE.



Fig. 1.1.1

#### TIPI DI INFORMAZIONE:

- \* TESTO SCRITTO (SEGNALE TELEGRAFICO)
- \* IMMAGINI FISSE (SEGNALE FACSIMILE)
- \* IMMAGINI IN MOVIMENTO (SEGNALE TELEVISIVO)
- \* FONIA (SEGNALE AUDIO)
- \* DATI (SEGNALE DATI)
- \* .....

#### SCHEMA A BLOCCHI DI UN COLLEGAMENTO:

SORGENTE / TRASDUTTORE / TRASMETTITORE / MEZZO DI PROPAGAZIONE / RICEVITORE / TRASDUTTORE / UTENTE



Fig. 1.1.2

ESEMPI DI TRASMETTITORE / MEZZO DI PROPAGAZIONE / RICEVITORE:

1. AMPLIFICATORE / LINEA METALLICA / AMPLIFICATORE  
(Il trasmettitore ed il ricevitore eseguono semplici amplificazioni)

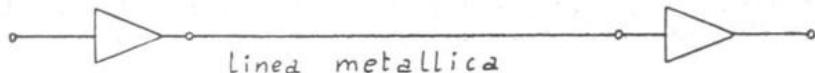


Fig. 1.1.3

2. TRASMETTITORE OTTICO / FIBRA OTTICA / RICEVITORE OTTICO

(Il trasmettitore ed il ricevitore eseguono elaborazioni per trasferire il contenuto informativo di un segnale dalla gamma di frequenze originaria a quella delle frequenze ottiche e viceversa)



Fig. 1.1.4

3. RADIOTRASMETTITORE / TRATTA RADIO / RADIORICEVITORE  
(Il trasmettitore ed il ricevitore eseguono elaborazioni per trasferire il contenuto informativo di un segnale dalla gamma di frequenze originaria a quella delle frequenze radio e viceversa)



Fig. 1.1.5

4. RADIOTRASMETTITORE TERRESTRE / TRATTA RADIO IN SALITA / RICETRASMETTITORE SU SATELLITE GEOSTAZIONARIO / TRATTA RADIO IN DISCESA / RADIORICEVITORE TERRESTRE (I trasmettitori ed i ricevitori eseguono elaborazioni per trasferire il contenuto informativo di un segnale dalla gamma di frequenze originaria a quella delle frequenze radio e viceversa - Le tritte in salita ed in discesa operano a frequenze diverse)

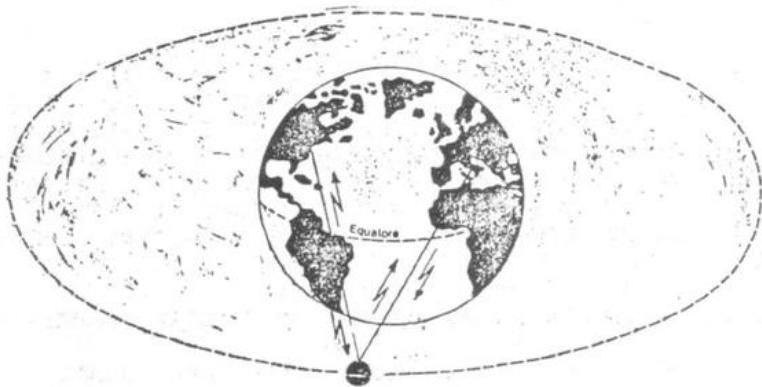


Fig. 1.1.6

IN CONCLUSIONE, IL MEZZO DI PROPAGAZIONE PUO' ESSERE UN PORTANTE FISICO (FIBRA OTTICA, LINEA METALLICA) OD UN PORTANTE HERTZIANO.

## QUALITA' DI TRASMISSIONE

NELLA TRASMISSIONE DI SEGNALI ANALOGICI OCCORRE:

- \* ASSICURARE CHE IL SEGNALE RICEVUTO RIPRODUCA INDISTORTO IL SEGNALE ORIGINARIO (CIOE' NE RIPRODUCA LA FORMA D'ONDA A MENO DI UNA COSTANTE MOLTIPLICATIVA E DI UN RITARDO)
- \* IL RUMORE ED I DISTURBI CHE SI SOVRAPPONGONO AL SEGNALE UTILE SIANO CONTENUTI ENTRO LIMITI PREFISSATI (CIOE' IL RAPPORTO SEGNALE/RUMORE SI MANTENGA NON INFERIORE AD UN VALORE STABILITO)

NELLA TRASMISSIONE DI SEGNALI NUMERICI LE CIFRE RIGENERATE IN RICEZIONE DOVREBBERE RIPRODURRE QUELLE TRASMESSE NEI VALORI E NELLA CADENZA TEMPORALE. IN REALTA' SONO POSSIBILI ERRORI NEL RICONOSCIMENTO DELLE CIFRE CON UNA CERTA FREQUENZA (TASSO DI ERRORE) E MANCATO RISPETTO DELLA SUDDETTA CADENZA (JITTER).

PERTANTO NELLA TRASMISSIONE DI SEGNALI NUMERICI OCCORRE CHE:

- \* IL TASSO DI ERRORE NON SUPERI UN VALORE STABILITO
- \* IL JITTER SI MANTENGA ENTRO LIMITI PREFISSATI

## COLLEGAMENTI UNIDIREZIONALI E BIDIREZIONALI

FINORA ABBIAMO CONSIDERATO UN COLLEGAMENTO UNIDIREZIONALE (DA A OVE E' SITUATA LA SORGENTE VERSO B OVE E' SITUATO L'UTENTE). PIU' COMUNE E' IL CASO IN CUI SIA RICHIESTO DI STABILIRE UN COLLEGAMENTO BIDIREZIONALE FRA A E B:



Fig. 1.1.7

*NO*

## 1.2 RETI DI TELECOMUNICAZIONE.

CONSIDERIAMO ORA UNA MOLTEPLICITA' DI PUNTI A, B, C, ..., CHE DEBBANO SCAMBIARSI VICENDEVOLMENTE DELLE INFORMAZIONI. IL SISTEMA CHE CONSENTE DI REALIZZARE QUESTO OBIETTIVO VIENE DETTO RETE DI TELECOMUNICAZIONE. ESSA COMPRENDE NECESSARIAMENTE PIU' COLLEGAMENTI BIDIREZIONALI (RAMI) DEI TIPI CONSIDERATI IN PRECEDENZA.

LA RETE PUO' ESSERE CONFIGURATA IN VARI MODI:

### 1. RETE A MAGLIA INTERAMENTE CONNESSA

I PUNTI A, B, C, ..., VENGONO COLLEGATI A DUE A DUE, IN TUTTI I MODI POSSIBILI.

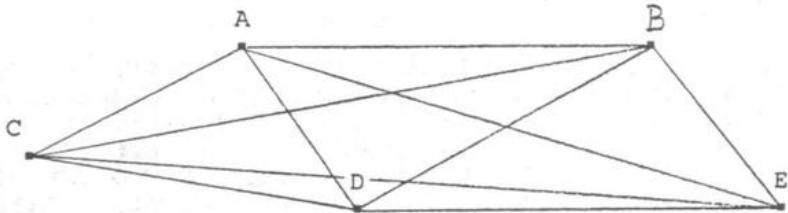


Fig. 1.2.1

SE N SONO I PUNTI DA COLLEGARE, TALE ARCHITETTURA RICHIEDE UN NUMERO DI RAMI PARI A

$$(1.2.1) \quad \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$$

## 2. RETE A STELLA

IL NUMERO DEI RAMI PUO' ESSERE RIDOTTO E RESO EGUALE AL NUMERO N DEI PUNTI, INTRODUCENDO UN NODO SUPPLEMENTARE A CUI VENGONO COLLEGATI I PUNTI STESSI. NEL NODO OCCORRE PROVVEDERE, DI VOLTA IN VOLTA, A STABILIRE LA CONNESSIONE FRA LE DUE LINEE ESTERNE CHE FANNO CAPO AI PUNTI CHE DEBBONO COMUNICARE FRA LORO.

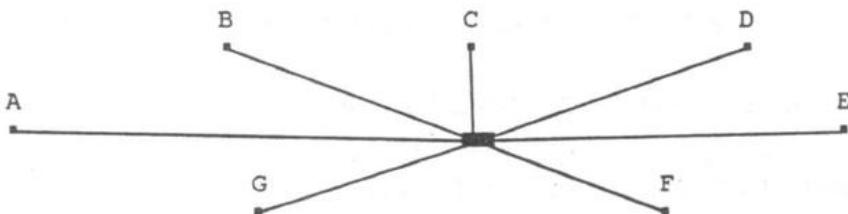


Fig. 1.2.2

L'OPERAZIONE DI CONNESSIONE CHE AVVIENE NEL NODO E' DETTA COMMUTAZIONE (SI PARLA QUINDI DI NODO O CENTRO DI COMMUTAZIONE). PIU' PRECISAMENTE, SI TRATTA DI COMMUTAZIONE DI CIRCUITO, IN QUANTO IL SUO RISULTATO E' L'INSTAUARZIONE DI UN CIRCUITO O COLLEGAMENTO CHE PERMANE PER TUTTA LA DURATA DELLA COMUNICAZIONE, A DISPOSIZIONE ESCLUSIVA DEI DUE TERMINALI.

IL RISPARMIO NEL NUMERO DEI COLLEGAMENTI AVVIENE A SPESE DELL'INTRODUZIONE DEL NODO DI COMMUTAZIONE, CHE VA SITUATO IN POSIZIONE "BARICENTRICA" IN MODO DA MINIMIZZARE LA LUNGHEZZA COMPLESSIVA DEI COLLEGAMENTI.

TALE LUNGHEZZA PUO' RISULTARE TUTTAVIA ECCESSIVA (IN TERMINI DI COSTO) SE I PUNTI DA COLLEGARE SONO DISTRIBUITI SU UN'AREA MOLTO ESTESA. OCCORRE QUINDI REALIZZARE UNA ARCHITETTURA DI RETE PIU' COMPLESSA, IN CUI VENGONO INTRODOTTI NODI O CENTRI DI COMMUTAZIONE DIVERSI, FRA LORO COLLEGATI, AL FINE DI MINIMIZZARE IL COSTO DELL'INTERA RETE. PER FARE RIFERIMENTO AD UN CASO CONCRETO, PARTICOLARMENTE SIGNIFICATIVO, CONSIDERIAMO GLI UTENTI TELEFONICI E QUINDI LA RETE TELEFONICA, COSÌ COME PREVISTA DAL PIANO REGOLATORE TELEFONICO NAZIONALE.

1. GLI UTENTI DI UN'AREA URBANA SONO COLLEGATI A STELLA AD UN CENTRO DI RETE URBANA (IN REALTA' CIO' E' VERO SOLO PER PICCOLE AREE, PER LE ALTRE L'ARCHITETTURA DELLA RETE URBANA E' DI TIPO POLICENTRICO):

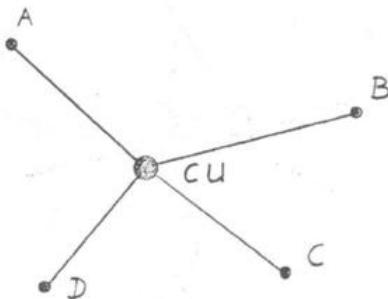


Fig. 1.2.3

2. PIU' AREE URBANE CONTIGUE SONO RAGGRUPPATE IN UN SETTORE, CHE VIENE DOTATO DI UN NODO DI COMMUTAZIONE (CENTRO SETTORE), A CUI I CENTRI URBANI DI COMPETENZA VENGONO COLLEGATI A STELLA (RETE SETTORIALE):

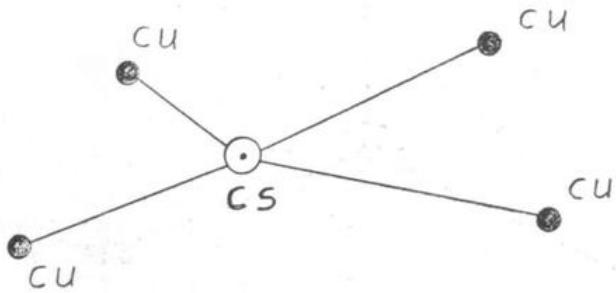


Fig. 1.2.4

3. PIU' SETTORI CONTIGUI SONO RAGGRUPPATI IN UN DISTRETTO, CHE VIENE DOTATO DI UN NODO DI COMMUTAZIONE (CENTRO DI DISTRETTO), A CUI I CENTRI DEI SETTORI DI COMPETENZA VENGONO COLLEGATI A STELLA (RETE DISTRETTUALE) :

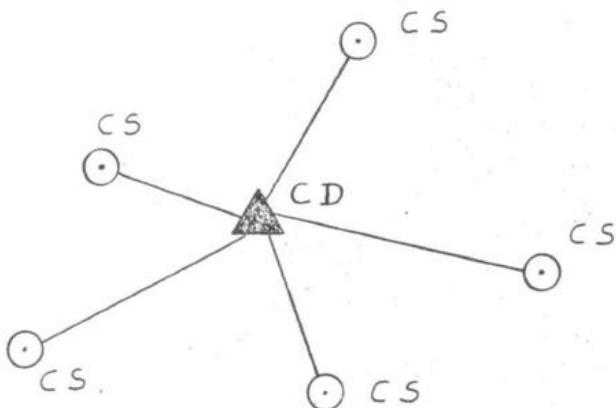


Fig. 1.2.5

4. PIU' DISTRETTI CONTIGUI SONO RAGGRUPPATI IN UN COMPARTIMENTO, CHE VIENE DOTATO DI UN NODO DI COMMUTAZIONE (CENTRO DI COMPARTIMENTO), A CUI I CENTRI DI DISTRETTO DI COMPETENZA VENGONO COLLEGATI A STELLA (RETE COMPARTEMENTALE) :

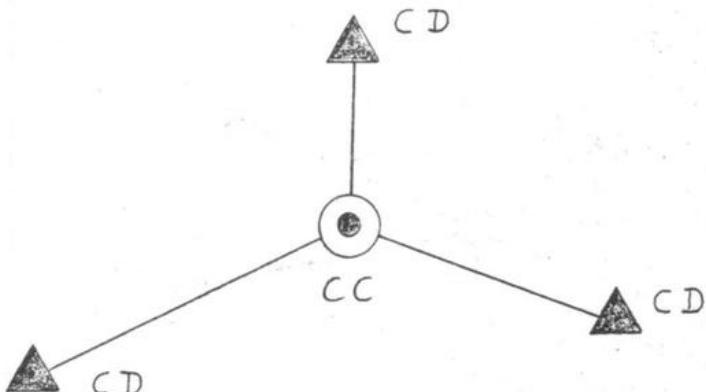


Fig. 1.2.6

5. I CENTRI DI COMPARTIMENTO VENGONO COLLEGATI FRA LORO MEDIANTE UNA RETE A MAGLIA (RETE INTERCOMPARTIMENTALE):

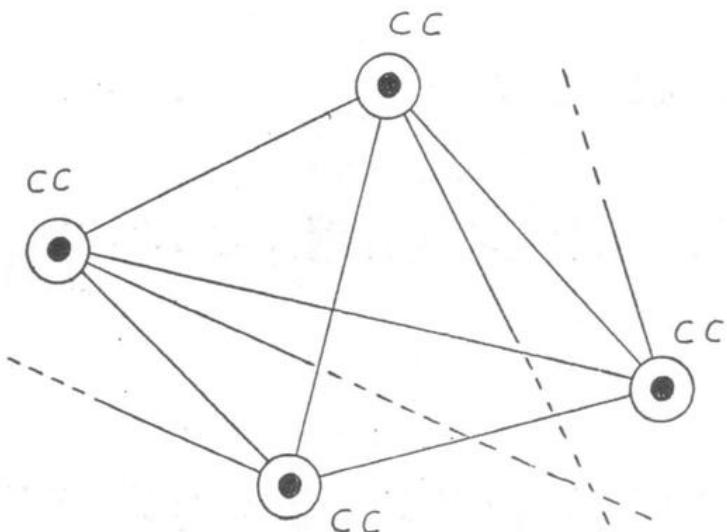


Fig. 1.2.7

IL PIANO REGOLATORE NAZIONALE DELLE TELECOMUNICAZIONI, APPROVATO CON D.M. 6.4.1990, PREVEDE ATTUALMENTE LA SUDDIVISIONE DEL TERRITORIO NAZIONALE IN 21 COMPARTIMENTI, 232 DISTRETTI E 1399 SETTORI.

IL RAGGRUPPAMENTO DI AREE URBANE IN SETTORI, DI SETTORI IN DISTRETTI E DI DISTRETTI IN COMPARTIMENTI, VIENE DETERMINATO IN RELAZIONE ALLA LORO SITUAZIONE GEOGRAFICA, NONCHE' ALL'ENTITA' ED AL PRESUMIBILE SVILUPPO DEL TRAFFICO TELEFONICO CHE SI Svolge NELL'AMBITO DI OGNI SINGOLA AREA E CON L'ESTERNO.

RIASSUMENDO, PRESENTIAMO I SEGUENTI SCHEMI DI COLLEGAMENTO FRA:

1. UTENTI TELEFONICI DELLA STESSA AREA URBANA:

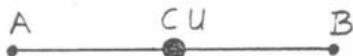


Fig. 1.2.8

2. UTENTI TELEFONICI APPARTENENTI AD AREE URBANE DISTINTE, MA FACENTI PARTE DELLO STESSO SETTORE:



Fig. 1.2.9

3. UTENTI TELEFONICI APPARTENENTI A SETTORI DISTINTI, MA FACENTI PARTE DELLO STESSO DISTRETTO:



Fig. 1.2.10

4. UTENTI TELEFONICI APPARTENENTI A DISTRETTI DISTINTI, MA FACENTI PARTE DELLO STESSO COMPARTIMENTO:

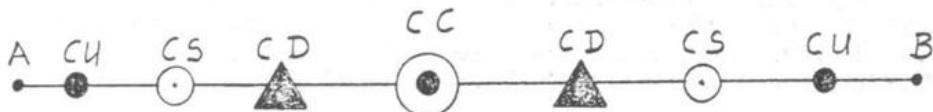


Fig. 1.2.11

5. UTENTI TELEFONICI APPARTENENTI A COMPARTIMENTI DIVERSI:



Fig. 1.2.12

RIPROPONIAMO QUEST'ULTIMO SCHEMA NELLA FORMA SEGUENTE, CHE MEGLIO METTE IN EVIDENZA L'ARCHITETTURA DI TIPO GERARCHICO DELLA RETE E SEGNALA INOLTRE LA POSSIBILE PRESENZA DI COLLEGAMENTI, DETTI TRASVERSALI O NON OMOLOGHI, IN PRECEDENZA NON CONSIDERATI:

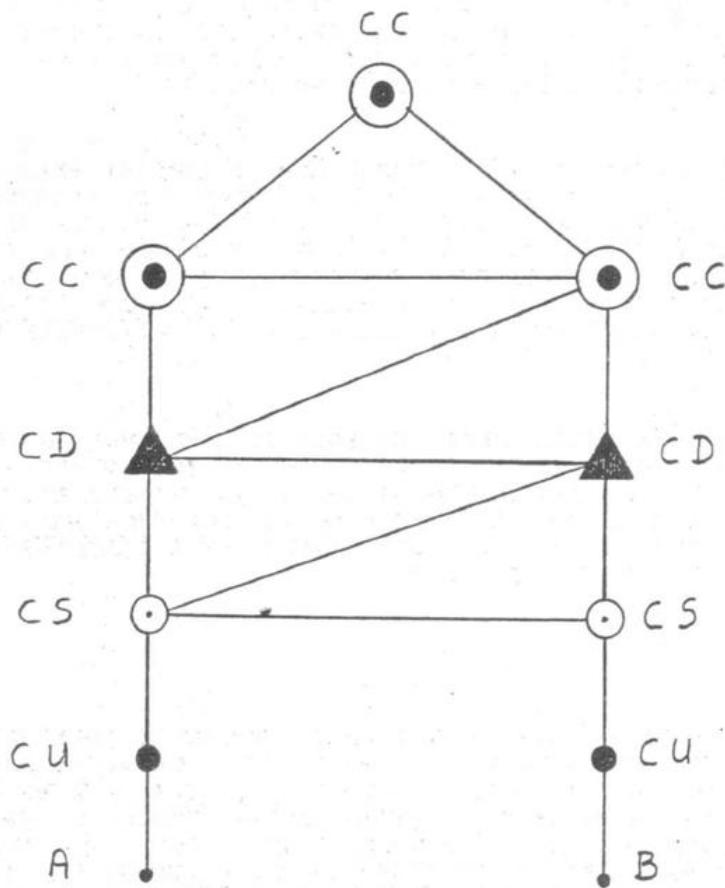


Fig. 1.2.13

NO

PER COMPLETEZZA DI INFORMAZIONE, RIPORTIAMO DAL  
GIA' CITATO PIANO REGOLATORE QUANTO SEGUE CON RIFERI-  
MENTO ALL'ATTUALE NUMERAZIONE TELEFONICA.

" LA NUMERAZIONE DEGLI UTENTI E' UNIVOCÀ NELL'AMBITO  
DI CIASCUN DISTRETTO: IN RELAZIONE AL TRAFFICO DI-  
STRETTUALE OGNI UTENTE, PERTANTO, E' CARATTERIZZATO  
DA UN PROPRIO NUMERO TELEFONICO CHE LO IDENTIFICA E  
CHE HA INIZIO CON UNA CIFRA DIVERSA DA 0 (ZERO) E DA  
1 (CHE SONO UTILIZZATE COME PREFISSI).

L'ACCESSO ALLA TELESCELLEZIONE INTERDISTRETTUALE E'  
CARATTERIZZATO DALLA CIFRA 0 (ZERO) CHE COSTITUISCE  
IL PREFISSO INTERDISTRETTUALE. LA NUMERAZIONE DEI DI-  
STRETTI E' UNIVOCÀ IN AMBITO NAZIONALE: PER QUANTO  
CONCERNÉ IL TRAFFICO INTERDISTRETTUALE, OGNI DISTRET-  
TO E' INDIVIDUATO DA UN PROPRIO INDICATIVO DISTRET-  
TUALE COSTITUITO DA UN NUMERO DI CIFRE VARIABILE DA  
UNA E TRE.

L'INSIEME DELLE CIFRE NECESSARIE PER INDIVIDUARE UN  
UTENTE IN AMBITO NAZIONALE (CONSISTENTE CIOE'  
DELL'INDICATIVO DISTRETTUALE E DEL NUMERO D'UTENTE)  
PRENDE IL NOME DI NUMERO (SIGNIFICATIVO) NAZIONALE.  
LA LUNGHEZZA MASSIMA DEL NUMERO (SIGNIFICATIVO) NA-  
ZIONALE E' DI 9 CIFRE."

FINORA ABBIAMO CONSIDERATO SOLTANTO COLLEGAMENTI  
TELEFONICI IN AMBITO NAZIONALE. PER COMUNICAZIONI IN-  
TERNAZIONALI, IL PIANO PREVEDE CENTRI NAZIONALI DI  
TRANSITO, ATTRAVERSO I QUALI PASSA TUTTO IL TRAFFICO  
TELEFONICO ENTRANTE ED USCENTE DAL PAESE. AD ESSI SI  
ACCEDE MEDIANTE IL PREFISSO INTERNAZIONALE (IN ITALIA  
00), A CUI DEVE SEGUIRE L'INDICATIVO NAZIONALE DEL PAE-  
SE CHIAMATO (L'INDICATIVO NAZIONALE DELL'ITALIA E' 39).

LA RETE COMMUTATA PRESENTATA IN PRECEDENZA E' UN SISTEMA MOLTO COMPLESSO, ANCHE SE CI E' ASSAI FAMILIARE A CAUSA DEL SUO USO QUOTIDIANO. ESSA METTE IN EVIDENZA LE SEGUENTI TEMATICHE:

\* TRASMISSIONE

\* COMMUTAZIONE

PER POTER INSTAURARE L'INSTRADAMENTO RICHIESTO DALL'UTENTE CHIAMANTE, LE DIVERSE CENTRALI COINVOLTE DEBONO POTERSI SCAMBIARE VICENDEVOLMENTE LE NECESSARIE INFORMAZIONI. ESSE, UNITAMENTE A QUELLE CHE SERVONO PER GESTIRE LA RETE, COSTITUISCONO LA SEGNALAZIONE.

IN PASSATO, I PROBLEMI DELLA TRASMISSIONE E DELLA COMMUTAZIONE VENIVANO RISOLTI CON TECNICHE COMPLETAMENTE DIVERSE:

- \* ELABORAZIONE ANALOGICA DEI SEGNALI PER LA TRASMISSIONE
- \* TECNICHE ELETTROMECCANICHE PER LA COMMUTAZIONE

#### INTEGRAZIONE NELLA TECNICA

ALLORCHE' LA TECNOLOGIA HA MESSO A DISPOSIZIONE ELABORATORI ELETTRONICI ECONOMICAMENTE INTERESSANTI, CHE POSSONO, OPPORTUNAMENTE PROGRAMMATI, EFFETTUARE ANCHE OPERAZIONI DI COMMUTAZIONE, SI E' RESA PIU' CONVENIENTE UNA TECNICA DI COMMUTAZIONE BASATA SULLA CONVERSIONE DEI SEGNALI ANALOGICI IN SEGNALI NUMERICI (NOTA DA TEMPO, COME VEDREMO), SFRUTTANDO L'INFORMAZIONE DI SEGNALAZIONE ANCH'ESSA POSTA IN FORMA NUMERICA.

IN QUESTO CONTESTO, CONVIENE CHE ANCHE LA TRASMISSIONE DEI SEGNALI AVVenga IN FORMA NUMERICA. IN CONCLUSIONE, LA TECNICA NUMERICA VIENE ADOTTATA SIA PER LA TRASMISSIONE CHE PER LA COMMUTAZIONE: SI PARLA ALLORA DI RETE INTEGRATA NELLA TECNICA:

IDN = INTEGRATED DIGITAL NETWORK

## INTEGRAZIONE NEI SERVIZI

FINORA ABBIAMO CONSIDERATO IL SERVIZIO TELEFONICO.

ALTRO CASO FAMILIARE E' QUELLO DEL SERVIZIO TELEX (SCAMBIO DI TESTI SCRITTI), CHE E' FORNITO DA UNA RETE (RETE TELEX) AVENTE ESSA PURE ESTENSIONE INTERNAZIONALE E CHE HA UNA ARCHITETTURA ANALOGA A QUELLA DELLA RETE TELEFONICA.

CONSIDERIAMO ORA IL SERVIZIO DATI. ANCHE TALE SERVIZIO POTREBBE ESSERE FORNITO DA UNA RETE AD ESSO DEDICATA (RETE DATI). UNA CARATTERISTICA DEL SERVIZIO DATI E' CHE IN GENERALE L'INFORMAZIONE VIENE TRASMESSA SOTTO FORMA DI BREVI SEQUENZE DI CIFRE BINARIE (BIT), CHE FORMANO DEI "PACCHETTI". IN TAL CASO LA COMMUTAZIONE DI CIRCUITO DIANZI CONSIDERATA NON SAREBBE ECONOMICAMENTE CONVENIENTE (IL TEMPO IMPIEGATO PER LA FORMAZIONE DEL CIRCUITO SAREBBE DI GRAN LUNGA SUPERIORE ALLA DURATA DELLA SUA UTILIZZAZIONE). PIU' VANTAGGIOSA, IN TAL CASO, E' LA COMMUTAZIONE DI PACCHETTO: IL PACCHETTO CONSEGNATO ALLA RETE DA UN UTENTE COMPRENDE L'INDIRIZZO DI DESTINAZIONE. LA RETE PROVVEDE A FAR PERVENIRE AL DESTINATARIO IL PACCHETTO, SENZA CREARE UN CIRCUITO DI PERTINENZA ESCLUSIVA DEI DUE UTENTI. A QUESTO PROPOSITO CITIAMO, FRA LE RETI PUBBLICHE, LA RETE ITAPAC, GESTITA DALLA SIP.

L'ELENCO DEI SERVIZI CHE INTERESSANO PUO' ESSERE ESTESO (FONIA, DATI, TESTI, IMMAGINI FISSE ED IN MOVIMENTO, ...). DOBBIAMO ORA PORCI LA DOMANDA SE CONVIENE PENSARE DI REALIZZARE RETI DEDICATE PER I SINGOLI SERVIZI O NON PIUTTOSTO UNA UNICA RETE IN GRADO DI FORNIRNE UNA MOLTEPLICITA'. TENENDO PRESENTE LO STATO RAGGIUNTO DALLA TECNOLOGIA MICROELETTRONICA, LA SECONDA SOLUZIONE E' QUELLA PIU' VANTAGGIOSA. SI PARLA ALLORA DI RETE INTEGRATA NEI SERVIZI, RETE CHE, COME VEDREMO, FA USO ESCLUSIVO DELLA TECNICA NUMERICA:

ISDN = INTEGRATED SERVICES DIGITAL NETWORK

L'IMPIEGO DI MEZZI TRASMISSIVI E DI COMMUTATORI CHE CONSENTONO IL TRATTAMENTO DI SEGNALI NUMERICI AD ALTISSIMA FREQUENZA DI CIFRA (NUMERO DI CIFRE BINARIE PER SECONDO: BIT RATE), CONSENTIRA' LA REALIZZAZIONE DI RETI INTEGRATE NELLA TECNICA E NEI SERVIZI PER LO SCAMBIO DI GRANDI QUANTITA' DI INFORMAZIONE:

IBCN = INTEGRATED BROADBAND COMMUNICATION NETWORK

O ANCHE:

B-ISDN = BROADBAND ISDN .

LE RETI DI TELECOMUNICAZIONE NON RICOPRONO NECESSARIAMENTE UN'AREA GEOGRAFICAMENTE ESTESA, MA POSSONO COLLEGARE FRA LORO, AD ESEMPIO, DIVERSI TERMINALI ALL'INTERNO DI UN EDIFICIO (UN ELABORATORE DI GRANDE POTENZIALITÀ, STAZIONI DI LAVORO, PERSONAL COMPUTERS, TERMINALI VIDEO, STAMPANTI, PLOTTERS, ECC.). IN TAL CASO SI PARLA DI RETI LOCALI:

LAN = LOCAL AREA NETWORK

UNA RETE LOCALE PUO' ESSERE REALIZZATA SECONDO VARIE TOPOLOGIE:

1. TOPOLOGIA A STELLA:

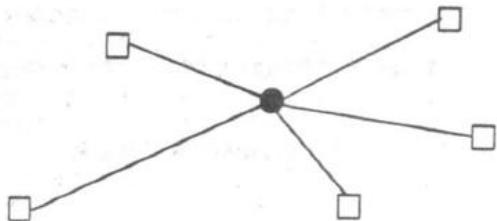


Fig. 1.2.14

2. TOPOLOGIA AD ANELLO:

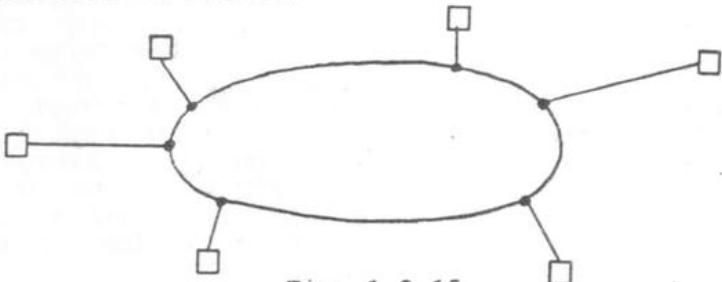


Fig. 1.2.15

3. TOPOLOGIA A BUS:

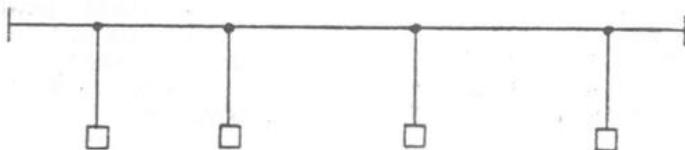


Fig. 1.2.16

NO

IN TUTTI I CASI SIAMO IN PRESENZA DI UNA RISORSA COMUNE, CHE VIENE MESSA A DISPOSIZIONE DI PIU' TERMINALI. DI QUI LA NECESSITA' CHE LE COMUNICAZIONI AVVENGANO SECONDO DETERMINATE REGOLE DI ACCESSO A DETTA RISORSA (PROTOCOLLI) CHE POSSONO ESSERE SIA DI TIPO DETERMINISTICO CHE DI TIPO STATISTICO.

FRA LE RETI AD ANELLO CITIAMO QUELLA TOKEN RING DELLA IBM; FRA LE RETI A BUS, QUELLA ETHERNET DELLA DIGITAL; FRA LE RETI A STELLA, LE RETI RADIO FUNZIONANTE CON PROTOCOLLO ALOHA.

SU UN'AREA PIU' ESTESA, DI TIPO METROPOLITANO, ABBIAMO LE RETI MAN:

MAN = METROPOLITAN AREA NETWORK

LE RETI DI GRANDE ESTENSIONE SONO INDICATE CON LA SIGLA:

WAN = WIDE AREA NETWORK

OVVIAMENTE RETI LOCALI, RETI METROPOLITANE, RETI GEOGRAFICHE POSSONO ESSERE VARIAMENTE INTERCONNESSE FRA LORO.

*NC*

### 1.3 ORGANISMI INTERNAZIONALI.

LA NECESSITA' DI UNO SVILUPPO ORGANICO DEI SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONE, CHE CONSENTA AGLI APPARATI DI COLLOQUIARE FRA LORO, INDIPENDENTEMENTE DALLA TECNICA CON CUI SONO STATI REALIZZATI E DAL PAESE IN CUI SI TROVANO, IMPONE UNA BEN PRECISA NORMATIVA INTERNAZIONALE. A CIO' PROVVEDONO ORGANISMI, FRA I QUALI CITIAMO:

IN AMBITO MONDIALE:

U.I.T. UNION INTERNATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

E' UN ORGANO DELL'ONU; PER EMANARE LE PROPRIE "RACCOMANDAZIONI" SI AVVALE DEGLI STUDI E DELLE PROPOSTE DEI DUE COMITATI TECNICI:

C.C.I.T.T. COMITÉ CONSULTATIF INTERNATIONAL  
TÉLÉGRAPHIQUE ET TÉLÉPHONIQUE

C.C.I.R. COMITÉ CONSULTATIF INTERNATIONAL DES  
RADIOCOMMUNICATIONS

I.S.O. INTERNATIONAL STANDARDIZATION ORGANIZATION

IN AMBITO EUROPEO:

C.E.P.T. CONFERENCE EUROPÉENNE DES ADMINISTRATIONS DES  
POSTES ET TELECOMMUNICATIONS

E.T.S.I. EUROPEAN TELECOMMUNICATIONS STANDARDS IN-  
STITUTE

E.C.M.A. EUROPEAN COMPUTER MANUFACTURES ASSOCIATIONS

#### 1.4 CONTENUTO DEL VOLUME.

LO SCENARIO DEL MONDO DELLE TELECOMUNICAZIONI, PRESENTATO NEI PRECEDENTI PARAGRAFI, OFFRE NUMEROSI ARGOMENTI DI STUDIO CHE VENGONO TRATTATI IN DIVERSI INSEGNAMENTI. IL CONTENUTO DEL VOLUME RIGUARDA ESSENZIALMENTE I SEGNALI (ED I SERVIZI CHE TRAMITE ESSI POSSONO VENIRE OFFERTI) E LA LORO TRASMISSIONE.

COME NECESSARIA PREMESSA ALLO STUDIO DEI SEGNALI CHE INTERESSANO I SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONE, PRESENTEREMO ALGORITMI DI ANALISI DELLE FUNZIONI (SPESSO SI TRATTERA' DI RICHIAMI DI ARGOMENTI GIA' TRATTATI IN CORSI PRECEDENTI O PARALLELI).

CONSIDEREREMO DAPPRIMA LE FUNZIONI DETERMINISTICHE, OSSIA LE FUNZIONI DI CUI E' NOTO A PRIORI L'ANDAMENTO (MEDIANTE RAPPRESENTAZIONI QUALI UNA ESPRESSIONE ANALITICA OD UN GRAFICO). UN ESEMPIO DI FUNZIONE DETERMINISTICA E' DATO DA UN SEGNALE DI PROVA, CHE PUO' ESSERE ASSUNTO PER IL COLLAUDO DI UNA APPARECCHIATURA. FAREMO RIFERIMENTO A DUE TIPI DI ANALISI:

\* ANALISI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE (ANALISI DI FOURIER) O, PIU' IN GENERALE, ANALISI MEDIANTE TRASFORMATE;

\* ANALISI NEL DOMINIO DEI TEMPI.

APPLICHEREMO POI I DUE METODI DI ANALISI ALLO STUDIO DEI SISTEMI LINEARI.

PRENDEREMO POI IN ESAME LE FUNZIONI ALEATORIE: SONO FUNZIONI DI CUI NON CONOSCIAMO A PRIORI L'ANDAMENTO E PER LE QUALI DOBBIAMO INTRODURRE UNA ADEGUATA RAPPRESENTAZIONE, OVVIAMENTE DI TIPO STATISTICO.

TUTTI I SEGNALI, IN QUANTO RECANO INFORMAZIONE, SONO DESCRIVIBILI MEDIANTE FUNZIONI ALEATORIE.

ALTRO ESEMPIO DI FUNZIONE ALEATORIA E' DATO DAL RUMORE, SEMPRE PRESENTE NEI SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONE.

I METODI DI ANALISI DELLE FUNZIONI NEI DOMINI DELLE FREQUENZE E DEI TEMPI VERRANNO GENERALIZZATI AL CASO DI FUNZIONI ALEATORIE, COME PURE VERRANNO CONSIDERATE LE TRASFORMAZIONI CHE ESSE SUBISCONO AD OPERA DEI SISTEMI LINEARI.

Dopo queste premesse, introdurremo i segnali che piu' interessano le telecomunicazioni, a ciascuno dei quali e' associato un servizio. Tali segnali possono essere quelli generati dalle sorgenti di informazione, oppure loro successive elaborazioni richieste dal sistema di trasmissione.

Ad esempio, una rete numerica richiede la conversione in forma digitale dei segnali quando questi sono originariamente analogici.

Sempre ad esempio, nel caso di un collegamento radio, e' necessario provvedere ad una operazione di modulazione, la quale produca un segnale modulato che consenta un uso efficiente del fenomeno dell'irradiazione delle onde e.m.

La conversione analogico/digitale e quella inversa digitale/analogica, come pure la teoria della modulazione, saranno appunto argomenti trattati in questo contesto.

Come accennato in precedenza, i sistemi di telecomunicazione (piu' in generale, tutti i circuiti elettrici) danno origine a rumore, con evidenti conseguenze sulla qualita' di trasmissione.

Provvederemo perciò ad analizzare le piu' importanti cause di rumore nei circuiti, a individuare le proprieta' statistiche del rumore stesso ed a fornire il metodo per caratterizzare la rumorosita' degli apparati che costituiscono un sistema di trasmissione, e quindi quella dell'intero sistema.

Concluderemo infine con la trattazione dei piu' importanti sistemi di trasmissione su portante fisico e su portante hertziano.

## CAPITOLO II

### ANALISI DELLE FUNZIONI DETERMINISTICHE

## 2.1 PREMESSA.

UN SEGNALE ELETTRICO, COME QUELLO PRESENTE ALL'USCITA DELLA SORGENTE DI INFORMAZIONE (SE QUESTA GENERA UN SEGNALE NON ELETTRICO, UN APPOSITO TRASDUTTORE PROVVEDE ALLA SUA CONVERSIONE IN TALE FORMA - V. FIG. 1.1.2), E' RAPPRESENTABILE MEDIANTE UNA FUNZIONE DEL TEMPO  $x(t)$ .

$x(t)$  E' REALE E PUO' ASSUMERE, AL VARIARE DI  $t$ , O TUTTI I VALORI APPARTENENTI AD UN CERTO INTERVALLO OPPURE SOLTANNO UN NUMERO FINITO DI QUESTI.

$t$ , ANALOGAMENTE, PUO' VARIARE CON CONTINUITA', OPPURE ASSUMERE UNA SUCCESSIONE NUMERABILE DI VALORI.

SI PUO' ALLORA PARLARE DI

- \* FUNZIONI CONTINUE NEI VALORI E TEMPO-CONTINUE
- \* FUNZIONI DISCRETE NEI VALORI E TEMPO-CONTINUE
- \* FUNZIONI CONTINUE NEI VALORI E TEMPO-DISCRETE
- \* FUNZIONI DISCRETE NEI VALORI E TEMPO-DISCRETE

L LE FUNZIONI TEMPO DISCRETE SONO ANCHE CHIAMATE SERIE TEMPORALI (SE FORMATE DA UN NUMERO INFINITO DI TERMINI) OD ANCHE SEQUENZE TEMPORALI. ESSE POSSONO RAPPRESENTARE SEGNALI ELETTRICI CHE HANNO GIA' ORIGINE IN TALE FORMA (COME UN SEGNALE IN CODICE) OPPURE ESSERE OTTENUTE DA UNA FUNZIONE TEMPO-CONTINUA MEDIANTE LETTURA DEI VALORI DA ESSA ASSUNTI IN INSTANTI CHE SI SUCCEDONO CON UN INTERVALLO FISSATO (FIG 2.1.1). QUESTA OPERAZIONE E' DETTA CAMPIONAMENTO E LA CORRISPONDENTE FUNZIONE TEMPO-DISCRETA E' ANCHE CHIAMATA FUNZIONE CAMPIONATA.

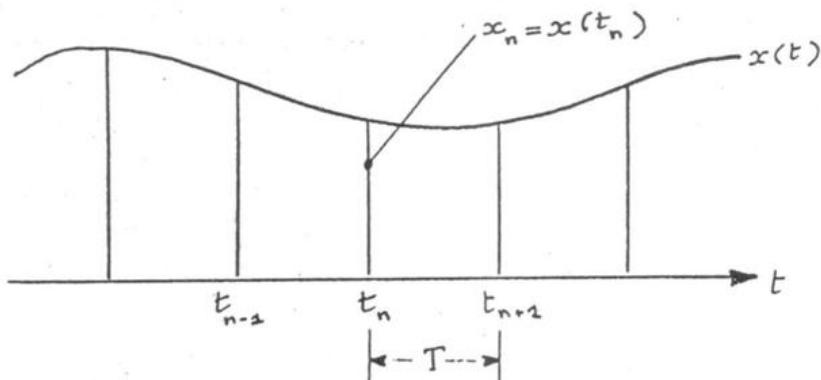


Fig. 2.1.1

NU

VEDREMO CHE IN DETERMINATE CIRCOSTANZE PUO' ESSERE  
UTILE UNA RAPPRESENTAZIONE DEL SEGNALE CHE FA USO DI  
FUNZIONI COMPLESSE DEL TEMPO (IL CHE NON DEVE SORPREN-  
DERE, BASTI PENSARE ALLA RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE  
FUNZIONI SINUSOIDALI DEL TEMPO MEDIANTE NUMERI COMPLE-  
SSI). IN QUESTO CAPITOLO FAREMO PERO' RIFERIMENTO SOLO A  
FUNZIONI REALI DEL TEMPO; INIZIEREMO DA QUELLE TEMPO-  
CONTINUE (PERIODICHE ED APERIODICHE) E PRENDEREMO POI  
IN ESAME QUELLE TEMPO-DISCRETE.

L'ANALISI DEI SEGNALI VERRA' POI APPLICATA ALLO  
STUDIO DEI SISTEMI FISICI LINEARI ATTRAVERSO CUI I  
SEGNALI STESSI POSSONO ESSERE TRASMESSI. IN QUESTO  
CONTESTO RISULTA PARTICOLARMENTE UTILE LA POSSIBILITA'  
DI RAPPRESENTAZIONE DEI SEGNALI COME SOMMA DI FUNZIONI  
ELEMENTARI, PER LE QUALI SIA IMMEDIATO ESPRIMERE LA  
RISPOSTA DEL SISTEMA.

## 2.2 FUNZIONI PERIODICHE TEMPO CONTINUE.

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE  $x(t)$ , CONTINUA O DISCRETA NEI VALORI, PERIODICA CON PERIODO  $T$ :

$$(2.2.1) \quad x(t+T) = x(t)$$

SOTTO NOTE CONDIZIONI, LA FUNZIONE  $x(t)$  PUO' ESSERE RAPPRESENTATA NELLA FORMA:

$$(2.2.2) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

ESSENDO

$$(2.2.3) \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

LA SERIE CHE COMPARTE A SECONDO MEMBRO DELLA (2.2.2) VIENE DETTA SERIE DI FOURIER (IN FORMA ESPONENZIALE).

QUANDO  $x$  E' REALE, VALE LA RELAZIONE:

$$(2.2.4) \quad c_{-n} = c_n^*$$

E LA (2.2.2) DIVIENE:

$$\begin{aligned} (2.2.5) \quad x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{jn\omega_0 t} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ 2c_n e^{jn\omega_0 t} \right\}. \end{aligned}$$

POSTO:

$$(2.2.6) \quad c_0 = A_0 = \frac{1}{2} a_0$$

$$(2.2.7) \quad 2 c_n = A_n \text{ e } e^{-j\varphi_n} = a_n - j b_n, \quad n \geq 1,$$

DALLA (2.2.5) DISCENDONO LE SEGUENTI DUE ULTERIORI FORME DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER:

$$(2.2.8) \quad x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n),$$

$$(2.2.9) \quad x(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t.$$

GLI INSIEMI DEI VALORI  $A_n$  E  $\varphi_n$  COSTITUISCONO RI-  
SPETTIVAMENTE GLI SPETTRI DI AMPIEZZA E DI FASE DI  
 $x(t)$ ; SI TRATTA DI SPETTRI A RIGHE ALLOCATE IN CORRI-  
SPONDENZA ALLE PULSAZIONI  $n\omega_0$  COME INDICATO NELLE FI-  
GURE 2.2.1 E 2.2.2.

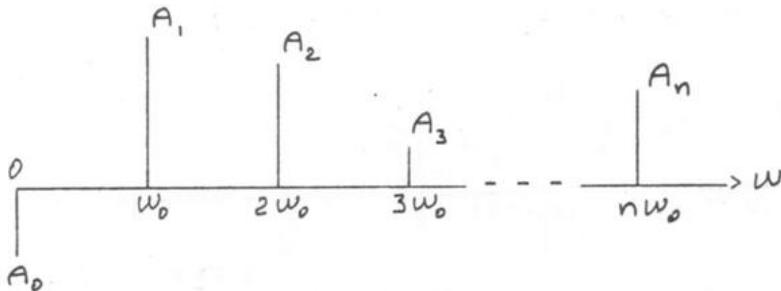


Fig. 2.2.1

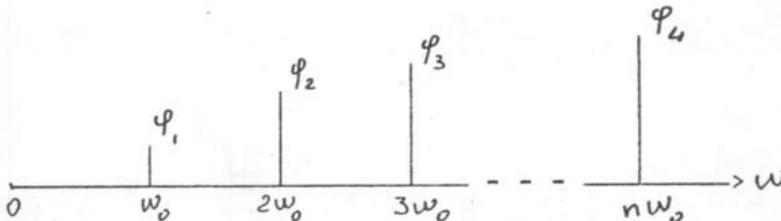


Fig. 2.2.2

I COEFFICIENTI  $a_n$ ,  $b_n$  CHE COMPAIONO NELLO SVILUPPO  
 (2.2.9) (SVILUPPO IN SERIE DI COSENI E SENI), IN VIRTU' DELLE (2.2.6), (2.2.7) E (2.2.3) SONO ESPRESI DA:

$$(2.2.10) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n \omega_0 t dt, \quad n \geq 0,$$

$$(2.2.11) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n \omega_0 t dt, \quad n \geq 1.$$

E' IMPORTANTE OSSERVARE CHE UNA FUNZIONE  $x(t)$ , DEFINITA NELL'INTERVALLO

$$(2.2.12) \quad -T/2 \leq t \leq T/2,$$

PUO' ESSERE ESTESA AL DI FUORI DI TALE INTERVALLO CON LEGGE DI PERIODICITA' E CON PERIODO EGUALE A T (FIG. 2.2.3), E QUINDI RAPPRESENTATA, NELL'INTERVALLO (2.2.12), DA UNO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER.

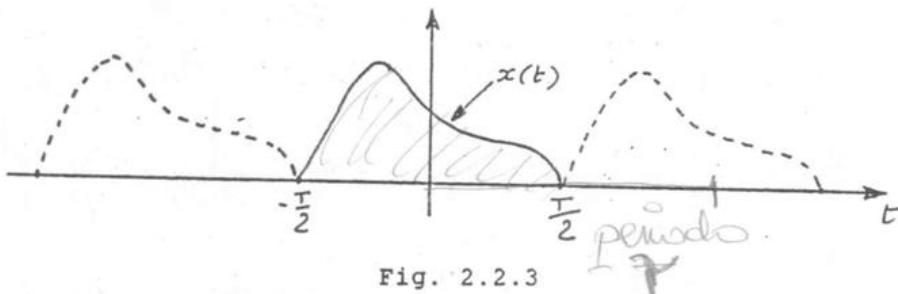


Fig. 2.2.3

### 2.3 FUNZIONI APERIODICHE TEMPO-CONTINUE.

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE REALE  $x(t)$ , APERIODICA, DEFINITA SU TUTTO L'ASSE  $t$ . SOTTO NOTE CONDIZIONI, ESISTE LA TRASFORMATURA DI FOURIER:

$$(2.3.1) \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)] e^{-j\omega t} dt.$$

LA FORMULA DI ANTITRASFORMATURA E':

$$(2.3.2) \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

ESSENDO  $x$  REALE, VALE LA RELAZIONE:

$$(2.3.3) \quad X(-\omega) = X^*(\omega)$$

EQUIVALENTE ALLE

$$(2.3.4) \quad \begin{cases} |X(-\omega)| = |X(\omega)| \\ \arg X(-\omega) = -\arg X(\omega) \end{cases}$$

DALLE PRECEDENTI RELAZIONI DISCENDE:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)| e^{j\arg X(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)| \cos[\omega t + \arg X(\omega)] d\omega + \\ &\quad + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)| \sin[\omega t + \arg X(\omega)] d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{|X(\omega)|}{\pi} \cos[\omega t + \arg X(\omega)] d\omega. \end{aligned}$$

IN CONCLUSIONE, POSTO

$$(2.3.5) \quad V(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\pi} \quad , \quad \omega \geq 0 ,$$

$$(2.3.6) \quad \varphi(\omega) = -\arg X(\omega) \quad , \quad \omega \geq 0 ,$$

RISULTA:

$$(2.3.7) \quad x(t) = \int_0^{\infty} V(\omega) \cos [wt - \varphi(\omega)] d\omega .$$

LA (2.3.7) ESPRIME  $x(t)$  COME "SOMMA" DI INFINITI TERMINI SINUSOIDALI, IL GENERICO DEI QUALI HA PULSAZIONE  $\omega$ , AMPIEZZA  $V(\omega)d\omega$  E FASE  $\varphi(\omega)$  [INTEGRALE DI FOURIER].

$V(\omega)$  DEFINISCE LO SPETTRO DI (DENSITA' DI) AMPIEZZA (FIG. 2.3.1) E  $\varphi(\omega)$  LO SPETTRO DI FASE (FIG. 2.3.2).

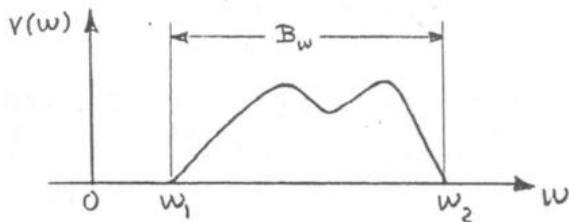


Fig. 2.3.1

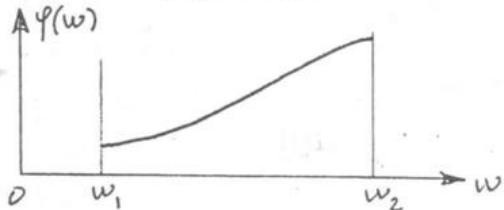


Fig. 2.3.2

LO SPETTRO DI AMPIEZZA CONSENTE DI INTRODURRE IL CONCETTO DI BANDA DI PULSAZIONI DI UNA FUNZIONE. AD ESEMPIO, LA FIG. 2.3.1 SI RIFERISCE AD UNA FUNZIONE PER CUI  $V(\omega)$  E' DIVERSO DA 0 SOLO NELL'INTERVALLO  $(w_1, w_2)$ : SI DICE ALLORA CHE TALE INTERVALLO RAPPRESENTA LA BANDA DI  $x(t)$ , DI CUI  $B_{\omega}$  INDICA LA LARGHEZZA.

IL CONCETTO DI BANDA PUO' ESSERE GENERALIZZATO. INFATTI L'INTEGRALE ESTESO A TUTTO IL SEMIASSE POSITIVO DELLE PULSAZIONI CHE COMPARTE NELLA (2.3.7) PUO' ESSERE SCRITTO, NELL'AMBITO DI UN PREFISSATO GRADO DI APPROSSIMAZIONE, MEDIANTE UN INTEGRALE ESTESO AD UNO O PIU' INTERVALLI FINITI (FIG. 2.3.3), IL CUI INSIEME COSTITUISCE APPUNTO LA BANDA DI  $x(t)$ .

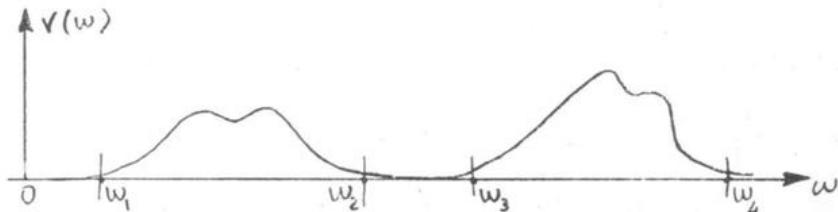


Fig. 2.3.3

QUANDO LA BANDA  $B_\omega$  E' CENTRATA SU UNA PULSAZIONE  $\omega_0$  TALE CHE RISULTI

$$(2.3.8) \quad \frac{B_\omega}{\omega_0} \ll 1$$

SI PARLA DI FUNZIONE PASSA-BANDA (FIG. 2.3.4).

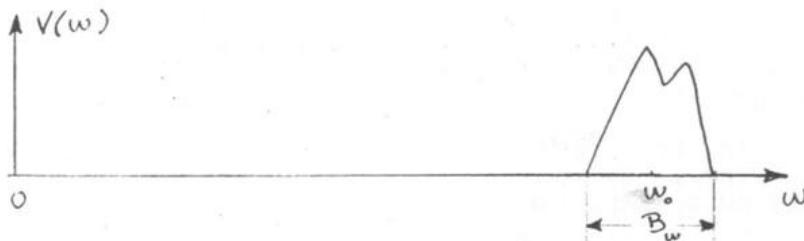


Fig. 2.3.4

QUANDO NON VALE LA (2.3.8), LA BANDA  $B_\omega$  COMPRENDE LO 0 OPPURE E' SIGNIFICATIVAMENTE PROSSIMA AD ESSO. SI PARLA ALLORA DI FUNZIONE PASSA-BASSO. E' QUESTO IL CASO DI FIG. 2.3.1, PER LA QUALE, POSTO

$$(2.3.9) \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

RISULTA  $\frac{B_\omega}{\omega_0} \sim 2$ .

E' IMPORTANTE OSSERVARE CHE, A CAUSA DELLA PROPORZIONALITA' FRA  $V(\omega)$  E  $|X(\omega)|$  ESPRESSA DALLA (2.3.5), LA BANDA DI UNA FUNZIONE PUO' ESSERE INDIVIDUATA ANCHE TRAMITE LA CONSIDERAZIONE DI  $|X(\omega)|$ , OVVIAMENTE CON RIFERIMENTO AL SOLO SEMIASSE POSITIVO DELLE PULSAZIONI.

## 2.4 ALCUNE PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI FOURIER.

### I - FUNZIONI TRASLATE, DERIVATE, INTEGRATE.

FUNZIONE	TRASFORMATA (QUANDO ESISTE)
$x(t)$	$X(\omega)$
$x(t - t_0)$	$X(\omega) \exp(-j\omega t_0)$
$\dot{x}(t)$	$j\omega X(\omega)$
$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$X(\omega)/j\omega$

### II - TEOREMA DELLA CONVOLUZIONE.

DATE DUE FUNZIONI  $x(t)$  E  $y(t)$  AVENTI COME TRASFORMATE DI FOURIER  $X(\omega)$  E  $Y(\omega)$ , LA CONVOLUZIONE FRA  $x(t)$  E  $y(t)$ , ESPRESSA DA

$$(2.4.1) \quad x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau,$$

HA COME TRASFORMATA IL PRODOTTO  $X(\omega)Y(\omega)$ :

$$(2.4.2) \quad \mathcal{F}[x(t) * y(t)] = X(\omega)Y(\omega).$$

IN ALTRI TERMINI, AD UNA CONVOLUZIONE NEL DOMINIO DEI TEMPI CORRISPONDE UN PRODOTTO NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE; VALE ANCHE IL VICEVERSA.

PER DIMOSTRARE LA (2.4.2) ESPRIMIAMO LA FUNZIONE  $y$  CHE COMPARTE NELLA (2.4.1) COME ANTITRASFORMATA DELLA SUA TRASFORMATA. RISULTA:

$$(2.4.3) \quad x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

CHE DIMOSTRA LA (2.4.2).

### III - TEOREMA DI PARSEVAL.

PREMETTIAMO DUE DEFINIZIONI.

POTENZA ISTANTANEA DI  $x(t)$ :

$$(2.4.4) \quad p(t) = x^2(t) .$$

ENERGIA DI  $x(t)$ :

$$(2.4.5) \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt .$$

SUSSISTE IL TEOREMA (DI PARSEVAL):

$$(2.4.6) \quad E = \int_0^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{\pi} d\omega .$$

INFATTI:

$$(2.4.7) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) X^*(\omega) d\omega . \end{aligned}$$

LE FUNZIONI  $x(t)$  CHE STIAMO CONSIDERANDO VENGONO ANCHE DENOMINATE FUNZIONI AD ENERGIA FINITA. PER RAGIONI CHE APPARIRANNO CHIARE IN SEGUITO LA FUNZIONE INTEGRANDA CHE COMPARTE NELLA (2.4.6),

$$(2.4.8) \quad \mathcal{E}(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{\pi} ,$$

VIENE DENOMINATA DENSITA' SPETTRALE DI ENERGIA O, PIU' SEMPLICEMENTE, SPETTRO DI ENERGIA DELLA FUNZIONE  $x(t)$ . IN VIRTU' DELLA (2.3.5) ESSA E' LEGATA ALLO SPETTRO DI AMPIEZZA DALLA RELAZIONE:

$$(2.4.9) \quad \mathcal{E}(\omega) = \pi V^2(\omega) .$$

LA (2.4.7) PUO' ESSERE GENERALIZZATA ALLA CONSIDERAZIONE DI DUE FUNZIONI  $x(t)$  E  $y(t)$ , AVENTI TRASFORMATE RISPECTIVAMENTE  $X(\omega)$  E  $Y(\omega)$ , COME SEGUE:

$$(2.4.10) \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) Y^*(\omega) d\omega.$$

LA RELAZIONE OTTENUTA,

$$(2.4.11) \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) Y^*(\omega) d\omega,$$

ESPRIME IL TEOREMA DI PARSEVAL GENERALIZZATO.

## 2.4 ESERCIZI.

### ESERCIZIO N. 1

CALCOLARE GLI SPETTRI DI AMPIEZZA E DI FASE DI UNA SUCCESSIONE PERIODICA DI IMPULSI AVENTI AMPIEZZA A, DURATA  $\tau$  E PERIODO T (FIG. 2.5.1).

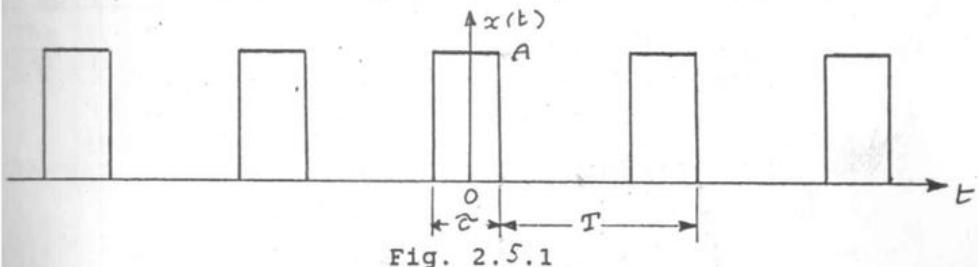


Fig. 2.5.1

SI OSSERVI CHE SI TRATTA DI UNA FUNZIONE DISCRETA NEI VALORI E TEMPO-CONTINUA. I COEFFICIENTI  $c_n$  DELLA FORMA ESPONENZIALE DELLO SVILUPPO DI FOURIER SONO DATI DA:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{A}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{I}{T} \frac{\sin \frac{n\omega_0 \tau}{2}}{\frac{n\omega_0 \tau}{2}}, \quad (I=A\tau) \end{aligned}$$

RICORDANDO LE RELAZIONI (2.2.6) E (2.2.7), GLI SPETTRI DI AMPIEZZA E DI FASE SONO ESPRESSI DA:

$$(2.5.1) \quad A_n = \begin{cases} I/T & n=0 \\ \frac{2I}{T} \left| \frac{\sin \frac{n\omega_0 \tau}{2}}{\frac{n\omega_0 \tau}{2}} \right| & n \geq 1 \end{cases}$$

$$(2.5.2) \quad \varphi_n = \begin{cases} 0 & c_n > 0 \\ \pi & c_n < 0 \end{cases} \quad n \geq 1$$

E RAPPRESENTATI NELLE FIGURE 2.5.2 E 2.5.3.

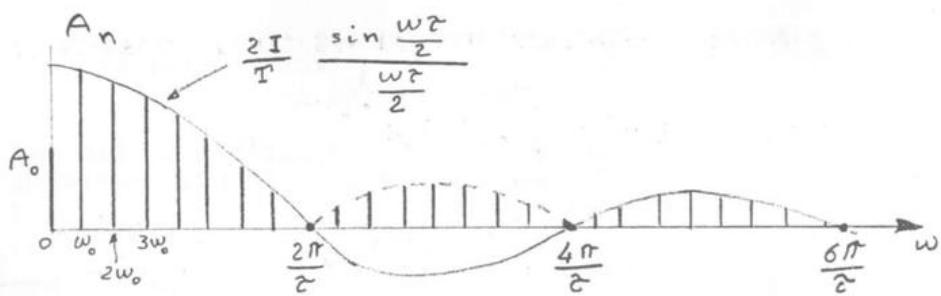


Fig. 2.5.2

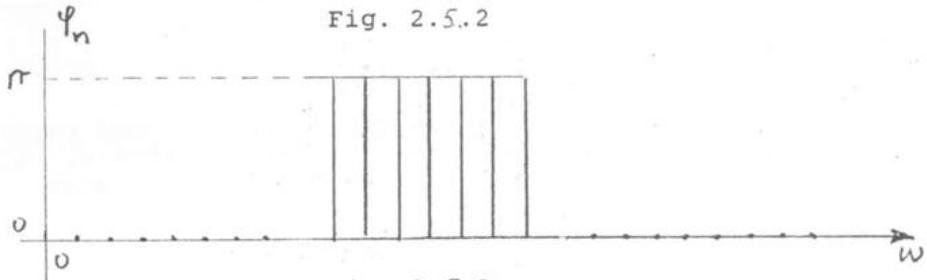


Fig. 2.5.3

SI OSSERVI CHE, AL DIMINUIRE DELLA DURATA  $\tau$  DEGLI IMPULSI, AUMENTA IL NUMERO DELLE ARMONICHE SIGNIFICATIVE.

&

&

&

&

&

### ESERCIZIO N. 2

CALCOLARE GLI SPETTRI DI AMPIEZZA E DI FASE DI UN IMPULSO RETTANGOLARE DI AMPIEZZA  $A$  E DURATA  $\tau$  (FIG. 2.5.4).

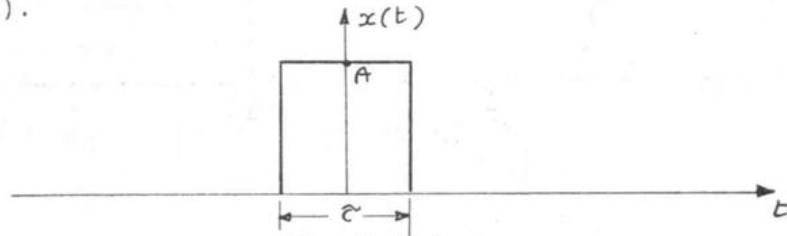


Fig. 2.5.4

SI OSSERVI CHE SI TRATTA ANCORA DI UNA FUNZIONE DISCRETA NEI VALORI E TEMPO-CONTINUA DI TIPO APERIODICO.

LA SUA TRASFORMATA SECONDO FOURIER E' ESPRESSA DA:

$$(2.5.3) \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \\ = A \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-j\omega t} dt = I \frac{\sin \frac{\omega \pi}{2}}{\frac{\omega^2}{2}}, \quad (I=A^2).$$

RICORDANDO LE RELAZIONI (2.3.5) E (2.3.6), GLI SPETTRI DI AMPIEZZA E DI FASE SONO DATI DA:

$$(2.5.4) \quad V(\omega) = \frac{I}{\pi} \left| \frac{\sin \frac{\omega \pi}{2}}{\frac{\omega^2}{2}} \right|$$

$$(2.5.5) \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & X(\omega) > 0 \\ \pi & X(\omega) < 0 \end{cases}$$

E RAPPRESENTATI NELLE FIGURE 2.5.5 E 2.5.6:

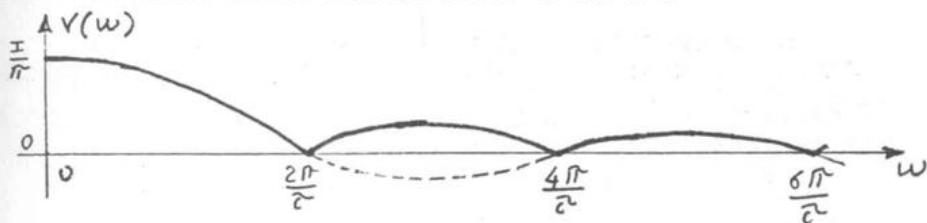


Fig. 2.5.5

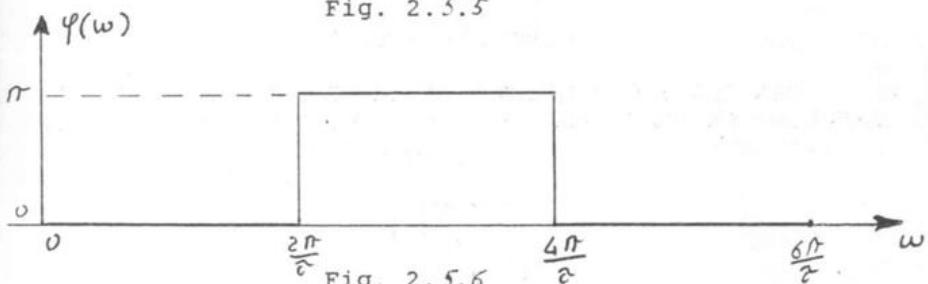


Fig. 2.5.6

SI OSSERVI CHE LA BANDA DI PULSAZIONI DELL'IMPULSO CONSIDERATO E' TEORICAMENTE INFINITA. IN UN CERTO ORDINE DI APPROSSIMAZIONE, E' PERO' SUFFICIENTE CONSIDERARE UN INTERVALLO FINITO CHE, PARTENDO DA 0, COMPRENDA UN NUMERO LIMITATO DI "LOBI". IN OGNI CASO, QUESTA BANDA - CONVENZIONALMENTE DEFINITA - AUMENTA AL DIMINUIRE DELLA DURATA  $\tau$  DELL'IMPULSO.

COME BANDA DELL'IMPULSO SI ASSUME TALVOLTA QUELLA OCCUPATA DAL PRIMO LOBO. IN TAL CASO LA BANDA, ESPRESSA IN FREQUENZE ANZICHE' IN PULSAZIONI (SI ABbia PRESENTE IL LEGAME  $f = \omega/2\pi$  TRA FREQUENZA E PULSAZIONE), E' SEMPLICEMENTE DATA DA:

$$(2.5.6) \quad f_m = 1/\tau .$$

DALLA (2.5.6) DISCENDE IMMEDIATAMENTE:

$$f_m \tau = 1 ;$$

IN ALTRI TERMINI, NEL CASO IN ESAME IL PRODOTTO BANDA (CONVENZIONALMENTE DEFINITA) X DURATA VALE 1.

COME OPPORTUNA PREMESSA AL PROSSIMO PARAGRAFO, OSSERVIAMO CHE NEL CASO CONSIDERATO (SINGOLO IMPULSO E SUA PERIODICIZZAZIONE) RISULTA:

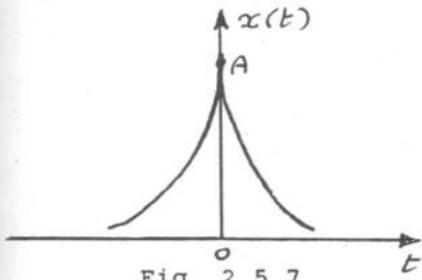
$$(2.5.7) \quad c_n = \frac{1}{T} \times (n \omega_0) .$$

### ESERCIZIO N.3

CALCOLARE LA TRASFORMATA DI FOURIER DELLA FUNZIONE

$$(2.5.8) \quad x(t) = A e^{-\frac{|t|}{t_0}}$$

RAPPRESENTATA NELLA FIG. 2.5.7.



SI TRATTA DI UNA FUNZIONE CONTINUA NEI VALORI E TEMPO-CONTINUA DI TIPO APERIODICO. LA SUA TRASFORMATA DI FOURIER E' ESPRESSA DA:

$$(2.5.9) \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \\ = A \int_{-\infty}^{0} e^{t/t_0} e^{-i\omega t} dt + A \int_{0}^{\infty} e^{-t/t_0} e^{-i\omega t} dt.$$

RISULTA:

$$(2.5.10) \quad X(\omega) = \frac{2At_0}{1 + \omega^2 t_0^2} .$$

LA (2.5.10), FUNZIONE REALE DI  $\omega$ , E' RAPPRESENTATA IN FIG. 2.5.8. LA BANDA RISULTA TEORICAMENTE INFINTA; TUTTAVIA, NELL'AMBITO DI UN PREFISSATO GRADO DI APPROSSIMAZIONE, PUO' ESSERE CONSIDERATA FINITA. IN QUALUNQUE MODO VENGA SCELTA, ESSA CRESCHE AL DIMINUIRE DI  $t_0$ , CIOE' DELLA "DURATA" DI  $x(t)$  (OPPORTUNAMENTE DEFINITA IN QUANTO TRATTASI DI FUNZIONE DI DURATA TEORICAMENTE INFINTA).

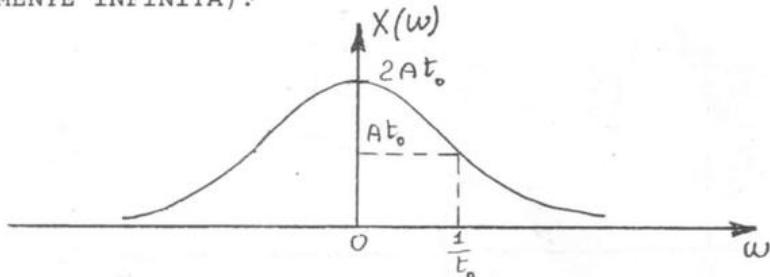
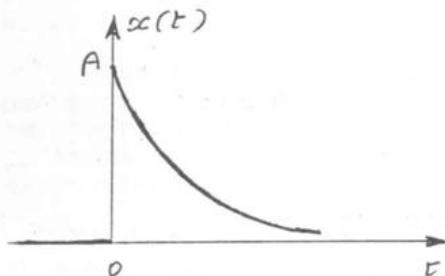


Fig. 2.5.8

ESERCIZIO N. 4

CALCOLARE LA TRASFORMATA E GLI SPETTRI DI AMPIEZZA E FASE DELLA FUNZIONE:



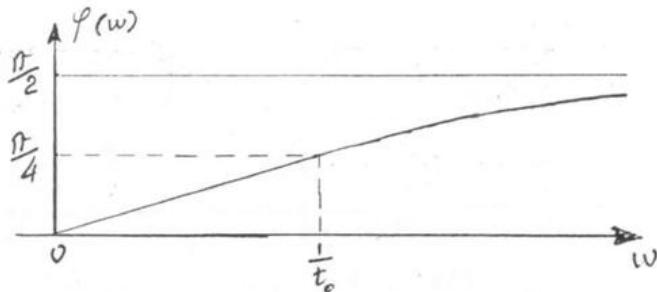
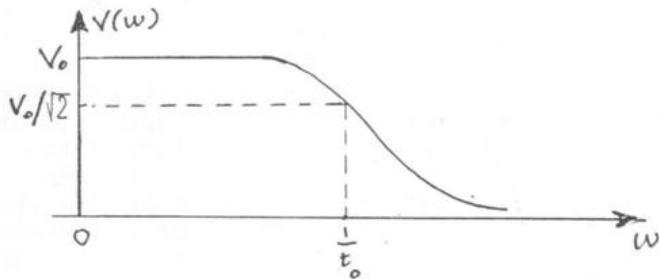
$$x(t) = \begin{cases} A e^{-\frac{t}{t_0}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

RISULTA:

$$X(\omega) = A \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{t_0}} e^{-j\omega t} dt = \frac{A t_0}{1 + j\omega t_0}$$

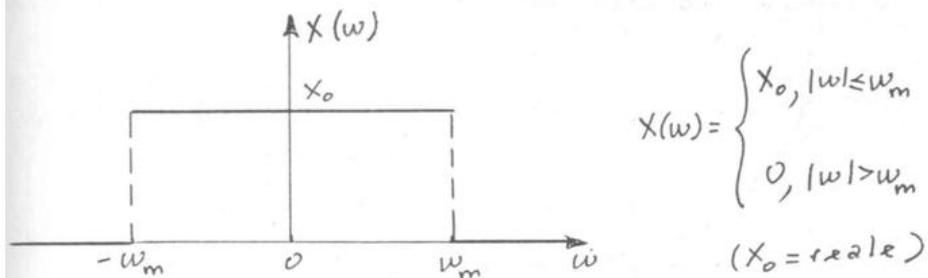
$$V(\omega) = -\frac{|X(\omega)|}{\pi} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \omega^2 t_0^2}} \quad V_0 = \frac{A t_0}{\pi}$$

$$\varphi(\omega) = -\arg X(j\omega) = \arctan \omega t_0$$



ESERCIZIO N. 5

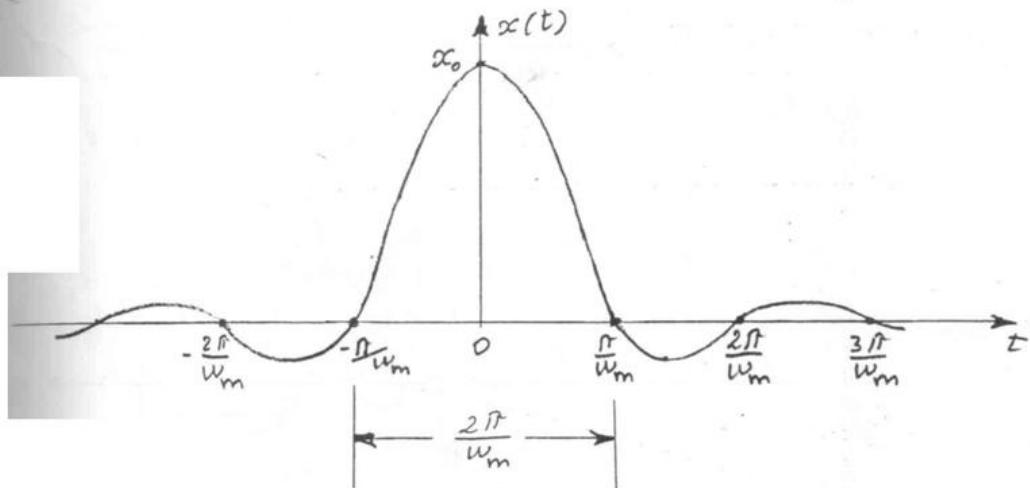
CALCOLARE L'ANTITRASFORMATA DELLA FUNZIONE:



RISULTA:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w) e^{jwt} dw = \frac{x_0}{2\pi} \int_{-w_m}^{w_m} e^{jwt} dw = \\ &= \frac{x_0}{2\pi} \left[ \frac{e^{jwt}}{jt} \right]_{-w_m}^{w_m} = \\ &= x_0 \frac{\sin w_m t}{w_m t} \quad x_0 = \frac{x_0 w_m}{\pi} \end{aligned}$$

*qui una linea  
monica di cavo  
esiste  
esiste*



SI OSSERVI CHE LA DURATA DI  $x(t)$  E' TEORICAMENTE INFINITA. IN UN CERTO ORDINE DI APPROSSIMAZIONE, E' PERO' SUFFICIENTE CONSIDERARE UN INTERVALLO TEMPORALE FINITO  $T_d$  CHE COMPREnda UN NUMERO LIMITATO DI "LOBI". IN OGNI CASO QUESTA DURATA - CONVENZIONALMENTE DEFINITA - AUMENTA AL DIMINUIRE DELLA BANDA  $B_w = \omega_m$ .

COME DURATA DI  $x(t)$  SI ASSUME TALVOLTA QUELLA OCCUPATA DAL PRIMO LOBO. IN TAL CASO  $T_d$  E' DATO SEMPLI-CEMENTE DA:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{1}{f_m}$$

$$f_m T_d = 1$$

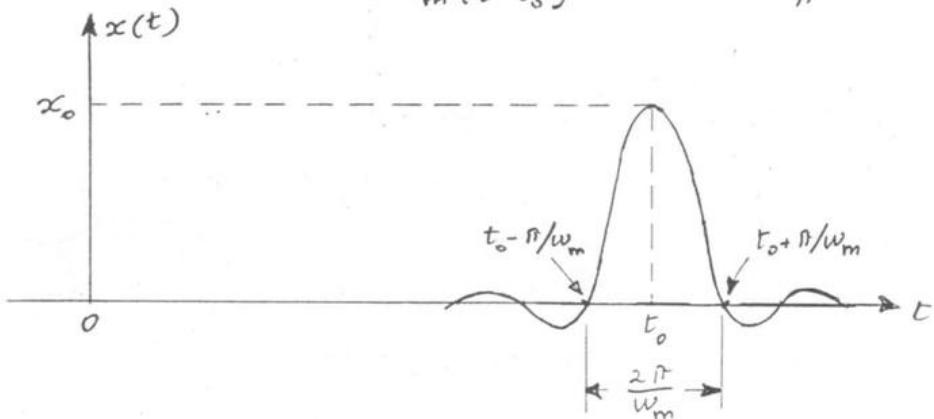
IN ALTRI TERMINI, NEL CASO IN ESAME IL PRODOTTO BANDA X DURATA (CONVENZIONALMENTE DEFINITA) VALE 1.

PIU' IN GENERALE, SE CONSIDERIAMO LA TRASFORMATA:

$$X(\omega) = \begin{cases} X_0 e^{-j\omega t_0} & |\omega| \leq \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases},$$

LA CORRISPONDENTE FUNZIONE DEL TEMPO E':

$$x(t) = X_0 \frac{\sin \omega_m (t - t_0)}{\omega_m (t - t_0)} \quad X_0 = \frac{X_0 \omega_m}{\pi}$$



## ESERCIZIO N. 6

INTRODUZIONE ALLA  
MODULAZIONECALCOLARE LA TRASFORMATA  $S(\omega)$  DELLA FUNZIONE:

(2.5.11)  $s(t) = x(t) \cos \omega_0 t$

ESSENDO  $x(t)$  DOTATA DELLA TRASFORMATA  $X(\omega)$ .COME VEDREMO IN SEGUITO, LA (2.5.11) RAPPRESENTA UNA OSCILLAZIONE SINUSOIDALE "MODULATA" A PRODOTTO DAL SEGNALE "MODULANTE"  $x(t)$ .ESPRIMIAMO  $s(t)$  NELLA FORMA:

(2.5.12)  $s(t) = \frac{1}{2} x(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j\omega_0 t}$

RISULTA:

(2.5.13)  $\int [x(t) e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = X(\omega - \omega_0)$

(2.5.14)  $\int [x(t) e^{-j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = X(\omega + \omega_0)$

IN CONCLUSIONE POSSIAMO SCRIVERE:

(2.5.15)  $S(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0)$

PER IL GENERICO ANDAMENTO DI  $|X(\omega)|$  RAPPRESENTATO IN FIG. 2.5.9 DI TIPO PASSA-BASSO, RIPORTIAMO IN FIG. 2.5.10 IL CORRISPONDENTE GRAFICO DI  $|S(\omega)|$  PER  $\omega_0 \gg \omega_m$ .

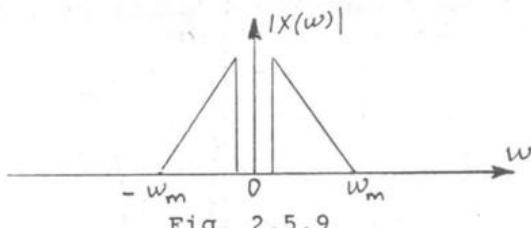


Fig. 2.5.9

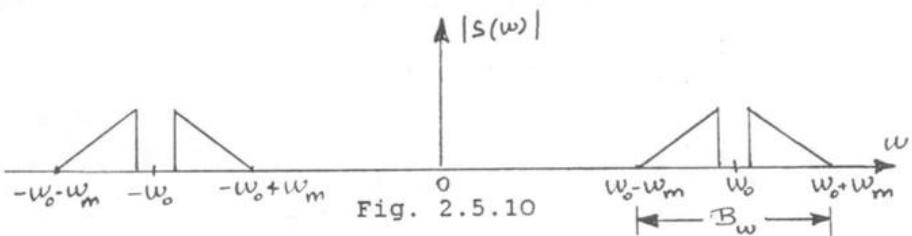


Fig. 2.5.10

SI NOTI CHE LA TRASFORMAZIONE DI  $x(t)$  IN  $s(t)$  RAPPRESENTATA DALLA (2.5.11) (CHE, COME VEDREMO, E' UN PARTICOLARE TIPO DI MODULAZIONE) DETERMINA UNA SOSTANZIALE MODIFICAZIONE DELLE CARATTERISTICHE SPETTRALI DEI SEGNALI IN GIOCO:  $s(t)$  E' INFATTI UNA FUNZIONE PASSA-BANDA, CON BANDA

$$(2.5.16) \quad B_\omega = 2\omega_m$$

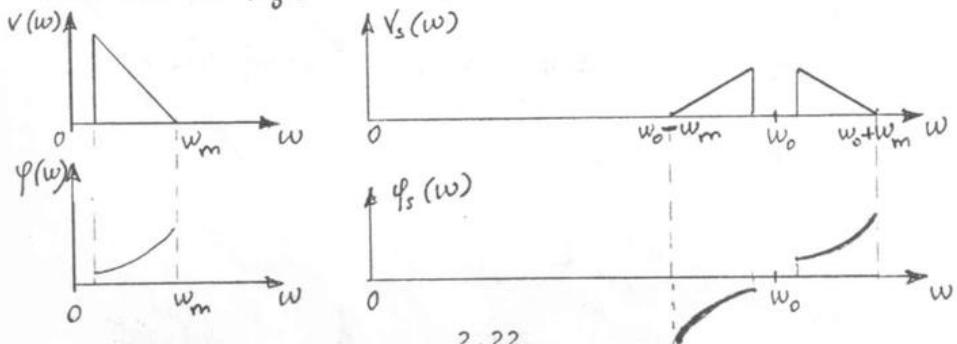
CENTRATA SU  $\omega_0$ .

PER QUANTO RIGUARDA GLI SPETTRI DI AMPIEZZA E FASE

$$V(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\pi}, \quad \varphi(\omega) = -2\arg X(\omega), \quad \omega \geq 0$$

$$V_s(\omega) = \frac{|S(\omega)|}{\pi}, \quad \varphi_s(\omega) = -2\arg S(\omega), \quad \omega \geq 0.$$

ESSI SONO RAPPRESENTATI NELLA FIGURA SEGUENTE [SI NOTI LA SIMMETRIA DI  $V_s(\omega)$  E L'ANTISIMMETRIA DI  $\varphi_s(\omega)$  RISPETTO AD  $\omega_0$ ].



AD ESEMPIO, SE  $x(t)$  E' L'IMPULSO RETTANGOLARE DI AMPIEZZA A E DURATA  $\tau$  RAPPRESENTATO IN FIG. 2.5.4,  $s(t)$  HA LA FORMA D'ONDA RIPORTATA IN FIG. 2.5.11 (TRENO D'ONDA SINUSOIDALE).

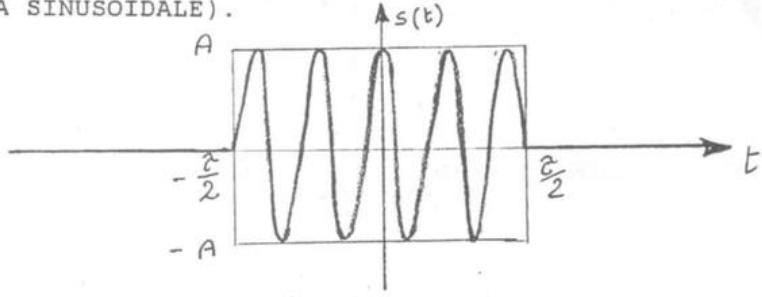


Fig. 2.5.11

RICORDANDO LA (2.5.3) ABBIAMO:

$$(2.5.17) \quad S(\omega) = \frac{A^2}{2} \left[ \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0)^2}{2}} \right]$$

LA FUNZIONE  $S(\omega)$  HA L'ANDAMENTO INDICATO IN FIG. 2.5.12 PER  $\omega_0 \gg 2\pi/\tau$  (SI RICORDI LA FIG. 2.5.5 E LE CONSIDERAZIONI SVOLTE IN PROPOSITO).

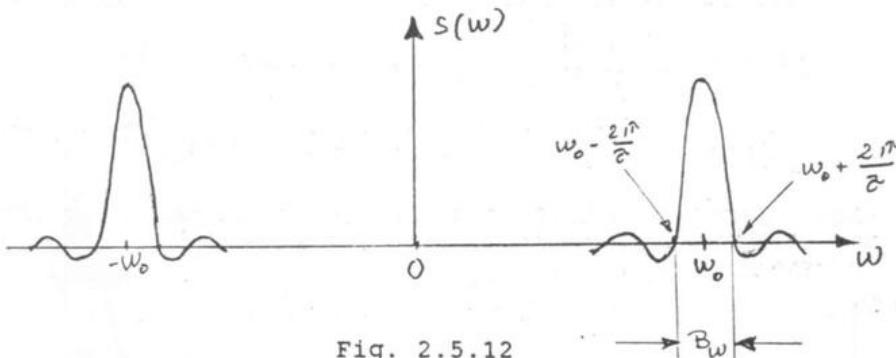


Fig. 2.5.12

LA FIGURA RICHIAMA IL CARATTERE PASSA-BANDA DI  $s(t)$  EVIDENZIATO IN PRECEDENZA.

SE COME BANDA DI  $s(t)$  ASSUMIAMO QUELLA OCCUPATA DAL LOBO CENTRALE, RISULTA:

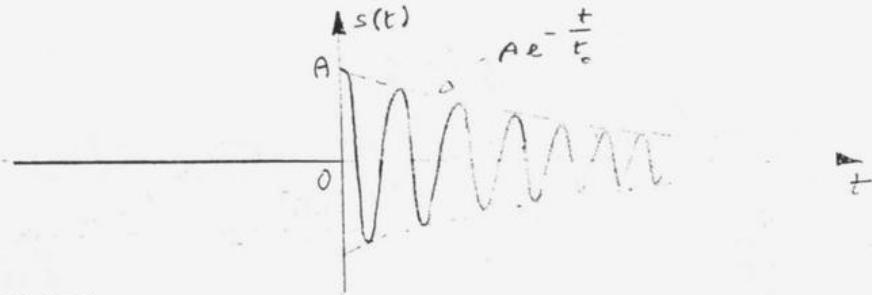
$$(2.5.18) \quad B_\omega = \frac{4\pi}{2} .$$

LA CORRISPONDENTE BANDA IN FREQUENZE VALE:

$$(2.5.19) \quad B = \frac{B_\omega}{2\pi} = \frac{2}{c} .$$

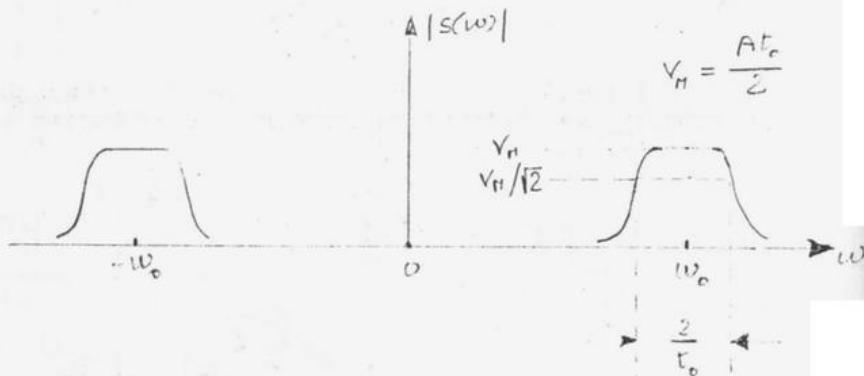
ANCORA UNA VOLTA VEDIAMO CHE LA LARGHEZZA DI BANDA AUMENTA AL DIMINUIRE DELLA DURATA DEL SEGNALE IN ESAME.

SE ORA CONSIDERIAMO LA FUNZIONE  $x(t)$  DELL'ESERCIZIO N. 4 ABBIAMO LA SINUSOIDA SMORZATA:



RISULTA:

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \frac{At_0}{1 + j(\omega - \omega_0)t_0} + \frac{1}{2} \frac{At_0}{1 + j(\omega + \omega_0)t_0}$$



## 2.6 RIPETIZIONE PERIODICA DI UNA FUNZIONE.

LA RELAZIONE (2.5.7) VALE IN CONDIZIONI DEL TUTTO GENERALI. INFATTI CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE APERIODICA  $x(t)$ , CON  $-\infty < t < \infty$ , AVENTE TRASFORMATA SECONDO FOURIER  $X(\omega)$ , E DEFINIAMO RIPETIZIONE PERIODICA DI  $x(t)$  CON PERIODO  $T$  LA FUNZIONE

$$(2.6.1) \quad x_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(t-iT)$$

(V. FIG. 2.6.1)

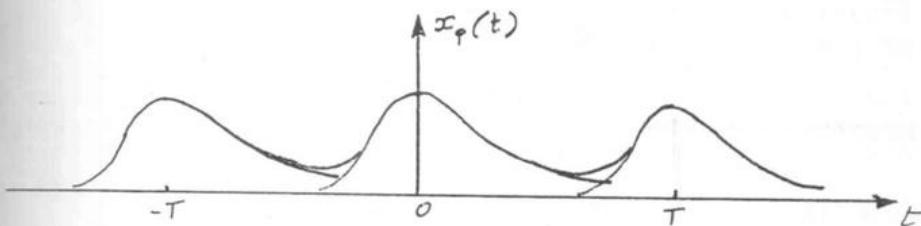
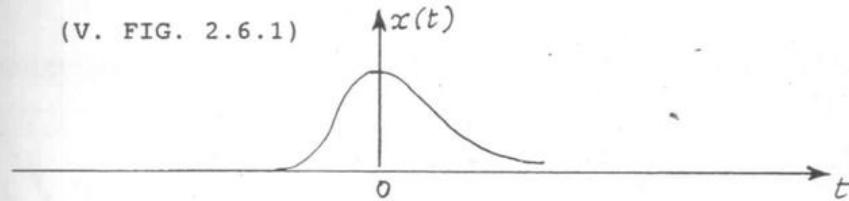


Fig. 2.6.1

E' IMMEDIATO VERIFICARE CHE  $x_p(t)$  E' UNA FUNZIONE PERIODICA DI PERIODO  $T$ :

$$(2.6.2) \quad x_p(t+T) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[t-(i-1)T] = x_p(t).$$

LA FUNZIONE  $x_p(t)$  E' PERTANTO RAPPRESENTABILE MEDIANTE UNA SERIE DI FOURIER, AD ESEMPIO DI TIPO ESPONENZIALE:

$$(2.6.3) \quad x_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

OVE:

$$(2.6.4) \quad c_n = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t-iT) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt.$$

NO

## INTRODUCENDO LA NUOVA VARIABILE DI INTEGRAZIONE

(2.6.5)  $\xi = t - iT$

POSSIAMO SCRIVERE:

(2.6.6)  $c_n = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{T}{2} - iT}^{\frac{T}{2} - iT} x(\xi) e^{-jn\frac{2\pi}{T}\xi} e^{-jnt} d\xi.$

 OSSERVANDO CHE  $\exp(-jni2\pi) \equiv 1$  E CHIAMANDO NUOVAMENTE  $t$  LA VARIABILE DI INTEGRAZIONE RISULTA:

(2.6.7)  $c_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt.$

ESSENDO

(2.6.8)  $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$

RISULTA:

(2.6.9)  $c_n = \frac{1}{T} X\left(n \frac{2\pi}{T}\right).$

IN CONCLUSIONE, POSTO

(2.6.10)  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

ABBIAMO:

(2.6.11)  $c_n = \frac{1}{T} X(n\omega_0),$

CHE GENERALIZZA LA (2.5.7).

NO

LA (2.6.11) PONE IN EVIDENZA IL FATTO CHE I COEFFICIENTI  $c_n$ , A MENO DI UNA COSTANTE MOLTIPLICATIVA, SI OTTENGONO DALLA TRASFORMATA  $X(\omega)$  MEDIANTE UN CAMPIONAMENTO CON INTERVALLO PARI A  $\omega_0$ . (V. FIG. 2.6.2 IN CUI SONO RAPPRESENTATI I MODULI DELLE GRANDEZZE IN GIOCO).

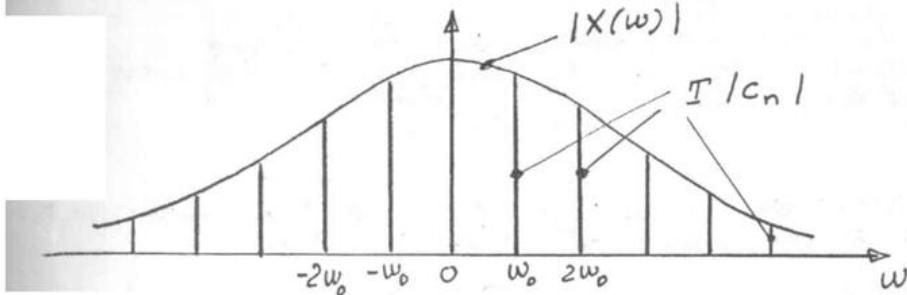


Fig. 2.6.2

PER L'UNICITA' DEGLI SVILUPPI IN SERIE ED IN INTEGRALE DI FOURIER POSSIAMO DIRE CHE LA CONOSCENZA DEI CAMPIONI  $X(n\omega_0)$  DI  $X(\omega)$  E' EQUIVALENTE ALLA CONOSCENZA DELLA FUNZIONE  $x_p(t)$ , RIPETIZIONE PERIODICA DI  $x(t)$  CON PERIODO  $T = 2\pi/\omega_0$ . TUTTAVIA CIO' NON CONSENTE IN GENERALE DI RICOSTRUIRE LA FUNZIONE  $x(t)$  A CAUSA DELLA SOVRAPPOSIZIONE FRA LE SUCCESSIVE VERSIONI DELLA STESSA  $x(t)$  TRASLATE NEL TEMPO (TALE SOVRAPPOSIZIONE E' DETTA "ALIASING").

SE PERO' CONSIDERIAMO FUNZIONI  $x(t)$  AVENTI DURATA FINITA  $T_d$ , E' POSSIBILE EVITARE L'ALIASING (V. FIG. 2.6.3) E QUINDI RISALIRE A  $x(t)$  DALLA CONOSCENZA DEI CAMPIONI  $X(n\omega_0)$  DI  $X(\omega)$ , SE E' VERIFICATA LA CONDIZIONE:

(2.6.12)

$$T \geq T_d$$

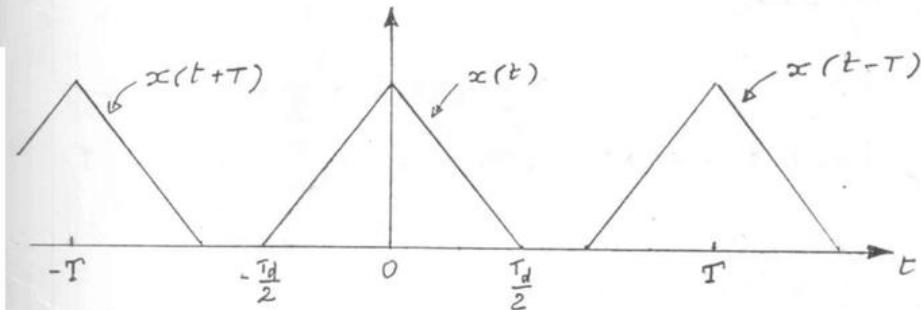


Fig. 2.6.3

IN CONCLUSIONE, E' SUFFICIENTE CHE SIA SODDISFATTA LA CONDIZIONE (2.6.12) PER AFFERMARE CHE DAI CAMPIONI  $X(n\omega_0)$  E' POSSIBILE RISALIRE A  $x(t)$  E, CONSEGUENTEMENTE, ALL'INTERO ANDAMENTO DI  $X(\omega)$  (TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE). NON CI SOFFERMIAMO SUGLI ASPETTI ANALITICI DI QUESTO PROBLEMA, CHE VICEVERSA SARANNO COMPIUTAMENTE ESAMINATI IN SEGUITO CON RIFERIMENTO AD UN ANALOGO PROBLEMA IN CUI I RUOLI DELLE VARIABILI PULSAZIONE E TEMPO SONO SCAMBIATI TRA LORO.

## 2.7 SERIE TEMPORALI.

CONSIDERIAMO LA SERIE TEMPORALE

$$\{x_n\} = \{\dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots\},$$

I CUI ELEMENTI SI SUCCEDONO CON INTERVALLO T SULL'ASSE DEI TEMPI E POSSONO ESSERE SIA CONTINUI CHE DISCRETI NEI VALORI. QUESTA SERIE PUO' RAPPRESENTARE UN SEGNALE ELETTRICO CHE HA GIA' ORIGINE IN TALE FORMA (COME UN SEGNALE IN CODICE) OPPURE ESSERE OTTENUTA MEDIANTE CAMPIONAMENTO DI UNA FUNZIONE  $x(t)$  CON INTERVALLO PARI A T:

$$(2.7.1) \quad x_n = x(nT), \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots .$$

SOTTO OPPORTUNE CONDIZIONI, GENERALMENTE VERIFICATE IN PRATICA, SI PUO' DEFINIRE LA TRASFORMATA DI FOURIER DELLA SERIE MEDIANTE LA RELAZIONE:

$$(2.7.2) \quad X_s(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\omega T}.$$

E' IMMEDIATO VERIFICARE CHE  $X_s(w)$  E' FUNZIONE PERIODICA CON PERIODO

$$(2.7.3) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

SCRIVENDO LA (2.7.2) NELLA FORMA

$$(2.7.4) \quad X_s(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_{-n} e^{jnwT},$$

LA FUNZIONE  $X_s$  VIENE ESPRESSA MEDIANTE UNO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER DI TIPO ESPONENZIALE (LA RAPPRESENTAZIONE IN SERIE DI FOURIER VISTA IN PRECEDENZA PER FUNZIONI PERIODICHE REALI VALE ANCHE PER FUNZIONI COMPLESSE). I COEFFICIENTI POSSONO ESSERE CALCOLATI COME INDICATO DALLA (2.2.10), CON LE OVVIE VARIANTI NEI SIMBOLI:

$$(2.7.5) \quad x_{-n} = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} X_s(\omega) e^{-jnwT} d\omega,$$

DA CUI:

$$(2.7.6) \quad x_n = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_s(\omega) e^{jnwT} d\omega, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

LA (2.7.6) ESPRIME LA FORMULA DI ANTITRASFORMAZIONE.

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI LA SERIE TEMPORALE SIA STATA OTTENUTA PER CAMPIONAMENTO DI UNA FUNZIONE  $x(t)$  AVENTE TRASFORMATA  $X(\omega)$ . INTENDIAMO MOSTRARE CHE  $x_s(\omega)$  E' LEGATA ALLA TRASFORMATA  $X(\omega)$  DALLA RELAZIONE:

$$(2.7.7) \quad X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} X(\omega + k\omega_0) ,$$

CHE RAPPRESENTA, A MENO DI UNA COSTANTE MOLTIPLICATIVA, LA RIPETIZIONE PERIODICA DI  $X(\omega)$  CON PERIODO  $\omega_0$ .

FACENDO USO DELLA FORMULA DI ANTITRASFORMAZIONE (2.3.2) POSSIAMO SCRIVERE:

$$(2.7.8) \quad x_n = x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega nT} d\omega .$$

SPEZZIAMO L'ASSE  $\omega$  DI INTEGRAZIONE IN INFINTI INTERVALLI DI AMPIEZZA  $\omega_0$ :

$$(2.7.9) \quad x_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} X \int_{-\frac{\omega_0}{2} + k\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2} + k\omega_0} e^{j\omega nT} d\omega .$$

EFFETTUANDO IL CAMBIAMENTO DI VARIABILE

$$(2.7.10) \quad \omega = \xi + k\omega_0 ,$$

ABBIAMO:

$$(2.7.11) \quad x_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} X \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} e^{j\xi nT} d\xi ,$$

AVENDO OSSERVATO CHE:

$$(2.7.12) \quad e^{jkn\omega_0 T} = e^{j\kappa 2\pi} \equiv 1 .$$

INFINE, CHIAMANDO NUOVAMENTE  $\omega$  LA VARIABILE DI INTEGRAZIONE, SCRIVIAMO:

$$(2.7.13) \quad x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} X(\omega + k\omega_0) \right\} e^{j\omega nT} d\omega .$$

DAL CONFRONTO FRA LE (2.7.6) E (2.7.13), CHE VALGONO QUALUNQUE SIA L'INTERO  $n$ , DISCENDE LA (2.7.7) CHE PERTANTO RISULTA DEMOSTRATA.

NOY

IN PARTICOLARE DALLA (2.7.7) DISCENDE:

$$(2.7.14) \quad X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} x X(\kappa \omega_0).$$

D'ALTRA PARTE DALLA (2.7.2) ABBIAMO:

$$(2.7.15) \quad X_s(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT).$$

PERTANTO:

$$(2.7.16) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} x X(\kappa \omega_0) = T \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT).$$

2.8 ESERCIZI.

ESERCIZIO N. 7

CALCOLARE LA TRASFORMATA DI FOURIER DELLA SERIE TEMPORALE  $\{x_n\}$  CON:

$$(2.8.1) \quad x_n = \begin{cases} 1 & |n| \leq \frac{N-1}{2}, \text{ } N \text{ dispari} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .$$

RISULTA:

$$(2.8.2) \quad X_s(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} n x_n e^{-jn\omega T} = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{-jn\omega T} =$$

$$= \frac{e^{j\frac{N-1}{2}\omega T} - e^{-j\frac{N-1}{2}\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{e^{j\frac{N\omega T}{2}} - e^{-j\frac{N\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} .$$

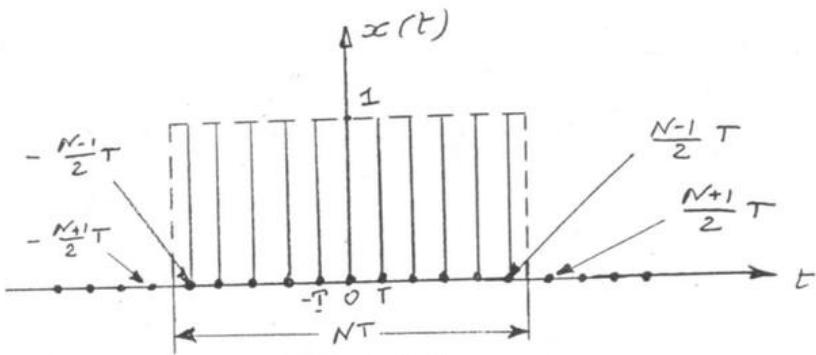


Fig. 2.8.1

LA SERIE TEMPORALE (2.8.1) PUO' ESSERE OTTENUTA CAMPIONANDO L'IMPULSO  $x(t)$  RAPPRESENTATO IN FIG. 2.8.1, LA CUI TRASFORMATA, RICORDANDO LA (2.5.3), E' ESPRESSA DA:

$$(2.8.3) \quad X(w) = NT \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\frac{\omega NT}{2}} = \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\frac{\omega}{2}} .$$

AL FINE DI VERIFICARE LA (2.7.7) CALCOLIAMO DAPPRIMA:

$$(2.8.4) \quad X\left(\omega + \kappa \frac{2\pi}{T}\right) = \frac{T}{\pi} \sin \frac{\omega T}{2} \cdot \frac{(-1)^K}{\frac{\omega T}{2\pi} + \kappa}$$

E SCRIVIAMO QUINDI:

$$(2.8.5) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} K \frac{(-1)^K}{\frac{\omega T}{2\pi} + \kappa} = \frac{2\pi}{\omega T} + \sum_{1}^{\infty} K \cdot \frac{(-1)^K}{\frac{\omega T}{2\pi} + \kappa} + \\ + \sum_{1}^{\infty} K \frac{(-1)^K}{\frac{\omega T}{2\pi} - \kappa} = \frac{2\pi}{\omega T} + \frac{\omega T}{\pi} \sum_{1}^{\infty} K \frac{(-1)^K}{\frac{\omega^2 T^2}{4\pi^2} - \kappa^2}.$$

A QUESTO PUNTO BASTA FARE USO DELLO SVILUPPO IN SERIE:

$$(2.8.6) \quad \operatorname{cosec} \pi z = \frac{1}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{1}^{\infty} K \frac{(-1)^K}{z^2 - \kappa^2} )$$

DA CUI:

$$(2.8.7) \quad \sum_{1}^{\infty} K \frac{(-1)^K}{z^2 - \kappa^2} = \frac{\pi}{2z \sin \pi z} - \frac{1}{2z^2}$$

LA SERIE (2.8.5) HA PERTANTO LA SEGUENTE SOMMA:

$$(2.8.8) \sum_{-\infty}^{\infty} \kappa \frac{(-1)^{\kappa}}{\frac{\omega T}{2\pi} + \kappa} = \frac{2\pi}{\omega T} + \\ + \frac{\omega T}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{\omega T \sin \frac{\omega T}{2}} - \frac{2\pi^2}{\omega^2 T^2} \right) = \\ = \frac{\pi}{\sin \frac{\omega T}{2}}$$

RISULTA INFINE:

$$(2.8.9) \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \kappa X\left(\omega + \kappa \frac{2\pi}{T}\right) = \\ = \frac{1}{T} \frac{\pi}{\pi} \sin \frac{\omega \pi T}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{\omega T}{2}} = \\ = \frac{\sin \frac{\omega \pi T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}}.$$

ESERCIZIO N. 8

ESPRIMERE NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE LA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHE' UNA FUNZIONE  $x(t)$  ASSUMA I VALORI (FIGURA 2.8.2):

$$(2.8.10) \quad x_n = x(nT) = \begin{cases} x_0 & , n=0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}$$

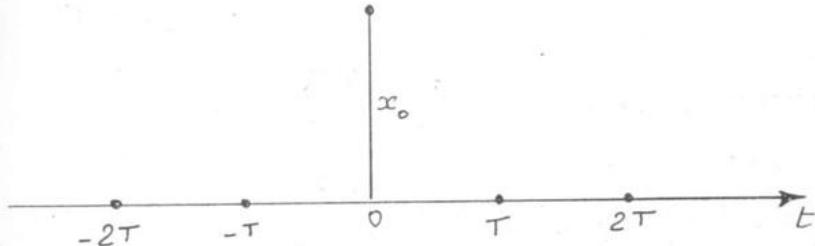


Fig. 2.8.2

LA TRASFORMATO SECONDO FOURIER DELLA SERIE TEMPO-RALE  $\{x_n\}$  I CUI TERMINI SONO DATI DALLA (2.8.10) VALE:

$$(2.8.11) \quad X_s(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\omega T} = x_0 .$$

IN VIRTU' DELLA (2.7.7) RISULTA:

$$(2.8.12) \quad X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \chi \left( \omega + \kappa \frac{2\pi}{T} \right)$$

DA CUI:

$$(2.8.13) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \chi \left( \omega + \kappa \frac{2\pi}{T} \right) \equiv x_0 T .$$

PER L'UNICITA' DELLA TRASFORMATO, LA (2.8.13) RAPPRESENTA LA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE CERCATA.

POICHÉ IL PRIMO MEMBRO DELLA (2.8.13) È FUNZIONE PERIODICA DI  $\omega$  CON PERIODO  $2\pi/T$ , BASTA VERIFICARE DETTA CONDIZIONE NELL'INTERVALLO  $(-\pi/T, \pi/T)$  O, PIÙ SEMPLICEMENTE, RICORDANDO LA (2.3.3), NELL'INTERVALLO  $(0, \pi/T)$ .

DALLA (2.8.13) DISCENDONO LE SEGUENTI CONSIDERAZIONI:

I - SE CONSIDERIAMO FUNZIONI CON BANDA

$$B_\omega < \frac{\pi}{T} ,$$

LA CONDIZIONE (2.8.13) NON PUO' MAI ESSERE VERIFICATA. INFATTI, RIPETENDO PERIODICAMENTE LA TRASFORMATA  $X(\omega)$  CON PERIODO  $2\pi/T$ , RESTANO SEMPRE INTERVALLI DELL'ASSE  $\omega$  IN CUI TALE RIPETIZIONE E' IDENTICAMENTE 0 (FIGURA 2.8.3).

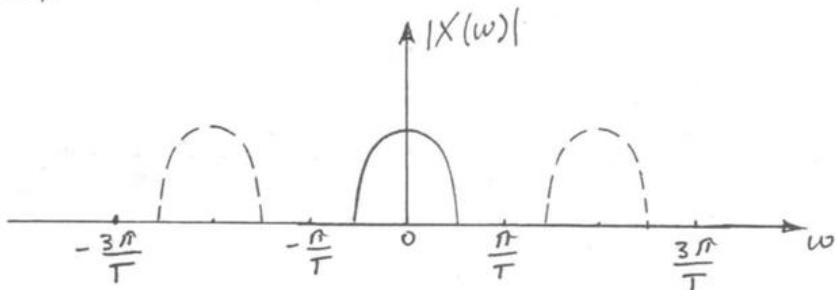


Fig. 2.8.3

II - SE CONSIDERIAMO FUNZIONI CON BANDA

$$B_\omega = \frac{\pi}{T} ,$$

LA (2.8.13) PUO' ESSERE VERIFICATA SE E SOLO SE (FIGURA 2.8.4):

$$(2.8.14) \quad X(\omega) = \begin{cases} \infty_0 T & , |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0 & , |\omega| > \frac{\pi}{T} . \end{cases}$$

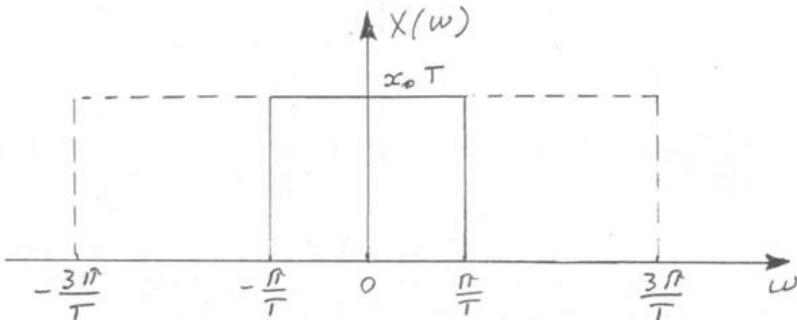


Fig. 2.8.4

LA CORRISPONDENTE FUNZIONE  $x(t)$  E' (ESERCIZIO  
N.5):

$$(2.8.15) \quad x(t) = x_0 \frac{\sin \pi \frac{t}{T}}{\pi \frac{t}{T}}$$

ED E' RAPPRESENTATA NELLA FIGURA 2.8.5.

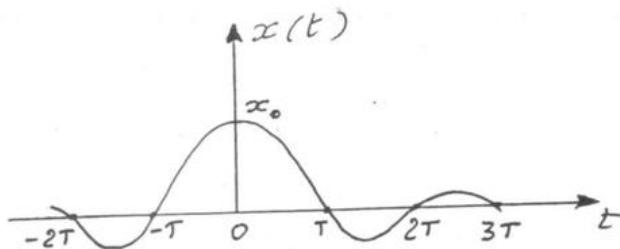


Fig. 2.8.5

III - SE CONSIDERIAMO FUNZIONI CON BANDA CON BANDA

$$B_\omega > \frac{\pi}{T}$$

E' POSSIBILE VERIFICARE LA (2.8.13) IN INFINITI MODI. FRA QUESTI RIVESTONO PARTICOLARE IMPORTANZA PRATICA, COME VEDREMO, LE TRASFORMATE  $X(\omega)$  CHE SI OTTENGONO DALLA (2.8.14) SOSTITUENDO LE DISCONTINUITA' CON RACCORDI CONTINUI DI TIPO ANTISIMMETRICO, COME MOSTRATO IN FIGURA 2.8.6.

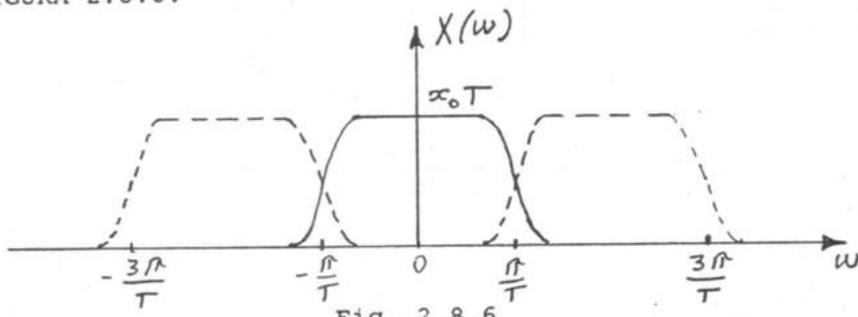


Fig. 2.8.6

AD ESEMPIO IL RACCORDO PUO' ESSERE DEL TIPO COSIDDETTO A COSENO RIALZATO. IN TAL CASO L'ESPRESSONE DI  $X(\omega)$ , PER  $\omega \geq 0$ , E' DATA DA:

$$(2.8.16) \quad X(\omega) = \begin{cases} x_0 T & , \text{ per } 0 \leq \omega \leq (1-\alpha) \frac{\pi}{T} \\ \frac{x_0 T}{2} \left\{ 1 - \sin \left[ \frac{\pi}{2\alpha} \left( \omega - \frac{\pi}{T} \right) \right] \right\} & , \text{ per } (1-\alpha) \frac{\pi}{T} \leq \omega \leq (1+\alpha) \frac{\pi}{T} \\ 0 & , \text{ per } \omega \geq (1+\alpha) \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

ESSENDO  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) CHIAMATO FATTORE DI ROLL-OFF (FIGURA 2.8.7).

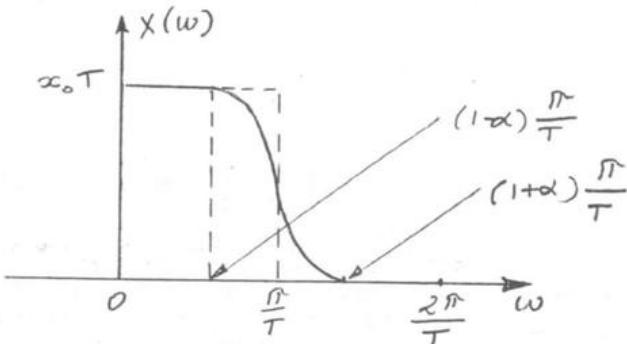


Fig. 2.8.7

PER  $\alpha = 0$  RITROVIAMO IL CASO II E PER  $\alpha = 1$  ABBIAMO L'ANDAMENTO RIPORTATO IN FIGURA 2.8.8.

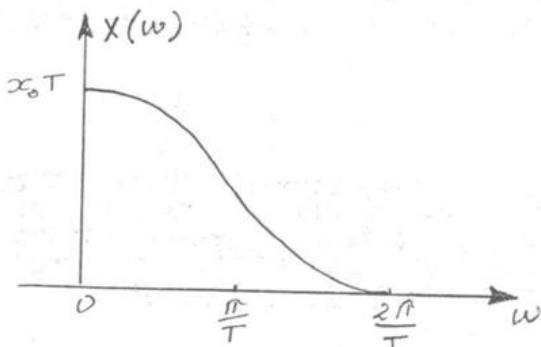


Fig. 2.8.8

L'ANTITRASFORMATA DELLA (2.8.16) [ESTESA NATURALMENTE AI VALORI NEGATIVI DI  $\omega$  CON LEGGE DI PARITA'] E':

$$(2.8.17) \quad x(t) = x_0 \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} \frac{\cos \sqrt{\pi^2 + \frac{4\alpha^2 t^2}{T^2}}}{1 - \frac{4\alpha^2 t^2}{T^2}}$$

ED E' RAPPRESENTATA IN FIGURA 2.8.9 PER  $\alpha = 0.5$ .

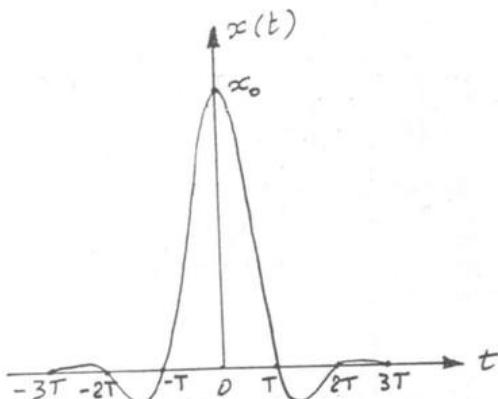


Fig. 2.8.9

SI NOTI CHE LE FUNZIONI ORA CONSIDERATE HANNO BANDA COMPRESA FRA  $\pi/T$  E  $2\pi/T$  (IN FREQUENZE,  $1/2T$  E  $1/T$ ).

UN'ULTIMA OSSERVAZIONE: I CASI I E II METTONO IN EVIDENZA CHE, FRA LE INFINITE FUNZIONI CHE ASSUMONO I VALORI (2.8.10), QUELLA DI BANDA MINIMA [ESPRESSA DALLA (2.8.15)] HA BANDA  $\pi/T_0$ , IN FREQUENZE,  $1/2T$ : TALE BANDA E' DETTA BANDA DI NYQUIST.

## 2.9 TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DEI TEMPI.

RIPRENDIAMO IN CONSIDERAZIONE L'OPERAZIONE DI CAMPIONAMENTO RAPPRESENTATA IN FIG. 2.1.1 CHE QUI RIPORTIAMO (FIG. 2.9.1).

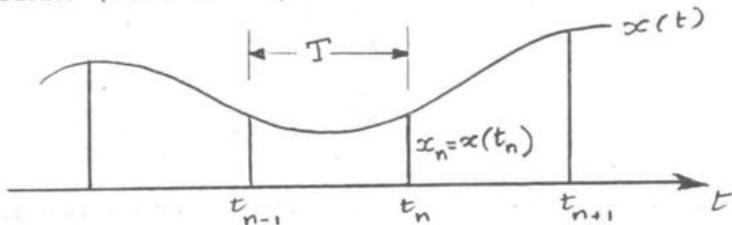


Fig. 2.9.1

I VALORI  $x_n = x(t_n)$  SONO DETTI VALORI CAMPIONATI, GLI ISTANTI DI LETTURA  $t_n$  ISTANTI DI CAMPIONAMENTO, L'INTERVALLO COSTANTE  $T$  CHE LI SEPARA E' DETTO INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO E IL SUO INVERSO,  $1/T = f_0$ , FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO.

SENZA LEDERE LA GENERALITA' POSSIAMO PORRE  $t_n = nT$  (A TAL FINE BASTA ASSUMERE L'ORIGINE DEI TEMPI IN UNO DEGLI ISTANTI DI CAMPIONAMENTO); LA SUCCESSIONE DEI VALORI CAMPIONATI COSTITUISCE QUINDI LA SERIE TEMPORALE GIA' ESPRESSA DALLA (2.7.1) CHE QUI RISCRIVIAMO:

$$(2.9.1) \quad x_n = x(nT), \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

PONIAMOCI IL PROBLEMA SE E QUANDO LA CONOSCENZA DEI SOLI VALORI CAMPIONATI CONSENTE DI RICOSTRUIRE L'INTERA FORMA D'ONDA. SE NON FORMULIAMO ALCUNA CONDIZIONE, LA RISPOSTA E' EVIDENTEMENTE NEGATIVA IN QUANTO ESITANO INFINITE FUNZIONI CHE NEGLI ISTANTI  $nT$  ASSUMANO I VALORI  $x_n$ .

OSSERVIAMO TUTTAVIA CHE, IN VIRTU' DELLA (2.7.7), E CIOE':

$$(2.9.2) \quad X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-jn\omega T},$$

LA CONOSCENZA DEI VALORI CAMPIONATI EQUIVALE A QUELLA DELLA RIPETIZIONE PERIODICA DELLA TRASFORMATA  $X(\omega)$  DI  $x(t)$ , CON PERIODO

$$(2.9.3) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0, \quad f_0 = \frac{1}{T},$$

CHE RAPPRESENTA LA PULSAZIONE CORRISPONDENTE ALLA FREQUENZA  $f_0$  DI CAMPIONAMENTO.

LA TRASFORMATA  $X(\omega)$  ED ALTRI TERMINI DELLA SERIE A SECONDO MEMBRO DELLA (2.9.2) SONO RAPPRESENTATI, IN MODULO, NELLA FIG. 2.9.2. ABBIAMO FATTO RIFERIMENTO AD UNA FUNZIONE PASSA-BASSO ED ABBIAMO INDICATO CON  $\omega_m$  LA MASSIMA PULSAZIONE A CUI E' APPREZZABILE LO SPETTRO DI  $x(t)$  (LA CORRISPONDENTE FREQUENZA E'  $f_m = \omega_m/2\pi$ ).

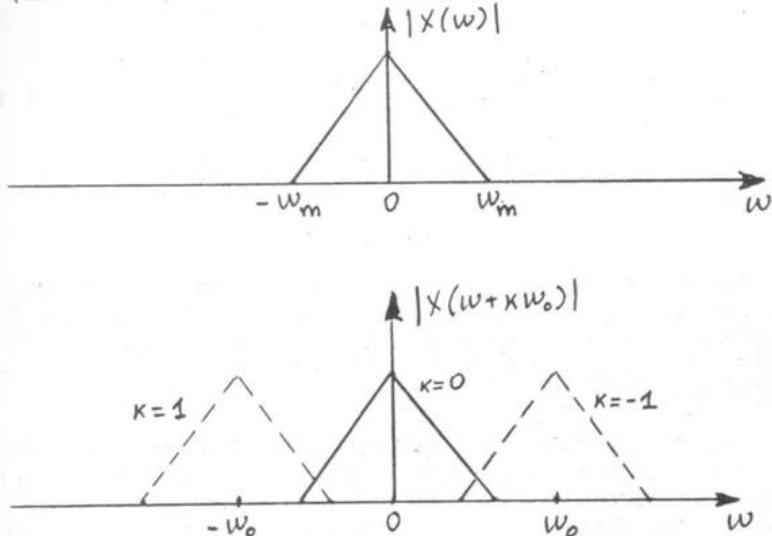


Fig. 2.9.2

COME TALE FIGURA PONE IN CHIARA EVIDENZA, LA CONOSCENZA DELLA RIPETIZIONE PERIODICA DI  $X(\omega)$  NON CONSENTE IN GENERALE DI RISALIRE A  $X(\omega)$ , E QUINDI A  $x(t)$ . E' SUFFICIENTE PERO' CHE SI PRESENTI LA CIRCOSTANZA DI FIG. 2.9.3, NELLA QUALE I DIVERSI TERMINI OCCUPANO BANDE DISTINTE, PER POTER RISALIRE DA  $X_e(\omega)$  A  $X(\omega)$ .

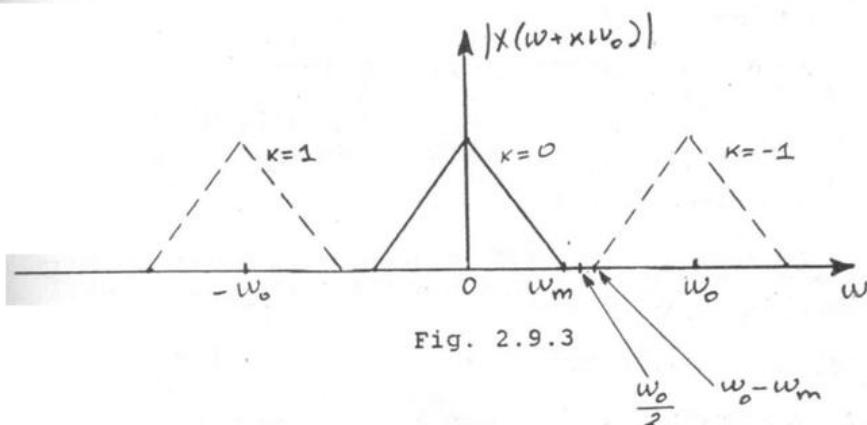


Fig. 2.9.3

LA SEPARAZIONE DI TERMINI MOSTRATA IN FIG. 2.9.3 AVVIENE QUANDO:

$$(2.9.4) \quad \omega_m \leq \omega_o - \omega_m$$

$$\omega_o \geq 2\omega_m$$

O, CON RIFERIMENTO ALLE FREQUENZE:

$$(2.9.5) \quad f_o \geq 2f_m ,$$

CHE EQUIVALE ALLA:

$$(2.9.6) \quad T \leq \frac{1}{2f_m} .$$

IN CONCLUSIONE, QUANDO E' VERIFICATA LA CONDIZIONE (2.9.5), CIOE' LA FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO E' MAGGIORE DEL DOPPIO DELLA MASSIMA FREQUENZA DI  $x(t)$ , LA CONOSCENZA DEI VALORI CAMPIONATI INDIVIDUA IN MANIERA UNIVOCATA LA FUNZIONE ORIGINARIA  $x(t)$ .

NOTIAMO LA PERFETTA ANALOGIA FRA IL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DEI TEMPI, ORA DISCUSSO, E QUELLO DEL CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE TRATTATO AL TERMINE DEL PARAGRAFO 2.6: SONO SEMPLICEMENTE SCAMBIATI I RUOLI DELLE VARIABILI TEMPO E FREQUENZA. SI CONFRONTINO IN PARTICOLARE LE RELAZIONI (2.6.12) E (2.9.5).

SOTTO LA CONDIZIONE SUFFICIENTE (2.9.5) VOGLIAMO ORA ESPRIMERE  $x(t)$  IN FUNZIONE DEI SUOI VALORI CAMPIONATI  $x(nT)$ . A TAL FINE, RICORDANDO LA (2.7.7) ED OSSERVANDO LA FIG. 2.9.3, POSSIAMO AFFERMARE CHE  $X(\omega)$  COINCIDE CON  $TX_s(\omega)$  IN OGNI INTERVALLO  $(-\Omega, \Omega)$  CON  $\omega_m \leq \Omega \leq \omega_o - \omega_m$ . PER RAGIONI CHE PRECISEREMO FRA POCO, SCEGLIAMO  $\Omega = \omega_o/2$ , PUNTO CENTRALE DI  $(\omega_m, \omega_o - \omega_m)$ .

SCRIVIAMO DUNQUE:

$$(2.9.7) \quad X(\omega) = \begin{cases} TX_s(\omega) & |\omega| < \frac{\omega_o}{2} = \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_s(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

RICORDANDO LA (2.7.2),

$$X_s(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\omega T},$$

ABBIAMO:

$$(2.9.10) \quad x(t) = \frac{T}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} x_n \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{-jn\omega T} e^{j\omega t} d\omega = \\ = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}.$$

IN CONCLUSIONE, POSTO

$$(2.9.11) \quad \text{sinc } z = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$$

RISULTA:

$$(2.9.12) \quad x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT) \text{sinc} \frac{t-nT}{T}.$$

INTERPRETAZIONE GRAFICA:

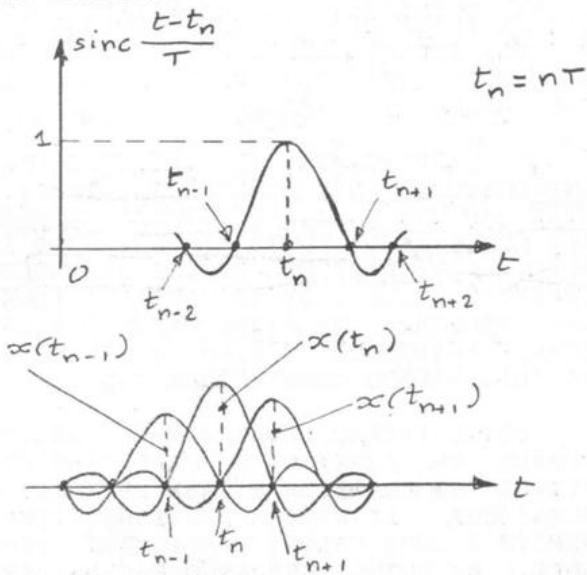


Fig. 2.9.4

RICORDANDO L'ESERCIZIO N. 5 OD AVENDO PRESENTE LA  
(2.9.10) POSSIAMO SCRIVERE:

$$(2.9.13) \quad \int \left[ \operatorname{sinc} \frac{t-nT}{T} \right] = \begin{cases} T e^{-j\omega nT}, |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, \text{ altrove,} \end{cases}$$

OSSIA LE FUNZIONI

$$\operatorname{sinc}[(t - nT)/T]$$

HANNO BANDA  $(0, \frac{\pi}{T})$ .

LA (2.9.12) E' SUSCETTIBILE DI UNA INTERESSANTE INTERPRETAZIONE DERIVANTE DAL FATTO CHE LE FUNZIONI ORA CITATE SONO FRA LORO ORTOGONALI. INFATTI, IN VIRTU' DEL TEOREMA DI PARSEVAL GENERALIZZATO (2.4.11):

$$(2.9.14) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{t-nT}{T} \operatorname{sinc} \frac{t-mT}{T} dt = \\ = \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{-j\omega nT} e^{j\omega mT} d\omega = \begin{cases} 0, m \neq n \\ T, m = n. \end{cases}$$

DUNQUE LA (2.9.12) RAPPRESENTA UNO SVILUPPO DI  $x(t)$  IN SERIE DI FUNZIONI ORTOGONALI I CUI COEFFICIENTI SONO GLI STESSI VALORI CAMPIONATI  $x(nT)$ . TALE INTERPRETAZIONE E' RESA POSSIBILE DALLA SCELTA  $\Omega = \omega_0/2$  EFFETTUATA NELLO SCRIVERE LA (2.9.7).

E' IMPORTANTE SOTTOLINEARE CHE IL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DEI TEMPI CONSENTE DI SOSTITUIRE AD UNA FUNZIONE TEMPO-CONTINUA UNA SERIE TEMPO-CALE CONSERVANDO TUTTO IL CONTENUTO INFORMATIVO ORIGINARIO. L'OPERAZIONE DI CAMPIONAMENTO, ESEGUITA NEL RISPETTO DELLE IPOTESI DI TALE TEOREMA, COSTITUISCE, COME VEDREMO, IL PRIMO PASSO PER LA CONVERSIONE DI UN SEGNALE ANALOGICO IN FORMA NUMERICA (CONVERSIONE ANALOGICO/DIGITALE O CONVERSIONE A/D).

SOTTOLINEAMO INOLTRE CHE, MENTRE CON L'ANALISI DI FOURIER UNA FUNZIONE E' RAPPRESENTATA MEDIANTE I SUOI SPETTRI DI AMPIEZZA E FASE DEFINITI NEL DOMINIO DELLE PULSAZIONI, LA STESSA FUNZIONE VIENE ORA RAPPRESENTATA TRAMITE I SUOI VALORI CAMPIONATI, PRESI NEL DOMINIO DEI TEMPI, E QUINDI OPERANDO ESCLUSIVAMENTE IN TALE DOMINIO.

2.10 ALCUNE PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI UNA SERIE TEMPORALE.

I - SERIE TRASLATE.

SERIE	TRASFORMATA
$\{x_n\}$	$X_s(\omega)$
$\{x_{n-m}\}$	$X_s(\omega) e^{-jm\omega T}$

II - CONVOLUZIONE FRA SERIE TEMPORALI.

DATE DUE SERIE TEMPORALI  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  LA LORO CONVOLUZIONE DEFINISCE UNA NUOVA SERIE TEMPORALE  $\{z_n\}$  I CUI TERMINI SONO ESPRESI DA:

$$(2.10.1) \quad z_n = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i y_{n-i}$$

LA CORRISPONDENTE RELAZIONE FRA LE TRASFORMATE E':

$$(2.10.2) \quad Z_s(\omega) = X_s(\omega) Y_s(\omega) .$$

INFATTI:

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{-\infty}^{\infty} x_i \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} Y_s(\omega) e^{j(n-i)\omega T} d\omega \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} Y_s(\omega) e^{jn\omega T} \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} x_i e^{-ji\omega T} \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} X_s(\omega) Y_s(\omega) e^{jn\omega T} d\omega . \end{aligned}$$

III - CONVOLUZIONE FRA UNA SERIE TEMPORALE ED UNA FUNZIONE TEMPO-CONTINUA.

DATA LA SERIE TEMPORALE  $\{x_n\}$  E LA FUNZIONE TEMPO-CONTINUA  $g(t)$ , LA LORO CONVOLUZIONE DEFINISCE UNA FUNZIONE TEMPO CONTINUA ESPRESSA DA:

$$(2.10.3) \quad s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i g(t - i\tau).$$

LA CORRISPONDENTE RELAZIONE FRA LE TRASFORMATE E':

$$(2.10.4) \quad S(\omega) = G(\omega) X_s(\omega).$$

INFATTI:

$$S(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i G(\omega) e^{-j\omega i\tau} = G(\omega) X_s(\omega).$$

SE

$$x_n = x(nT),$$

RICORDANDO LA (2.7.7), RISULTA:

$$(2.10.5) \quad S(\omega) = \frac{1}{T} G(\omega) \sum_{-\infty}^{\infty} x(\omega + \kappa\omega_0),$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

2.11 ESERCIZIO N. 9.

CALCOLARE LA TRASFORMATA DI FOURIER DELLA SUCCESSIONE DI IMPULSI RETTANGOLARI RAPPRESENTATA NELLA FIGURA 2.11.1, OTTENUTA CAMPIONANDO UNA FUNZIONE TEMPO-CONTINUA  $x(t)$  CON INTERVALLO  $T$  E "TENENDO" I VALORI CAMPIONATI PER UN INTERVALLO PARI A  $\tau < T$ .

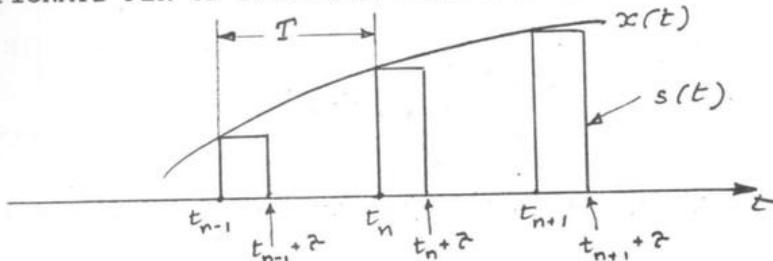


Fig. 2.11.1

LA SUCCESSIONE DI IMPULSI IN ESAME, AVENTI INTERVALLO DI RIPETIZIONE E DURATA COSTANTI, MA AMPIEZZE VARIABILI, COSTITUISCE UNA SUCCESSIONE DI IMPULSI MODULATA IN AMPIEZZA E VIENE DENOMINATA SEGNALE PAM (DA PULSE AMPLITUDE MODULATION).

OSSERVIAMO CHE IL SEGNALE PAM IN QUESTIONE PUO' ESSERE ESPRESSO ANALITICAMENTE MEDIANTE LA RELAZIONE:

$$(2.11.1) \quad s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(iT) g(t - iT),$$

OVE  $g(t)$  E' L'IMPULSO RETTANGOLARE DI FIGURA 2.11.2.

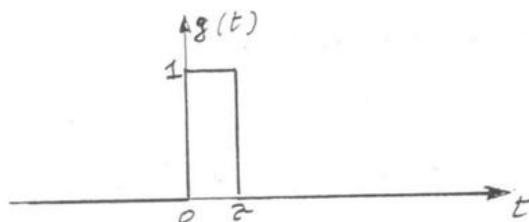


Fig. 2.11.2

$s(t)$  E' DUNQUE LA CONVOLUZIONE FRA LA SERIE TEMPO-RALE  $x(nT)$  E  $g(t)$ . LA SUA TRASFORMATA E' PERCIO' DATA DA:

$$S(\omega) = \frac{1}{T} G(\omega) \sum_{-\infty}^{\infty} X\left(\omega + \kappa \frac{2\pi}{T}\right).$$

D'ALTRA PARTE, PER ESPRIMERE LA TRASFORMATA  $G(\omega)$  BASTA RICORDARE L'ESERCIZIO N. 2 ED OSSERVARE CHE ORA L'IMPULSO  $g(t)$  E' CENTRATO SULL'ISTANTE  $\tau/2$ :

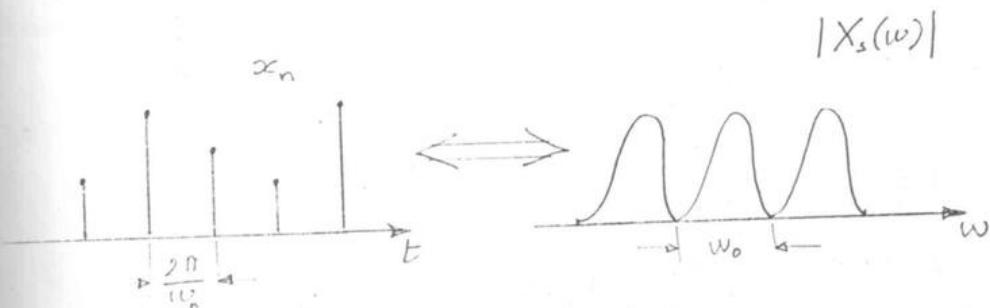
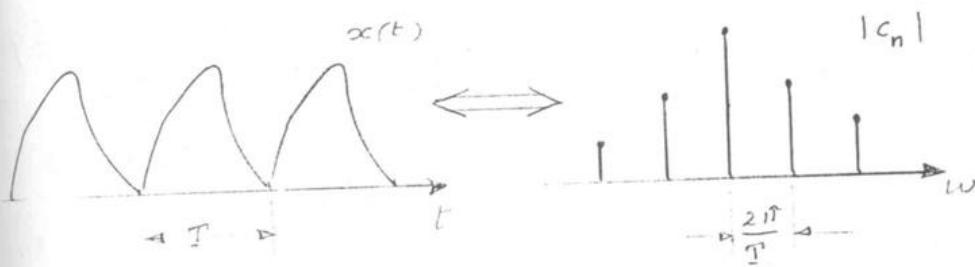
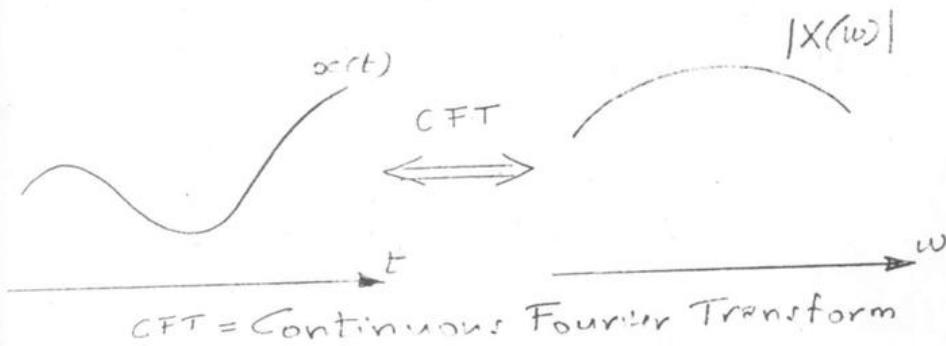
$$(2.11.2) \quad G(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \frac{\omega^2}{2}}{\frac{\omega^2}{2}} e^{-j \frac{\omega^2}{2}}.$$

IN CONCLUSIONE, LA TRASFORMATA DEL SEGNALE PAM E':

$$(2.11.3) \quad S(\omega) = \frac{2}{T} \frac{\sin \frac{\omega^2}{2}}{\frac{\omega^2}{2}} e^{-j \frac{\omega^2}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} X\left(\omega + \kappa \frac{2\pi}{T}\right).$$

No

2.12 CORRISPONDENZE INTRODOTTE DALL'ANALISI DI FOURIER.



## X NO

### 2.13 LA TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA.

LA TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA (DFT = DISCRETE FOURIER TRANSFORM) STABILISCE UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCÀ FRA N-PLE DI NUMERI (IN GENERALE COMPLESSI).

PIÙ PRECISAMENTE, CONSIDERIAMO LA SUCCESSIONE DEI NUMERI

$$(2.13.1) \quad x_n, n = 0, 1, \dots, N-1 .$$

SI DEFINISCE TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA DELLA (2.13.1) LA SUCCESSIONE DEGLI N NUMERI  $x_q$ ,  $q = 0, 1, \dots, N-1$ , ESPRESSA DA:

$$(2.13.2) \quad X_q = \mathcal{F}_d[x_n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j \frac{2\pi}{N} k q}, \quad q = 0, 1, \dots, N-1 .$$

LA FORMULA DI ANTITRASFORMAZIONE (IDFT = INVERSE DISCRETE FOURIER TRANSFORM) È:

$$(2.13.3) \quad x_n = \mathcal{F}_d^{-1}[X_q] = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} X_q e^{j \frac{2\pi}{N} q n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 .$$

INFATTI:

$$(2.13.4) \quad \sum_{q=0}^{N-1} X_q e^{j \frac{2\pi}{N} q n} = \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j \frac{2\pi}{N} k q} e^{j \frac{2\pi}{N} q n} = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \left( \sum_{q=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} q(n-k)} \right)$$

D'ALTRA PARTE:

$$(2.13.5) \quad \sum_{q=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} q(n-k)} = \begin{cases} N & k = n \\ \frac{1 - e^{j 2\pi(n-k)}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N}(n-k)}} = 0 & k \neq n \end{cases}$$

E QUINDI:

$$(2.13.6) \quad \sum_{q=0}^{N-1} X_q e^{j \frac{2\pi}{N} q n} = N x_n .$$

X  
io

SI OSSERVI CHE LE FORMULE DI TRASFORMAZIONE ED ANTITRASFORMAZIONE (2.13.2) E (2.13.3), CHE STABILISCONO UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCÀ FRA DUE N-PLE ORDINATE MEDIANTE PRODOTTI E ADDIZIONI IN NUMERO FINITO, SONO DIRETTAMENTE IMPLEMENTABILI SU UN ELABORATORE ELETTRONICO, DIVERSAMENTE DALLE ALTRE FORMULE VISTE IN PRECEDENZA CHE CONFORTANO IL CALCOLO DI INTEGRALI O DI SOMME DI SERIE.

MOSTRIAMO ORA CHE ESISTE UN LEGAME FRA LA TRASFORMATA DISCRETA E QUELLA CONTINUA DI FOURIER. QUEST'ULTIMA PUÒ QUINDI ESSERE DETERMINATA MEDIANTE L'USO DELLA PRIMA.

A TAL FINE SIA  $x(t)$  UNA FUNZIONE CON TRASFORMATA  $X(\omega)$ . COSTRUIAMO LE DUE RIPETIZIONI PERIODICHE:

$$(2.13.7) \quad x_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(t - i\tau_p) ,$$

$$(2.13.8) \quad X_p(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} X(\omega - i\omega_p) ,$$

CON PERIODI RISPETTIVAMENTE  $\tau_p$  E  $\omega_p$  LEGATI FRA LORO DALLA RELAZIONE:

$$(2.13.9) \quad \tau_p \omega_p = 2\pi N .$$

POSTO:

$$(2.13.10) \quad \Delta t = \frac{\tau_p}{N} = \frac{2\pi}{\omega_p} ,$$

$$(2.13.11) \quad \Delta \omega = \frac{\omega_p}{N} = \frac{2\pi}{\tau_p} ,$$

CHE, IN VIRTÙ DELLA (2.13.9), SODDISFANO LA RELAZIONE:

$$(2.13.12) \quad \Delta t \cdot \Delta \omega = \frac{2\pi}{N} ,$$

CONSIDERIAMO LE DUE N-PLE ORDINATE DI NUMERI:

$$(2.13.13) \quad \Delta t \cdot x_p(n\Delta t) , \quad n=0,1,\dots,N-1$$

$$(2.13.14) \quad X_p(q\Delta \omega) , \quad q=0,1,\dots,N-1 .$$

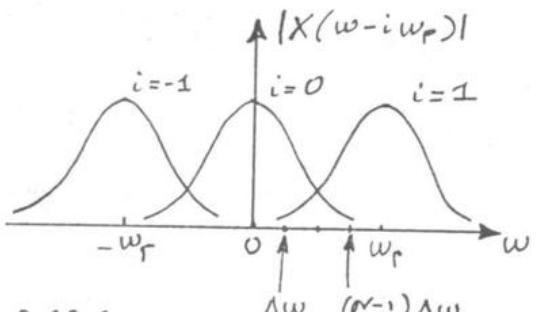
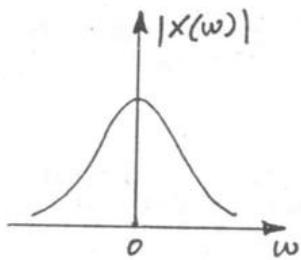
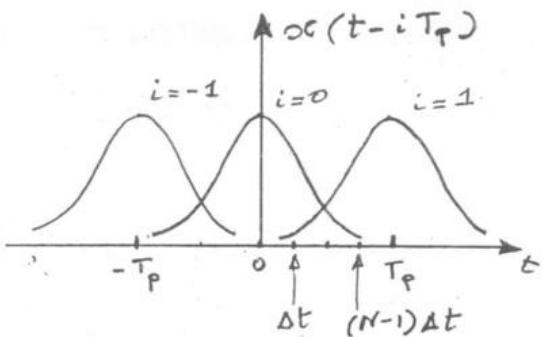
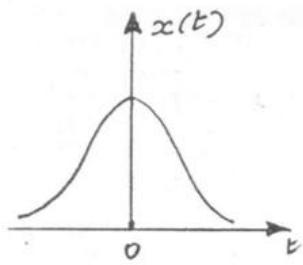


Fig. 2.13.1

TUTTO CIO' PREMESSO (RAPPRESENTATO IN FIGURA 2.13.1), SUSSISTE IL SEGUENTE TEOREMA:

LE DUE N-PIE ORDINATE DI NUMERI (2.13.13) E (2.13.14) SONO LEGATE FRA LORO DALLA TRASFORMAZIONE DISCRETA DI FOURIER, OSSIA:

$$(2.13.15) \quad \Delta t \cdot x_p(n\Delta t) = \mathcal{F}_d^{-1} [x_p(\gamma \Delta w)] ,$$

$$(2.13.16) \quad X_p(\gamma \Delta w) = \mathcal{F}_d [\Delta t \cdot x_p(n\Delta t)] .$$

DIMOSTRAZIONE:

RISCRIVIAMO LA (2.6.3) NELLA FORMA:

$$(2.13.17) \quad x_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{\kappa} e^{j \kappa \frac{2\pi}{T_p} t}$$

OVE, IN VIRTU' DELLA (2.6.11), ABBIAMO:

$$(2.13.18) \quad c_{\kappa} = \frac{1}{T_p} \times \left( \kappa \frac{2\pi}{T_p} \right) = \frac{1}{T_p} \times (\kappa \Delta w) .$$

IN PARTICOLARE, NELL'ISTANTE  $t = n \Delta t$  RISULTA:

$$(2.13.19) \quad x_p(n \Delta t) = \frac{1}{T_p} \sum_{-\infty}^{\infty} X(\kappa \Delta \omega) e^{j \kappa \frac{2\pi}{T_p} n} \frac{T_p}{N} = \\ = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{-\infty}^{\infty} X(\kappa \Delta \omega) e^{j \frac{2\pi}{N} \kappa n}$$



Fig. 2.13.2

SUDDIVIDIAMO ORA L'INSIEME DEGLI INTERI  $k$  IN INFINTI INTERVALLI COMPRENDENTI  $N$  NUMERI INTERI CONSECUTIVI:

$$hN, hN + 1, \dots, hN + N - 1, \quad h = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

(FIGURA 2.13.2) E SCRIVIAMO:

$$(2.13.20) \quad x_p(n \Delta t) = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{-\infty}^{\infty} h \sum_{hN}^{hN+N-1} X(\kappa \Delta \omega) e^{j \frac{2\pi}{N} \kappa n}$$

PONENDO:

$$(2.13.21) \quad k = q + hn$$

OTTENIAMO:

$$(2.13.22) \quad \Delta t x_p(n \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{-\infty}^{\infty} h \sum_0^{N-1} X(q \Delta \omega + hN \Delta \omega) e^{j \frac{2\pi}{N} q n} = \\ = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} q \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} h X(q \Delta \omega + h \omega_p) \right] e^{j \frac{2\pi}{N} q n} = \\ = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} q X_p(q \Delta \omega) e^{j \frac{2\pi}{N} q n},$$

CHE ESPRIME APPUNTO LA (2.13.15).

IL TEOREMA ORA DIMOSTRATO CONSENTE L'IMPIEGO DELLA TRASFORMATA DISCRETA PER CALCOLARE LA TRASFORMATA CONTINUA QUANDO LE SEQUENZE (2.13.13) E (2.13.14) SONO RAPPRESENTATIVE DI VALORI DELLE SOLE  $x(t)$  E  $X(\omega)$  COME AVVIENE NELLA FIGURA 2.13.3, NELLA QUALE E' CONTEMPLATO UN CASO IN CUI E' TRASCURABILE L'ALIASING SIA NEL DOMINIO DEI TEMPI CHE IN QUELLO DELLE FREQUENZE.

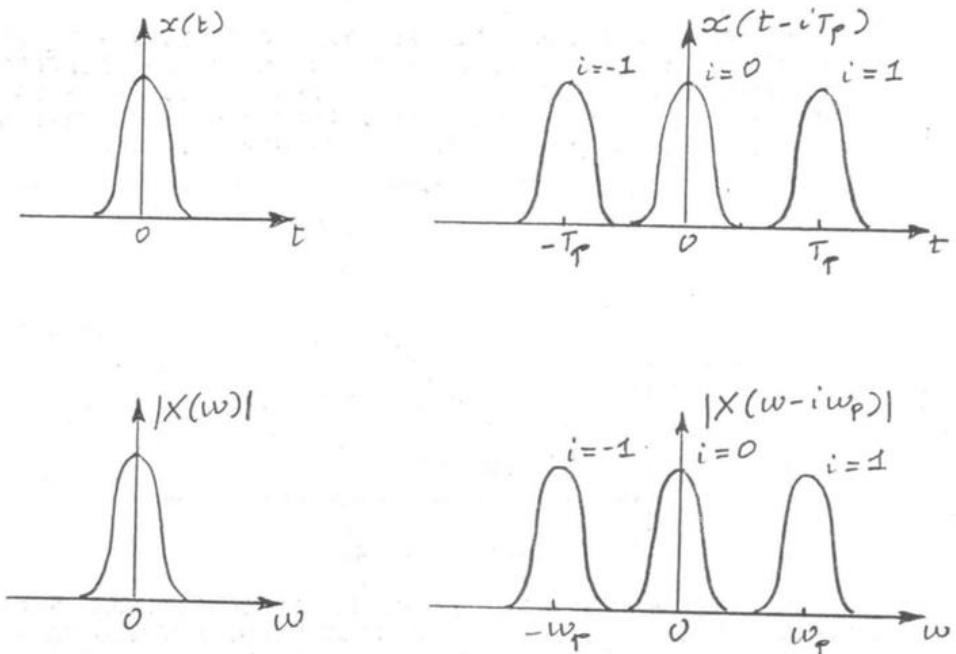


Fig. 2.13.3

PER EVITARE DETTI FENOMENI DI ALIASING OCCORRE ASSUMERE SIA  $T_p$  CHE  $\omega_p$  SUFFICIENTEMENTE ELEVATI, IL CHE COMPORTA, COME MOSTRA LA (2.13.9), LA SCELTA DI UN VALORE DI  $N$  SUFFICIENTEMENTE ELEVATO. D'ALTRA PARTE, CIO' RIDUCE I VALORI DI  $\Delta t$  E  $\Delta\omega$  E FAVORISCE QUINDI UNA CONVENIENTE RISOLUZIONE DEGLI ASSI DEI TEMPI E DELLE PULSAZIONI.

## FAST FOURIER TRANSFORM

NELLE FORMULE DI TRASFORMAZIONE E ANTITRASFORMAZIONE (2.13.2) E (2.13.3) COMPARA UN NUMERO DI MOLTIPLICAZIONI PARI AD  $N^2$ . POICHÉ IL TEMPO DI CALCOLO È PRATICAMENTE DETERMINATO DA TALI MOLTIPLICAZIONI, POSSIAMO DIRE CHE ESSO CRESCE PROPORZIONALMENTE AD  $N^2$ .

TUTTAVIA È POSSIBILE IMPOSTARE ALGORITMI PER IL CALCOLO DELLA DFT (E DELLA IDFT) IN MODO DA RIDURRE DRASTICAMENTE IL TEMPO RICHIESTO, RENDENDOLO PRATICAMENTE PROPORZIONALE A N, CONSEGUENDO VANTAGGI SEMPRE PIÙ SENSIBILI ALL'AUMENTARE DI N (FIGURA 2.13.4).

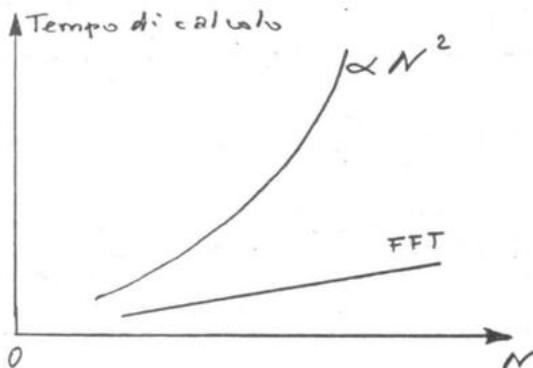


Fig. 2.13.4

GLI ALGORITMI CHE PERMETTONO DI CONSEGUIRE TALE RISULTATO SONO MOLTEPLICI: AD ESSI VIENE ATTRIBUITA LA DENOMINAZIONE DI TRASFORMATO DI FOURIER VELOCE (FFT = FAST FOURIER TRANSFORM).

TALI ALGORITMI, INOLTRE, SONO DISPONIBILI COME SUBROUTINES IN QUASI TUTTE LE LIBRERIE PER IL CALCOLO ELETTRONICO, A PARTIRE DAI PC. AD ESSE SI RINVIA PER LE OPPORTUNE ESERCITAZIONI.

AD ESEMPIO, SI CALCOLI PER VIA NUMERICA, FACENDO USO DELLA FFT, LA TRASFORMATO DI UN IMPULSO RETTANGolare, DI CUI NELL'ESERCIZIO N. 2 È GIA' STATA RICAVATA L'ESPRESSONE ANALITICA.

2.14 L'OPERATORE DI DIRAC (LA "FUNZIONE IMPULSIVA").

CONSIDERIAMO L'IMPULSO RAPPRESENTATO IN FIGURA 2.14.1, AVENTE INTENSITÀ UNITARIA, ED UNA FUNZIONE  $x(t)$  CONTINUA IN  $t = a$ .

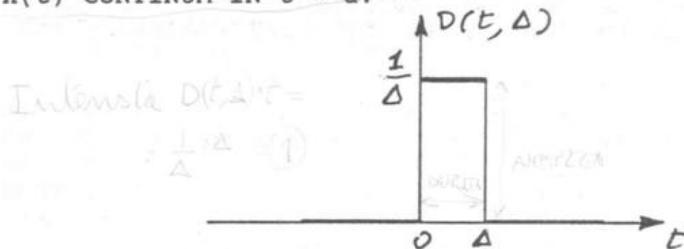


Fig. 2.14.1

CALCOLIAMO:

$$\begin{aligned}
 (2.14.1) \quad & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) D(a-t, \Delta) dt = \\
 & = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(a-t) D(t, \Delta) dt = \\
 & = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_a^a x(a-t) dt = x(a).
 \end{aligned}$$

IN ALTRI TERMINI, CHIAMANDO  $\tau$  LA VARIABILE DI INTEGRAZIONE, PONENDO  $a = t$ , POSSIAMO SCRIVERE:

$$(2.14.2) \quad x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) D(t-\tau, \Delta) d\tau$$

O, PIU' SEMPLICEMENTE, IN FORMA SIMBOLICA:

$$(2.14.3) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t) * \delta(t).$$

IL SIGNIFICATO ALLA (2.14.3) E' DATO DALLA (2.14.2), NELLA QUALE NON E' LECITO SCAMBIARE L'ORDINE DELLE OPERAZIONI: PRIMA L'INTEGRAZIONE, POI IL PASSAGGIO AL LIMITE. INFATTI TALE SCAMBIO DAREBBE:

$$(2.14.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \lim_{\Delta \rightarrow 0} D(t-\tau, \Delta) d\tau = 0.$$

LA COPPIA DI RELAZIONI (2.14.3), (2.14.2) DEFINISCE L'OPERATORE DI DIRAC  $\delta(t)$  O "FUNZIONE IMPULSIVA".

LA (2.14.2) E' SUSCETTIBILE DI UNA INTERESSANTE INTERPRETAZIONE. A TAL FINE OSSERVIAMO CHE, PER  $\Delta$  SUFFICIENTEMENTE PICCOLO, ESSA PUO' ESSERE APPROXIMATA COME SEGUVE:

$$(2.14.5) \quad x(t) \cong \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) D(t-\tau, \Delta) d\tau \cong \\ \cong \sum_{-\infty}^{\infty} x(n\Delta) D(t-n\Delta, \Delta) \Delta$$

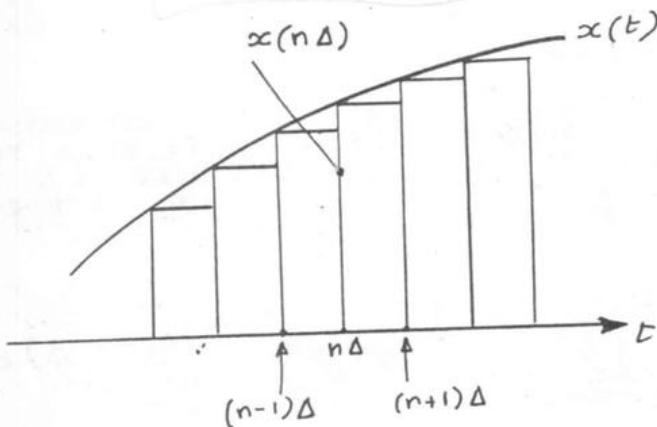


Fig. 2.14.2

QUESTA RELAZIONE, RAPPRESENTATA IN FIGURA 2.14.2, ESPRIME  $x(t)$  COME UNA SOMMA DI IMPULSI RETTANGOLARI DI DURATA  $\Delta$ , AMPIEZZA  $x(n\Delta)$  [E QUINDI INTENSITA'  $x(n\Delta)\Delta$ ], CHE SI SUCCEDONO CON INTERVALLO  $\Delta$ . TALE SUCCESSIONE DI IMPULSI APPROXIMA TANTO MEGLIO L'ANDAMENTO DI  $x(t)$  QUANTO MINORE E'  $\Delta$  COME, DEL RESTO, E' INDICATO DALLA (2.14.2).

FACENDO RIFERIMENTO ALLA (2.14.3), CHE RAPPRESENTA IN FORMA SIMbolICA LA (2.14.2), POSSIAMO FORMALMENTE DIRE CHE ESSA ESPRIME LA FUNZIONE  $x(t)$  COME "SOMMA" DI FUNZIONI IMPULSIVE, LA GENERICA DELLE QUALI E' APPLICATA ALL'ISTANTE  $t$  ED HA INTENSITA' INFINITESIMA  $x(t) dt$ .

X

TRASFORMATA SECONDO FOURIER DELLA FUNZIONE IMPULSIVA

DALLA (2.14.3), ASSUMENDO  $x(t) = e^{j\omega t}$  E  $t = 0$ ,  
DISCENDE:

$$(2.14.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega z} \delta(-z) dz = e^{j\omega \cdot 0}$$

OD ANCHE, PONENDO  $\tau = -t$ :

$$(2.14.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = 1$$

LA (2.14.5) CONSENTE DI DARE UNA DEFINIZIONE FORMALE DI TRASFORMATA SECONDO FOURIER DELLA FUNZIONE IMPULSIVA, CHE RISULTA IDENTICAMENTE EGUALE AD 1. PER MEGLIO INTERPRETARE QUESTO RISULTATO, RICORDIAMO LA (2.14.2) E SCRIVIAMO:

$$(2.14.6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} D(t, \Delta) e^{-j\omega t} dt = \\ = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathcal{F}[D(t, \Delta)]$$

CON RIFERIMENTO ALLA FUNZIONE AUSILIARIA RAPPRESENTATA IN FIGURA 2.14.1, RICORDANDO L'ESERCIZIO N. 2 [FORMULA (2.5.3)] ED OSSERVANDO CHE L'IMPULSO  $D(t, \Delta)$  E' CENTRATO SULL'ISTANTE  $\Delta/2$ , E':

$$(2.14.7) \quad \mathcal{F}[D(t, \Delta)] = \frac{\sin \frac{\omega \Delta}{2}}{\frac{\omega \Delta}{2}} e^{-j \frac{\omega \Delta}{2}}$$

IL CUI LIMITE, PER  $\Delta \rightarrow 0$ , VALE 1.

2.15 ESERCIZI.

ESERCIZIO N. 10

FACCIAMO RIFERIMENTO AL GRAFICO DI FIGURA 2.15.1 CHE RAPPRESENTA IL MODULO DELLA TRASFORMATA (2.14.7) IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA NORMALIZZATA  $f\Delta$ ,

$$|\mathcal{F}[D(t, \Delta)]| = \left| \frac{\sin \pi f\Delta}{\pi f\Delta} \right|,$$

E TROVIAMO IL VALORE DI  $\Delta$  PER CUI  $|\mathcal{F}[D(t, \Delta)]|$  DIFFERISCE DA 1 PER MENO DI  $\epsilon = .001$  NELLA BANDA  $(0, f_m)$ , CON  $f_m = 1$  MHZ.

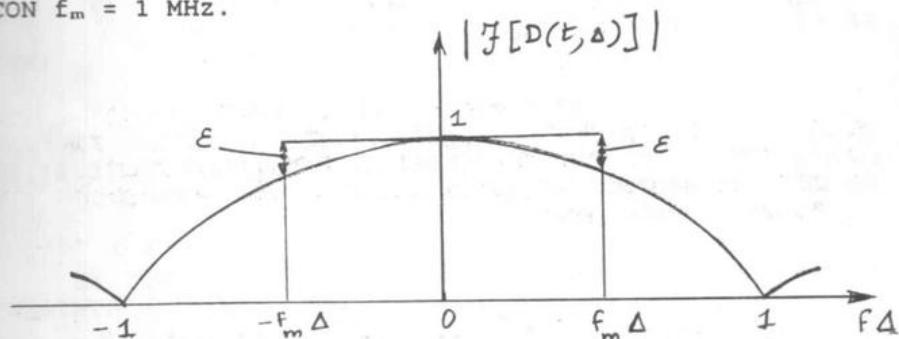


Fig. 2.15.1

LA SOLUZIONE NUMERICA DELL'EQUAZIONE

$$\left| \frac{\sin \pi f_m \Delta}{\pi f_m \Delta} \right| = 0.999$$

COMPRESA NELL'INTERVALLO  $(0, 1)$ , E':

$$f_m \Delta = 2.47 \cdot 10^{-2},$$

DA CUI:

$$\Delta = \frac{2.47 \cdot 10^{-2}}{f_m} = 24.7 \text{ ns}$$

ESERCIZIO N. 11

CALCOLARE L' INTEGRALE:

$$(2.15.2) \quad U(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau .$$

INTRODUCENDO LA FUNZIONE

$$x(\tau) = \begin{cases} 1 & , \tau < t \\ 0 & , \tau > t \end{cases},$$

LA (2.15.2) PUO' ESSERE SCRITTA NELLA FORMA

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau) d\tau ,$$

DA CUI, RICORDANDO LA (2.14.3):

$$U(t) = x(0) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}.$$

L' INTEGRALE (2.15.2) RAPPRESENTA DUNQUE LA FUNZIONE A GRADINO RIPORTATA IN FIGURA 2.15.2.

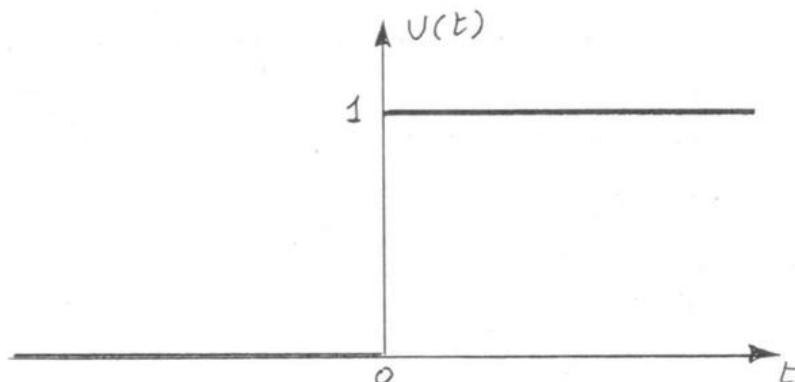


Fig. 2.15.2

COME VERIFICA DEL RISULTATO OTTENUTO SCRIVIAMO:

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau$$

E, PONENDO  $t - \tau = \gamma$ , OTTENIAMO:

$$U(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\gamma) d\gamma$$

OSSERVIAMO CHE:

$$U(t) = \frac{1}{2} + I(t)$$

OVE:

$$(2.15.3) \quad I(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t > 0 \\ -\frac{1}{2} & t < 0 \end{cases}$$

LA FUNZIONE  $I(t)$ , ESSA PURE A GRADINO, E' RAPPRESENTATA NELLA FIGURA 2.15.3.

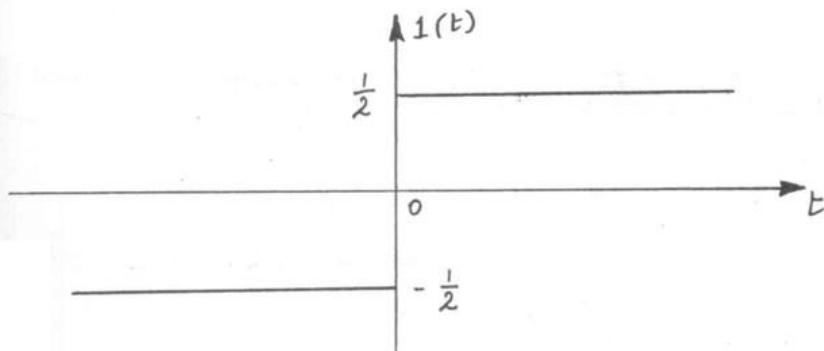


Fig. 2.15.3

ESERCIZIO N. 12

ESPRIMERE IL GRADINO  $1(t)$  NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE.

RICORDIAMO LA DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE INTEGRAL-SENO:

$$(2.15.4) \quad Si(x) = \int_0^x \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi$$

CHE HA L'ANDAMENTO RIPORTATO IN FIGURA 2.15.4.

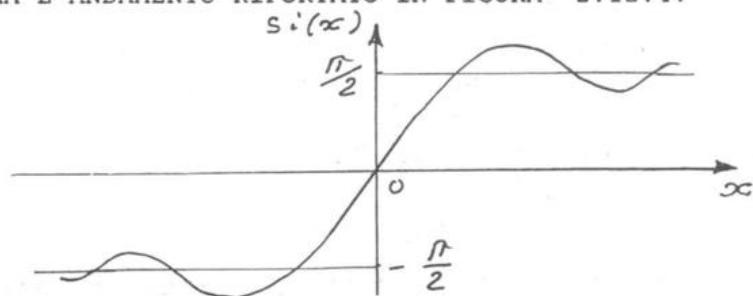


Fig. 2.15.4

POSTO  $\varphi = \omega t$ , ESSENDO  $\omega$  UNA NUOVA VARIABILE DI INTEGRAZIONE E  $t$  UN PARAMETRO, POSSIAMO SCRIVERE:

$$Si(x) = \int_0^{x/t} \frac{\sin \omega t}{\omega} dw$$

DA CUI:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{\omega} dw = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} Si(x) = \frac{\pi}{2}, & \text{per } t > 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} Si(x) = -\frac{\pi}{2}, & \text{per } t < 0. \end{cases}$$

IN CONCLUSIONE, ABBIAMO L'IMPORTANTE RELAZIONE:

$$(2.15.5) \quad 1(t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi w} \sin wt dw,$$

CHE ESPRIME IL GRADINO  $1(t)$  COME SOMMA DI TERMINI SINUSOIDALI (A CUI E' ASSOCIATO LO SPETTRO DI AMPIEZZA RIPORTATO IN FIGURA 2.15.5) E CHE COSTITUISCE PERCIO' LA RAPPRESENTAZIONE CERCATA DI  $1(t)$  NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE.

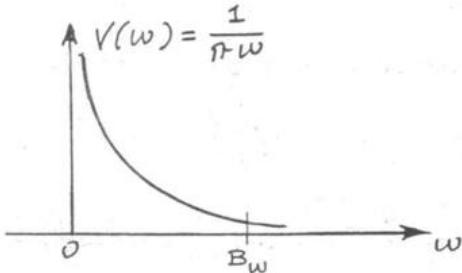


Fig. 2.15.5

LO SPETTRO OTTENUTO OCCUPA UNA BANDA TEORICAMENTE INFINITA. TUTTAVIA, ANCHE IN QUESTO CASO, NELL'AMBITO DI UN PREFISSATO ORDINE DI APPROSSIMAZIONE, SI PUO' PARLARE DI UNA BANDA  $B_w$  PRATICAMENTE FINITA.

CALCOLIAMO INFATTI:

$$(2.15.6) \quad y(t) = \int_0^{B_w} \frac{1}{\pi w} \sin wt dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{B_w t} \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi = \\ = \frac{1}{\pi} \text{Si}(B_w t).$$

LA FUNZIONE  $y(t)$  E' RAPPRESENTATA NELLA FIGURA 2.15.6 CHE MOSTRA COME, ALL'AUMENTARE DI  $B_w$ ,  $y(t)$  APPROSSIMA MEGLIO IL GRADINO  $1(t)$ .

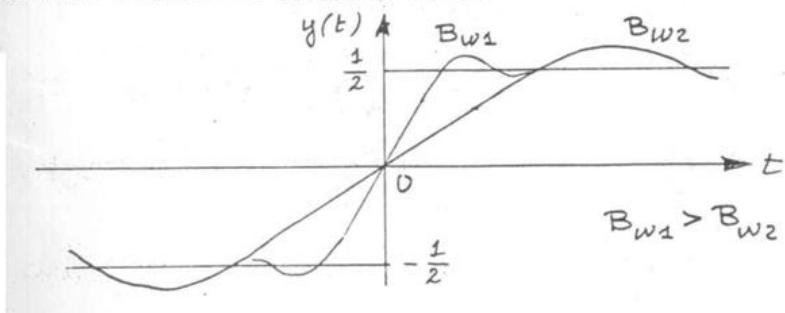


Fig. 2.15.6

UN PARAMETRO CHE CARATTERIZZA L'ENTITA' DELL'APPROXIMAZIONE E' IL TEMPO DI SALITA  $\tau_s$  DEFINITO IN FIGURA 2.15.7 ED ESPRESO DA:

$$(2.15.7) \quad \tau_s = \frac{1}{\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}}$$

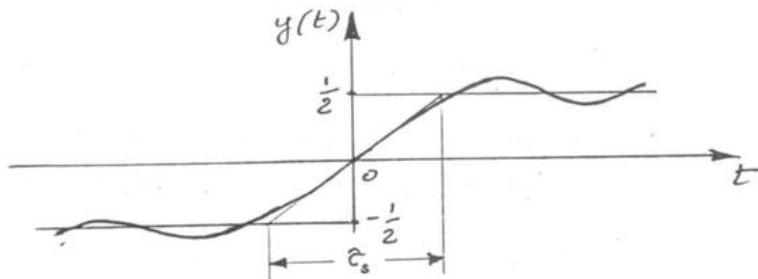


Fig. 2.15.7

RISULTA:

$$\frac{dy}{dt} = \int_0^{B_\omega} \frac{1}{\pi} \cos \omega t d\omega \longrightarrow \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \frac{B_\omega}{\pi}$$

$$(2.15.8) \quad \tau_s = \frac{\pi}{B_\omega} = \frac{1}{2B} \quad (B = \frac{B_\omega}{2\pi} = \text{BANDA IN FREQUENZE})$$

IL TEMPO DI SALITA E' DUNQUE TANTO MINORE QUANTO MAGGIORE E' LA BANDA SCELTA.

## CAPITOLO III

APPLICAZIONE DELL'ANALISI DEI SEGNALI  
ALLO STUDIO DEI SISTEMI LINEARI

3.1 APPLICAZIONE DELL'ANALISI DI FOURIER ALLO STUDIO DEI SISTEMI LINEARI TEMPO-CONTINUI.

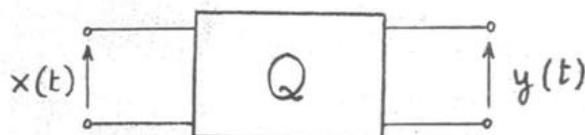


Fig. 3.1.1

CONSIDERIAMO IL QUADRIPOLO DI FIGURA 3.1.1, IN CUI  $x(t)$  INDICA UN SEGNALE D'INGRESSO TEMPO-CONTINUO E

$$(3.1.1) \quad y(t) = Q[x(t)]$$

LA CORRISPONDENTE RISPOSTA, ESSA PURE TEMPO-CONTINUA.

E' IMPORTANTE SOTTOLINEARE CHE LA (3.1.1) RAPPRESENTA UNA TRASFORMAZIONE DI  $x(t)$  IN  $y(t)$ , CON  $y(t)$  DIPENDENTE IN GENERALE DALL'INTERO ANDAMENTO DI  $x(t)$ : CIO' PREVEDE LA CONOSCENZA DELL'INTERA FORMA D'ONDA  $x(t)$  E LA SUA SUCCESSIVA ELABORAZIONE PER PRODURRE  $y(t)$ .

QUANDO IL QUADRIPOLO E' UN CIRCUITO AI CUI MORSETTI DI INGRESSO E' APPLICATA  $x(t)$  E, DURANTE L'EVO LUZIONE DI QUEST'ULTIMA, SI MANIFESTA LA RISPOSTA  $y(t)$ , IL VALORE ASSUNTO DA  $y$  IN OGNI ISTANTE  $t$  DIPENDE SOLO DAI VALORI PASSATI E PRESENTE DI  $x(t)$  [SISTEMA CAUSA LE].

NEL CASO IN CUI IL QUADRIPOLO  $Q$  NON CONTIENE ELEMENTI DI MEMORIA (COME COMPONENTI REATTIVI CHE IMMAGAZZINANO ENERGIA E QUINDI INTRODUCONO MEMORIA DEL PASSATO) SI HA UNA CORRISPONDENZA Istantanea FRA LA GRANDEZZA DI USCITA  $y$  E QUELLA DI INGRESSO  $x$  E NELLA (3.1.1)  $Q$  E' SIMBOLO DI FUNZIONE:  $y$  E' DUNQUE FUNZIONE DI FUNZIONE DEL TEMPO E IN OGNI ISTANTE  $t$  IL SUO VALORE DIPENDE SOLO DA QUELLO CONTEMPORANEO DELL'INGRESSO.

No

CIO' PREMESSO, IL QUADRIPOLO DI FIGURA 3.1.1 SIA:

\* LINEARE, CIOE'

$$(3.1.2) \quad Q[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] = c_1Q[x_1(t)] + c_2Q[x_2(t)]$$

QUALUNQUE SIANO  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $x_1(t)$  E  $x_2(t)$

\* TEMPO-INVARIANTE, CIOE'

$$(3.1.3) \quad Q[\times(t-\tau)] = y(t-\tau)$$

QUALUNQUE SIA L'ENTITA' DELLA TRASLAZIONE  $\tau$ .

IN PARTICOLARE DALLA (3.1.2), ASSUMENDO  $c_2 = 0$ ,  
DISCENDE:

$$(3.1.4) \quad Q[c_1x_1(t)] = c_1Q[x_1(t)],$$

DA CUI, PER  $c_1 = 0$ , ABBIAMO:

$$Q[0] \equiv 0$$

IN ALTRI TERMINI, QUANDO L'INGRESSO E' IDENTICA-  
MENTE NULLO, ANCHE L'USCITA E' IDENTICAMENTE NULLA.

FACCIAMO ORA RIFERIMENTO A QUADRIPOLI LINEARI  
TEMPO-INVARIANTI.

## No FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

CONSIDERIAMO UN SEGNALE D'INGRESSO SINUSOIDALE:

$$(3.1.5) \quad x(t) = V_{xM} \cos(\omega t - \varphi_x) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{V}_x e^{j\omega t} \right\},$$

OVE IL NUMERO COMPLESSO RAPPRESENTATIVO  $\dot{V}_x$  E' ESPRESO DA:

$$(3.1.6) \quad \dot{V}_x = V_{xM} e^{-j\varphi_x}.$$

PER LE IPOTESI FATTE, L'USCITA E' ANCH'ESSA SINUSOIDALE CON LA STESSA PULSAZIONE  $\omega$  DELL'INGRESSO:

$$(3.1.7) \quad y(t) = V_{yM} \cos(\omega t - \varphi_y) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{V}_y e^{j\omega t} \right\},$$

OVE:

$$(3.1.8) \quad \dot{V}_y = V_{yM} e^{-j\varphi_y}.$$

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E' DEFINITA DAL RAPPORTO FRA I NUMERI COMPLESSI RAPPRESENTATIVI DELL'USCITA E DELL'INGRESSO:

$$(3.1.9) \quad H = H(\omega) = \frac{\dot{V}_y}{\dot{V}_x} = \frac{V_{yM}}{V_{xM}} e^{-j(\varphi_y - \varphi_x)}.$$

POSTO:

$$(3.1.10) \quad H(\omega) = T(\omega) e^{-j\beta(\omega)},$$

RISULTA:

$$(3.1.11) \quad T(\omega) = \frac{V_{yM}}{V_{xM}}, \quad \beta(\omega) = \varphi_y - \varphi_x$$

$T = T(\omega)$  = CARATTERISTICA DI AMPIEZZA

$\beta = \beta(\omega)$  = CARATTERISTICA DI FASE

DALLE DEFINIZIONI DATE DISCENDE:

$$(3.1.12) \quad y(t) = T(\omega) V_{xM} \cos[\omega t - \varphi_x - \beta(\omega)].$$

LA (3.1.12) ESPRIME LA RISPOSTA DI UNA RETE, DI CUI SIA NOTA LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H(\omega)$ , AD UN SEGNALE SINUSOIDALE.

NO

LE FIGURE 3.1.2 (O = OSCILLATORE SINUSOIDALE A PULSAZIONE VARIABILE; V = VOLTMETRO VETTORIALE CHE MISURA IL RAPPORTO FRA LE AMPIEZZE E LO SFASAMENTO DI DUE OSCILLAZIONI SINUSOIDALI AD ESSO APPLICATE) E 3.1.3 (AR = ANALIZZATORE DI RETI CHE EFFETTUÀ AUTOMATICAMENTE LE MISURE PREVISTE) INDICANO SCHEMI PER IL RILIEVO SPERIMENTALE DELLE CARATTERISTICHE DI AMPIEZZA E DI FASE DI UN QUADRIPOLO LINEARE, E QUINDI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO.

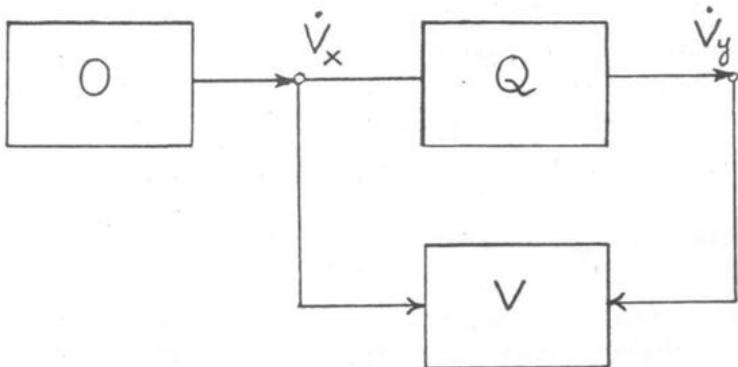


Fig. 3.1.2

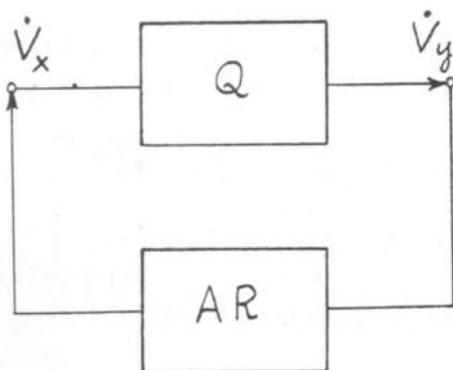


Fig. 3.1.3

MOSTRIAMO ORA COME LA CONOSCENZA DI  $H(\omega)$  CONSENTA DI ESPRIMERE LA RISPOSTA AD UN QUALUNQUE SEGNALE D'INGRESSO  $x(t)$  DOTATO DI TRASFORMATA SECONDO FOURIER.

$$(3.1.13) \quad x(t) = \int_0^{\infty} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega .$$

OGNI "SINUSOIDA" DI AMPIEZZA INFINITESIMA COSTITUENTE IL SEGNALE DI INGRESSO,

$$(3.1.14) \quad V(\omega) d\omega \cos[\omega t - \varphi(\omega)] ,$$

PRODUCE, IN VIRTU' DELLA (3.1.12), LA SEGUENTE RISPOSTA:

$$(3.1.15) \quad V(\omega) T(\omega) d\omega \cos[\omega t - \varphi(\omega) - \beta(\omega)] .$$

PER LA LINEARITA' DELLA RETE, SOMMANDO LE RISPOSTE ALLE SINGOLE SOLLECITAZIONI SINUSOIDALI, RISULTA INFINE:

$$(3.1.16) \quad y(t) = \int_0^{\infty} V(\omega) T(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega) - \beta(\omega)] d\omega .$$

LA (3.1.16) ESPRIME L'USCITA DEL QUADRIPOLO TRAMITE IL SUO INTEGRALE DI FOURIER.

PER LE (2.3.5), (2.3.6) E (2.3.7) ABBIAMO:

$$(3.1.17) \quad X(\omega) = \pi V(\omega) e^{-j\varphi(\omega)} \quad \omega \geq 0$$

$$(3.1.18) \quad Y(\omega) = \pi V(\omega) T(\omega) e^{-j[\varphi(\omega) + \beta(\omega)]} , \quad \omega \geq 0$$

ESSENDО  $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$  E  $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$ .

N)

SUL SEMIASSE NON NEGATIVO DELLE PULSAZIONI SUSSISTE QUINDI LA RELAZIONE:

$$(3.1.19) \quad H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} .$$

PERALTRO, ESSENDO LE TRASFORMATE DEFINITE SULL'INTERO ASSE  $\omega$ , LA (3.1.19) PERMETTE DI DEFINIRE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H(\omega)$  PER OGNI VALORE DI  $\omega$ .

RICORDANDO LA (2.3.3) RISULTA:

$$(3.1.20) \quad H(-\omega) = H^*(\omega) ,$$

O ANCHE:

$$(3.1.21) \quad T(-\omega) = T(\omega) ,$$

$$(3.1.22) \quad \beta(-\omega) = -\beta(\omega) .$$

DALLA (3.1.19) DISCENDE

$$(3.1.23) \quad Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) ,$$

CHE CONSENTE DI CALCOLARE  $y(t)$  COME ANTITRASFORMATO DEL PRODOTTO  $X(\omega)H(\omega)$  SECONDO LA PROCEDURA SOTTO SCHEMATIZZATA:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{Y}} X(\omega) \longrightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \xrightarrow{\mathcal{Y}^{-1}} y(t) .$$

IN PRATICA QUALUNQUE SEGNALE HA BANDA  $B_\omega$  FINITA.

AD ESEMPIO, SI CONSIDERI LA FIGURA 3.1.4 CORRISPONENTE AL SEGNALE:

$$(3.1.24) \quad x(t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} V(\omega) \cos [\omega t - \varphi(\omega)] d\omega.$$

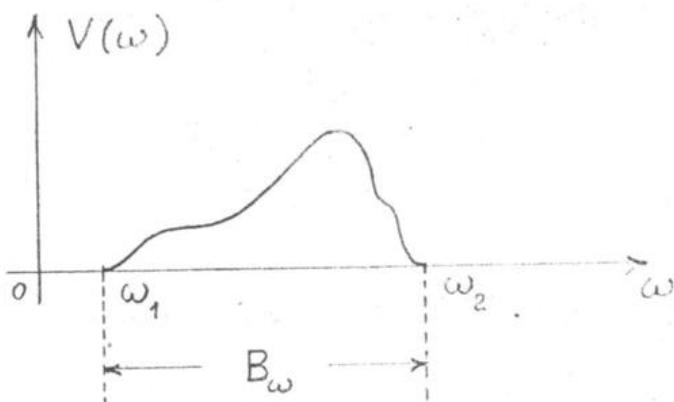


Fig. 3.1.4

PER ESPRIMERE LA RISPOSTA DELLA RETE MEDIANTE LA (3.1.16) BASTA CONOSCERE L'ANDAMENTO DELLE CARATTERISTICHE DI AMPIEZZA  $T(\omega)$  E DI FASE  $\beta(\omega)$  SULLA BANDA  $B_\omega$ , ESSENDO ININFLUENTE IL LORO COMPORTAMENTO AL DI FUORI DI ESSA.

CON RIFERIMENTO ALL'ESEMPIO PRECEDENTE [FIGURA 3.1.4 E (3.1.24)], RISULTA:

$$(3.1.25) \quad y(t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} V(\omega) T(\omega) \cos [\omega t - \varphi(\omega) - \beta(\omega)] d\omega.$$

## QUADRIPOLI IN CASCATA

CONSIDERIAMO PIU' QUADRIPOLI LINEARI IN CASCATA  
 (FIGURA 3.1.5) E PROPONIAMOCI DI ESPRIMERE LA FUNZIONE  
 DI TRASFERIMENTO  $H(\omega)$  DELL'INTERO SISTEMA.

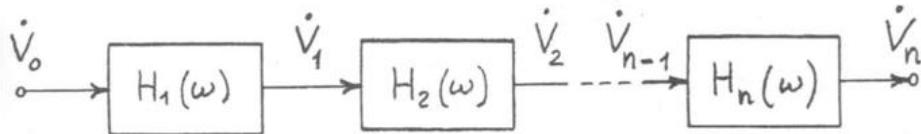


Fig. 3.1.5

IN REGIME SINUSOIDALE, CON RIFERIMENTO AI NUMERI COMPLESSI RAPPRESENTATIVI DELLE FUNZIONI IN GIOCO,  
 RISULTA:

$$H(\omega) = \frac{\dot{V}_n}{\dot{V}_o}$$

$$H_1(\omega) = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_o}, \quad H_2(\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1},$$


---

$$H_n(\omega) = \frac{\dot{V}_n}{\dot{V}_{n-1}},$$

DA CUI:

$$(3.1.26) \quad H(\omega) = H_1(\omega) H_2(\omega) \cdots H_n(\omega).$$

PERTANTO LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELLA CASCATA DI PIU' QUADRIPOLI E' EGUALE AL PRODOTTO DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO DI CIASCUNO DI ESSI.

ESERCIZI.

ESERCIZIO N. 1

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO DI ALCUNI QUADRIPOLI ELEMENTARI.

I - LINEA DI RITARDO

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightarrow{\quad H(\omega) \quad} & y(t) = x(t - t_0) \\ \xrightarrow{} & & \xrightarrow{} \\ & & Y(\omega) = X(\omega) e^{-j\omega t_0} \end{array}$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = e^{-j\omega t_0} .$$

II - DERIVATORE

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightarrow{\quad H(\omega) \quad} & y(t) = \dot{x}(t) \\ \xrightarrow{} & & \xrightarrow{} \\ & & Y(\omega) = j\omega X(\omega) \end{array}$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = j\omega .$$

III - INTEGRATORE

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightarrow{\quad H(\omega) \quad} & y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \\ \xrightarrow{} & & \xrightarrow{} \\ & & Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{j\omega} \end{array}$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{j\omega} .$$

ESERCIZIO N. 2

CALCOLARE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E LE CARATTERISTICHE DI AMPIEZZA E DI FASE DELLA RETE RC DI FIGURA 3.1.6.

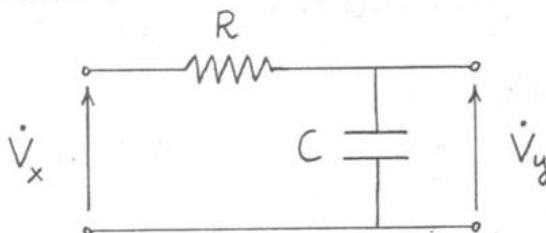


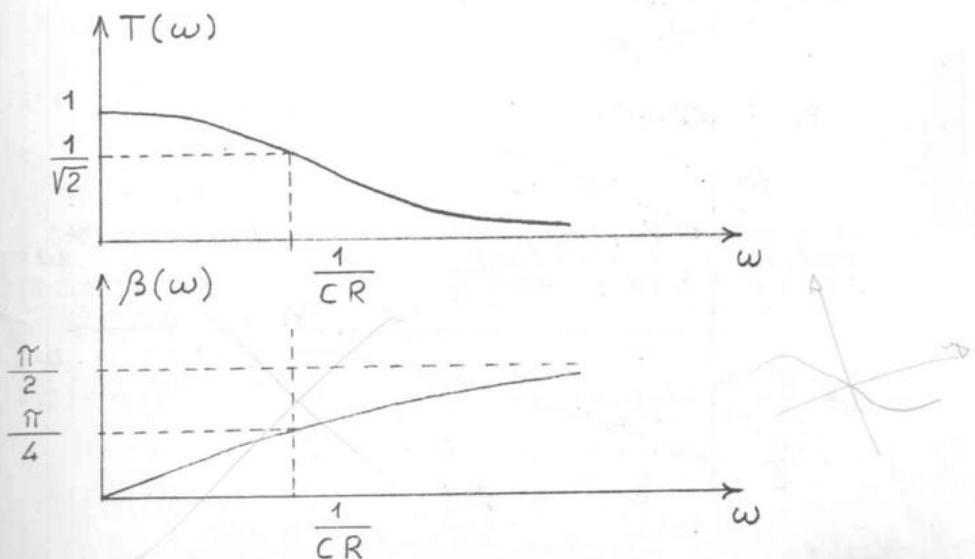
Fig. 3.1.6

RISULTA:

$$H(\omega) = \frac{\dot{V}_y}{\dot{V}_x} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR},$$

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}},$$

$$\beta(\omega) = -\arg(1 + j\omega CR) = -\arctg \omega CR.$$



ESERCIZIO N. 3

CALCOLARE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E LE CARATTERISTICHE DI AMPIEZZA E DI FASE DELLA RETE CR DI FIGURA 3.1.7.

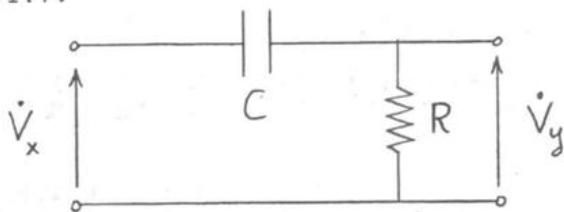


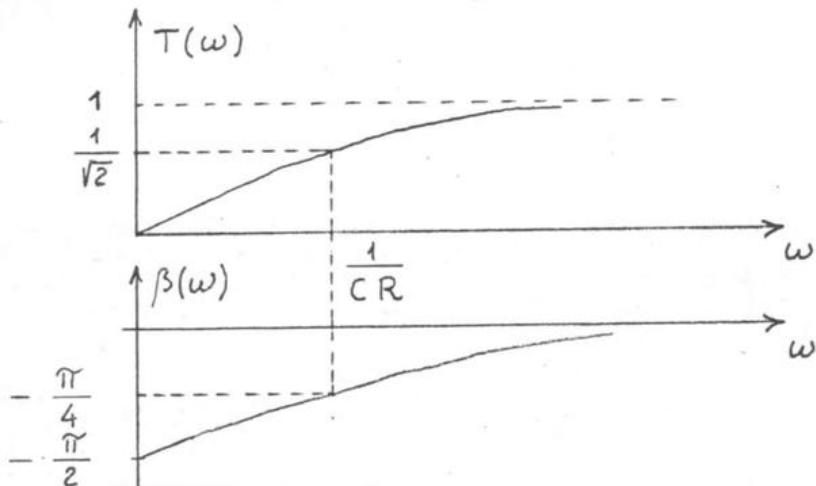
Fig. 3.1.7

RISULTA:

$$H(\omega) = \frac{\dot{V}_y}{\dot{V}_x} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR},$$

$$T(\omega) = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}},$$

$$\beta(\omega) = \arctg \omega CR - \frac{\pi}{2}.$$



No

### 3.2 CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE.

SI DICE CHE LA FORMA D'ONDA  $y(t)$  RIPRODUCE INDISTORTA LA FORMA D'ONDA  $x(t)$  QUANDO RISULTA:

$$(3.2.1) \quad y(t) = T_o \times (t - t_o), \quad T_o > 0,$$

CIOE' QUANDO  $y(t)$  DIFFERISCE DA  $x(t)$  SOLO PER UNA COSTANTE MOLTIPLICATIVA  $T_o > 0$  ED UNA TRASLAZIONE TEMPORALE  $t_o$ .

QUANDO  $x(t)$  E  $y(t)$  SONO, RISPETTIVAMENTE, L'INGRESSO E L'USCITA DI UNA RETE LINEARE (FIGURA 3.2.1), TALE RETE E' DETTA NON DISTORCENTE E RISULTA:

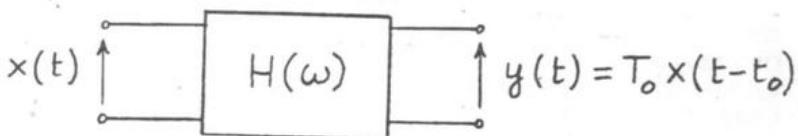


Fig. 3.2.1

$$(3.2.2) \quad Y(\omega) = T_o X(\omega) e^{-j\omega t_o}$$

$$(3.2.3) \quad H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = T_o e^{-j\omega t_o}$$

$$(3.2.4) \quad \begin{cases} T(\omega) = T_o & \text{Caratteristica di fase} \\ \beta(\omega) = -\omega t_o & \text{Caratteristica d'ampiezza} \end{cases}$$

LA (3.2.4) RAPPRESENTA CONDIZIONE NECESSARIA PER CHE' UNA RETE NON DISTORCA. ESSA E' PURE CONDIZIONE SUFFICIENTE. INFATTI, RICORDANDO LE (3.1.13) E (3.1.16) E SOSTITUENDO IN QUEST'ULTIMA LA (3.2.4), ABBIAMO:

$$(3.2.5) \quad y(t) = T_o \int_0^{\infty} V(\omega) \cos[\omega(t - t_o) - \varphi(\omega)] d\omega =$$

$$= T_o \times (t - t_o).$$

LA (3.2.4) IMPONE LA COSTANZA RISPETTO ALLA PULSAZIONE  $\omega$  DELLA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA E LA PROPORZIONALITA' FRA LA CARATTERISTICA DI FASE E  $\omega$ : PER QUANTO ORA MOSTRATO, QUESTE SONO CONDIZIONI NECESSARIE E SUFFICIENTI PERCHE' UNA RETE NON DISTORCA.

IN REALTA' NON ESISTE ALCUNA RETE CHE POSSA SODDISFARE - NEPPURE IN MANIERA APPROSSIMATA - A QUESTE CONDIZIONI SU TUTTO IL SEMIASSE NON NEGATIVO DELLE PULSAZIONI (BASTI PENSARE CHE LA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA NON PUO' IN PRATICA ESSERE RESA COSTANTE PARTENDO DALLA CONTINUA E SALENDO VIA VIA ALLE FREQUENZE RADIO, ALLE ONDE MILLIMETRICHE, ALLE FREQUENZE OTTIME).

PERALTRO BASTA RICORDARE CHE OGNI SEGNALE  $x(t)$  HA BANDA  $B_\omega$  PRATICAMENTE FINITA E, COME ABBIAMO GIA' OSSERVATO A PROPOSITO DELLA (3.1.25), LA RISPOSTA DELLA RETE E' DETERMINATA SOLO DALL'ANDAMENTO DELLE CARATTERISTICHE DI AMPIEZZA E FASE ALL'INTERNO DI TALE BANDA, ESSENDO ININFLUENTE IL LORO COMPORTAMENTO AL DI FUORI DI ESSA. LE CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE NON POSSONO QUINDI PRESCINDERE DALLA BANDA DEL SEGNALE APPLICATO AL QUADRIPOLO E VANNO ENUNCiate COME SOTTO INDICATO:

$$(3.2.6) \quad \begin{cases} T(\omega) = T_0 \\ \beta(\omega) = \omega t_0 \end{cases} \quad \text{per } \omega \in B_\omega .$$

AD ESEMPIO, LA RETE RC CONSIDERATA NELL'ESERCIZIO N. 2 HA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA  $T(\omega)$  VARIABILE SUL SEMIASSE NON NEGATIVO DELLE PULSAZIONI E CARATTERISTICA DI FASE  $\beta(\omega)$  NON PROPORZIONALE AD  $\omega$ . TUTTAVIA, SE CONSIDERIAMO SEGNALI CON BANDA  $(0, \omega_m)$  E  $\omega_m \ll 1/RC$ , ALL'INTERNO DI TALE BANDA VALGONO LE RELAZIONI APPROXIMATE:

$$(3.2.7) \quad \begin{cases} T(\omega) \simeq 1 \\ \beta(\omega) \simeq \omega RC \end{cases} \quad \text{per } 0 \leq \omega \leq \omega_m \ll \frac{1}{RC}$$

E QUINDI, PER QUESTI SEGNALI, RISULTANO PRATICAMENTE SODDISFATTE LE CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE (3.2.6): LA RETE SI COMPORTA COME UNA SEMPLICE LINEA DI RITARDO CON RITARDO  $t_0 = RC$ .

### 3.3 I FILTRI ELETTRICI.

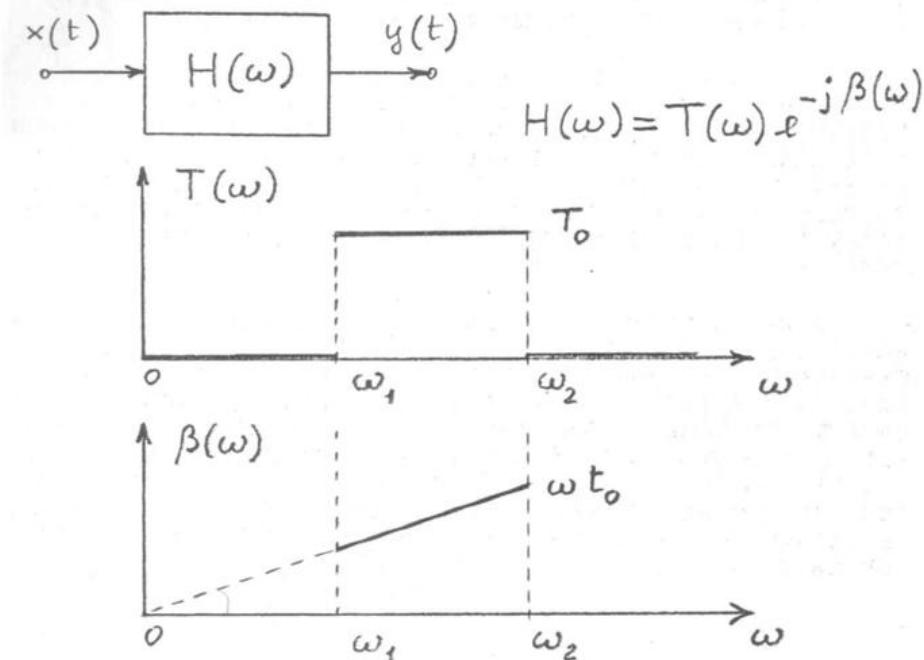


Fig. 3.3.1

CONSIDERIAMO UN QUADRIPOLO LINEARE CON FUNZIONE DI TRASFERIMENTO SODDISFALENTE ALLE CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE NELLA BANDA  $(\omega_1, \omega_2)$  E NULLA AL DI FUORI DI ESSA (FIGURA 3.3.1). UN SEGNALE  $x_u(t)$  CON SPETTO DI AMPIZZA  $V(\omega)$  TUTTO CONTENUTO ALL'INTERNO DI  $(\omega_1, \omega_2)$  DA' UNA USCITA CHE LO RIPRODUCE INDISTORTO, MENTRE SEGNALI CON BANDA ESTERNA A  $(\omega_1, \omega_2)$  NON PRODUCONO ALCUNA RISPOSTA.

QUESTA OSSERVAZIONE E' ALLA BASE DELLA UTILIZZAZIONE DEL QUADRIPOLO CITATO COME FILTRO ELETTRICO. QUESTO INFATTI CONSENTE LA SEPARAZIONE DI UN SEGNALE UTILE  $x_u(t)$  DAI DISTURBI PIU' VARI, SOVRAPPOSTI AD ESSO NEL DOMINIO DEI TEMPI, QUANDO QUESTI OCCUPANO BANDE DIVERSE DA QUELLA DI  $x_u(t)$ , E QUINDI SONO DISTINGUIBILI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE.

AD ESEMPIO, NEL SEGUENTE CASO:

$$(3.3.1) \quad x(t) = x_u(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

OVE:

-  $x_u(t)$  E', COME GIA' DETTO, IL SEGNALE UTILE CON SPETTRO DI AMPIEZZA  $V(\omega)$ ,

-  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  SONO DISTURBI CON SPETTRI DI AMPIEZZA, RISPECTIVAMENTE,  $V_1(\omega)$ ,  $V_2(\omega)$ ,  $V_3(\omega)$  (FIGURA 3.3.2)

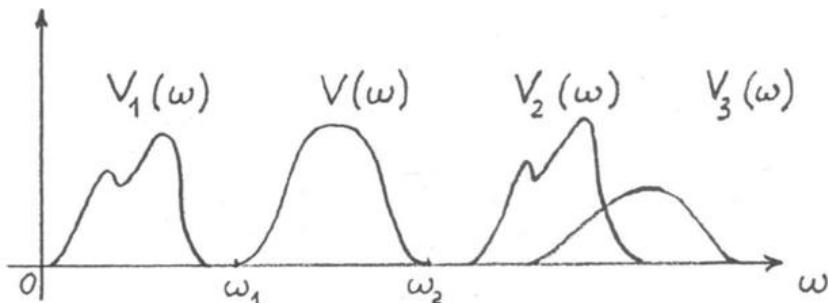


Fig. 3.3.2

RISULTA:

$$(3.3.2) \quad y(t) = T_o x_u(t - t_o).$$

IL QUADRIPOLO ORA CONSIDERATO E' DETTO FILTRO PASSA-BANDA IDEALE:  $(\omega_1, \omega_2)$  E' LA BANDA PASSANTE, LA PARTE RESTANTE DEL SEMIASSE NON NEGATIVO DELLE PULSAZIONI E' LA BANDA ATTENUATA,  $\omega_1$  E  $\omega_2$  SONO LE PULSAZIONI DI TAGLIO. ESSO VIENE RAPPRESENTATO COME INDICATO IN FIGURA 3.3.3.

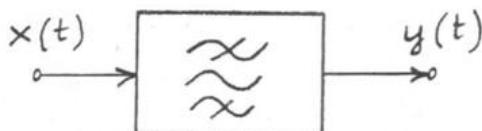


Fig. 3.3.3

NQ

QUANDO  $\omega_1 = 0$ , ABBIAMO UN FILTRO PASSA-BASSO IDEALE (FIGURA 3.3.4).

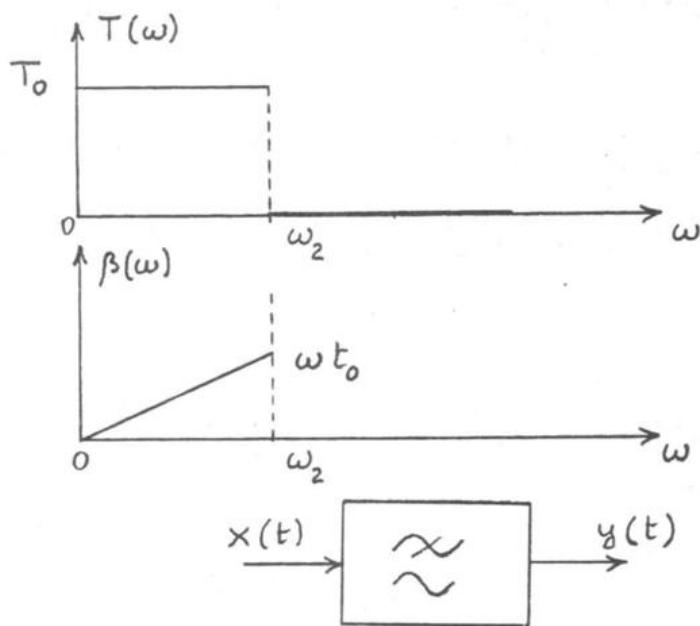


Fig. 3.3.4

QUANDO  $\omega_2 = \infty$ , ABBIAMO UN FILTRO PASSA-ALTO IDEALE (FIGURA 3.3.5).

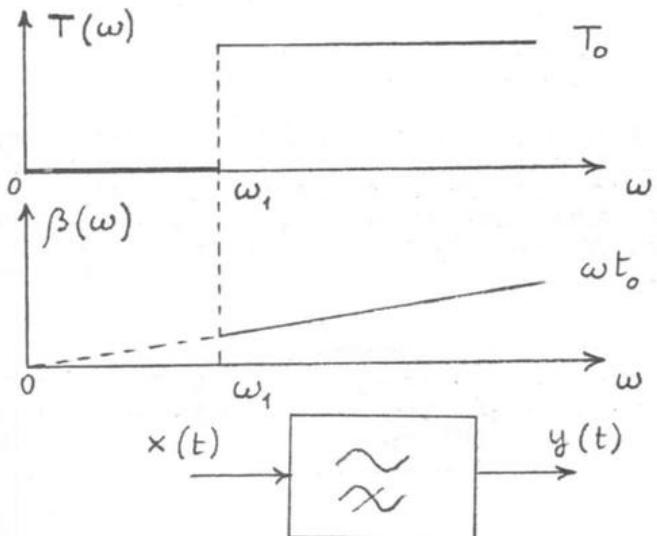


Fig. 3.3.5

ALTRI CASI POSSONO ESSERE DI INTERESSE PRATICO,  
COME QUELLO DEL FILTRO ELIMINA-BANDA IDEALE CONSIDERATO  
IN FIGURA 3.3.6.

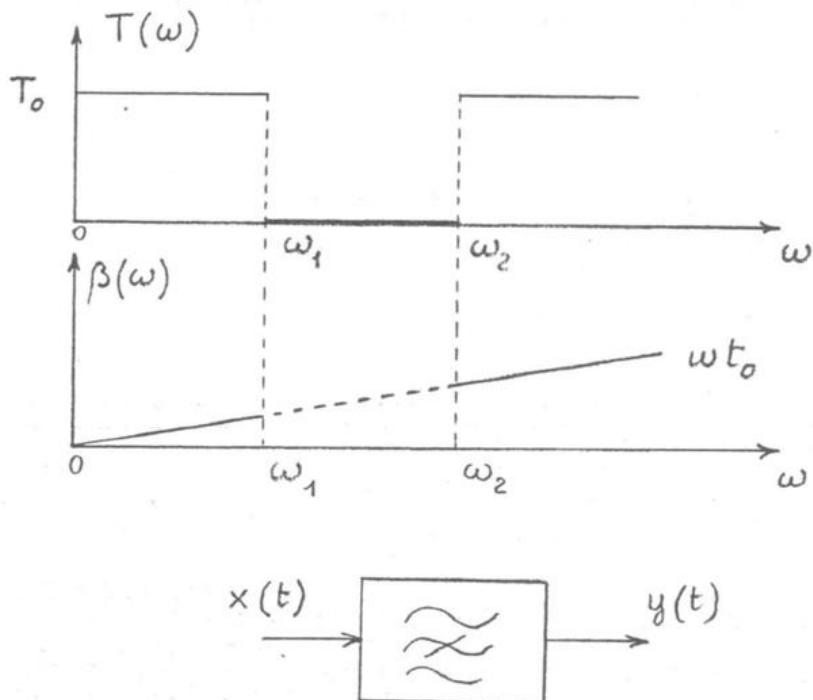


Fig. 3.3.6

I FILTRI IDEALI ORA PRESENTATI NON SONO FISICAMENTE REALIZZABILI. INFATTI LA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA DI UN QUADRIPOLO NON PUO' MAI PRESENTARE DISCONTINUITA' COME QUELLE PRIMA EVIDENZIATE IN CORRISPONDENZA ALLE PULSAZIONI DI TAGLIO. E' QUESTA UNA PROPRIETA' GENERALE DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO (LE UNICHE SINGOLARITA' POSSONO ESSERE COSTITUITE DA POLI); PER QUANTO CI RIGUARDA, LA FISICA IRREALIZZABILITA' DEI FILTRI IDEALI SARÀ DEMONSTRATA NEL PARAGRAFO 3.4.

CIO' NONOSTANTE, QUANTO PRECEDENTEMENTE DETTO CONSERVA TUTTO IL SUO INTERESSE PRATICO: INFATTI CON RETI FISICAMENTE REALIZZABILI E' POSSIBILE APPROSSIMARE LE CARATTERISTICHE IDEALI TANTO QUANTO INTERESSA LE APPLICAZIONI.

AD ESEMPIO, LA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA DI UN POSSIBILE FILTRO REALE PASSA-BASSO E' RIPORTATA IN FIGURA 3.3.7: I PARAMETRI  $\epsilon_p$ ,  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_\omega$  POSSONO ESSERE RESI PICCOLI QUANTO INTERESSA (OVIAMENTE A SPESE DELLA COMPLESSITA' CIRCUITALE DEL FILTRO).

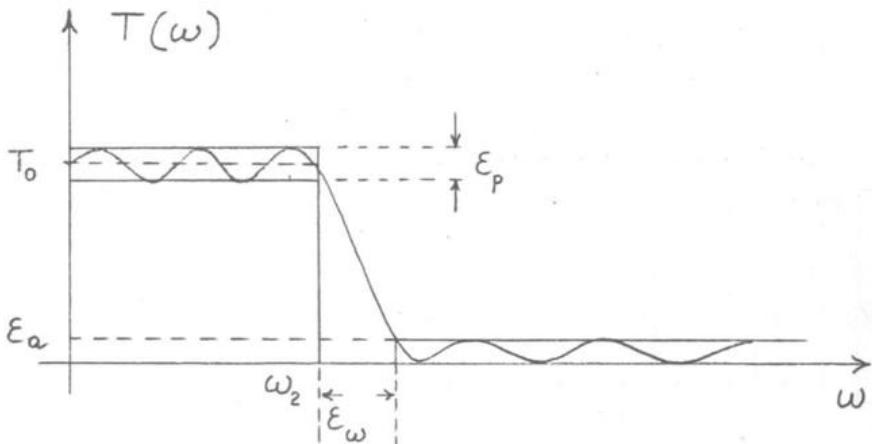


Fig. 3.3.7

CONCLUDIAMO OSSERVANDO CHE, IN CERTE APPLICAZIONI, ANCHE LA SEMPLICE RETE RC CONSIDERATA NELL'ESERCIZIO N. 2 PUO' ESSERE UTILIZZATA COME FILTRO PASSA-BASSO. CIO' AVVIENE QUANDO LA MASSIMA PULSAZIONE  $\omega_m$  CONTENUTA NELLO SPETTRO DEL SEGNALE UTILE E' MOLTO MINORE DI  $1/RC$ ,

$$(3.3.3) \quad \omega_m \ll \frac{1}{RC}$$

E LA MINIMA PULSAZIONE  $\omega_d$  CONTENUTA NEGLI SPETTRI DEI TERMINI CHE SI VOGLIONO ELIMINARE E' MOLTO MAGGIORE DI  $1/RC$ ,

$$(3.3.4) \quad \omega_d \gg \frac{1}{RC} .$$

### 3.4 FILTRI TRASVERSALI.

CONSIDERIAMO IL QUADRIPOLO DI FIGURA 3.4.1, COSTITUITO DA LINEE DI RITARDO PARI A T, DA PRESE CHE PRELEVANO VERSIONI DIVERSAMENTE RITARDATE DEI SEGNALI D'INGRESSO  $x(t)$  E D'USCITA  $y(t)$ , DA CIRCUITI MOLTIPLICATORI E, INFINE, DA UN SOMMATORE. I COEFFICIENTI MOLTIPLICATIVI  $h_k$  E  $h'_k$  SONO OPPORTUNE COSTANTI.

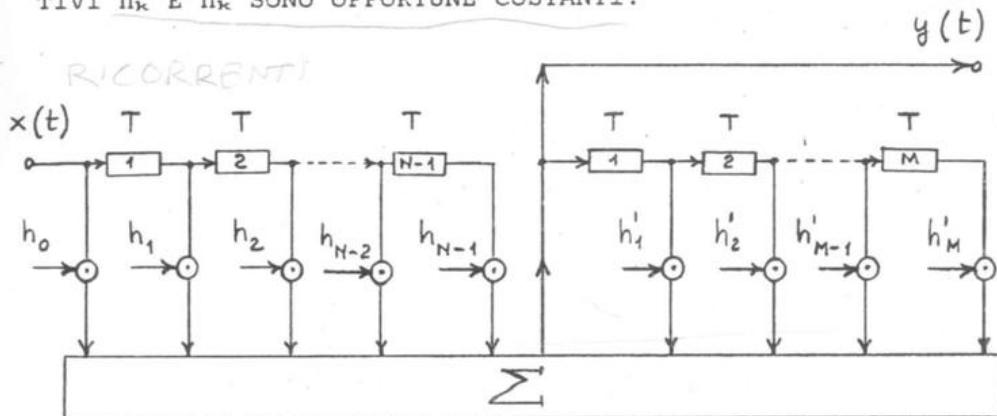


Fig. 3.4.1

$\gamma(\omega)$

$H(\omega)$

PER RICAVARE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO, SCRIVIAMO:

$$(3.4.1) \quad y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(t-kT) + \sum_{k=0}^M h'_k y(t-kT),$$

$$(3.4.2) \quad Y(\omega) = X(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-jk\omega T} + Y(\omega) \sum_{k=0}^M h'_k e^{-jk\omega T},$$

$$(3.4.3) \quad H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-jk\omega T}}{1 - \sum_{k=0}^M h'_k e^{-jk\omega T}}.$$

X  
NO

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO, OLTRE CHE DAL RITARDO  $T$ , DIPENDE DAI VALORI DI  $N$  ED  $M$  E DA QUELLI DEI COEFFICIENTI  $h_k$  E  $h'_k$ .

QUANDO I COEFFICIENTI  $h'_k$  SONO NULLI, LA RETE ASSUME LA CONFIGURAZIONE DI FIGURA 3.4.2 E LA RELATIVA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E':

$h_k=0$  TRASV. (o NON RICORRENTI)

$$(3.4.4) \quad H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j k \omega T}.$$

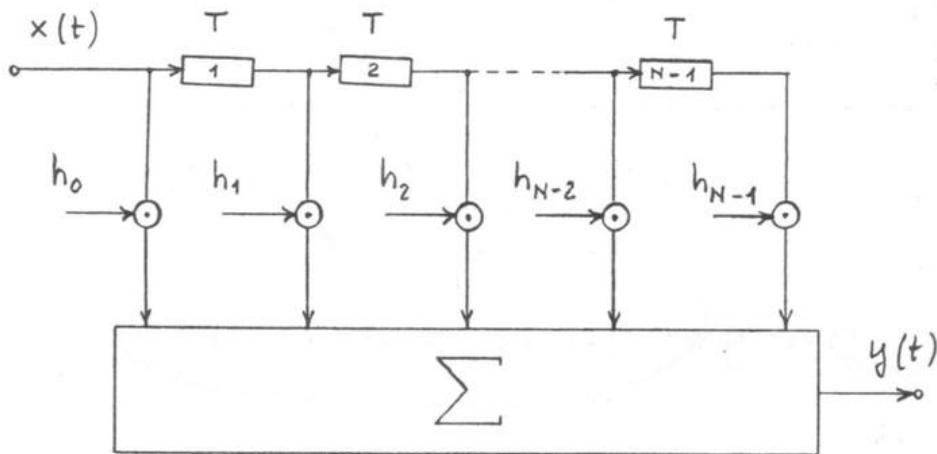


Fig. 3.4.2

QUANDO I COEFFICIENTI  $h_k$  SONO NULLI PER  $k \neq 0$  E  
 $h_0 = 1$ , LA RETE ASSUME LA CONFIGURAZIONE DI FIG. 3.4.3  
 E LA RELATIVA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E':

$\boxed{h_k=0}$  - PURAMENTE RIC

$$(3.4.5) \quad H(\omega) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^M h'_k e^{-jk\omega T}} \quad y(t)$$

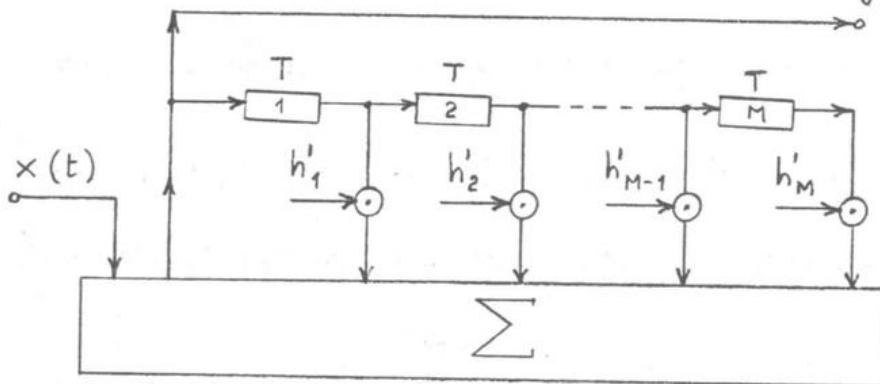


Fig. 3.4.3

OSSERVIAMO CHE IN OGNI CASO LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E' PERIODICA CON PERIODO

$$(3.4.6) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

LE ARCHITETTURE CIRCUITALI ORA PRESENTATE TROVANO IMPIEGO SEMPRE PIU' LARGO NELLA REALIZZAZIONE DI FILTRI. PROGETTARE TALI FILTRI SIGNIFICA EVIDENTEMENTE DETERMINARE I CORRISPONDENTI VALORI DI  $T$ ,  $N$ ,  $M$  E DEI COEFFICIENTI  $h_k$  E  $h'_k$ . LA COMPLESSITA' DELLA RETE DIPENDE DAI VALORI DI  $N$  E  $M$ .

SI PARLA DI FILTRI TRASVERSALI O FILTRI NON RICORRENTI QUANDO SI ADOTTA L'ARCHITETTURA PRESENTATA NELLA FIGURA 3.4.2, DI FILTRI RICORRENTI CON RIFERIMENTO ALL'ARCHITETTURA DI FIGURA 3.4.1, DI FILTRI PURAMENTE RICORRENTI CON RIFERIMENTO ALLA FIGURA 3.4.3.

SE CONSIDERIAMO LE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO SOPRA SCRITTE SULL'INTERO PIANO COMPLESSO  $s = \sigma + j\omega$ , QUELLA DI UN FILTRO TRASVERSALE PRESENTA SOLO ZERI, QUELLA DI UN FILTRO RICORRENTE ZERI E POLI E, INFINE, QUELLA DI UN FILTRO PURAMENTE RICORRENTE SOLO POLI. PER QUESTI ULTIMI DUE TIPI SI PONGONO QUINDI PROBLEMI DI STABILITÀ'.

CI LIMITIAMO QUI A CONSIDERARE I  
FILTRI TRASVERSALI.

PER I MOTIVI CHE VEDREMO FRA POCO IMPONIAMO LA SIMMETRIA DEI COEFFICIENTI, CIOE':

$$(3.4.7) \quad h_k = h_{N-1-k} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

CONSIDERIAMO SEPARATAMENTE I CASI DI  $N$  DISPARI E  $N$  PARI.

N DISPARI

IN QUESTO CASO LA (3.4.7) E' SCHEMATIZZATA NELLA FIGURA 3.4.4.

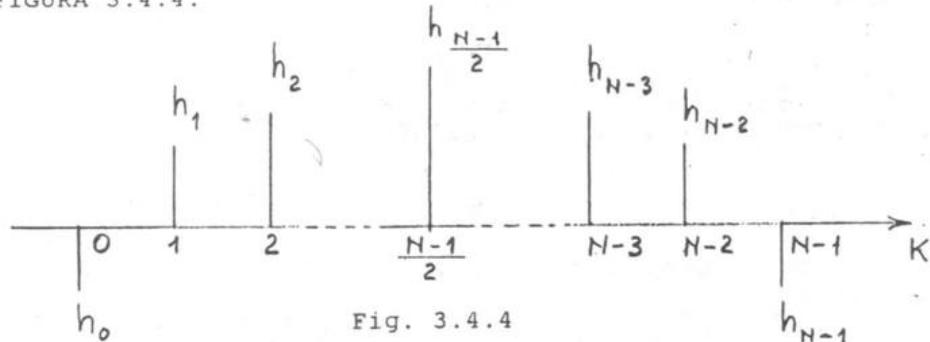


Fig. 3.4.4

POSTO

$$(3.4.8) \quad n = \frac{N-1}{2}$$

LA CONDIZIONE DI SIMMETRIA (3.4.7) SI SCRIVE:

$$(3.4.9) \quad h_{n-r} = h_{n+r} \quad , \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (3.4.4) DIVIENE:

$$(3.4.10) \quad H(\omega) = e^{-jn\omega T} \sum_{k=0}^{2n} h_k e^{-j(k-n)\omega T}$$

PONIAMO

$$k = n + r$$

E SCRIVIAMO:

$$(3.4.11) \quad H(\omega) = e^{-jn\omega T} \sum_{r=-n}^n h_{n+r} e^{-jr\omega T} =$$

$$= e^{-jn\omega T} \left[ h_n + 2 \sum_{r=1}^n h_{n-r} \cos r\omega T \right].$$

IN CONCLUSIONE, POSTO

$$(3.4.12) \quad G(\omega) = h_n + 2 \sum_{r=1}^n h_{n-r} \cos r\omega T,$$

RISULTA

$$(3.4.13) \quad H(\omega) = G(\omega) e^{-jn\omega T}.$$

### N PARI

IN QUESTO CASO LA (3.4.7) E' SCHEMATIZZATA NELLA FIGURA 3.4.5.

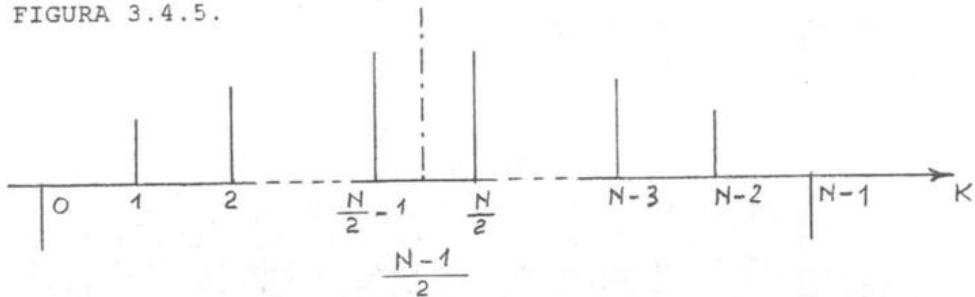


Fig. 3.4.5

LA CONDIZIONE DI SIMMETRIA (3.4.7) PUO' ESSERE SCRITTA

NELLA FORMA:

$$(3.4.14) \quad h_{\frac{N}{2}-r} = h_{\frac{N}{2}-1+r}, \quad r=1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (3.4.4) DIVIENE:

$$(3.4.15) \quad H(\omega) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega T} \sum_{k=\frac{N}{2}}^{N-1} h_k e^{-j(k-\frac{N-1}{2})\omega T} = \\ = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega T} \left[ \sum_{k=\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \dots + \sum_{k=\frac{N}{2}}^{N-1} \dots \right].$$

PONIAMO

$$k = N/2 - r \quad (1^{\text{a}} \text{ SOMMATORIA})$$

$$k = N/2 - 1 + r \quad (2^{\text{a}} \text{ SOMMATORIA})$$

E SCRIVIAMO:

$$(3.4.16) \quad H(\omega) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega T} \left[ \sum_{r=1}^{\frac{N}{2}} h_{\frac{N}{2}-r} e^{j(r-\frac{1}{2})\omega T} + \sum_{r=1}^{\frac{N}{2}} h_{\frac{N}{2}-1+r} e^{-j(r-\frac{1}{2})\omega T} \right].$$

IN CONCLUSIONE, POSTO

$$(3.4.17) \quad G(\omega) = 2 \sum_{r=1}^{\frac{N}{2}} h_{\frac{N}{2}-r} \cos \left( r - \frac{1}{2} \right) \omega T,$$

RISULTA:

$$(3.4.18) \quad H(\omega) = G(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega T}.$$

IN ENTRAMBI I CASI (N DISPARI O PARI)  $G(\omega)$  E' FUNZIONE REALE, PARI E PERIODICA DI  $\omega$ , CON PERIODO  $2\pi/T$ . IL SUO MODULO RAPPRESENTA LA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA DEI QUADRIPOLI CONSIDERATI, MENTRE LA LORO CARATTERISTICA DI FASE, QUANDO  $G(\omega) > 0$ , E' PROPORZIONALE A  $\omega$ .

LE RETI IN QUESTIONE VENGONO UTILIZZATE PER

REALIZZARE FILTRI ELETTRICI DI QUALUNQUE TIPO. IN QUESTO CASO DEVE ESSERE  $G(\omega)$  CIRCA COSTANTE NELLE BANDE PASSANTI E, SENZA LEDERE LA GENERALITA', TALE VALORE COSTANTE PUO' ESSERE ASSUNTO UNITARIO:

$$G(\omega) \approx 1 \text{ NELLE BANDE PASSANTI.}$$

INOLTRE DOVREBBE ESSERE:

$$G(\omega) \approx 0 \text{ NELLE BANDE ATTENUATE.}$$

IN REALTA', A CAUSA DELLA PERIODICITA' DI  $G(\omega)$ , LE BANDE PASSANTI DESIDERATE SI RIPETONO CON PERIODO  $2\pi/T$ , DANDO ORIGINE A BANDE PASSANTI SPURIE (SI VEDA A QUESTO PROPOSITO L'ESEMPIO DI FIGURA 3.4.6).

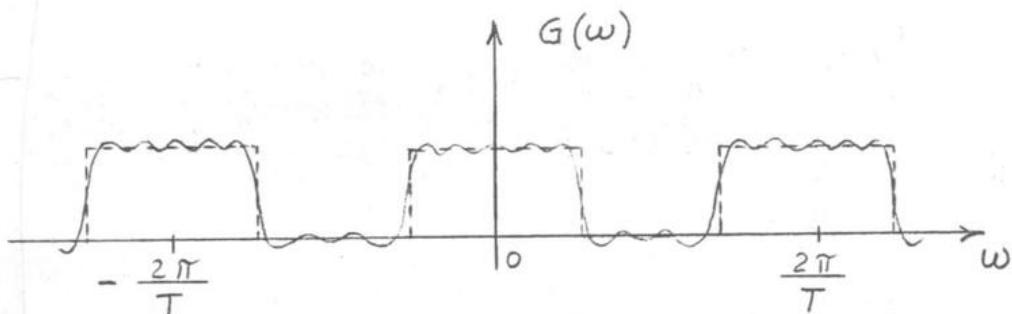


Fig. 3.4.6

PER QUANTO CONCERNE LE BANDE PASSANTI SPURIE, CONSIDERIAMO DUE CASI:

I - L'INGRESSO DEL FILTRO NON COMPRENDE COMPONENTI SPETTRALI NELLE BANDE PASSANTI SPURIE; ESSE SONO ALLORA ININFLUENTI;

II - L'INGRESSO COMPRENDE COMPONENTI ARMONICHE NELLE BANDE PASSANTI SPURIE; OCCORRE ALLORA PORRE IN CASCATA AL FILTRO TRASVERSALE UN FILTRO SUPPLEMENTARE CHE PROVVEDA AD ELIMINARE TALI BANDE [QUEST'ULTIMO RISULTA DI SEMPLICE REALIZZAZIONE QUANDO LE BANDE PASSANTI SPURIE SONO SUFFICIENTEMENTE DISTANTI DA QUELLA DESIDERATA].

CON RIFERIMENTO ALLA FIGURA 3.4.6, PRESENTIAMO IN FIGURA 3.4.7 UN POSSIBILE ANDAMENTO DELLA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA  $T_e(\omega)$  DEL FILTRO SUPPLEMENTARE PER IL CASO II QUANDO SI VUOLE REALIZZARE UN FILTRO PASSA-BASSO: UNA SEMPLICE RETE RC PUO' SERVIRE SPESO ALLO SCOPO.

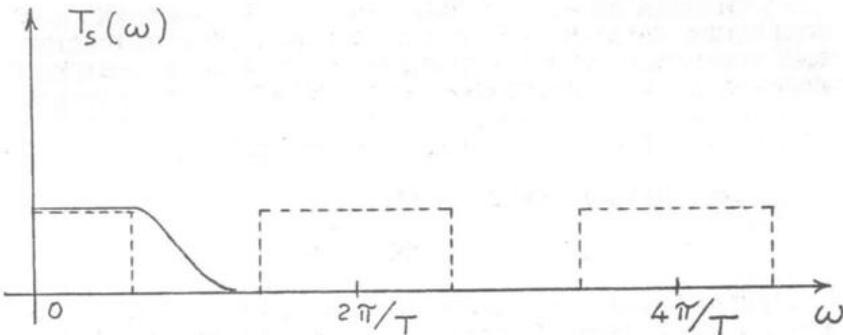


Fig. 3.4.7

IL PROGETTO DI UN FILTRO TRASVERSALE RICHIEDE IL CALCOLO DEI VALORI DI  $n$  E DEI COEFFICIENTI  $h_n$  NELLE (3.4.12) E (3.4.17) CHE RENDONO SODDISFATTE, NELLE BANDE DI COMPETENZA E SECONDO SPECIFICHE ASSEGNAME, LE APPROSSIMAZIONI:

$$(3.4.19) \quad G(\omega) \approx 1 ,$$

$$(3.4.20) \quad G(\omega) \approx 0 .$$

QUESTE APPROSSIMAZIONI, COME MOSTRANO LE RELAZIONI (3.4.12) E (3.4.17) APPENA CITATE, DEBBONO ESSERE REALIZZATE MEDIANTE SOMMA DI SINUSOIDI, IL CUI NUMERO E LE CUI AMPIZZZE SONO APPUNTO LE INCognITE DEL PROBLEMA.

LA TEORIA DELL'APPROSSIMAZIONE CI FORNISCE ALGORITMI OTTIMALI, CHE REALIZZANO LE (3.4.19) E (3.4.20) CON ANDAMENTI DI TIPO OSCILLATORIO ATTORNO AI VALORI DESIDERATI 1 E 0, COME MOSTRATO IN FIGURA 3.4.6.

VALE PERO' LA PENA PARLARE DI UN PROCEDIMENTO SUB-OTTIMO, CHE VIENE SUGGERITO IMMEDIATAMENTE DAL-LESSENSE (3.4.12). OSSERViamo INFATTI CHE SE FOSSE  $n = \infty$  QUESTA RELAZIONE ALTRO NON SAREBBE CHE LO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER DI UNA FUNZIONE PERIODICA E PARI. LO SVILUPPO IN QUESTONE CI DAREBBE QUINDI I COEFFICIENTI  $h_n$  CERCATI E CONSENTIREBBE DI REALIZZARE QUALUNQUE CARATTERISTICA DI AMPIZZZA, ANCHE IDEALE, CON DISCONTINUITA' IN CORRISPONDENZA ALLE PULSAZIONI DI TAGLIO. CIO' RICHIEDEREBBE PERO' UN FILTRO DI LUNGHEZZA INFINTA, NON FISICAMENTE REALIZZABILE, CHE PERALTRO INTRODURREBBE UN RITARDO INFINTO, COME MOSTRATO DALLA CARATTERISTICA DI FASE PRESENTE NELLA (3.4.13).

IN REALTA' LA SOMMA CHE COMPARTE NELLA (3.4.12) COMPRENDE UN NUMERO n FINITO DI TERMINI: UN PROCEDIMENTO SUB-OTTIMO PER REALIZZARE, NELL'AMBITO DI UNA PRE-FISSATA APPROSSIMAZIONE, UNA QUALUNQUE CARATTERISTICA DI AMPIEZZA (OVIAMENTE PERIODICIZZATA) POTREBBE ALLORA ESSERE IL SEGUENTE:

\* SI SVILUPPA DAPPRIMA IN SERIE DI FOURIER LA CARATTERISTICA ASSEGNA

\* SI PROVVEDE POI A TRONCARE TALE SVILUPPO IN MODO DA MANTENERE UN NUMERO DI TERMINI SUFFICIENTE AD APPROSSIMARE TALE CARATTERISTICA SECONDO LE SPECIFICHE STABILITE.

IL SEMPLICE PROCEDIMENTO ORA PRESENTATO NON E' OTTIMO NEL SENSO CHE IL NUMERO DI TERMINI DA CONSIDERARE, E QUINDI LA LUNGHEZZA DEL FILTRO, RISULTA SUPERIORE A QUELLO A CUI CONDURREBBERO PROCEDIMENTI OTTIMALI (E CHE PRODURREBBERO, OVIAMENTE, DIVERSI COEFFICIENTI  $h_n$ ).

PER ESERCIZIO, LO STUDENTE PREnda IN CONSIDERAZIONE UN FILTRO PASSA-BASSO IDEALE CON FREQUENZA DI TAGLIO 4 kHz E PERIODO DI RIPETIZIONE, SULL'ASSE DELLE FREQUENZE, PARI A 16 kHz ED OSSERVI, CON L'AIUTO DI UN CALCOLATORE, GLI EFFETTI DEL TRONCAMENTO DELLA RELATIVA SERIE DI FOURIER.

### 3.5 RISPOSTA IMPULSIVA DI UNA RETE LINEARE.

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO CARATTERIZZA IL COMPORTAMENTO DI UNA RETE LINEARE NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE. INTRODUCIAMO ORA UN'ALTRA CARATTERIZZAZIONE, QUESTA VOLTA NEL DOMINIO DEI TEMPI.

SOLLECITIAMO A TAL FINE LE RETE CON UN IMPULSO, COME MOSTRATO IN FIGURA 3.5.1.

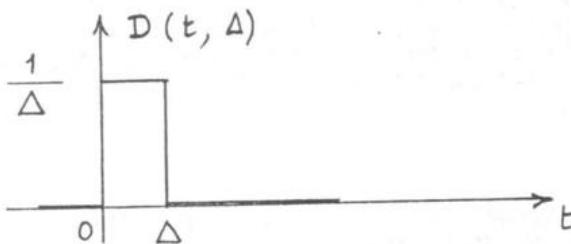
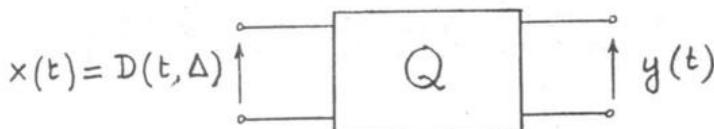


Fig. 3.5.1

CON RIFERIMENTO ALLA RISPOSTA  $y(t)$  ALL'IMPULSO  $D(t, \Delta)$ , PONIAMO:

$$(3.5.1) \quad h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} y(t).$$

IL LIMITE (3.5.1) DEFINISCE LA RISPOSTA IMPULSIVA DELLA RETE. IN FIGURA 3.5.2 RAPPRESENTIAMO IN FORMA SIMBOLICA LA DEFINIZIONE ORA DATA [SI FACIA ATTENZIONE A NON CONFONDERE  $\delta(t)$  CON IL LIMITE, PER  $\Delta \rightarrow 0$ , DI  $D(t, \Delta)$  !!!].

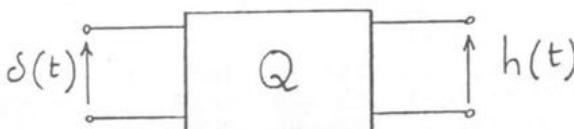


Fig. 3.5.2

PER UN SISTEMA CAUSALE, CONDIZIONE NECESSARIA PER LA FISICA REALIZZABILITA' E':

(3.5.2)

$$h(t) \equiv 0$$

$$t < 0.$$

LA RISPOSTA IMPULSIVA CONSENTE DI ESPRIMERE L'USCITA DELLA RETE, QUANDO AL SUO INGRESSO E' PRESENTE UN GENERICO SEGNALE  $x(t)$ .

RICORDIAMO A TAL FINE LA (2.14.3), CHE QUI RISCRIVIAMO:

$$(3.5.3) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) * \delta(t)$$

E L'INTERPRETAZIONE FORMALE CHE NE ABBIAMO DATO COME "SOMMA" DI FUNZIONI IMPULSIVE, LA GENERICA DELLE QUALI

$$(3.5.4) \quad x(\tau) d\tau \delta(t - \tau)$$

E' APPLICATA ALL'ISTANTE  $\tau$  ED HA INTENSITA' INFINITESIMA  $x(\tau) d\tau$  [SI ABBIANO PRESENTI LA (2.14.5) E LA FIGURA 2.14.2].

LA RISPOSTA ALLA (3.5.4) E':

(3.5.5)

$$x(\tau) d\tau h(t - \tau)$$

E QUINDI A  $x(t)$  LA RETE RISPONDE CON

(3.5.6)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

O ANCHE, RICORDANDO LA (3.5.2):

(3.5.7)

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

NOTA QUINDI LA RISPOSTA IMPULSIVA DI UNA RETE, POSSIAMO DETERMINARE LA SUA USCITA QUALUNQUE SIA IL SEGNALE DI INGRESSO, SEMPRE OPERANDO NEL DOMINIO DEI TEMPI.

POSSIAMO QUINDI AFFERMARE CHE LA RISPOSTA IMPULSIVA CARATTERIZZA UN QUADRIPOLO NEL DOMINIO DEI TEMPI.

VEDIAMO ORA COME TALE RAPPRESENTAZIONE E' LEGATA A QUELLA NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE, ESPRESSA DALLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO.

A TAL FINE, CON RIFERIMENTO ALLA FIGURA 3.5.1, SCRIVIAMO:

$$(3.5.8) \quad \mathcal{F}[y(t)] = H(\omega) \mathcal{F}[D(t, \Delta)].$$

PASSANDO AL LIMITE PER  $\Delta \rightarrow 0$ , RICORDANDO CHE

$$(3.5.9) \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathcal{F}[D(t, \Delta)] = 1 ,$$

RISULTA:

$$(3.5.10) \quad H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt,$$

ED ANCHE:

$$(3.5.11) \quad h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

IN ALTRI TERMINI, RISPOSTA IMPULSIVA E FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UNA RETE LINEARE SONO LEGATE FRA LORO DALLA TRASFORMAZIONE DI FOURIER.

DI CONSEGUENZA, LA (3.5.6) DISCENDE ANCHE DAL TEOREMA DELLA CONVOLUZIONE APPLICATO ALLA RELAZIONE:

$$(3.5.12) \quad Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$$

LA (3.5.12) RICHIEDE PERO' CHE I SEGNALI D'INGRESSO,  $x(t)$ , E D'USCITA,  $y(t)$ , SIANO DOTATI DI TRASFORMATE SECONDO FOURIER  $X(\omega)$  E  $Y(\omega)$ , RISPETTIVAMENTE, MENTRE LA (3.5.6) VALE IN CONDIZIONI PIU' GENERALI.

Analisi impulsiva:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

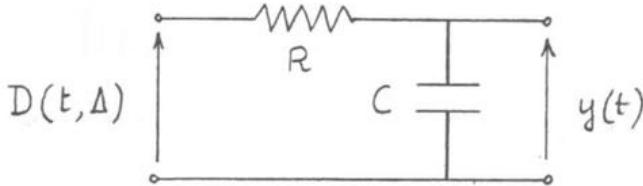
Analisi nel dominio  $f$ :

$$Y(f) = X(f) H(f)$$

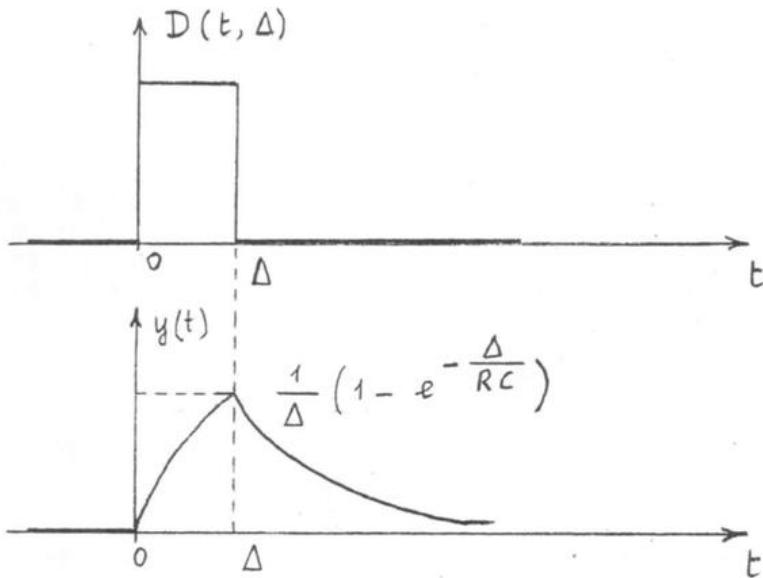
3.6 ESERCIZI.

ESERCIZIO N. 4

CALCOLARE LA RISPOSTA IMPULSIVA DELLA RETE RC DI FIGURA, APPLICANDO SIA LA (3.5.1) CHE LA (3.5.11).



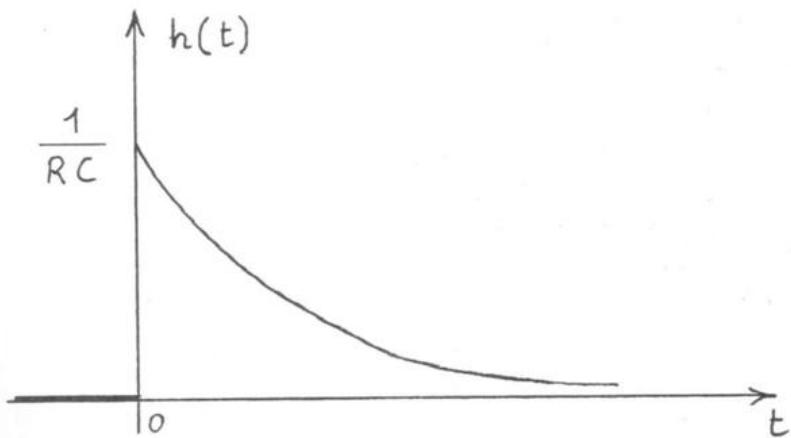
DALLA DEFINIZIONE (3.5.1):



$$y(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0, \\ \frac{1}{\Delta} \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) & , 0 \leq t \leq \Delta, \\ \frac{1}{\Delta} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta}{RC}} \right) e^{-\frac{t-\Delta}{RC}} & , t > \Delta. \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta}{RC}} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left( 1 - 1 + \frac{\Delta}{RC} + \dots \right) = \\ = \frac{1}{RC} .$$

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} y(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0, \\ \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}, & t \geq 0. \end{cases}$$



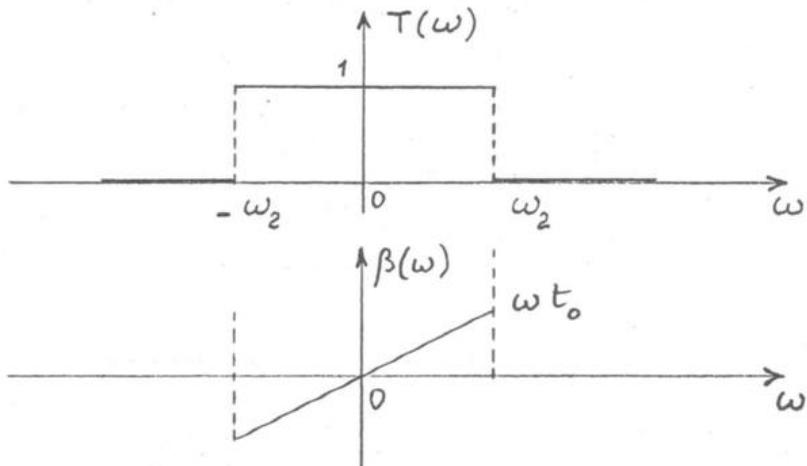
DALLA RELAZIONE (3.5.11):

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR} \quad (\text{ESERCIZIO N. 2})$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0, \\ \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}, & t \geq 0. \end{cases} \quad (\text{ES. N. 4 DEL CAP. 2})$$

ESERCIZIO N. 5

CALCOLARE LA RISPOSTA IMPULSIVA DEL FILTRO PASSA-BASSO IDEALE LE CUI CARATTERISTICHE DI AMPIEZZA E DI FASE SONO RAPPRESENTATE IN FIGURA.



$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & , |\omega| \leq \omega_2 \\ 0 & , |\omega| > \omega_2 \end{cases}$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] =$$

$$= \frac{\omega_2}{\pi} \frac{\sin \omega_2 (t - t_0)}{\omega_2 (t - t_0)} \quad (\text{ES. N. 5 DEL CAP. 2})$$

LA CONDIZIONE DI FISICA REALIZZABILITA', ESPRESSA DALLA (3.5.2), CHE QUI RISCRIVIAMO

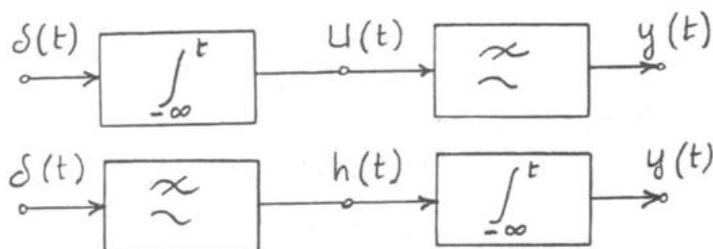
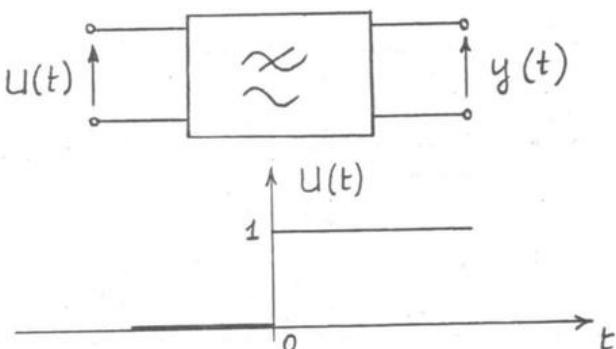
$$h(t) \equiv 0 , \quad t < 0 ,$$

NON RISULTA VERIFICATA: CIO' METTE IN EVIDENZA CHE NESSUNA RETE DI TIPO CAUSALE PUO' COMPORTARSI COME UN FILTRO IDEALE PASSA-BASSO.

ESERCIZIO N. 6

CALCOLARE LA RISPOSTA AL GRADINO  $U(t)$  (V. ESERCIZIO N. 11 DEL CAPITOLO 2) DEL FILTRO IDEALE PASSA-BASSO CONSIDERATO NELL'ESERCIZIO N. 5.

RICORDANDO L'ESERCIZIO N. 11 DEL CAPITOLO 2:



$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t) dt = \int_{-\infty}^t \frac{\omega_2}{\pi} \frac{\sin \omega_2(t-t_0)}{\omega_2(t-t_0)} dt;$$

$$\omega_2(t-t_0) = \varphi;$$

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_2(t-t_0)} \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_2(t-t_0)} \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi;$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = \frac{1}{2}$$

(ES. N. 12 DEL CAP. 2)

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_2(t-t_0)} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}[\omega_2(t-t_0)].$$

ALTRA RISOLUZIONE RICORDANDO GLI ESERCIZI N. 11 E N. 12  
DEL CAPITOLO 2:

$$U(t) = \frac{1}{2} + I(t) = \\ = \frac{1}{2} + \int_0^\infty \frac{1}{\pi \omega} \sin \omega t d\omega;$$

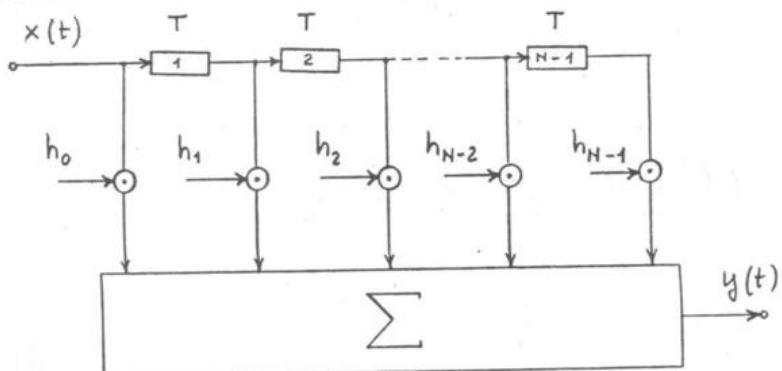
$$y(t) = \frac{1}{2} + \int_0^{\omega_2} \frac{1}{\pi \omega} \sin \omega(t-t_0) d\omega = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}[\omega_2(t-t_0)].$$

RICORDIAMO L'ESPRESSONE DEL TEMPO DI SALITA (V. ESERCIZIO N. 12 DEL CAPITOLO 2):

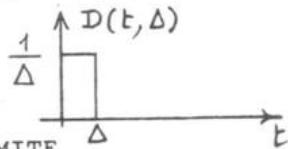
$$\tau_s = \frac{\pi}{\omega_2} = \frac{1}{2f_2}.$$

ESERCIZIO N. 7

SCRIVERE LA RISPOSTA IMPULSIVA DI UN FILTRO TRASVERSALE.



SE  $x(t) = D(t, \Delta)$ :



$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k D(t - kT, \Delta) .$$

IL LIMITE

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} y(t)$$

E' NULLO OVUNQUE, TRANNE CHE NEI PUNTI  $t = kT$  OVE E' INFINITO. QUINDI LA RISPOSTA IMPULSIVA DI UN FILTRO TRASVERSALE NON ESISTE NELL'AMBITO DELLE FUNZIONI ORDINARIE.

E' TUTTAVIA POSSIBILE DARE UNA ESPRESSIONE SIMBOLICA, COME OPERATORE, ALLA RISPOSTA IMPULSIVA, OSSERVANDO CHE L'ESPRESSONE DELLA RISPOSTA AD UNA GENERICA FUNZIONE  $x(t)$  PUO' ESSERE POSTA NELLA FORMA:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(t - kT) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} h_k \delta[(t - kT) - \tau] \right\} d\tau = \\ &= x(t) * \sum_{k=0}^{N-1} h_k \delta(t - kT) . \end{aligned}$$

DAL CONFRONTO FRA QUESTA RELAZIONE E LA (3.5.6)  
DISCENDE CHE L'ESPRESSIONE

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_k \delta(t - k\tau)$$

PUO' ESSERE FORMALMENTE TRATTATA COME LA RISPOSTA IMPULSIVA CERCATA. TALE ESPRESSIONE POTEVA ESSERE ANCHE OTTENUTA IN MODO SIMBOLICO PENSANDO PRESENTE ALL'INGRESSO DEL FILTRO LA FUNZIONE IMPULSIVA  $\delta(t)$ .

SI NOTI CHE DETTA RISPOSTA IMPULSIVA, ESSENDO COSTITUITA DA UN NUMERO FINITO DI FUNZIONI IMPULSIVE, HA DURATA FINITA. PER QUESTO MOTIVO SI USA ANCHE LA DENOMINAZIONE DI FILTRI FIR (FINITE IMPULSE RESPONSE) PER INDICARE I FILTRI TRASVERSALI.

I FILTRI RICORRENTI PRESENTANO INVECE COME RISPOSTA IMPULSIVA UNA SUCCESSIONE DI INFINITE FUNZIONI IMPULSIVE, E QUINDI CON DURATA INFINITA: DA QUI LA DENOMINAZIONE DI FILTRI IIR (INFINITE IMPULSE RESPONSE).

### 3.7 SISTEMI LINEARI TEMPO-DISCRETI.

CONSIDERIAMO IL SISTEMA DI FIGURA 3.7.1, CHE ALLA SERIE TEMPORALE IN INGRESSO  $\{x_n\}$  FA CORRISPONDERE, IN USCITA, LA SERIE TEMPORALE  $\{y_n\}$ .

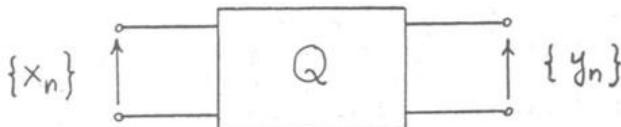


Fig. 3.7.1

RAPPRESENTIAMO LA TRASFORMAZIONE DI  $\{x_n\}$  IN  $\{y_n\}$  MEDIANTE LA RELAZIONE:

$$(3.7.1) \quad y_n = Q[\{x_n\}], \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

IL GENERICO TERMINE  $y_n$  DIPENDE IN GENERALE DAL-  
L'INTERA SERIE D'INGRESSO. PARTICOLARMENTE SIGNIFICATI-  
VO E' IL CASO IN CUI ESSO RISULTI INDIPENDENTE DAI  
TERMINI  $x_m$ , CON  $m > n$ : IN TALE CIRCOSTANZA SOLO I  
VALORI PASSATI E PRESENTE DELL'INGRESSO DETERMINANO  
L'USCITA (SISTEMA CAUSALE). QUANDO  $y_n$  DIPENDE SOLO DAL  
VALORE CONTEMPORANEO  $x_n$ , IL SISTEMA RISULTA PRIVO DI  
MEMORIA.

IL SISTEMA E' DETTO LINEARE SE:

$$(3.7.2) \quad Q[\{c_1 x'_n + c_2 x''_n\}] = c_1 Q[\{x'_n\}] + c_2 Q[\{x''_n\}]$$

QUALUNQUE SIANO  $c_1, c_2, \{x'_n\}$  E  $\{x''_n\}$ .

IL SISTEMA E' DETTO TEMPO-INVARIANTE SE:

$$(3.7.3) \quad Q[\{x_{n-i}\}] = y_{n-i}$$

QUALUNQUE SIA L'INTERO  $i$ .

DEFINIZIONE DI RISPOSTA IMPULSIVA DISCRETA  $\{h_n\}$  DI UN SISTEMA DISCRETO LINEARE TEMPO-INVARIANTE: E' LA RISPOSTA ALLA SERIE TEMPORALE  $\{\delta_n\}$  DEFINITA DA:

$$(3.7.4) \quad \delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

(V. FIGURA 3.7.2).

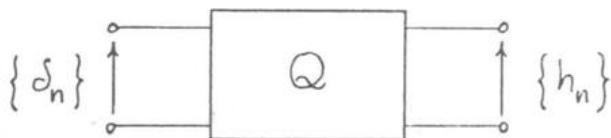


Fig. 3.7.2

SI NOTI CHE  $\{\delta_n\}$  COINCIDE CON LA SERIE I CUI TERMINI SONO ESPRESI DALLA (2.8.10) CON  $x_0 = 1$  [ESERCIZIO N. 8 DEL CAPITOLO 2]. LA SUA TRASFORMATA DI FOURIER, IN VIRTU' DELLA (2.8.11), E' PERTANTO EGUALE AD 1.

LA CONOSCENZA DI  $\{h_n\}$  CONSENTE DI ESPRIMERE LA RISPOSTA AD UNA QUALSIASI SERIE TEMPORALE D'INGRESSO. INFATTI, OSSERVANDO CHE

$$x_n = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i \delta_{n-i} = \{x_n\} * \{\delta_n\},$$

DALLE CONDIZIONI DI LINEARITA' E TEMPO-INVARIANZA DISCENDE LA RELAZIONE:

$$(3.7.5) \quad y_n = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i h_{n-i} = \{x_n\} * \{h_n\},$$

CHE ESPRIME LA CONVOLUZIONE FRA LA SERIE D'INGRESSO E LA RISPOSTA IMPULSIVA DISCRETA.

10

DEFINIZIONE DI FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H_s(\omega)$  DI UN SISTEMA DISCRETO LINEARE TEMPO-INVARIANTE: E' LA TRASFORMATA SECONDO FOURIER DELLA RISPOSTA IMPULSIVA DISCRETA:

$$(3.7.6) \quad H_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-jn\omega T}.$$

SE LE SERIE TEMPORALI DI INGRESSO E DI USCITA SONO DOTATE DI TRASFORMATA SECONDO FOURIER, RISPETTIVAMENTE  $X_s(\omega)$  E  $Y_s(\omega)$ , PER IL TEOREMA DELLA CONVOLUZIONE VALE LA RELAZIONE:

$$(3.7.7) \quad Y_s(\omega) = X_s(\omega) H_s(\omega).$$

(V. FIGURA 3.7.3)

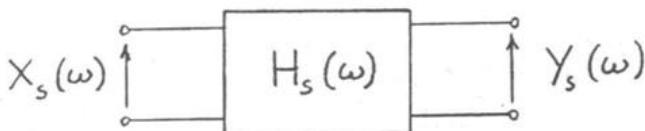
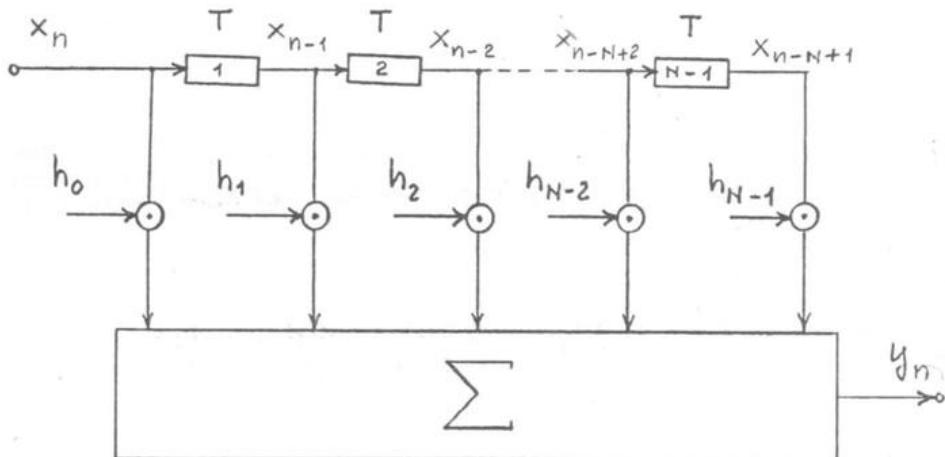


Fig. 3.7.3

ESERCIZIO N. 8

TROVARE LA RISPOSTA IMPULSIVA DISCRETA DEL FILTRO TRASVERSALE DI FIGURA, COSTITUITO DA UNO SHIFT-REGISTER E DA UN SOMMATORE.



$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x_{n-k}$$

SI NOTI CHE SI TRATTA DI UN SISTEMA DISCRETO CAUSALE CON MEMORIA FINITA, IN QUANTO IL TERMINE  $y_n$  DELLA SERIE TEMPORALE D'USCITA DIPENDE DAL VALORE CONTEMPORANEO DELL'INGRESSO E SOLO DA  $N - 1$  TERMINI PRECEDENTI.

QUANDO ALL'INGRESSO DEL FILTRO E' PRESENTE LA SERIE TEMPORALE I CUI TERMINI SONO DEFINITI DALLA (3.7.4), L'USCITA RAPPRESENTA LA RISPOSTA IMPULSIVA DISCRETA CERCATA ED E' SEMPLICEMENTE ESPRESSA DA:

$$\{h_n\} = \dots 00 h_0 h_1 h_2 \dots h_{N-1} 00 \dots$$

SI TRATTA ANCORA DI UNA RISPOSTA IMPULSIVA FINITA, CIOE' COSTITUITA DA UN NUMERO FINITO DI TERMINI NON NULLI, CONTRARIAMENTE A QUANTO ACCADE PER I FILTRI DISCRETI DI TIPO RICORRENTE (VALGONO SEMPRE LE DENOMINAZIONI FIR = FINITE IMPULSE RESPONSE E IIR = INFINITE IMPULSE RESPONSE ATTRIBUITE, RISPETTIVAMENTE, ALLE STRUTTURE NON RICORRENTI E RICORRENTI).

CAPITOLO IV

FUNZIONI AD ENERGIA FINITA E A POTENZA FINITA

SPETTRI DI ENERGIA E DI POTENZA

108

#### 4.1 FUNZIONI TEMPO-CONTINUE AD ENERGIA FINITA E A POTENZA FINITA.

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE TEMPO-CONTINUA  $x(t)$  ED UNA FUNZIONE, ESSA PURE TEMPO-CONTINUA,  $w(t) = f[x(t)]$ .

INTRODUCIAMO IL VALOR MEDIO TEMPORALE DI  $w(t)$  NELL'INTERVALLO  $(-T/2, T/2)$ , DI AMPIEZZA  $T$ :

$$(4.1.1) \quad \langle w(t) \rangle_T = \langle f[x(t)] \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f[x(t)] dt$$

ED IL VALOR MEDIO TEMPORALE DI  $w(t)$ , DEFINITO DAL LIMITE (QUANDO ESISTE):

$$(4.1.2) \quad \langle w(t) \rangle = \langle f[x(t)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle f[x(t)] \rangle_T = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f[x(t)] dt.$$

DA UN PUNTO DI VISTA OPERATIVO, TALE LIMITE RAPPRESENTA LA MEDIA TEMPORALE DI  $f[x(t)]$  VALUTATA SU UN INTERVALLO  $T$  SUFFICIENTEMENTE GRANDE.

CIO' PREMESSO, ESPRIMIAMO LE SEGUENTI GRANDEZZE:

\* VALOR MEDIO TEMPORALE DI  $x(t)$ :

$$(4.1.3) \quad \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

\* POTENZA ISTANTANEA DI  $x(t)$ :

$$(4.1.4) \quad p(t) = x^2(t)$$

\* ENERGIA DI  $x(t)$ :

E' DATA DALL'INTEGRALE DELLA POTENZA ISTANTANEA ESTESA ALL'INTERO ASSE DEI TEMPI:

$$(4.1.5) \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

DIAMO ORA LE DEFINIZIONI SOTTO RIPORTATE.

FUNZIONI AD ENERGIA FINITA

UNA FUNZIONE  $x(t)$  SI DICE AD ENERGIA FINITA QUANDO ESISTE FINITO L'INTEGRALE (4.1.5).

L'ESISTENZA DI DETTO INTEGRALE COSTITUISCE CONDIZIONE SUFFICIENTE PERCHE' LA FUNZIONE  $x(t)$  AMMETTA TRASFORMATA SECONDO FOURIER  $X(\omega)$ .

UN ESEMPIO DI FUNZIONE AD ENERGIA FINITA E' DATO DALL'IMPULSO  $g(t)$  CON CUI SI COSTRUISCE UN SEGNALE PAM (PULSE AMPLITUDE MODULATION) EFFETTUANDO LA CONVOLUZIONE FRA TALE IMPULSO ED UNA SERIE TEMPORALE, COME VEDREMO NEL PARAGRAFO 4.8 (SI VEDA ANCHE L'ESERCIZIO N. 9 DEL CAPITOLO 2).

FUNZIONI A POTENZA FINITA

UNA FUNZIONE  $x(t)$  SI DICE A POTENZA FINITA QUANDO ESISTE, NON NULLA, IL VALOR MEDIO TEMPORALE DELLA POTENZA ISTANTANEA:

$$(4.1.6) \quad P = \langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt.$$

ESSO VIENE CHIAMATO POTENZA MEDIA O, PIU' SEMPLICEMENTE, POTENZA DI  $x(t)$ .

LA RADICE QUADRATA DELLA POTENZA  $P$  DEFINISCE IL VALORE EFFICACE  $x_{eff}$  DI  $x(t)$ :

$$(4.1.7) \quad x_{eff} = \sqrt{P}$$

DA QUESTA DEFINIZIONE DISCENDE IMMEDIATAMENTE:

$$(4.1.8) \quad P = x_{eff}^2$$

PER LE FUNZIONI A POTENZA FINITA L'INTEGRALE CHE COMPARTE NELLA (4.1.5) NON CONVERGE. IN GENERALE, ESSE NON AMMETTONO TRASFORMATA DI FOURIER.

8

ESERCIZIO N. 1

LA FUNZIONE

$$x(t) = V_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$$

E' A POTENZA FINITA. CALCOLARNE IL VALORE EFFICACE.

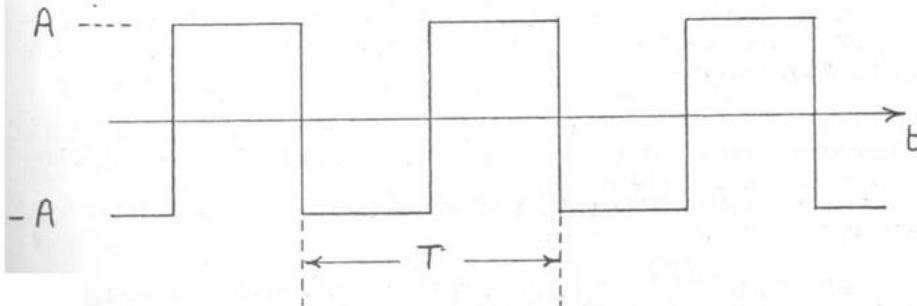
RISULTA:

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= V_0^2 \langle \cos^2(\omega_0 t - \varphi_0) \rangle = \\ &= \frac{V_0^2}{2} \langle 1 + \cos(2\omega_0 t - 2\varphi_0) \rangle = \frac{V_0^2}{2}. \end{aligned}$$

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}.$$

ESERCIZIO N. 2

L'ONDA QUADRA DI FIGURA E' A POTENZA FINITA. CALCOLARNE IL VALORE EFFICACE.



RISULTA:

$$x^2(t) = A^2 = \text{cost.},$$

$$\langle x^2(t) \rangle = A^2,$$

$$x_{\text{eff}} = A.$$

4.2 FUNZIONI AD ENERGIA FINITA: SPETTRO DI ENERGIA E FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE.

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE  $\mathcal{E}(\omega)$  DEFINITA DALLA (2.4.8):

$$(4.2.1) \quad \mathcal{E}(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{\pi},$$

COME GIA' ANTICIPATO, PER LE RAGIONI CHE APPARIRANNO CHIARE FRA POCO, LA (4.2.1) VIENE CHIAMATA DENSITA' SPETTRALE DI ENERGIA O, PIU' SEMPLICEMENTE, SPETTRO DI ENERGIA DELLA FUNZIONE  $x(t)$ .

NEL PARAGRAFO 2.4 ABBIAMO GIA' MOSTRATO CHE IL SUO INTEGRALE SUL SEMIASSE POSITIVO DELLE PULSAZIONI DA' L'ENERGIA E DELLA FUNZIONE  $x(t)$ :

$$(4.2.2) \quad E = \int_0^\infty \mathcal{E}(\omega) d\omega.$$

DIMOSTRIAMO ORA LA SEGUENTE PROPRIETA', CHE E' CARATTERISTICA DELLA FUNZIONE (4.2.1) E NE GIUSTIFICA LA DENOMINAZIONE SOPRA RIPORTATA: SE CON UN FILTRO PASSA-BANDA IDEALE ISOLIAMO LE COMPONENTI SPETTRALI DI  $x(t)$  INTERNE AD UNA GENERICA BANDA  $(\omega_1, \omega_2)$  (V. FIGURA 4.2.1), LA LORO ENERGIA E' ESPRESSA DALL'INTEGRALE DI  $\mathcal{E}(\omega)$  ESTESO ALL'INTERVALLO  $(\omega_1, \omega_2)$ :

$$(4.2.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x_{\omega_1, \omega_2}^2(t) dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathcal{E}(\omega) d\omega,$$

QUALUNQUE SIANO  $\omega_1$  E  $\omega_2$  [IN PARTICOLARE, PER  $\omega_1 = 0$  E  $\omega_2 = \infty$  RITROVIAMO LA (4.2.2)].

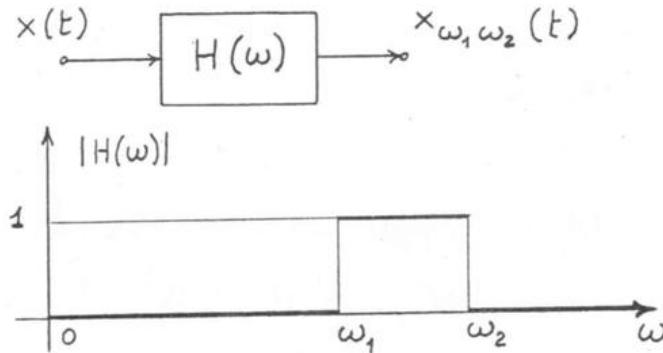


Fig. 4.2.1

XIN

PRIMA DI PROCEDERE ALLA DEMOSTRAZIONE, VEDIAMO COME SI MODIFICA LO SPETTO DI ENERGIA QUANDO UNA FUNZIONE  $x(t)$  SUBISCE UNA TRASFORMAZIONE LINEARE RAPPRESENTATA DALLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H(\omega)$  (V. FIGURA 4.2.2).

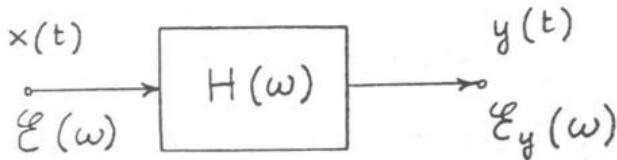


Fig. 4.2.2

CON EVIDENTE SIGNIFICATO DEI SIMBOLI, SCRIVIAMO:

$$(4.2.4) \quad Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) ,$$

$$(4.2.5) \quad \frac{|Y(\omega)|^2}{\pi} = |H(\omega)|^2 \frac{|X(\omega)|^2}{\pi} ,$$

$$(4.2.6) \quad E_y(\omega) = |H(\omega)|^2 E(\omega) .$$

LA (4.2.6) ESPRIME LA RELAZIONE CERCATA FRA SPETTRO D'ENERGIA  $E_y(\omega)$  DELL'USCITA E SPETTRO D'ENERGIA  $E(\omega)$  DELL'INGRESSO.

IN VIRTU' DELLA PROPRIETA' ESPRESA DALLA (4.2.2), L'ENERGIA DELL'USCITA VALE:

$$(4.2.7) \quad E_y = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt = \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 E(\omega) d\omega .$$

RITORNANDO ORA ALLA FIGURA 4.2.1, DALLA (4.2.7) DISCENDE:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_{\omega_1, \omega_2}^2(t) dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} E(\omega) d\omega ,$$

CHE E' APPUNTO LA (4.2.3).

IN PARTICOLARE, PONENDO NELLA (4.2.3)  $\omega_1 = \omega$  E  $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$  ED INDICANDO CON  $\Delta E$  L'ENERGIA DELL'USCITA, POSSIAMO SCRIVERE:

$$(4.2.8) \quad \Delta E = \int_{\omega}^{\omega + \Delta\omega} \mathcal{E}(\omega) d\omega$$

E QUANDO  $\Delta\omega$  E' SUFFICIENTEMENTE PICCOLO:

$$(4.2.9) \quad \Delta E = \mathcal{E}(\omega) \Delta\omega .$$

LA (4.2.9) SUGGERISCE IL METODO DI MISURA DELLO SPETTRO DI ENERGIA RIPORTATO IN FIGURA 4.2.3.

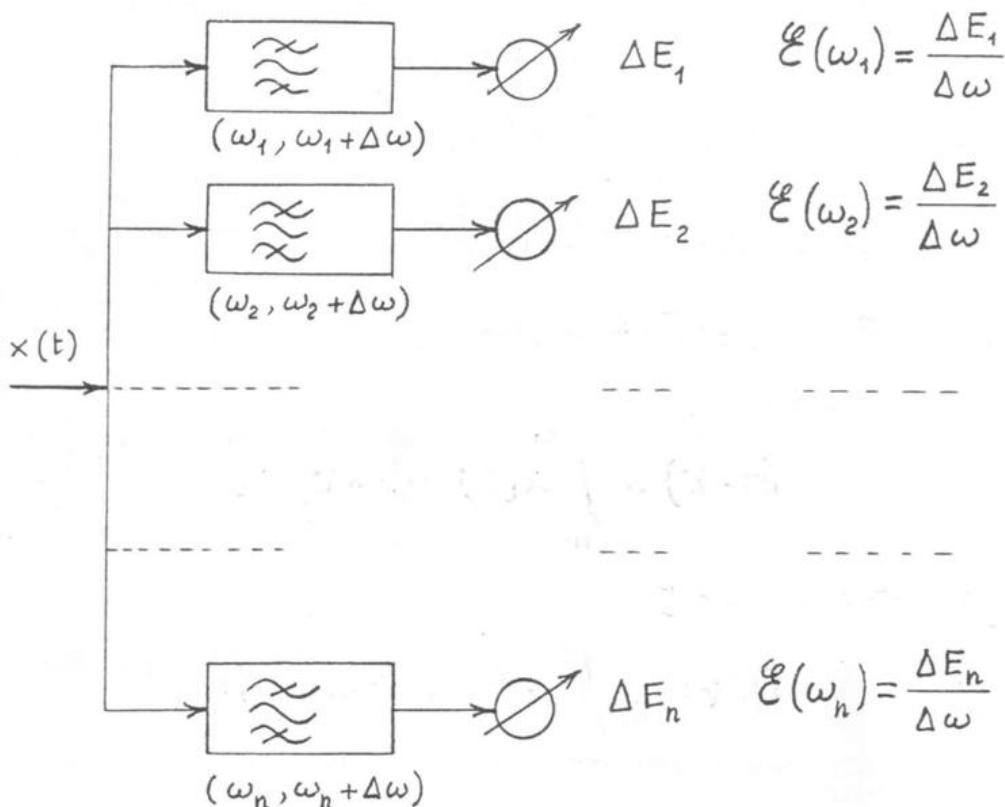


Fig. 4.2.3

NO

DEFINIAMO ORA LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE  $\Phi(\tau)$  DI UNA FUNZIONE AD ENERGIA FINITA. ESSA E' SEMPLICEMENTE DATA DALL' INTEGRALE:

$$(4.2.10) \quad \phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \times (t + \tau) dt .$$

RISULTA ANCHE:

$$(4.2.11) \quad \phi(\tau) = x(\tau) * x(-\tau) .$$

CITIAMO ALCUNE PROPRIETA' DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE.

I -  $\Phi(0)$  RAPPRESENTA L'ENERGIA DI  $x(t)$ :

$$(4.2.12) \quad \Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt .$$

II -  $\Phi(\tau)$  E' FUNZIONE PARI DI  $\tau$ :

$$(4.2.13) \quad \phi(-\tau) = \phi(\tau) .$$

INFATTI:

$$\phi(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \times (t - \tau) dt$$

E PONENDO  $t - \tau = \xi$ :

$$\begin{aligned} \phi(-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi + \tau) \times (\xi) d\xi = \\ &= \phi(\tau) . \end{aligned}$$

III -  $\Phi(0)$  E' EGUALE AL MASSIMO VALORE ASSUNTO DA  $|\Phi(\tau)|$ :

$$(4.2.14) \quad |\phi(\tau)| \leq \phi(0) .$$

CALCOLIAMO INFATTI LA QUANTITA' NON NEGATIVA:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t) \pm x(t+\tau)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x^2(t) + x^2(t+\tau) \pm 2x(t)x(t+\tau)] dt = \\ = 2[\phi(0) \pm \phi(\tau)] \geq 0 ,$$

DA CUI SEGUE LA (4.2.14).

IV - AL CRESCERE DI  $|\tau|$ ,  $\Phi(\tau)$  TENDE A 0:

$$(4.2.15) \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \phi(\tau) = 0 .$$

TALE PROPRIETA' E' UNA IMMEDIATA CONSEGUENZA DEL FATTO CHE L'INTEGRALE (4.1.5) CONVERGE, E CHE QUINDI  $x^2(t)$ , PER  $|t| \rightarrow \infty$ , TENDE A 0.

PER ESERCIZIO, SI VERIFichi CHE LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DELL'IMPULSO DI FIGURA 4.2.4 E' QUELLA RIPORTATA IN FIGURA 4.2.5.

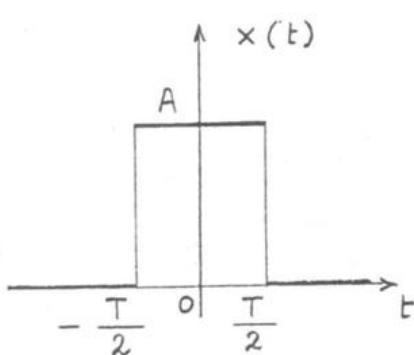


Fig. 4.2.4

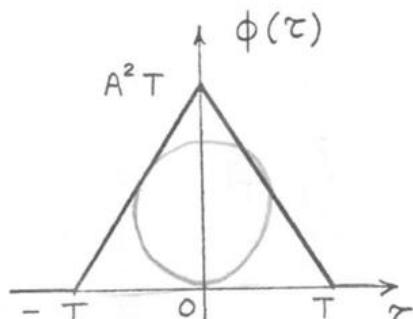


Fig. 4.2.5

$\Phi(\tau)$  E' TRASFORMABILE SECONDO FOURIER. DALLA (4.2.11) OTTENIAMO:

$$(4.2.16) \quad \mathcal{F}[\phi(\tau)] = \mathcal{F}[x(\tau)] \mathcal{F}[x(-\tau)] = \\ = X(\omega) X^*(\omega) = |X(\omega)|^2.$$

PER ESERCIZIO, SI VERIFICHI LA (4.2.16) CON RIFERIMENTO ALLA COPPIA DI FUNZIONI RAPPRESENTATE NELLE FIGURE 4.2.4 E 4.2.5.

LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE E LO SPETTRO DI ENERGIA SONO LEGATE DA UNA RELAZIONE CHE DISCENDE IMMEDIATEMENTE DALLE (4.2.1) E (4.2.16).

RISULTA:

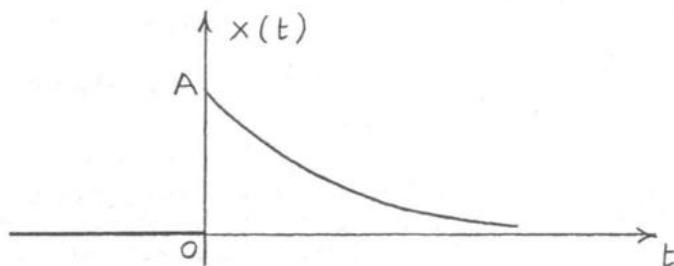
$$(4.2.17) \quad \mathcal{E}(\omega) = \frac{\mathcal{F}[\phi(\tau)]}{\pi},$$

OSSIA SPETTRO DI ENERGIA E FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE, A MENO DI UNA COSTANTE MOLTIPLICATIVA, SONO LEGATE FRA LORO DA UNA SEMPLICE TRASFORMAZIONE SECONDO FOURIER.

ESERCIZIO N. 3

SI CONSIDERI LA FUNZIONE:

$$x(t) = \begin{cases} A e^{-\frac{t}{t_0}} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$



VERIFICARE CHE E' AD ENERGIA FINITA E CALCOLARNE LO SPETTRO DI ENERGIA.

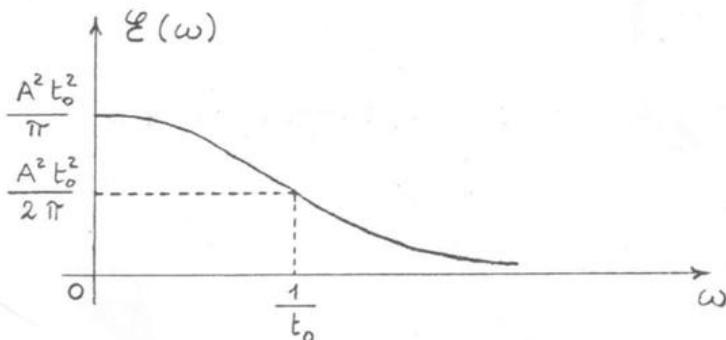
RISULTA:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = A^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{t_0}} dt = \frac{A^2 t_0}{2},$$

$\int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$

$$X(\omega) = \frac{A t_0}{1 + j\omega t_0} \quad (\text{E.S. N. 4 DEL CAP. 2})$$

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{\pi} = \frac{A^2 t_0^2}{\pi} \frac{1}{1 + \omega^2 t_0^2}$$



4.3 FUNZIONI A POTENZA FINITA: FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE.

SIA  $x(t)$  UNA FUNZIONE A POTENZA FINITA. LA SUA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE  $C(\tau)$  E' DEFINITA DALLA MEDIA TEMPORALE DEL PRODOTTO  $x(t) x(t+\tau)$ :

$$(4.3.1) \quad C(\tau) = \langle x(t) x(t+\tau) \rangle =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t+\tau) dt.$$

CITIAMO ALCUNE PROPRIETA' DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DI UNA FUNZIONE A POTENZA FINITA, CHE SONO LE STESSE GIA' VISTE NEL CASO DI UNA FUNZIONE AD ENERGIA FINITA.

I -  $C(0)$  RAPPRESENTA LA POTENZA DI  $x(t)$ :

$$(4.3.2) \quad C(0) = \langle x^2(t) \rangle .$$

II -  $C(\tau)$  E' FUNZIONE PARI DI  $\tau$ :

$$(4.3.3) \quad C(-\tau) = C(\tau) .$$

INFATTI:

$$C(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t-\tau) dt$$

E PONENDO  $t - \tau = \xi$ :

$$C(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}-\tau} x(\xi+\tau) x(\xi) d\xi =$$

$$= C(\tau) .$$

III -  $C(0)$  E' EGUALE AL MASSIMO VALORE ASSUNTO DA  $|C(\tau)|$ :

$$(4.3.4) \quad |C(\tau)| \leq C(0) .$$

CALCOLIAMO INFATTI LA QUANTITA' NON NEGATIVA:

$$\begin{aligned} & \langle [x(t) \pm x(t+\tau)]^2 \rangle = \\ & = \langle x^2(t) \rangle + \langle x^2(t+\tau) \rangle \pm 2 \langle x(t) x(t+\tau) \rangle = \\ & = 2[C(0) \pm C(\tau)] \geq 0 , \end{aligned}$$

DA CUI SEGUE LA (4.3.4).

QUANDO  $x(t)$  HA VALOR MEDIO TEMPORALE  $\langle x(t) \rangle$  DIVERSO DA 0, SI DEFINISCE FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA  $V(\tau)$  LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DELLA DIFFERENZA

$$(4.3.5) \quad x(t) - \langle x(t) \rangle$$

IL CUI VALOR MEDIO E' EVIDENTEMENTE 0.

RISULTA:

$$\begin{aligned} (4.3.6) \quad V(\tau) &= \langle [x(t) - \langle x(t) \rangle][x(t+\tau) - \langle x(t) \rangle] \rangle = \\ &= C(\tau) - [\langle x(t) \rangle]^2 . \end{aligned}$$

SALVO AVVISO CONTRARIO CONSIDEREREMO FUNZIONI A VALOR MEDIO NULLO, SENZA LEDERE CON CIO' LA GENERALITA' POTENDOCI SEMPRE RICONDURRE A QUESTO CASO EFFETTUANDO LA DIFFERENZA (4.3.5).

LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE SI IDENTIFICA PERCIO' CON LA FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA E VERRA' USATA ANCHE IN SUA VECE [GIA' A PARTIRE DALLA PROSSIMA FORMULA (4.3.7)].

VOX

UNA FUNZIONE  $x(t)$  E' PARZIALMENTE COERENTE QUANDO ESISTE, FINITA, LA QUANTITA':

$$(4.3.7) \quad \tau_z^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 C^2(\tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} C^2(\tau) d\tau},$$

LA CUI RADICE QUADRATA  $\tau_z$  VIENE CHIAMATA TEMPO DI COERENZA.

IL TEMPO DI COERENZA E' SUSCETTIBILE DELLA SEGUENTE INTERPRETAZIONE GEOMETRICA: NEL PIANO CARTESIANO  $(\tau, y)$  ESSO RAPPRESENTA IL RAGGIO D'INERZIA, RISPETTO ALL'ASSE  $y$ , DELL'AREA SOTTESA DALLA CURVA DI EQUAZIONE  $y = C^2(\tau)$ .

LA (4.3.7) IMPLICA CHE SIANO FINITI NUMERATORE E DENOMINATORE.

IN PARTICOLARE SCRIVIAMO:

$$(4.3.8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} C^2(\tau) d\tau < \infty,$$

DA CUI:

$$(4.3.9) \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} C(\tau) = 0.$$

LA (4.3.9) METTE IN EVIDENZA CHE ESISTE UN VALORE  $\tau_c$  DI  $|\tau|$  A PARTIRE DAL QUALE  $C(\tau)$  E' TRASCURABILE IN UN ASSEGNAUTO AMBITO DI APPROSSIMAZIONE:

$$(4.3.10) \quad C(\tau) \approx 0 \quad \text{per} \quad |\tau| > \tau_c.$$

SPESSO SI FA RIFERIMENTO A  $\tau_c$ , E NON A  $\tau_z$ , CON IL TERMINE TEMPO DI COERENZA. TALE TEMPO, CON IL SIGNIFICATO ESPRESSO DALLA (4.3.10), VIENE ANCHE CHIAMATO TEMPO DI CORRELAZIONE.

A TITOLO ESEMPLIFICATIVO, RIPORTIAMO IN FIGURA 4.3.1 POSSIBILI ANDAMENTI DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE  $C(\tau)$  CHE METTONO IN EVIDENZA QUALITATIVAMENTE LE PROPRIETA' ENUNCiate.

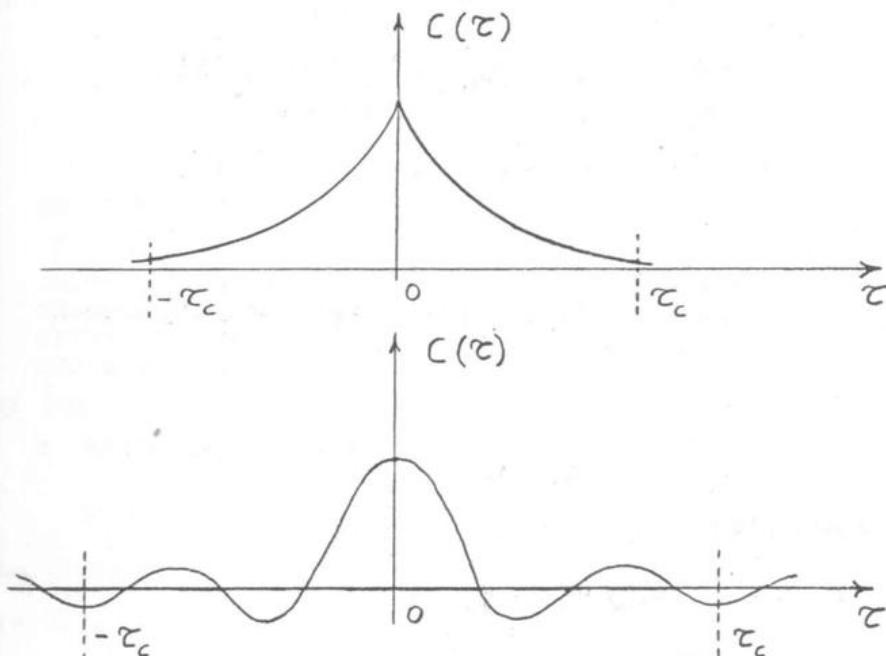


Fig. 4.3.1

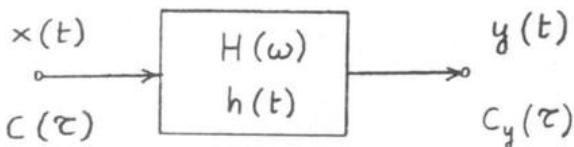
LA (4.3.8), CHE ASSUMEREMO VERIFICATA, E' CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L'ESISTENZA DELLA TRASFORMATA SECONDO FOURIER  $\mathcal{F}[C(\tau)]$  DI  $C(\tau)$ , CHE, RICORDANDO LA (4.3.3), PUO' ESSERE SCRITTA NELLA FORMA:

$$(4.3.11) \quad \mathcal{F}[C(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ = 2 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos \omega \tau d\tau .$$

LA (4.3.11) METTE IN EVIDENZA CHE LA TRASFORMATA DI  $C(\tau)$  E' FUNZIONE REALE E PARI DI  $\omega$ .

~~DIM~~ ~~G(\omega) = H(\omega)~~ ~~NO~~

MOSTRIAMO ORA COME SI MODIFICA LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE QUANDO  $x(t)$  SUBISCE UNA TRASFORMAZIONE LINEARE RAPPRESENTATA NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE DALLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H(\omega)$  E NEL DOMINIO DEI TEMPI DALLA RISPOSTA IMPULSIVA  $h(t)$  (V. FIGURA 4.3.2).



$$C(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \quad C_y(\tau) = \langle y(t)y(t+\tau) \rangle$$

Fig. 4.3.2

SCRIVIAMO:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) x(t-\xi) d\xi$$

$$y(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) x(t+\tau-\eta) d\eta$$

$$C_y(\tau) = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) h(\eta) x(t-\xi) x(t+\tau-\eta) d\xi d\eta \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) h(\eta) \langle x(t-\xi) x(t+\tau-\eta) \rangle d\xi d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) h(\eta) C(\tau - \eta + \xi) d\xi d\eta =$$

$$\xi \rightarrow -\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(-\xi) h(\eta) C(\tau - \eta - \xi) d\xi d\eta =$$

$$= h(-\tau) * h(\tau) * C(\tau)$$

~~NO~~  
IN CONCLUSIONE:

$$(4.3.11) \quad C_y(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * c(\tau).$$

CON RIFERIMENTO ALLE TRASFORMATE SECONDO FOURIER  
 $\mathcal{F}[c(\tau)]$  E  $\mathcal{F}[c_y(\tau)]$  DELLE FUNZIONI DI AUTOCORRELAZIONE DELL'INGRESSO E DELL'USCITA, LA RELAZIONE (4.3.11), SCRITTA NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE, DIVIENE:

$$\mathcal{F}[C_y(\tau)] = \mathcal{F}[h(\tau)] \mathcal{F}[h(-\tau)] \mathcal{F}[c(\tau)],$$

$$\mathcal{F}[C_y(\tau)] = H(\omega) H^*(\omega) \mathcal{F}[c(\tau)],$$

$$(4.3.12) \quad \mathcal{F}[C_y(\tau)] = |H(\omega)|^2 \mathcal{F}[c(\tau)].$$

LA (4.3.12) E' SIMBOLICAMENTE RAPPRESENTATA IN FIGURA 4.3.3.

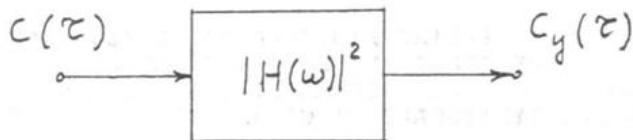


Fig. 4.3.3

#### 4.4 FUNZIONI A POTENZA FINITA: SPETTRO DI POTENZA.

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE  $x(t)$  A POTENZA FINITA ED ESPRIMIAMO LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE  $C(\tau)$  COME ANTITRASFORMATA DELLA SUA TRASFORMATA:

$$(4.4.1) \quad C(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[C(\tau)] e^{j\omega\tau} d\omega.$$

IN PARTICOLARE, PER  $\tau = 0$ , RICORDANDO CHE LA TRASFORMATA DI  $C(\tau)$  E' FUNZIONE REALE PARI, RISULTA:

$$(4.4.2) \quad C(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[C(\tau)] d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{F}[C(\tau)]}{\pi} d\omega.$$

PONENDO

$$(4.4.3) \quad G(\omega) = \frac{\mathcal{F}[C(\tau)]}{\pi}$$

LA POTENZA  $P$  DI  $x(t)$ , CHE E' DATA DA  $C(0)$ , PUO' ESSERE SCRITTA NELLA FORMA:

$$(4.4.4) \quad P = \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega.$$

L'INTEGRALE DELLA FUNZIONE  $G(\omega)$ , ESTESO A TUTTO IL SEMIASSE NON NEGATIVO DELLE PULSAZIONI, ESPRIME DUNQUE LA POTENZA DI  $x(t)$ .

DIMOSTRIAMO ORA LA SEGUENTE PROPRIETA', CHE E' CARATTERISTICA DELLA (4.4.3):

SE CON UN FILTRO PASSA-BANDA IDEALE ISOLIAMO LE COMPONENTI SPETTRALI DI  $x(t)$  INTERNE AD UNA GENERICA BANDA  $(\omega_1, \omega_2)$  (V. FIGURA 4.4.1), LA LORO POTENZA E' ESPRESSA DALL'INTEGRALE DI  $G(\omega)$  ESTESO ALL'INTERVALLO  $(\omega_1, \omega_2)$ :

$$(4.4.5) \quad \langle x_{\omega_1 \omega_2}^2(t) \rangle = \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(\omega) d\omega$$

QUALUNQUE SIANO  $\omega_1$  E  $\omega_2$  [IN PARTICOLARE PER  $\omega_1 = 0$  E  $\omega_2 = \infty$  RITROVIAMO LA (4.4.4)].

LA PROPRIETA' CARATTERISTICA ORA ENUNCIATA GIUSTIFICA IL NOME DI DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA O SPETTRO DI POTENZA DATO ALLA FUNZIONE  $G(\omega)$ .

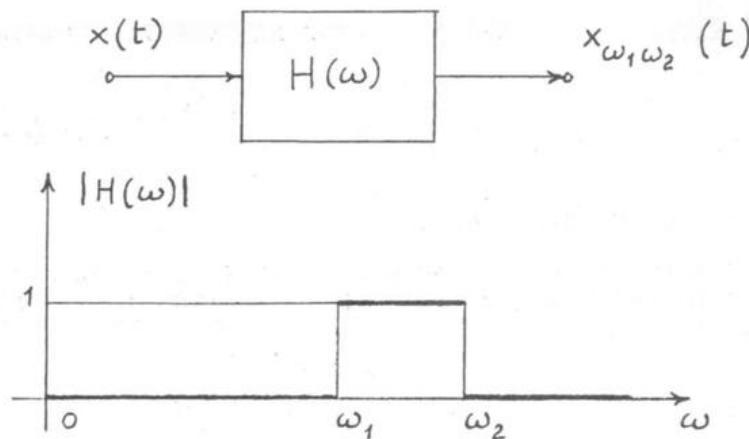


Fig. 4.4.1

PRIMA DI PROCEDERE ALLA DEMOSTRAZIONE, VEDIAMO COME SI MODIFICA LO SPETTRO DI POTENZA QUANDO UNA FUNZIONE  $x(t)$  SUBISCE UNA TRASFORMAZIONE LINEARE RAPPRESENTATA DALLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H(\omega)$  (V. FIGURA 4.4.2).

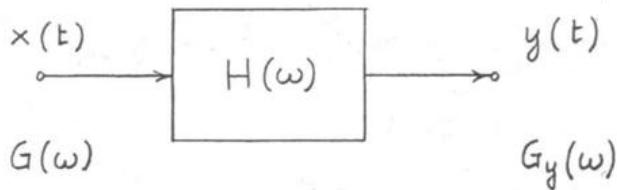


Fig. 4.4.2

DALLE (4.3.12) E (4.4.3) DISCENDE IMMEDIATAMENTE:

$$(4.4.6) \quad G_y(\omega) = |H(\omega)|^2 G(\omega) .$$

IN VIRTU' DELLA PROPRIETA' ESPRESSA DALLA (4.4.4), LA POTENZA DELL'USCITA VALE:

$$(4.4.7) \quad P_y = \int_0^\infty G_y(\omega) d\omega = \int_0^\infty |H(\omega)|^2 G(\omega) d\omega .$$

RITORNANDO ORA ALLA FIGURA 4.4.1, DALLA (4.4.7) DISCENDE:

$$\langle x_{\omega_1 \omega_2}^2(t) \rangle = \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(\omega) d\omega$$

CHE E' APPUNTO LA (4.4.5).

IN PARTICOLARE, PONENDO NELLA (4.4.5)  $\omega_1 = \omega$  E  $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$  ED INDICANDO CON  $\Delta P$  LA POTENZA DELL'USCITA, POSSIAMO SCRIVERE:

$$(4.4.8) \quad \Delta P = \int_{\omega}^{\omega + \Delta\omega} G(\omega) d\omega$$

E QUANDO  $\Delta\omega$  E' SUFFICIENTEMENTE PICCOLO:

$$(4.4.9) \quad \Delta P = G(\omega) \Delta\omega.$$

LA (4.4.9) SUGGERISCE IL METODO DI MISURA DELLO SPETTRO DI POTENZA RIPORTATO IN FIGURA 4.4.3.

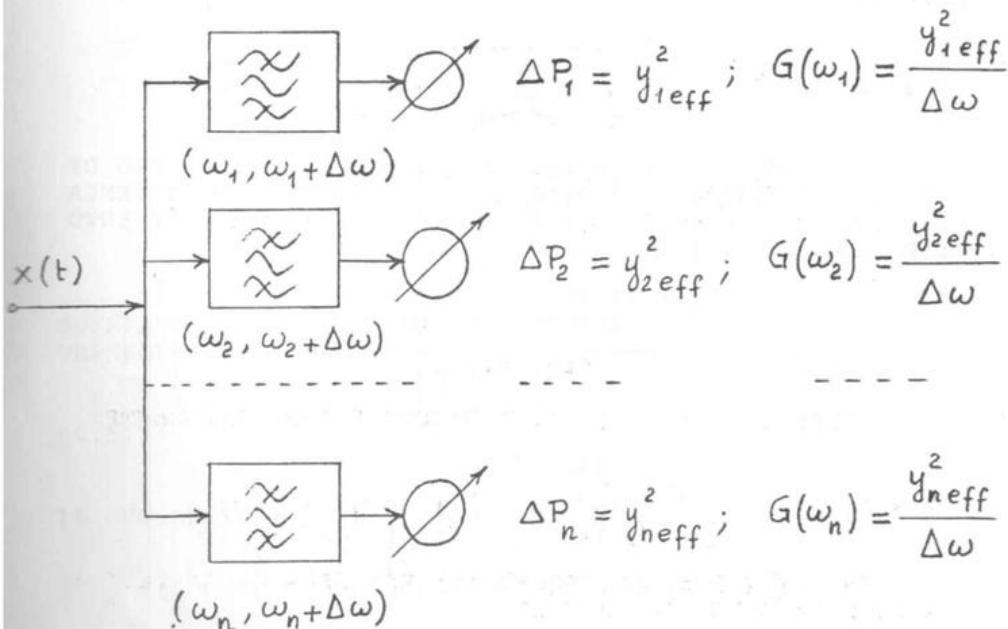


Fig. 4.4.3

E' IMPORTANTE SOTTOLINEARE COME LO SPETTRO DI POTENZA DI FUNZIONI A POTENZA FINITA CONSENTA DI ESTENDERE A TALI FUNZIONI IL CONCETTO DI BANDA DI PULSAZIONI (GIA' INTRODOTTO NEL PARAGRAFO 2.3), ANCHE SE ESSE IN GENERALE NON SONO DOTATE DI TRASFORMATA SECONDO FOURIER, E PIU' IN GENERALE DI EFFETTUARNE UNA ANALISI ARMONICA GENERALIZZATA.

E' ANCHE IMPORTANTE OSSERVARE COME QUESTA ANALISI ARMONICA GENERALIZZATA COINVOLGA LA FUNZIONE DI AUTOCORTELAZIONE.

DEFINIZIONE: UNA FUNZIONE  $x(t)$  E' DETTA "BIANCA" IN UNA BANDA  $B_\omega$  QUANDO IL SUO SPETTRO DI POTENZA E' IVI COSTANTE, "COLORATA" IN CASO CONTRARIO.

#### SPETTRO DI POTENZA RIFERITO ALLE FREQUENZE

LA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA, O SPETTRO DI POTENZA, RIFERITO ALLE FREQUENZE E' LA FUNZIONE  $G_f(f)$  IL CUI INTEGRALE ESTESO AD UN INTERVALLO DI FREQUENZE  $(f_1, f_2)$  RAPPRESENTA LA POTENZA DELLE COMPONENTI SPETTRALI DI  $x(t)$  INTERNE A TALE INTERVALLO, QUALUNQUE SIANO  $f_1$  E  $f_2$ . IN PARTICOLARE, PER  $f_1 = 0$  E  $f_2 = \infty$ , RISULTA:

$$(4.4.10) \quad P = \int_0^\infty G_f(f) df .$$

E' IMMEDIATO RICAVARE LA RELAZIONE FRA SPETTRO DI POTENZA RIFERITO ALLE PULSAZIONI E SPETTRO DI POTENZA RIFERITO ALLE FREQUENZE, COME MOSTRATO CON RIFERIMENTO ALLA FIGURA 4.4.4.

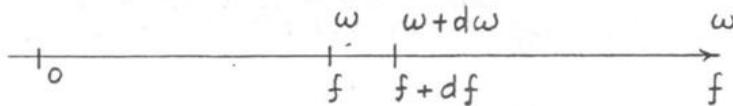


Fig. 4.4.4

$$(4.4.11) \quad \begin{aligned} G(\omega)d\omega &= G_f(f)df , \\ G(2\pi f)2\pi df &= G_f(f)df , \\ G_f(f) &= 2\pi G(2\pi f) . \end{aligned}$$

#### 4.5 RELAZIONE FRA SPETTRO DI POTENZA ED ANALISI DI FOURIER.

ABBIAMO GIA' OSSERVATO CHE UNA FUNZIONE A POTENZA FINITA HA ENERGIA INFINITA E QUINDI, IN GENERALE, NON E' TRASFORMABILE SECONDO FOURIER. POSSIAMO TUTTAVIA TROVARE UN LEGAME FRA SPETTRO DI POTENZA DI UNA FUNZIONE  $x(t)$  - OVVIAMENTE A POTENZA FINITA - E L'ANALISI DI FOURIER.

A QUESTO SCOPO INTRODUCIAMO LA VERSIONE TRONCATA A T DI  $x(t)$ , DEFINITA DA:

$$(4.5.1) \quad x_T(t) = \begin{cases} x(t) & , |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & , |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

LA (4.5.1) E' RAPPRESENTATA IN FIGURA 4.5.1.

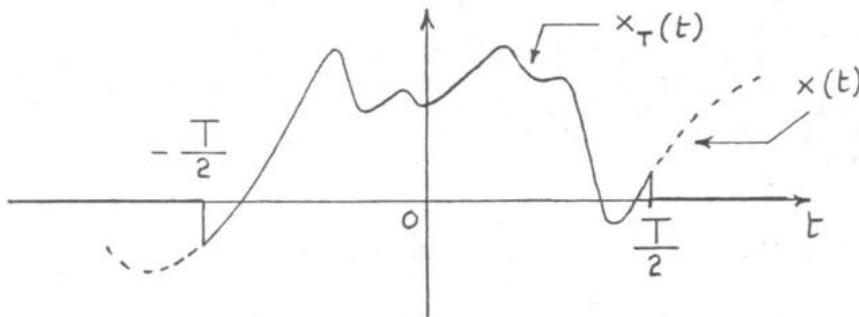


Fig. 4.5.1

LA (4.5.1) E' UNA FUNZIONE AD ENERGIA FINITA E QUINDI TRASFORMABILE SECONDO FOURIER: SIA  $X_T(\omega)$  LA SUA TRASFORMATA E

$$(4.5.2) \quad \mathcal{E}_T(\omega) = \frac{|X_T(\omega)|^2}{\pi}$$

IL SUO SPETTRO DI ENERGIA.

CIO' PREMESSO, PRENDIAMO IN ESAME LA FIGURA 4.5.2 IN CUI E' RAPPRESENTATA LA DEFINIZIONE OPERATIVA DI  $G(\omega)$ .

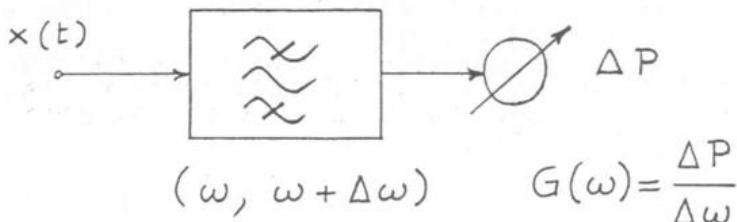


Fig. 4.5.2

LA MISURA DI  $\Delta P$  AVVIENE SU UN INTERVALLO T SUFFICIENTEMENTE ELEVATO; IN FORMULE:

$$(4.5.3) \quad \Delta P = \frac{1}{T} \int_{\omega}^{\omega + \Delta \omega} |X_T(\omega)|^2 d\omega \quad (T \text{ GRANDE}).$$

LA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA VIENE MISURATA DAL RAPPORTO  $\Delta P / \Delta \omega$  CON  $\Delta \omega$  SUFFICIENTEMENTE PICCOLO; IN FORMULE:

$$(4.5.4) \quad G(\omega) = \frac{\Delta P}{\Delta \omega} \quad (\Delta \omega \text{ PICCOLO}) .$$

DALLE (4.5.4), (4.5.3) E (4.5.2) DISCENDE IL LEGAME CERCATO FRA SPETTRO DI POTENZA ED ANALISI DI FOURIER, ESPRESSO DALLA RELAZIONE:

$$(4.5.5) \quad G(\omega) = \lim_{\Delta \omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \omega} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\omega}^{\omega + \Delta \omega} \frac{|X_T(\omega)|^2}{\pi} d\omega \right\}.$$

E' IMPORTANTE SOTTOLINEARE CHE NELLA (4.5.5) NON E' LECITO SCAMBIARE L'ORDINE DELLE OPERAZIONI INDICATE. IN PARTICOLARE NON E' LECITO SCRIVERE:

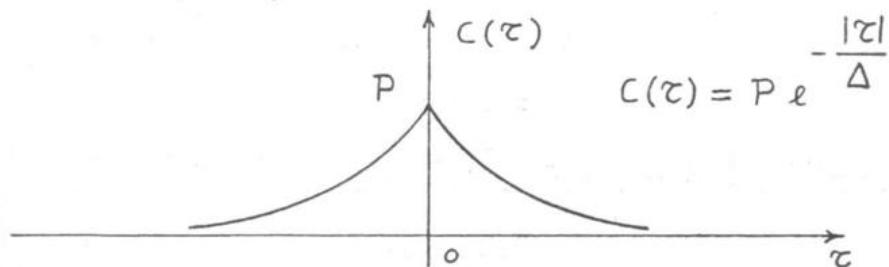
$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{\pi T} .$$

SI PUO' INFATTI DEMONSTRARE CHE IN GENERALE TALE LIMITE NON ESISTE.

4.6 ESERCIZI.

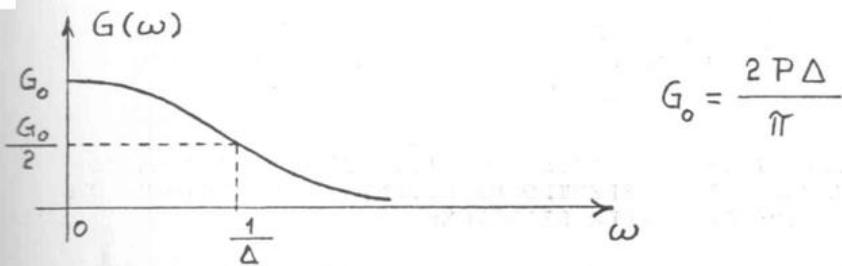
ESERCIZIO N.4

$x(t)$ , CON POTENZA  $P$ , ABBIA LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE  $C(\tau)$  QUI SOTTO SPECIFICATA. CALCOLARE LO SPETTRO DI POTENZA ED IL TEMPO DI COERENZA DEFINITO TRAMITE LA (4.3.7).



RICORDANDO L'ESERCIZIO N. 3 DEL CAPITOLO 2 POSSIAMO SCRIVERE:

$$G(\omega) = \frac{\Im[C(\tau)]}{\pi} = \frac{2P\Delta}{\pi} \frac{1}{1+\omega^2\Delta^2};$$



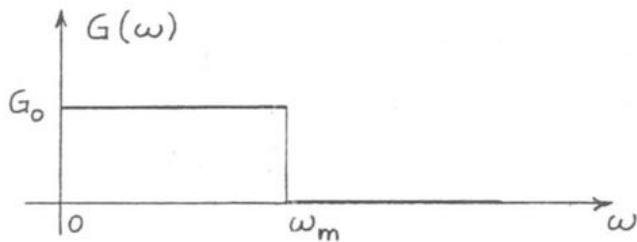
$$\begin{aligned} \tau_z^2 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 C^2(\tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} C^2(\tau) d\tau} = \frac{\Delta^2}{4} \frac{\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx}{\int_0^{\infty} e^{-x} dx} = \frac{\Delta^2}{2}. \\ \tau_z &= \frac{\Delta}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

SI NOTI COME IL TEMPO DI COERENZA DIMINUISCA AL CRESCERE DELLA BANDA DI PULSAZIONI DI  $x(t)$ , COMUNQUE ESSA VENGA CONVENZIONALMENTE DEFINITA.

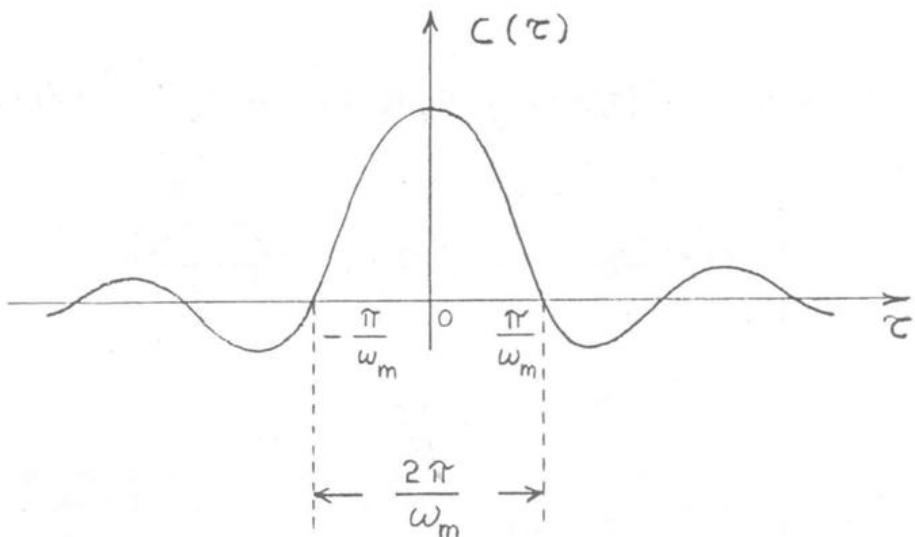
X

ESERCIZIO N. 5

$x(t)$ , CON POTENZA P, ABBIA SPETTRO COSTANTE NELLA BANDA  $(0, \omega_m)$  E NULLO PER  $\omega > \omega_m$ . CALCOLARE LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE.



$$\begin{aligned}
 C(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \\
 &= \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau d\omega = G_0 \int_0^{\omega_m} \cos \omega \tau d\omega = \\
 &= G_0 \omega_m \frac{\sin \omega_m \tau}{\omega_m \tau} = P \frac{\sin \omega_m \tau}{\omega_m \tau}.
 \end{aligned}$$



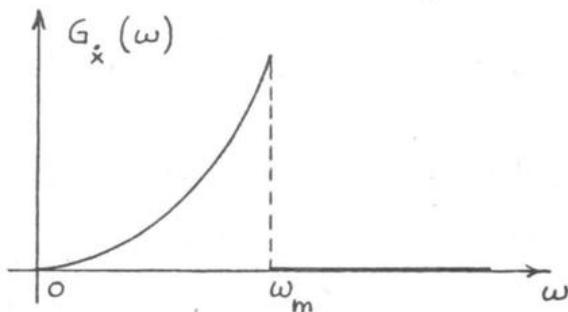
X

### ESERCIZIO N. 6

LA FUNZIONE  $x(t)$  DELL'ESERCIZIO PRECEDENTE ABBIA VALORE EFFICACE  $x_{eff} = \sqrt{P}$ . CALCOLARE IL VALORE EFFICACE  $\dot{x}_{eff}$  DELLA SUA DERIVATA  $\dot{x}(t)$ .



$$G_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 G(\omega) = \begin{cases} \omega^2 G_0, & \text{per } 0 \leq \omega \leq \omega_m \\ 0, & \text{per } \omega > \omega_m \end{cases}$$



$$\begin{aligned}\dot{x}_{eff}^2 &= \langle \dot{x}^2(t) \rangle = \int_0^\infty G_{\dot{x}}(\omega) d\omega = G_0 \int_0^{\omega_m} \omega^2 d\omega = \\ &= \frac{G_0 \omega_m^3}{3} = \frac{P \omega_m^2}{3} = \frac{x_{eff}^2 \omega_m^2}{3}.\end{aligned}$$

$$\dot{x}_{eff} = \frac{\omega_m}{\sqrt{3}} x_{eff}.$$

## 4.7 SERIE TEMPORALI A POTENZA FINITA.

CONSIDERIAMO LA SERIE TEMPORALE:

$$(4.7.1) \quad \{x_n\} = \{\dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots\}.$$

LA MEDIA TEMPORALE DELLA SERIE  $\{f(x_n)\}$  E' DEFINITA DAL LIMITE (QUANDO ESISTE):

$$(4.7.2) \quad \langle f(x_n) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N f(x_n).$$

IN PARTICOLARE LA MEDIA TEMPORALE DI  $\{x_n\}$  E' ESPRESSA DA:

$$(4.7.3) \quad \langle x_n \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N x_n.$$

DEFINIZIONE: LA SERIE TEMPORALE (4.7.1) SI DICE A POTENZA FINITA QUANDO ESISTE, FINITA E NON NULLA, LA MEDIA:

$$(4.7.4) \quad \langle x_n^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N x_n^2,$$

CHE E' DETTA POTENZA DELLA SERIE.

PER UNA SERIE TEMPORALE A POTENZA FINITA LA SOMMA

$$(4.7.5) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} x_n^2$$

E' INFINITA; TALE SERIE, IN GENERALE, NON E' TRASFORMABILE SECONDO FOURIER.

a.s. NO  
67  
poggi.

LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DI UNA SERIE TEMPORALE A POTENZA FINITA E' LA NUOVA SERIE TEMPORALE

$$(4.7.6) \quad \{C_k\}, \quad C_k = \langle x_n x_{n+k} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n+k}$$

LA SERIE (4.7.6) GODE DI PROPRIETA' ANALOGHE A QUELLE VISTE PER LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DI UNA FUNZIONE TEMPO-CONTINUA  $x(t)$  (SIA NEL CASO DI FUNZIONI AD ENERGIA FINITA CHE IN QUELLO DI FUNZIONI A POTENZA FINITA). IN PARTICOLARE:

$$(4.7.7) \quad C_0 = \langle x_n^2 \rangle,$$

$$(4.7.8) \quad C_{-k} = C_k,$$

$$(4.7.9) \quad |C_k| \leq C_0,$$

INOLTRE, SE CONSIDERIAMO SERIE TEMPORALI CON VALOR MEDIO NULLO E PARZIALMENTE COERENTI [CIOE' CON INTERVALLO DI COERENZA - CHE PUO' ESSERE DEFINITO IN MODO ANALOGO AL TEMPO DI COERENZA (4.3.7) - FINITO], ABBIAMO:

$$(4.7.10) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} C_k^2 < \infty,$$

$$(4.7.11) \quad \lim_{k \rightarrow \pm \infty} C_k = 0.$$

IN VIRTU' DELLA (4.7.10) LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE (4.7.6) AMMETTE TRASFORMATO A SECONDO FOURIER.

QUESTA TRASFORMATO, RICORDANDO LE (2.7.2) E (4.7.8), PUO' ESSERE SCRITTA NELLA FORMA:

$$(4.7.12) \quad \mathcal{F}[\{C_k\}] = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{-jk\omega T} = \\ = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega T.$$

ESSA E' DUNQUE UNA FUNZIONE REALE E PARI DI  $\omega$  (OLTRE CHE PERIODICA COME AVVIENE SEMPRE PER LA TRASFORMATO DI UNA SERIE TEMPORALE).

#### 4.8 SEGNALI PAM.

APPLICHIAMO ORA I CONCETTI INTRODOTTI PER LE FUNZIONI TEMPO-CONTINUE A POTENZA FINITA AD UNA IMPORTANTE CATEGORIA DI SEGNALI: I SEGNALI PAM, COSTITUITI DA UNA SUCCESSIONE DI IMPULSI MODULATI IN AMPIEZZA.

PER MOSTRARE L'ORIGINE DI TALI SEGNALI, CONSIDERIAMO LA SERIE TEMPORALE

$$(4.8.1) \quad \{a_n\} = \{\dots a_{-2} \ a_{-1} \ a_0 \ a_1 \ a_2 \dots\},$$

AVENTE VALOR MEDIO  $\langle a_n \rangle$  NON NECESSARIAMENTE NULLO, E POTENZA FINITA:

$$(4.8.2) \quad \langle a_n^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N a_n^2 < \infty.$$

LA (4.8.1), COME GIA' OSSERVATO NEL PARAGRAFO 2.7, PUO' ESSERE AD ESEMPIO UNA PARTICOLARE SERIE NUMERICA EMESSA DA UNA SORGENTE DI INFORMAZIONE CHE GENERI MESSAGGI IN CODICE UTILIZZANDO COME ELEMENTI DI CODICE VALORI NUMERICI, OPPURE PUO' ESSERE OTTENUTA PER CAMPIONAMENTO DI UNA FUNZIONE TEMPO-CONTINUA.

CONSIDERIAMO POI UN IMPULSO DI FORMA D'ONDA QUALSIASI, RAPPRESENTATO DALLA FUNZIONE  $g(t)$  CHE DEVE ESSERE AD ENERGIA FINITA. SIANO  $\Phi(\tau)$  E  $G(\omega)$  RISPECTIVAMENTE LA SUA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE E LA SUA TRASFORMATA SECONDO FOURIER, CHE, COME MOSTRA LA (4.2.16), SONO LEGATE FRA LORO DALLA RELAZIONE

$$(4.8.3) \quad \mathcal{F}[\phi(\tau)] = |G(\omega)|^2.$$

CIO' PREMESSO, IL SEGNALE

$$(4.8.4) \quad s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT)$$

RAPPRESENTA UNA SUCCESSIONE DI IMPULSI OTTENUTI DA  $g(t)$  MEDIANTE SUCCESSIVE TRASLAZIONI DI  $T$  E MOLTIPLICAZIONI PER I CORRISPONDENTI ELEMENTI DELLA SERIE (4.8.1): ESSO E' APPUNTO UN SEGNALE PAM (V. FIGURA 4.8.1 RELATIVA AL CASO IN CUI  $a_n$  SIA SUSCETTIBILE DEI VALORI 0,1).

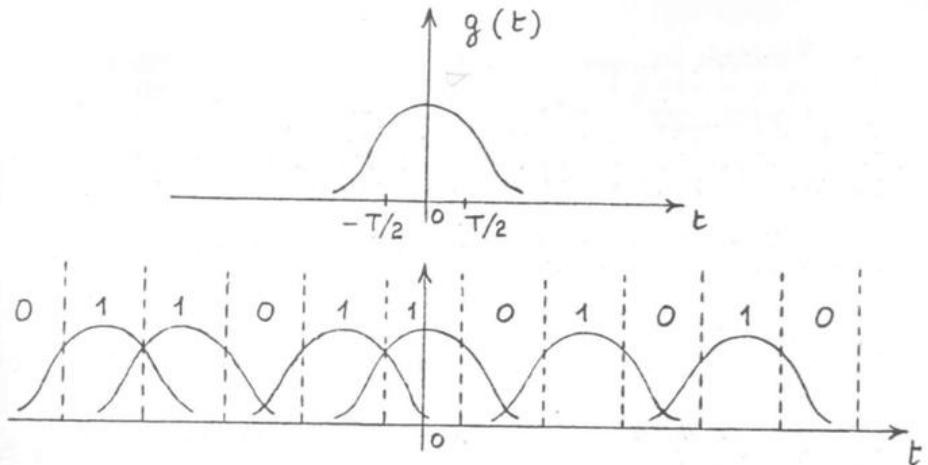


Fig. 4.8.1

COME ABBIAMO GIA' VISTO NEL PARAGRAFO 2.10, IL SEGNALE  $\alpha_n(t)$  (4.8.4) PUO' ESSERE ANCHE SCRITTO COME CONVOLUZIONE FRA LA SERIE TEMPORALE (4.8.1) E L'IMPULSO  $g(t)$ :

$$(4.8.5) \quad s(t) = \{a_n\} * g(t).$$

PER EFFETTUARE L'ANALISI ARMONICA GENERALIZZATA DELLA (4.8.4), INTRODUCIAMO LA SERIE TEMPORALE

$$(4.8.6) \quad \{x_n\}, \quad x_n = a_n - \langle a_n \rangle,$$

IL CUI VALOR MEDIO E' CERTAMENTE NULLO, ED ESPRIMIAMO  $s(t)$  COME SOMMA DI DUE COMPONENTI:

$$(4.8.7) \quad s(t) = s_m(t) + x(t)$$

OVE:

$$(4.8.8) \quad s_m(t) = \langle a_n \rangle \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-nT),$$

$$(4.8.9) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n g(t-nT).$$

QUANDO  $\langle a_n \rangle \neq 0$ , LA (4.8.8) RAPPRESENTA (A MENO DI UNA COSTANTE MOLTIPLICATIVA) LA RIPETIZIONE PERIODICA DI  $g(t)$  CON PERIODO  $T$  (V. PARAGRAFO 2.6).

LA FUNZIONE  $x(t)$  DEFINITA DALLA (4.8.9) E' A VALOR MEDIO NULLO. INFATTI:

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \int_{-NT}^{NT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n g(t-nT) dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-N}^N x_n g(t-nT) dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \sum_{n=-N}^N x_n \int_{-\infty}^{\infty} g(t-nT) dt, \end{aligned}$$

ED INDICANDO CON I L'INTENSITA' DELL'IMPULSO  $g(t)$ :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt,$$

RISULTA:

$$\langle x(t) \rangle = \frac{I}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N x_n = \frac{I}{T} \langle x_n \rangle = 0.$$

IN CONCLUSIONE, LA (4.8.7) ESPRIME IL SEGNALE PAM IN ESAME COME SOMMA DI DUE COMPONENTI:

- $s_m(t)$ , CHE E' UNA FUNZIONE PERIODICA, E CHE QUINDI PRESENTA UNO SPETTRO DI AMPIEZZA A RIGHE  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ;
- $x(t)$ , CHE E' UNA FUNZIONE A VALOR MEDIO NULLO E CHE, COME VEDREMO, AMMETTE CERTAMENTE UNO SPETTRO DI POTENZA DISTRIBUITO  $G_x(\omega)$  SE E' PARZIALMENTE COERENTE LA SERIE TEMPORALE (4.8.6).

PROCEDIAMO AL CALCOLO DEI DUE SPETTRI.

LO SPETTRO DI AMPIEZZA DELLA PRIMA COMPONENTE PUO' ESSERE OTTENUTO RICORDANDO CHE, IN VIRTU' DELLA (2.6.11), I COEFFICIENTI DELLA FORMA ESPONENZIALE DELLA SERIE DI FOURIER

$$(4.8.10) \quad s_m(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

SONO ESPRESI DA:

$$(4.8.11) \quad c_n = \frac{\langle a_n \rangle}{T} G\left(n \frac{2\pi}{T}\right).$$

IL RELATIVO SPETTRO A RIGHE (FIGURA 4.8.2) DISCENDE DALLA (2.2.12).

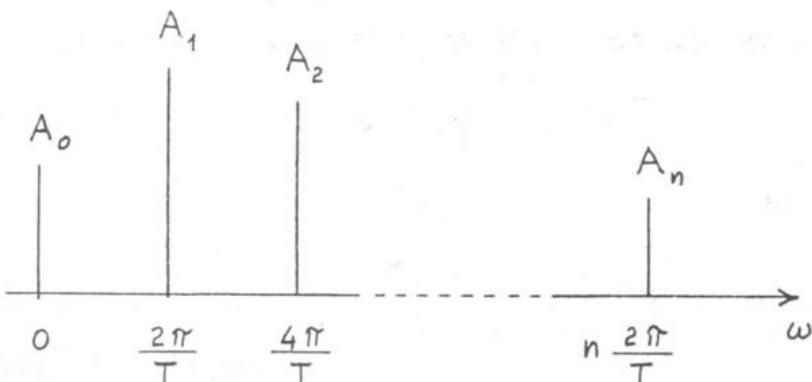


Fig. 4.8.2

PER QUANTO CONCERNE LO SPETTRO DI POTENZA  $G_x(\omega)$  DI  $x(t)$ , QUESTO PUO' ESSERE DETERMINATO TRASFORMANDO SECONDO FOURIER LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$(4.8.12) \quad C(\tau) = \langle x(t) x(t+\tau) \rangle$$

COME MOSTRATO DALLA (4.4.3):

$$(4.8.13) \quad G_x(\omega) = \frac{\Im[C(\tau)]}{\pi}.$$

PRESENTIAMO GLI SVILUPPI ANALITICI.

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n g(t - nT)$$

$$x(t+\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i g(t + \tau - iT)$$

$$C(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \int_{-NT}^{NT} \sum_{-\infty}^{\infty} x_n \sum_{-\infty}^{\infty} x_i \cdot$$

$$\cdot g(t - nT) g(t + \tau - iT) dt =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{-N}^N x_n \sum_{-\infty}^{\infty} x_i \cdot$$

$$\cdot g(t - nT) g(t + \tau - iT) dt =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \sum_{-N}^N x_n \sum_{-\infty}^{\infty} x_i \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t - nT) g(t + \tau - iT) dt.$$

ESSENDО

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - nT) g(t + \tau - iT) dt = \phi[\tau - (i-n)T],$$

RISULTA:

$$C(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \sum_{-N}^N x_n \sum_{-\infty}^{\infty} x_i \phi[\tau - (i-n)T].$$

PONENDO

$$i = n + k$$

ABBIAMO:

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \sum_{-N}^N \sum_{-\infty}^{\infty} x_n x_{n+k} \phi(\tau - kT) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \phi(\tau - kT) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^N x_n x_{n+k} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \phi(\tau - kT). \end{aligned}$$

RICORDANDO LA DEFINIZIONE (2.10.3) DI CONVOLUZIONE FRA UNA SERIE TEMPORALE ED UNA FUNZIONE TEMPO-CONTINUA, POSSIAMO ANCHE SCRIVERE:

$$(4.8.14) \quad C(\tau) = \frac{1}{T} \{c_k\} * \phi(\tau).$$

DA QUEST'ULTIMA RELAZIONE E DALLA (2.10.4) DISCENDE:

$$\mathcal{F}[C(\tau)] = \frac{1}{T} \mathcal{F}\{\{c_k\}\} \mathcal{F}[\phi(\tau)]$$

E, IN VIRTU' DELLE (4.7.12) E (4.8.3):

$$(4.8.15) \quad \frac{\mathcal{F}[C(\tau)]}{\mathcal{F}} = \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 \left[ C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\omega T \right].$$

D'ALTRA PARTE PER LA (4.8.6) POSSIAMO SCRIVERE:

$$C_K = \langle x_n x_{n+K} \rangle = \langle [a_n - \langle a_n \rangle][a_{n+K} - \langle a_n \rangle] \rangle = \\ = \langle a_n a_{n+K} \rangle - [\langle a_n \rangle]^2.$$

IN CONCLUSIONE ABBIAMO:

$$(4.8.16) \quad G_x(\omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 \left\{ \langle a_n^2 \rangle - [\langle a_n \rangle]^2 + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K \left[ \langle a_n a_{n+K} \rangle - [\langle a_n \rangle]^2 \right] \cos k\omega T \right\}.$$

LA (4.8.16) ESPRIME APPUNTO LO SPETTRO DI POTENZA DISTRIBUITO DELLA COMPONENTE A VALOR MEDIO NULLO E PARZIALMENTE COERENTE DEL SEGNALE PAM IN ESAME.

TALE SPETTRO DISTRIBUITO SI SOVRAPPONE ALLO SPETTRO A RIGHE DELLA COMPONENTE PERIODICA.

CAPITOLO V

PROCESSI STOCASTICI



PROCESSI ALEATORI

## 5.1 FUNZIONI ALEATORIE O PROCESSI STOCASTICI.

UNA FUNZIONE ALEATORIA  $x(t)$  E' UNA FUNZIONE DI CUI NON E' NOTA A PRIORI L'EVOLUZIONE NEL TEMPO.

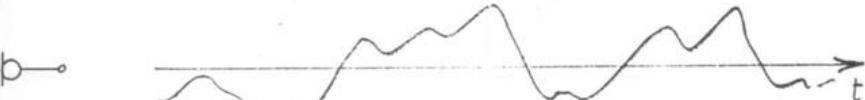
SOLAMENTE ALL'ATTO DI UN ESPERIMENTO SI MANIFESTA UN PARTICOLARE ANDAMENTO, APPARTENENTE AD UN INSIEME DI UN NUMERO, IN GENERALE INFINITO, DI POSSIBILI ANDAMENTI DELLA FUNZIONE STESSA CHE INDICHIAMO CON:

$$(5.1.1) \quad x^{(1)}(t), \quad x^{(2)}(t), \dots, \quad x^{(N)}(t), \dots .$$

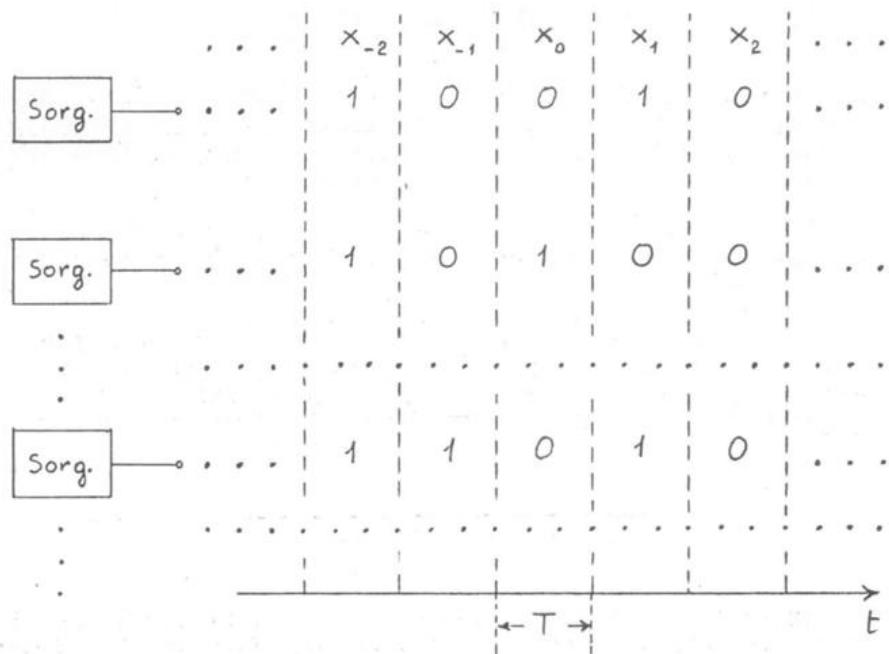
L'INSIEME DELLE FUNZIONI (5.1.1) VIENE CHIAMATO PROCESSO STOCASTICO (O CASUALE, OPPURE ALEATORIO) O ANCHE FUNZIONE ALEATORIA. ESSO VIENE INDICATO CON IL SIMBOLO  $x(t)$  [x GRASSETTO].

### ESEMPI DI FUNZIONI ALEATORIE

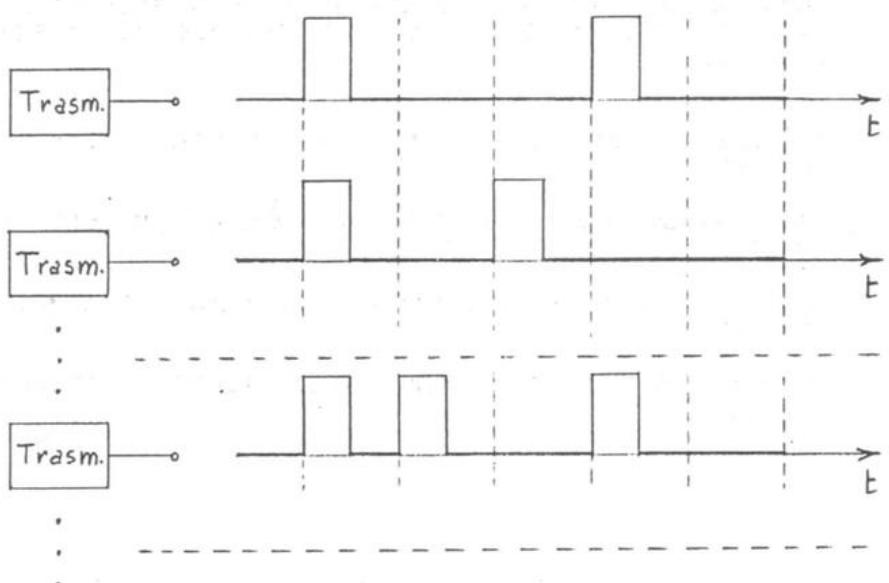
#### I - SEGNALE TELEFONICO:



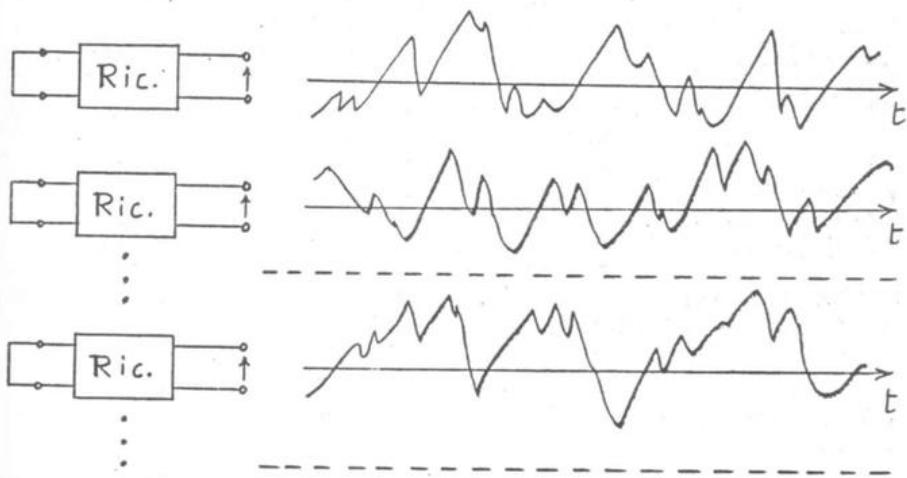
II - MESSAGGIO NUMERICO:



III - SEGNALE DATI:



IV - RUMORE:

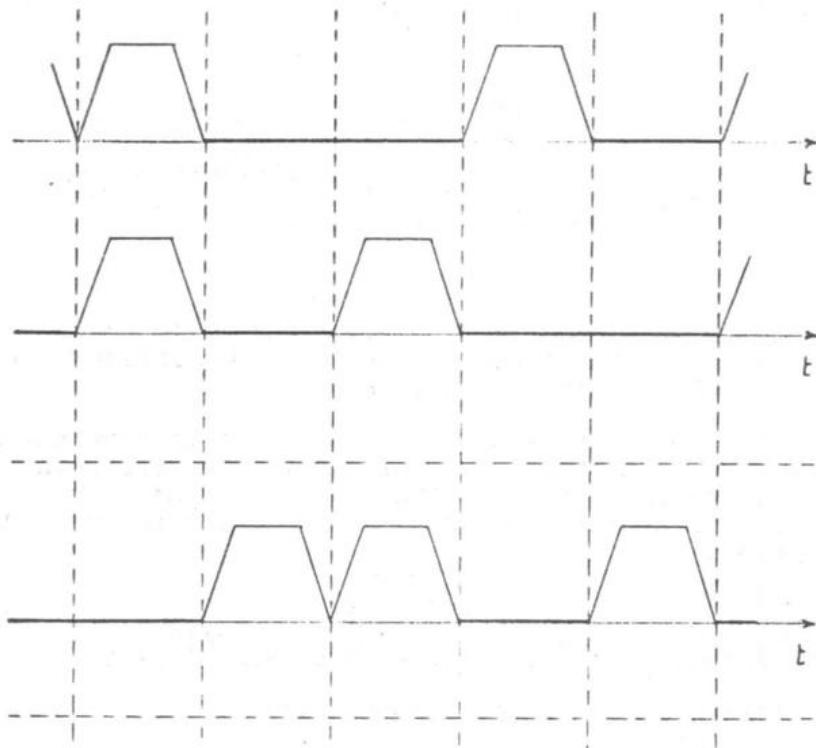


OGNI FUNZIONE  $x(t)$  APPARTENENTE AL PROCESSO VIENE CHIAMATA REALIZZAZIONE O FUNZIONE CAMPIONE DEL PROCESSO STESSO.

ANALOGAMENTE AL CASO DI FUNZIONI DETERMINISTICHE TRATTATO NEL CAPITOLO II, POSSONO ESSERE DISTINTI I SEGUENTI CASI:

- \* PROCESSI STOCASTICI CONTINUI NEI VALORI E TEMPO-CONTINUI;
- \* PROCESSI STOCASTICI DISCRETI NEI VALORI E TEMPO-CONTINUI;
- \* PROCESSI STOCASTICI CONTINUI NEI VALORI E TEMPO-DISCRETI;
- \* PROCESSI STOCASTICI DISCRETI NEI VALORI E TEMPO-DISCRETI.

A DIFFERENZA TUTTAVIA DEL CASO DETERMINISTICO, LA DISTINZIONE FRA PROCESSI STOCASTICI CONTINUI O DISCRETI NEI VALORI VIENE STABILITA OSSERVANDO I POSSIBILI VALORI DEL PROCESSO AD UN GENERICO ISTANTE  $t$  E NON L'EVOLUZIONE NEL TEMPO DELLE DIVERSE FUNZIONI CAMPIONE. PERTANTO, ANCHE SE GENERALMENTE LA NATURA DELLE FUNZIONI CAMPIONE COINCIDE CON QUELLA DEL PROCESSO STOCASTICO CORRISPONDENTE, CIO' NON E' SEMPRE VERO. SI PENSI AD ESEMPIO AD UN SEGNALE DATI ANALOGO A QUELLO ILLUSTRATO NELLA FIGURA PRECEDENTE, MA CON L'IMPULSO RETTANGOLARE SOSTITUITO DA UNA FORMA D'ONDA A ENERGIA FINITA, CONTINUA NEI VALORI: IL VINCOLO SULLA TEMPORIZZAZIONE IMPOSTO AD OGNI FUNZIONE CAMPIONE, CHE E' CONTINUA NEI VALORI, FA SI' CHE IN OGNI ISTANTE IL PROCESSO POSSA ASSUMERE SOLTANTO DUE VALORI DISTINTI (PROCESSO DISCRETO NEI VALORI - V. FIGURA SOTTOSTANTE).



LA DESCRIZIONE DI UN PROCESSO STOCASTICO NON PUO' CHE ESSERE DI TIPO STATISTICO.

ESSA SARA' PRESENTATA NEI PROSSIMI PARAGRAFI, INIZIANDO DAL CASO DI UNA FUNZIONE ALEATORIA CONTINUA NEI VALORI E TEMPO-CONTINUA. COME POI VEDREMO, E' IMMEDIATO INTRODURRE LE VARIANTI DA APPORTARE PER TRATTARE GLI ALTRI CASI.

## 5.2 DESCRIZIONE STATISTICA DI UN PROCESSO STOCASTICO CONTINUO NEI VALORI E TEMPO-CONTINUO.

CONSIDERIAMO UN PROCESSO STOCASTICO CONTINUO NEI VALORI E TEMPO-CONTINUO COME QUELLO RAPPRESENTATO NELLA FIGURA 5.2.1.

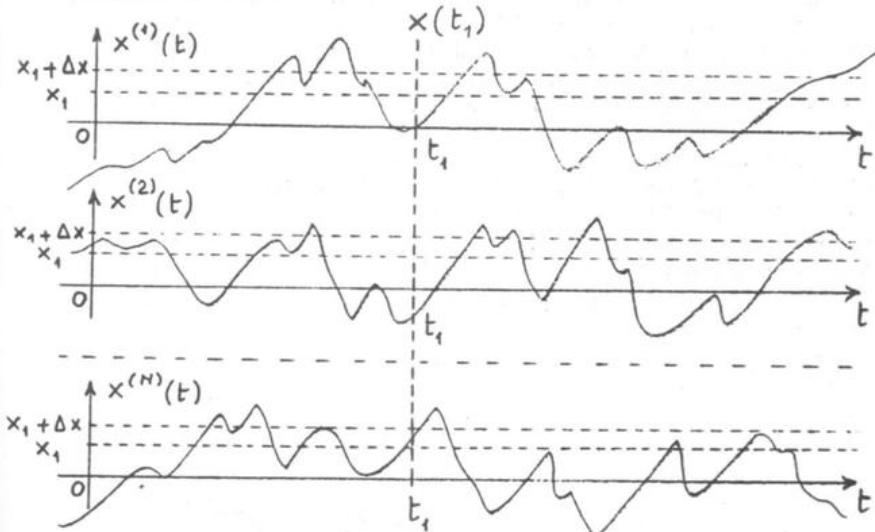


Fig. 5.2.1

LA DESCRIZIONE STATISTICA PIU' ELEMENTARE SI RIFERISCE AD UN SINGOLO ISTANTE DI OSSERVAZIONE  $t_1$ , ANZICHE' ALL'INTERO ASSE DEI TEMPI.

COME MOSTRA LA FIGURA 5.2.1, IN CORRISPONDENZA AD UN FISSATO ISTANTE DI OSSERVAZIONE  $t_1$ , IL VALORE  $x(t_1)$  ASSUNTO DALLA FUNZIONE ALEATORIA E' UNA VARIABILE ALEATORIA CONTINUA, DESCRIVIBILE MEDIANTE LA DENSITA' DI PROBABILITA'

$$p_1 = p_1(x_1, t_1) ,$$

DETTA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO ORDINE.

ESSA HA IL SEGUENTE SIGNIFICATO:

$$(5.2.1) \quad p_1 (x_1, t_1) dx_1 = \text{Prob} \left\{ x_1 \leq x(t_1) \leq x_1 + dx_1 \right\}$$

E QUINDI

$$(5.2.2) \quad \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} p_1 (x_1, t_1) dx_1 = \text{Prob} \left\{ x_1 \leq x(t_1) \leq x_1 + \Delta x \right\} .$$

POICHE' LA PROBABILITA' DI UN EVENTO E' UNA QUANTITA' NON NEGATIVA DEVE ESSERE:

$$(5.2.3) \quad p_1(x_1, t_1) \geq 0.$$

POICHE' INOLTRE LA VARIABILE ALEATORIA  $x(t_1)$  ASSUME CERTAMENTE UN VALORE COMPRESO FRA  $-\infty$  E  $+\infty$ , RISULTA:

$$(5.2.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1, t_1) dx_1 = 1.$$

DA UN PUNTO DI VISTA OPERATIVO OSSERVIAMO CHE DISPONENDO DI UN NUMERO N SUFFICIENTEMENTE ELEVATO DI FUNZIONI CAMPIONE DEL PROCESSO, POSSIAMO SCRIVERE, NEL SENSO BEN NOTO DEL CALCOLO DELLE PROBABILITA',

$$(5.2.5) \quad \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} p_1(x_1, t_1) dx_1 \simeq \frac{\Delta N}{N},$$

AVENDO INDICATO CON  $\Delta N$  IL NUMERO DI FUNZIONI CHE, ALL'ISTANTE  $t_1$ , ASSUMONO UN VALORE COMPRESO FRA  $x_1$  E  $x_1 + \Delta x$ .

SE POI  $\Delta x$  E' ABBASTANZA PICCOLO, VALE L'APPROXIMAZIONE

$$(5.2.6) \quad \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} p_1(x_1, t_1) dx_1 \simeq p_1(x_1, t_1) \Delta x$$

E QUINDI:

$$(5.2.7) \quad p_1(x_1, t_1) \simeq \frac{\Delta N}{N \Delta x}.$$

TALE RELAZIONE, UNITAMENTE ALLA FIGURA 5.2.1, MOSTRA COME SI POSSA DETERMINARE APPROSSIMATIVAMENTE LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO ORDINE

$$p_1 = p_1(x_1, t_1)$$

DISPONENDO DI UN NUMERO ADEGUATO DI FUNZIONI CAMPIONE.

IN GENERALE TALE DETERMINAZIONE, EFFETTUATA IN INSTANTI  $t_1$  DIVERSI, CONDUCE A RISULTATI DIVERSI:  $p_1(x_1, t_1)$  DIPENDE DUNQUE DALL'ISTANTE  $t_1$ .

LA DENSITA' DI PROBABILITA'  $p_1(x, t)$  FORNISCE UN'INFORMAZIONE DEL TUTTO INSUFFICIENTE, IN GENERALE, A DESCRIVERE IL PROCESSO. ESSA INFATTI NON CONSENTE DI CONSIDERARE LA DIPENDENZA CHE GENERALMENTE SUSSISTE FRA I VALORI ASSUNTI SUCCESSIVAMENTE NEL TEMPO DA CIASCUNA FUNZIONE  $x(t)$  DEL PROCESSO STOCASTICO.

TALE DESCRIZIONE PUO' ESSERE OTTENUTA ANALIZZANDO IL PROCESSO IN UNA SUCCESSIONE DI ISTANTI E INTRODUCENDO DENSITA' DI PROBABILITA' DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO.

IL CASO PIU' SEMPLICE CONSISTE NELLA CONSIDERAZIONE DI DUE INSTANTI DI OSSERVAZIONE  $t_1$  E  $t_2$  DIVERSI, AI QUALI CORRISPONDONO LE DUE VARIABILI ALEATORIE  $x(t_1)$  E  $x(t_2)$  (FIGURA 5.2.2), DESCritte DALLA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL SECONDO ORDINE

$$p_2 = p_2(x_1, t_1; x_2, t_2).$$

TALE DENSITA' HA IL SEGUENTE SIGNIFICATO:

$$(5.2.8) \quad p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 = \text{Prob} \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq x(t_1) \leq x_1 + dx_1 \\ x_2 \leq x(t_2) \leq x_2 + dx_2 \end{array} \right\}$$

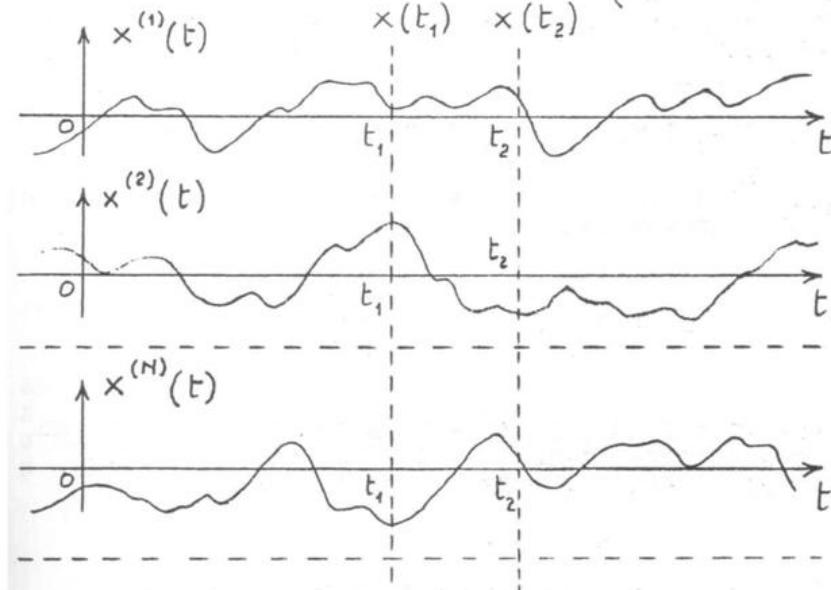


Fig. 5.2.2

SI TRATTA DI UNA DENSITA' DI PROBABILITA' COMPOSTA (O CONGIUNTA) DELLE DUE VARIABILI ALEATORIE  $x(t_1)$  E  $x(t_2)$  PER LA QUALE VALGONO LE RELAZIONI:

$$(5.2.9) \quad p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) \geq 0 ;$$

$$(5.2.10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 = 1 .$$

DALLA DENSITA'  $p_2$  E' POSSIBILE DEDURRE  $p_1$  MEDIANTE LA RELAZIONE:

$$(5.2.11) \quad \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2 \right\} dx_1 = \\ = \text{Prob} \left\{ x_1 \leq x(t_1) \leq x_1 + dx_1 \right\} = \\ = p_1(x_1, t_1) dx_1 .$$

RISULTA CIOE':

$$(5.2.12) \quad p_1(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2 .$$

INTRODUCIAMO ORA LA DENSITA' DI PROBABILITA'  $P$  DI  $x(t_2)$  CONDIZIONATA DALLA CONOSCENZA DI  $x(t_1)$ :

$$(5.2.13) \quad p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = p_1(x_1, t_1) P(x_2, t_2/x_1, t_1) .$$

DALLA CONOSCENZA DI  $p_2$  SI PUO' DUNQUE RISALIRE MEDIANTE LE (5.2.12) E (5.2.13) ALLA FUNZIONE  $P$  E QUINDI EFFETTUARE PREVISIONI STATISTICHE PER L'ISTANTE  $t_2$  QUANDO E' NOTO IL VALORE DELLA VARIABILE ALEATORIA  $x$  ALL'ISTANTE  $t_1$ .

X

VALE LA PENA OSSERVARE CHE SE E SOLO SE  $x(t_1)$  E  $x(t_2)$  SONO VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI RISULTA:

$$(5.2.14) \quad p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = p_1(x_1, t_1)p_1(x_2, t_2)$$

E QUINDI

$$P(x_2, t_2/x_1, t_1) = p_1(x_2, t_2).$$

UNA DESCRIZIONE STATISTICA PIU' DETTAGLIATA DEL PROCESSO ALEATORIO SI CONSEGUE PASSANDO A CONSIDERARE DENSITA' DI PROBABILITA' DI ORDINE SUPERIORE AL SECONDO.

CON RIFERIMENTO AL GENERICO ORDINE  $n$ , FISSIAMO  $n$  INSTANTI DI OSSERVAZIONE  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , IN CORRISPONDENZA AI QUALI VENGONO DEFINITE LE  $n$  VARIABILI ALEATORIE

$$x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n).$$

TALE  $n$ -PLA DI VARIABILI ALEATORIE E' DESCRIPTA DALLA DENSITA' DI PROBABILITA' COMPOSTA (DENSITA' DI PROBABILITA' DI ORDINE  $n$ ):

$$p_n = p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n).$$

IL SIGNIFICATO DI QUESTA DENSITA' E' IL SEGUENTE:

$$(5.2.15) \quad p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \text{Prob} \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq x(t_1) \leq x_1 + dx_1 \\ x_2 \leq x(t_2) \leq x_2 + dx_2 \\ \dots \\ x_n \leq x(t_n) \leq x_n + dx_n \end{array} \right\}$$

VALGONO PER LA DENSITA' DI PROBABILITA' DI ORDINE n CONSIDERAZIONI DEL TUTTO ANALOGHE A QUELLE PRECEDENTEMENTE SVOLTE PER n = 2.

IN PARTICOLARE, NOTA LA DENSITA' DI PROBABILITA' DI ORDINE n, RISULTANO DETERMinate TUTTE QUELLE DI ORDINE INFERIORE:

$$(5.2.16) \quad p_{n-1} = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_n,$$

$$(5.2.17) \quad p_{n-2} = \iint_{-\infty - \infty}^{\infty \infty} P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_{n-1} dx_n.$$

### 5.3 VALORI MEDI.

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE ALEATORIA  $x(t)$  CONTINUA NEI VALORI E TEMPO-CONTINUA. CON RIFERIMENTO AD ESSA POSSIAMO DEFINIRE DUE TIPI DI MEDIE :

- \* LE MEDIE STATISTICHE O DI INSIEME ;
- \* LE MEDIE TEMPORALI .

TALI MEDIE SONO CONCETTUALMENTE DIVERSE: LE PRIME INFATTI POSSONO ESSERE CALCOLATE A PRIORI UNA VOLTA NOTE LE NECESSARIE DENSITA' DI PROBABILITA'; LE SECONDE INVECE SONO VALUTABILI SOLTANTO A POSTERIORI SU UNA DETERMINATA FUNZIONE CAMPIONE DELL'INSIEME.

AD ESEMPIO, IL VALORE MEDIO STATISTICO DEL PROCESSO  $x(t)$  E' IL VALORE MEDIO DELLA VARIABILE ALEATORIA  $x(t)$  DEFINITA ALL'ISTANTE DI OSSERVAZIONE  $t$  ED E' ESPRESO DA:

$$(5.3.1) \quad E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x, t) dx.$$

ESSO E' QUINDI DETERMINABILE A PRIORI NOTA LA FUNZIONE  $p_1$  ED E', COME  $p_1$ , IN GENERALE FUNZIONE DETERMINISTICA DI  $t$ .

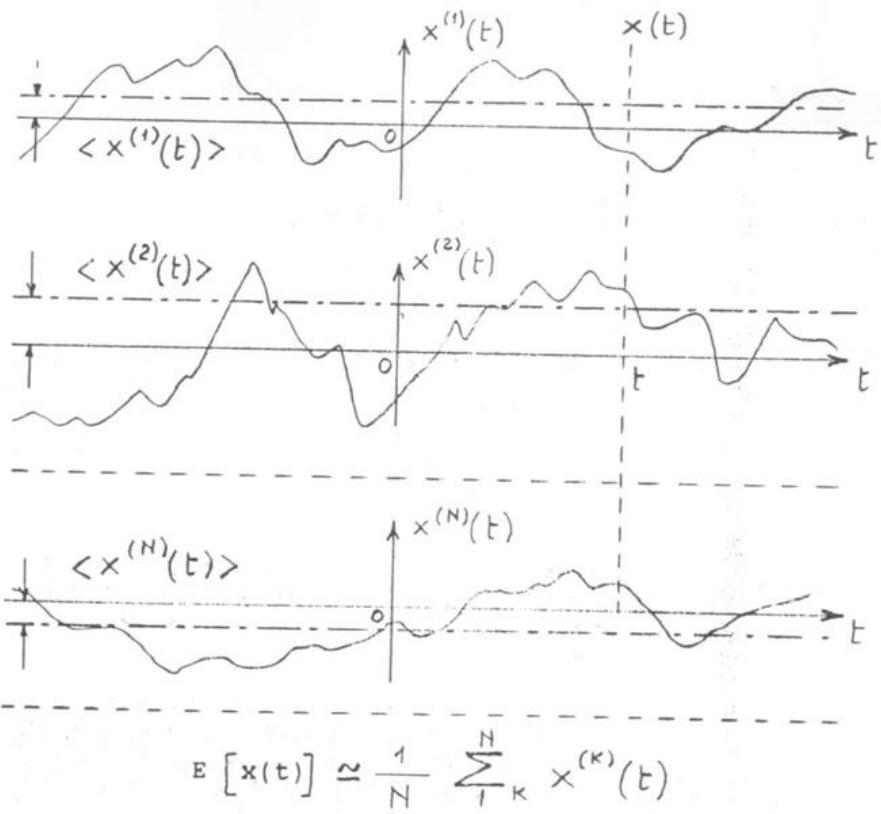
LA MEDIA TEMPORALE CORRISPONDENTE AL VALORE MEDIO STATISTICO APPENA CONSIDERATO E' DEFINITA, COME ABBIAMO VISTO NEL CAPITOLO IV, MEDIANTE LA RELAZIONE:

$$(5.3.2) \quad \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt,$$

OVE LA FUNZIONE INTEGRANDA  $x(t)$  E' UNO DEI POSSIBILI CAMPIONI DEL PROCESSO  $x(t)$ .

LA VALUTAZIONE DI  $\langle x(t) \rangle$  PUO' ESSERE FATTA SOLO A POSTERIORI, NOTO L'ANDAMENTO DELLA FUNZIONE CAMPIONE  $x(t)$  SU UN INTERVALLO DI OSSERVAZIONE SUFFICIENTEMENTE AMPIO. AL VARIARE DI TALE FUNZIONE FRA QUELLE DELL'INSIEME, CAMBIA IN GENERALE IL VALORE MEDIO  $\langle x(t) \rangle$ , CHE RISULTA PERTANTO UNA VARIABILE ALEATORIA.

APPARE DUNQUE CHIARAMENTE LA PROFONDA DIFFERENZA FRA I DUE TIPI DI MEDIE. ESSA E' ULTERIORMENTE EVIDENZIATA NELLA FIGURA 5.3.1, OVE SONO SINTETIZZATI I DUE DIVERSI METODI PER VALUTARLE.



$$E[x(t)] \simeq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x^{(k)}(t)$$

$\langle x(t) \rangle$  E' L'ORDINATA MEDIA DEL GRAFICO DI UNA GENERICA FUNZIONE

Fig. 5.3.1

ALTRI MEDIE STATISTICHE DI PARTICOLARE INTERESSE RIGUARDANO FUNZIONI  $f[x(t)]$  DEL PROCESSO  $x(t)$  O ANCHE FUNZIONI  $f[x(t), x(t+\tau)]$  DELLO STESSO PROCESSO IN DUE ISTANTI DIVERSI  $t$  E  $t+\tau$ :

$$(5.3.3) \quad E \left\{ f[x(t)] \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_1(x, t) dx;$$

$$(5.3.4) \quad E \left\{ f[x(t), x(t+\tau)] \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) p_2(x_1, t; x_2, t+\tau) dx_1 dx_2 .$$

X

IN PARTICOLARE:

$$(5.3.5) \quad E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x, t) dx,$$

$$(5.3.6) \quad E[x(t)x(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, t; x_2, t+\tau) dx_1 dx_2 = \\ = R(t, \tau).$$

LA (5.3.5) DEFINISCE IL VALORE QUADRATICO MEDIO DEL PROCESSO  $x(t)$  ALL'ISTANTE  $t$ . ESSO E' IN GENERALE FUNZIONE DETERMINISTICA DEL TEMPO ED E' VALUTABILE A PRIORI NOTA LA FUNZIONE  $p_1(x, t)$ .

LA (5.3.6) DEFINISCE IL VALORE MEDIO STATISTICO DEL PRODOTTO  $x(t) x(t+\tau)$ , CHE IN GENERALE, COME ABBIAMO INDICATO, E' FUNZIONE DETERMINISTICA DI  $t$  E DI  $\tau$ . TALE FUNZIONE,  $R(t, \tau)$ , PUO' ESSERE VALUTATA A PRIORI NOTA LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL SECONDO ORDINE

$$p_2 = p_2(x_1, t; x_2, t+\tau).$$

OSSERVIAMO CHE DALLA CONOSCENZA DEL VALORE QUADRATICO MEDIO E DEL VALORE MEDIO STATISTICO DI  $x(t)$  SI DEDUCE LA VARIANZA  $\sigma^2$  (IN GENERALE FUNZIONE DI  $t$ ) DEFINITA DA:

$$(5.3.7) \quad \sigma^2 = E \left\{ [x(t) - E[x(t)]]^2 \right\} = \\ = E[x^2(t)] - E^2[x(t)].$$

DEFINIAMO ANCHE LA SEGUENTE FUNZIONE:

$$(5.3.8) \quad R_c(t, \tau) = E \left\{ [x(t) - E[x(t)]][x(t+\tau) - E[x(t+\tau)]] \right\} = \\ = R(t, \tau) - E[x(t)] E[x(t+\tau)].$$

LE MEDIE TEMPORALI CORRISPONDENTI ALLE (5.3.5),  
(5.3.6) E (5.3.8) SONO RISPETTIVAMENTE:

$$(5.3.9) \quad \langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = P,$$

$$(5.3.10) \quad \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt = C(\tau),$$

$$(5.3.11) \quad \langle [x(t) - \langle x(t) \rangle][x(t+\tau) - \langle x(t) \rangle] \rangle =$$

$$= C(\tau) - [\langle x(t) \rangle]^2 =$$

$$= V(\tau).$$

RICORDANDO QUANTO DETTO NEL CAPITOLO IV, LA (5.3.9) ESPRIME LA POTENZA P DEL CAMPIONE CONSIDERATO, LA (5.3.10) LA SUA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE C( $\tau$ ) E, INFINE, LA (5.3.11) QUELLA DI AUTOCOVARIANZA V( $\tau$ ).

TALI GRANDEZZE POSSONO ESSERE VALUTATE SOLO A POSTERIORI, NOTA UNA REALIZZAZIONE DEL PROCESSO: IN GENERALE P = C(0) E' UNA VARIABILE ALEATORIA, MENTRE C( $\tau$ ) E V( $\tau$ ) SONO FUNZIONI ALEATORIE.

RISULTA PERTANTO ULTERIORMENTE CONFIRMATA LA PROFONDA DIFFERENZA ESISTENTE IN GENERALE FRA MEDIE STATISTICHE E MEDIE TEMPORALI.

ESISTE TUTTAVIA UN'AMPIA CATEGORIA DI PROCESSI (PROCESSI ERGODICI) IN CUI SI HA COINCIDENZA FRA I VALORI CORRISPONDENTI DELLE DUE MEDIE IN QUESTIONE E, PIU' IN GENERALE, FRA UNA QUALUNQUE VALUTAZIONE FATTA A PRIORI SULLA BASE DELLA DESCRIZIONE STATISTICA DEL PROCESSO E LA CORRISPONDENTE VALUTAZIONE FATTA A POSTERIORI SULLA REALIZZAZIONE DEL PROCESSO STESSO OSSERVATA ALL'ATTO DI UN ESPERIMENTO.

#### 5.4 PROCESSI STAZIONARI. PROCESSI ERGODICI.

PER INTRODURRE I PROCESSI ERGODICI, DIAMO DAPPRIMA IL CONCETTO DI STAZIONARIETA'.

CONSIDERIAMO ALLO SCOPO LA DENSITA' DI PROBABILITA' DI ORDINE n

$$p_n = p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) .$$

PONIAMO:

$$t_1 = t$$

$$t_2 = t + \tau_1$$

.....

$$t_n = t + \tau_{n-1} ,$$

E SCRIVIAMO QUINDI:

$$p_n = p_n(x_1, t; x_2, t+\tau_1; \dots; x_n, t+\tau_{n-1}) .$$

DEFINIZIONE: UN PROCESSO STOCASTICO E' DETTO STAZIONARIO QUANDO  $p_n$  DIPENDE SOLO DA  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$  E NON DA  $t$ , QUALUNQUE SIA n; IN ALTRE PAROLE, QUANDO  $p_n$ , PER OGNI n, E' INVARIANTE RISPETTO AD UNA TRASLAZIONE RIGIDA DEGLI ISTANTI DI OSSERVAZIONE.

UNA DEFINIZIONE EQUIVALENTE DI STAZIONARIETA' E' LA SEGUENTE: UN PROCESSO  $x(t)$  E' DETTO STAZIONARIO QUANDO I PROCESSI

$$x(t) \quad \text{E} \quad x(t + t_0)$$

HANNO LA MEDESIMA DESCRIZIONE STATISTICA, E QUINDI SONO IL MEDESIMO PROCESSO, QUALUNQUE SIA  $t_0$ .

IN PARTICOLARE, QUANDO UN PROCESSO E' STAZIONARIO,  
LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO ORDINE NON DIPEN-  
DE DALL'ISTANTE DI OSSERVAZIONE  $t$ :

$$p_1 = p_1(x).$$

QUINDI IL VALORE MEDIO STATISTICO

$$(5.4.1) \quad E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) dx ,$$

IL VALORE QUADRATICO MEDIO

$$(5.4.2) \quad E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x) dx ,$$

E LA VARIANZA

$$(5.4.3) \quad \sigma^2 = E[x^2] - E^2[x]$$

SONO INDIPENDENTI DA  $t$ .

INOLTRE LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL SECONDO  
ORDINE NON DIPENDE SEPARATAMENTE DAI DUE Istanti DI  
OSSERVAZIONE  $t_1$  E  $t_2$ , MA DALL'INTERVALLO  $\tau = t_2 - t_1$   
ESISTENTE FRA ESSI:

$$p_2 = p_2(x_1, x_2; \tau)$$

E QUINDI POSSIAMO SCRIVERE LE MEDIE STATISTICHE (5.3.6)  
E (5.3.8) NELLA FORMA:

$$(5.4.4) \quad E[x(t)x(t+\tau)] = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = \\ = R(\tau) ,$$

$$(5.4.5) \quad R_\alpha(\tau) = R(\tau) - E^2[x] .$$

UN PROCESSO SI DICE STAZIONARIO DI ORDINE  $n$  QUANDO LA PRECEDENTE PROPRIETA' DI INVARIANZA E' VALIDA FINO ALLA DENSITA' DI PROBABILITA' DI ORDINE  $n$ , MA NON PER QUELLE DI ORDINE SUPERIORE.

UN PROCESSO SI DICE STAZIONARIO IN SENSO LATO SE IL VALORE MEDIO  $E[x(t)]$  E' INDIPENDENTE DA  $t$  E  $R(t, \tau)$  E' UNA FUNZIONE SOLO DI  $\tau$ , CHE INDICHEREMO ANCORA CON  $R(\tau)$ .

DEFINIZIONE: UN PROCESSO STAZIONARIO SI DICE A MEMORIA FINITA QUANDO ESISTE UN VALORE FINITO  $\tau_m$  TALE CHE, PUR AVENDO OSSERVATO IL PROCESSO FINO ALL'ISTANTE  $t$ , NON E' POSSIBILE ALCUNA PREVISIONE STATISTICA CHE TENGA CONTO DI TALE CONOSCENZA A PARTIRE DALL'ISTANTE  $t+\tau_m$ . IL TEMPO  $\tau_m$  E' DETTO DURATA DELLA MEMORIA.

I PROCESSI ERGODICI COSTITUISCONO UN SOTTOINSIEME DI QUELLO DEI PROCESSI STAZIONARI.

DEFINIZIONE: UN PROCESSO E' DETTO ERGODICO QUANDO OGNI FUNZIONE CAMPIONE E' CARATTERISTICA, CON PROBABILITA' 1, DEL PROCESSO STESSO.

CIO' SIGNIFICA CHE IL RISULTATO DI UN QUALUNQUE RILIEVO STATISTICO EFFETTUATO SU UNA GENERICA FUNZIONE DELL'INSIEME COINCIDE, CON PROBABILITA' 1, CON QUELLO DELL'ANALOGO RILIEVO EFFETTUATO SULL'INSIEME E QUINDI NON DIPENDE DALLA PARTICOLARE FUNZIONE CONSIDERATA.

DALLA DEFINIZIONE DISCENDE CHE CONDIZIONE NECESSARIA PERCHE' UN PROCESSO SIA ERGODICO E' CHE ESSO RISULTI STAZIONARIO.

SI PUO' DEMONSTRARE CHE CONDIZIONE SUFFICIENTE PERCHE' UN PROCESSO STAZIONARIO SIA ERGODICO E' CHE ESSO SIA A MEMORIA FINITA.

DALLA DEFINIZIONE DISCENDE, IN PARTICOLARE, CHE IN UN PROCESSO ERGODICO UNA QUALSIASI MEDIA STATISTICA E' UGUALE, CON PROBABILITA' 1, ALLA CORRISPONDENTE MEDIA TEMPORALE.

I RILIEVI IN QUESTIONE NON SONO NECESSARIAMENTE LIMITATI ALLA VALUTAZIONE DI VALORI MEDI. AD ESEMPIO LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO ORDINE PUO' ESSERE DETERMINATA SIA CON UN RILIEVO SULL'INSIEME, COME MOSTRATO DALLA FIGURA 5.2.1 E DALLA RELAZIONE (5.2.7), SIA CON UN RILIEVO SU UN SINGOLO CAMPIONE DEL PROCESSO COME MOSTRATO IN FIGURA 5.4.1.

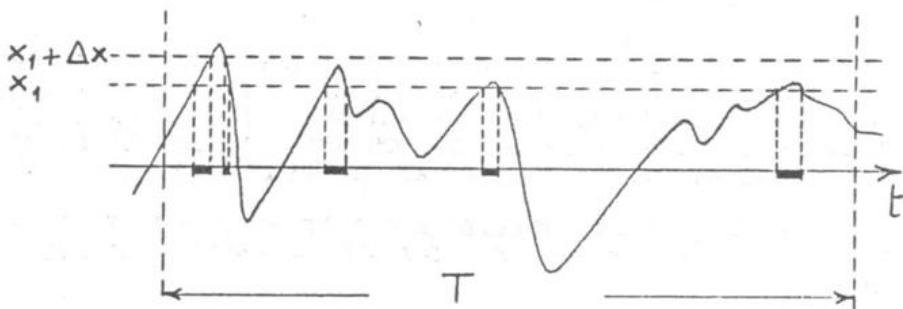


Fig. 5.4.1

SE  $T$  E' LA DURATA DELL'OSSERVAZIONE E  $\Delta T$  LA SOMMA DEGLI INTERVALLI DI TEMPO IN CUI E' SODDISFATTA LA RELAZIONE:

$$(5.4.6) \quad x_1 \leq x(t) \leq x_1 + \Delta x ,$$

POSSIAMO INFATTI SCRIVERE, PER  $T$  SUFFICIENTEMENTE GRANDE E  $\Delta x$  SUFFICIENTEMENTE PICCOLO:

$$(5.4.7) \quad p_1(x_1) \simeq \frac{\Delta T}{T \Delta x} .$$

RITORNANDO AI VALORI MEDI, FACCIAMO RIFERIMENTO ALLE MEDIE PRECEDENTEMENTE CONSIDERATE E SCRIVIAMO:

$$(5.4.8) \quad E[x(t)] = \langle x(t) \rangle ,$$

$$(5.4.9) \quad E[x^2(t)] = \langle x^2(t) \rangle = P ,$$

$$(5.4.10) \quad E[x(t)x(t+\tau)] = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = C(\tau)$$

$$(5.4.11) \quad \begin{aligned} E\{[x(t)-E(x)][x(t+\tau)-E(x)]\} &= \\ &= \langle [x(t)-\langle x \rangle][x(t+\tau)-\langle x \rangle] \rangle = V(\tau) \end{aligned}$$

DUNQUE TUTTE LE REALIZZAZIONI DI UN PROCESSO ERGODICO HANNO LO STESSO VALOR MEDIO TEMPORALE, LA STESSA POTENZA MEDIA, LE STESSE FUNZIONI DI AUTOCORRELAZIONE E DI AUTOCOVARIANZA.

POSSIAMO PERCIO' RIFERIRE QUESTE GRANDEZZE AL PROCESSO E PARLARE DI VALOR MEDIO, POTENZA, FUNZIONI DI AUTOCORRELAZIONE E DI AUTOCOVARIANZA DEL PROCESSO.

PER GLI STESSI MOTIVI ESPOSTI NEL CAPITOLO PRECEDENTE, POSSIAMO CONSIDERARE PROCESSI A VALOR MEDIO NULLO SENZA LEDERE LA GENERALITA'. IN TAL CASO LA VARIANZA SI IDENTIFICA CON LA POTENZA, LA FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA CON QUELLA DI AUTOCORRELAZIONE.

PER ESERCIZIO, UTILIZZANDO L'ESPRESSONE DI  $C(\tau)$  COME MEDIA STATISTICA, SI RICAVINO NUOVAMENTE LE RELAZIONI:

$$C(0) = P ,$$

$$C(-\tau) = C(\tau) ,$$

$$|C(\tau)| \leq C(0) .$$

OSSERVIAMO POI CHE QUANDO, FISSATI GLI ISTANTI DI OSSERVAZIONE  $t$  E  $t+\tau$ , LE VARIABILI ALEATORIE  $x(t)$  E  $x(t+\tau)$  RISULTANO STATISTICAMENTE INDIPENDENTI (IL CHE E' CERTAMENTE VERO SE  $|\tau|$  SUPERA LA DURATA DELLA MEMORIA DEL PROCESSO) LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE SI ANNULLA. INFATTI:

$$(5.4.12) \quad C(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = E[x(t)]E[x(t+\tau)] = \\ = \{E[x]\}^2 = 0 .$$

SI NOTI CHE IN GENERALE NON VALE IL VICEVERSA; CIOE' LA CONDIZIONE  $C(\tau) = 0$  NON IMPLICA NECESSARIAMENTE CHE LE VARIABILI ALEATORIE  $x(t)$  E  $x(t+\tau)$  SIANO STATISTICAMENTE INDIPENDENTI.

POICHE' TUTTI I CAMPIONI DI UN PROCESSO ERGODICO HANNO LA STESSA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE  $C(\tau)$ , ESSI HANNO PURE LA STESSA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

$$(5.4.13) \quad G(\omega) = \frac{\frac{1}{T} [C(\tau)]}{\pi}$$

POSSIAMO PERCIO' PARLARE DI DENSITA' SPETTRALE (O SPETTRO) DI POTENZA DEL PROCESSO.

UN'ULTIMA OSSERVAZIONE: QUANDO INTERESSA EFFETTUARE VALUTAZIONI ENERGETICHE SU UN PROCESSO ERGODICO, LA DETERMINAZIONE DELLA POTENZA RICHIEDE LA CONOSCENZA DELLA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO ORDINE, MENTRE QUELLA DELLO SPETTRO DI POTENZA LA DENSITA' DEL SECONDO ORDINE.

IN CONCLUSIONE, PER AVERE LA DESCRIZIONE PIU' COMPLETA DI UNA FUNZIONE ALEATORIA DAL PUNTO DI VISTA ENERGETICO, BASTA CONOSCERE LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL SECONDO ORDINE.

## 5.5 TRASFORMAZIONI LINEARI DI PROCESSI STOCASTICI.

FACENDO SUBIRE A TUTTI I CAMPIONI DI UN PROCESSO STOCASTICO  $x(t)$  UNA TRASFORMAZIONE LINEARE TEMPO-INVARIANTE RAPPRESENTATA DALLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H(\omega)$  SI OTTIENE UN NUOVO PROCESSO STOCASTICO  $y(t)$  (FIGURA 5.5.1).

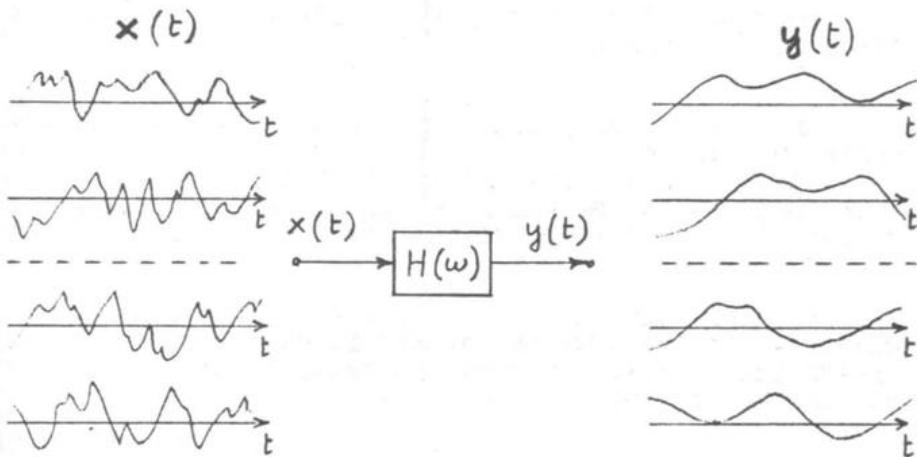


Fig. 5.5.1

VALGONO LE SEGUENTI PROPOSIZIONI:

- \* SE IL PROCESSO  $x(t)$  E' STAZIONARIO, ALTRETTANTO PUO' DIRSI PER IL PROCESSO  $y(t)$ .
- \* SE IL PROCESSO  $x(t)$  E' ERGODICO, ALTRETTANTO PUO' DIRSI PER IL PROCESSO  $y(t)$ .

NEL CASO ERGODICO RICORDIAMO LE SEGUENTI RELAZIONI, CON OVVIO SIGNIFICATO DEI SIMBOLI:

$$(5.5.1) \quad C_y(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) * C(\tau),$$

$$(5.5.2) \quad \mathcal{F}[C_y(\tau)] = |H(\omega)|^2 \mathcal{F}[C(\tau)],$$

$$(5.5.3) \quad G_y(\omega) = |H(\omega)|^2 G(\omega).$$

PER ESERCIZIO, SI RICAVI LA (5.5.1) PONENDO NELLA DEMOSTRAZIONE DI PAGINA 4.17 LE MEDIE STATISTICHE IN LUOGO DI QUELLE TEMPORALI.

## 5.6 PROCESSI GAUSSIANI.

UN PROCESSO STOCASTICO E' GAUSSIANO QUANDO E' GAUSSIANA LA DENSITA' DI PROBABILITA' DI ORDINE n QUALESIANAMENTE SIA n.

CONSIDERIAMO PROCESSI ERGODICI (E QUINDI, IN PARTICOLARE, STAZIONARI). SENZA PERDITA DI GENERALITA', PER LA RAGIONE PIU' VOLTE ESPOSTA, CONSIDERIAMO INOLTRE PROCESSI A VALOR MEDIO NULLO.

SIA  $C(\tau)$  LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE,  $\sigma^2 = C(0)$  LA VARIANZA E  $c(\tau) = C(\tau)/\sigma^2$  LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE NORMALIZZATA.

LA DENSITA' DI PROBABILITA' DI ORDINE n E' ESPRESA DA:

$$(5.6.1) \quad p_n = p_n(x_1, t_1; x_2, t_2, \dots; x_n, t_n) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n |\Lambda|}} \ell^{- \frac{1}{2\sigma^2|\Lambda|} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |\Lambda|_{ik} x_i x_k}$$

OVE  $\Lambda$  E' LA MATRICE SIMMETRICA DI ORDINE n I CUI ELEMENTI SONO  $\lambda_{ik} = c(t_k - t_i)$  [IN PARTICOLARE, QUINDI, TUTTI GLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE SONO EGUALI A 1],  $|\Lambda|$  IL SUO DETERMINANTE E, INFINE,  $|\Lambda|_{ik}$  IL COMPLEMENTO ALGEBRICO DI  $\lambda_{ik}$  DEL DETERMINANTE  $|\Lambda|$ .

IN PARTICOLARE LE DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO E DEL SECONDO ORDINE SONO:

$$(5.6.2) \quad p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \ell^{- \frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$(5.6.3) \quad p_2(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-c^2(\tau)}} \ell^{- \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2c(\tau)x_1 x_2}{2\sigma^2[1-c^2(\tau)]}}$$

UN PROCESSO GAUSSIANO DEL TIPO CONSIDERATO E' DUNQUE COMPLETAMENTE DESCRITTO DALLA SUA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE  $\rho$ , IL CHE E' LO STESSO, DAL SUO SPETTRO DI POTENZA.

DALLE RELAZIONI PRECEDENTI DISCENDE IMMEDIATAMENTE CHE LA CONDIZIONE

$$(5.6.4) \quad C(\tau) = 0$$

EQUIVALE A QUELLA DI INDIPENDENZA STATISTICA FRA LE DUE VARIABILI ALEATORIE  $x(t)$  E  $x(t+\tau)$ . INFATTI, SE VALE LA (5.6.4), LA (5.6.3) DIVIENE:

$$(5.6.5) \quad p_2(x_1, x_2; \tau) = p_1(x_1) p_1(x_2) .$$

PIU' IN GENERALE, CON RIFERIMENTO AD UNA MOLTEPLICITA' DI ISTANTI DI OSSERVAZIONE, POSSIAMO AFFERMARE CHE PER UN PROCESSO GAUSSIANO ERGODICO IL TEMPO DI CORRELAZIONE  $\tau_c$ , NEL SENSO ESPRESSO DALLA (4.3.10), COINCIDE CON LA DURATA DELLA MEMORIA  $\tau_m$ .

SI PUO' DEMONSTRARE CHE SE UN PROCESSO GAUSSIANO SUBISCE UNA TRASFORMAZIONE LINEARE TEMPO-INVARIANTE, SI OTTIENE ANCORA UN PROCESSO GAUSSIANO; LA NUOVA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE SI DETERMINA NATURALMENTE TRAMITE LA (5.5.1).

IL MOTIVO PER CUI ASSAI SPESO IN PRATICA SI INCONTRANO PROCESSI GAUSSIANI E' LEGATO AL SEGUENTE TEOREMA, CHE COSTITUISCE UNA GENERALIZZAZIONE DEL NOTO TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE:

SE  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$  SONO PROCESSI STATISTICAMENTE INDIPENDENTI, IL PROCESSO

$$(5.6.6) \quad y(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t)$$

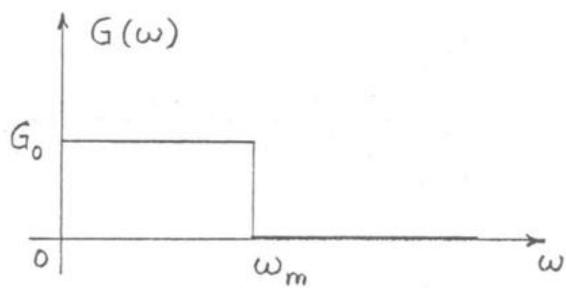
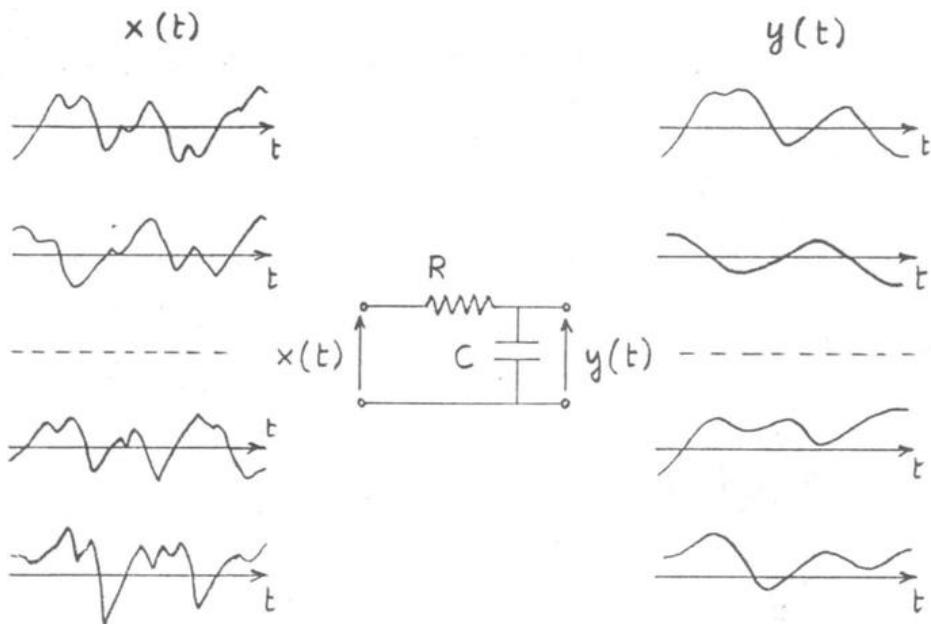
RISULTA GAUSSIANO AL TENDERE DI  $n$  ALL'INFINITO, QUALUNQUE SIA LA DESCRIZIONE STATISTICA DEI PROCESSI CHE COMPONGONO  $y(t)$ .

5.7 ESERCIZI.

ESERCIZIO N. 1

CALCOLARE LA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA DEL PROCESSO STOCASTICO  $y(t)$ , OTTENUTO FACENDO SUBIRE AD UN PROCESSO  $x(t)$ , AVENTE SPETTRO DI POTENZA  $G(\omega)$  COSTANTE NELLA BANDA  $(0, \omega_m)$  E NULLO AL DI FUORI, LA TRASFORMAZIONE LINEARE TEMPO-INVARIANTE OPERATA DAL QUADRIPOLO RC DI FIGURA.

ESEGUIRE LO STESSO CALCOLO SCAMBIANDO FRA LORO R E C.

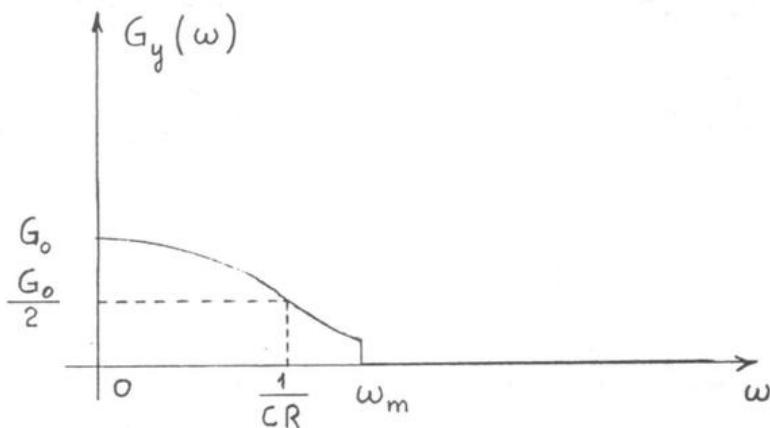


LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL QUADRIPOLO CONSIDERATO E'

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR} \quad (\text{ES. N. 2 DEL CAPITOLO 3})$$

PER LA (5.5.3) POSSIAMO QUINDI SCRIVERE :

$$G_y(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \omega^2 C^2 R^2} G_0, & \text{per } 0 \leq \omega \leq \omega_m, \\ 0, & \text{per } \omega > \omega_m. \end{cases}$$

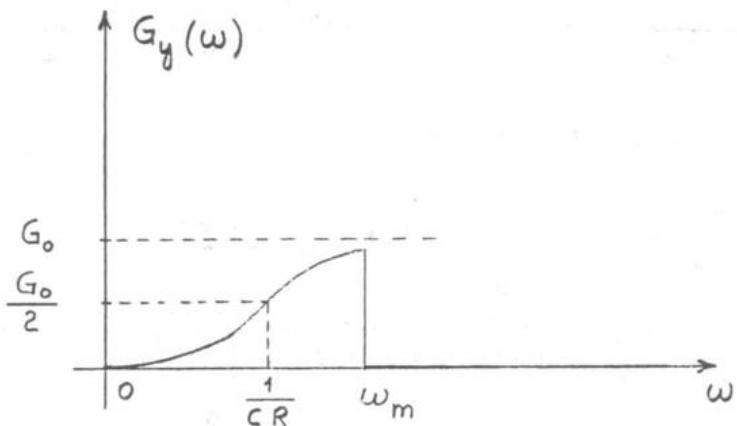


SCAMBIANDO R E C LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DIVIENE:

$$H(\omega) = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} \quad (\text{ES. N. 3 DEL CAPITOLO 3})$$

CORRISPONDENTEMENTE SI HA:

$$G_y(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega^2 C^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} G_0, & \text{per } 0 \leq \omega \leq \omega_m, \\ 0 & \text{per } \omega > \omega_m. \end{cases}$$



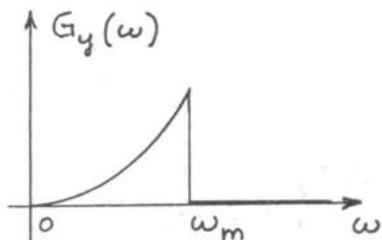
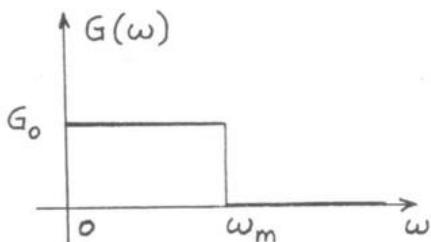
ESERCIZIO N. 2

CALCOLARE LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO ORDINE DEL PROCESSO STOCASTICO  $y(t)$  ALL'USCITA DI UN DERIVATORE AL CUI INGRESSO SIA PRESENTE UN PROCESSO  $x(t)$  ERGODICO E GAUSSIANO AVENTE SPETTRO DI POTENZA COSTANTE E UGUALE A  $G_0$  NELLA BANDA  $(0, \omega_m)$  E NULLO ALTROVE.

COME GIA' AFFERMATO NEL PARAGRAFO PRECEDENTE, IL PROCESSO  $y(t)$  E' GAUSSIANO.

IL SUO VALORE MEDIO, COME QUELLO DEL PROCESSO D'INGRESSO, E' NULLO E IL SUO SPETTRO DI POTENZA E' ESPRESO DA:

$$G_y(\omega) = \begin{cases} \omega^2 G_0, & \text{per } 0 \leq \omega \leq \omega_m, \\ 0, & \text{per } \omega > \omega_m. \end{cases} \quad (\text{ES. N. 6 DEL CAPITOLO 4})$$



LA SUA POTENZA E' PERTANTO:

$$P_y = E[y^2] = G_0 \int_0^{\omega_m} \omega^4 d\omega = \frac{G_0 \omega_m^3}{3} = G^2$$

TALE POTENZA RAPPRESENTA ANCHE LA VARIANZA DI  $y(t)$  E QUINDI:

$$P_1(y) = \sqrt{\frac{3}{2\pi G_0 \omega_m^3}} - \frac{3 y^2}{2 G_0 \omega_m^3}$$

ESERCIZIO N. 3

RICORDIAMO INNANZI TUTTO LE DEFINIZIONI DELLA FUNZIONE ERRORE  $\text{erf}(x)$  E DELLA FUNZIONE ERRORE COMPLEMENTARE  $\text{erfc}(x)$ :

$$(5.7.1) \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi ,$$

$$(5.7.2) \quad \text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) .$$

PER  $x \geq 0$  E' POSSIBILE ATTRIBUIRE UN IMPORTANTE SIGNIFICATO A QUESTE FUNZIONI. SE CONSIDERIAMO INFATTI UNA VARIABILE ALEATORIA  $\xi$  AVENTE DENSITA' DI PROBABILITA'  $p(\xi)$  GAUSSIANA, VALORE MEDIO NULLO E VARIANZA  $1/2$ ,

$$(5.7.3) \quad p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} ,$$

RISULTA

$$(5.7.4) \quad \text{erf}(x) = \text{Prob} \left\{ |\xi| < x \right\} ,$$

$$(5.7.5) \quad \text{erfc}(x) = \text{Prob} \left\{ |\xi| > x \right\} .$$

LE FUNZIONI  $\text{erf}(x)$  E  $\text{erfc}(x)$  RAPPRESENTANO RISPETTIVAMENTE LE AREE A E B DI FIGURA 5.7.1; IL LORO ANDAMENTO E' RAPPRESENTATO NELLA FIGURA 5.7.2.

UNA TABELLA DELLA FUNZIONE  $\text{erfc}(x)$  E' RIPORTATA NELLA PAGINA SEGUENTE.

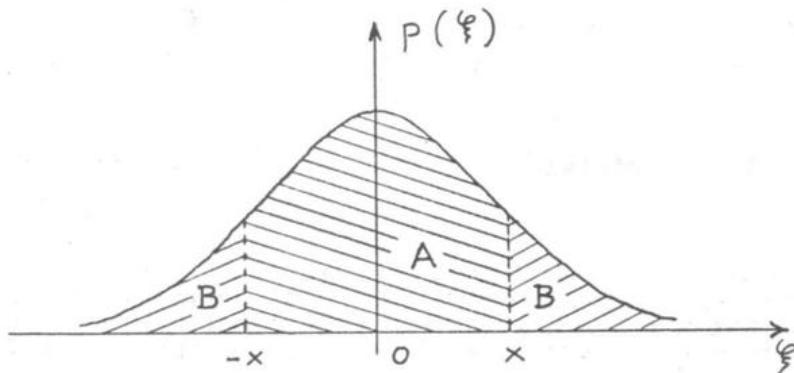


Fig. 5.7.1

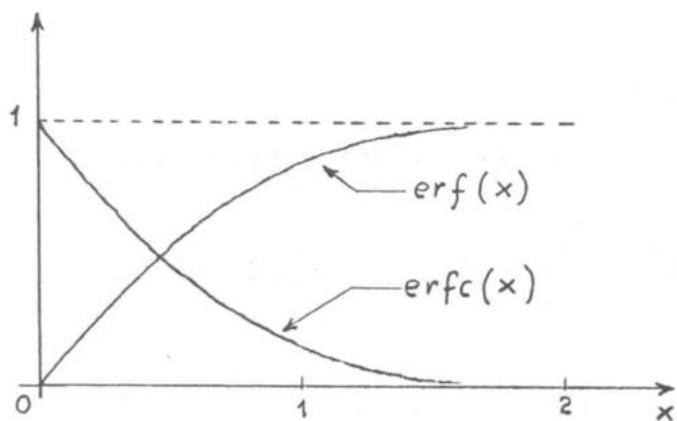


Fig. 5.7.2

ERFC(X)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1.00E+01	9.989E+00	9.77E+00	9.66E+00	9.55E+00	9.44E+00	9.32E+00	9.21E+00	.910E+00	.899E+00
.1	.888E+00	.876E+00	.854E+00	.832E+00	.810E+00	.788E+00	.766E+00	.743E+00	.703E+00	.682E+00
.2	.777E+00	.766E+00	.756E+00	.743E+00	.734E+00	.724E+00	.713E+00	.692E+00	.670E+00	.649E+00
.3	.671E+00	.661E+00	.651E+00	.641E+00	.631E+00	.621E+00	.611E+00	.601E+00	.591E+00	.581E+00
.4	.572E+00	.562E+00	.553E+00	.543E+00	.534E+00	.525E+00	.515E+00	.506E+00	.497E+00	.488E+00
.5	.480E+00	.471E+00	.462E+00	.454E+00	.445E+00	.437E+00	.428E+00	.420E+00	.412E+00	.404E+00
.6	.396E+00	.388E+00	.381E+00	.373E+00	.365E+00	.356E+00	.348E+00	.341E+00	.334E+00	.329E+00
.7	.322E+00	.315E+00	.309E+00	.302E+00	.295E+00	.289E+00	.282E+00	.276E+00	.270E+00	.264E+00
.8	.258E+00	.252E+00	.246E+00	.240E+00	.235E+00	.229E+00	.224E+00	.219E+00	.214E+00	.208E+00
.9	.203E+00	.198E+00	.193E+00	.188E+00	.184E+00	.179E+00	.175E+00	.170E+00	.165E+00	.161E+00
1.0	.157E+00	.153E+00	.149E+00	.145E+00	.141E+00	.138E+00	.134E+00	.130E+00	.126E+00	.123E+00
1.1	.120E+00	.116E+00	.113E+00	.110E+00	.107E+00	.104E+00	.101E+00	.980E+00	.950E+00	.924E+00
1.2	.897E-01	.870E-01	.845E-01	.819E-01	.795E-01	.771E-01	.748E-01	.725E-01	.702E-01	.681E-01
1.3	.660E-01	.639E-01	.619E-01	.590E-01	.561E-01	.532E-01	.504E-01	.476E-01	.449E-01	.430E-01
1.4	.477E-01	.461E-01	.446E-01	.431E-01	.417E-01	.393E-01	.369E-01	.346E-01	.326E-01	.305E-01
1.5	.339E-01	.327E-01	.316E-01	.302E-01	.294E-01	.284E-01	.274E-01	.264E-01	.252E-01	.245E-01
1.6	.237E-01	.228E-01	.220E-01	.212E-01	.204E-01	.196E-01	.189E-01	.182E-01	.175E-01	.168E-01
1.7	.162E-01	.156E-01	.150E-01	.144E-01	.139E-01	.133E-01	.128E-01	.123E-01	.118E-01	.114E-01
1.8	.109E-01	.105E-01	.101E-01	.965E-02	.926E-02	.889E-02	.853E-02	.818E-02	.784E-02	.752E-02
1.9	.721E-02	.691E-02	.662E-02	.634E-02	.606E-02	.582E-02	.552E-02	.524E-02	.494E-02	.469E-02
2.0	.468E-02	.448E-02	.428E-02	.409E-02	.391E-02	.374E-02	.358E-02	.342E-02	.327E-02	.312E-02
2.1	.298E-02	.285E-02	.272E-02	.259E-02	.247E-02	.236E-02	.225E-02	.215E-02	.205E-02	.195E-02
2.2	.186E-02	.178E-02	.169E-02	.161E-02	.154E-02	.147E-02	.140E-02	.134E-02	.128E-02	.120E-02
2.3	.114E-02	.109E-02	.103E-02	.984E-03	.935E-03	.886E-03	.845E-03	.803E-03	.763E-03	.725E-03
2.4	.689E-03	.654E-03	.621E-03	.589E-03	.559E-03	.531E-03	.503E-03	.477E-03	.453E-03	.429E-03
2.5	.407E-03	.386E-03	.365E-03	.346E-03	.328E-03	.311E-03	.294E-03	.278E-03	.262E-03	.249E-03
2.6	.242E-03	.216E-03	.211E-03	.200E-03	.189E-03	.178E-03	.169E-03	.159E-03	.151E-03	.142E-03
2.7	.134E-03	.127E-03	.120E-03	.113E-03	.107E-03	.101E-03	.949E-04	.844E-04	.796E-04	.737E-04
2.8	.750E-04	.707E-04	.666E-04	.622E-04	.591E-04	.557E-04	.524E-04	.493E-04	.464E-04	.437E-04
2.9	.411E-04	.387E-04	.364E-04	.342E-04	.312E-04	.302E-04	.284E-04	.267E-04	.250E-04	.235E-04
3.0	.221E-04	.207E-04	.195E-04	.183E-04	.171E-04	.161E-04	.151E-04	.141E-04	.134E-04	.124E-04
3.1	.116E-04	.109E-04	.102E-04	.958E-05	.897E-05	.830E-05	.766E-05	.706E-05	.649E-05	.584E-05
3.2	.603E-05	.564E-05	.527E-05	.493E-05	.460E-05	.430E-05	.402E-05	.376E-05	.351E-05	.328E-05
3.3	.304E-05	.285E-05	.266E-05	.249E-05	.232E-05	.216E-05	.197E-05	.178E-05	.163E-05	.149E-05
3.4	.152E-05	.142E-05	.132E-05	.123E-05	.115E-05	.107E-05	.992E-06	.923E-06	.859E-06	.799E-06
3.5	.743E-06	.691E-06	.642E-06	.597E-06	.555E-06	.515E-06	.479E-06	.445E-06	.413E-06	.383E-06
3.6	.356E-06	.330E-06	.306E-06	.284E-06	.264E-06	.244E-06	.227E-06	.207E-06	.189E-06	.170E-06
3.7	.167E-06	.155E-06	.143E-06	.133E-06	.123E-06	.114E-06	.105E-06	.974E-07	.901E-07	.833E-07
3.8	.770E-07	.712E-07	.652E-07	.608E-07	.562E-07	.519E-07	.479E-07	.442E-07	.406E-07	.377E-07
3.9	.344E-07	.321E-07	.296E-07	.273E-07	.252E-07	.232E-07	.213E-07	.197E-07	.176E-07	.157E-07
4.0	.155E-07	.142E-07	.131E-07	.120E-07	.111E-07	.102E-07	.937E-08	.862E-08	.793E-08	.729E-08
4.1	.670E-08	.616E-08	.562E-08	.520E-08	.477E-08	.438E-08	.403E-08	.370E-08	.339E-08	.311E-08
4.2	.266E-08	.262E-08	.246E-08	.220E-08	.198E-08	.178E-08	.157E-08	.137E-08	.115E-08	.935E-09
4.3	.118E-08	.109E-08	.100E-08	.915E-09	.837E-09	.766E-09	.701E-09	.641E-09	.586E-09	.535E-09
4.4	.489E-09	.447E-09	.406E-09	.373E-09	.341E-09	.311E-09	.284E-09	.259E-09	.236E-09	.216E-09
4.5	.197E-09	.179E-09	.163E-09	.149E-09	.136E-09	.124E-09	.113E-09	.103E-09	.935E-10	.855E-10
4.6	.775E-10	.705E-10	.645E-10	.584E-10	.531E-10	.483E-10	.439E-10	.399E-10	.363E-10	.330E-10
4.7	.300E-10	.272E-10	.241E-10	.224E-10	.206E-10	.185E-10	.168E-10	.152E-10	.138E-10	.125E-10
4.8	.111E-10	.103E-10	.933E-11	.845E-11	.766E-11	.694E-11	.628E-11	.569E-11	.516E-11	.466E-11
4.9	.422E-11	.382E-11	.342E-11	.312E-11	.282E-11	.252E-11	.231E-11	.209E-11	.188E-11	.170E-11
5.0	.154E-11	.139E-11	.125E-11	.113E-11	.102E-11	.921E-12	.631E-12	.475E-12	.309E-12	.169E-12

TUTTO CIO' PREMESSO, SI CONSIDERI UNA VARIABILE ALEATORIA GAUSSIANA  $\eta$ , CON VALORE MEDIO NULLO E VARIANZA  $\sigma^2$ .

$$\text{SI CALCOLI : } \text{Prob} \left\{ |\eta| < x \right\}, \quad \text{CON } x \geq 0.$$

RISULTA:

$$\text{Prob} \left\{ |\eta| < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{-x}^x e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} d\eta.$$

CON LA SOSTITUZIONE DI VARIABILE

$$\xi = \frac{\eta}{\sqrt{2}\sigma},$$

ABBIAMO

$$\text{Prob} \left\{ |\eta| < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-\xi^2} d\xi,$$

DA CUI

$$(5.7.6) \quad \text{Prob} \left\{ |\eta| < x \right\} = \text{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}\sigma} \right).$$

E' POI OVVIALEMENTE:

$$(5.7.7) \quad \text{Prob} \left\{ |\eta| > x \right\} = \text{erfc} \left( \frac{x}{\sqrt{2}\sigma} \right).$$

ESERCIZIO N. 4

CALCOLARE IL VALORE DI PICCO  $x_p$  DI UN PROCESSO ERGODICO  $x(t)$ , GAUSSIANO, A VALORE MEDIO NULLO E VARIANZA  $\sigma^2$ .

E' CHIARO CHE, NON ESISTENDO IL VALORE DI PICCO PER UN PROCESSO GAUSSIANO, QUESTO DEVE ESSERE DEFINITO CONVENZIONALMENTE.

LA DEFINIZIONE NORMALMENTE ADOTTATA E' LA SEGUENTE:

$$\text{Prob} \left\{ |x| > x_p \right\} = \varepsilon ,$$

IMPOSENDO AD  $\varepsilon$  UN VALORE OPPORTUNO, IN RAPPORTO ALL'APPLICAZIONE CUI SI RIFERISCE IL PROBLEMA CONSIDERATO.

ASSUMENDO  $\varepsilon = 10^{-5}$  E RICORDANDO CHE (ESERCIZIO N. 3):

$$\text{Prob} \left\{ |x| > x_p \right\} = \text{erfc} \left( \frac{x_p}{\sqrt{2} \sigma} \right) = \varepsilon$$

RISULTA (V. PAG. 5.31):

$\Rightarrow$

$$x_p / (\sqrt{2} \sigma) = 3.12$$

E QUINDI

$$x_p / \sigma = 4.41 \quad (= 12.89 \text{ dB}).$$

IN QUESTO CASO IL "FATTORE DI CRESTA"  $x_p / \sigma$  VIENE ASSUNTO UGUALE A 13 dB, DA CUI LA RELAZIONE APPROXIMATA DI USO FREQUENTE:

$$x_p / \sigma = \sqrt{20} .$$

## 5.8 PROCESSI STOCASTICI DISCRETI NEI VALORI E TEMPO-CONTINUI.

LA TRATTAZIONE DEI PARAGRAFI PRECEDENTI, DEDICATI A PROCESSI STOCASTICI CONTINUI NEI VALORI E TEMPO-CONTINUI, PUO' ESSERE ESTESA AI PROCESSI, SEMPRE TEMPO-CONTINUI, MA DISCRETI NEI VALORI, CON LE SEGUENTI VARIANTI:

- \* IN LUOGO DELLE DENSITA' DI PROBABILITA' OCCORRE CONSIDERARE LE CORRISPONDENTI PROBABILITA';
- \* GLI INTEGRALI NELLA CUI FUNZIONE INTEGRANDA COMPAIONO DENSITA' DI PROBABILITA', DEBBONO ESSERE SOSTITUITI DA SOMMATORIE I CUI TERMINI METTONO IN CONTO LE PROBABILITA' CORRISPONDENTI.

A TITOLO DI ESEMPIO, SE FISSIAMO  $n$  INSTANTI DI OSSERVAZIONE

$$t_1, t_2, \dots, t_n ,$$

LA CORRISPONDENTE  $n$ -PLA DI VARIABILI ALEATORIE DISCRETE E' DESCRITTA DALLA PROBABILITA' DI ORDINE  $n$

$$P_n = P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_n, t_n)$$

AVENTE IL SEGUENTE SIGNIFICATO:

$$(5.8.1) \quad P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_n, t_n) = \\ = \text{Prob}\{x(t_1)=x_1, x(t_2)=x_2, \dots, x(t_n)=x_n\} .$$

I CONCETTI DI STAZIONARIETA' E DI ERGODICITA' POSSONO ESSERE INTRODOTTI IN MODO ANALOGO.

A TITOLO D'ESEMPIO, CONSIDERIAMO ESPlicitamente alcune medie relative a processi ergodici. A tal fine indichiamo con

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(q)}$$

I VALORI CHE PUO' ASSUMERE LA FUNZIONE  $x(t)$ , CON

$$P_1[x^{(i)}] = \text{Prob}\{x(t)=x^{(i)}\}$$

LA PROBABILITA' DEL PRIMO ORDINE E CON

$$P_2(x^{(i)}, x^{(r)}; \tau) = \text{Prob}\{x(t)=x^{(i)}, x(t+\tau)=x^{(r)}\}$$

QUELLA DEL SECONDO ORDINE.

CIO' PREMESSO, DIAMO LE ESPRESSIONI DEL VALOR MEDIO, DELLA POTENZA E DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE COME MEDIE STATISTICHE:

$$(5.8.2) \quad E[x] = \sum_{i=1}^q x^{(i)} P_1[x^{(i)}],$$

$$(5.8.3) \quad E[x^2] = \sum_{i=1}^q [x^{(i)}]^2 P_1[x^{(i)}],$$

$$(5.8.4) \quad E[x(t)x(t+\tau)] = \sum_{i=1}^q \sum_{r=1}^q x^{(i)} x^{(r)} P_2[x^{(i)}, x^{(r)}; \tau].$$

## 5.9 PROCESSI STOCASTICI TEMPO-DISCRETI.

PER I PROCESSI STOCASTICI TEMPO-DISCRETI, OSSIA PER LE SERIE TEMPORALI ALEATORIE, CONTINUA A VALERE QUANTO DETTO PER I PROCESSI TEMPO-CONTINUI (SIA CONTINUI CHE DISCRETI NEI VALORI) CON L'UNICA VARIANTE CHE GLI INSTANTI DI OSSERVAZIONE DEVONO APPARTENERE ALL'INSIEME DEI VALORI CONSENTITI ALLA VARIABILE TEMPORALE.

IN PARTICOLARE, LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE NON E' PIU' UNA FUNZIONE TEMPO-CONTINUA, MA UNA SERIE TEMPORALE.

PER FISSARE LE IDEE PROPONIAMO ALCUNI ESERCIZI.

### ESERCIZIO N. 5

SI CONSIDERI UNA SORGENTE DI INFORMAZIONE CHE EMETTA MESSAGGI BINARI, COSTITUITI DA SERIE TEMPORALI  $\{x_n\}$  I CUI ELEMENTI SONO LE CIFRE BINARIE 0 E 1 (FIGURA 5.9.1).

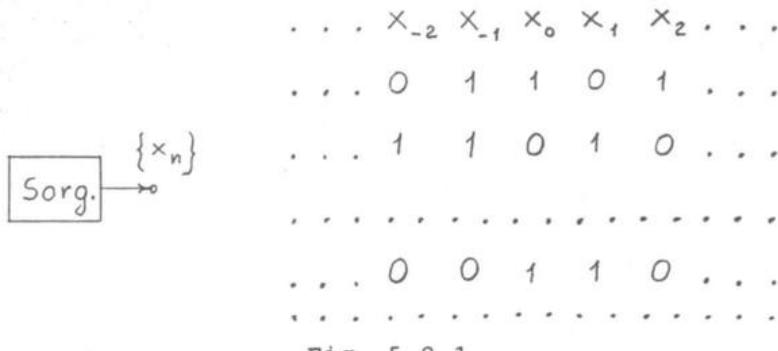


Fig. 5.9.1

NEL CASO IN CUI LA SORGENTE DIA ORIGINE AD UNA SERIE TEMPORALE APPARTENENTE AD UN PROCESSO ERGODICO CON CIFRE EQUIPROBABILI E SENZA ALCUNA DIPENDENZA STATISTICA FRA LE CIFRE CHE SI SUCCEDONO, SI CALCOLI IL VALOR MEDIO E LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DI TALE PROCESSO DISCRETO NEI VALORI E TEMPO-DISCRETO.

RISULTA:

$$E[x_n] = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 1/2 ,$$

$$C_k = E[x_n x_{n+k}] = \begin{cases} E[x_n^2] = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 1/2 , & k = 0 , \\ E[x_n]E[x_{n+k}] = [E[x_n]]^2 = 1/4 , & k \neq 0 . \end{cases}$$

### ESERCIZIO N. 6

CALCOLARE IL VALOR MEDIO E LA FUNZIONE DI AUTOCOR-  
RELAZIONE DEL PROCESSO STOCASTICO  $\{a_n\}$ , DISCRETO NEI  
VALORI E TEMPO-DISCRETO, OTTENUTO DAL PROCESSO  $\{x_n\}$   
CONSIDERATO NELL'ESERCIZIO PRECEDENTE CON LA SEGUENTE  
LEGGE DI CORRISPONDENZA (CODICE BIPOLARE):

$$x_n = 0 \quad \longrightarrow \quad a_n = -1$$

$$x_n = 1 \quad \longrightarrow \quad a_n = 1$$

RISULTA:

$$E[a_n] = (-1) \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 0$$

$$C_k = E[a_n a_{n+k}] = \begin{cases} E[a_n^2] = 1 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 1 & , \quad k = 0 , \\ E[a_n]E[a_{n+k}] = [E[a_n]]^2 = 0 & , \quad k \neq 0 . \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 7

SI RIPETA L'ESERCIZIO PRECEDENTE CON RIFERIMENTO AL CODICE BIPOLARE ALTERNATO (AMI = ALTERNED MARK INVERSION) DEFINITO DALLA SEGUENTE LEGGE DI CORRISPONDENZA:

$$x_n = 0 \quad \rightarrow \quad a_n = 0$$

$$x_n = 1 \quad \rightarrow \quad a_n = \pm 1$$

CON L'INTESA CHE NELLA SECONDA RELAZIONE SI SCELGONO ALTERNATIVAMENTE I SEGNI + E -.

$x_n$	Prob.	$a_n$	$P_1$
0	$1/2$	0	$1/2$
1	$1/2$	1 -1	$1/4$ $1/4$

$$E[a_n] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$C_0 = E[a_n^2] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$x_n x_{n+1}$	Prob.	$a_n a_{n+1}$	$P_2$
0 0	1/4	0 0	1/4
0 1	1/4	0 1	1/8
1 0	1/4	0 -1	1/8
1 1	1/4	1 0	1/8
		-1 0	1/8
		1 -1	1/8
		-1 1	1/8

$$C_1 = E[a_n a_{n+1}] = 1 \cdot (-1) \cdot 1/8 + (-1) \cdot 1 \cdot 1/8 = -1/4 .$$

SI VERIFICHI CHE

$$C_k = 0 \quad \text{per} \quad |k| \geq 2 .$$

## 5.10 SEGNALI PAM ALEATORI.

### IL SEGNALE PAM

$$(5.10.1) \quad s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n g(t-nT),$$

GIA' CONSIDERATO NEL PARAGRAFO 4.8, QUANDO LA SERIE TEMPORALE  $\{a_n\}$  E' ALEATORIA, E' A SUA VOLTA UN SEGNALE ALEATORIO, SUSCETTIBILE DI DIVERSI ANDAMENTI IN CORRISPONDENZA ALLE POSSIBILI REALIZZAZIONI DI TALE SERIE.

CHIAMEREMO SIMBOLI GLI ELEMENTI  $a_n$ , TEMPO DI SIMBOLO L'INTERVALLO  $T$ , FREQUENZA DI SIMBOLO IL SUO RECIPROCO  $B_s = 1/T$ .

IL PROCESSO  $\{a_n\}$  SIA ERGODICO. CIONONOSTANTE IL PROCESSO  $s(t)$  NON RISULTA NEPPURE STAZIONARIO, COME E' IMMEDIATO VERIFICARE.

AD ESEMPIO, IL VALOR MEDIO

$$(5.10.2) \quad E[s(t)] = E[a_n] \sum_{-\infty}^{\infty} g(t-nT),$$

NON IDENTICAMENTE NULLO SOLO QUANDO

$$(5.10.3) \quad E[a_n] = \langle a_n \rangle$$

E' DIVERSO DA 0, E' IN GENERALE FUNZIONE DEL TEMPO E COINCIDE CON LA FUNZIONE PERIODICA  $s_m(t)$  ESPRESSA DALLA (4.8.8). DI TALE FUNZIONE PERIODICA NEL PARAGRAFO 4.8 ABBIAMO CALCOLATO LO SPETTRO DI AMPIEZZA A RIGHE.

COME GIA' FATTO NEL PARAGRAFO CITATO, SCRIVIAMO:

$$(5.10.4) \quad s(t) = s_m(t) + x(t),$$

OVE:

$$(5.10.5) \quad x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \{a_n - E[a_n]\} g(t-nT) = \\ = \sum_{-\infty}^{\infty} [a_n - \langle a_n \rangle] g(t-nT)$$

E' UN PROCESSO A VALOR MEDIO NULLO.

LE FUNZIONI CAMPIONE DI QUEST'ULTIMO PROCESSO HANNO LO SPETTRO DI POTENZA ESPRESSO DALLA (4.8.16). A CAUSA DELL'IPOTESI DI ERGODICITA' FATTA SULLA SERIE ALEATORIA  $\{a_n\}$ , LE MEDIE TEMPORALI CHE COMPAIONO IN TALE FORMULA SONO LE MEDESIME PER TUTTE LE REALIZZAZIONI DELLA SERIE IN QUESTIONE E COINCIDONO CON LE CORRISPONDENTI MEDIE STATISTICHE:

$$(5.10.6) \quad \langle a_n^2 \rangle = E[a_n^2],$$

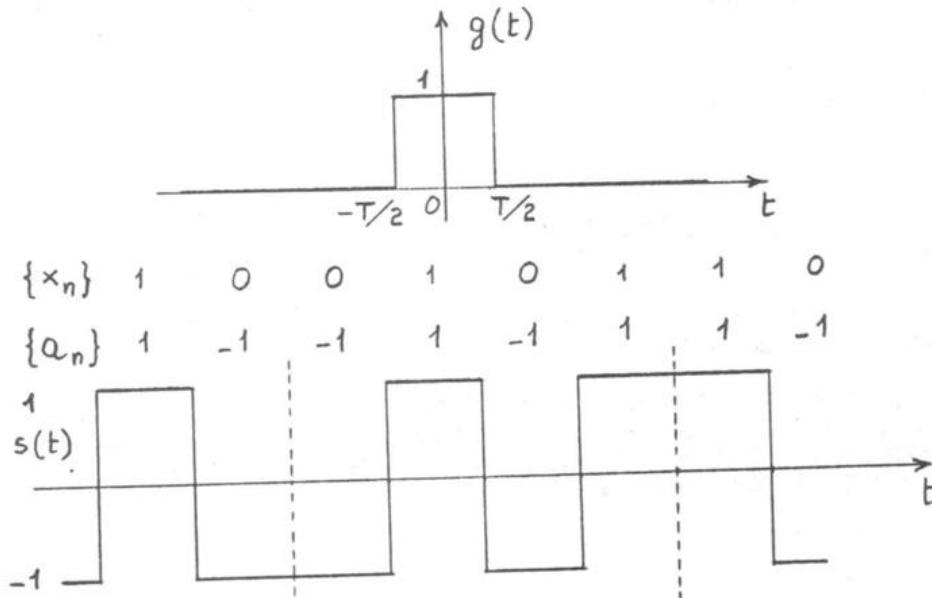
$$(5.10.7) \quad \langle a_n a_{n+k} \rangle = E[a_n a_{n+k}].$$

PERTANTO SI PUO' PARLARE DI SPETTRO DI POTENZA DEL PROCESSO (5.10.5).

QUESTO POI PUO' ESSERE CALCOLATO A PRIORI, TRAMITE LE (4.8.16), (5.10.3), (5.10.6) E (5.10.7), UNA VOLTA NOTA LA PROBABILITA' DEL SECONDO ORDINE DELLA SERIE TEMPORALE ALEATORIA  $\{a_n\}$ .

ESERCIZIO N. 8

CALCOLARE LO SPETTRO DI UN SEGNALE PAM CON CODICE BIPOLARE, SIMBOLI EQUIPROBABILI E INDIPENDENTI, IMPULSI RETTANGOLARI DI AMPIEZZA UNITARIA CON DUTY CYCLE 1 [IMPULSI NRZ = NO RETURN TO ZERO].



IL SEGNALE IN QUESTIONE HA VALOR MEDIO NULLO.  
PERTANTO ABBIAMO SOLO UNO SPETTRO DI POTENZA  $G_a(\omega)$   
DISTRIBUITO CHE POSSIAMO ESPRIMERE RICORDANDO LA  
(4.8.16) ED I RISULTATI DELL'ESERCIZIO N. 6.

RISULTA:

$$G_a(\omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 ,$$

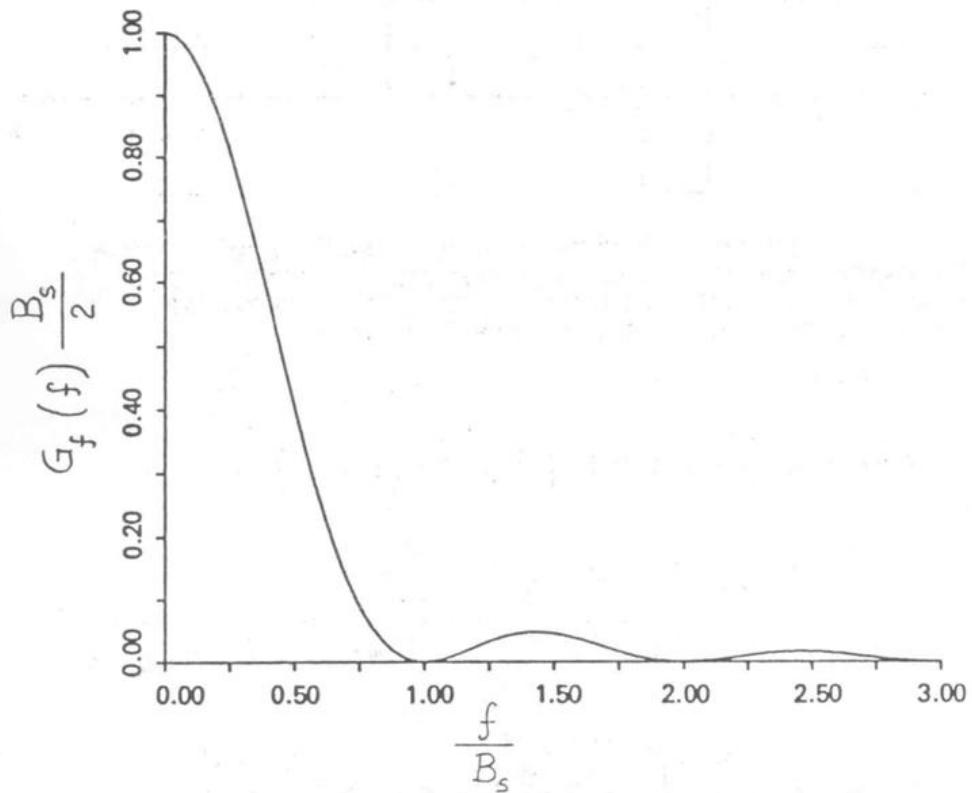
$$|G(\omega)|^2 = T^2 \left( \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 , \text{ (ES. N. 2 - CAP. II)}$$

$$G_a(\omega) = \frac{T}{\pi} \left( \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 .$$

CONSIDERIAMO LO SPETTRO DI POTENZA  $G_e(f)$  RIFERITO  
ALLE FREQUENZE [V. RELAZIONE (4.4.11)].

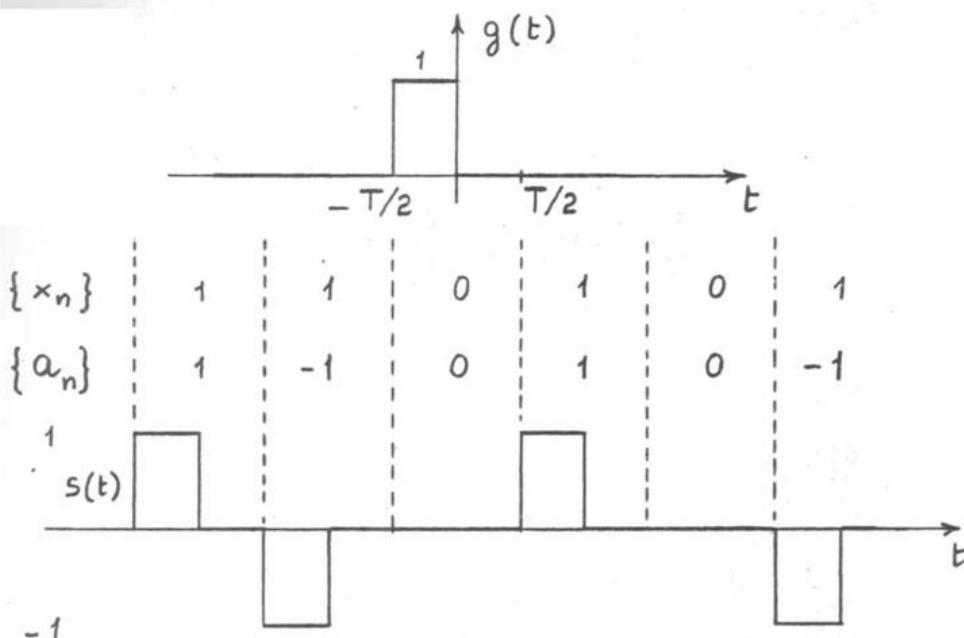
$$G_f(f) = 2T \left( \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 =$$

$$= \frac{2}{B_s} \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{f}{B_s} \right).$$



ESERCIZIO N. 9

CALCOLARE LO SPETTO DI UN SEGNALE PAM CON CODICE AMI, CIFRE BINARIE PRIMA DELLA CODIFICA EQUIPROBABILI E INDIPENDENTI, IMPULSI RETTANGOLARI DI AMPIEZZA UNITARIA CON DUTY CYCLE 0.5 [IMPULSI RZ = RETURN (TO) ZERO].



IL SEGNALE IN QUESTIONE HA VALOR MEDIO NULLO.  
PERTANTO ABBIAMO SOLO UNO SPETTO DI POTENZA  $G_a(\omega)$   
DISTRIBUITO CHE POSSIAMO ESPRIMERE RICORDANDO LA  
(4.8.16) ED I RISULTATI DELL'ESERCIZIO N. 7.

RISULTA:

$$G_a(\omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \omega T \right) =$$

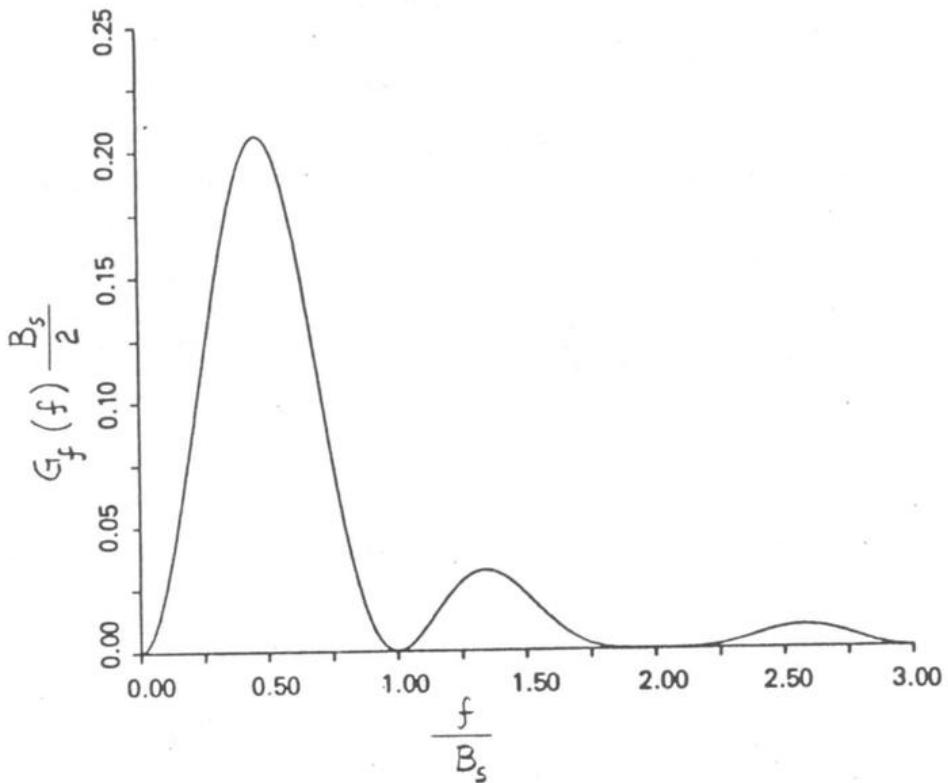
$$= \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 \sin^2 \frac{\omega T}{2},$$

$$|G(\omega)|^2 = \frac{T^2}{4} \left( \frac{\sin \omega T/4}{\omega T/4} \right)^2 \quad (\text{ES. N. 2 - CAP. II})$$

$$G_a(\omega) = \frac{T}{4\pi} \left( \frac{\sin \omega T/4}{\omega T/4} \right)^2 \sin^2 \frac{\omega T}{2}.$$

CONSIDERIAMO LO SPETTRO DI POTENZA  $G_f(f)$  RIFERITO  
ALLE FREQUENZE [V. RELAZIONE (4.4.11)].

$$G_f(f) = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\sin \pi f \tau/2}{\pi f \tau/2} \right)^2 \sin^2 \pi f \tau = \\ = \frac{1}{2 B_s} \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{f}{2 B_s} \right) \sin^2 \frac{\pi f}{B_s} .$$



CAPITOLO VI

SEGNALI PASSA-BASSO ANALOGICI

E RELATIVI SERVIZI

## 6.1 SEGNALI ANALOGICI CHE PIU' INTERESSANO LE TELECOMUNICAZIONI.

I SEGNALI CHE INTERESSANO LE TELECOMUNICAZIONI POSSONO ESSERE ANALOGICI O NUMERICI. IL PRESENTE CAPITOLO E' DEDICATO AI SEGNALI ANALOGICI ED AI SERVIZI AD ESSI ASSOCIATI.

I SEGNALI ANALOGICI, RAPPRESENTATI IN GENERALE DA FUNZIONI ALEATORIE TEMPO-CONTINUE E CONTINUE NEI VALORI, VARIANO NEL TEMPO IN MODO ANALOGO ALLA CAUSA CHE LI HA GENERATI. FRA ESSI CITIAMO:

- \* I SEGNALI AUDIO COME
  - IL SEGNALE TELEFONICO
  - IL SEGNALE AUDIO NORMALE
  - IL SEGNALE AUDIO MUSICALE
  - IL SEGNALE AUDIO MUSICALE AD ALTA FEDELTA'
  
- \* I SEGNALI VIDEO COME QUELLI RELATIVI A
  - IMMAGINI FISSE, IN BIANCO E NERO OPPURE A COLORI (ESEMPIO: IL SEGNALE FACSIMILE)
  - SCENE IN MOVIMENTO, IN BIANCO E NERO OPPURE A COLORI (ESEMPI: SEGNALE TELEVISIVO, SEGNALE VIDEOLENTO)

I SEGNALI INOLTRE POSSONO ESSERE MONOCANALE OPPURE MULTICANALE (O MULTIPLEX).

I SEGNALI MONOCANALE RECANO L'INFORMAZIONE GENERATA DA UNA SOLA SORGENTE (V. LA FIGURA 6.1.1 CHE RIPRODUCE PARTE DELLA FIGURA 1.1.2).

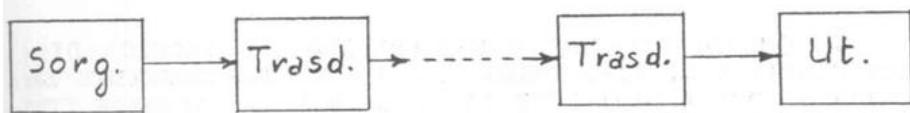


Fig. 6.1.1

I SEGNALI MULTICANALE RECANO INVECE LE INFORMAZIONI RELATIVE A DUE O PIU' SORGENTI IN MODO TALE DA RENDERNE POSSIBILE LA SEPARAZIONE. QUANDO SI HANNO PIU' SORGENTI IN UNA DETERMINATA POSIZIONE GEOGRAFICA A E ALTRETTANTI UTENTI IN UN'ALTRA POSIZIONE GEOGRAFICA B, UN SEGNALE MULTICANALE CONSENTE DI COLLEGARE LE COPPIE SORGENTE / UTENTE UTILIZZANDO UN UNICO MEZZO TRASMISSIVO COME INDICATO NELLA FIGURA 6.1.2: OVIAMENTE IL COSTO DELL'APPARATO CHE FORMA IL SEGNALE MULTIPLEX A PARTIRE DAI SINGOLI SEGNALI DI SORGENTE (MULTIPLATORE - MUX) E DI QUELLO CHE, A PARTIRE DAL SEGNALE MULTIPLEX RICEVUTO, RIPRISTINA I SINGOLI SEGNALI COMPONENTI (DE-MULTIPLATORE - DEMUX), DEBBONO ESSERE COMPENSATI DAL RISPARMIO CHE DERIVA DALL'IMPIEGO DI UN UNICO SISTEMA DI TRASMISSIONE.

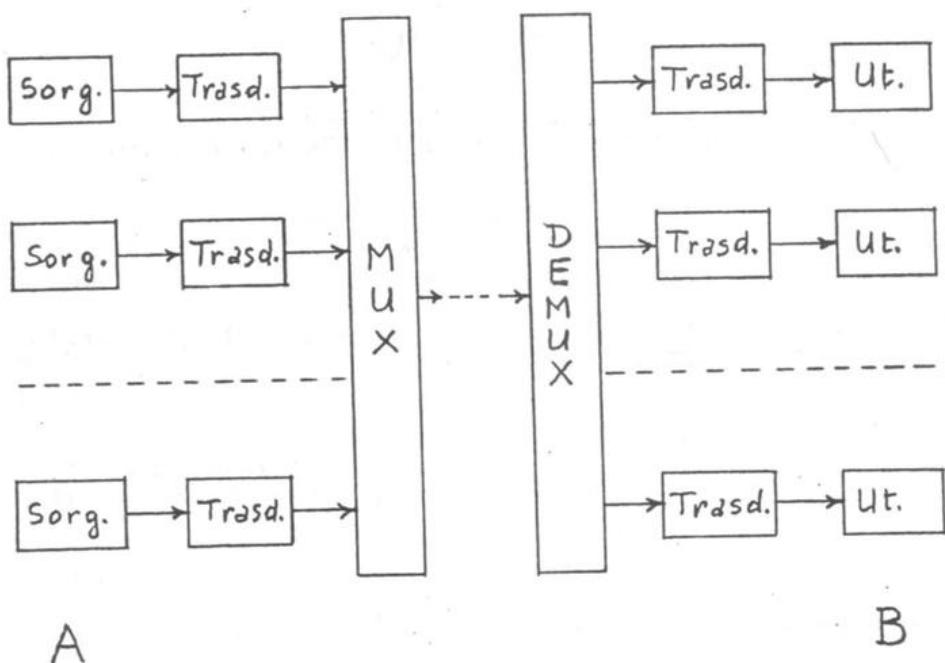


Fig. 6.1.2

IN QUESTO CAPITOLO CONSIDEREREMO UNA TECNICA DI MULTIPLAZIONE DI TIPO ANALOGICO, E PIU' PRECISAMENTE LA MULTIPLAZIONE A DIVISIONE DI FREQUENZA. IL SEGNALE CO-SI' OTTENUTO VIENE DENOMINATO SEGNALE FDM (FREQUENCY DIVISION MULTIPLEX).

## 6.2 I SEGNALI AUDIO.

LA BANDA ACUSTICA COPRE UN INTERVALLO DI FREQUENZE DA CIRCA 16 HZ A CIRCA 16 KHZ. TUTTAVIA NON E' NECESSARIO CONSIDERARE TUTTA QUESTA ESTENSIONE DI BANDA PER I DIVERSI SERVIZI AUDIO OFFERTI DAI SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONE. LE BANDE RELATIVE AI SEGNALI ASSOCIATI A QUESTI SERVIZI DIPENDONO DAI REQUISITI IMPOSTI COME INDICATO QUI DI SEGUITO.

PER IL SEGNALE TELEFONICO IL REQUISITO IMPOSTO E' LA INTELLIGIBILITA' DEL MESSAGGIO VOCALE, CON LE CARATTERISTICHE DI RIPRODUZIONE A TUTTI BEN NOTE. L'ESPERIENZA DIMOSTRA CHE PER RAGGIUNGERE TALE RISULTATO BASTA CONSIDERARE LA BANDA DI FREQUENZE

(6.2.1) 300 ÷ 3400 HZ

LA (6.2.1) E' DETTA BANDA TELEFONICA NETTA. TALE BANDA E' CONTENUTA ALL'INTERNO DELL'INTERVALLO DI FREQUENZE

(6.2.2) 0 ÷ 4 KHZ

A CUI GENERALMENTE SI FA RIFERIMENTO E CHE E' DETTA BANDA TELEFONICA LORDA.

ALL'AUMENTARE DELLA FEDELTA' DI RIPRODUZIONE RICHIESTA CRESCE LA BANDA DEL SEGNALE COME SOTTO RIPORTATO:

SEGNALE AUDIO NORMALE: 50 ÷ 4500 HZ

SEGNALE AUDIO MUSICALE: 30 ÷ 12000 HZ

SEGNALE AUDIO MUSICALE AD ALTA FEDELTA': 30 ÷ 15000 HZ

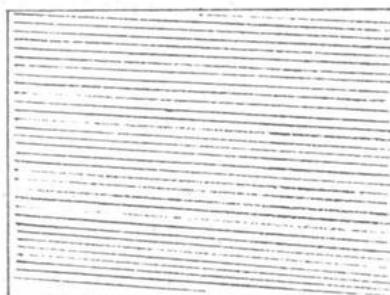
AD ESEMPIO, IL SEGNALE AUDIO NORMALE VIENE USATO NELLA RADIODIFFUSIONE A MODULAZIONE D'AMPIEZZA, QUELLO MUSICALE AD ALTA FEDELTA' NELLA RADIODIFFUSIONE A MODULAZIONE DI FREQUENZA.

### 6.3 IL SEGNALE TELEVISIVO.

CONSIDERIAMO IL SEGNALE PER LA RAPPRESENTAZIONE DI SCENE IN MOVIMENTO CHE INTERESSA IL SERVIZIO DI RADIO-DIFFUSIONE TELEVISIVA.

OGNI SCENA VIENE RAPPRESENTATA MEDIANTE UN NUMERO DI IMMAGINI AL SECONDO  $f_i$  (FREQUENZA DI IMMAGINE) TALE DA ASSICURARE LA CONTINUITÀ DEI MOVIMENTI.

OGNI IMMAGINE VIENE ESPLORATA SECONDO LINEE ORIZZONTALI (O MEGLIO, PER ESSERE ESATTI, LEGGERMENTE INCLINATE DALL'ALTO VERSO IL BASSO), COME MOSTRATO IN FIGURA 6.3.1. IL NUMERO  $N$  DI TALI LINEE È SCELTO IN MODO CHE L'ANGOLO  $\alpha$  SOTTO CUI SONO VISTE DUE LINEE CONTIGUE DA UNA DISTANZA DALLO SCHERMO CONVENZIONALMENTE FISSATA - IN RAPPORTO ALLE DIMENSIONI DELLO SCHERMO STESSO - RISULTI INFERIORE ALL'ACUITÀ VISIVA DELL'OCCHIO (FIGURA 6.3.2).



a/b = fattore  
di forma

b

a

Fig. 6.3.1

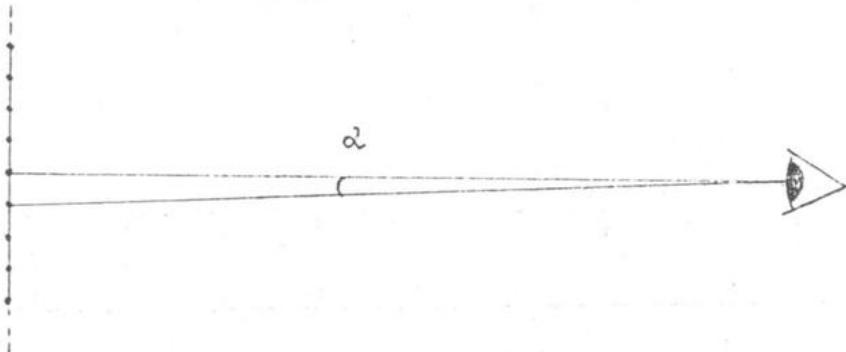


Fig. 6.3.2

FACCIAMO ORA RIFERIMENTO AD UNA SCENA IN BIANCO E NERO E CERCHIAMO DI VALUTARE IN LINEA DI MASSIMA L'IMPEGNO DI BANDA DEL SEGNALE OTTENUTO CON LE MODALITA' DI SCANSIONE SOPRA ACCENNATE.

OSSERVIAMO PRELIMINARMENTE CHE IL SEGNALE ELETTRICO OTTENUTO DALLA SCANSIONE DI UNA IMMAGINE A LUMINOSITA' COSTANTE NON VARIA NEL TEMPO. PER QUESTO MOTIVO LO SPETTRO DEL SEGNALE VIDEO DEVE PARTIRE DALLA FREQUENZA 0.

NOTIAMO POI CHE, IPOTIZZANDO NULLO LO SPESSORE DELLE N LINEE ORIZZONTALI ED IMPOSONDENDO UNA EGUALE DEFINIZIONE ORIZZONTALE E VERTICALE, L'IMMAGINE PUO' PENSARSI SUDDIVISA IN TANTI ELEMENTI COSTITUITI DA QUADRATINI DI LATO  $b/N$ . IL NUMERO n DI QUADRATINI CHE FORMANO UNA IMMAGINE E' DATO DA:

$$(6.3.1) \quad n = \frac{ab}{(b/N)^2} = \frac{a}{b} N^2 .$$

IL NUMERO  $f_o$  DI QUADRATINI PER SECONDO VALE PERCIO':

$$(6.3.2) \quad f_o = n f_i = \frac{a}{b} f_i N^2 .$$

QUANDO QUESTI QUADRATINI SONO ALTERNATIVAMENTE BIANCHI E NERI (MASSIMA DEFINIZIONE DELL'IMMAGINE), IL SEGNALE HA LA FORMA D'ONDA COSTITUITA DA IMPULSI RETTANGOLARI RAPPRESENTATA IN FIGURA 6.3.3. LA FREQUENZA FONDAMENTALE  $f_m$  DI TALE FORMA D'ONDA PERIODICA, CONSIDERANDO CHE OGNI PERIODO COMPRENDE DUE QUADRATINI (UNO BIANCO ED UNO NERO), E' ESPRESSA DA:

$$(6.3.3) \quad f_m = \frac{f_o}{2} = \frac{1}{2} \frac{a}{b} f_i N^2 .$$

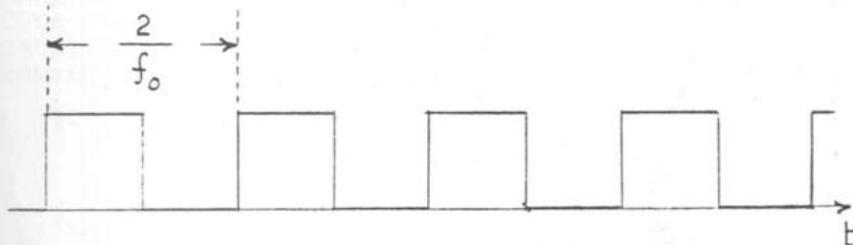


Fig. 6.3.3

SE CI LIMITIAMO A RIPRODURRE SOLO L'ARMONICA FONDAMENTALE, POSSIAMO AFFERMARE CHE LA (6.3.3) RAPPRESENTA L'ESTREMO SUPERIORE DELLA BANDA VIDEO IN ESAME.

IL VALORE NUMERICO A CUI LA (6.3.3) DA' ORIGINE VA IN REALTA' LEGGERMENTE CORRETTO PER TENERE CONTO DI CONDIZIONI PIU' REALISTICHE. IN OGNI CASO LA (6.3.3) E' DI GRANDE UTILITA' PERCHE' METTE IN EVIDENZA CHE LA BANDA VIDEO E' PROPORZIONALE ALLE SEGUENTI GRANDEZZE:

- IL FATTORE DI FORMA  $a/b$
- LA FREQUENZA DI IMMAGINE  $f_i$
- IL QUADRATO DEL NUMERO N DELLE RIGHE PER IMMAGINE.

CITIAMO I DUE PRINCIPALI STANDARD TELEVISIVI:

\* SEGNALE TELEVISIVO A 625 LINEE

$a/b$	4/3
$f_i$	25 immagini/s
N	625
BANDA: FINO A 5 MHZ	

\* SEGNALE TELEVISIVO A 525 LINEE

$a/b$	4/3
$f_i$	30 immagini/s
N	525
BANDA: FINO A 4 MHZ	

AD ESEMPIO, LO STANDARD A 625 E' ADOTTATO IN EUROPA E QUELLO A 525 NEGLI STATI UNITI D'AMERICA ED IN GIAPPONE.

PER COMPLETEZZA DI PRESENTAZIONE DOBBIAMO ORA PARLARE DELLA SCANSIONE INTERALLACCIATA.

OSSERVIAMO A TAL FINE CHE I VALORI DELLA FREQUENZA DI IMMAGINE SOPRA RIPORTATI SONO TALI DA ASSICURARE LA CONTINUITA' DEI MOVIMENTI, MA NON LA PERSISTENZA DELLA LUMINOSITA' DELLA SCENA OSSERVATA.

PER QUESTO MOTIVO OGNI IMMAGINE VIENE DECOMPOSTA IN DUE CAMPI (QUADRI) INTERALLACCIATI, FORMATI RISPETTIVAMENTE DALLE RIGHE DISPARI E DALLE RIGHE PARI (FIGURA 6.3.4), E SI PROVVEDE AD ESPLORARE PRIMA UN CAMPO, POI L'ALTRO: TALE OPERAZIONE E' APPUNTO DETTA SCANSIONE INTERALLACCIATA.

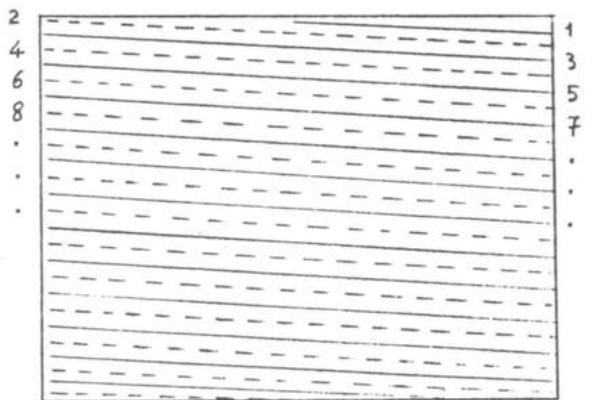


Fig. 6.3.4

LA FREQUENZA DI CAMPO RISULTA COSÌ' DOPPIA DELLA FREQUENZA DI IMMAGINE (A SECONDA DEI CASI, 50 OPPURE 60 CAMPI/SECONDO) ED E' TALE DA GARANTIRE LA PERSISTENZA DELLA LUMINOSITA' DELLA SCENA. SI NOTI CHE QUESTO RISULTATO VIENE RAGGIUNTO SENZA MODIFICARE LA BANDA DEL SEGNALE OTTENUTO.

FACCIAMO ORA UNA BREVE CONSIDERAZIONE SULLA BANDA DEL SEGNALE TELEVISIVO: ESSA E' ASSAI ESTESA E MALE UTILIZZATA.

INFATTI OGNI IMMAGINE VIENE CONSIDERATA INDIPENDENTE DA QUELLA CHE LA PRECEDE (E IN REALTA' IMMAGINI SUCCESSIVE SONO POCO DIVERSE O ADDIRITTURA IDENTICHE) E LA LUMINOSITA' DI OGNI QUADRATINO VIENE CONSIDERATA INDIPENDENTE DA QUELLA DEI QUADRATINI CIRCOSTANTI (E IN REALTA' ESISTE DIPENDENZA STATISTICA FRA LE LUMINOSITA' DI PUNTI VICINI). IN ALTRI TERMINI, POSSIAMO AFFERMARE CHE IL SEGNALE TELEVISIVO PRESENTA UNA ELEVATA RIDONDANZA.

ELIMINANDO QUESTA RIDONDANZA SAREBBE POSSIBILE RAPPRESENTARE LO STESSO CONTENUTO INFORMATIVO DEL SEGNALE TELEVISIVO IMPEGNANDO UNA BANDA DI FREQUENZE LARGAMENTE INFERIORE AI VALORI SOPRA RIPORTATI.

PER QUANTO CONCERNE I SISTEMI DI TELEVISIONE A COLORI (NTSC AMERICANO, PAL TEDESCO, SECAM FRANCESE) CI LIMITIAMO A DIRE CHE ESSI RISPETTANO TUTTI UNA CARATTERISTICA FONDAMENTALE, CHE E' QUELLA DELLA COMPATIBILITÀ CON I SISTEMI IN BIANCO E NERO. IN PARTICOLARE, QUESTA RICHIEDE CHE LA BANDA DI FREQUENZE DEL SEGNALE TELEVISIVO A COLORI SIA IDENTICA A QUELLA DEL SEGNALE MONOCROMATICO.

CITIAMO INFINE CHE PRESSO IL C.C.I.R. SONO IN CORSO GLI STUDI PER DEFINIRE UNO STANDARD INTERNAZIONALE PER LA TELEVISIONE AD ALTA DEFINIZIONE (HDTV = HIGH DEFINITION TV). ESSO E' INDISPENSABILE PER I GRANDI SCHERMI E PREVEDERA' UN NUMERO DI LINEE PER IMMAGINE CIRCA DOPPIO DI QUELLO ATTUALE ED UN FATTORE DI FORMA PARI A 16/9. IN TAL MODO LO SPETTATORE, COME MOSTRA LA FIGURA 6.3.5, PER IL NUOVO VALORE DEL RAPPORTO DI FORMA E PER LA MAGGIORE VICINANZA RESA POSSIBILE DAL MAGGIOR NUMERO DI LINEE, PUO' AUMENTARE L'ANGOLO VISUALE DAGLI ATTUALI 10° A 30°, RICAVANDO LA SENSAZIONE DI ESSERE MAGGIORMENTE IMMERSO NELLA SCENA TRASMESSA.

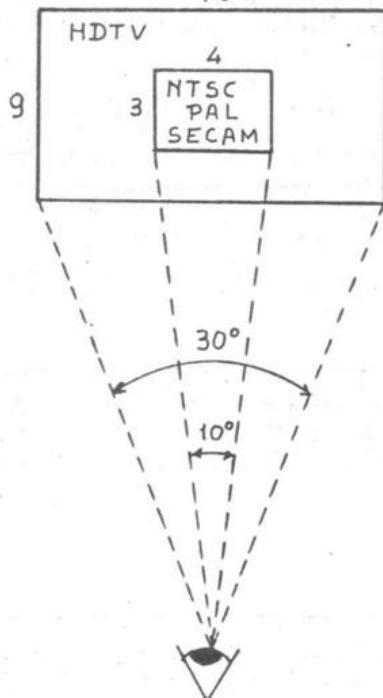


Fig. 6.3.5

#### 6.4 FACSIMILE E VIDEOLENTO ANALOGICI.

IL SEGNALE FACSIMILE CONSENTE DI EFFETTUARE FOTOCOPIE A DISTANZA (IL RELATIVO SERVIZIO E' DENOMINATO TELEFAX ED IN ITALIA E' GESTITO DALLA SIP).

UNA SINGOLA IMMAGINE VIENE ESPLORATA IN ALCUNI MINUTI E LA LENTEZZA DELLA SCANSIONE CONSENTE DI RIDURRE LA BANDA DEL RELATIVO SEGNALE IN MODO DA RENDERLA MINORE DI QUELLA TELEFONICA; PER LA SUCCESSIVA TRASMISSIONE E' QUINDI SUFFICIENTE UNA SEMPLICE LINEA TELEFONICA.

LO STESSO DICASI PER IL SEGNALE VIDEOLENTO. ESSO E' RELATIVO A SCENE VARIABILI NEL TEMPO LE CUI IMMAGINI INTERESSANO CON UNA CADENZA DI ALCUNI SECONDI, COME NEI PROBLEMI DI CONTROLLO DEL TRAFFICO E DI TELESORVEGLIANZA E DI CONTROLLO DI PROCESSI INDUSTRIALI. IN ALTRI TERMINI, LA CONTINUITA' DEI MOVIMENTI NON VIENE RICHIESTA E CIO' CONSENTE DI RIDURRE DRASTICAMENTE L'IMPEGNO DI BANDA.

ANCHE PER IL SERVIZIO VIDEOLENTO (GESTITO IN ITALIA DALLA SIP) SI UTILIZZA LA RETE TELEFONICA.

## 6.5 ALCUNE ANTICIPAZIONI SULLA TEORIA DELLA MODULAZIONE.

PRIMA DI PARLARE DEI SEGNALI MULTICANALE A DIVISIONE DI FREQUENZA, ANTICIPIAMO ALCUNI CONCETTI DELLA TEORIA DELLA MODULAZIONE, PERALTRO IN PARTE GIA' INTRODOTTI CON L'ESERCIZIO N. 6 DEL CAPITOLO 2.

CONSIDERIAMO A TAL FINE L'OSCILLAZIONE MODULATA

(6.5.1)

$$s(t) = x(t) \cos \omega_0 t,$$

OTTENUTA COME PRODOTTO (V. FIGURA 6.5.1) FRA IL SEGNALE UTILE (SEGNALE MODULANTE), DI CUI DIAMO L'ESPRESSONE COME INTEGRALE DI FOURIER

SEGNALE MODULANTE  
(6.5.2)

$$x(t) = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega,$$

E L'OSCILLAZIONE PORTANTE

(6.5.3)

$$v_o(t) = \cos \omega_0 t.$$

PORTANTE

$$s(t) = X(t) v_o(t)$$

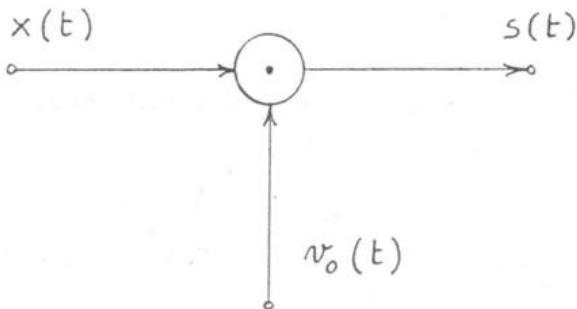


Fig. 6.5.1

NELL'INTEGRALE DI FOURIER (6.5.2) COMPAIONO GLI SPETTRI DI AMPIEZZA  $V(\omega)$  E DI FASE  $\varphi(\omega)$  DEL SEGNALE MODULANTE, SCHEMATIZZATI QUALITATIVAMENTE IN FIGURA 6.5.2.

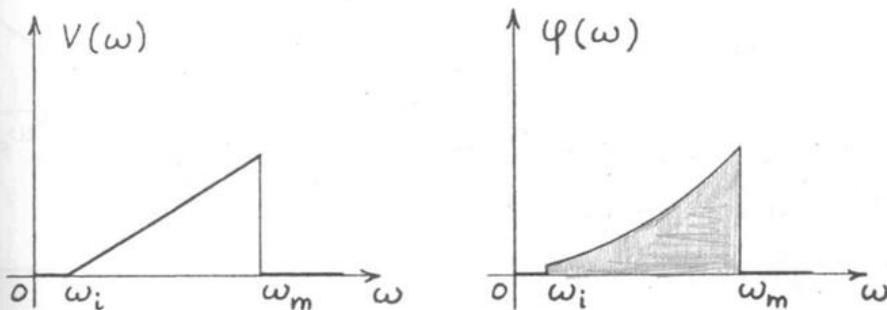


Fig. 6.5.2

DALLE (6.5.1) E (6.5.2) OTTENIAMO:

$$(6.5.4) \quad s(t) = \cos \omega_0 t \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos [\omega t - \varphi(\omega)] d\omega = \\ = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos \omega_0 t \cos [\omega t - \varphi(\omega)] d\omega .$$

RICORDANDO CHE

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

E PONENDO

$$(6.5.5) \quad s_s(t) = \frac{1}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos [(\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega ,$$

$$(6.5.6) \quad s_i(t) = \frac{1}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos [(\omega_0 - \omega)t + \varphi(\omega)] d\omega ,$$

ABBIAMO:

$$(6.5.7) \quad s(t) = s_s(t) + s_i(t)$$

LE FUNZIONI (6.5.5) E (6.5.6) HANNO GLI SPETTRI DI AMPIEZZA E DI FASE INDICATI IN FIGURA 6.5.3, TENUTO CONTO DEI CORRISPONDENTI SPETTRI DI  $x(t)$  RAPPRESENTATI IN FIGURA 6.5.2 [LA FIGURA 6.5.3a) SI RIFERISCE A  $s_+(t)$ , b) A  $s_-(t)$ ].

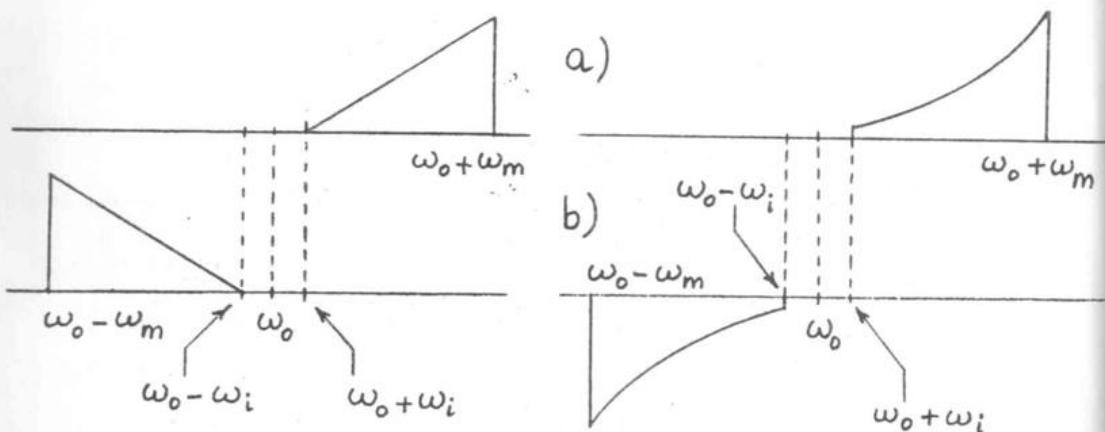


Fig. 6.5.3

GLI SPETTRI DI AMPIEZZA E FASE DELL'OSCILLAZIONE MODULATA COMPRENDONO DUNQUE DUE BANDE LATERALI A CAVALLO DI  $\omega_0$ :

- QUELLI RELATIVI ALLA BANDA LATERALE SUPERIORE SI OTTENGONO PER SEMPLICE TRASLAZIONE IN ALTO, DI UNA QUANTITA' PARI A  $\omega_0$ , DEGLI SPETTRI DI  $x(t)$ ;
- QUELLI RELATIVI ALLA BANDA LATERALE INFERIORE SI OTTENGONO CON UNA TRASLAZIONE IN ALTO, DI UNA QUANTITA' PARI A  $\omega_0$ , DEGLI SPETTRI DI  $x(t)$ , SEGUITA DA UN RIBALTIMENTO ATTORNO ALLA PULSAZIONE  $\omega_0$  E, SOLO PER QUANTO CONCERNTE LO SPETTRO DI FASE, DA UN CAMBIAMENTO DI SEGNO.

IN CONCLUSIONE, RIPORTIAMO IN FIGURA 6.5.4 LO SPETTRO DI AMPIEZZA DI  $s(t)$ :

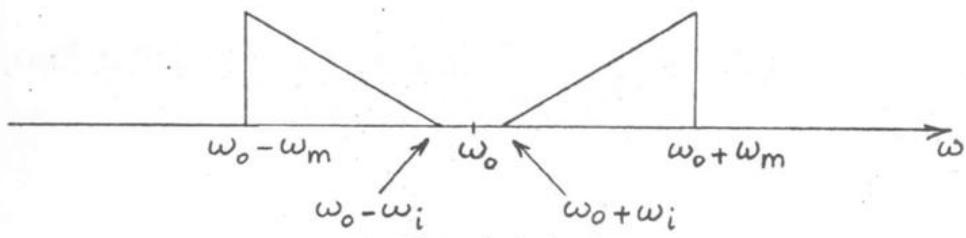


Fig. 6.5.4

CIASCUNO DEI DUE SEGNALI  $s_a(t)$  E  $s_s(t)$ , IN QUANTO CONTIENE TUTTE LE CARATTERISTICHE SPETTRALI DI  $x(t)$ , E' IN GRADO DI RAPPRESENTARE COMPIUTAMENTE  $x(t)$  E PUO' ESSERE OTTENUTO DALL'OSCILLAZIONE MODULATA  $s(t)$  CON UN FILTRO PASSA-BANDA [V. FIGURA 6.5.5 PER QUANTO CONCERNE LA GENERAZIONE DI  $s_a(t)$ ].

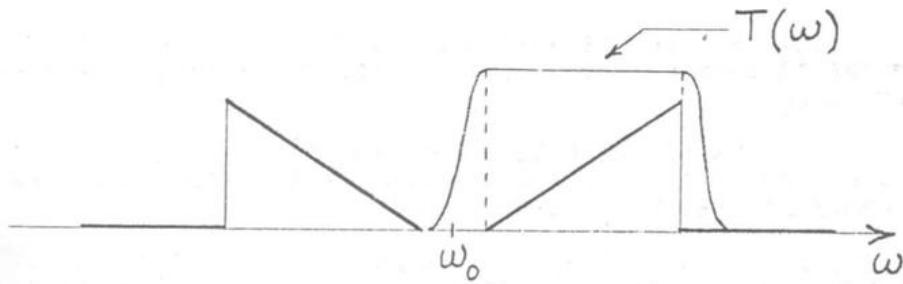
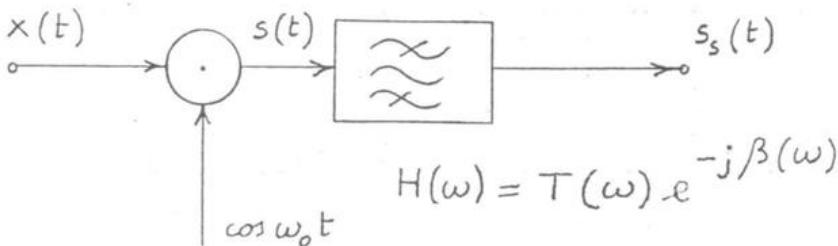
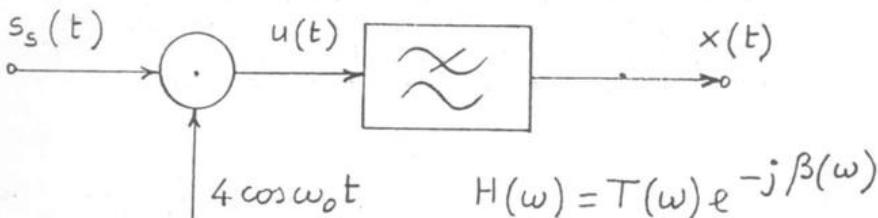


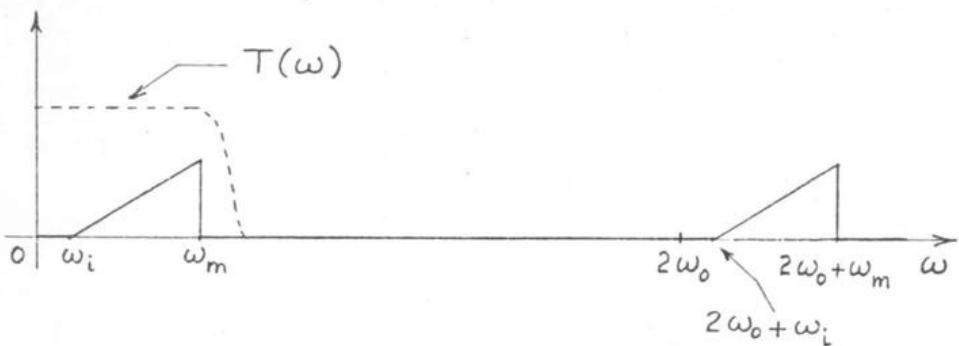
Fig. 6.5.5

L'OPERAZIONE CHE A PARTIRE DA  $x(t)$  CI PORTA AD  $s_a(t)$  [OPPURE AD  $s_s(t)$ ] VIENE DETTA CONVERSIONE DI FREQUENZA O, PIU' PRECISAMENTE, CONVERSIONE DI FREQUENZA IN SALITA.

L'OPERAZIONE INVERSA (CONVERSIONE IN DISCESA) PUO' ESSERE EFFETTUATA COME MOSTRATO IN FIGURA 6.5.6 CON RIFERIMENTO AD  $s_s(t)$  [SI PROCEDE IN MANIERA DEL TUTTO ANALOGA QUANDO SI DISPONE DI  $s_1(t)$ ].



$$\begin{aligned}
 u(t) &= 4s_s(t) \cos \omega_0 t = \\
 &= 2 \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos \omega_0 t \cos[(\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega = \\
 &= \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega + \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(2\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega = \\
 &= x(t) + \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(2\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega.
 \end{aligned}$$



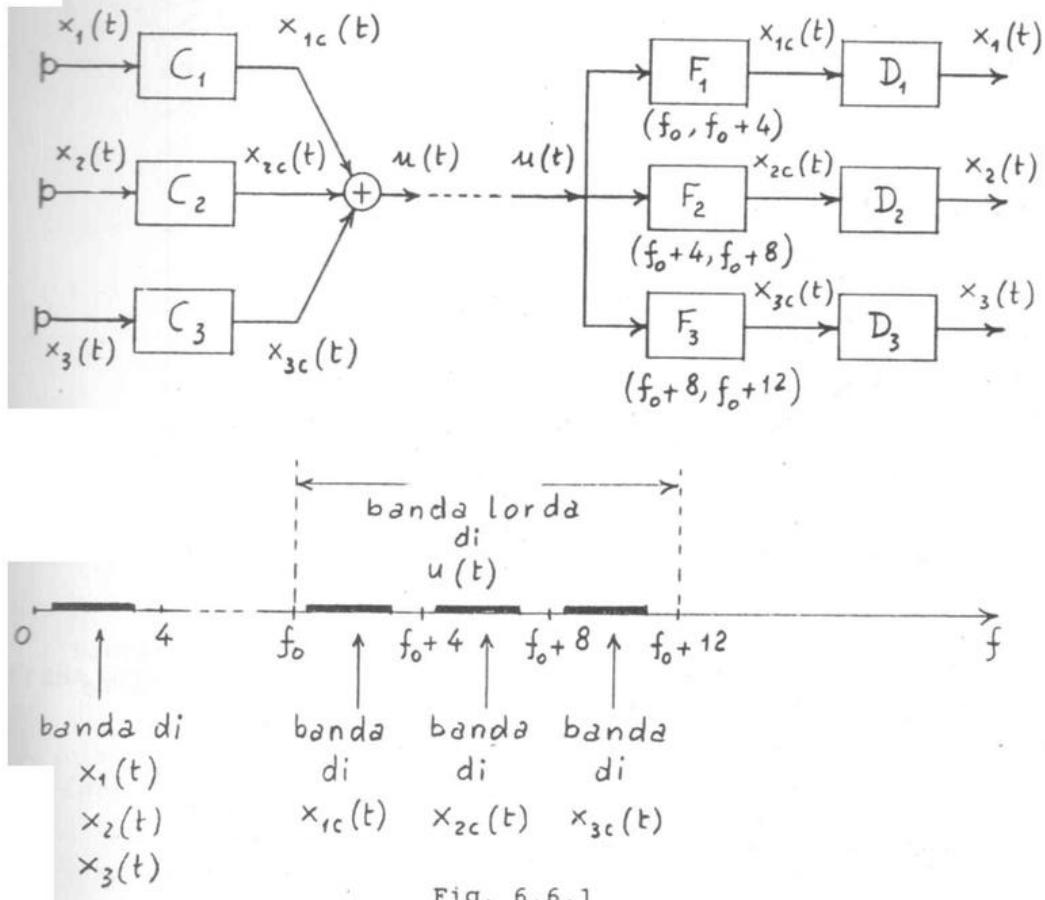
— spettro d'ampiezza di  $u(t)$

- - - - caratteristica d'ampiezza del filtro passa-basso

Fig. 6.5.6

## 6.6 SEGNALI MULTICANALE A DIVISIONE DI FREQUENZA.

LO SCHEMA DI FIGURA 6.6.1 MOSTRA COME SI POSSA REALIZZARE UN SEGNALE FDM  $u(t)$ ; PER CONCRETEZZA, LA FIGURA FA RIFERIMENTO A TRE SEGNALI TELEFONICI  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  (LE FREQUENZE SONO ESPRESSE IN KHZ): SI NOTINO I TRE CONVERTITORI DI FREQUENZA IN SALITA  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , I TRE FILTRI PASSA-BANDA  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , I TRE CONVERTITORI DI FREQUENZA IN DISCESA  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ .



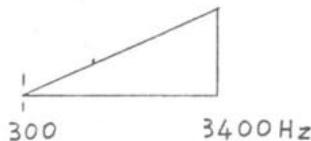
CON IL SEGNALE MULTIPLEX  $u(t)$  LA TRASMISSIONE DEI SEGNALI ORIGINARI AVVIENE CONTEMPORANEAMENTE, CIOE' SENZA DISTINZIONE NEL DOMINIO DEI TEMPI.

ESSI TUTTAVIA SI MANTENGONO DISTINTI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE, E CIO' RENDE POSSIBILE LA LORO SEPARAZIONE MEDIANTE FILTRI.

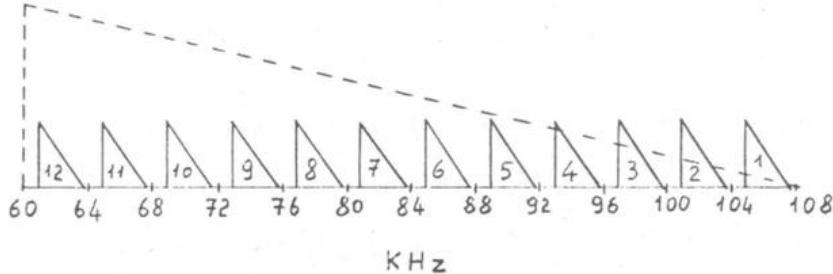
CON RIFERIMENTO ALLA TELEFONIA, ACCENNIAMO ALLA GERARCHIA DEI SEGNALI FDM STABILITA DAL C.C.I.T.T.

E' IMPORTANTE SOTTOLINEARE CHE SI TRATTA DI UNA NORMATIVA RELATIVA AD IMPIANTI CHE VENIVANO INSTALLATI NEL PASSATO E CHE RAPPRESENTANO AL MOMENTO LA MAGGIOR PARTE DI QUELLI IN SERVIZIO. GLI IMPIANTI DI NUOVA REALIZZAZIONE SONO DI TECNICA NUMERICA (V. CAPITOLO 7 E SI RICORDI QUANTO GIA' ACCENNATO NEL CAPITOLO 1 RELATIVAMENTE AL PASSAGGIO DALLA RETE ANALOGICA ALLA RETE IDN).

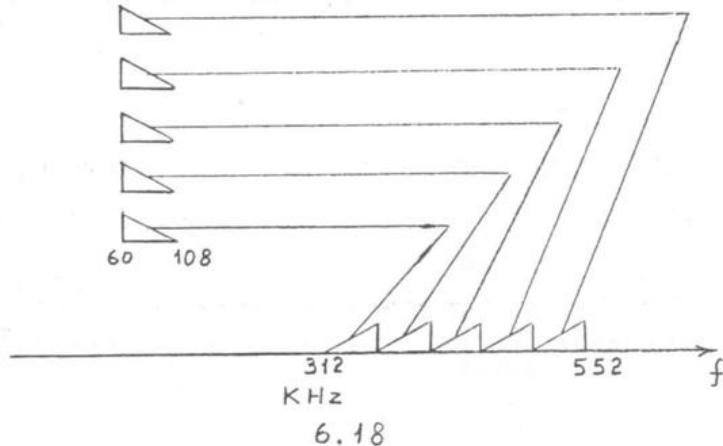
\* SINGOLO CANALE TELEFONICO (TF)



\* GRUPPO PRIMARIO (12 CANALI TF)

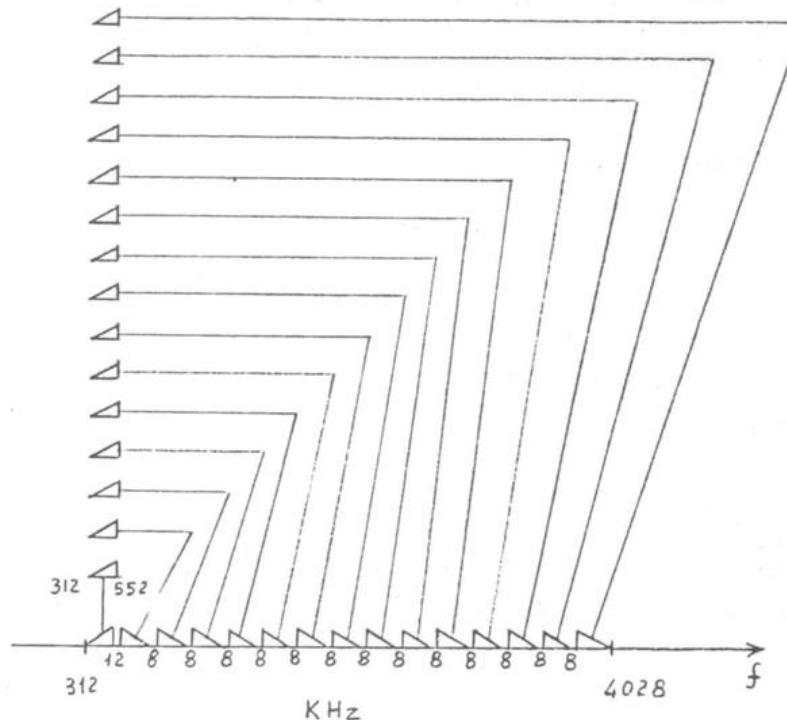


\* GRUPPO SECONDARIO (5 GRUPPI PRIMARI EQUIVALENTI A 60 CANALI TELEFONICI)

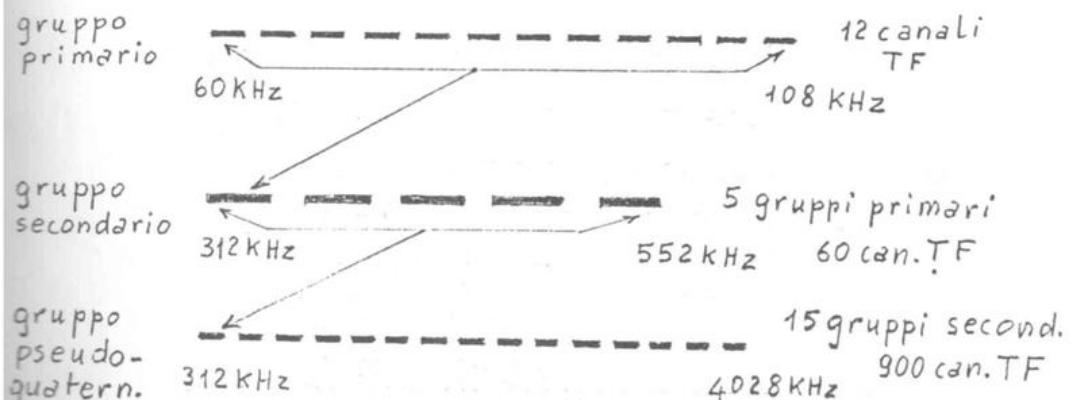


NON RAPPRESENTIAMO I GRUPPI TERZIARIO E QUATERNA-  
RIO ED ACCENNAMO AL

\* GRUPPO PSEUDOQUATERNARIO (15 GRUPPI SECONDARI EQUIVA-  
LENTI A 900 CANALI TF)



RIPRESENTIAMO, IN ALTRA FORMA GRAFICA, I GRUPPI  
APPENA ACCENNATI:



SEMPRE CON RIFERIMENTO AGLI IMPIANTI IN SERVIZIO  
(MA NON IN COSTRUZIONE), CITIAMO ORA I SEGUENTI SISTEMI:

\* SISTEMA A 4 MHZ - SI RIFERISCE AD UN SEGNALE FDM  
FORMATO DA UN GRUPPO PSEUDO-QUATERNARIO + UN GRUPPO  
SECONDARIO CONVERTITO NELLA BANDA 60÷300 KHZ (COMPLES-  
SIVAMENTE, 16 GRUPPI SECONDARI EQUIVALENTI A 960 CANA-  
LI TF)

60KHz

4028 KHz

\* SISTEMA A 12 MHZ - SI RIFERISCE AD UN SEGNALE FDM  
FORMATO DA TRE GRUPPI PSEUDO-QUATERNARI (EQUIVALENTE A  
2700 CANALI TF)

312 KHz

12336 KHz

\* SISTEMA A 60 MHZ - SI RIFERISCE AD UN SEGNALE FDM  
FORMATO DA 12 GRUPPI PSEUDO-QUATERNARI (EQUIVALENTE A  
10800 CANALI TF)

4404 KHz

59580 KHz

PER COMPLETEZZA, CITIAMO ANCHE I SISTEMI DI TRASMISSIONE PER I SEGNALI FDM ORA DESCRITTI CHE FANNO USO DI COPPIE COASSIALI (CONTRADDISTINTE MEDIANTE IL DIAMETRO ESTERNO  $d$  DEL CONDUTTORE INTERNO ED IL DIAMETRO INTERNO  $D$  DEL CONDUTTORE ESTERNO).

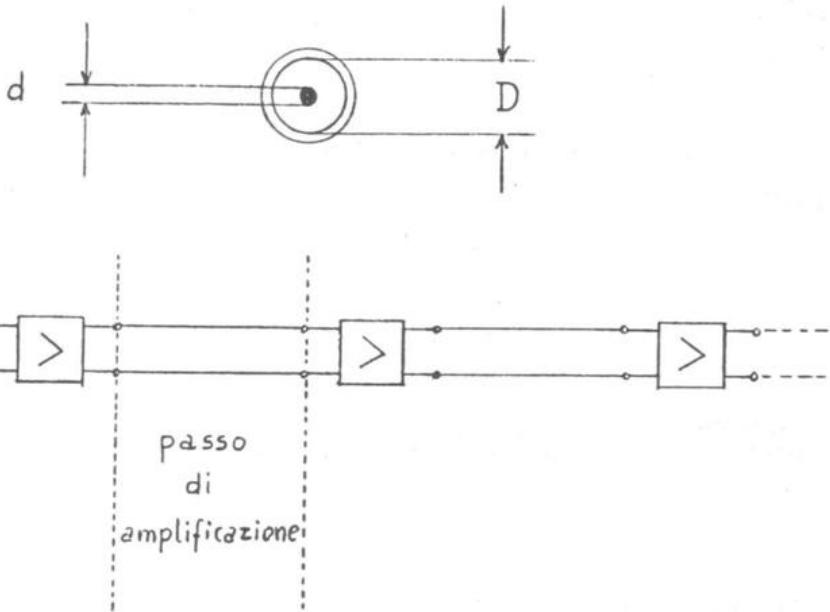


Fig. 6.6.2

\* COPPIA 0.7/2.9 mm (CHIAMATA MICROCOASSIALE)

VIENE UTILIZZATA PER SISTEMI A 4 MHZ CON PASSO DI AMPLIFICAZIONE PARI 2 KM.

\* COPPIA 1.2/4.4 mm (CHIAMATA COASSIALINO)

VIENE UTILIZZATA PER SISTEMI A 4 MHZ (PASSO DI AMPLIFICAZIONE 4 KM) ED A 12 MHZ (PASSO DI AMPLIFICAZIONE 2 KM).

\* COPPIA 2.6/9.5 mm (CHIAMATA COASSIALE NORMALE)

VIENE UTILIZZATA PER SISTEMI A 4 MHZ (PASSO DI AMPLIFICAZIONE 9.3 KM), A 12 MHZ (PASSO DI AMPLIFICAZIONE  $9.3/2 = 4.65$  KM) ED A 60 MHZ (PASSO DI AMPLIFICAZIONE  $4.65/3 = 1.55$  KM).

CAPITOLO VII

SEGNALI PASSA-BASSO NUMERICI

E RELATIVI SERVIZI

## 7.1 GENERALITA' SUI SEGNALI NUMERICI.

RICORDIAMO CHE PER MESSAGGIO NUMERICO (O DIGITALE) INTENDIAMO UNA FUNZIONE TEMPO-DISCRETA E DISCRETA NEI VALORI.

IN QUESTO CAPITOLO CONSIDEREREMO MESSAGGI BINARI, OSSIA SERIE TEMPORALI FORMATE DA CIFRE BINARIE (UNA CIFRA BINARIA VERRÀ IN SEGUITO INDICATA CON IL TERMINE BIT, CONTRAZIONE DI BINARY DIGIT = CIFRA BINARIA). L'INTERVALLO T<sub>b</sub> FRA LE SUCCESSIVE CIFRE BINARIE VIENE DETTO TEMPO DI BIT, IL SUO INVERSO

$$B_r = 1/T_b$$

### FREQUENZA DI CIFRA (BIT RATE).

PER SEGNALE NUMERICO (O DIGITALE) INTENDIAMO IL SEGNALE PAM OTTENUTO EFFETTUANDO LA CONVOLUZIONE FRA UN MESSAGGIO NUMERICO ED UNA FORMA D'ONDA q(t) AD ENERGIA FINITA (SI RICORDI QUANTO GIA' DETTO NEI PARAGRAFI 4.8 E 5.10).

COME PIU' VOLTE DETTO, L'INFORMAZIONE EMESSA DA UNA SORGENTE PUO' GIA' ESSERE ORIGINATA NELLA FORMA DI MESSAGGIO NUMERICO (AD ESEMPIO: SORGENTE DATI, TESTI SCRITTI CODIFICATI).

ALTRE VOLTE LA SORGENTE GENERA UN SEGNALE ANALOGICO (AD ESEMPIO, AUDIO O VIDEO) ED IL MESSAGGIO NUMERICO VIENE OTTENUTO MEDIANTE UNA CONVERSIONE A/D (DA ANALOGICO A DIGITALE). OVIAMENTE DEVE ESSERE POSSIBILE LA CONVERSIONE INVERSA, CONVERSIONE D/A (DA DIGITALE AD ANALOGICO), CON CUI RICOSTRUIRE IL SEGNALE ORIGINARIO DA FORNIRE ALL'UTENTE.

STORICAMENTE IL PRIMO SERVIZIO OFFERTO DA UNA RETE PUBBLICA DI TELECOMUNICAZIONI HA UTILIZZATO UN SEGNALE DI TIPO NUMERICO. SI TRATTA DEL SERVIZIO TELEGRAFICO O TELEX (TELEPRINTER EXCHANGE OPPURE TELEGRAM EXCHANGE) CHE CONSENTE LO SCAMBIO DI TESTI SCRITTI. IL SEGNALE E' DI TIPO ASINCRONO (IL SINCRONISMO FRA TRASMETTITORE E RICEVITORE DEVE ESSERE MANTENUTO SOLO DURANTE LA TRANSMISSIONE DI OGNI PAROLA DI CODICE, CHE E' APERTA DA UN IMPULSO DI START E CHIUSA DA UN IMPULSO DI STOP). IL TEMPO DI BIT E' 20 ms, E QUINDI LA FREQUENZA DI CIFRA 50 bit/s.

PER IL LORO NOTEVOLE INTERESSE, PRESENTIAMO SUBITO I PASSAGGI ANALOGICO —> DIGITALE —> ANALOGICO.

## 7.2 CONVERSIONE A/D.

LA CONVERSIONE DI UN SEGNALE ANALOGICO IN UN SEGNALE DIGITALE VIENE EFFETTUATA MEDIANTE LE SEGUENTI TRE OPERAZIONI:

(1)

### \* CAMPIONAMENTO DEL SEGNALE.

*Ta del campionamento del dominio dei tempi  
f > 2 f<sub>m</sub>*

LA FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO  $f_o = 1/T$  ( $T$  = INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO) VIENE PRESA SUPERIORE AL DOPPIO DELLA MASSIMA FREQUENZA  $f_m$  A CUI E' APPREZZABILE LO SPETTRO DEL SEGNALE STESSO (IL CHE COSTITUISCE CONDIZIONE SUFFICIENTE PER EVITARE L'ALIASING NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE E PER POTER QUINDI RICOSTRUIRE IL SEGNALE ORIGINARIO).

IL RISULTATO DI QUESTA OPERAZIONE E' UNA DISCRETIZZAZIONE DELL'ASSE DEI TEMPI: ALLA FUNZIONE  $x(t)$  VIENE SOSTITUITA LA SERIE TEMPORALE  $\{x_n\}$  FORMATA DAI SUOI VALORI CAMPIONATI  $x_n = x(nT)$  (FIGURA 7.2.1).

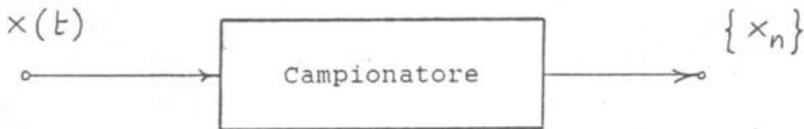
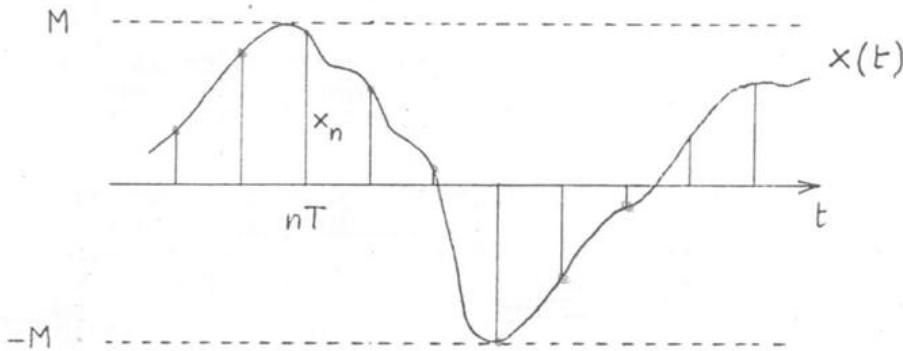


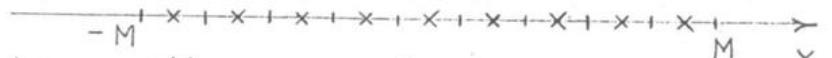
Fig. 7.2.1

2

## QUANTIZZAZIONE DEI VALORI CAMPIONATI.

CON QUESTA OPERAZIONE L'INTERVALLO DI VARIABILITÀ  $(-M, M)$  DELLA FUNZIONE  $x(t)$ , E QUINDI DI CIASCUN VALORE CAMPIONATO  $x_n$ , VIENE SUDDIVISO IN UN NUMERO  $L$  FINITO DI INTERVALLI (INTERVALLI DI QUANTIZZAZIONE) E TUTTI I VALORI DI  $x_n$  INTERNI A CIASCUNO DI QUESTI VENGONO IDENTIFICATI CON UNO DI ESSI, CHE INDICHIAVANO CON  $q_n$ .

L'OPERAZIONE DI QUANTIZZAZIONE NON È EVIDENTEMENTE REVERSIBILE. ESSA È RAPPRESENTATA, SIA IN UNA DIMENSIONE CHE IN DUE DIMENSIONI, NELLA FIGURA 7.2.2.



Le crocette rappresentano i valori di  $q_n$ .

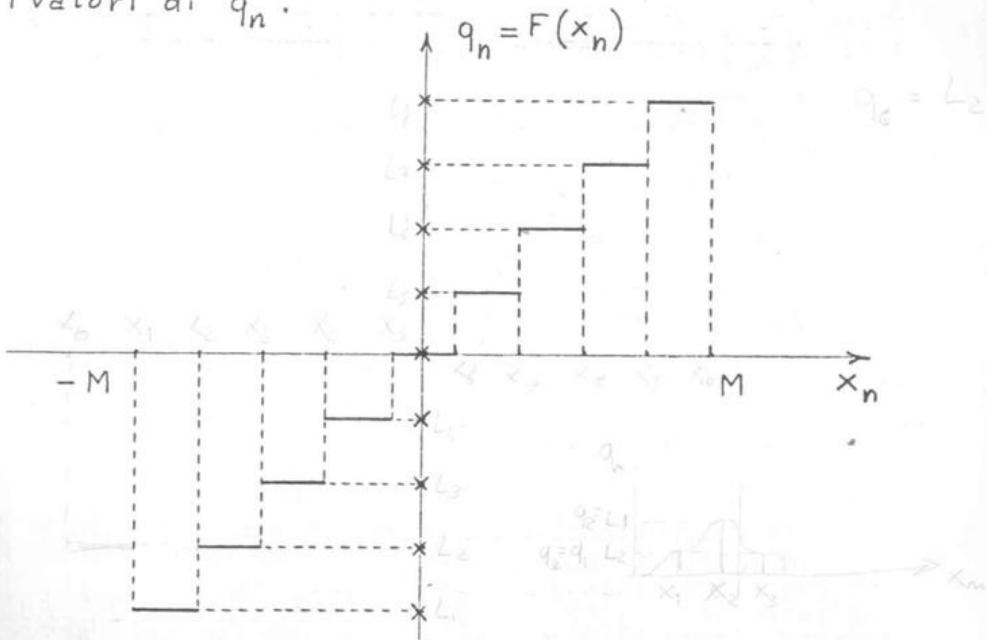


Fig. 7.2.2

### LA FUNZIONE

$$(7.2.1) \quad q_n = F(x_n),$$

POU ASSUMERE L VALORI (G  
SONO LINECCI DI QUANTI)

IN CUI LA VARIABILE DIPENDENTE  $q_n$  È SUSCETTIBILE DI  $L$  VALORI (DETTI LIVELLI DI QUANTIZZAZIONE) E QUELLA INDIPENDENTE  $x_n$  PUO' ASSUMERE GLI INFINITI VALORI COMPRESI FRA  $-M$  ED  $M$ , E' DETTA LEGGE DI QUANTIZZAZIONE.

(3)

### \* CODIFICAZIONE DEI VALORI CAMPIONATI E QUANTIZZATI.

CON QUESTA OPERAZIONE CIASCUNO DEI VALORI CAMPIONATI E QUANTIZZATI, CHE FORMANO LA SERIE TEMPORALE  $\{q_n\}$ , VIENE CODIFICATO (FIGURA 7.2.3) CON UNA PAROLA DI  $m$  BIT,  $b_n^{(1)} b_n^{(2)} \dots b_n^{(m)}$ , DETTA PAROLA DI CODICE, ESSENDO  $m$  IL PIÙ PICCOLO INTERO PER CUI È SODDISFATA LA RELAZIONE:

(7.2.2)

$$m \geq \log_2 L$$

per ogni  $q_n$  una parola di  $m$  bit

numero di livelli di quantizzazione

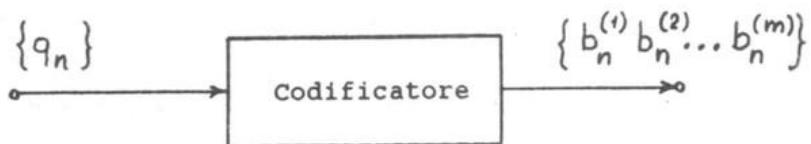


Fig. 7.2.3

IN CONCLUSIONE, LA CONVERSIONE ANALOGICO/DIGITALE È SINTETIZZATA NELLA FIGURA 7.2.4, ASSIEME AL RISULTATO CHE SI OTTIENE: UNA FORMA D'ONDA ANALOGICA  $x(t)$  VIEDE RAPPRESENTATA CON UNA SERIE BINARIA, CHE A SUA VOLTA VIENE UTILIZZATA PER GENERARE UN SEGNALE PAM (SEGNALE NUMERICO).

SI NOTI CHE ABBIAMO USATO UN UNICO BLOCCO FUNZIONALE PER INDICARE LE OPERAZIONI DI QUANTIZZAZIONE E CODIFICAZIONE IN QUANTO ESSE, PUR CONCETTUALMENTE DISTINTE, VENGONO EFFETTUATE CONTEMPORANEAMENTE CON UN UNICO CIRCUITO.

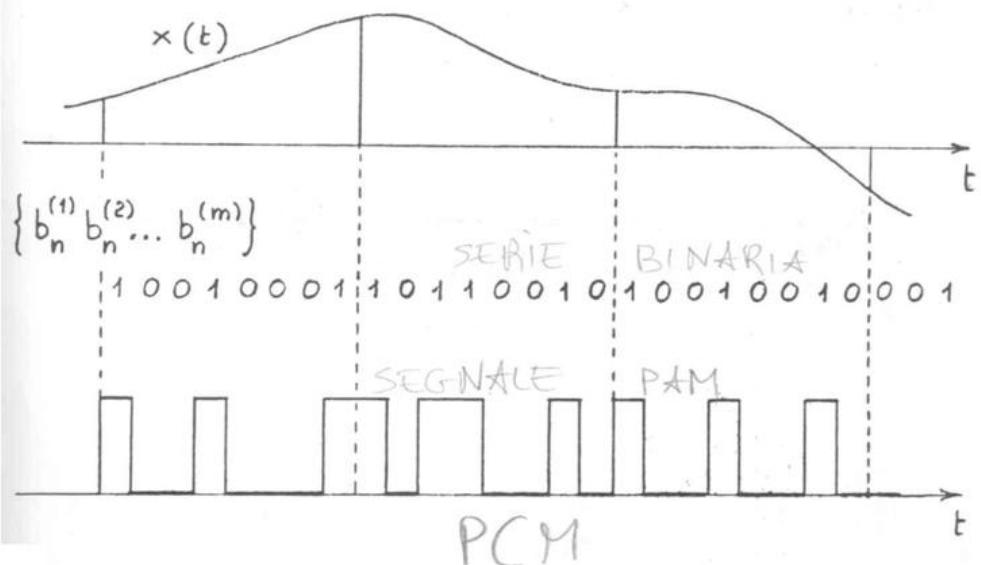
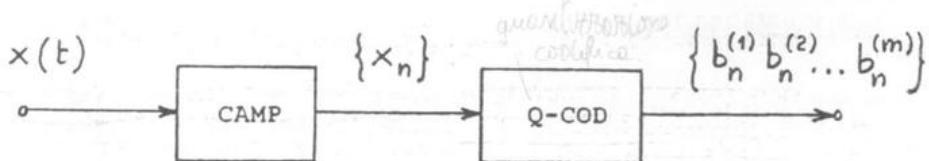


Fig. 7.2.4

IL SEGNALE NUMERICO OTTENUTO VIENE ANCHE CHIAMATO SEGNALE PCM (PCM = PULSE CODE MODULATION = MODULAZIONE DI IMPULSI IN CODICE).

AD ESEMPIO, SE  $x(t)$  E' UN SEGNALE TELEFONICO ( $f_m = 3400$  Hz), LA FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO E'  $f_o = 8$  KHz (CIOE' IL DOPPIO DELLA BANDA LORDA  $B = 4$  KHz) E LA CODIFICA, SECONDO LE NORME EUROPEE, AVVIENE CON  $m = 8$  BIT. LA CORRISPONDENTE FREQUENZA DI BIT E'

$$(7.2.3) \quad B_r = 8000 \times 8 \text{ bit/s} = 64 \text{ kbit/s.}$$

$f_o$  → lunghezza delle parole di codifica (bit)  
in parallelo

### 7.3 CONVERSIONE D/A.

LA RICOSTRUZIONE DEL SEGNALE ORIGINARIO  $x(t)$ , A PARTIRE DAL CORRISPONDENTE MESSAGGIO NUMERICO, AVVIENE CON LE SEGUENTI OPERAZIONI:

- ① \* DECODIFICAZIONE, MEDIANTE LA QUALE SI RIGENERANO I VALORI CAMPIONATI E QUANTIZZATI  $q_n$ , A PARTIRE DALLE SUCCESSIVE PAROLE DI CODICE  $b_n^{(1)} b_n^{(2)} \dots b_n^{(m)}$  (FIGURA 7.3.1)

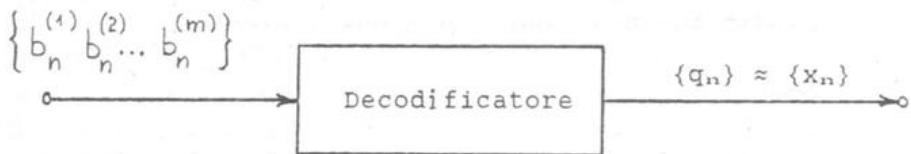


Fig. 7.3.1

ESSENDO LA QUANTIZZAZIONE UNA OPERAZIONE NON REVERSIBILE, LA SERIE  $\{q_n\}$  DEVE NECESSARIAMENTE ESSERE TRATTATA COME SE FOSSE LA SERIE  $\{x_n\}$  DEI VALORI CAMPIONATI.

A MENO DELL'ERRORE DOVUTO ALLA QUANTIZZAZIONE, LA DECODIFICAZIONE RENDE PERCIO' DISPONIBILE IL SEGNALE PAM

*SEGNALE PAM*

$$(7.3.1) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) g(t - nT),$$

GIA' CONSIDERATO NELL'ESERCIZIO N. 9 DEL CAPITOLO II (V. INOLTRE LE FIGURE 2.11.1 E 2.11.2).

MOSTRIAMO ORA COME SIA POSSIBILE RICOSTRUIRE IL SEGNALE  $x(t)$  A PARTIRE DA QUELLO PAM ESPRESSO DALLA (7.3.1).

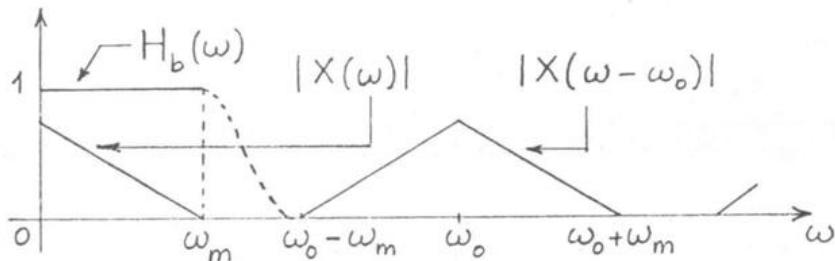
7) \* RICOSTRUZIONE DI  $x(t)$  A PARTIRE DAL SEGNALE PAM CORRISPONDENTE.

RIPRENDIAMO DALL'ESERCIZIO CITATO L'ESPRESSONE DELLA TRASFORMATA  $S(\omega)$  DEL SEGNALE PAM (7.3.1):

$$(7.3.2) \quad S(\omega) = \frac{1}{T} G(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega + k \frac{2\pi}{T}\right).$$

POICHÉ IL CAMPIONAMENTO DI  $x(t)$  È STATO EFFETTUATO IN ACCORDO ALLA (2.9.4), LA RIPETIZIONE PERIODICA DI  $X(\omega)$  CHE COMPARTE NELLA (7.3.2) DA' LUOGO ALLA RAPPRESENTAZIONE DI FIGURA 2.9.3 OVE I DIVERSI TERMINI DELLA RIPETIZIONE STESSA OCCUPANO INTERVALLI DI PULSAZIONE DISTINTI.

PERTANTO L'IMPIEGO DI UN FILTRO PASSA-BASSO CONSENTE DI ISOLARE IL TERMINE DELLA (7.3.2) CORRISPONDENTE A  $k = 0$  E, SUCCESSIVAMENTE, DI RICOSTRUIRE  $x(t)$  COME MOSTRATO IN FIGURA 7.3.2 [IN FIGURA NON ABBIAMO CONSIDERATO IL RITARDO CUI DA' ORIGINE IL FILTRO PASSA-BASSO E QUINDI ABBIAMO ASSUNTO REALE LA SUA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H_b(\omega)$ ].



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

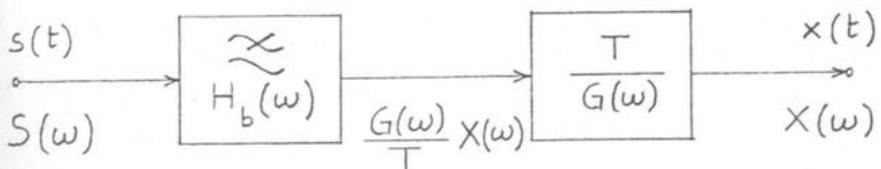


Fig. 7.3.2

SI NOTI CHE, OLTRE AL FILTRO PASSA-BASSO, E' INDICATA UNA RETE (RETE EQUALIZZATRICE) AVENTE FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $T/G(\omega)$ . TUTTAVIA, SE LA DURATA  $\tau$  DELL'IMPULSO  $g(t)$  E' MOLTO MINORE DI  $T$ , LA SUA TRASFORMATA  $G(\omega)$  E' PRATICAMENTE COSTANTE ED EGUALE A  $\tau$  NELLA BANDA  $(0, \omega_m)$ . LA RETE EQUALIZZATRICE PUO' QUINDI ESSERE OMESSA, SE INTERESSA  $x(t)$  A MENO DI UNA COSTANTE MOLTIPLICATIVA.

IN ALTRI TERMINI, PER RICOSTRUIRE - A MENO DI UNA COSTANTE MOLTIPLICATIVA E DEL RITARDO INTRODOTTO DAL CIRCUITO - IL SEGNALE ORIGINARIO A PARTIRE DAL SEGNALE PAM (7.3.1), E' SUFFICIENTE UN FILTRO PASSA-BASSO.

AD ESEMPIO, NEL CASO TELEFONICO QUESTO FILTRO HA BANDA PASSANTE FINO A 3400 Hz E BANDA ATTENUATA CHE INIZIA A 4600 Hz (V. FIGURA 7.3.3).

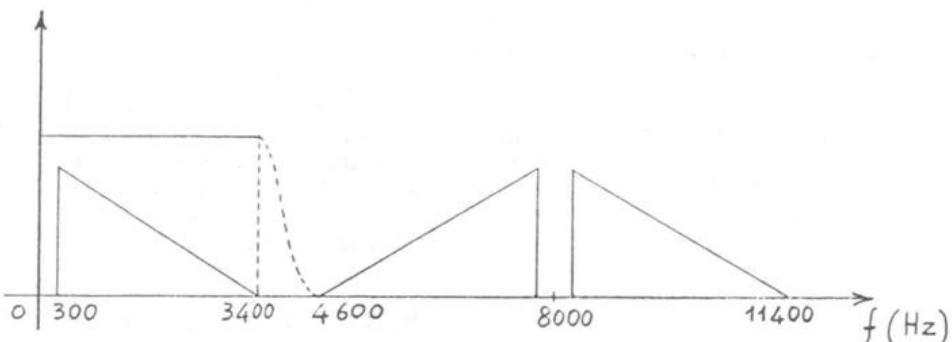


Fig. 7.3.3

CONCLUDENDO, LA CONVERSIONE D/A AVVIENE COME MOSTRATO IN FIGURA 7.3.4.

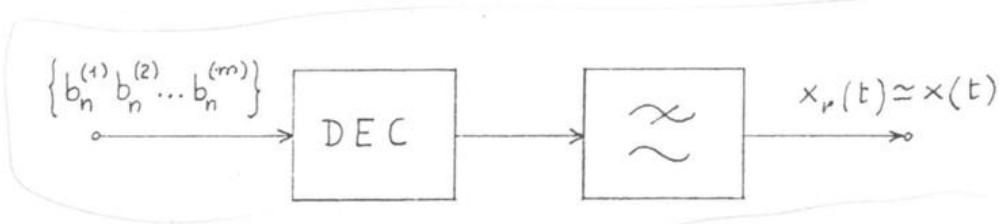


Fig. 7.3.4

NELLA FIGURA 7.3.4 IL SEGNALE RICOSTRUITO E' STATO INDICATO CON  $x_r(t)$ , E NON CON  $x(t)$ , PER METTERE IN EVIDENZA IL FATTO CHE, A CAUSA DELLA QUANTIZZAZIONE, TALE SEGNALE NON PUO' RIPRODURRE ESATTAMENTE QUELLO ORIGINARIO, ANCHE PRESCINDENDO DA RITARDI E DA COSTANTI MOLTIPLICATIVE.

### LA DIFFERENZA

(7.3.3)

$$\varepsilon(t) = x_r(t) - x(t)$$

RUMORE DI QUANTIZZAZIONE

VIENE CHIAMATA RUMORE DI QUANTIZZAZIONE.

LA RAGIONE DI TALE DENOMINAZIONE E' DOVUTA AL FATTO CHE, IN VIRTU' DELLA STESSA DEFINIZIONE (7.3.3), IL SEGNALE RICOSTRUITO PUO' ESSERE SCRITTO:

(7.3.4)  $x_r(t) = x(t) + \varepsilon(t)$ ,

OSSIA NELLA CONSUETA FORMA CHE ESPRIME IL SEGNALE RICEVUTO COME SOMMA DEL SEGNALE UTILE E DI UN TERMINE CHE SI SOVRAPPONE AD ESSO. QUEST'ULTIMO, IN GENERALE, RAPPRESENTA UN RUMORE ADDITIVO; NEL CASO IN ESAME METTE IN CONTO LA DEGRADAZIONE DOVUTA ALLA QUANTIZZAZIONE.

TALE DEGRADAZIONE PUO' ESSERE CONTENUTA ENTRO LIMITI STABILITI SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE IL NUMERO L DEI LIVELLI DI QUANTIZZAZIONE E LA CORRISPONDENTE LEGGE DI QUANTIZZAZIONE (7.2.1).

PCM - Differenziali (DPCM).

ALTRÒ LIBRO 171-175

#### 7.4 SEGNALI MULTICANALE A DIVISIONE DI TEMPO.

I MESSAGGI NUMERICI SI PRESTANO BENE A REALIZZARE UNA TECNICA DI MULTIPLAZIONE DIVERSA DA QUELLA, A DIVISIONE DI FREQUENZA (FDM), CONSIDERATA NEL PARAGRAFO 6.6.

QUESTA TECNICA, DETTA A DIVISIONE DI TEMPO (TDM = TIME DIVISION MULTIPLEX), E' SCHEMATIZZATA IN FIGURA 7.4.1.

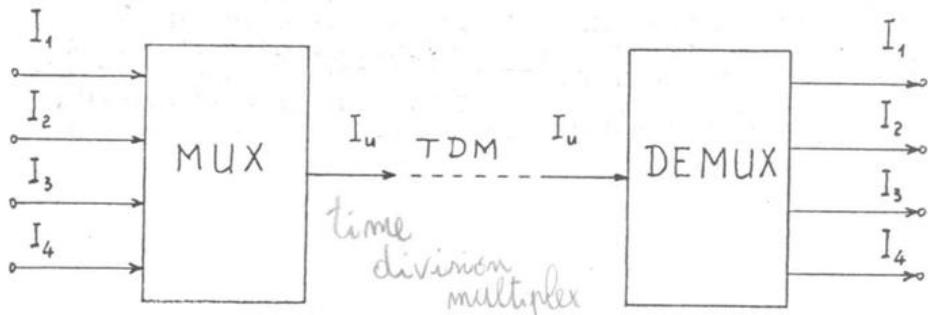


Fig. 7.4.1

PIU' FLUSSI NUMERICI, AVENTI LA STESSA FREQUENZA DI CIFRA  $B_r$ , VENGONO MEMORIZZATI IN ALTRETTANTE MEMORIE TEMPORANEE (BUFFER). LE CIFRE MEMORIZZATE SONO POI LETTE SINGOLARMENTE O A GRUPPI, PROCEDENDO SEQUENZIALMENTE SUI BUFFER (BIT PER BIT O, AD ESEMPIO, BYTE PER BYTE), PER ESSERE INSERITE NEL FLUSSO D'USCITA  $I_u$ , ED ELIMINATE DAI BUFFER STESSI.

LA FREQUENZA DI CIFRA DEL MESSAGGIO MULTICANALE  $I_u$  E' UN PO' SUPERIORE AL PRODOTTO FRA IL NUMERO DEI CANALI D'INGRESSO E  $B_r$ , POICHÉ E' NECESSARIO INSERIRE IN ESSO, IN POSIZIONI PRESTABILITE (AD ESEMPIO, ALL'INIZIO DI OGNI CICLO DI LETTURA O DI UN CERTO NUMERO DI CICLI), UNA FISSATA SEQUENZA DI BIT (PAROLA DI SINCRONISMO). QUESTA, CONOSCIUTA DAL DEMULTIPLATORE, CONSENTE LA SEPARAZIONE DEI BIT APPARTENENTI AI DIVERSI MESSAGGI NUMERICI ORIGINARI.

QUANTO ORA DETTO SI RIFERISCE AL CASO IN CUI I FLUSSI DI INGRESSO SIANO CONTROLLATI DA OROLOGI FRA LORO SINCRONIZZATI. IN CASO CONTRARIO, LE FREQUENZE DI CIFRA SONO EGUALI SOLO NOMINALMENTE ED E' NECESSARIO TENERE CONTO DI CIO' ALL'ATTO DELLA LORO MULTIPLAZIONE A DIVISIONE DI TEMPO. SULLE RELATIVE TECNICHE TUTTAVIA NON CI SOFFERMIAMO.

UNA VOLTA COSTRUITO IL MESSAGGIO MULTICANALE, ESSO VIENE RAPPRESENTATO CON UN SEGNALE NUMERICO (SEGNALE MULTICANALE). E' IMPORTANTE METTERE IN RILIEVO LA DUALITA' ESISTENTE RISPETTO ALLA TECNICA FDM CONSIDERATA NEL PARAGRAFO 6.6 GIA' CITATO: NEL CASO ORA IN ESAME I DIVERSI SEGNALI CHE COMPONGONO QUELLO MULTICANALE OCUPANO LA STESSA BANDA DI FREQUENZE; LA LORO SEPARAZIONE E' RESA POSSIBILE DAL FATTO CHE ESSI SI MANTENGONO DISTINTI NEL DOMINIO DEI TEMPI.

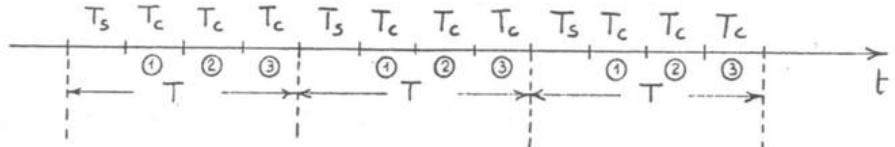
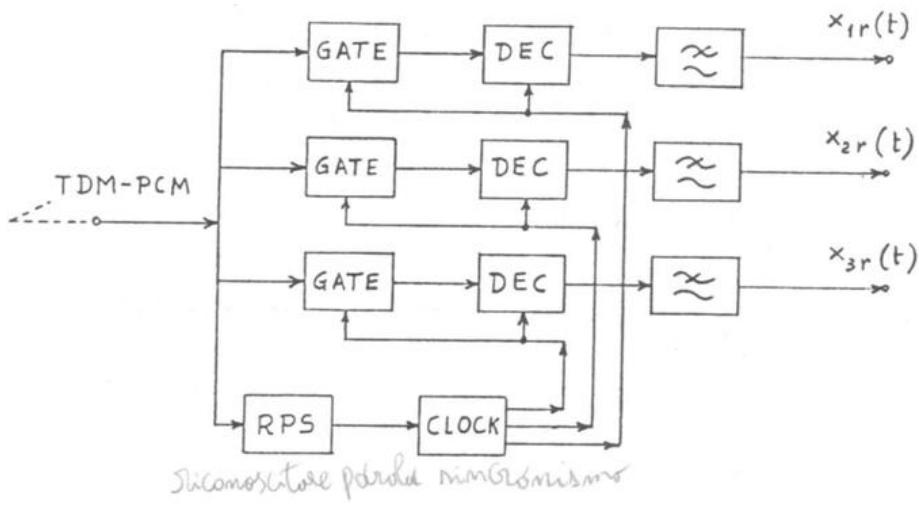
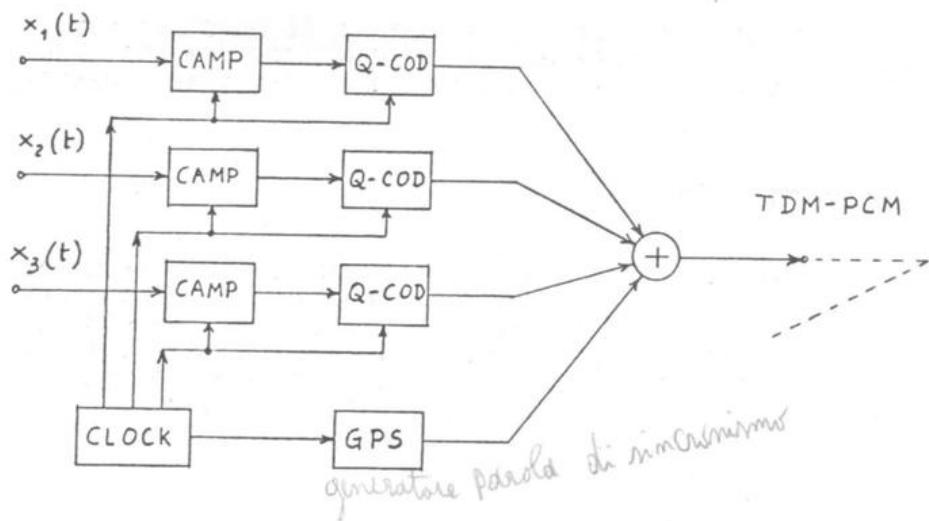
combinazione di TDM alla  
Conversione A/D di più segnali



#### 7.5 SEGNALI TDM-PCM.

IL PRINCIPIO DELLA MULTIPLAZIONE A DIVISIONE DI TEMPO PUO' ESSERE GIA' ADOTTATO ALL'ATTO DELLA CONVERSIONE A/D IN PRESENZA DI PIU' SEGNALI ANALOGICI CHE HANNO LA STESSA BANDA E CHE QUINDI POSSONO ESSERE CAMPIONATI CON LA STESSA FREQUENZA.

BASTA INFATTI, COME MOSTRATO IN FIGURA 7.5.1 (RELATIVA A TRE CANALI), CHE I BIT DI CODIFICA DI CIASCUN VALORE CAMPIONATO E QUANTIZZATO NON OCCUPINO L'INTERO INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO  $T$ , COME INDICATO IN FIGURA 7.2.4, MA SOLO UNA FINESTRA TEMPORALE DI DURATA  $T_c$ , ALLOCATA ALL'INTERNO DI CIASCUN INTERVALLO  $T$  DIVERSAMENTE DA CANALE A CANALE. LE PAROLE DI CODICE COSÌ GENERATE POSSONO ALLORA ESSERE SEMPLICEMENTE SOMMATE (SENZA RICORSO A BUFFER INTERMEDI), CONSERVANDO LA POSSIBILITÀ DI UNA LORO SUCCESSIVA SEPARAZIONE.



$T$  = intervalli di campionamento;  $T_s$  = intervalli dedicati alle parole di sincronismo;  $T_c$  = intervalli dedicati alle parole di codice.

GPS = generatore della parola di sincronismo.

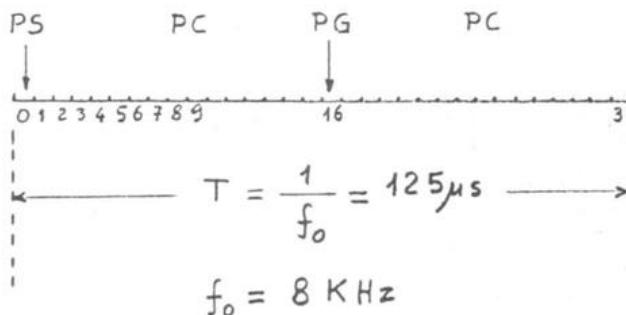
RPS = riconoscitore della parola di sincronismo.

Fig. 7.5.1

NEL CASO TELEFONICO CITIAMO LE SEGUENTI NORMATIVE  
RELATIVE ALLA FORMAZIONE DEL SEGNALE TDM-PCM DI PIU'  
BASSA CAPACITA' (PRIMO LIVELLO DELLA GERARCHIA NUMERI-  
CA):

\* NORMATIVA EUROPEA (FIGURA 7.5.2).

IL MULTIPLEX A PIU' BASSA CAPACITA' COMPRENDE 30  
CANALI TELEFONICI (30 TF): IN OGNI INTERVALLO DI CAM-  
PIONAMENTO  $T = 1/f_0$  VENGONO INSERITE 30 PAROLE DI  
CODICE A 8 BIT RELATIVE AD ALTRETTANTI CANALI TELEFONI-  
CI + UNA PAROLA DI SINCRONISMO A 8 BIT + UNA PAROLA DI  
SEGNALAZIONE A 8 BIT (COMPLESSIVAMENTE 256 BIT).



PC = parola di codice; PS = parola di sincronismo;  
PG = parola di segnalazione.

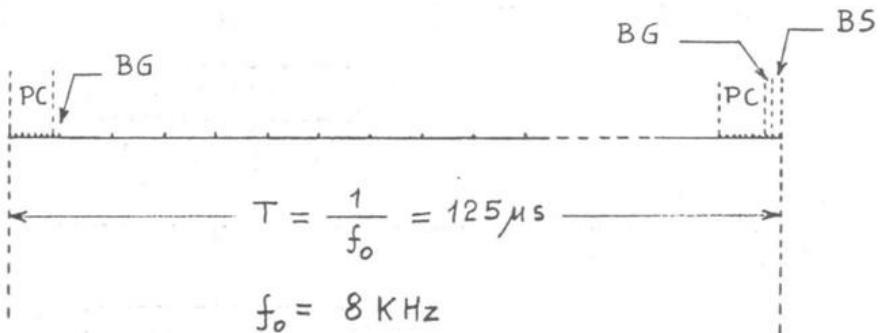
Fig. 7.5.2

LA FREQUENZA DI CIFRA CORRISPONDENTE E':

$$(7.5.1) \quad B_r = 256 \times 8000 \text{ bit/s} = 2.048 \text{ Mbit/s.}$$

\* NORMATIVA NORDAMERICANA (FIGURA 7.5.3).

IL MULTIPLEX A PIU' BASSA CAPACITA' COMPRENDE 24 CANALI TELEFONICI (24 TF): IN OGNI INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO  $T = 1/f_0$  VENGONO INSERITI 24 BYTE, CIASCUNO FORMATO DA UNA PAROLA DI CODICE A 7 BIT RELATIVA AD UN CANALE TELEFONICO E DA UN BIT DI SEGNALAZIONE, + 1 BIT DI SINCRONISMO AL TERMINE DELL'INTERVALLO T (COMPLESSIVAMENTE 193 BIT).



PC = parola di codice;  
BS = bit di sincronismo

BG = bit di segnalazione;

Fig. 7.5.3

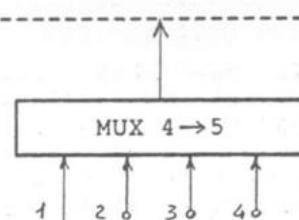
LA FREQUENZA DI CIFRA CORRISPONDENTE E':

$$(7.5.2) \quad B_r = 193 \times 8000 \text{ bit/s} = 1.544 \text{ Mbit/s.}$$

A PARTIRE DAL SEGNALE NUMERICO AL PRIMO LIVELLO APPENA INTRODOTTO (FIGURE 7.5.2 E 7.5.3), CON SUCCESSIVE MULTIPLAZIONI A DIVISIONI DI TEMPO SI COSTRUISCE LA GERARCHIA EUROPEA (FIGURA 7.5.4) E NORDAMERICANA (FIGURA 7.5.5).

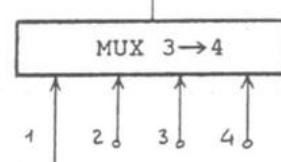
5<sup>o</sup> livello

564.992 Mbit/s - 7680 TF



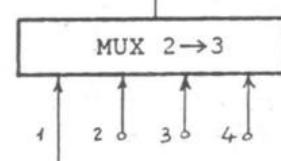
4<sup>o</sup> livello

139.264 Mbit/s - 1920 TF



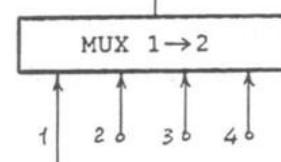
3<sup>o</sup> livello

34.368 Mbit/s - 480 TF



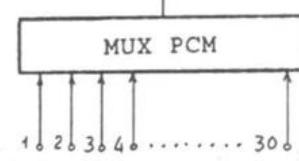
2<sup>o</sup> livello

8.448 Mbit/s - 120 TF



1<sup>o</sup> livello

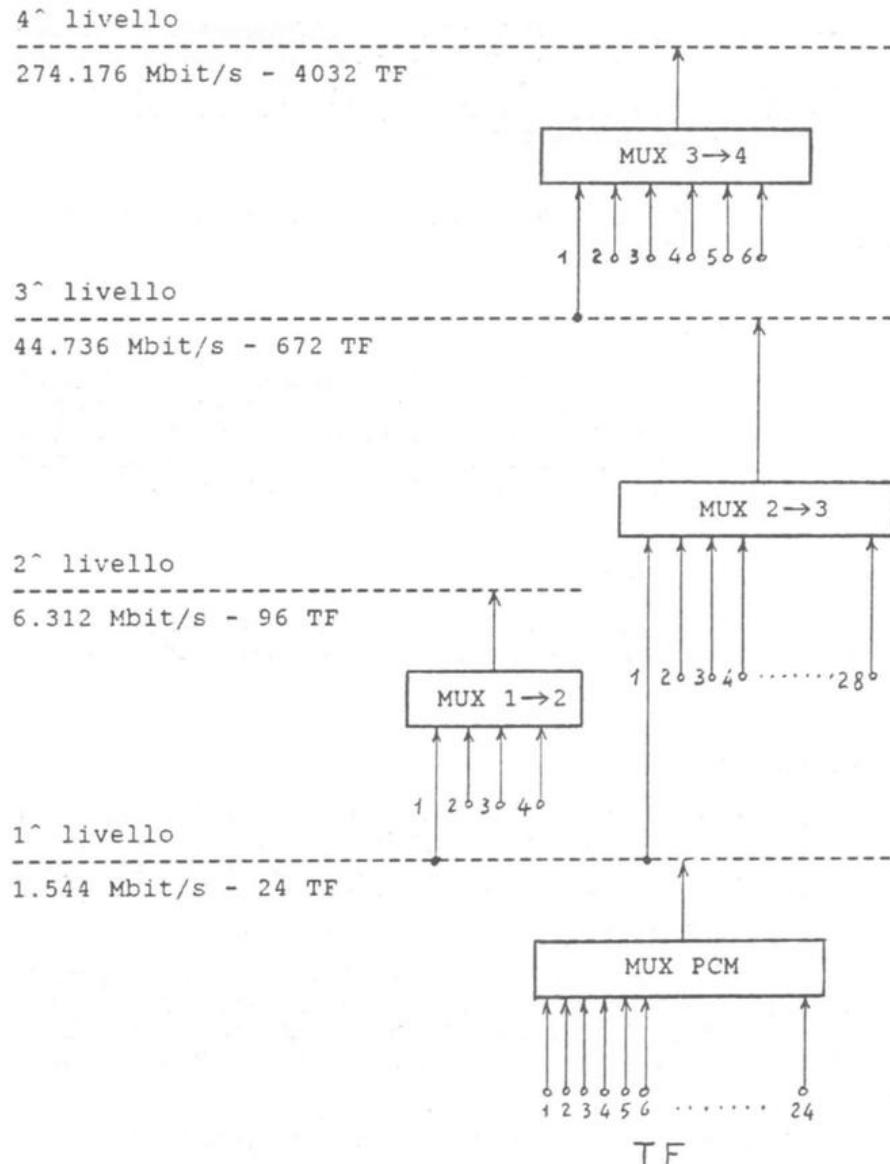
2.048 Mbit/s - 30 TF



TF

#### GERARCHIA NUMERICA EUROPEA

Fig. 7.5.4



GERARCHIA NUMERICA NORDAMERICANA

Fig. 7.5.5

LE FREQUENZE DI CIFRA DELLE GERARCHIE SOPRA RIPORTATE NON SI RIFERISCONO NECESSARIAMENTE SOLO A SEGNALI TELEFONICI. ALTRI SEGNALI, SIANO ESSI ORIGINARIAMENTE ANALOGICI O NUMERICI, POSSONO ESSERE ALLOCATI AI LIVELLI FISSATI DALLA NORMATIVA.

CON RIFERIMENTO ALLA GERARCHIA EUROPEA CITIAMO I SEGUENTI ESEMPI:

\* SEGNALE VIDEO

SENZA ALCUNA RIDUZIONE DI RIDONDANZA IL SEGNALE VIDEO - STANDARD EUROPEO A 625 LINEE - DOVREBBE ESSERE CODIFICATO AL 4<sup>o</sup> LIVELLO (140 Mbit/s). TUTTAVIA OPPORTUNE TECNICHE DI RIDUZIONE DI RIDONDANZA CONSENTONO GIA' ORA DI CODIFICARLO AL 3<sup>o</sup> LIVELLO (34 Mbit/s).

\* SEGNALE MUSICALE

IL PRIMO LIVELLO (2 Mbit/s) VIENE RAGGIUNTO CODIFICANDO E MULTIPLANDO A DIVISIONE DI TEMPO SEI CANALI MUSICALI.

\* SEGNALE DATI

IL SEGNALE DATI, CHE PUO' AVERE LE FREQUENZE DI CIFRA PIU' VARIE (AD ESEMPIO, IN bit/s, 300 - 600 - 1200 - 2400 - 4800 - 9600 - 19200 - 64000), MEDIANTE OPPORTUNE OPERAZIONI DI MULTIPLAZIONE PUO' ESSERE INSERITO NELLA GERARCHIA.

CIO' E' IMMEDIATO PER SEGNALI A 64 kbit/s (CIOE' ALLA STESSA FREQUENZA DI CIFRA DEL SEGNALE TELEFONICO PCM), MENTRE RICHIEDE OPERAZIONI PRELIMINARI DI MULTIPLAZIONE PER SEGNALI A FREQUENZA DI CIFRA PIU' BASSA.

ALTRI ESEMPI SARANNO CITATI NEL PROSSIMO PARAGRAFO.

PER COMPLETEZZA, CITIAMO ANCHE I SISTEMI DI TRASMISSIONE SU PORTANTE FISICO PER I SEGNALI NUMERICI.

PRELIMINARMENTE OSSERVIAMO CHE NELLA TRASMISSIONE DI SEGNALI NUMERICI LO SCHEMA DI FIGURA 6.6.2 PUO' ESSERE MODIFICATO COME INDICATO IN FIGURA 7.5.6, IN CUI IN LUOGO DI SEMPLICI AMPLIFICATORI COMPAGNO DEI RIGENERATORI, OSSIA CIRCUITI IN GRADO DI RICONOSCERE I SIMBOLI SUCCESSIVAMENTE TRASMESSI E QUINDI DI RIGENERARE IL SEGNALE NUMERICO, CHE IN TAL MODO VIENE RITRASMESSO PRIVO DI RUMORE. OVVIALEMENTE LA RIGENERAZIONE DEL SEGNALE AVVIENE A MENO DEGLI ERRORI COMMESSI NEL RICONOSCIMENTO DEI SIMBOLI E DI UNA DEGRADAZIONE NELLA TEMPORIZZAZIONE DEL SEGNALE STESSO (JITTER).

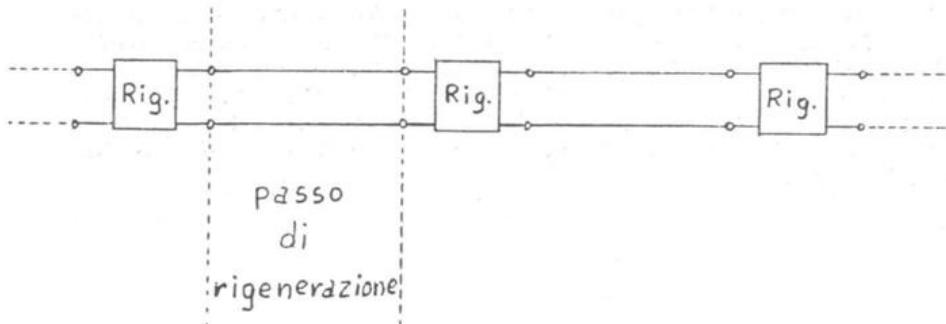


Fig. 7.5.6

L'USO DI LINEE METALLICHE SI RIFERISCE PREVALENTEMENTE AD IMPIANTI REALIZZATI IN PASSATO.

CONSIDERANDO LA GERARCHIA EUROPEA, DIAMO IL CAMPO DI IMPIEGO DELLE DIVERSE LINEE:

- \* LINEA BIFILARE (COPPIA SIMMETRICA): VIENE UTILIZZATA AL PRIMO LIVELLO (2 Mbit/s);
- \* MICROCOASSIALE 0.7/2.9: VIENE UTILIZZATO AL SECONDO E TERZO LIVELLO (8 Mbit/s E 34 Mbit/s);
- \* COASSIALINO 1.2/4.4: VIENE UTILIZZATO AL TERZO E QUARTO LIVELLO (34 Mbit/s E 140 Mbit/s);
- \* COASSIALE 2.6/9.5: VIENE UTILIZZATO AL QUINTO LIVELLO (565 Mbit/s).

IN OGNI CASO IL PASSO DI RIGENERAZIONE E' DI QUALCHE CHILOMETRO.

I SISTEMI DI TRASMISSIONE SU PORTANTE FISICO PIU' RECENTI E DI FUTURA INSTALLAZIONE FANNO GENERALMENTE USO DI CAVI CON FIBRE OTTICHE.

LA FIBRA TROVA APPLICAZIONE A TUTTI I LIVELLI DELLA GERARCHIA ED OLTRE, COME MOSTRATO DAI PIU' RECENTI SISTEMI A 2.5 Gbit/s. PER MEGLIO SFRUTTARE LE ENORMI POTENZIALITA' TRASMISSIVE OFFERTE DA UNA RETE (IN FIBRA) OTTICA IL C.C.I.T.T. HA GIA' EMANATO LO STANDARD DI UNA NUOVA GERARCHIA NUMERICA DI CUI CI LIMITIAMO A DARE L'ACRONIMO: SDH (SYNCHRONOUS DIGITAL HIERARCHY).

LA BASSISSIMA ATTENUAZIONE DELLA FIBRA HA CONSENTO DI REALIZZARE IMPIANTI CON PASSO DI RIGENERAZIONE DI DECINE O CENTINAIA DI CHILOMETRI, MENTRE GIA' SI CERCA DI PREVEDERE QUANDO SI POTRANNO INSTALLARE COLLEGAMENTI DI MIGLIAIA DI CHILOMETRI SENZA L'USO DI RIGENERATORI INTERMEDI. E' EVIDENTE L'IMPORTANZA DI TUTTO CIO', SIA PER I CAVI TERRESTRI SIA, SOPRATTUTTO, PER QUELLI SOTTOMARINI (A QUANDO L'ATTRAVERSAMENTO DELL'OCEANO ATLANTICO CON UN CAVO OTTICO SENZA RIGENERATORI SOMMERSI?).

#### 7.6 SERVIZI TELEMATICI.

RIPORTIAMO LA SEGUENTE DEFINIZIONE DELLA TELEMATICA, PROPOSTA IN SEDE INTERNAZIONALE (C.C.I.T.T.):

"TELEMATICA: SERVIZI, DIVERSI DAI SERVIZI TELEGRAFICO E TELEFONICO CONVENZIONALI, CHE POSSONO ESSERE FORNITI AGLI UTENTI DI UNA RETE DI TELECOMUNICAZIONE. QUESTI SERVIZI, CHE SPESSO USANO TECNICHE DI TELEINFORMATICA, PERMETTONO L'INVIO O LA RICEZIONE DI INFORMAZIONI DOCUMENTARIE PUBBLICHE O PRIVATE, IVI COMPRESE CONSULTAZIONE DI ARCHIVI, PRENOTAZIONI, OPERAZIONI COMMERCIALI O BANCARIE".

AL DI LA' DELLA PROPOSTA SOPRA RIPORTATA E DI ALTRE IN CORSO DI DISCUSSIONE, SI DEVE CONSIDERARE LA TELEMATICA ALLA STREGUA DI UNA NUOVA DISCIPLINA TECNICO-SCIENTIFICA, IN CUI CONFLUISCONO LE METODOLOGIE PROPRIE DELLE TELECOMUNICAZIONI E DELL'INFORMATICA AL FINE DI INDIVIDUARE SISTEMI CHE CONSENTANO LO SCAMBIO, L'ELABORAZIONE E L'IMMAGAZZINAMENTO DI INFORMAZIONI RELATIVE AI VARI ASPETTI DELL'ATTIVITA' UMANA.

CITIAMO ALCUNI SERVIZI TELEMATICI, SENZA TUTTAVIA PRESENTARE UN ELENCO ESAUSTIVO.

\* SERVIZI DI VIDEOINFORMAZIONE

VIDEOTEL, DI TIPO INTERATTIVO, GESTITO DALLA SIP (DENOMINAZIONE INTERNAZIONALE DEL SERVIZIO: VIDEOTEX).

TELEVIDEO (DENOMINAZIONE INTERNAZIONALE: TELETEXT), DI TIPO UNIDIREZIONALE, E' GESTITO DALLA RAI CHE UTILIZZA ALLO SCOPO I NORMALI MEZZI DELLA RADIODIFUSIONE TELEVISIVA.

\* TELETEX

QUESTO SERVIZIO CONSENTE LO SCAMBIO DI TESTI SCRITTI CON UNA VELOCITA' ED UNA QUALITA' GRAFICA NETTAMENTE SUPERIORI A QUELLE DEL TELEX. MENTRE QUEST'ULTIMO, COME ABBIAMO DETTO NEL PARAGRAFO 7.1, FA USO DI UN SEGNALE NUMERICO ASINCRONO A 50 bit/s, NEL TELETEX IL SEGNALE, SINCRONO A 2400 bit/s, VIENE SCAMBIATO FRA LE MEMORIE DEGLI ELABORATORI TERMINALI. INOLTRE LA CODIFICA DEL TELETEX E' A 8 BIT (CONTRO I 5 BIT + START/STOP DEL TELEX).

\* TELEFAX

QUESTO SERVIZIO DI FOTOCOPIATURA A DISTANZA, GIA' CITATO NEL CAPITOLO VI (DEDICATO AI SEGNALI ANALOGICI E RELATIVI SERVIZI), VIENE ESPLETATO IN FORMA NUMERICA MEDIANTE IL SEGNALE FACSIMILE CODIFICATO AD UNA FREQUENZA DI CIFRA CHE PUO' ARRIVARE A 9600 bit/s.

\* VIDEOLENTO

ANCHE QUESTO SERVIZIO E' GIA' STATO CITATO NEL CAPITOLO VI. IL RELATIVO SEGNALE NUMERICO PUO' AVERE FREQUENZA DI CIFRA FINO A 64 kbit/s.

\* AUDIOCONFERENZA

QUESTO SERVIZIO PUO' ESSERE INTEGRATO CON TELESCRITTURA (CHE METTE A DISPOSIZIONE DI UTENTI LONTANI UNO SPAZIO GRAFICO COMUNE), VIDEOLENTO, FACSIMILE, TERMINALI DATI.

\* VIDEOCONFERENZA

CON RIDUZIONE DI RIDONDANZA DEL SEGNALE IMMAGINE, IL SERVIZIO VIENE FORNITO AL PRIMO LIVELLO GERARCHICO (2 Mbit/s).

\* TELEMEDICINA

QUESTO SERVIZIO CONSENTE DI TRASMETTERE A DISTANZA SEGNALI ELETTRICI CHE RAPPRESENTANO VALORI E ANDAMENTI NEL TEMPO DI GRANDEZZE BIOLOGICHE TRAMITE LA NORMALE RETE TELEFONICA (ATTUALMENTE OPERANO I SEGUENTI SISTEMI: CARDIOTELEFONO, CARDIOBIP, TELEEELETROENCEFALOGRAFO, TELEANALISI, TELECONSULTO).

CAPITOLO VIII

IL RUMORE DI FONDO

CALCOLO DI MASSIMA DI ALCUNI COLLEGAMENTI



## 8.1 IL RUMORE NEI CIRCUITI ELETTRICI.

QUALUNQUE CIRCUITO ELETTRICO NON SI LIMITA AD EFFETTUARE LE OPERAZIONI DI ELABORAZIONE DEI SEGNALI PER LE QUALI E' STATO PROGETTATO E REALIZZATO. I SUOI COMPONENTI SONO INFATTI IN GENERALE SORGENTI DI TENSIONI E CORRENTI SPURIE (IN UNA SOLA PAROLA, DI RUMORE), I CUI EFFETTI INDESIDERATI SONO PRESENTI ALL'USCITA DEL CIRCUITO ASSIEME AL SEGNALE UTILE.

IN QUESTO PARAGRAFO PRESENTEREMO LE PRINCIPALI CAUSE DI RUMORE NEI CIRCUITI ELETTRICI. NEI PARAGRAFI SUCCESSIVI VEDREMO COME SIA POSSIBILE CARATTERIZZARE LA RUMOROSITA' DI UN CIRCUITO MEDIANTE UNA OPPORTUNA GRANDEZZA (CIFRA DI RUMORE O TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE) ED INFINE VALUTEREMO GLI EFFETTI DEL RUMORE IN ALCUNI COLLEGAMENTI.

PER INTRODURRE ALCUNI FENOMENI MICROSCOPICI DAI QUALI TRAE ORIGINE IL RUMORE NEI CIRCUITI, CONSIDERIAMO UN BIPOLO PRIVO DI SORGENTI DI SEGNALE, DESCRITTO DALLA CARATTERISTICA STATICÀ CORRENTE/TENSIONE:

$$(8.1.1) \quad I_o = F(V_o) .$$

APPLICHIAMO AI SUOI MORSETTI UNA TENSIONE  $V_o$  ED OSSERVIAMO LA CORRENTE  $I$  CHE LO ATTRAVERSA (FIGURA 8.1.1).

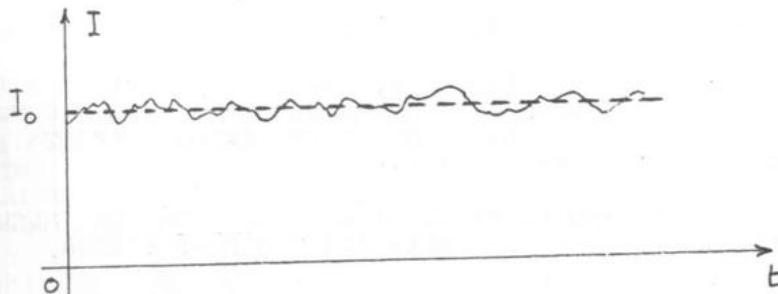
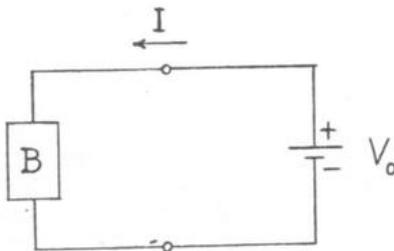


Fig. 8.1.1

L'ESPERIENZA DIMOSTRA CHE LA CORRENTE  $I = I(t)$  E' LA SOMMA DI UN VALOR MEDIO  $I_o$ , DETERMINISTICAMENTE LEGATO A  $V_o$  SECONDO LA (8.1.1) E DI UNA FLUTTUAZIONE  $i(t)$  CHE HA CARATTERISTICHE DEL TUTTO ALEATORIE. IN FORMULA:

$$(8.1.2) \quad I(t) = I_o + i(t) .$$

LA (8.1.2) GIUSTIFICA IL CIRCUITO EQUIVALENTE DEL BIPOLO CONSIDERATO RIPORTATO IN FIGURA 8.1.2, IN CUI COMPARTE UN GENERATORE DI CORRENTE IMPRESSA  $i(t)$  IN PARALLELO AL BIPOLO IDEALE B, CIOE' AL BIPOLO PER CUI E' VERIFICATA ISTANTE PER ISTANTE LA (8.1.1).

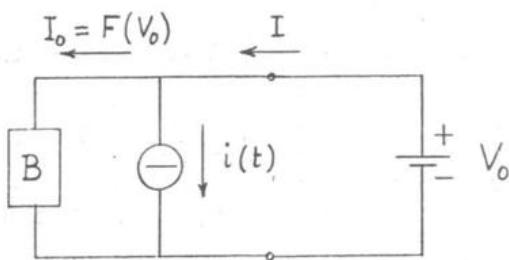


Fig. 8.1.2

LA PRESENZA DELLA FLUTTUAZIONE  $i(t)$  PUO' ESSERE SPIEGATA CONSIDERANDO LA NATURA MICROSCOPICA DEL PASSAGGIO DELLA CORRENTE ELETTRICA: ESSA INFATTI HA UN CARATTERE GRANULARE ESSENDO DOVUTA AL MOTO DI PORTATORI DI CARICA (AD ESEMPIO, ELETTRONI LIBERI).

ESAMINIAMO ORA DUE CASI LIMITE:

- \* NEL PRIMO I PORTATORI DI CARICA SI MUOVONO SOLAMENTE PER EFFETTO DEL CAMPO ELETTRICO ESTERNO, DOVUTO ALLA TENSIONE  $V_o$ , ALLA QUALE E' QUINDI LEGATA LA FLUTTUAZIONE DI CORRENTE  $i(t)$ ;
- \* NEL SECONDO LA TENSIONE ESTERNA NON HA ALCUNA INFLUENZA SULLA ORIGINE DELLA FLUTTUAZIONE STESSA.

PRIMO CASO:

CONSIDERIAMO UN DIODO IN CUI I PORTATORI DI CARICA SI MUOVANO INDIPENDENTEMENTE GLI UNI DAGLI ALTRI NELLO SPAZIO INTERELETTRODICO (USIAMO QUESTA LOCUZIONE IN SENSO GENERALIZZATO) SOTTO LA SOLA AZIONE DEL CAMPO ELETTRICO APPLICATO DALL'ESTERNO.

IN QUESTO CASO INDICHIAMO CON  $f(t)$  LA FORMA D'ONDA DEL CONTRIBUTO ALLA CORRENTE  $I(t)$  DI CIASCUN PORTATORE. TALE FORMA D'ONDA HA DURATA FINITA  $\tau_e$  (TEMPO DI TRANSITO) ED IL SUO INTEGRALE ESTESO ALL'INTERVALLO  $\tau_e$  E' EGUALE A  $q$  (CARICA ELETTRICA DI CIASCUN PORTATORE).

SCRIVIAMO DUNQUE:

$$(8.1.3) \quad I(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(t-t_k) ,$$

OVE GLI INSTANTI  $t_k$  SONO VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI.

LA CORRENTE  $I(t)$  ESPRESSA DALLA (8.1.3) RISULTA PERTANTO UNA FUNZIONE ALEATORIA A CAUSA DELL'ALEATORIETA' DEGLI INSTANTI  $t_k$ : SI PUO' DEMONSTRARE CHE TALE PROCESSO STOCASTICO E' ERGODICO CON VALOR MEDIO

$$(8.1.4) \quad I_o = E[I(t)] = \langle I(t) \rangle = nq ,$$

ESSENDO  $n$  IL NUMERO DEI PORTATORI DELLA CARICA  $q$  CHE MEDIAMENTE ATTRAVERSANO LO SPAZIO INTERELETTRODICO NELL'UNITA' DI TEMPO.

SI PUO' DEMONSTRARE INOLTRE CHE LA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA DELLA FLUTTUAZIONE  $i(t)$ , PER FREQUENZE MOLTO MINORI DELL'INVERSO DEL TEMPO DI TRANSITO  $\tau_e$ , VALE:

$$(8.1.5) \quad G_e(f) = 2qI_o , \quad (f \ll 1/\tau_e) .$$

LA GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE RICHIAMATA NEL PARAGRAFO 5.6 CONSENTE DI AFFERMARE CHE IL PROCESSO  $i(t)$  E' GAUSSIANO.

IL CIRCUITO EQUIVALENTE DI FIGURA 8.1.2 PUO' PERTANTO ESSERE RAPPRESENTATO COME IN FIGURA 8.1.3, OVE COMPARTE UN GENERATORE DIPENDENTE (CIOE' FUNZIONE DEL REGIME ELETTRICO) DI CORRENTE IMPRESSA  $i(t)$  AVENTE DENSITA' DI POTENZA ESPRESSA DALLA (8.1.5).

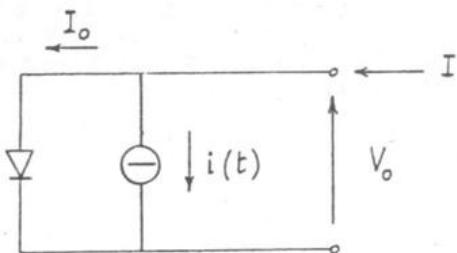


Fig. 8.1.3

SECONDO CASO:

CONSIDERIAMO UN CONDUTTORE (RESISTORE), ALL'INTERNO DEL QUALE, IN CONSEGUENZA DELL'AGITAZIONE TERMICA, SI HANNO URTI CONTINUI FRA I PORTATORI DI CARICA (ELETTRONI LIBERI), CHE SI MUOVONO ANCORA INDIPENDENTEMENTE GLI UNI DAGLI ALTRI, E GLI ATOMI DEL RETICOLO CRISTALLINO. TALE MOTO DISORDINATO DEGLI ELETTRONI NON RISULTI MODIFICATO DALLA PRESENZA DEL CAMPO ELETTRICO DOVUTO ALLA TENSIONE  $V_o$ .

L'ALEATORIETA' DEL FENOMENO MICROSCOPICO DI AGITAZIONE TERMICA PUO' SPIEGARE COME NASCA LA FUNZIONE ALEATORIA

$$(8.1.6) \quad I(t) = I_o + i(t) .$$

$i(t)$  E' UN PROCESSO ERGODICO, GAUSSIANO (SEMPRE IN VIRTU' DELLA GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE), A VALOR MEDIO NULLO.

SI PUO' DEMOSTRARE CHE LA SUA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA, PER FREQUENZE MOLTO INFERIORI ALL'INVERSO DEL TEMPO CHE MEDIAMENTE INTERCORRE FRA DUE URTI SUCCESSIVI DI UN ELETTRONE (A TEMPERATURA AMBIENTE, DIVERSE DECINE DI GHZ), E' ESPRESSA DA:

$$(8.1.7) \quad G_e(f) = 4kT/R$$

ESSENDO  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K LA COSTANTE DI BOLTZMANN E  $T$  LA TEMPERATURA ASSOLUTA DEL RESISTORE.

QUANTO DETTO GIUSTIFICA IL CIRCUITO EQUIVALENTE DI UN RESISTORE RIPORTATO IN FIGURA 8.1.4, CHE A SUA VOLTA, PER IL TEOREMA DI THEVENIN, PUO' ESSERE POSTO NELLA FORMA DI FIGURA 8.1.5.

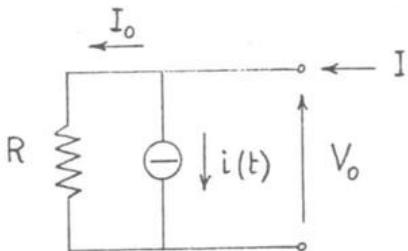


Fig. 8.1.4

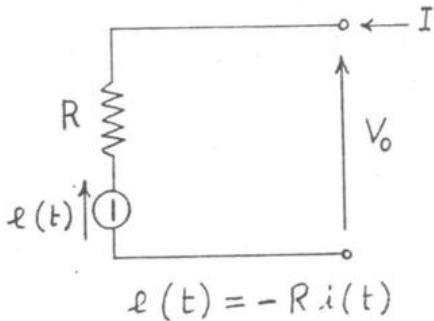


Fig. 8.1.5

ENTRAMBI I GENERATORI (DI CORRENTE IMPRESSA O DI F.E.M.) SONO INDIPENDENTI, CIOE' NON RISENTONO DEL REGIME ELETTRICO IMPOSTO DALL'ESTERNO.

LA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA DELLA F.E.M. DI RUMORE  $e(t)$  CHE COMPARTE NELLA FIGURA 8.1.5 E' ESPRESSA DA:

$$(8.1.8) \quad G_e(f) = 4kTR$$

IL PRIMO CASO SPIEGA IL RUMORE GRANULARE (SHOT NOISE) CHE NASCE NEI DIODI PERCORSI DA CORRENTE. TALE RUMORE SI MANIFESTA ANCHE IN PRESENZA DI INTERAZIONI FRA I PORTATORI DI CARICA CHE ATTRAVERSANO LO SPAZIO INTERELETTRODICO; IN TALE CIRCOSTANZA PERO' NON VALE PIU' LA (8.1.5) [FORMULA DI SCHOTTKY].

IL SECONDO CASO SPIEGA IL RUMORE TERMICO (EFFETTO JOHNSON), CHE SI MANIFESTA NEI CONDUTTORI (RESISTORI) E' PIU' IN GENERALE, NEI BIPOLI PASSIVI NORMALI.

PER QUESTI ULTIMI, DETTA

$$(8.1.9) \quad Z(f) = R(f) + jX(f)$$

L'IMPEDENZA DEL BIPOLO, IL CIRCUITO EQUIVALENTE DI FIGURA 8.1.5 DIVENTA QUELLO DI FIGURA 8.1.6, OVE LA F.E.M. DI RUMORE  $e(t)$  HA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA ANCORA ESPRESSA DALLA (8.1.8) [FORMULA DI NYQUIST], IN CUI PERO' SI CONSIDERI  $R(f)$  IN LUOGO DI  $R$ :

$$(8.1.10) \rightarrow G_e(f) = 4kTR(f)$$

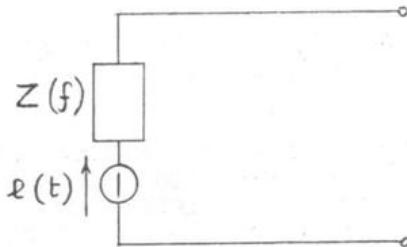


Fig. 8.1.6

SI NOTI CHE L'EFFETTO JOHNSON E' LEGATO ALLA PRESENZA DI DISSIPAZIONE: UN CONDENSATORE O UN INDUTTORE IDEALI NON DANNO ORIGINE A RUMORE.

ACCENNIAMO ORA AD ALTRE CAUSE DI RUMORE.

#### RUMORE DI PARTIZIONE (PARTITION NOISE)

SI MANIFESTA NEI CIRCUITI A TRE PORTE, QUANDO LA CORRENTE IN INGRESSO AD UNA PORTA SI RIPARTISCE, IN USCITA, FRA LE ALTRE DUE. SEMPRE A CAUSA DEI MECCANISMI MICROSCOPICI CHE STANNO ALLA BASE DEL FUNZIONAMENTO DEL DISPOSITIVO, TALE RIPARTIZIONE NON E' COSTANTE NEL TEMPO, MA VARIA IN MANIERA ALEATORIA, DETERMINANDO UNA ULTERIORE CAUSA DI RUMORE.

## RUMORE DI SCINTILLAZIONE (FLICKER NOISE)

E' UN RUMORE LA CUI DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA CRESCHE AL DIMINUIRE DELLA FREQUENZA. SULLA SUA ORIGINE, CHE HA LUOGO IN CORRISPONDENZA DI SUPERFICI DI SEPARAZIONE FRA PARTI DIVERSE DEL DISPOSITIVO, NON CI SOFFERMIAMO.

IN CONCLUSIONE, RESISTORI (RUMORE TERMICO) E DISPOSITIVI A SEMICONDUTTORE (RUMORE GRANULARE, RUMORE DI PARTIZIONE) RENDONO UN CIRCUITO RUMOROSO.

GLI EFFETTI DI TALE RUMOROSITA' POSSONO ESSERE VALUTATI COMPLETANDO IL CIRCUITO CON GENERATORI EQUIVALENTI DI CORRENTE IMPRESSA O DI F.E.M., SIA DI TIPO DIPENDENTE (RUMORE GRANULARE, RUMORE DI PARTIZIONE) CHE DI TIPO INDIPENDENTE (RUMORE TERMICO).

NON DAREMO QUESTI CIRCUITI EQUIVALENTI (OLTRE A QUELLI GIA' VISTI). MOSTREREMO PERO' CHE LA RUMOROSITA' DI UN CIRCUITO PUO' ESSERE CARATTERIZZATA MEDIANTE UNA GRANDEZZA (CIFRA DI RUMORE O TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE), CHE E' SEMPLICE DETERMINARE ANALITICAMENTE E/O MISURARE, NOTA LA QUALE E' POSSIBILE IMPOSTARE IL PROGETTO DI UN SISTEMA DI TRASMISSIONE.

PER QUANTO RIGUARDA IL RUMORE NEI SISTEMI DI TRASMISSIONE SU FIBRA OTTICA, QUESTO SARA' PRESO IN CONSIDERAZIONE NEL SUCCESSIVO PARAGRAFO 8.10.

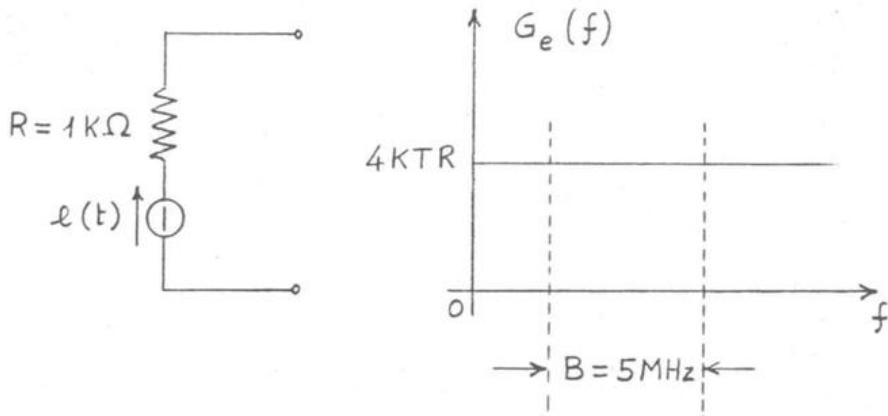
PERALTRO, GIA' NEL PROSSIMO ESERCIZIO N. 2, DAREMO L'ESPRESSONE DELLA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA DEL RUMORE TERMICO UTILIZZABILE ANCHE A QUESTE NUOVE FREQUENZE DI LAVORO [FORMULA (8.2.11)]. COME VERRA' SEGNALATO, LA (8.1.8) E' UNA OTTIMA APPROSSIMAZIONE DELLA (8.2.11) FINO A FREQUENZE DI DIVERSE DECINE DI GIGAHERTZ.

UN'ULTIMA OSSERVAZIONE: COME GIA' DETTO NEL PARAGRAFO 5.6, LA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA DI UN PROCESSO GAUSSIANO NE CONSENTE UNA DESCRIZIONE STATISTICA COMPLETA.

X

ESERCIZIO N. 1

SI CONSIDERI UN RESISTORE AVENTE RESISTENZA  $R = 1\text{ k}\Omega$  ALLA TEMPERATURA DI  $18^\circ\text{C}$ , CALCOLARE IL VALORE EFFICACE DELLA F.E.M. DI RUMORE IN UNA BANDA  $B = 5\text{ MHz}$ .



INDICANDO CON  $e_B(t)$  L'INSIEME DELLE COMPONENTI SPETTRALI DI  $e(t)$  ALL'INTERNO DELLA BANDA  $B$  E CON  $E_B$  IL SUO VALORE EFFICACE, POSSIAMO SCRIVERE:

$$(8.1.11) \quad E_B = \sqrt{\langle e_B^2(t) \rangle} = \sqrt{4kTRB}$$

*La varianza media*

INTRODUCENDO I VALORI NUMERICI [IN PARTICOLARE,  $T = (273+18)^\circ\text{K}$ ], RISULTA:

$$E_B = 9 \mu\text{V} .$$

SI NOTI CHE IL VALORE TROVATO PUO' NON ESSERE AFFATTO TRASCURABILE, SOPRATTUTTO QUANDO IL RESISTORE SI TROVA ALL'INGRESSO DI UN AMPLIFICATORE PER DEBOLI SEGNALI.

## 8.2 POTENZA DISPONIBILE DI UNA SORGENTE DI SEGNALE. GUADAGNO DISPONIBILE DI UN QUADRIPOLO LINEARE.

PRIMA DI INTRODURRE I PARAMETRI CHE CARATTERIZZANO LA RUMOROSITA' DI UN CIRCUITO, RICORDIAMO ALCUNE DEFINIZIONI.

CONSIDERIAMO UNA SORGENTE DI SEGNALE, CON F.E.M.  $e_s(t)$  SINUSOIDALE (FREQUENZA  $f$  E VALORE EFFICACE  $E_s$ ) E IMPEDENZA INTERNA CHE ASSUMIAMO REALE ED EGUALE A  $R$  NELLA BANDA DI FREQUENZE DI LAVORO (FIGURA 8.2.1).

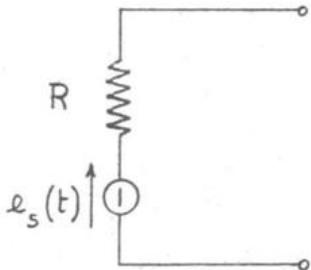


Fig. 8.2.1

E' NOTO CHE QUESTA SORGENTE EROGA LA MASSIMA POTENZA QUANDO E' CHIUSA SU UN CARICO ADATTATO, AVENTE CIOE' IMPEDENZA CONIUGATA DI QUELLA INTERNA DELLA SORGENTE; QUINDI, NEL CASO IN ESAME, QUANDO IL CARICO E' PURAMENTE RESISTIVO CON RESISTENZA  $R_c$  EGUALE A  $R$  (FIGURA 8.2.2).

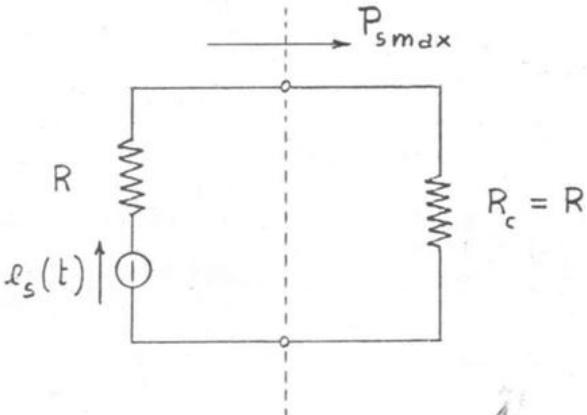


Fig. 8.2.2

SI DEFINISCE POTENZA DISPONIBILE DELLA SORGENTE LA MASSIMA POTENZA  $P_{\text{max}}$  CHE ESSA PUO' EROGARE.

DALLA FIGURA 8.2.2 RICAVIAMO:

$$(8.2.1) \quad P_{\text{max}} = \frac{\langle e_s^2(t) \rangle}{4R} = \frac{E_s^2}{4R} .$$

IN GENERALE LA POTENZA DISPONIBILE DI UNA SORGENTE DI SEGNALE NON RAPPRESENTA LA POTENZA EFFETTIVAMENTE EROGATA; CIO' SI VERIFICA SOLO IN CONDIZIONI DI ADATTAMENTO.

LA SORGENTE DI SEGNALE SIA ORA CONNESSA AI MORSETTI D'INGRESSO DI UN QUADRIPOLO LINEARE  $Q$ . IL NUOVO SISTEMA E' RAPPRESENTATO IN FIGURA 8.2.3 ASSIEME AL SUO CIRCUITO EQUIVALENTE AI MORSETTI DI USCITA (SI NOTI CHE L'IMPEDENZA D'USCITA E' ASSUNTA REALE).

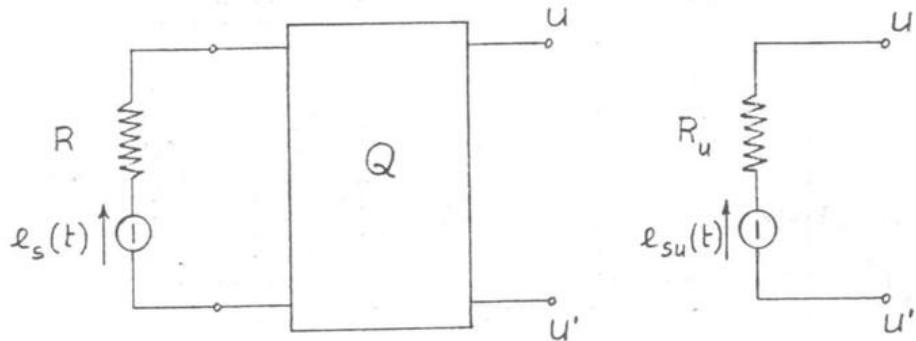


Fig. 8.2.3

LA SORGENTE EQUIVALENTE AI MORSETTI DI USCITA HA LA POTENZA DISPONIBILE:

$$(8.2.2) \quad P_{\text{sumax}} = \frac{\langle e_{su}^2(t) \rangle}{4R_u} = \frac{E_{su}^2}{4R_u} .$$

~~IL RAPPORTO  $G_d$  FRA LE POTENZE DISPONIBILI (8.2.2) E (8.2.1),~~

(8.2.3)  $G_d = P_{dumax}/P_{demax}$ ,

OSSIA FRA LA POTENZA DISPONIBILE DELLA SORGENTE + QUADRIPOLO E QUELLA DELLA SOLA SORGENTE, SI CHIAMA GUADAGNO DISPONIBILE DEL QUADRIPOLO RIFERITO ALLA RESISTENZA  $R$ . ESSO DIPENDE DA  $R$  E, IN GENERALE, DALLA FREQUENZA  $f$  DEL REGIME SINUSOIDALE:

(8.2.4)  $G_d = G_d(f)$ .

IL GUADAGNO DISPONIBILE NON DEVE ESSERE CONFUSO CON IL RAPPORTO FRA LE POTENZE  $P_u$  E  $P_s$  AI MORSETTI DI USCITA E D'INGRESSO DEL QUADRIPOLO (FIGURA 8.2.4). CIO' SI VERIFICA SOLO SE IL QUADRIPOLO E' ADATTATO, NEL SENSO CHE ORA RICORDIAMO.

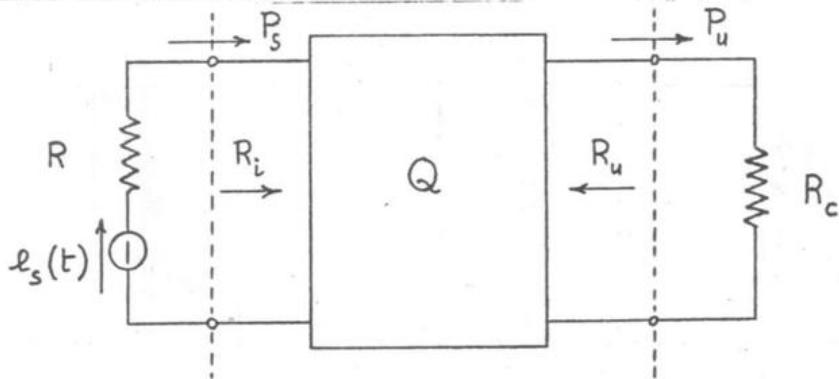


Fig. 8.2.4

ASSUMENDO ANCORA REALI ALLA FREQUENZA DI LAVORO LE IMPEDENZE IN GIOCO, SIA

(8.2.5)  $R_i = R_i(Q, R_c)$

LA RESISTENZA DI INGRESSO QUANDO I MORSETTI DI USCITA DEL QUADRIPOLO  $Q$  SONO CHIUSI SULLA RESISTENZA  $R_c$  E

(8.2.6)  $R_u = R_u(Q, R)$

LA RESISTENZA DI USCITA QUANDO I MORSETTI DI INGRESSO SONO CHIUSI SU  $R$ .

SI PUO' DEMONSTRARE CHE IL SISTEMA

$$(8.2.7) \quad R_1(Q, R_c) = R$$
$$R_u(Q, R) = R_c$$

AMMETTE SOLUZIONE, E CHE QUESTA E' UNICA.

IN ALTRI TERMINI ESISTE, ED E' UNICA, UNA COPPIA DI RESISTENZE ( $R, R_c$ ) PER CUI SI HA ADATTAMENTO SIA AI MORSETTI D'INGRESSO CHE AI MORSETTI DI USCITA. QUANDO IL QUADRIPOLO E' CONNESSO A TALI RESISTENZE, SI DICE ADATTATO.

IN TALE CONFIGURAZIONE LE POTENZE AD ENTRAMBE LE COPPIE DI MORSETTI SONO QUELLE MASSIME (FIGURA 8.2.5) ED IL GUADAGNO DISPONIBILE COINCIDE CON IL RAPPORTO FRA LE POTENZE D'USCITA E D'INGRESSO.

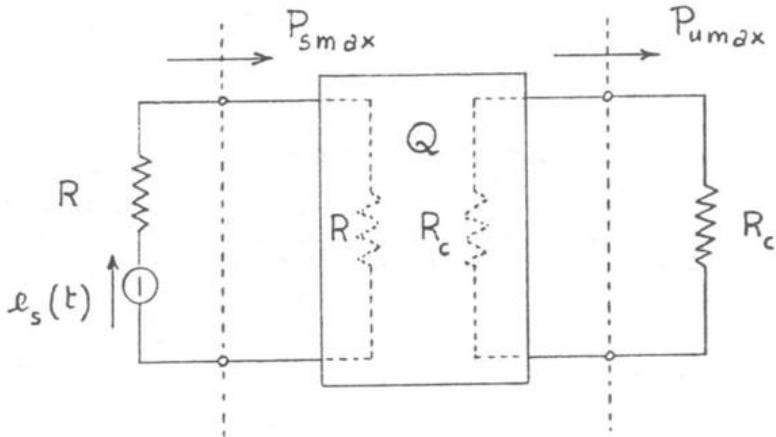


Fig. 8.2.5

SI NOTI CHE QUANDO VIENE DATO IL GUADAGNO DISPONIBILE DI UN QUADRIPOLO LINEARE SENZA PRECISARE LA RESISTENZA DI RIFERIMENTO, E' SOTTINTESO CHE QUESTA E' IL PRIMO ELEMENTO DELLA COPPIA ( $R, R_c$ ) PER CUI IL QUADRIPOLO RISULTA ADATTATO.

SE  $R = R_c$ , IL VALORE COMUNE E' DETTO LIVELLO DI IMPEDIMENTA DEL QUADRIPOLO STESSO; FREQUENTE E' IL VALORE  $R = 75 \Omega$ .

CONSIDERIAMO ORA LA CATENA DI QUADRIPOLI DI FIGURA  
8.2.6.

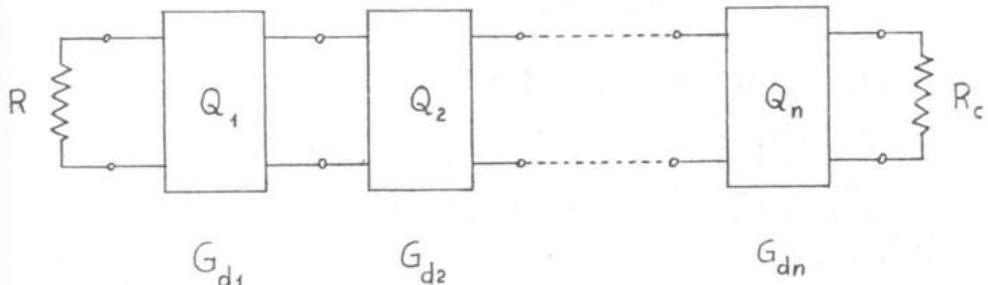


Fig. 8.2.6

SIANO  $G_d$  IL GUADAGNO DISPONIBILE DELLA CATENA RIFERITO ALLA RESISTENZA  $R$  E  $G_{di}$  IL GUADAGNO DISPONIBILE DELL' $i$ -ESIMO QUADRIPOLO RIFERITO ALLA RESISTENZA DI USCITA DELLA SORGENTE EQUIVALENTE A MONTE DEI SUOI MORSETTI D'INGRESSO. E' IMMEDIATO DEMONSTRARE CHE:

$$(8.2.8) \quad G_d = G_{d1} \cdot G_{d2} \cdots G_{dn}$$

LA CATENA SI DICE ADATTATA SE TUTTI I QUADRIPOLI CHE LA COMPONGONO SONO ADATTATI, CIOE' SE IN CORRISPONDENZA A TUTTE LE COPPIE DI MORSETTI LA RESISTENZA A MONTE E' EGUALE A QUELLA A VALLE.

SE TUTTI I QUADRIPOLI DELLA CATENA HANNO LO STESSO LIVELLO DI IMPEDENZA  $R$ , LA CONDIZIONE DI ADATTAMENTO E' SEMPLICEMENTE RAGGIUNTA CHIUDENDO SU  $R$  SIA I MORSETTI DI INGRESSO DEL PRIMO QUADRIPOLO SIA I MORSETTI DI USCITA DELL'ULTIMO.

SI NOTI CHE PER LA VALIDITA' DELLA RELAZIONE (8.2.8) NON E' RICHIESTA LA CONDIZIONE DI ADATTAMENTO.

X

ESERCIZIO N. 2

SI CONSIDERI UN RESISTORE, AVENTE RESISTENZA R E TEMPERATURA T, CHE, PER EFFETTO JOHNSON, COSTITUISCE UNA SORGENTE DI RUMORE. DI TALE SORGENTE CALCOLARE LA POTENZA  $dN$  DISPONIBILE NELLA BANDA DI FREQUENZE ( $f$ ,  $f+df$ ) [N.B. D'ORA IN POI OMETTEREMO IL PEDICE  $\max$  NELL'INDICAZIONE DELLE POTENZE DISPONIBILI].

RICORDIAMO IL CIRCUITO EQUIVALENTE DI UN RESISTORE DI FIGURA 8.1.5, QUI RIPETUTO NELLA FIGURA 8.2.6.

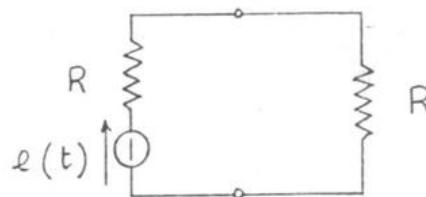


Fig. 8.2.6

DETTO  $E_{eff}$  IL VALORE EFFICACE DELLE COMPONENTI SPETTRALI DI  $e(t)$  INTERNE ALLA BANDA ( $f$ ,  $f+df$ ), IN VIRTU' DELLE (8.2.1) E (8.1.8) RISULTA:

$$(8.2.9) \quad dN = E_{eff}^2 / (4R) = 4kT R df / (4R) = kT df \quad (\text{W}) .$$

LA (8.2.9) CI CONSENTE DI INTRODURRE LA DENSITA' SPETTRALE DELLA POTENZA DISPONIBILE DI RUMORE GENERATO DA UN RESISTORE ALLA TEMPERATURA T:

$$(8.2.10) \quad G_N(f) = dN / df = kT \quad (\text{W/Hz}) .$$

NOTA: A PURO TITOLO D'INFORMAZIONE DIAMO L'ESPRESSONE DI  $G_N(f)$  VALIDA ANCHE A FREQUENZE MOLTO ALTE:

$$(8.2.11) \quad G_N(f) = \frac{hf}{e^{-\frac{hf}{kT}} - 1} \quad (\text{W/Hz}) ,$$

OVE  $h = 6.55 \cdot 10^{-34}$  J/Hz E' LA COSTANTE DI PLANCK E QUINDI  $hf$  E' L'ENERGIA ASSOCIATA AD UN FOTONE. PER ESERCIZIO, SI DISCUSCA IL LIMITE DI VALIDITA' DELL'ESPRESSONE APPROXIMATA (8.2.10).

### 8.3 CIFRA DI RUMORE E TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE.

CONSIDERIAMO UN QUADRIPOLO LINEARE. LA SUA RUMOROSITA' VIENE CARATTERIZZATA METTENDO A CONFRONTO IL RUMORE DA ESSO GENERATO CON QUELLO DOVUTO AD UNA SORGENTE DI RUMORE DI RIFERIMENTO.

PIU' PRECISAMENTE, COME SORGENTE DI RIFERIMENTO SI PRENDE UN RESISTORE DI RESISTENZA  $R$  ALLA TEMPERATURA  $T$  CHE VIENE CONNESSO AI MORSETTI D'INGRESSO DELL'APPARATO (FIGURA 8.3.1).

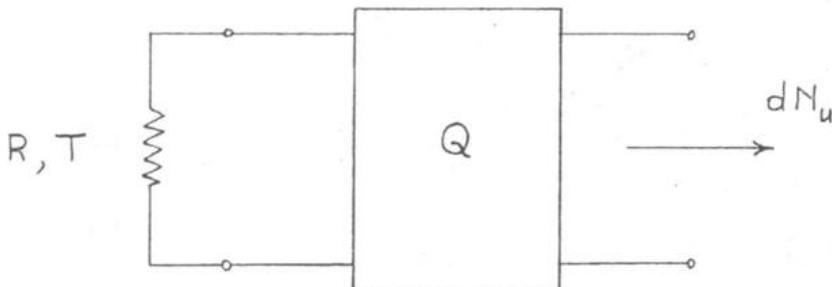


Fig. 8.3.1

SI CONSIDERA POI, IN UNA BANDA DI FREQUENZE ( $f$ ,  $f+df$ ), LA POTENZA  $dN_u$  DI RUMORE DISPONIBILE AI MORSETTI D'USCITA, DOVUTO SIA ALLA SORGENTE ESTERNA SIA ALL'APPARATO STESSO, E QUELLA  $dN'_u$  CHE SI AVREBBE IN USCITA SE L'APPARATO NON FOSSE RUMOROSO.

IL RAPPORTO FRA QUESTE DUE POTENZE,

$$(8.3.1) \quad F = dN_u / dN'_u ,$$

DEFINISCE LA CIFRA DI RUMORE DELL'APPARATO. ESSA DIPENDE IN GENERALE DALLA FREQUENZA  $f$ :

$$(8.3.2) \quad F = F(f) .$$

RISULTA:

$$(8.3.3) \quad F \geq 1 ,$$

VALENDO IL SEGNO DI EGUALIANZA SOLO PER UN APPARATO IDEALE (NON RUMOROSO).

IN DECIBEL:

$$(8.3.4) \quad F(\text{dB}) = 10 \log_{10} F .$$

RISULTA:

$$(8.3.5) \quad F(\text{dB}) \geq 0 ,$$

VALENDO ANCORA IL SEGNO DI EGUALIANZA SOLO PER UN APPARATO IDEALE.

LA CIFRA DI RUMORE DIPENDE DUNQUE DALLE GRANDEZZE  $R$  E  $T$  DI RIFERIMENTO. COME VEDREMO IN SEGUITO, AFFINCHE' LA SUA CONOSCENZA POSSA TROVARE UTILIZZAZIONE NEL CALCOLO DEI COLLEGAMENTI,  $R$  DEVE ESSERE LA RESISTENZA INTERNA DELLA SORGENTE CHE SI INTENDE CONNETTERE AI MORSETTI D'INGRESSO DELL'APPARATO.

NEL CASO IN CUI I RIFERIMENTI NON SIANO PRECISATI SI SOTTINTENDE:

\* PER  $R$ : IL PRIMO ELEMENTO DELLA COPPIA  $(R, R_a)$  PER CUI SI HA ADATTAMENTO AI MORSETTI D'INGRESSO E D'USCITA (V. PARAGRAFO PRECEDENTE);

\* PER  $T$ :  $T = 290 \text{ } ^\circ\text{K}$  .

IN VIRTU' DELLE (8.2.9) E (8.2.3), IL CONTRIBUTO DI RUMORE  $dN_u$  AI MORSETTI D'USCITA DOVUTO ALLA SOLA RESISTENZA ESTERNA E' ESPRESO DA:

$$(8.3.6) \quad dN_u^1 = kTdfG_a .$$

DALLA CONOSCENZA DELLA CIFRA DI RUMORE E' POSSIBILE DUNQUE RISALIRE, TRAMITE LE (8.3.1) E (8.3.6), ALLA EFFETTIVA POTENZA DI RUMORE DISPONIBILE AI MORSETTI DI USCITA  $dN_u$ , E QUINDI ALLA SUA DENSITA' SPETTRALE  $dN_u/df$ .

PER QUANTO CONCERNE LA POTENZA DI RUMORE DISPONIBILE AI MORSETTI DI USCITA, SEPARIAMO I CONTRIBUTI DELLA RESISTENZA ESTERNA E DELL'APPARATO:

$$(8.3.7) \quad dN_u = kTdfG_a + dN_e .$$

IL CONTRIBUTO  $dN_a$  DELL'APPARATO PUO' ESSERE SCRITTO IN UNA FORMA ANALOGA A QUELLO DELLA RESISTENZA ESTERNA:

$$(8.3.8) \quad dN_a = kT_x df G_a ,$$

CHE DEFINISCE LA TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE DELL'APPARATO, IN GENERALE FUNZIONE DELLA FREQUENZA  $f$ :

$$(8.3.9) \quad T_r = T_r(f) .$$

IL SIGNIFICATO DI TALE TEMPERATURA EQUIVALENTE PUO' ESSERE DESUNTO DALLA SEGUENTE RELAZIONE, CHE E' UNA IMMEDIATA CONSEGUENZA DELLE (8.3.8) E (8.3.7):

$$(8.3.10) \quad dN_u = k(T+T_r) df G_a .$$

LA (8.3.10) DICE INFATTI CHE, AI FINI DEL CALCOLO DELLA DENSITA' DI POTENZA DI RUMORE DISPONIBILE AI MORSETTI DI USCITA, L'APPARATO PUO' ESSERE CONSIDERATO IDEALE, PURCHE' SI ATTRIBUISCA ALLA RESISTENZA ESTERNA DI RIFERIMENTO LA TEMPERATURA  $T+T_r$ .

AI FINI SUDETTI, VALE DUNQUE L'EQUIVALENZA RAPPRESENTATA NELLA FIGURA 8.3.2.

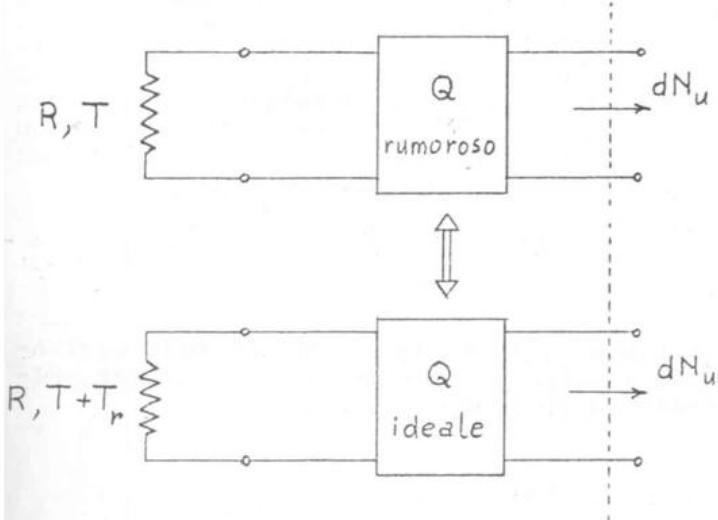


Fig. 8.3.2

~~X~~  
SI OSSERVI CHE, IN VIRTU' DELLA SUA DEFINIZIONE,  
 $T_r$  NON DIPENDE DALLA TEMPERATURA  $T$  A CUI SI TROVA LA  
RESISTENZA  $R$ , A DIFFERENZA DI  $F$ . PERTANTO L'EQUIVALENZA  
DI FIGURA 8.3.2 SUSSISTE QUALUNQUE SIA  $T$ .

LE DUE GRANDEZZE ORA INTRODOTTE, CIFRA DI RUMORE E  
TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE, SONO LEGATE FRA  
LORO.

DALLE (8.3.1), (8.3.10) E (8.3.6) ABBIAMO INFATTI:

$$(8.3.11) \quad F = \frac{T + T_r}{T}$$

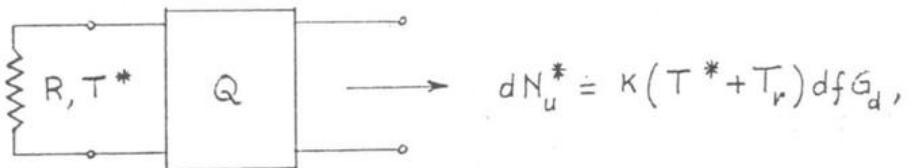
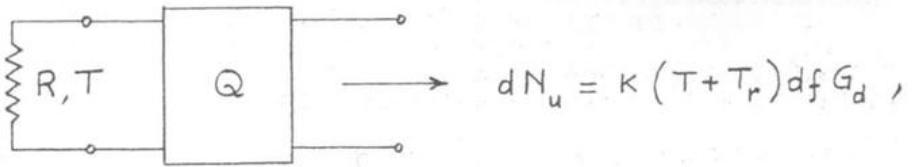
E VICEVERSA:

$$(8.3.12) \quad T_r = (F-1)T$$

NEL PARAGRAFO 8.6 VEDREMO COME LE GRANDEZZE ORA  
INTRODOTTE, TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE O CIFRA  
DI RUMORE, CONSENTANO DI METTERE IN CONTO, NEL PROGETTO  
DI UN SISTEMA DI TRASMISSIONE, LA RUMOROSITA' DEGLI  
APPARATI CHE LO COSTITUISCONO.

VALE LA PENA SOTTOLINEARE, COME ABBIAMO GIA' DETTO,  
CHE ENTRAMBE PERMETTONO DI ESPRIMERE LA DENSITA' DI  
POTENZA DI RUMORE DISPONIBILE AI MORSETTI DI USCITA DEL  
RELATIVO APPARATO. POICHÉ TALE RUMORE APPARTIENE AD UN  
PROCESSO GAUSSIANO, LA CONOSCENZA DI  $F$  OPPURE DI  $T_r$  NE  
CONSENTE UNA DESCRIZIONE STATISTICA COMPLETA.

ALMENO IN LINEA DI PRINCIPIO, TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE E CIFRA DI RUMORE POSSONO ESSERE MISURATE COME APPRESSO INDICATO:



$$\eta = \frac{dN_u^*}{dN_u} = \frac{T^* + T_r}{T + T_r},$$

$$T_r = \frac{T^* - \eta T}{\eta - 1},$$

$$F = \frac{T + T_r}{T}.$$

✓

TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE E CIFRA DI RUMORE  
DI PIU' STADI IN CASCATA

CONSIDERIAMO UN QUADRIPOLO  $Q$  COSTITUITO DA DUE STADI  $Q_1$  E  $Q_2$  IN CASCATA (FIGURA 8.3.3): PER LA DEFINIZIONE DI GUADAGNO DISPONIBILE, DI CIFRA DI RUMORE E DI TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE IL RIFERIMENTO PER  $Q$  E PER  $Q_1$  SIA  $R$  E QUELLO PER  $Q_2$  LA RESISTENZA DI USCITA DI  $Q_1$ , QUANDO I SUOI MORSETTI DI INGRESSO SONO CHIUSI SU  $R$ .

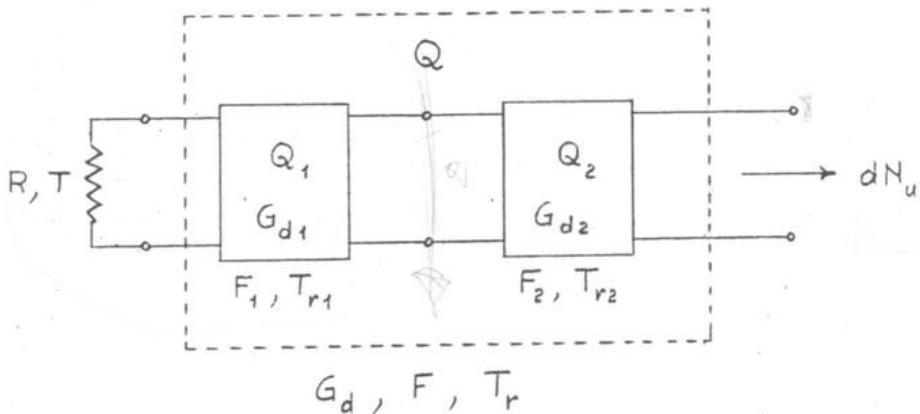


Fig. 8.3.3

GIA' SAPPIAMO CHE [V. (8.2.8)]:

$$(8.3.13) \quad G_d = G_{d1} \cdot G_{d2} .$$

POSSIAMO POI SCRIVERE:

$$(8.3.14) \quad dN_u = K(T + T_r) df G_{d1} G_{d2} = \\ = [K(T + T_{r1}) df G_{d1} + K T_{r2} df] G_{d2},$$

DA CUI:  
 ricevendo

*calcolo in (8)*

*risultato*

*numero del 2°*  
*operando*

$$(8.3.15) \quad T_r = T_{r1} + \frac{T_{r2}}{G_{d1}} .$$

PIU' IN GENERALE, SE ABBIAMO n STADI IN CASCATA  
(FIGURA 8.3.4), RISULTA:

$$(8.3.16) \quad T_r = T_{r1} + \frac{T_{r2}}{G_{d1}} + \frac{T_{r3}}{G_{d1} G_{d2}} + \dots + \frac{T_{rn}}{G_{d1} G_{d2} \dots G_{d(n-1)}}.$$

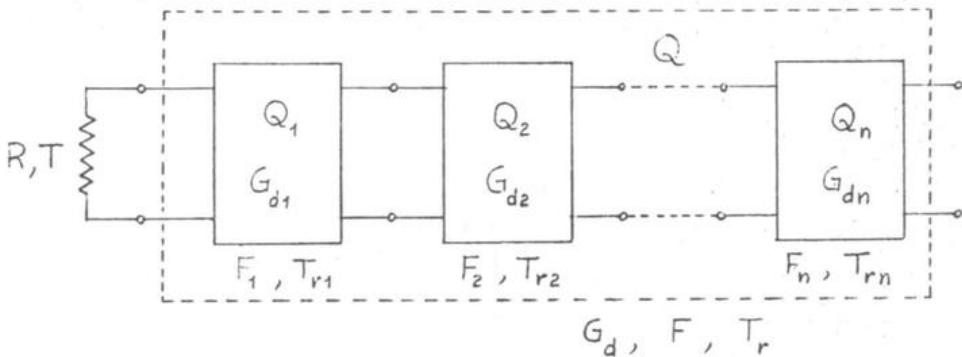


Fig. 8.3.4

PER QUANTO CONCERNE LA CIFRA DI RUMORE, DALLE  
(8.3.12) E (8.3.16) DISCENDE:

$$(8.3.17) \quad (F-1)\tau = (F_1-1)\tau + \frac{(F_2-1)\tau}{G_{d1}} + \dots + \frac{(F_n-1)\tau}{G_{d1} G_{d2} \dots G_{d(n-1)}},$$

DA CUI:

$$(8.3.18) \quad F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{d1}} + \dots + \frac{F_n - 1}{G_{d1} G_{d2} \dots G_{d(n-1)}}.$$

SI NOTI CHE LE ESPRESSIONI PRECEDENTI SONO STATE RICAVATE SENZA FARE L'IPOTESI CHE LA CATENA SIA ADATTATA. OVVIAIMENTE ESSE VALGONO ANCHE IN QUESTO CASO, CHE E' QUELLO PIU' COMUNE.

#### 8.4 ESERCIZI.

##### ESERCIZIO N. 2

SI DETERMINI LA TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE  $T_r(f)$  E LA CIFRA DI RUMORE  $F(f)$  DI UN ATTENUATORE NORMALE ALLA TEMPERATURA  $T_a$  AVENTE GUADAGNO DISPONIBILE  $G_d(f)$ .

ESSENDO  $G_d < 1$ , INTRODUCIAMO L'ATTENUAZIONE  $A = 1/G_d$ .

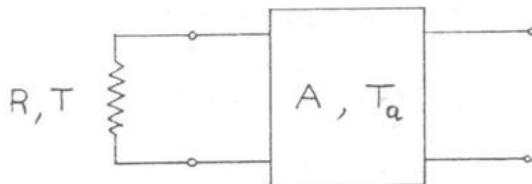


Fig. 8.4.1

CONSIDERIAMO LO SCHEMA DI FIGURA 8.4.1 OVE  $R$  E  $T = 290 \text{ }^{\circ}\text{K}$ , IN GENERALE DIVERSO DA  $T_a$ , SONO RISPETTIVAMENTE LA RESISTENZA E LA TEMPERATURA DI RIFERIMENTO.

RISCRIVIAMO LA (8.3.8) CHE ESPRIME LA POTENZA DI RUMORE  $dN_a$  DISPONIBILE AI MORSETTI DI USCITA NELLA BANDA DI FREQUENZE  $(f, f+df)$  DOVUTA AL SOLO ATTENUATORE:

$$(8.4.1) \quad dN_a = K T_r df G_d.$$

LA POTENZA  $dN_a$  NON DIPENDE DALLA TEMPERATURA A CUI SI TROVA LA RESISTENZA ESTERNA  $R$  DI RIFERIMENTO; AI FINI DEL SOLO CALCOLO DI  $dN_a$  QUESTA TEMPERATURA PUO' QUINDI ESSERE ASSUNTA EGUALE A  $T_a$ .

IN QUESTE CONDIZIONI LA POTENZA DI RUMORE DISPONIBILE AI MORSETTI DI USCITA NELLA BANDA DI FREQUENZE  $(f, f+df)$  PUO' ESSERE CALCOLATA FACENDO RIFERIMENTO AL CIRCUITO EQUIVALENTE DI USCITA DI FIGURA 8.4.2.

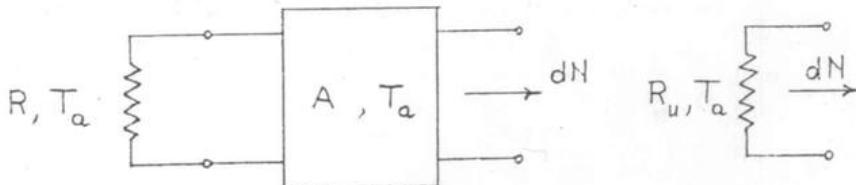


Fig. 8.4.2

ABBIAMO:

$$(8.4.2) \quad dN = kT_a df .$$

D'ALTRA PARTE  $dN$  PUO' ESSERE ESPRESO MANTENENDO DISTINTI I CONTRIBUTI DI RUMORE  $kT_a df G_d$  E  $dN_a$  DOVUTI RISPETTIVAMENTE ALLA RESISTENZA  $R$  (ALLA TEMPERATURA  $T_a$ ) ED ALL'ATTENUATORE:

$$(8.4.3) \quad dN = kT_a df G_d + dN_a .$$

DALLE (8.4.2) E (8.4.3) DISCENDE:

$$(8.4.4) \quad dN_a = kT_a df (1 - G_d)$$

E QUINDI, RICORDANDO LA (8.4.1), ABBIAMO:

$$(8.4.5) \quad T_r = T_a \left( \frac{1}{G_d} - 1 \right) = T_a (A - 1) .$$

LA CIFRA DI RUMORE  $F$  E' DATA DA:

$$(8.4.6) \quad F = \frac{T + T_r}{T} = 1 + \frac{T_a}{T} (A - 1) .$$

IN PARTICOLARE SE

$$(8.4.7) \quad T_a = T ,$$

RISULTA:

$$(8.4.8) \quad F = A$$

CIOE' LA CIFRA DI RUMORE E' EGUALE ALL'ATTENUAZIONE IN POTENZA.

Scoperto in esercizio

$$T = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \quad \text{e} \quad \frac{1}{S_{d1}} \cdot \frac{1}{S_{d2}} \cdot \frac{1}{S_{d3}} \cdots \frac{1}{S_{dn}}$$

### ESERCIZIO N. 3

SI DETERMINI LA CIFRA DI RUMORE  $F_e$  DI UN SISTEMA COSTITUITO DA UN TRONCO DI LINEA ALLA TEMPERATURA  $T$ , AVENTE ATTENUAZIONE IN POTENZA  $A$ , SEGUITO DA UN AMPLIFICATORE CON CIFRA DI RUMORE  $F$  ADATTATO ALLA LINEA (FIGURA 8.4.3).

SI RIPETA IL CALCOLO NEL CASO IN CUI L'AMPLIFICATORE, AVENTE GUADAGNO DISPONIBILE  $G_a$ , PRECIDE IL TRONCO DI LINEA (FIGURA 8.4.4).



Fig. 8.4.3



Fig. 8.4.4

POICHE' UN ATTENUATORE NORMALE ALLA TEMPERATURA T HA CIFRA DI RUMORE EGUALE ALL'ATTENUAZIONE IN POTENZA [V. (8.4.8)], APPLICANDO LA (8.3.18) AI CASI DELLE FIGURE 8.4.3. E 8.4.4 ABBIAMO RISPETTIVAMENTE:

$$(8.4.9) \quad F_t = A + (F-1)A = AF,$$

$$(8.4.10) \quad F_t = F + \frac{A-1}{G_d}.$$

SI OSSERVI CHE NEL SECONDO CASO, SE  $G_d \gg A$  (COME SI PUO' VERIFICARE PER UN PREAMPLIFICATORE CHE PRECEDE UNA DISCESA D'ANTENNA), RISULTA:

$$(8.4.11) \quad F_t \approx F.$$

IL RISULTATO ESPRESSO DALLA (8.4.11) E' INFERIORE DEL VALORE, DATO DALLA (8.4.9), CHE SI HA ADOTTANDO LO SCHEMA DI FIGURA 8.4.3.

## 8.5 TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE DI UNA SORGENTE DI SEGNALE.

CONSIDERIAMO UNA GENERICA SORGENTE DI SEGNALE. IL SUO CIRCUITO EQUIVALENTE AI MORSETTI DI USCITA COMPRENDE UNA F.E.M.  $e_s(t)$  E UNA IMPEDENZA CHE, NELLA BANDA DI LAVORO, ASSUMIAMO EGUALE AD UNA RESISTENZA  $R$  (FIGURA 8.5.1).

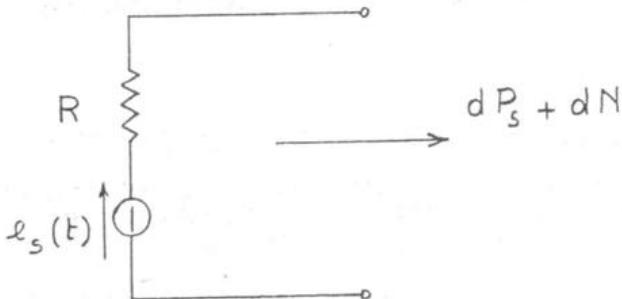


Fig. 8.5.1

L'ESPERIENZA DIMOSTRA CHE OGNI SORGENTE NON SI LIMITA A RENDERE DISPONIBILE, IN UNA GENERICA BANDA ( $f$ ,  $f+df$ ), SOLO LA POTENZA DI SEGNALE  $dP_s$  (COME GIA' DETTO, STIAMO OMETTENDO IL PEDICE max NELL'INDICAZIONE DELLE POTENZE DISPONIBILI), MA ANCHE UNA POTENZA DI RUMORE  $dN$ .

QUESTO RUMORE PUO' AVERE LE PIU' DIVERSE ORIGINI. AD ESEMPIO, PUO' ESSERE GENERATO NEI CIRCUITI CHE COSTITUISCONO LA SORGENTE OPPURE, SE IL CIRCUITO DI FIGURA 8.5.1 E' QUELLO EQUIVALENTE DI UNA ANTENNA RICEVENTE, PUO' COMPRENDERE RUMORE RACCOLTO DALL'ANTENNA STESSA.

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI IL RUMORE DELLA SORGENTE SIA ERGODICO, GAUSSIANO, A VALOR MEDIO NULLO.

SI DEFINISCE LA TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE DELLA SORGENTE MEDIANTE LA RELAZIONE:

$$(8.5.1) \quad dN = kT_s df$$



IL SIGNIFICATO DI  $T_s$  E' IMMEDIATO SE SI HA IMMEDIATEMENTE LA (8.2.10): IL RUMORE DOVUTO ALLA SORGENTE PUO' ESSERE IMMAGINATO GENERATO PER EFFETTO JOHNSON IN UN RESISTORE, DI RESISTENZA EGUALE A QUELLA INTERNA DELLA SORGENTE, ALLA TEMPERATURA  $T_s$ .

$T_s$  E' IN GENERALE FUNZIONE DELLA FREQUENZA:

$$(8.5.2) \quad T_s = T_s(f)$$

QUALORA LA SORGENTE DI SEGNALE SIA UNA ANTENNA RICEVENTE, LA SUA TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE VIENE ANCHE CHIAMATA TEMPERATURA D'ANTENNA.

### 8.6 CALCOLO DEI COLLEGAMENTI IN PRESENZA DI RUMORE.

LE GRANDEZZE INTRODOTTE NEI PARAGRAFI 8.3 E 8.5 CONSENTONO DI EFFETTUARE IL CALCOLO DEI COLLEGAMENTI METTENDO IN CONTO GLI EFFETTI DEL RUMORE.

PIU' PRECISAMENTE CONSIDERIAMO LO SCHEMA DI FIGURA 8.6.1: UNA SORGENTE DI SEGNALE, AVENTE F.E.M.  $e_s(t)$ , RESISTENZA INTERNA  $R$  E TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE  $T_s$ , AGISCE ALL'INGRESSO DI UN SISTEMA DI TRASMISSIONE LINEARE (CHE IN GENERALE COMPRENDE PIU' BLOCCHI IN CASCATA) CON TEMPERATURA DI RUMORE  $T_r$  [E CIFRA DI RUMORE  $F$  LEGATA A  $T_r$  DALLA (8.3.11)].

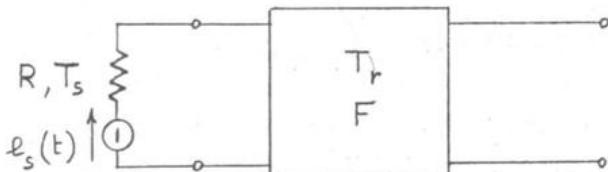


Fig. 8.6.1

RICORDANDO IL SIGNIFICATO DELLA TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE  $T_r$ , IL SISTEMA DI FIGURA 8.6.1 E' EQUIVALENTE, PER QUANTO RIGUARDA LA SITUAZIONE AI MORSSETTI DI USCITA, A QUELLO RIPORTATO IN FIGURA 8.6.2. QUEST'ULTIMO POI PUO' ESSERE ULTERIORMENTE ELABORATO COME MOSTRATO IN FIGURA 8.6.3 TENENDO CONTO DEL CIRCUITO EQUIVALENTE DI UN RESISTORE PER QUANTO CONCERNE L'EFFETTO JOHNSON (FIGURA 8.1.5).

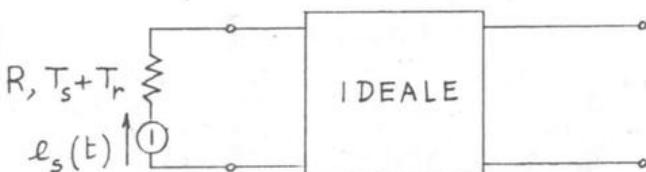
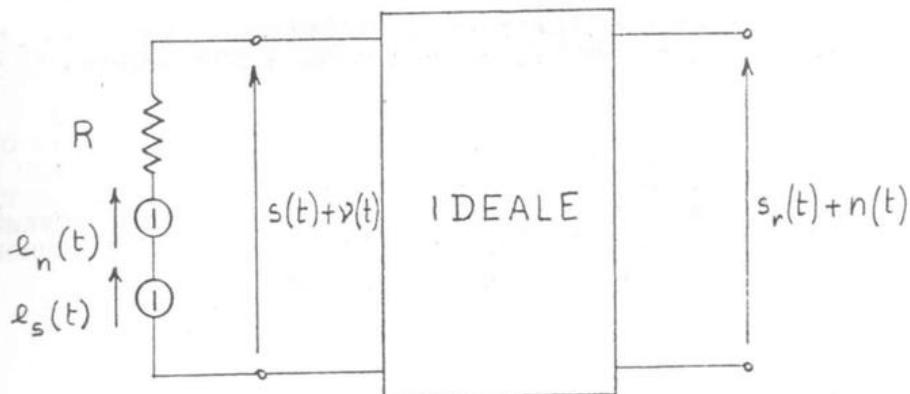


Fig. 8.6.2



$e_a(t)$  = f.e.m. di segnale;  $s(t)$ ,  $s_r(t)$  = tensioni di segnale all'ingresso ed all'uscita del collegamento.  
 $e_n(t)$  = f.e.m. equivalente di rumore;  $v(t)$ ,  $n(t)$  = tensioni di rumore all'ingresso ed all'uscita del collegamento.

Fig. 8.6.3

LA F.E.M. EQUIVALENTE DI RUMORE  $e_n(t)$ , IN VIRTU' DELLA FORMULA DI NYQUIST (8.1.8), HA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA:

$$(8.6.1) \quad G_x(f) = 4k(T_a + T_r)R$$

INTRODUCENDO LA TEMPERATURA DI RUMORE DI SISTEMA  $T_{sist}$ ,

$$(8.6.2) \quad T_{sist} = T_a + T_r$$

LA (8.6.1) DIVIENE:

$$(8.6.3) \quad G_x(f) = 4kT_{sist}R$$

LO SCHEMA EQUIVALENTE DI FIGURA 8.6.3 PUO' ESSERE RAPPRESENTATO, IN FORMA UNIFILARE, COME INDICATO IN FIGURA 8.6.4.

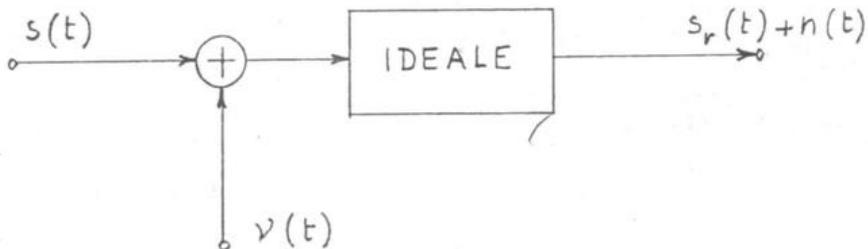


Fig. 8.6.4

IN CONDIZIONI DI ADATTAMENTO, RISULTA

$$(8.6.4) \quad v(t) = \frac{1}{2} e_n(t)$$

E QUINDI LA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA DEL RUMORE EQUIVALENTE, DI TIPO ADDITIVO, ALL'INGRESSO DEL SISTEMA VALE:

$$(8.6.5) \quad G_v(f) = kT_{\text{sist}}R .$$

ESERCIZIO N. 4

*T<sub>Sist</sub>*

CALCOLARE LA TEMPERATURA DI RUMORE DEL SISTEMA DI FIGURA 8.6.5, COSTITUITO DAI SEGUENTI BLOCCHI FUNZIONALI:

- 1) UN'ANTENNA RICEVENTE LA CUI TEMPERATURA DI RUMORE E'  $T_a = 60 \text{ }^{\circ}\text{K}$ ;
- 2) UN AMPLIFICATORE PARAMETRICO, DIRETTAMENTE COLLEGATO AI MORSETTI DI ANTENNA, RAFFREDDATO CON ELIO GASSOSO, AVENTE GUADAGNO  $G_1 = 20 \text{ dB}$  E TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE  $T_{r1} = 30 \text{ }^{\circ}\text{K}$ ;
- 3) UN SECONDO STADIO DI AMPLIFICAZIONE CON GUADAGNO  $G_2 = 10 \text{ dB}$  E CIFRA DI RUMORE  $F_2 = 6 \text{ dB}$ ;
- 4) UN GRUPPO COSTITUITO DA UN CONVERTITORE E DAGLI STADI DI AMPLIFICAZIONE A FREQUENZA INTERMEDIA, AVENTE CIFRA DI RUMORE COMPLESSIVA  $F_3 = 13 \text{ dB}$ .

SI RIPETA IL CALCOLO IN ASSENZA DELLO SECONDO STADIO DI AMPLIFICAZIONE A RADIOFREQUENZA DESCRITTO AL PUNTO 3).

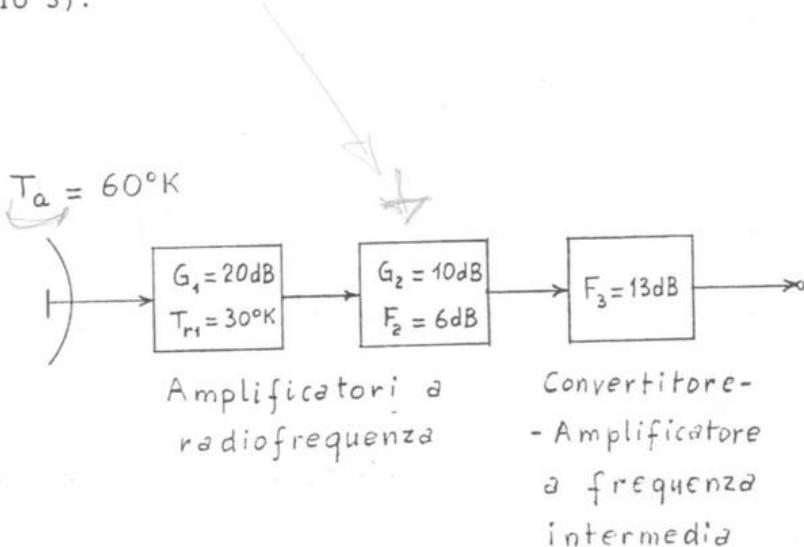


Fig. 8.6.5

LA TEMPERATURA DI RUMORE DEL SISTEMA E':

$$T_{sist} = T_a + T_r ,$$

CON

$$T_r = T_{r1} + \frac{T_{r2}}{G_1} + \frac{T_{r3}}{G_1 G_2} .$$

$$6 = 60 \log F$$

$$\begin{aligned} F &\approx 4 \\ 13 &= 10 \log F \\ 10^4 &\approx 20 \end{aligned}$$

RISULTA:

$$T_{r1} = 30^\circ K , \quad = 60 \cdot 1) 290 = 30 \cdot 290 =$$

$$T_{r2} = (F_2 - 1) T = (4 - 1) 290^\circ K = 870^\circ K ,$$

$$T_{r3} = (F_3 - 1) T = (20 - 1) 290^\circ K = 5510^\circ K ,$$

$$G_1 = 100 ,$$

$$G_2 = 10 ,$$

$$T_r = (30 + 8.7 + 5.5)^\circ K = 44^\circ K ,$$

$$T_{sist} = (60 + 44)^\circ K = 104^\circ K .$$

IN ASSENZA DEL SECONDO STADIO DI AMPLIFICAZIONE A  
RADIOFREQUENZA ABBIAMO:

$$T_r = T_{r1} + \frac{T_{r3}}{G_1} = \left( 30 + \frac{5510}{100} \right)^\circ K = 85^\circ K ,$$

$$T_{sist} = (60 + 85)^\circ K = 145^\circ K .$$

### 8.7 LE LINEE DI TRASMISSIONE: IMPEDENZA CARATTERISTICA E COSTANTE DI ATTENUAZIONE.

IN QUESTO PARAGRAFO INTRODUCIAMO DUE GRANDEZZE RELATIVE ALLE LINEE DI TRASMISSIONE, CHE SONO INDISPENSABILI PER ALCUNI CALCOLI DI COLLEGAMENTI CHE EFFETTUEREMO IN SEGUITO.

CONSIDERIAMO UNA LINEA DI LUNGHEZZA INFINTA IN REGIME SINUSOIDALE (FIGURA 8.7.1), CHE E' SEDE DI UNA SOLA Onda CHE SI PROPAGA A PARTIRE DAL GENERATORE (ONDA DIRETTA). L'IMPEDENZA  $Z_0$  CHE ESSA MOSTRA NELLA SUA SEZIONE D'INGRESSO VIENE DETTA IMPEDENZA CARATTERISTICA DELLA LINEA STESSA.

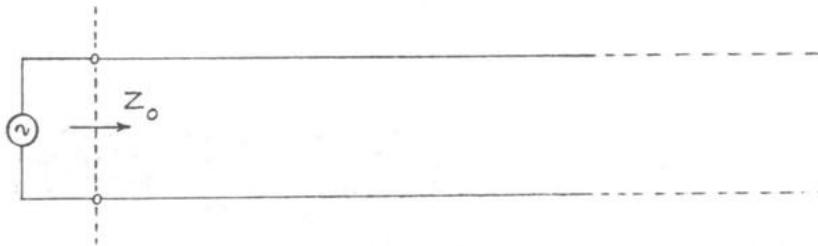


Fig. 8.7.1

DALLA DEFINIZIONE DISCENDE CHE  $Z_0$  E' PURE L'IMPEDENZA CHE SI Vede A VALLE DI UNA QUALUNQUE SEZIONE DELLA LINEA DI FIGURA 8.7.1 (V. FIGURA 8.7.2).

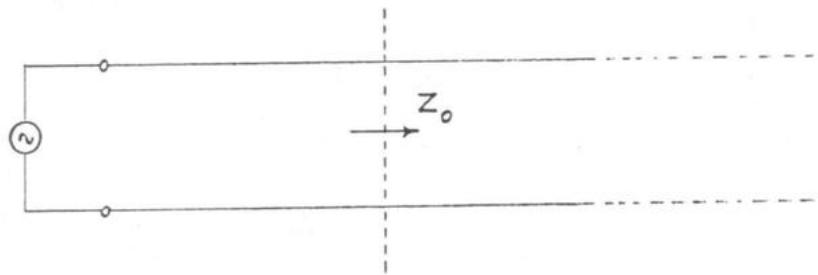


Fig. 8.7.2

PERTANTO SE LA LINEA VIENE TRONCATA IN UNA SEZIONE ED IVI CHIUSA SULLA SUA IMPEDENZA CARATTERISTICA (FIGURA 8.7.3), CIO' NON INFUENZA LA PARTE A MONTE, CHE CONTINUA A FUNZIONARE IN REGIME DI SOLA ONDA DIRETTA. IN QUESTO CASO LA LINEA SI DICE ADATTATA.

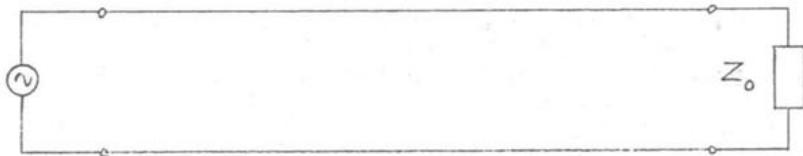
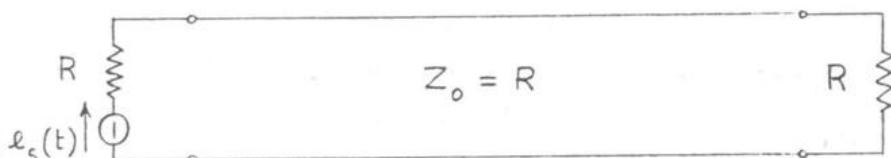


Fig. 8.7.3

RIMANDIAMO AD ALTRI CORSI IL CALCOLO DELL'IMPEDENZA CARATTERISTICA; E' TUTTAVIA IMPORTANTE DIRE CHE LE LINEE A BASSE PERDITE HANNO IMPEDENZA CARATTERISTICA REALE, CHE INDICHIAMO CON  $R$ ; AD ESEMPIO, PER LE COPPIE COASSIALI PIU' VOLTE CITATE RISULTA:

$$(8.7.1) \quad Z_0 = R = 75 \Omega .$$

IN FIGURA 8.7.4 E' RAPPRESENTATO UN SISTEMA DI TRASMISSIONE SU LINEA COASSIALE ADATTATO SIA AI MORSETTI DI INGRESSO CHE A QUELLI DI USCITA, CON LIVELLO DI IMPEDENZA EGUALE A  $75 \Omega$ .



$$R = 75 \Omega$$

Fig. 8.7.4

RIPRENDIAMO IN ESAME LO SCHEMA DI FIGURA 8.7.1, CHE QUI SOTTO RIPETIAMO (FIGURA 8.7.5).

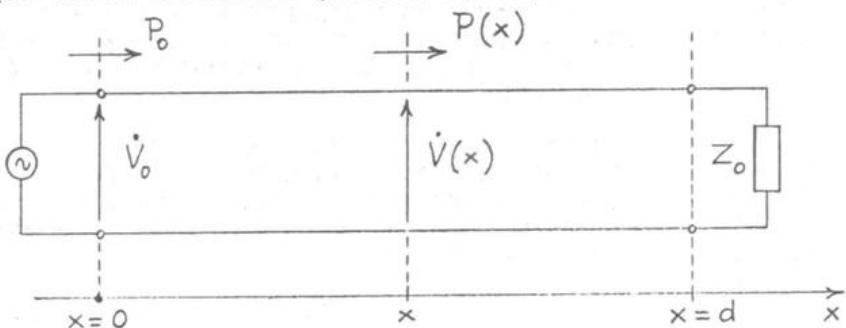


Fig. 8.7.5

LA POTENZA ASSOCIATA ALL'ONDA CHE SI PROPAGA LUNGO LA LINEA SI ATTENUA A CAUSA DELLE DISSIPAZIONI DI QUEST'ULTIMA (PERDITE NEI CONDUTTORI E NEL DIELETTRICO). SI PUO' DEMONSTRARE CHE L'ATTENUAZIONE IN DECIBEL E' PROPORZIONALE ALLA LUNGHEZZA DELLA TRATTA PERCORSÀ DALL'ONDA:

$$(8.7.2) \quad A[\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{P_0}{P(x)} = \alpha_l x \quad \text{Lunghezza}$$

LA COSTANTE DI PROPORZIONALITA'  $\alpha_l$  CHE COMPARTE NELLA (8.7.2) VIENE DETTA COSTANTE DI ATTENUAZIONE DELLA LINEA. ESSA VIENE MISURATA IN DECIBEL PER UNITA' DI LUNGHEZZA (NORMALMENTE IL CHILOMETRO) E DIPENDE DALLA FREQUENZA (PIU' PRECISAMENTE E' FUNZIONE CRESCENTE DELLA FREQUENZA), DALLA GEOMETRIA DELLA LINEA E DAI MATERIALI CON CUI ESSA E' REALIZZATA.

A FREQUENZE SUFFICIENTEMENTE ELEVATE L'ATTENUAZIONE CRESCE PROPORZIONALMENTE ALLA RADICE QUADRATA DELLA FREQUENZA. PER LE LINEE COASSIALI PRECEDENTEMENTE CONSIDERATE RISULTA:

\* MICROCOASSIALE 0.7/2.9:

$$(8.7.3) \quad \alpha_l[\text{dB/KM}] = 9.5 \sqrt{f[\text{MHz}]} \quad ,$$

\* MINICOASSIALE 1.2/4.4:

$$(8.7.4) \quad \alpha_l[\text{dB/KM}] = 5.3 \sqrt{f[\text{MHz}]} \quad ,$$

\* COASSIALE NORMALE 2.6/9.5:

$$(8.7.5) \quad \alpha_l[\text{dB/KM}] = 2.35 \sqrt{f[\text{MHz}]} \quad .$$

SI NOTI CHE QUESTE COPPIE COASSIALI, ALLE MASSIME FREQUENZE DI LAVORO RIPORTATE A PAGINA 6.21 PER I SISTEMI ANALOGICI (RISPETTIVAMENTE 4 - 12 - 60 MHZ), PRESENTANO UNA ATTENUAZIONE DI CIRCA 20 dB/KM (OSSIA PER OGNI CHILOMETRO DI LINEA LA POTENZA USCENTE E' 1/100 DI QUELLA ENTRANTE).

PER CONFRONTO, OSSERVIAMO CHE LE FIBRE OTTICHE POSSONO PRESENTARE UNA ATTENUAZIONE DI POCO INFERIORE A 0.2 dB/KM (SI VEDA IL PROSSIMO PARAGRAFO 8.10). CIO' EVIDENZIA LA NOTEVOLA DIVERSITA' DI COMPORTAMENTO FRA I DUE MEZZI TRASMISSIVI.

POICHÉ A VALLE DI OGNI SEZIONE DI UNA LINEA ADATTATA SI VEDE LA MEDESIMA IMPEDENZA, POSSIAMO SCRIVERE (V. FIGURA 8.7.5):

$$(8.7.6) \quad \frac{P_o}{P(x)} = \left| \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}(x)} \right|^2$$

E QUINDI LA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA  $|L|$  ASSOCIATA ALLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $L(f)$  DI UN TRONCO DI LINEA ADATTATA DI LUNGHEZZA  $x$  E' DATA DA:

$$(8.7.7) \quad |L| = \left| \frac{\dot{V}(x)}{\dot{V}_o} \right| = 10^{-\frac{\alpha_L x}{20}}$$

COME GIA' ANTICIPATO CON LA FIGURA 6.6.2, CHE QUI RIPETIAMO (FIGURA 8.7.6), L'ATTENUAZIONE DELLA LINEA VIENE COMPENSATA CON L'USO DI AMPLIFICATORI CHE SI SUCCEDONO CON UN OPPORTUNO PASSO  $L_t$  (A QUESTO PROPOSITO SI VEDA L'ESERCIZIO N. 6 DEL PROSSIMO PARAGRAFO).

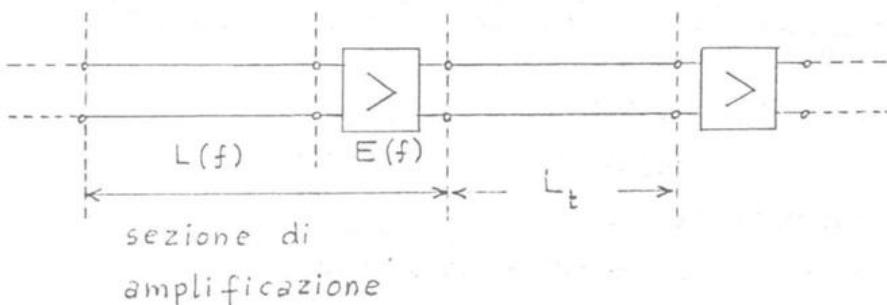


Fig. 8.7.6

OGNI TRATTA DI LINEA DI LUNGHEZZA  $L_t$  ED IL SUCCESSIVO AMPLIFICATORE COSTITUISCONO UNA SEZIONE DI AMPLIFICAZIONE LA CUI CARATTERISTICA DI AMPIEZZA VIENE IMPOSTA UNITARIA. IN ALTRI TERMINI, DETTA ANCORA  $L(f)$  LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI CIASCUNA TRATTA DI LINEA ED  $E(f)$  QUELLA DELL'AMPLIFICATORE, SI IMPONE:

$$(8.7.8) \quad |L(f)| \cdot |E(f)| = 1 ,$$

DA CUI, RICORDANDO LA (8.7.7), ABBIAMO:

$$(8.7.9) \quad |E(f)| = 10^{\frac{\alpha_f \times}{20}} .$$

ESSENDO  $\alpha_f$  FUNZIONE CRESCENTE DELLA FREQUENZA, I RIPETITORI PRESENTI SULLA LINEA HANNO AMPLIFICAZIONE NON COSTANTE SULLA BANDA DI LAVORO, MA CRESCENTE. ESSI QUINDI "EQUALIZZANO" IL COMPORTAMENTO DELLA LINEA ALLE VARIE FREQUENZE E DA CIO' LA LORO DENOMINAZIONE DI AMPLIFICATORI-EQUALIZZATORI.

NATURALMENTE LA CARATTERISTICA DI FASE DI OGNI AMPLIFICATORE-EQUALIZZATORE SI SOMMA A QUELLA DEL TRONCO DI LINEA CHE LO PRECEDE. LA FUNZIONE DI EQUALIZZAZIONE RIGUARDA PERTANTO ANCHE LA CARATTERISTICA DI FASE DELLA SEZIONE DI AMPLIFICAZIONE, QUALORA SIANO ASSEGNAME DELLE SPECIFICHE PER QUEST'ULTIMA.

8.8 ESERCIZI.

ESERCIZIO N. 5

SI CONSIDERI UNA SORGENTE DI SEGNALE AVENTE TEMPERATURA DI RUMORE  $T_s$  APPLICATA AD UN TRONCO DI LINEA ALLA TEMPERATURA  $T_a$  CHE PRESENTA UNA ATTENUAZIONE IN POTENZA EGUALE AD A. SI DETERMINI LA TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE  $T_{su}$  DELLA SORGENTE CHE SI VEDA AI MORSETTI DI USCITA DELLA LINEA.

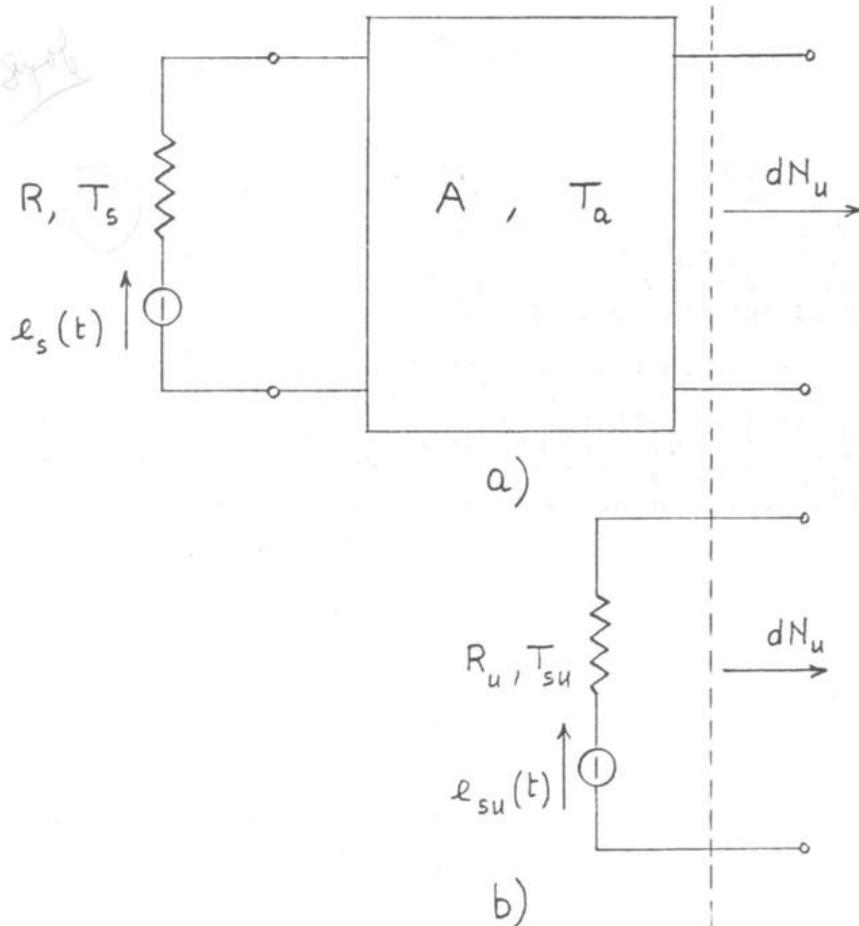


Fig. 8.8.1

LA POTENZA DI RUMORE  $dN_u$  DISPONIBILE AI MORSETTI D'USCITA DEL SISTEMA IN ESAME [FIGURA 8.8.1a)] NELLA BANDA DI FREQUENZE ( $f, f+df$ ) PUO' ESSERE SCRITTA, INDICANDO CON  $T_r$  LA TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE DELLA LINEA, NELLA FORMA:

$$(8.8.1) \quad dN_u = \frac{K(T_s + T_r)df}{A} .$$

D'ALTRA PARTE, DALLA SORGENTE EQUIVALENTE DI FIGURA 8.8.1b) SI HA:

$$(8.8.2) \quad dN_u = K T_{su} df.$$

DAL CONFRONTO DELLE (8.8.1) E (8.8.2) DISCENDE:

$$(8.8.3) \quad T_{su} = \frac{T_s + T_r}{A} .$$

RISCRIVIAMO LA (8.4.5):

$$(8.8.4) \quad T_r = T_a (A - 1) .$$

DALLE DUE ULTIME RELAZIONI DISCENDE:

$$(8.8.5) \quad T_{su} = \frac{T_s + T_a (A - 1)}{A} = T_a \left[ 1 + \frac{(T_s/T_a) - 1}{A} \right] .$$

SI OSSERVI CHE SE  $A \gg |(T_s/T_a) - 1|$  E':

$$(8.8.6) \quad T_{su} \approx T_a$$

E QUINDI  $T_{su}$  E' INDIPENDENTE DALLA TEMPERATURA DI RUMORE  $T_a$  DELLA SORGENTE CHE ALIMENTA LA LINEA.

ESERCIZIO N. 6

SI CONSIDERI UN COLLEGAMENTO SU CAVO COASSIALE NORMALE 2.6/9.5 COMPRENDENTE UN SOLO AMPLIFICATORE-EQUALIZZATORE TERMINALE CON GUADAGNO EGUALE, AD OGNI FREQUENZA, ALL'ATTENUAZIONE INTRODOTTA DAL CAVO.

SI DETERMINI LA MASSIMA LUNGHEZZA DEL COLLEGAMENTO PER CUI LA POTENZA DEL RUMORE TERMICO ALLA SUA USCITA, IN UNA BANDA DI FREQUENZE  $\Delta f = 4\text{ KHz}$  CENTRATA SULLA FREQUENZA  $f = 4\text{ MHz}$ , NON SUPERI IL VALORE  $N_0 = 350\text{ pW}$ , SAPENDO CHE ALLA STESSA FREQUENZA LA CIFRA DI RUMORE  $F$  DELL'AMPLIFICATORE-EQUALIZZATORE VALE 5 dB. SI RIPETA IL MEDESIMO CALCOLO PER  $f = 12\text{ MHz}$  E  $f = 60\text{ MHz}$  MANTENENDO LO STESSO VALORE DI  $F$ .

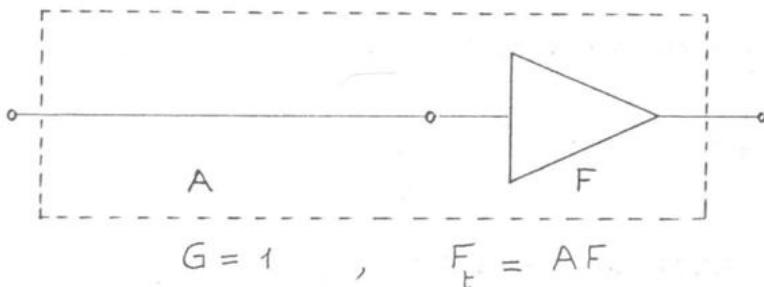


Fig. 8.8.2

IL COLLEGAMENTO (FIGURA 8.8.2) HA GUADAGNO UNITARIO E CIFRA DI RUMORE (ASSUMENDO LA TEMPERATURA DEL CAVO EGUALE A QUELLA DI RIFERIMENTO) ESPRESSO DALLA (8.4.9) CHE QUI RISCRIVIAMO:

$$(8.8.7) \quad F_t = AF .$$

$$A[\text{dB}] = 10 \log A$$

NELLA (8.8.7) L'ATTENUAZIONE IN POTENZA A DELLA LINEA, RICORDANDO LE (8.7.2) E (8.7.5) E' DATA DA:

$$(8.8.8) \quad A = 10 \frac{A[\text{dB}]}{10} = 10 \frac{\alpha_e d}{10} = 10^{0.235 \sqrt{f} d}$$

ESSENDO LA LUNGHEZZA d ESPRESSA IN KM E LA FREQUENZA f IN MHZ.

LA POTENZA DISPONIBILE N DEL RUMORE ALL'USCITA DEL COLLEGAMENTO IN UNA BANDA DI FREQUENZE  $\Delta f$  SUFFICIENTEMENTE PICCOLA CENTRATA SULLA FREQUENZA  $f$  E' DATA DA:

$$(8.8.9) \quad N = K \left[ T_s + (F_t - 1)T \right] \Delta f ,$$

ESSENDO  $T_s$  LA TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE DELLA SORGENTE DI SEGNALE E  $T = 290 \text{ } ^\circ\text{K}$  LA TEMPERATURA DI RIFERIMENTO.

ESSENDO  $F_t T \gg |T_s - T|$ , RICORDANDO LA (8.8.7), RISULTA:

$$(8.8.10) \quad N = \underbrace{K A F T}_{\frac{N_0}{\Delta f}} \Delta f .$$

DALLA CONDIZIONE

$$(8.8.11) \quad N \leq N_0$$

$$\frac{N_0}{\Delta f} \leq N_0 \quad \text{x è lo stesso}$$

DISCENDE QUINDI:

$$(8.8.12) \quad A \leq \frac{N_0}{K F T \Delta f} .$$

DALLE (8.8.12) E (8.8.8) OTTIENIAMO:

$$(8.8.13) \quad d \leq \frac{1}{0.235 \sqrt{f}} \log_{10} \frac{N_0}{K F T \Delta f} .$$

SOSTITUENDO NELLA (8.8.13) I VALORI NUMERICI INDICATI NEL TESTO DELL'ESERCIZIO, SEGUE:

$$d \leq 14.55 \text{ KM} \quad \text{per } f = 4 \text{ MHZ} ,$$

$$d \leq 8.40 \text{ KM} \quad \text{per } f = 12 \text{ MHZ} ,$$

$$d \leq 3.76 \text{ KM} \quad \text{per } f = 60 \text{ MHZ} .$$

S<sub>c</sub> ESERCIZIO N. 7

SI CONSIDERI UN COLLEGAMENTO DI 2500 KM SU CAVO COASSIALE NORMALE 2.6/9.5 COSTITUITO DA TRATTE DI E-GUALE LUNGHEZZA  $L_t$  COMPRENDENTI AMPLIFICATORI-EQUALIZZATORI CON GUADAGNO, AD OGNI FREQUENZA, PARI ALL'ATTENUAZIONE INTRODOTTA DA CIASCUNA TRATTA. SI DETERMINI  $L_t$  IN MODO CHE LA POTENZA DEL RUMORE TERMICO ALL'USCITA DEL COLLEGAMENTO, IN UNA BANDA  $\Delta f = 4$  KHZ CENTRATA SULLA FREQUENZA  $f = 4$  MHZ, NON SUPERI IL VALORE  $N_o = 350$  pW, SAPENDO CHE ALLA STESSA FREQUENZA LA CIFRA DI RUMORE  $F$  DEGLI AMPLIFICATORI-EQUALIZZATORI VALE 5 dB. SI RIPETA IL MEDESIMO CALCOLO PER  $f = 12$  MHZ E  $f = 60$  MHZ MANTENENDO LO STESSO VALORE DI  $F$ .

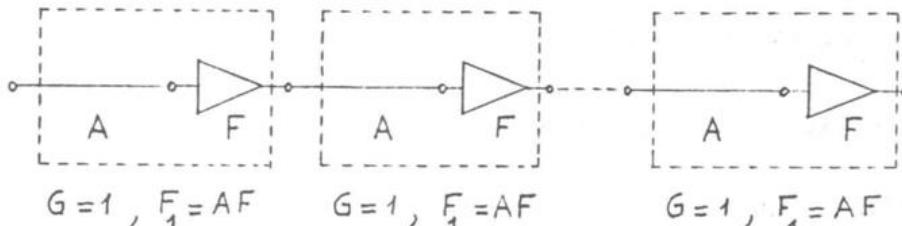


Fig. 8.8.3

IL COLLEGAMENTO, DI LUNGHEZZA  $L = 2500$  KM, E' COSTITUITO (FIGURA 8.8.3) DA  $N_t = L/L_t$  SUCCESSIVE SEZIONI DI AMPLIFICAZIONE. CIASCUNA DI QUESTE HA GUADAGNO  $G = 1$  E CIFRA DI RUMORE - ASSUMENDO LA TEMPERATURA DEL CAVO EGUALE A QUELLA DI RIFERIMENTO - EGUALE A:

$$(8.8.14) \quad F_1 = A F ,$$

ESSENDO [V. (8.7.2)]

$$(8.8.15) \quad A = 10 \quad \frac{A[\text{dB}]}{10} = 10 \quad \frac{\alpha_t[\text{dB/Km}]}{10} L_t[\text{Km}]$$

L'ATTENUAZIONE IN POTENZA DI CIASCUNA TRATTA.

L'INTERO COLLEGAMENTO HA DUNQUE GUADAGNO UNITARIO  
E CIFRA DI RUMORE

$$(8.8.16) \quad F_t = F_1 + (F_1 - 1)(N_t - 1) = N_t AF - (N_t - 1).$$

ESSENDO  $AF \gg 1$ , RISULTA:

$$(8.8.17) \quad F_t = N_t AF$$

E QUINDI

$$(8.8.18) \quad F_t = LF \frac{\frac{\alpha_L L_t}{10}}{L_t}.$$

L'ANDAMENTO DI  $F_t$  IN FUNZIONE DI  $L_t$  E' RAPPRESENTATO NELLA FIGURA 8.8.4. SI NOTI CHE  $L_t$  PRESENTA UN MINIMO PER  $L_t = 4.34/\alpha_L$ .

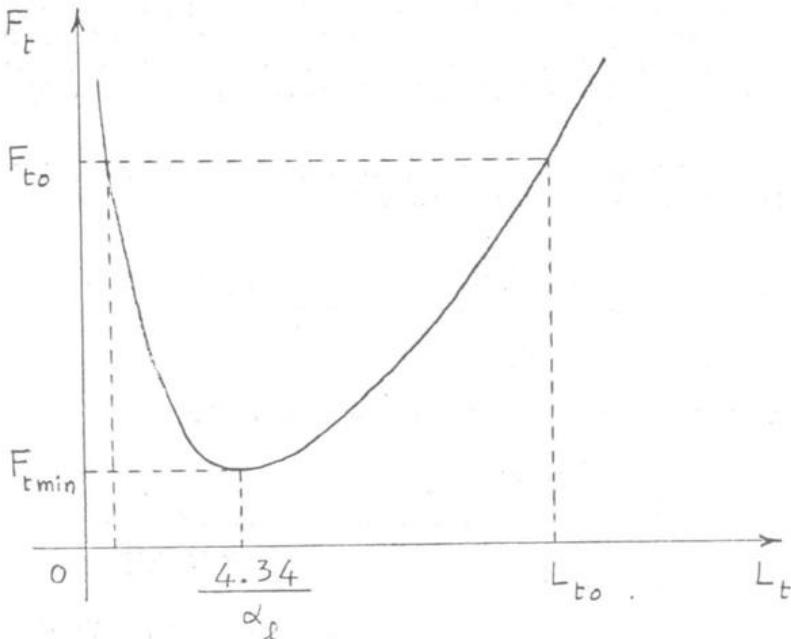


Fig. 8.8.4

LA POTENZA DISPONIBILE N DEL RUMORE ALL'USCITA DEL COLLEGAMENTO IN UNA BANDA DI FREQUENZE  $\Delta f$  SUFFICIENTEMENTE PICCOLA CENTRATA SULLA FREQUENZA  $f$  E' DATA DA:

$$(8.8.19) \quad N = k [T_s + (F_t - 1) T] \Delta f,$$

ESSENDO  $T_s$  LA TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE DELLA SORGENTE DI SEGNALE E  $T = 290$  °K LA TEMPERATURA DI RIFERIMENTO.

POICHE'  $F_t T \gg |T_s - T|$ , RISULTA:

$$(8.8.20) \quad N = k F_t T \Delta f.$$

IL VALORE MASSIMO  $F_{t_0}$  DELLA CIFRA DI RUMORE DEL L'INTERO COLLEGAMENTO CHE GARANTISCE L'OTTENIMENTO DELL'OBIETTIVO  $N \leq N_o$  E' QUINDI:

$$(8.8.21) \quad F_{t_0} = \frac{N_o}{k T \Delta f},$$

A CUI, COME MOSTRA LA FIGURA 8.8.4 (RIFERITA EVIDENTEMENTE AL CASO  $F_{t_0} > F_{\min}$ ), CORRISPONDE UN INTERVALLO DI VALORI DI LUNGHEZZA DI TRATTA; FRA QUESTI, OVIAMENTE, PRESENTANO INTERESSE PRATICO SOLO QUELLI VICINI ALL'ESTREMO SUPERIORE  $L_{t_0}$ .

PER CALCOLARE  $L_{t_0}$  BASTA RISOLVERE L'EQUAZIONE CHE SI OTTIENE DALLE (8.8.18) E (8.8.21):

$$(8.8.22) \quad LF \frac{\frac{\alpha_f L_{t_0}}{10}}{L_{t_0}} = \frac{N_o}{k T \Delta f}.$$

RICORDANDO LA (8.7.5) POSSIAMO SCRIVERE:

$$(8.8.23) \quad \frac{10}{L_{t_0}} - \frac{0.235 \sqrt{f} L_{t_0}}{LF k T \Delta f} = 0.$$

(f IN MHZ,  $L_{t_0}$  IN KM)

SOSTITUENDO NELLA (8.8.23) I VALORI NUMERICI INDICATI NEL TESTO DELL'ESERCIZIO, OTTENIAMO:

$$(8.8.24) \quad \frac{0.235 \sqrt{f} L_{t_0}}{L_{t_0}} - 2766 = 0 ,$$

DA CUI:

$$L_{t_0} = 9.39 \text{ KM} \quad \text{per } f = 4 \text{ MHZ} ,$$

$$L_{t_0} = 5.10 \text{ KM} \quad \text{per } f = 12 \text{ MHZ} ,$$

$$L_{t_0} = 2.06 \text{ KM} \quad \text{per } f = 60 \text{ MHZ} .$$

COME DEVE ESSERE, I VALORI DI  $L_{t_0}$  SONO MINORI DELLE LUNGHEZZE CALCOLATE NELL'ESERCIZIO PRECEDENTE.

I VALORI DEL PASSO DI AMPLIFICAZIONE DEI SISTEMI DI TRASMISSIONE SU CAVO COASSIALE NORMALE SONO GIA' STATI RIPORTATI A PAGINA 6.21, E CIOE' 9.3 KM (SISTEMI A 4 MHZ),  $9.3/2 = 4.65$  KM (12 MHZ),  $4.65/3 = 1.55$  KM (60 MHZ).

NEI TRE SISTEMI IL GUADAGNO MASSIMO DI CIASCUN AMPLIFICATORE-EQUALIZZATORE (EGUALE ALL'ATTENUAZIONE DI CIASCUNA TRATTA ALLA MASSIMA FREQUENZA DI LAVORO) VALE RISPETTIVAMENTE 44 dB, 38 dB E 28 dB.

## 8.9 ALCUNI CALCOLI DI MASSIMA SU UN COLLEGAMENTO NUMERICO SU LINEA.

CONSIDERIAMO LO SCHEMA A BLOCCHI DI UN COLLEGAMENTO NUMERICO SU LINEA RIPORTATO IN FIGURA 8.9.1.

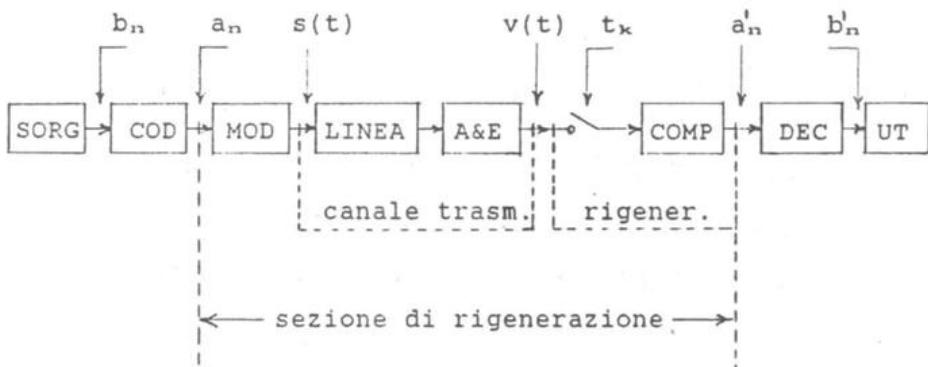


Fig. 8.9.1

### LA QUALITA' DI TRASMISSIONE

LA SORGENTE DI INFORMAZIONE DA' ORIGINE AD UNA SEQUENZA DI BIT  $\{b_n\}$  DESTINATA AD UN UTENTE LONTANO. COME DETTO NEL PARAGRAFO 1.1 LE CIFRE FORNITE ALL'UTENTE DOVREBBERO RIPRODURRE QUELLE GENERATE DALLA SORGENTE NEI VALORI E NELLA CADENZA TEMPORALE.

IN REALTA' POSSONO AVVENIRE ERRORI NEL RICONOSCIMENTO DELLE CIFRE CON UNA CERTA FREQUENZA  $T_{eb}$  (TASSO DI ERRORE PER BIT) E SI POSSONO AVERE VARIAZIONI ALEATORIE NELLA SUDDETTA CADENZA TEMPORALE (JITTER).

IL TASSO DI ERRORE PER BIT E' DATO DA:

$$(8.9.1) \quad T_{eb} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_e}{N},$$

OVE  $N_e$  E' IL NUMERO DI BIT ERRATI IN UNA SEQUENZA LUNGA  $N$ .

IN VIRTU' DELL'ERGODICITA' DEL MESSAGGIO NUMERICO E DEI DISTURBI ALEATORI CHE CONCORRONO A DETERMINARE GLI ERRORI, IL TASSO (8.9.1) COINCIDE CON LA PROBABILITA' DI ERRORE PER BIT  $P_{eb}$  E QUEST'ULTIMA PUO' ESSERE CALCOLATA A PRIORI IN FUNZIONE DEI PARAMETRI CHE CARATTERIZZANO IL SISTEMA DI TRASMISSIONE.

LA PROBABILITA' DI ERRORE ED IL JITTER INDIVIDUANO LA QUALITA' DEL COLLEGAMENTO. IN GENERALE IL FATTORE DI DEGRADAZIONE PIU' IMPORTANTE E' QUELLO DOVUTO AGLI ERRORI COMMESSI: PERTANTO IL PRESENTE PARAGRAFO E' DEDICATO A SPIEGARE COME AVVENGONO QUESTI ERRORI ED A CALCOLARNE LA PROBABILITA'.

### IL CODICE DI LINEA

RITORNANDO ALLO SCHEMA A BLOCCHI DEL COLLEGAMENTO RIPORTATO IN FIGURA 8.9.1, SI NOTI CHE IL MESSAGGIO NUMERICO TRASMESSO NON E' DIRETTAMENTE QUELLO GENERATO DALLA SORGENTE DI INFORMAZIONE, MA UN MESSAGGIO  $\{a_n\}$ , ANCORA DI TIPO NUMERICO, OTTENUTO CODIFICANDO QUEST'ULTIMO SECONDO UN CODICE, DETTO CODICE DI LINEA.

COME GIA' PRECISATO NEL PARAGRAFO 5.10, CHIAMEREMO SIMBOLI GLI ELEMENTI  $a_n$ , TEMPO DI SIMBOLO T L'INTERVALLO CON CUI ESSI SI SUCCEDONO, FREQUENZA DI SIMBOLO IL SUO INVERSO  $B_a = 1/T$ .

IL COLLEGAMENTO RESTITUISCE SIMBOLI  $a_n$ , ALCUNI DEI QUALI POSSONO DIFFERIRE DAI CORRISPONDENTI VALORI  $a_n$  E, DI CONSEGUENZA, IL MESSAGGIO DECODIFICATO  $\{b_n\}$  PUO' CONTENERE BIT ERRATI. SI INTRODUCE PERCIO' LA PROBABILITA' DI ERRORE PER SIMBOLO  $P_e$ , A CUI E' OVVIAIMENTE LEGATA LA PROBABILITA' DI ERRORE PER BIT  $P_{eb}$  E QUINDI LA QUALITA' DEL COLLEGAMENTO.

LE RAGIONI PER CUI SI FA RICORSO A CODICI DI LINEA SONO MOLTEPLICI. CITIAMO FRA QUESTE:

\* CON UN CODICE A RIVELAZIONE DI ERRORE E' POSSIBILE TENERE SOTTO OSSERVAZIONE LA QUALITA' DEL COLLEGAMENTO QUANDO ESSO E' IN SERVIZIO; CIO' CONSENTE DI COMMUTARE SU UN COLLEGAMENTO DI RISERVA QUANDO IL TASSO DI ERRORE SUPERA UN FISSATO VALORE;

\* CON UN CODICE A RIVELAZIONE E CORREZIONE DI ERRORE E' POSSIBILE CORREGGERE, ENTRO CERTI LIMITI, GLI ERRORI COMMESSI NEL RICONOSCIMENTO DEI SIMBOLI E TENERE SOTTO OSSERVAZIONE LA QUALITA' DEL COLLEGAMENTO;

\* INTRODUCENDO UNA OPPORTUNA CORRELAZIONE FRA I SIMBOLI CHE SI SUCCEDONO, E' POSSIBILE SAGOMARE LO SPETTORE DI POTENZA DEL SEGNALE IN LINEA IN MODO DA MEGLIO ADATTARLO ALLE CARATTERISTICHE TRASMISSIVE DEL CANALE (SI VEDA A QUESTO PROPOSITO IL RISULTATO DELL'ESERCIZIO N.9 DEL CAPITOLO V);

\* FACENDO USO DI UN CODICE A PIU' LIVELLI E' POSSIBILE RIDURRE LA FREQUENZA DI SIMBOLI RISPETTO ALLA FREQUENZA DI BIT DELLA SORGENTE; CIO' CONSENTE DI RIDURRE LA BANDA DI LAVORO CHE, COME VEDREMO, E' DETERMINATA DA  $B_s$ .

### IL MODULATORE PAM

IL MESSAGGIO  $\{a_n\}$ , APPLICATO AL MODULATORE, DA' ORIGINE AL SEGNALE PAM:

$$(8.9.2) \quad s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n g(t-nT) .$$

### IL CANALE DI TRASMISSIONE

IL CANALE DI TRASMISSIONE, FORMATO DA UN TRONCO DI LINEA ADATTATA E DA UN SUCCESSIVO AMPLIFICATORE-EQUALIZZATORE (DI CUI VEDREMO FRA POCO LE FUNZIONI), DA' UNA USCITA  $v(t)$  CHE COMPRENDE LA RISPOSTA  $s_r(t)$  A  $s(t)$  E, SOVRAPPOSTO AD ESSA, UN RUMORE  $n(t)$  DOVUTO ALLA SORGENTE DEL SEGNALE PAM, ALLA LINEA (EFFETTO JOHNSON) ED ALL'AMPLIFICATORE-EQUALIZZATORE (IL CONTRIBUTO DI QUEST'ULTIMO E' QUELLO PREVALENTE):

$$(8.9.3) \quad v(t) = s_r(t) + n(t) .$$

LA RISPOSTA  $s_r(t)$  A  $s(t)$  PUO' ESSERE ESPRESSA UNA VOLTA NOTA LA RISPOSTA  $r(t)$  A  $g(t)$  [V. FIGURA 8.9.2 OVE  $L(\omega)$  INDICA LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL TRONCO DI LINEA ED  $E(\omega)$  QUELLA DELL'AMPLIFICATORE-EQUALIZZATORE].

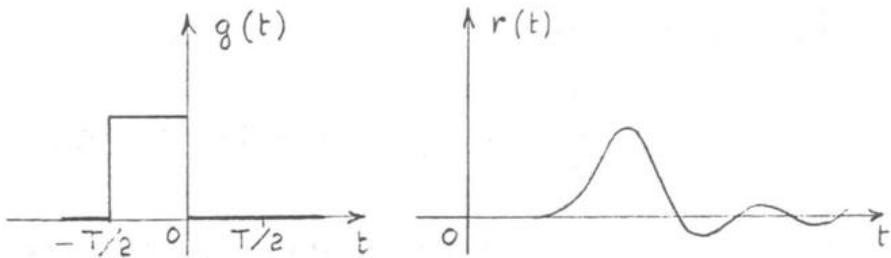
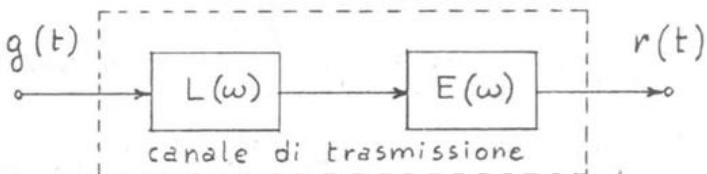


Fig. 8.9.2

ESSENDO IL CANALE LINEARE E TEMPO-INVARIANTE,  
POSSIAMO INFATTI SCRIVERE:

$$(8.9.4) \quad s_r(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r(t-nT).$$

L'INFORMAZIONE RECATA DAL SEGNALE PAM E' LEGATA AI SIMBOLI  $a_n$ , NON ALLA FORMA D'ONDA DEL SEGNALE STESSO. PER RIDURRE LA BANDA DI LAVORO NON CI PREOCCUPIAMO AFFATTO DI EVITARE DISTORSIONI: A TALE PROPOSITO SI OSSERVI NELLA FIGURA 8.9.2 LA COMPLETA DIVERSITA' FRA LE FORME D'ONDA DI  $g(t)$  E DI  $r(t)$ .

NONOSTANTE LA PRESENZA DI RUMORE E DI DISTORSIONI E' POSSIBILE RICONOSCERE I SIMBOLI SUCCESSIVAMENTE TRASMESSI, OVVIAIMENTE A MENO DI ERRORI.

8

### IL RIGENERATORE

IL RICONOSCIMENTO DEI SIMBOLI  $a_n$  PUO' AVVENIRE COME INDICATO NELLO SCHEMA DI FIGURA 8.9.1.

L'USCITA DEL CANALE  $v(t)$  VIENE LETTA IN UNA SUCCESSIONE DI ISTANTI INTERVALLATI DEL TEMPO DI SIMBOLO T:

$$(8.9.5) \quad t_k = \tau_0 + kT \quad (\tau_0 = \text{cost.}, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots)$$

NEL GENERICO ISTANTE DI LETTURA  $t_k$  ABBIAMO:

$$(8.9.6) \quad r(t_k) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r[\tau_0 + (k-n)T] + n(t_k).$$

IMPONIAMO ALLA RISPOSTA  $r(t)$  LA SEGUENTE CONDIZIONE (V. ANCHE LA FIGURA 8.9.3):

$$(8.9.7) \quad r(\tau_0 + hT) = \begin{cases} r(\tau_0) \neq 0, & \text{per } h=0, \\ 0, & \text{per } h \text{ intero} \neq 0. \end{cases}$$

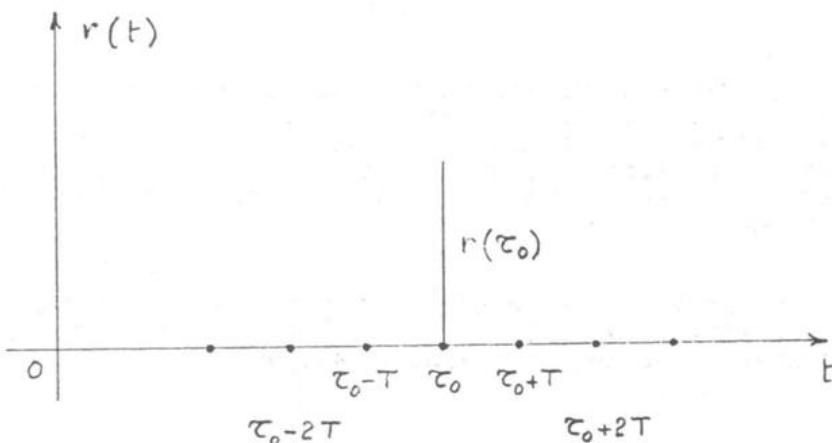


Fig. 8.9.3

IN TAL MODO IL VALORE DELL'USCITA DEL CANALE,  
NELL'ISTANTE DI LETTURA  $t_k$ , E' SEMPLICEMENTE ESPRESSO  
DA:

$$(8.9.8) \quad v(t_k) = a_k r_o + n_k ,$$

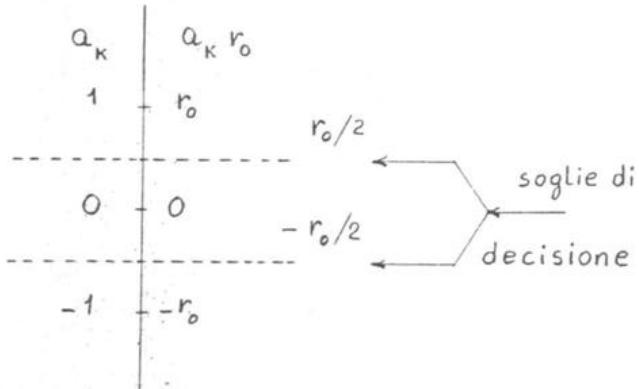
OVE:

$$(8.9.9) \quad r_o = r(\tau_o) ,$$

$$(8.9.10) \quad n_k = n(t_k) .$$

DAL VALORE LETTO  $v(t_k)$ , COME ESPRESSO DALLA (8.9.8), SAREBBE IMMEDIATO RISALIRE AL SIMBOLO  $a_k$  SE NON VI FOSSE IL TERMINE DI RUMORE  $n_k$ .

LA PRESENZA DI QUEST'ULTIMO RENDE NECESSARIA L'ADOZIONE DI UNA REGOLA DI DECISIONE, DEL TIPO DI QUELLA ILLUSTRATA IN FIGURA 8.9.4 CON RIFERIMENTO AL CODICE AMI.



$$v(t_k) > \frac{r_o}{2} \longrightarrow a_k = 1 ,$$

$$-\frac{r_o}{2} < v(t_k) < \frac{r_o}{2} \longrightarrow a_k = 0 ,$$

$$v(t_k) < -\frac{r_o}{2} \longrightarrow a_k = -1 .$$

Fig. 8.9.4

TALE REGOLA IMPLICA UN CONFRONTO CON OPPORTUNE SOGLIE DA EFFETTUARSI CON UN COMPARATORE DI TENSIONE (INDICATO COME COMP NELLO SCHEMA A BLOCCHI DI FIGURA 8.9.1).

OVVIAMENTE IL RICONOSCIMENTO DEL SIMBOLO  $a_k$  PUO' AVVENIRE IN MANIERA ERRATA. LA PROBABILITA' CHE CIO' AVVENGA, cioe' LA PROBABILITA' DI ERRORE  $P_e$ , SARA' DETERMINATA FRA POCO.

OSSERVIAMO CHE LA CONDIZIONE (8.9.7) CONSENTE DI OPERARE UNA DECISIONE SIMBOLO PER SIMBOLO SENZA CHE VI SIA INTERFERENZA FRA I SIMBOLI SUCCESSIVAMENTE TRASMESSI (INTERFERENZA INTERSIMBOLO).

QUESTA INTERFERENZA, CHE SI AVREBBE NEL CASO IN CUI I VALORI  $r(\tau_0 + hT)$  NON FOSERO' RIGOROSAMENTE NULLI PER  $h \neq 0$ , PUO' ESSERE MESSA IN EVIDENZA ANALITICAMENTE SCRIVENDO LA (8.9.6) NELLA FORMA:

$$(8.9.11) \quad v(t_k) = a_k r(\tau_0) + \sum_{n \neq k}^{\infty} a_n r[\tau_0 + (k-n)T] + n(t_k),$$

$$(8.9.12) \quad v(t_k) = a_k r_0 + \varphi + n_k,$$

OVE

$$(8.9.13) \quad \varphi = \sum_{n \neq k}^{\infty} a_n r[\tau_0 + (k-n)T]$$

RAPPRESENTA APPUNTO L'INTERFERENZA INTERSIMBOLO.

MOSTRIAMO ORA COME SI POSSA PROGETTARE IL CANALE DI TRASMISSIONE AFFINCHE' SIA VERIFICATA LA CONDIZIONE (8.9.7).

IL CRITERIO DI NYQUIST  
PER L'ANNULLAMENTO DELL'INTERFERENZA INTERSIMBOLO

L'OBBIETTIVO ESPRESSO DALLA (8.9.7) PUO' ESSERE RAGGIUNTO SE, E SOLO SE, LA TRASFORMATA  $R(\omega)$  DI  $r(t)$  PUO' ESSERE SCRITTA NELLA FORMA:

$$(8.9.14) \quad R(\omega) = X(\omega) e^{-j\omega\tau_0},$$

ESSENDO LA FUNZIONE  $X(\omega)$  APPARTENENTE ALL'INSIEME DELLE TRASFORMATE INDIVIDUATE NELL'ESERCIZIO N. 8 DEL CAPITOLO II (PAGINA 2.35), NELLE QUALI SI PONGA  $x_o = r_o$ .

UNA SCELTA COMUNE, PERCHE' DA' LUOGO A PRESTAZIONI MOLTO VICINE A QUELLE OTTIME, E' UNA FUNZIONE  $X(\omega)$  A RACCORDI SIMMETRICI DEL TIPO PRESENTATO NELLA FIGURA 2.8.6 A PAGINA 2.37 (CRITERIO DI NYQUIST).

AD ESEMPIO, TALI RACCORDI POSSONO ESSERE A COSENO RIALZATO, COME ESPRESSO DALLA (2.8.16) E RAPPRESENTATO NELLA FIGURA 2.8.7. IN TAL CASO NELLA (8.9.14)  $X(\omega)$  RAPPRESENTA IL MODULO DI  $R(\omega)$ . POSSIAMO PERCIO' SCRIVERE:

$$(8.9.15) \quad R(\omega) = |R(\omega)| e^{-j\omega\tau_0} = r_o T f_r(\omega) e^{-j\omega\tau_0},$$

OVE, PER  $\omega \geq 0$ ,

$$(8.9.16) \quad f_r(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{per } 0 \leq \omega \leq (1-\alpha)\frac{\pi}{T}, \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sin \left[ \frac{T}{2\alpha} \left( \omega - \frac{\pi}{T} \right) \right] \right\}, & \text{per } (1-\alpha)\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq (1+\alpha)\frac{\pi}{T}, \\ 0, & \text{per } \omega \geq (1+\alpha)\frac{\pi}{T}, \end{cases}$$

ESSENDO SEMPRE  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) IL FATTORE DI ROLL-OFF.

NELLA FIGURA 8.9.5 RIPORTIAMO, PER COMODITA', L'ANDAMENTO DI  $|R(\omega)|$  ASSIEME ALLA CORRISPONDENTE RISPOSTA  $r(t)$  PER  $\alpha = 0.5$  (SI RICORDINO GLI STESSI ANDAMENTI GIA' RAPPRESENTATI NELLE FIGURE 2.8.7 E 2.8.9 CON DIVERSA SIMBOLOGIA).

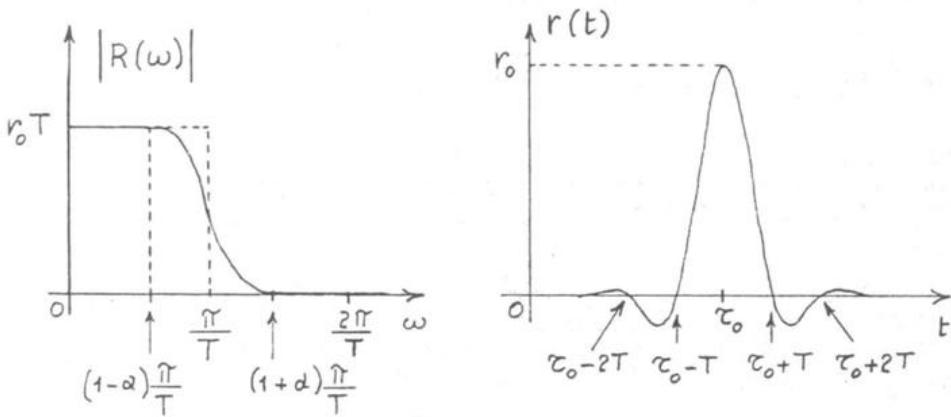


Fig. 8.9.5

PERCHE' IL COLLEGAMENTO IN ESAME NON DIA LUOGO AD INTERFERENZA INTERSIMBOLO, E QUINDI LA RISPOSTA  $r(t)$  DEL CANALE ALL'IMPULSO  $g(t)$  ABBIA LA TRASFORMATA E-SPRESSA DALLE (8.9.15) E (8.9.16), OPERIAMO SULL'AMPLIFICATORE-EQUALIZZATORE.

POSSIAMO INFATTI SCRIVERE (V. FIGURA 8.9.2):

$$R(\omega) = G(\omega) L(\omega) E(\omega),$$

OVE  $L(\omega)$  E' PREDETERMINATO DALLA SCELTA DEL TIPO DI LINEA E DALLA SUA LUNGHEZZA E  $G(\omega)$  DA QUELLA DELLA FORMA D'ONDA DELL'IMPULSO  $g(t)$  [AD ESEMPIO, DI TIPO RZ CON DUTY CYCLE 0.5].

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELL'AMPLIFICATORE-EQUALIZZATORE CHE DOBBIAMO REALIZZARE E' PERTANTO E-SPRESSA DA:

$$E(\omega) = \frac{R(\omega)}{G(\omega) L(\omega)}$$

E, IN PARTICOLARE, LA SUA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA DA:

$$(8.9.17) \quad |E(\omega)| = \frac{|R(\omega)|}{|G(\omega)| |L(\omega)|}.$$

E' OPPORTUNO DARE LA DEFINIZIONE DI CANALE DI TRASMISSIONE EQUIVALENTE: QUESTO E' SEMPLICEMENTE IL CANALE RAPPRESENTATO IN FIGURA 8.9.6, AVENTE FUNZIONE DI TRASFERIMENTO ESPRESSA DALLA (8.9.7) E QUINDI RISPOSTA IMPULSIVA  $r(t)$ . IL CANALE DI TRASMISSIONE EFFETTIVO E' QUELLO EQUIVALENTE DANNO LA STESSA RISPOSTA QUANDO AI MORSETTI DI INGRESSO DEL PRIMO E' PRESENTE L'IMPULSO  $g(t)$  ED AI MORSETTI DEL SECONDO LA FUNZIONE IMPULSIVA.

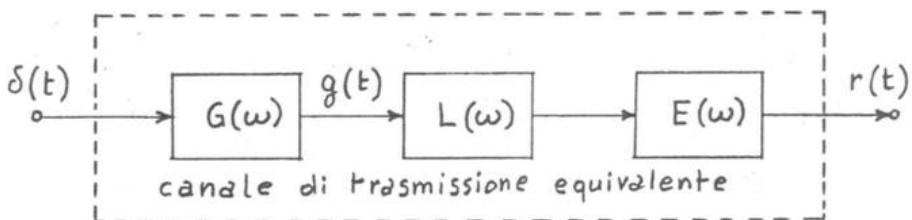


Fig. 8.9.6

LA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L'ASSENZA DELL'INTERFERENZA INTERSIMBOLO ESPRESSA DALLE (8.9.15) E (8.9.16) SI PUO' ENUNCIARE SEMPLICEMENTE DICENDO CHE, A QUESTO FINE, BASTA CHE IL CANALE DI TRASMISSIONE EQUIVALENTE ABbia CARATTERISTICA DI AMPIEZZA A COSENO RIALZATO E CARATTERISTICA DI FASE PROPORZIONALE AD  $\omega$ .

PER QUANTO CONCERNE LA BANDA DI LAVORO DEL SISTEMA DI TRASMISSIONE IN ESAME E' INTERESSANTE OSSERVARE LA FIGURA 8.9.7 OVE SONO RAPPRESENTATI:

- IL MODULO  $|G(\omega)|$  DELLA TRASFORMATA DEGLI IMPULSI TRASMESSI NEL CASO IN CUI QUESTI SIANO DI TIPO RZ CON DUTY CYCLE 0.5;
- LA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA  $|R(\omega)|$  DEL CANALE EQUIVALENTE DI TRASMISSIONE CON  $\alpha = 0.5$ .

SI NOTI CHE LA BANDA DI TRASMISSIONE COMPRENDE SOLO UNA PARTE DEL LOBO PRINCIPALE DI  $|G(\omega)|$  E CIO' SPIEGA LA DISTORSIONE DI  $r(t)$  RISPETTO A  $g(t)$ . TALE DISTORSIONE NON INFLUENZA TUTTAVIA  $s_r(t_k)$ .

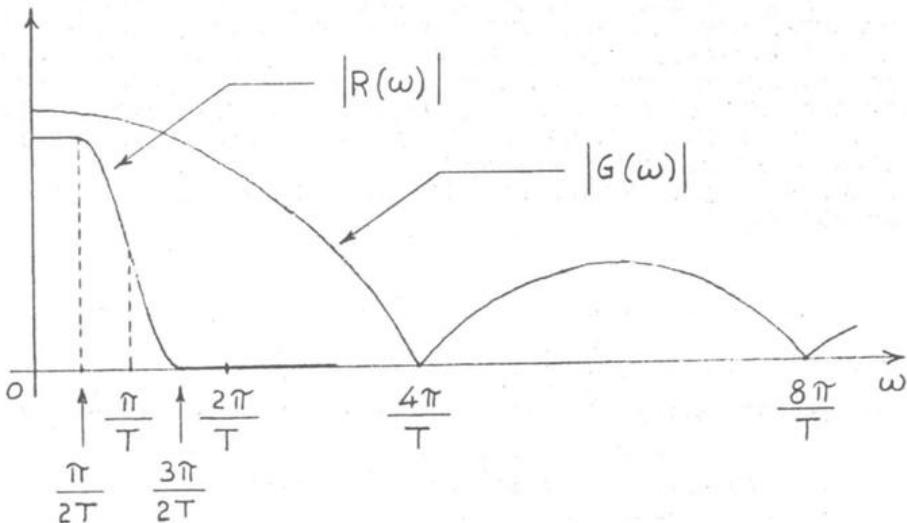


Fig. 8.9.7

#### LA PROBABILITA' DI ERRORE

CALCOLIAMO ORA LA PROBABILITA' DI ERRORE  $P_e$  IN ASSENZA DI INTERFERENZA INTERSIMBOLO SEMPRE CON RIFERIMENTO AL CODICE AMI ED ALLA FIGURA 8.9.4.

ABBIAMO:

$$(8.9.18) \quad P_e = p(0) P_{e/0} + p(1) P_{e/1} + p(-1) P_{e/-1},$$

ESSENDO

-  $p(0)$ ,  $p(1)$ ,  $p(-1)$  LE PROBABILITA' CHE COMPETONO AI SIMBOLI  $0$ ,  $1$ ,  $-1$ , EGUALI ORDINATAMENTE A  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$  NELL'IPOTESI CHE I BIT EMESSI DALLA SORGENTE SIANO EQUIPROBABILI (V. ESERCIZIO N. 7 DEL CAPITOLO V);

-  $P_{e/0}$ ,  $P_{e/1}$ ,  $P_{e/-1}$  LE PROBABILITA' DI ERRORE NEI CASI IN CUI IL SIMBOLO  $a_k$  CORRISPONDENTE AL GENERICO ISTANTE DI DECISIONE  $t_k$  CONSIDERATO SIA EGUALE RISPECTIVAMENTE A  $0$ ,  $1$ ,  $-1$ .

IL RUMORE  $n(t)$  E' UNA FUNZIONE ALEATORIA ERGODICA,  
GAUSSIANA, A VALOR MEDIO NULLO. SIA

$$(8.9.19) \quad E[n^2(t)] = \langle n^2(t) \rangle$$

LA SUA POTENZA.

$n_k = n(t_k)$  E' QUINDI UNA VARIABILE GAUSSIANA A  
VALOR MEDIO NULLO E VARIANZA  $\sigma^2$  EGUALE ALLA POTENZA  
(8.9.19).

RICORDANDO ALLORA LA (5.7.7) POSSIAMO SCRIVERE:

$$(8.9.20) \quad P_{e/0} = \text{Prob} \left\{ |n_k| > \frac{r_0}{2} \right\} = \text{erfc} \left( \frac{r_0}{2\sqrt{2}\sigma} \right),$$

$$(8.9.21) \quad P_{e/1} = \text{Prob} \left\{ n_k < -\frac{r_0}{2} \right\} = \frac{1}{2} \text{erfc} \left( \frac{-r_0}{2\sqrt{2}\sigma} \right),$$

$$(8.9.22) \quad P_{e/-1} = \text{Prob} \left\{ n_k > \frac{r_0}{2} \right\} = \frac{1}{2} \text{erfc} \left( \frac{r_0}{2\sqrt{2}\sigma} \right).$$

DA QUESTE ULTIME TRE RELAZIONI E DALLA (8.9.18)  
DISCENDE:

$$(8.9.23) \quad P_e = \frac{3}{4} \text{erfc} \left( \frac{r_0}{2\sqrt{2}\sigma} \right).$$

NEL CASO IN ESAME (CODICE AMI) LA PROBABILITA' DI  
ERRORE PER BIT E' POI PRATICAMENTE EGUALE ALLA PROBABILI-  
TA' DI ERRORE PER SIMBOLO APPENA CALCOLATA.

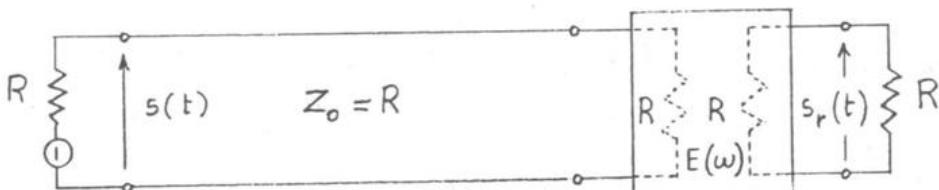
$$(8.9.24) \quad P_{eb} \approx P_e .$$

## LA POTENZA DI RUMORE

IL PARAMETRO DI RUMORE CHE INTERVIENE NELL'ESPRES-  
SIONE DELLA PROBABILITA' DI ERRORE E' LA SUA POTENZA  
ALL'INGRESSO DEL RIGENERATORE, CHE ORA CALCOLIAMO.

A TAL FINE, RICORDANDO LO SCHEMA EQUIVALENTE DI FIGURA 8.6.4, RAPPRESENTIAMO IL SISTEMA DI TRASMISSIONE IN ESAME COME INDICATO IN FIGURA 8.9.8.

\* sistema ideale (non rumoroso):



$Z_o = R$  = impedenza caratteristica della linea.

\* sistema reale (rumoroso):



$T_s$  = temperatura di rumore della sorgente;  
 $T_a$  = temperatura fisica della linea;  
 $F, T_r$  = cifra e temperatura di rumore  
 dell'amplificatore-equalizzatore.

\* sistema equivalente (ai morsetti di uscita dell'amplificatore-equalizzatore):

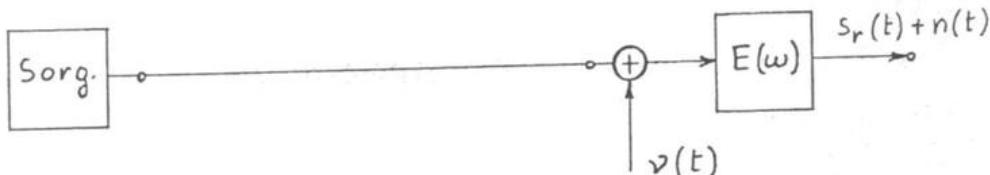


Fig. 8.9.8

IL RUMORE  $\nu(t)$  HA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA  $G_\nu(f)$  RIFERITA DALLE FREQUENZE ESPRESSA DALLA (8.6.5) E DENSITA'  $G_i(\omega)$  RIFERITA ALLE PULSAZIONI CHE, PER LA (4.4.11), E' DATA DA

$$(8.9.25) \quad G_i(\omega) = \frac{k T_{sist} R}{2\pi},$$

OVE, DETTA  $T_{au}$  LA TEMPERATURA DI RUMORE DELLA SORGENTE EQUIVALENTE ALLA SORGENTE DI SEGNALE DI FIGURA 8.9.8 ED AL SUCCESSIVO TRONCO DI LINEA, E':

$$(8.9.26) \quad T_{sist} = T_{au} + T_r,$$

IN VIRTU' DELLA (8.8.6) RISULTA:

$$(8.9.27) \quad T_{au} \approx T_a$$

DA CUI:

$$(8.9.28) \quad T_{sist} = T_a + T_r = T_a + (F - 1) T \approx FT,$$

ESSENDO  $FT \gg |T_a - T|$ .

INFINE:

$$(8.9.29) \quad G_i(\omega) = \frac{k F T R}{2\pi}.$$

LA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA  $G_u(\omega)$  DEL RUMORE ALL'USCITA DELL'AMPLIFICATORE-EQUALIZZATORE VALE PERCIO' [SI RICORDI LA (5.5.3)]:

$$(8.9.30) \quad G_u(\omega) = \frac{k F T R}{2\pi} \left| E(\omega) \right|^2$$

E QUINDI:

$$(8.9.31) \quad \sigma^2 = \langle n^2(t) \rangle = \int_0^\infty \frac{k F T R}{2\pi} \left| E(\omega) \right|^2 d\omega.$$

OSSERVIAMO CHE, TRAMITE  $|E(\omega)|$ ,  $\sigma^2$  DIPENDE DAL FATTORE DI ROLL-OFF  $\alpha$ . QUEST'ULTIMO PUO' DUNQUE ESSERE SCELTO IN MODO DA RENDERE MASSIMO IL RAPPORTO  $r_0/\sigma$  CHE COMPARTE NELL'ESPRESSIONE (8.9.23) DELLA PROBABILITA' DI ERRORE.

PRIMA DI PRESENTARE UNA APPLICAZIONE NUMERICA DEL PROCEDIMENTO ORA ILLUSTRATO, OSSERVIAMO CHE NELLO SCHEMA DI FIGURA 8.9.1 COMPARTE UNA SOLA SEZIONE DI RIGENERAZIONE. IN REALTA', COME GIA' DETTO NEL PARAGRAFO 7.5, UN COLLEGAMENTO SI COMPONE IN GENERALE DI PIU' SEZIONI DI RIGENERAZIONE IN CASCATA.

L'ESERCIZIO CHE SEGUE FA APPUNTO RIFERIMENTO AD UN COLLEGAMENTO A 8.448 Mbit/s SU CAVO MICROCOASSIALE, IL CUI PASSO DI RIGENERAZIONE E' DI 4 KM.

ESERCIZIO N. 8

SI CONSIDERI UN SISTEMA DI TRASMISSIONE NUMERICO CON FREQUENZA DI CIFRA  $B_r = 8.448 \text{ Mbit/s}$  SU CAVO MICROCOASSIALE 0.7/2.9. IL CODICE DI LINEA E' BIPOLARE ALTERNATO (AMI), GLI IMPULSI TRASMESSI SONO RETTANGOLARI CON DUTY CYCLE 0.5, IL PASSO DI RIGENERAZIONE  $L_e = 4 \text{ KM}$ , L'INTERFERENZA INTERSIMBOLO VIENE RESA NULLA MEDIANTE AMPLIFICATORI-EQUALIZZATORI CHE REALIZZANO, IN CIASCUNA TRATTA, UNA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA DEL CANALE DI TRASMISSIONE EQUIVALENTE A COSENO RIALZATO CON FATTORE DI ROLL-OFF  $\alpha = 0.8$ , LA CIFRA DI RUMORE DEGLI AMPLIFICATORI-EQUALIZZATORI E'  $F = 7 \text{ dB}$  IN TUTTA LA BANDA DI FREQUENZE DI LAVORO.

SI DETERMINI IL VALORE MINIMO CHE DEVE AVERE LA AMPIEZZA  $V_m$  DEGLI IMPULSI TRASMESSI AFFINCHE' LA PROBABILITA' DI ERRORE  $P_e$ , PER OGNI SEZIONE DI RIGENERAZIONE, SIA NON SUPERIORE A  $10^{-9}$ .

IN FIGURA 8.9.9 RAPPRESENTIAMO UNA GENERICA SEZIONE DI RIGENERAZIONE:

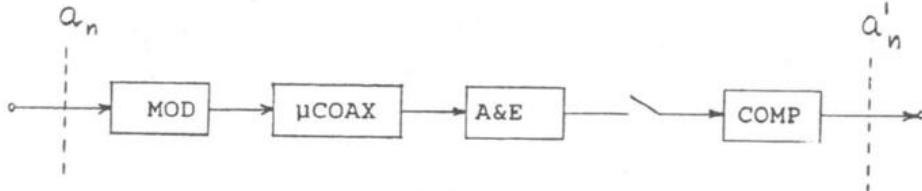


Fig. 8.9.9

DALLA (8.9.23) E DALLA TABELLA DI PAGINA 5.31:

$$\frac{3}{4} \operatorname{erfc} \left( \frac{r_0}{2\sqrt{2}G} \right) \leq 10^{-9},$$

$$\frac{r_0}{G} \geq 12.1.$$

DALLE (8.7.7) E (8.7.3):

$$\begin{aligned}
 |L(\omega)| &= 10^{-\frac{9.5}{20} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} 10^{-6} 4} \\
 &= -7.58 \cdot 10^{-4} \sqrt{\omega} \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

INOLTRE:

$$|G(\omega)| = \frac{V_M}{2B_s} \begin{vmatrix} \sin \frac{\omega}{4B_s} \\ \frac{\omega}{4B_s} \end{vmatrix}.$$

DALLE (8.9.17), (8.9.15) E (8.9.16):

$$|E(\omega)| = 2 \frac{r_o}{V_M} \frac{f_r(\omega)}{\left| \begin{matrix} \sin \frac{\omega}{4B_s} \\ \frac{\omega}{4B_s} \end{matrix} \right| 10^{-7.58 \cdot 10^{-4} \sqrt{\omega}}}.$$

IN FIGURA 8.9.10 SONO RIPORTATI, IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA, L'ANDAMENTO DI  $f_r$  E LA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA DELL'AMPLIFICATORE-EQUALIZZATORE PER  $r_o/V_M = 1$  (OSSIA CON IMPULSI ALL'INGRESSO ED ALL'USCITA DEL CANALE DI TRASMISSIONE AVENTI IL MEDESIMO VALORE DI PICO).

DALLA (8.9.31):

$$\sigma^2 = \frac{K F T R}{2\pi} \int_0^\infty |E(\omega)|^2 d\omega = \frac{2 K F T R}{\pi} \frac{r_o^2}{V_M^2} I,$$

OVE:

$$I = \int_0^\infty \frac{f_r^2(\omega)}{\left( \frac{\sin \frac{\omega}{4B_s}}{\frac{\omega}{4B_s}} \right)^2 10^{-15.2 \cdot 10^{-4} \sqrt{\omega}}} d\omega.$$

RISULTA:

$$I = 8.38 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1},$$

$$V_M = \sqrt{\frac{2 K F T R I}{\pi}} \frac{r_o}{\sigma} = 2.83 \cdot 10^{-2} \frac{r_o}{\sigma} \text{ Volt},$$

$$V_M \geq 0.34 \text{ Volt}.$$

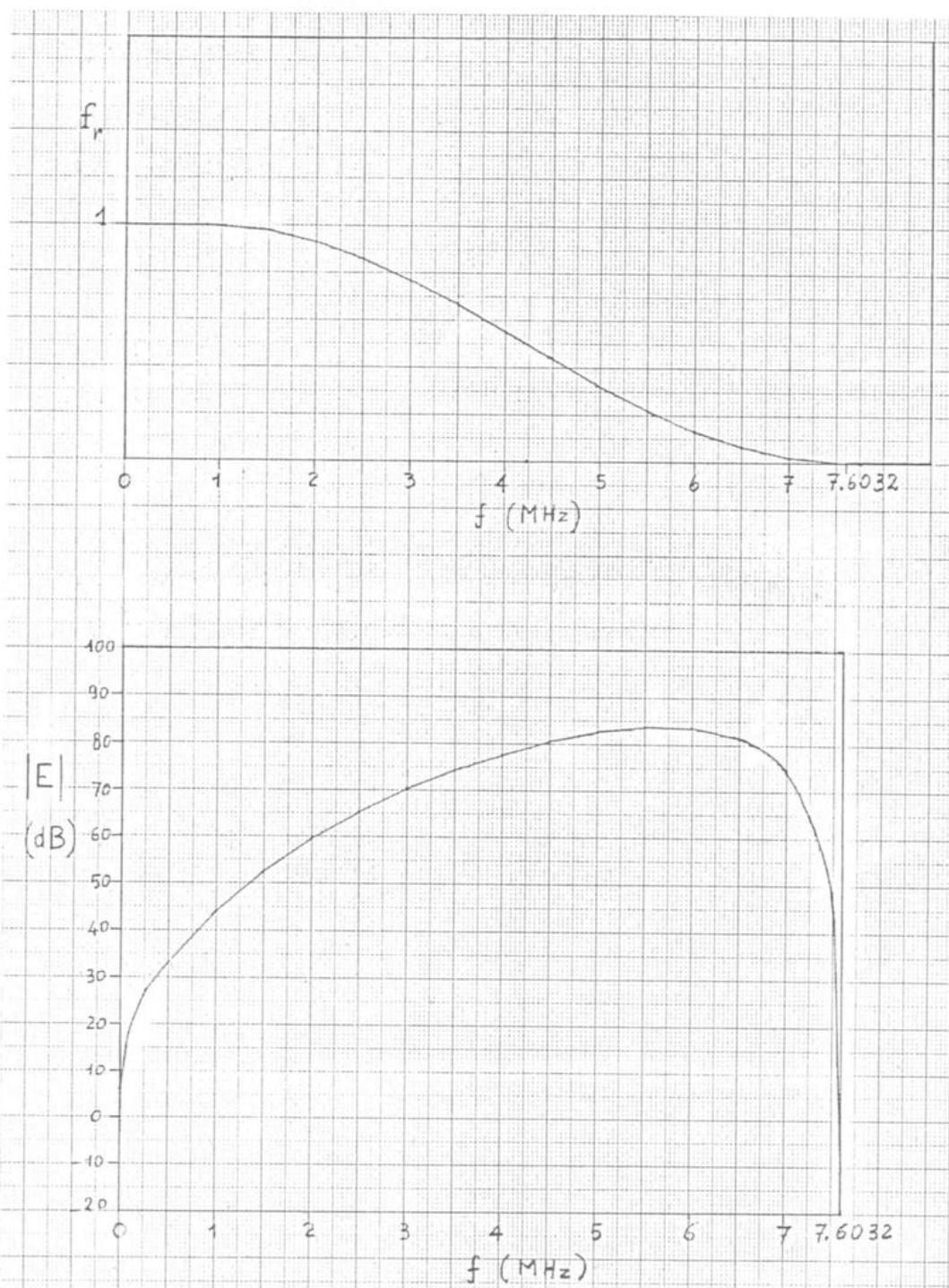
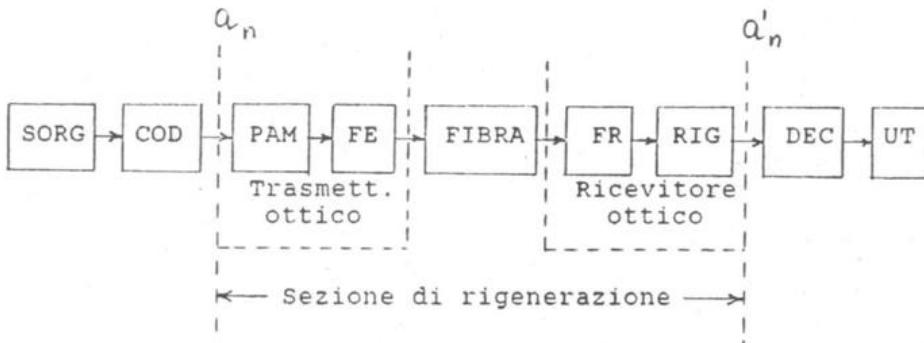


Fig. 8.9.10

### 8.10 CENNI SUI COLLEGAMENTI NUMERICI SU FIBRA OTTICA. IL LIMITE QUANTICO.

CONSIDERIAMO LO SCHEMA DI UN COLLEGAMENTO NUMERICO SU FIBRA OTTICA A MODULAZIONE E RIVELAZIONE DIRETTE, RIPORTATO IN FIGURA 8.10.1 CHE RIPETE, CON LE VARIANTI DEL CASO, QUELLO DI FIGURA 8.9.1.



SORG = sorgente d'informazione; COD = codificatore di linea; PAM = modulatore PAM; FE = fotoemettitore; FR = fotorivelatore; RIG = rigeneratore; DEC = decodificatore di linea; UT = utente.

Fig. 8.10.1

LA SORGENTE GENERA MESSAGGI BINARI CHE VENGONO CODIFICATI CON UN CODICE DI LINEA I CUI SIMBOLI SONO ANCORA LE CIFRE BINARIE 0, 1: GLI SCOPI CHE IL CODICE SI PREFIGGE (COME RIVELAZIONE DEGLI ERRORI PER IL CONTROLLO IN SERVIZIO DEL COLLEGAMENTO) VENGONO OTTENUTI CON UNA FREQUENZA DI SIMBOLI IN LINEA, OSSIA CON UNA VELOCITA' DI TRASMISSIONE, MAGGIORE DELLA FREQUENZA DI CIFRA DELLA SORGENTE.

#### IL TRASMETTITORE OTTICO

NEL TRASMETTITORE OTTICO VIENE FORMATO DAPPRIMA UN SEGNALE PAM CORRISPONDENTE AL MESSAGGIO  $\{a_n\}$  ( $a_n = 0, 1$ ); QUESTO POI AGISCE DIRETTAMENTE SUL FOTEMETTITORE, UN DIODO LASER (LD = LASER DIODE), DANDO ORIGINE AD UN SEGNALE MODULATO DI TIPO OOK (OOK = ON-OFF KEYING, CIOE' MODULAZIONE TUTTO-NIENTE).

## LA FIBRA OTTICA

IL SEGNALE OOK VIENE TRASMESSO IN UNA FIBRA REALIZZATA UTILIZZANDO SILICE COME MATERIALE DI BASE ED UN OPPORTUNO DROGGAGGIO PER OTTENERE IL NUCLEO GUIDANTE. L'ATTENUAZIONE  $\alpha_1$  [IN dB/km] VIENE DATA IN FIGURA 8.10.2 IN FUNZIONE DELLA LUNGHEZZA D'ONDA  $\lambda$  [IN  $\mu\text{m}$ ].

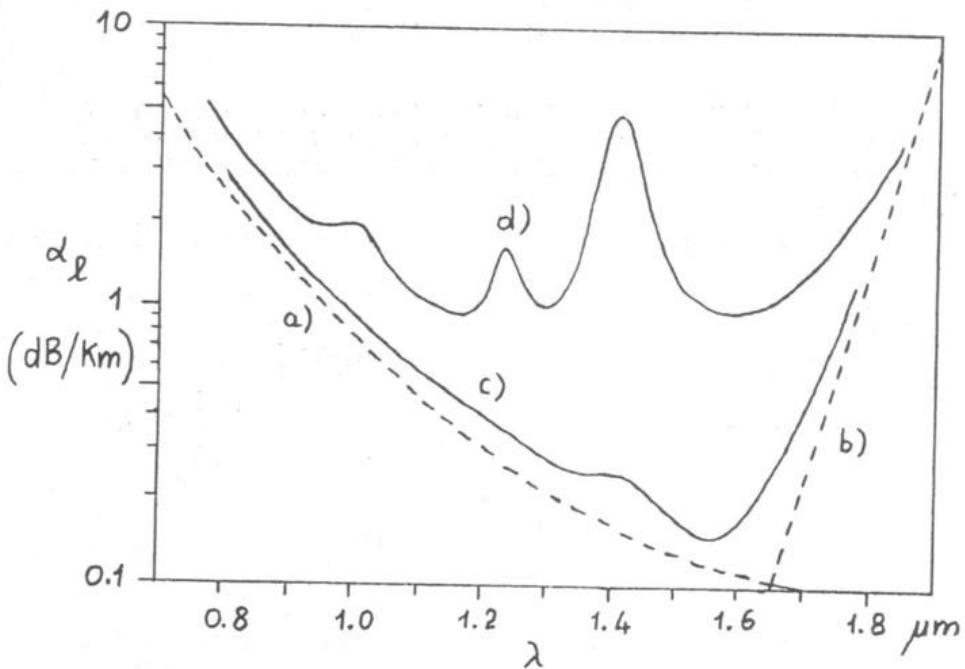


Fig. 8.10.2

LE CURVE TRATTEGGIATE a) E b) DANNO I LIMITI INFERIORI DI  $\alpha_1$  DOVUTI A FENOMENI, RISPECTIVAMENTE, DI DIFFUSIONE E DI ASSORBIMENTO. LE CURVE CONTINUE c) E d) INDIVIDUANO LA FASCIA ENTRO LA QUALE SI MANTIENE L'ATTENUAZIONE DELLE FIBRE REALIZZATE CON DIVERSE TECNICHE.

SI NOTI IL MINIMO DI CIRCA 0.16 dB/km INTORNO A 1.55  $\mu\text{m}$ , GIA' CITATO NEL PRECEDENTE PARAGRAFO 8.7.

E' IMPORTANTE OSSERVARE CHE SU TUTTA LA BANDA DI UN POSSIBILE SEGNALE TRASMESSO SULLA FIBRA, ANCHE SE EGUALE A DIVERSE DECINE DI GHZ, L'ATTENUAZIONE SI PUO' RITENERE PRATICAMENTE COSTANTE E QUINDI LA FIBRA NON INTRODUCE DISTORSIONE DI AMPIEZZA (MA SOLO DI FASE).

NELLA SCELTA DELLA LUNGHEZZA D'ONDA (OSSIA DELLA FREQUENZA) DI LAVORO NON BASTA AVERE PRESENTE LA CURVA DELL'ATTENUAZIONE DELLA FIBRA, MA OCCORRE CONSIDERARE ANCHE LE TECNOLOGIE DISPONIBILI PER FARE SORGENTI E RIVELATORI.

SONO STATI E SONO UTILIZZATI I SEGUENTI VALORI:

PRIMA FINESTRA:	0.85 $\mu\text{m}$
SECONDA FINESTRA:	1.3 $\mu\text{m}$
TERZA FINESTRA:	1.55 $\mu\text{m}$

PER MEGLIO COMPRENDERE IL SIGNIFICATO DI QUESTI VALORI, RIPORTIAMO IN FIGURA 8.10.3 LO SPETTRO ELETTROMAGNETICO, AMPLIATO, ATTORNO ALLA ZONA DELLE RADIAZIONI LUMINOSE.

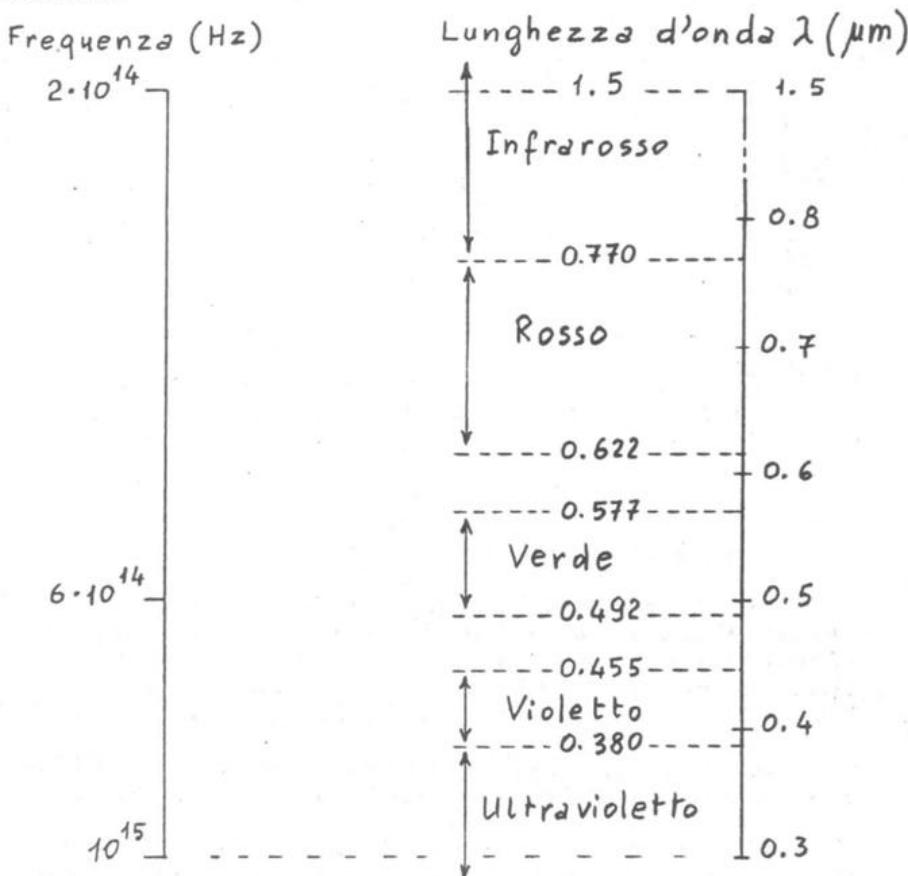


Fig. 8.10.3

IN FUTURO E' PREVISTA L'UTILIZZAZIONE DI ALTRI MATERIALI DI BASE, A CUI CORRISPONDONO MINIMI DI ATTENUAZIONE CHE SONO MOLTO INFERIORI A QUELLO DELLA FIGURA 8.10.2 E CHE SI PRESENTANO A LUNGHEZZE D'ONDA MAGGIORI [MENTRE IL LIMITE RAPPRESENTATO DALLA CURVA a), DOVUTO ALLA DIFFUSIONE, CONTINUA A DECRESCERE, QUELLO RAPPRESENTATO DALLA CURVA b), DOVUTA ALL'ASSORBIMENTO, SI SPOSTA A DESTRA].

### IL RICEVITORE OTTICO

IL PRIMO STADIO DEL RICEVITORE OTTICO, A DEMODULAZIONE DIRETTA, E' UN DIODO FOTORIVELATORE, COME:

- \* p-i-n PD [POSITIVE-INTRINSIC-NEGATIVE (OSSIA, ZONA DROGATA p - ZONA NEUTRA - ZONA DROGATA n) PHOTODIODE] ;
- \* APD [avalanche photodiode] .

I FOTONI IN ARRIVO IN CORRISPONDENZA AI SIMBOLI  $a_n = 1$  PRODUCONO NEL DISPOSITIVO COPPIE ELETTRONE-LACUNA (CHE NEGLI APD SUBISCONO ANCHE UN PROCESSO DI MOLTIPLICAZIONE).

IL SEGNALE ELETTRICO COSI' GENERATO VIENE ELABORATO AL FINE DI RIGENERARE I SIMBOLI  $a_n$ , OVIAMENTE CON UNA PROBABILITA' DI ERRORE  $P_e$ .

### IL RUMORE E LA PROBABILITA' DI ERRORE

IL COLLEGAMENTO SIA DIMENSIONATO IN MODO CHE L'INTERFERENZA INTERSIMBOLO NON DIA ORIGINE AD ERRORI. QUESTI DIPENDONO ALLORA DAL RUMORE PRESENTE NEL COLLEGAMENTO.

ACCENNIAMO SOLO AL RUMORE CONNESSO AL PROCESSO DI RIVELAZIONE OTTICA, SENZA NEPPURE CITARE LE CAUSE DI DEGRADAZIONE DELLE CARATTERISTICHE DEL SISTEMA DOVUTE AL DIODO LASER ED ALLA FIBRA.

PER QUANTO RIGUARDA DUNQUE IL RICEVITORE OTTICO, ABBIAMO LA RUMOROSITA' DEL CIRCUITO CHE ELABORA IL SEGNALE ELETTRICO IN USCITA DEL FOTORIVELATORE; AD ESSA SI APPLICA QUANTO GIA' DETTO NEI PRECEDENTI PARAGRAFI.

ALTRÉ NUOVE, IMPORTANTI CAUSE DI RUMORE SI PRESENTANO NEL FUNZIONAMENTO DEL FOTODIODO:

\* LA GENERAZIONE DELLE COPPIE ELETTRONE-LACUNA DA PARTE DEI FOTONI IN ARRIVO E' UN FENOMENO ALEATORIO CHE DA' LUOGO AL COSIDDETTO RUMORE QUANTICO. IN PARTICOLARE LA PROBABILITA'  $P_e$  CHE UN IMPULSO OTTICO RICEVUTO IN CORRISPONDENZA AD UN SIMBOLO  $a_n = 1$  NON GENERI ALCUNA COPPIA ELETTRONE-LACUNA E' DATA DA:

$$(8.10.1) \quad P_e = e^{-\frac{E_0}{hf}}$$

OVE  $E_0$  E' L'ENERGIA ASSOCIATA ALL'IMPULSO OTTICO E  $hf$  L'ENERGIA DI CIASCUN FOTONE ( $h = 6.55 \cdot 10^{-34}$  J/HZ E' LA COSTANTE DI PLANCK);

\* ELETTRONI E LACUNE PRODOTTE DAI FOTONI POSSONO RICOMBINARSI FRA LORO;

\* COPPIE ELETTRONE-LACUNA POSSONO FORMARSI SPONTANEAEMENTE PER EFFETTO TERMICO (CORRENTE DI BUIO);

\* QUANDO AVVIENE, COME NEGLI APD, UN PROCESSO DI MOLTIPLICAZIONE DELLE COPPIE ELETTRONE-LACUNA FORMATESI, ANCH'ESSO HA LUOGO CON MODALITA' ALEATORIE.

RICAVIAMO UN LIMITE TEORICO DELLE PRESTAZIONI DEI SISTEMI SU FIBRA DOVUTO AL RUMORE QUANTICO (LIMITE QUANTICO).

SE QUESTO RUMORE - INEVITABILE - FOSSE INFATTI L'UNICA CAUSA DI DEGRADAZIONE PRESENTE NEL COLLEGAMENTO, AVREMMO:

$$P_{e/o} = 0$$

$$P_{e/1} = P_e$$

E QUINDI:

$$P_e = p(0) P_{e/o} + p(1) P_{e/1} = p(1) P_e$$

NEL CASO DI 0 E 1 EQUIPROBABILI ABBIAMO PERCIO':

$$(8.10.2) \quad P_e = \frac{E_o}{h f}$$

SE, AD ESEMPIO, SI RICHIEDE CHE:

$$(8.10.3) \quad P_e \leq 10^{-9}$$

RISULTA:

$$(8.10.4) \quad E_o \geq 21 \text{ hf} .$$

LA (8.10.4) DICE CHE PER AVERE UNA PROBABILITA' DI ERRORE CHE SODDISFI LA (8.10.3) GLI IMPULSI OTTICI IN RICEZIONE DEVONO COMPRENDERE ALMENO 21 FOTONI.

IL COSIDDETTO LIMITE QUANTICO PER  $P_e \leq 10^{-9}$  E' DUNQUE 21 FOTONI/BIT.

## CAPITOLO IX

### INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLA MODULAZIONE

### 9.1 DEFINIZIONI RELATIVE ALLA MODULAZIONE DI PORTANTE SINUSOIDALE.

QUANDO IL CANALE DI TRASMISSIONE E' DI TIPO PASSA-BANDA (AD ESEMPIO, QUANDO IL MEZZO DI PROPAGAZIONE E' UNA FIBRA OTTICA O LO SPAZIO LIBERO), IL SEGNALE  $s(t)$  AL SUO INGRESSO DEVE ESSERE DELLO STESSO TIPO. SE IL SEGNALE CHE INTERESSA TRASMETTERE E', AL CONTRARIO, PASSA-BASSO, SI RENDE NECESSARIO RICORRERE AD UNA SUA ELABORAZIONE, CHE LO TRASFORMI APPUNTO IN UN SEGNALE PASSA-BANDA. COME VEDREMO IN QUESTO CAPITOLO, TALE RISULTATO SI OTTIENE RICORRENDO AD UN PROCEDIMENTO DI MODULAZIONE.

DIAMO ORA LE PRINCIPALI DEFINIZIONI RELATIVE ALLA MODULAZIONE DI OSCILLAZIONI SINUSOIDALI PARTENDO DALLA CONSIDERAZIONE DI UNA SINUSOIDE  $s_o(t)$  (PORTANTE) E DI UN SEGNALE  $x(t)$ , DI TIPO PASSA-BASSO, A VALOR MEDIO NULLO, RECANTE LE INFORMAZIONI DA TRASMETTERE (SEGNALE MODULANTE).

LA PORTANTE E' CARATTERIZZATA DAI PARAMETRI AMPIEZZA, PULSAZIONE E FASE INIZIALE ( $V_o$ ,  $\omega_o$ ,  $\varphi_o$ ); LA SUA ESPRESSIONE E':

$$(9.1.1) \quad s_o(t) = V_o \cos(\omega_o t - \varphi_o).$$

3 PARAMETRI

PER TRASMETTERE INFORMAZIONE BISOGNA VARIARE (MODULARE) UNO O PIU' DEI PARAMETRI SOPRA MENZIONATI. TALI VARIAZIONI DEBBONO ESSERE "LENTE" RISPETTO ALLA RAPIDITA' DI VARIAZIONE DELLA PORTANTE; A TAL FINE BASTA SCEGLIERE LA PULSAZIONE DELLA PORTANTE STESSA SUFFICIENTEMENTE ELEVATA RISPETTO ALLA MASSIMA PULSAZIONE CONTENUTA NELLO SPETTRO DEL SEGNALE MODULANTE.

SI OTTIENE IN TAL MODO UNA OSCILLAZIONE SINUSOIDALE MODULATA  $s(t)$ , LA CUI ESPRESSIONE PIU' GENERALE PUO' ESSERE POSTA NELLA FORMA:

$$(9.1.2) \quad s(t) = V(t) \cos \varphi(t), \quad V(t) > 0.$$

CON RIFERIMENTO ALLA (9.1.2) DIAMO LE SEGUENTI DEFINIZIONI:

- \* AMPIEZZA Istantanea:  $V(t);$
- \* FASE Istantanea:  $\varphi(t);$

\* PULSAZIONE ISTANTANEA:

$$(9.1.3) \quad \omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

QUESTE DEFINIZIONI SONO COERENTI CON QUELLE GIA' NOTE DI AMPIEZZA, FASE INSTANTANEA E PULSAZIONE DI UNA SINUSOIDA NON MODULATA. INFATTI ESSE, RIFERITE ALLA (9.1.1), DANNO:

$$V(t) = V_0 \quad \text{AMPIEZZA (COSTANTE) ;}$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t - \varphi_0 \quad \text{FASE INSTANTANEA (FUNZIONE LINEARE DEL TEMPO) ;}$$

$$\omega(t) = \frac{d(\omega_0 t - \varphi_0)}{dt} = \omega_0 \quad \text{PULSAZIONE (COSTANTE).}$$

DIAMO LE SEGUENTI ALTRE DEFINIZIONI:

\* DEVIAZIONE DI AMPIEZZA:

$$V(t) - V_0 ;$$

\* DEVIAZIONE RELATIVA DI AMPIEZZA:

$$(9.1.4) \quad m(t) = \frac{V(t) - V_0}{V_0} ;$$

\* DEVIAZIONE INSTANTANEA DI FASE:

$$(9.1.5) \quad \alpha(t) = \varphi(t) - (\omega_0 t - \varphi_0) ;$$

\* DEVIAZIONE INSTANTANEA DI PULSAZIONE:

$$(9.1.6) \quad \Delta \omega(t) = \omega(t) - \omega_0 .$$

RISULTA:

$$(9.1.7) \quad \Delta \omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} - \frac{d(\omega_0 t - \varphi_0)}{dt} =$$

$$= \frac{d}{dt} [\varphi(t) - (\omega_0 t - \varphi_0)] = \dot{\alpha}(t);$$

$$(9.1.8) \quad \alpha(t) = \int \Delta \omega(t) dt.$$

NELLA (9.1.8) CONVENIAMO DI ASSUMERE LA PRIMITIVA A VALOR MEDIO NULLO; UNA SCELTA DIVERSA DELLA COSTANTE ARBITRARIA ASSOCIATA ALLA DEFINIZIONE DI PRIMITIVA ANDREBBE SEMPLICEMENTE A MODIFICARE LA FASE INIZIALE DELLA PORTANTE.

INTRODUCENDO NELLA (9.1.2) LA DEVIAZIONE RELATIVA DI AMPIEZZA (9.1.4) E LA DEVIAZIONE Istantanea di Fase (9.1.5) OTTENIAMO LA SEGUENTE ESPRESSIONE GENERALE DI UNA OSCILLAZIONE SINUSOIDALE MODULATA:

$$(9.1.9) \quad s(t) = V_o [1 + m(t)] \cos [\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0].$$

LA (9.1.9) IN ASSENZA DI MODULAZIONE [ $m(t) \equiv 0$  E  $\alpha(t) \equiv 0$ ] SI RICONDUCE OVIAMENTE ALLA (9.1.1).  $s_o(t) = V_o \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$

CON RIFERIMENTO AL SEGNALE MODULANTE  $x(t)$  SI DEFINISCONO I SEGUENTI DIVERSI PROCEDIMENTI DI MODULAZIONE:

#### MODULAZIONE DI AMPIEZZA (AM, AMPLITUDE MODULATION)

$$(9.1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} m(t) = k x(t) \quad (k \text{ costante}) \\ \alpha(t) \equiv 0 \end{array} \right. \quad \text{quindi senza deviazione di fase}$$

$$(9.1.11) \quad s(t) = V_o [1 + k x(t)] \cos (\omega_0 t - \varphi_0).$$

Amp della portante

modulazione  
della portante

fase della portante

MODULAZIONE DI FASE (PM, PHASE MODULATION)

PM

(9.1.12)

$$\left\{ \begin{array}{l} m(t) \equiv 0 \\ \alpha(t) = k x(t) \quad (k \text{ costante}) \end{array} \right. \quad \text{non modulata in ampiezza}$$

$$(9.1.13) \quad s(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + K x(t) - \varphi_0].$$

MODULAZIONE DI FREQUENZA (FM, FREQUENCY MODULATION)

FM

(9.1.14)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{DEVIAZIONE DI PULSAZIONE} \\ m(t) \equiv 0 \\ \text{DEVIAZIONE DI PULSAZIONE} \\ \Delta \omega(t) = k x(t) \quad (k \text{ costante}) \end{array} \right. \quad \text{non modulata in ampiezza}$$

$$(9.1.15) \quad s(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + K \int x(t) dt - \varphi_0].$$

SI NOTI CHE:

- IN MODULAZIONE DI FASE LA DEVIAZIONE DI PULSAZIONE E' ESPRESSA DA:

(9.1.16)

$$\Delta \omega(t) = \dot{\alpha}(t) = K \dot{x}(t);$$

- IN MODULAZIONE DI FREQUENZA LA DEVIAZIONE DI FASE E' ESPRESSA DA:

$$(9.1.17) \quad \alpha(t) = K \int x(t) dt .$$

LA (9.1.17) E' GIA' STATA UTILIZZATA NELLO SCRIVERE LA (9.1.15).

RIASSUMENDO, IN MODULAZIONE DI FASE LA DEVIAZIONE Istantanea di fase e' proporzionale al segnale modulante e quella di pulsazione alla derivata dello stesso segnale; IN MODULAZIONE DI FREQUENZA LA DEVIAZIONE DI FASE E' PROPORTZIONALE ALL'INTEGRALE DEL SEGNALE MODULANTE E QUELLA DI PULSAZIONE ALLO STESSO SEGNALE. LE RELATIVE OSCILLAZIONI MODULATE POSSONO ESSERE SCRITTE NELL'UNICA FORMA:

$$(9.1.18) \quad s(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0] ,$$

CON L'INTESA CHE  $\alpha(t)$  E' ESPRESSA DALLA SECONDA DELLE (9.1.12) IN MODULAZIONE DI FASE E DALLA (9.1.17) IN MODULAZIONE DI FREQUENZA.

CON RIFERIMENTO ALLA (9.1.18) SI PARLA DI MODULAZIONE D'ANGOLO (o MODULAZIONE ANGOLARE).

DUNQUE, MODULAZIONE DI FASE E MODULAZIONE DI FREQUENZA SONO DUE CASI PARTICOLARI DI MODULAZIONE D'ANGOLO; CIO' CHE LE DISTINGUE SONO I DIVERSI LEGAMI FRA LE DEVIAZIONI IN GIOCO ED IL SEGNALE MODULANTE  $x(t)$ .

IN FIGURA 9.1.1 RAPPRESENTIAMO IN MANIERA DEL TUTTO QUALITATIVA POSSIBILI FORME D'ONDA DI UNA OSCILLAZIONE MODULATA IN AMPIEZZA E DI UNA OSCILLAZIONE MODULATA D'ANGOLO CORRISPONDENTI AL PARTICOLARE SEGNALE MODULANTE  $x(t)$  INDICATO NELLA STESSA FIGURA; SI NOTI CHE NEL PRIMO CASO IL SEGNALE MODULATO PRESENTA AMPIEZZA ISTANTANEA VARIABILE E ZERI EQUIDISTANTI SULL'ASSE DEI TEMPI, MENTRE NEL SECONDO AMPIEZZA COSTANTE E ZERI NON PIU' UNIFORMEMENTE DISTRIBUITI SULL'ASSE DEI TEMPI.

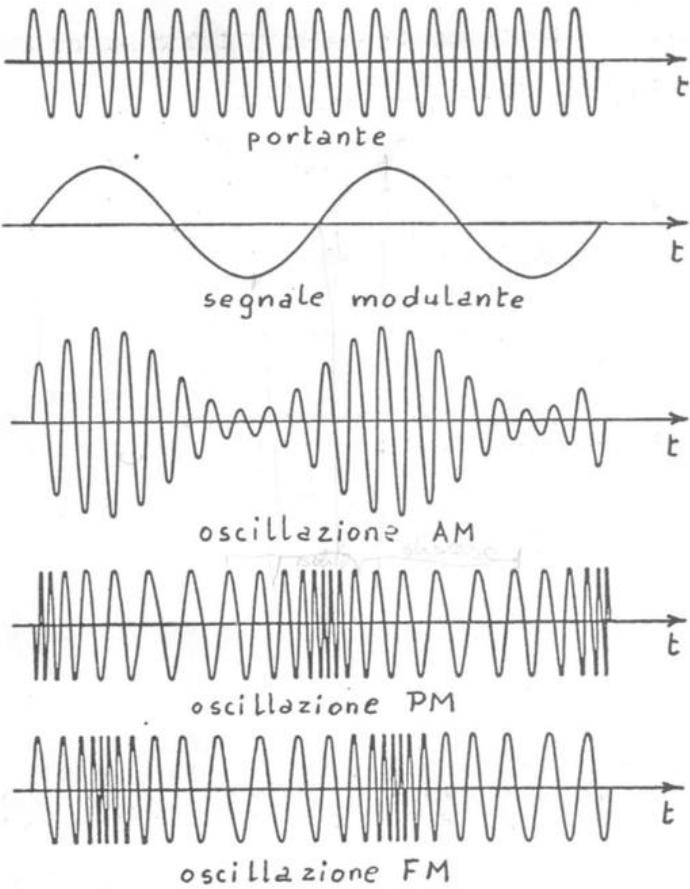


Fig. 9.1.1

OSSERVIAMO CHE IN MODULAZIONE D'AMPIEZZA LA CONDIZIONE  $V(t) \geq 0$  RICHIEDE CHE SIA:

$$(9.1.19) \quad 1 + m(t) = 1 + k x(t) \geq 0 .$$

FACCIAMO RIFERIMENTO AD UN SEGNALE MODULANTE  $x(t)$  CHE, OLTRE AD ESSERE A VALOR MEDIO NULLO, HA UNA DINAMICA COMPRESA NELL'INTERVALLO  $(-M, M)$ , CON  $M > 0$ , SIMMETRICA RISPETTO ALLO 0. DALLA (9.1.19) SEGUE:

$$(9.1.20) \quad |k| M \leq 1 .$$

$$-1 < kx(t) < 1$$

$$|kx(t)|$$

DIAMO ORA LE SEGUENTI ULTERIORI DEFINIZIONI:

\* INDICE DI MODULAZIONE DI AMPIEZZA

(9.1.21)  $m_a = \text{Max } |m(t)|$  ;

\* INDICE DI MODULAZIONE ANGOLARE

(9.1.22)  $m = \text{Max } |\alpha(t)|$  .

IN BASE A QUANTO IPOTIZZATO SUL SEGNALE MODULANTE,  
IN MODULAZIONE D'AMPIEZZA RISULTA

(9.1.23)  $m_a = |k| M$ ,

E DALLA (9.1.20) DISCENDE

(9.1.24)  $m_a \leq 1$ .

IN MODULAZIONE D'ANGOLO, INVECE, NON ESISTE ALCUNA  
LIMITAZIONE SUPERIORE PER IL RELATIVO INDICE DI MODULA-  
ZIONE  $m$ .

OSSERVIAMO INFINE CHE UNA OSCILLAZIONE SINUSOIDALE  
PUO' ESSERE MODULATA SIA IN AMPIEZZA CHE IN ANGOLO  
(MODULAZIONE IBRIDA). CIO' PUO' ESSERE OTTENUTO, AD  
ESEMPIO, CONSIDERANDO DUE SEGNALI MODULANTI DISTINTI,  
UNO DEI QUALI AGISCE SULL'AMPIEZZA Istantanea E L'ALTRO  
SULLA DEVIAZIONE ANGOLARE. VEDREMO ANCHE CASI IN CUI UN  
UNICO SEGNALE MODULANTE DA' ORIGINE A DEVIAZIONI SIA  
D'AMPIEZZA CHE D'ANGOLO.

## 9.2 RAPPRESENTAZIONE SIMBOLICA DI OSCILLAZIONI SINUSOIDALI MODULATE: L'INVILUPPO COMPLESSO.

CONSIDERIAMO LA SEGUENTE ESPRESSIONE GENERALE DI UNA OSCILLAZIONE SINUSOIDALE MODULATA:

$$(9.2.1) \quad s(t) = V(t) \cos[\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0], \quad V(t) \geq 0.$$

ESSA PUO' ESSERE SCRITTA NELLA FORMA:

$$(9.2.2) \quad s(t) = \operatorname{Re} \left\{ i(t) e^{j\omega_0 t} \right\},$$

CON

$$(9.2.3) \quad i(t) = V(t) e^{j[\alpha(t) - \varphi_0]}.$$

LE (9.2.2) E (9.2.3) CONSENTONO DI ASSOCIARE AD UN SEGNALE MODULATO UNA FUNZIONE COMPLESSA DEL TEMPO, CHE VIENE DENOMINATA INVILUPPO COMPLESSO.

LA RAPPRESENTAZIONE DI OSCILLAZIONI MODULATE SOPRA INTRODOTTA COSTITUISCE UNA GENERALIZZAZIONE DEL METODO SIMBOLICO UTILIZZATO PER LO STUDIO DELLE GRANDEZZE SINUSOIDALI. QUEST'ULTIMO INFATTI, COME NOTO, FA USO DI NUMERI COMPLESSI NON DIPENDENTI DAL TEMPO.

CONSIDERIAMO ORA DUE OSCILLAZIONI MODULATE  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  AVENTI LA STESSA PULSAZIONE  $\omega_0$  DELLA PORTANTE E SIANO  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  I RELATIVI INVILUPPI COMPLESSI:

$$(9.2.4) \quad s_1(t) = V_1(t) \cos[\omega_0 t + \alpha_1(t) - \varphi_{01}] =$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ i_1(t) e^{j\omega_0 t} \right\},$$

$$(9.2.5) \quad s_2(t) = V_2(t) \cos[\omega_0 t + \alpha_2(t) - \varphi_{02}] =$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ i_2(t) e^{j\omega_0 t} \right\},$$

$$(9.2.6) \quad i_1(t) = V_1(t) e^{j[\alpha_1(t) - \varphi_{01}]}$$

$$(9.2.7) \quad i_2(t) = V_2(t) e^{j[\alpha_2(t) - \varphi_{02}]}$$

CALCOLIAMO LA SOMMA

$$(9.2.8) \quad s(t) = s_1(t) + s_2(t) .$$

RISULTA:

$$(9.2.9) \quad s(t) = \operatorname{Re} \{ i_1(t) e^{j\omega_0 t} \} + \operatorname{Re} \{ i_2(t) e^{j\omega_0 t} \} = \\ = \operatorname{Re} \{ i(t) e^{j\omega_0 t} \} ,$$

ESSENDONE:

$$(9.2.10) \quad i(t) = i_1(t) + i_2(t) .$$

INFINE, PONENDO

$$(9.2.11) \quad i(t) = V(t) e^{j\alpha(t)}$$

ABBIAMO:

$$(9.2.12) \quad s(t) = V(t) \cos [\omega_0 t + \alpha(t)] .$$

IL SEGNALE  $s(t)$ , SOMMA DI  $s_1(t)$  E  $s_2(t)$ , E' DUNQUE UNA OSCILLAZIONE MODULATA IN GENERALE IN AMPIZZA E IN ANGOLO. COME MOSTRA LA (9.2.10), IL SUO INVILUPPO COMPLESSO E' UGUALE ALLA SOMMA DEGLI INVILUPPI COMPLESSI DEI DUE SEGNALI MODULATI COMPONENTI. ESSO PUO' QUINDI ESSERE RAPPRESENTATO VETTORIALMENTE COME E' INDICATO NELLA FIGURA 9.2.1, MEDIANTE LA QUALE E' SEMPLICE RICAVARE LE LEGGI DI MODULAZIONE DEL SEGNALE RISULTANTE  $s(t)$ .

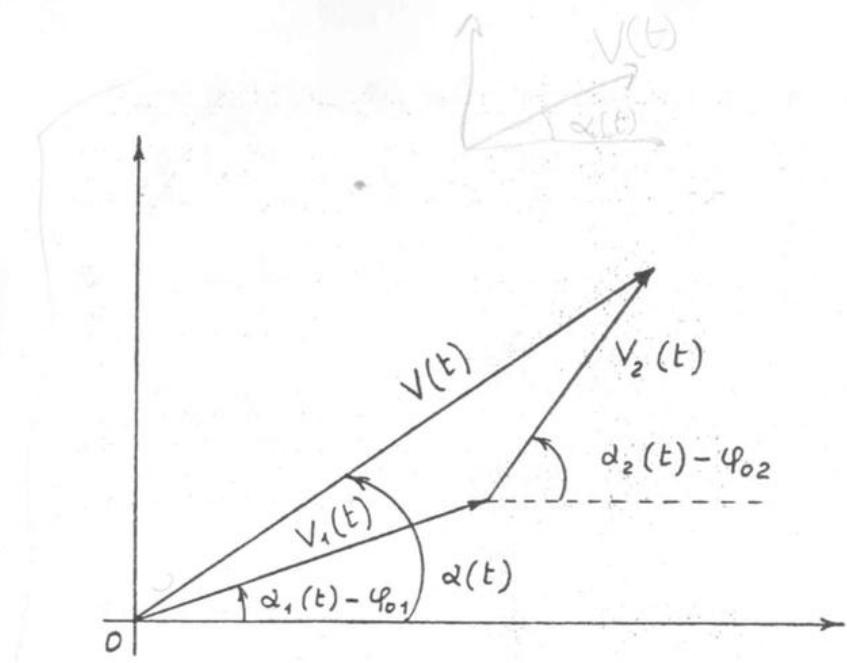


Fig. 9.2.1

PIU' IN GENERALE, IL SEGNALE

$$(9.2.13) \quad s(t) = c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t),$$

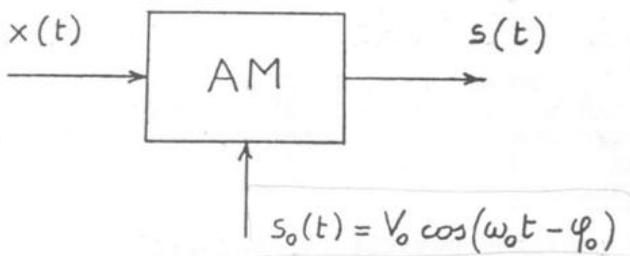
CON  $c_1, c_2$  COSTANTI ARBITRARIE, E' UNA OSCILLAZIONE MODULATA AVENTE COME INVILUPPO COMPLESSO

$$(9.2.14) \quad i(t) = c_1 i_1(t) + c_2 i_2(t).$$

### 9.3 MODULATORI E DEMODULATORI COME BLOCCHI FUNZIONALI.

LE OSCILLAZIONI MODULATE INTRODOTTE NEL PARAGRAFO 9.1 POSSONO VENIRE GENERATE A PARTIRE DAL SEGNALE MODULANTE  $x(t)$  E DALLA PORTANTE  $s_0(t)$  MEDIANTE UN CIRCUITO DETTO MODULATORE.

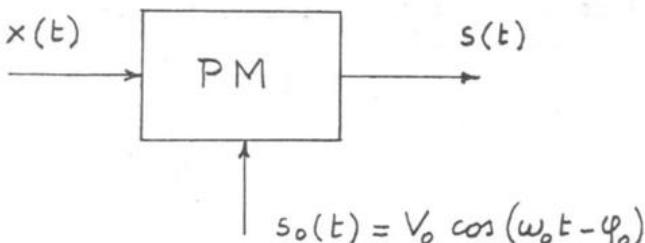
IN FIGURA 9.3.1 DIAMO LO SCHEMA FUNZIONALE DI UN MODULATORE DI AMPIEZZA (AM, AMPLITUDE MODULATOR); IN FIGURA 9.3.2 L'ANALOGO SCHEMA PER UN MODULATORE DI FASE (PM, PHASE MODULATOR) ED, INFINE, IN FIGURA 9.3.3 RAPPRESENTIAMO LO SCHEMA FUNZIONALE DI UN MODULATORE DI FREQUENZA (FM, FREQUENCY MODULATOR) NEL QUALE OMETTIAMO L'INGRESSO RELATIVO ALLA PORTANTE, PENSANDO CHE QUESTA VENGA GENERATA ALL'INTERNO DELLO STESSO CIRCUITO MODULATORE (OSCILLATORE LA CUI PULSAZIONE DI OSCILLAZIONE E' CONTROLLATA DAL SEGNALE MODULANTE).



$$s(t) = V_0 [1 + m(t)] \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$$

$$m(t) = K x(t)$$

Fig. 9.3.1



$$s(t) = V_0 \cos[\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0]$$

$$\alpha(t) = K x(t)$$

Fig. 9.3.2



$$s(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0]$$

$$\dot{\alpha}(t) = K x(t)$$

$$\alpha(t) = K \int x(t) dt$$

Fig. 9.3.3

DISPONENDO DELL'OSCILLAZIONE MODULATA, IL SEGNALE MODULANTE PUO' ESSERE RIPRISTINATO CON UN PROCEDIMENTO DI DEMODULAZIONE, CHE RAPPRESENTA L'OPERAZIONE INVERSA DELLA MODULAZIONE. IL RELATIVO CIRCUITO VIENE DETTO DEMODULATORE.

L'OPERAZIONE DI DEMODULAZIONE PUO' ESSERE EFFETTUATA OPERANDO SULLA SOLA OSCILLAZIONE MODULATA. IN QUESTO CASO SI DICE CHE IL DEMODULATORE E' DI TIPO NON COERENTE (FIGURA 9.3.4).



Fig. 9.3.4

CIO' NON E' TUTTAVIA SEMPRE POSSIBILE IN QUANTO PER LA DEMODULAZIONE PUO' ESSERE TALVOLTA NECESSARIA ANCHE LA CONOSCENZA DELLA PORTANTE. QUANDO CIO' SI VERIFICA SI DICE CHE IL DEMODULATORE E' DI TIPO COERENTE (FIGURA 9.3.5).

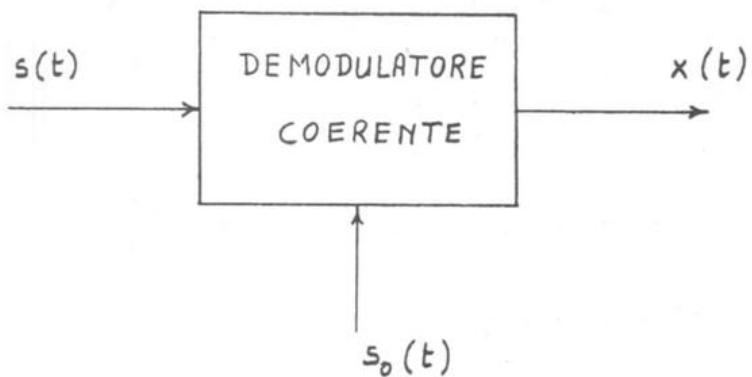


Fig. 9.3.5

NEGLI SCHEMI CHE SEGUONO FARMO RIFERIMENTO, A TITOLO INDICATIVO, A DEMODULATORI NON COERENTI.

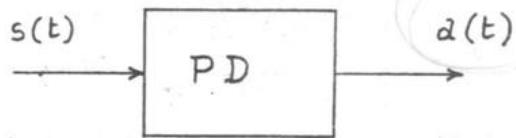
UN DEMODULATORE DI AMPIEZZA (AD, AMPLITUDE DEMODULATOR - FIGURA 9.3.6) DEVE DARE UNA USCITA PROPORZIONALE ALLA DEVIAZIONE (RELATIVA) DI AMPIEZZA DELLA OSCILLAZIONE AM DI INGRESSO.



$$s(t) = V_o [1 + m(t)] \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$$

Fig. 9.3.6

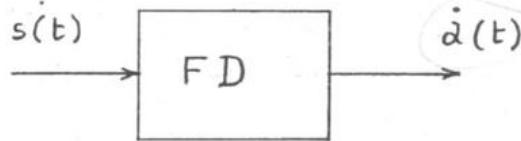
UN DEMODULATORE DI FASE (PD, PHASE DEMODULATOR - FIGURA 9.3.7) DEVE DARE UNA USCITA PROPORZIONALE ALLA DEVIAZIONE DI FASE DELL'OSCILLAZIONE D'INGRESSO MODULATA D'ANGOLO.



$$s(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0]$$

Fig. 9.3.7

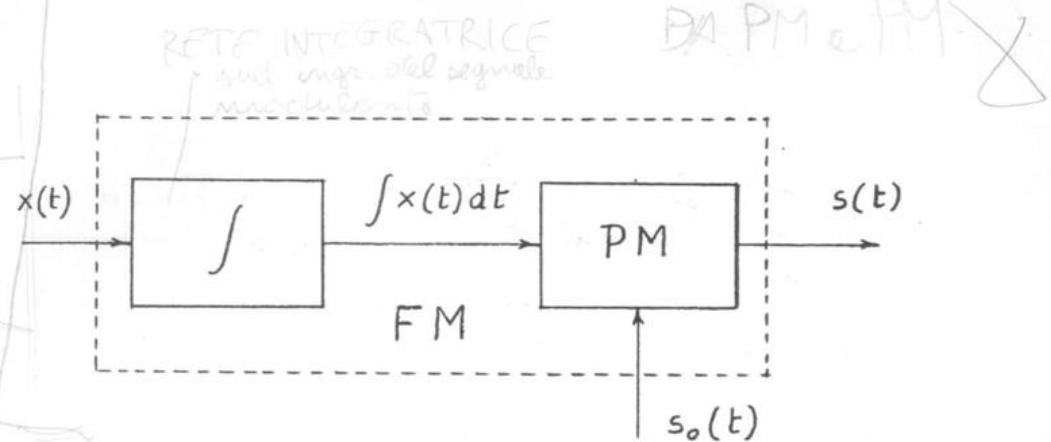
UN DEMODULATORE DI FREQUENZA (FD, FREQUENCY DEMODULATOR - FIGURA 9.3.8) DEVE DARE UN'USCITA PROPORZIONALE ALLA DEVIAZIONE DI PULSAZIONE DELL'OSCILLAZIONE D'INGRESSO MODULATA D'ANGOLO.



$$s(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0]$$

Fig. 9.3.8

L'ESAME DELLE FIGURE 9.3.2 E 9.3.3 INDICA IL MODO IN CUI UN MODULATORE DI FASE PUO' ESSERE TRASFORMATO IN UN MODULATORE DI FREQUENZA E VICEVERSA: NEL PRIMO CASO BASTA INSERIRE UNA RETE INTEGRATRICE SULL'INGRESSO DEL SEGNALE MODULANTE (FIGURA 9.3.9) E NEL SECONDO UNA RETE DERIVATRICE (FIGURA 9.3.10).



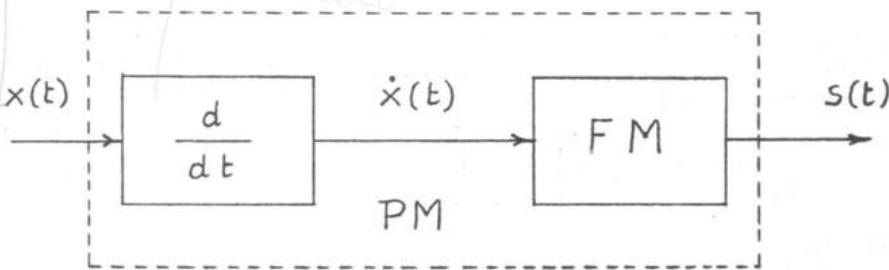
$$s_o(t) = V_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$$

$$s(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0]$$

$$\dot{\alpha}(t) = K \int x(t) dt$$

Fig. 9.3.9

*RETE DERIVATRICE*



$$s(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0]$$

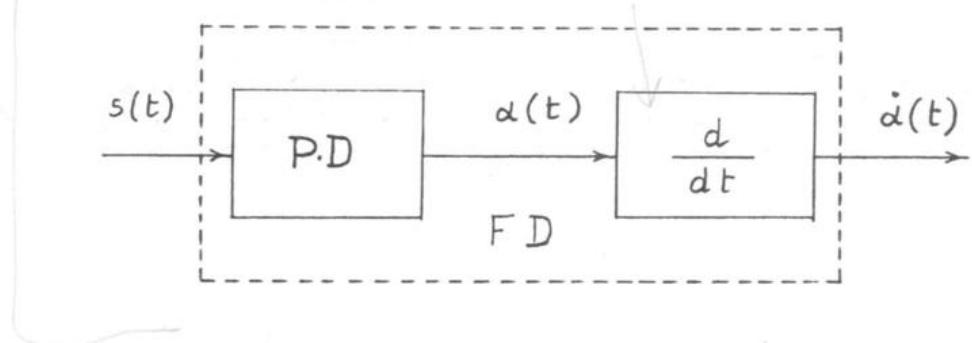
$$\dot{\alpha}(t) = K \dot{x}(t) = \omega_0$$

$$\alpha(t) = K x(t)$$

Fig. 9.3.10

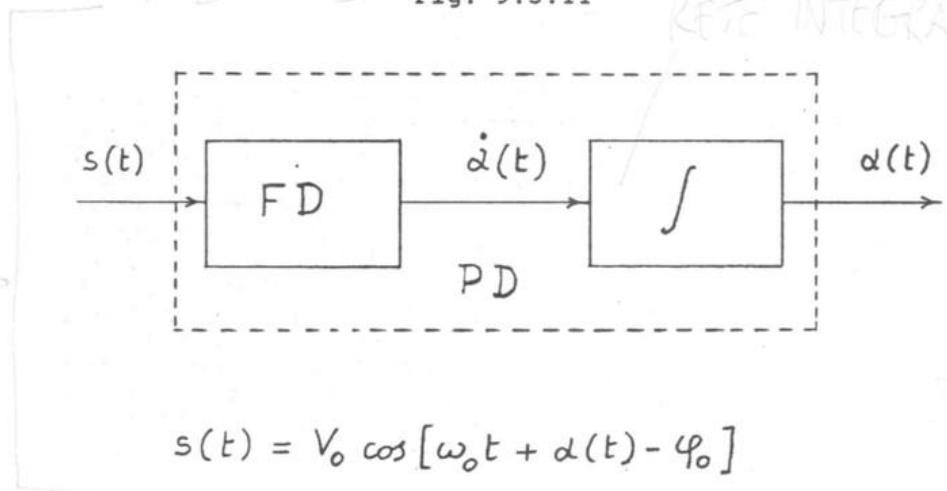
IN MANIERA DEL TUTTO ANALOGA, DALL'ESAME DELLE FIGURE 9.3.7 E 9.3.8 APPARE CHIARO COME TRASFORMARE UN DEMODULATORE DI FASE IN UN DEMODULATORE DI FREQUENZA E VICEVERSA (FIGURE 9.3.11 E 9.3.12).

X DA PD e FD ROTE DERIVATRICE



$$s(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0]$$

Fig. 9.3.11



$$s(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0]$$

Fig. 9.3.12

LE FIGURE 9.3.10 E 9.3.12 MOSTRANO LE SEMPLICI VARIANTI DA APPORTARE PER TRASFORMARE UN RADIOCOLLEGAMENTO IN MODULAZIONE DI FREQUENZA IN UNO A MODULAZIONE DI FASE (FIGURA 9.3.13).

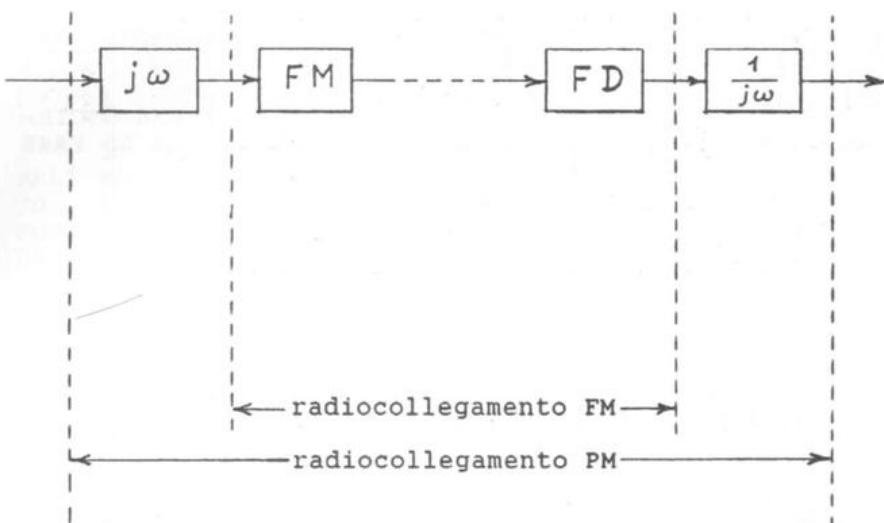


Fig. 9.3.13

LA FIGURA 9.3.13 COSTITUISCE UN CASO PARTICOLARE DI COLLEGAMENTO A MODULAZIONE DI FREQUENZA CON ENFASI, CHE IN MANIERA PIU' GENERALE E' RAPPRESENTATO IN FIGURA 9.3.14: LA RETE CHE PRECEDI IL MODULATORE DI FREQUENZA E' DETTA RETE DI PREENFASI, QUELLA CHE SEGUO IL DEMODULATORE DI FREQUENZA RETE DI DEENFASI. E' EVIDENTE CHE LE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO,  $H(\omega)$  E  $1/H(\omega)$ , DI QUESTE DUE RETI SONO TALI DA NON MODIFICARE IL COMPORTAMENTO DEL SISTEMA NEI RIGUARDI DEL SEGNALE MODULANTE. DIVERSA E' LA SITUAZIONE PER QUANTO CONCERNELI EFFETTI A VALLE DEL DEMODULATORE DEL RUMORE E DEI DISTURBI CHE SI SOMMANO AL SEGNALE MODULATO NEL CANALE DI TRASMISSIONE: SU TALI EFFETTI AGISCE LA RETE DI DEENFASI, MA NON, EVIDENTEMENTE, QUELLA DI PREENFASI.

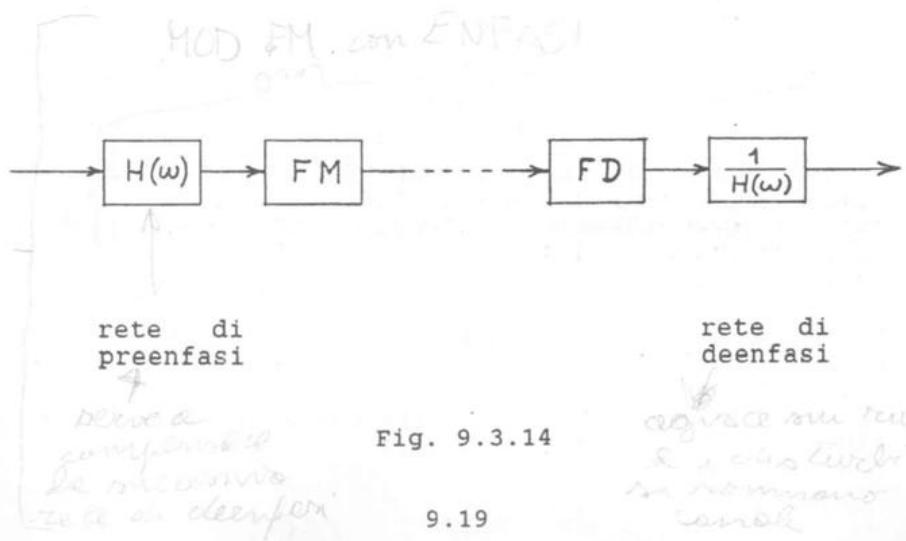


Fig. 9.3.14

#### 9.4 CARATTERISTICHE SPETTRALI DI UNA OSCILLAZIONE AM.

OSCILLAZIONI DSB, SSB, VSB, DSB-SC, SSB-SC.

CONSIDERIAMO L'ESPRESSONE (9.1.11) DI UNA OSCILLAZIONE AM, CHE QUI RISCRIVIAMO ASSUMENDO NULLA LA FASE INIZIALE DELLA PORTANTE:

$$(9.4.1) \quad s(t) = V_0 [1 + k \times(t)] \cos \omega_0 t.$$

POSSIAMO ANCHE SCRIVERE:

$$(9.4.2) \quad s(t) = V_0 \cos \omega_0 t + k V_0 \times(t) \cos \omega_0 t.$$

DUNQUE L'OSCILLAZIONE AM IN QUESTIONE E' DATA DALLA SOMMA DELLA PORTANTE E DI UN TERMINE CHE, A MENO DI UNA COSTANTE, E' IL PRODOTTO FRA IL SEGNALE MODULANTE E LA PORTANTE.

IL SEGNALE MODULANTE  $x(t)$ , DI TIPO PASSA-BASSO, SIA RAPPRESENTABILE MEDIANTE L'INTEGRALE DI FOURIER:

$$(9.4.3) \quad x(t) = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos [\omega t - \varphi(\omega)] d\omega.$$

IL PRODOTTO FRA SEGNALE MODULANTE E PORTANTE E' GIA' STATO CONSIDERATO NEL PARAGRAFO 6.5. RICORDANDO I RISULTATI ALLORA OTTENUTI, IN PARTICOLARE LE FORMULE (6.5.4), (6.5.5) E (6.5.6), POSSIAMO ALLORA SCRIVERE LA (9.4.2) NELLA FORMA:

$$(9.4.4) \quad s(t) = V_0 \cos \omega_0 t + \frac{k V_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos [(\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega + \\ + \frac{k V_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos [(\omega_0 - \omega)t + \varphi(\omega)] d\omega.$$

LA (9.4.4) ESPRIME L'OSCILLAZIONE AM COME SOMMA:

- \* DELLA PORTANTE;
- \* DEL SEGNALE CORRISPONDENTE ALLA BANDA LATERALE SUPERIORE;
- \* DEL SEGNALE CORRISPONDENTE ALLA BANDA LATERALE INFERIORE.

QUESTO E' IL MOTIVO PER CUI L'OSCILLAZIONE AM VIENE CHIAMATA ANCHE A DOPPIA BANDA LATERALE (DSB, DOUBLE SIDE BAND).

LE CARATTERISTICHE SPETTRALI DELLE DUE BANDE LATERALI SONO STATE ILLUSTRATE NEL PARAGRAFO 6.5 GIA' CITATO. A TITOLO INDICATIVO, NELLA FIGURA 9.4.1 RIPORTIAMO POSSIBILI SPETTRI DI AMPIEZZA E FASE DEL SEGNALE MODULANTE E QUELLI CORRISPONDENTI DELL'OSCILLAZIONE AM.

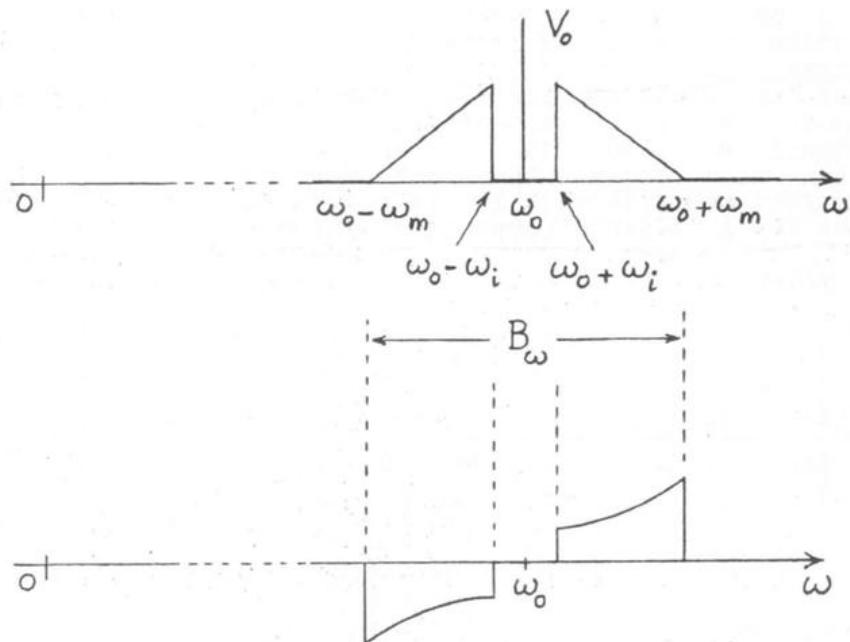
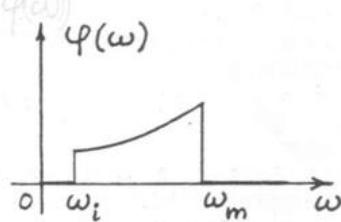
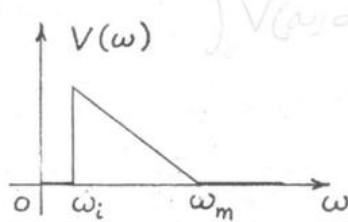


Fig. 9.4.1

L'OSCILLAZIONE MODULATA OCCUPA UNA BANDA DI PULSAZIONI CENTRATA SULLA PULSAZIONE  $\omega_0$  DELLA PORTANTE, DI LARGHEZZA  $B_\omega$  PARI AL DOPPIO DELLA PULSAZIONE MASSIMA DEL SEGNALE MODULANTE:

$$(9.4.5) \quad B_\omega = 2\omega_m .$$

LO SPETTRO DI AMPIEZZA E' SIMMETRICO RISPETTO A  $\omega_0$ , MENTRE QUELLO DI FASE E' ANTISIMMETRICO.

NELL'IPOTESI, NORMALMENTE VERIFICATA, CHE  $\omega_m \ll \omega_0$ , RISULTA:

$$(9.4.6) \quad \frac{B_\omega}{\omega_0} \ll 1 .$$

ESSENDO VERIFICATA LA (2.3.8), UNA OSCILLAZIONE AM E' DUNQUE UN SEGNALE PASSA-BANDA.

COME ABBIAMO GIA' AVUTO OCCASIONE DI OSSERVARE NEL PARAGRAFO 6.5, CIASCUNO DEI DUE SEGNALI CORRISPONDENTI ALLA BANDA LATERALE SUPERIORE OD INFERIORE, IN QUANTO CONTIENE LE CARATTERISTICHE SPETTRALI DI  $x(t)$ , RECA LA STESSA INFORMAZIONE. POSSIAMO DUNQUE PENSARE DI ELIMINARE UNA DELLE DUE BANDE LATERALI CON L'EVIDENTE VANTAGGIO DI DIMEZZARE LA BANDA IMPEGNATA DAL RELATIVO SEGNALE MODULATO, IL CUI SPETTRO RIMANE COSTITUITO DALLA RIGA CORRISPONDENTE ALLA PORTANTE E DALLA BANDA LATERALE NON ELIMINATA (V. LA FIGURA 9.4.2 IN CUI VIENE CONSERVATA LA BANDA LATERALE SUPERIORE).

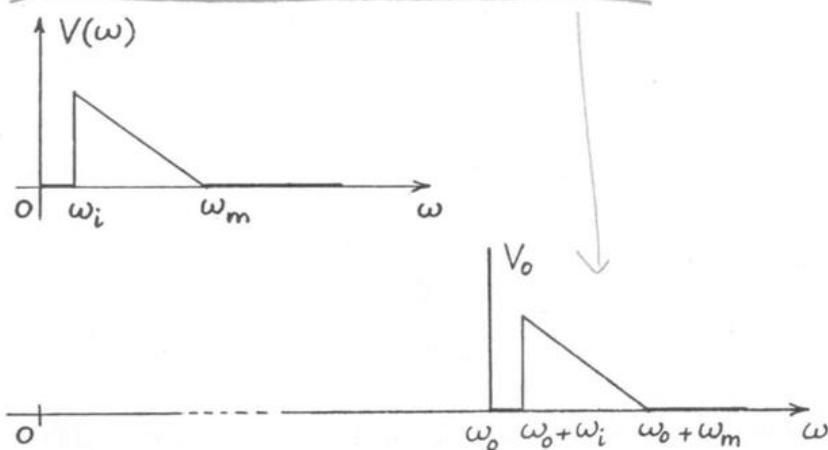


Fig. 9.4.2

# SINGLE SIDE BAND

IL SEGNALE MODULATO CHE COSÌ SI OTTIENE VIENE CHIAMATO A BANDA LATERALE SINGOLA ED INDICATO CON LA SIGLA SSB (SINGLE SIDE BAND). ESSO PUÒ ESSERE GENERATO A PARTIRE DA UNA OSCILLAZIONE AM, CHE VIENE FILTRATA CON UN FILTRO PASSA-BANDA CHE PROVVEDA AD ELIMINARE LA BANDA INDESIDERATA.

CIO' E' POSSIBILE IN PRATICA SE LA PULSAZIONE MINIMA  $\omega_i$  DELLA BANDA DEL SEGNALE MODULANTE NON E' TROPPO PICCOLA. IN CASO CONTRARIO (SI PENSI AD ESEMPIO AL SEGNALE VIDEO PER CUI RISULTA ADDIRITTURA  $\omega_i = 0$ ) NON E' POSSIBILE TALE OPERAZIONE DI FILTRAGGIO SENZA DISTORCERE IL CONTENUTO INFORMATIVO DELLA BANDA LATERALE CHE SI VUOLE CONSERVARE. SEMPRE AL FINE DI RISPARMIARE BANDA, SI PROVVEDE PERTANTO AD ELIMINARE IN MODO SOLTANTO PARZIALE UNA BANDA LATERALE: IL SEGNALE MODULATO COSÌ OTTENUTO VIENE CHIAMATO A BANDA LATERALE PARZIALMENTE SOPPRESSA O VESTIGIALE (VSB, VESTIGIAL SIDE BAND). UN POSSIBILE SPETTORE DI AMPIEZZA E' RAPPRESENTATO IN FIGURA 9.4.3 CON  $\omega_i = 0$ .

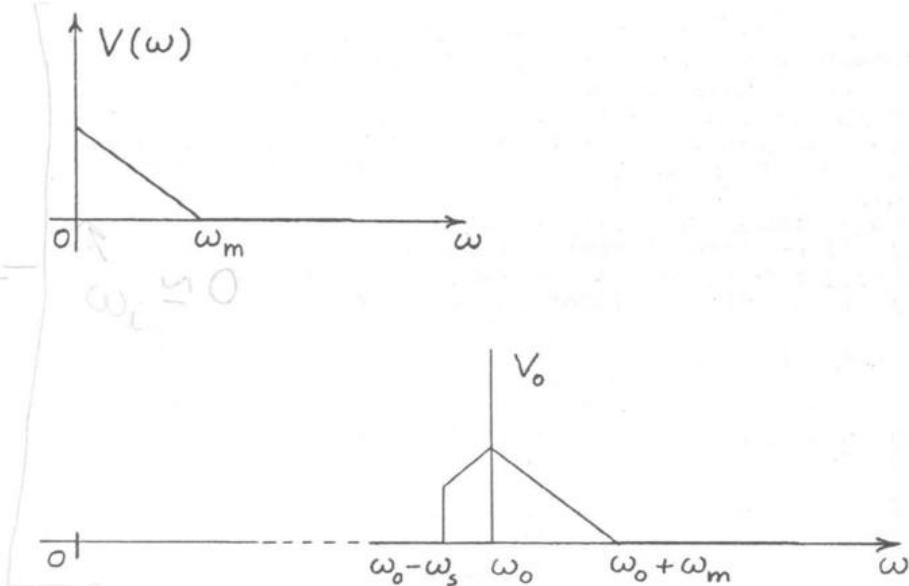


Fig. 9.4.3

PER RISPARMIARE OLTRE CHE BANDA ANCHE POTENZA IN TRASMISSIONE, SI PUÒ PENSARE DI ATTENUARE LA PORTANTE IN UNA OSCILLAZIONE SSB: SI PARLA ALLORA DI MODULAZIONE SSB A PORTANTE PARZIALMENTE SOPPRESSA.

NATURALMENTE ANCHE IN PRESENZA DELLE DUE BANDE LATERALI E' POSSIBILE RISPARMIARE POTENZA, SENZA PERDERE IL CONTENUTO INFORMATIVO RELATIVO AL SEGNALE MODULANTE, SE MANCA LA RIGA CORRISPONDENTE ALLA PORTANTE. RICORDANDO LA (9.4.2) CIO' SIGNIFICA CONSIDERARE SOLO IL PRODOTTO FRA SEGNALE MODULANTE E PORTANTE, CIOE' IL SEGNALE GIA' CONSIDERATO NEL PARAGRAFO 6.5. SI PARLA IN TAL CASO DI MODULAZIONE A PRODOTTO O ANCHE A DOPPIA BANDA LATERALE E PORTANTE SOPPRESSA (DSB-SC, DOUBLE SIDE BAND - SUPPRESSED CARRIER). UN POSSIBILE SPETTRO DI AMPIEZZA E' RAPPRESENTATO IN FIGURA 9.4.4.

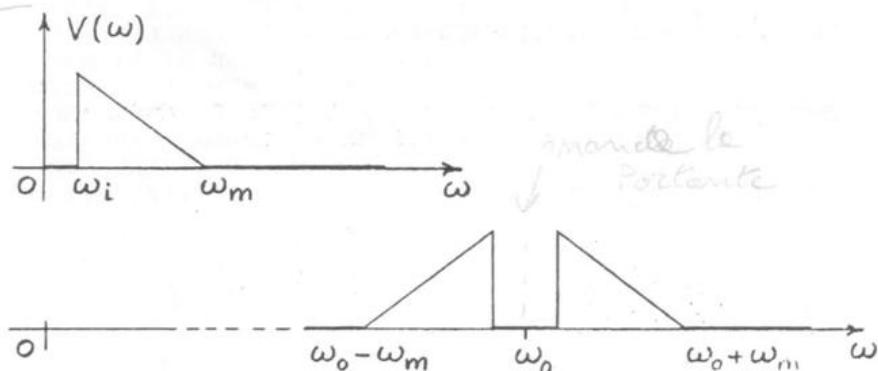


Fig. 9.4.4

IN TAL CASO SI PUO' RISPARMIARE, OLTRE CHE IN POTENZA, ANCHE IN BANDA SE E' POSSIBILE SEPARARE UNA DELLE DUE BANDE LATERALI MEDIANTE UN FILTRO. SI OTTIENE IN TAL CASO UNA OSCILLAZIONE A BANDA LATERALE UNICA E PORTANTE SOPPRESSA (SSB-SC, SINGLE SIDE BAND - SUPPRESSED CARRIER) OSSIA, RICORDANDO QUANTO GIA' DETTO NEL PARAGRAFO 6.5, UN SEGNALE CONVERTITO IN FREQUENZA (V. FIGURA 9.4.5). MODULAZIONE SSB-SC E CONVERSTIONE DI FREQUENZA SONO DUNQUE TERMINI SINONIMI.

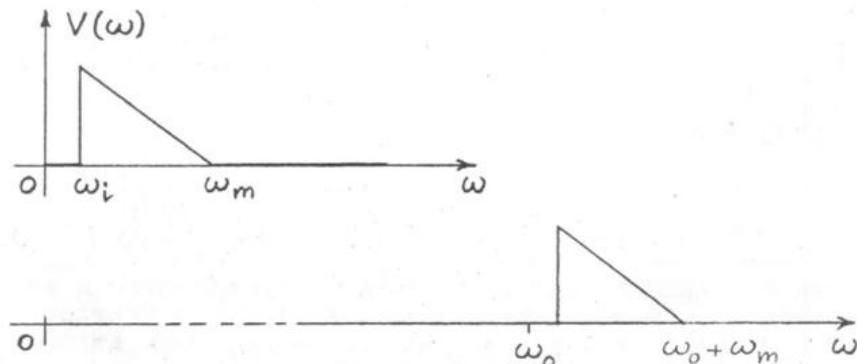


Fig. 9.4.5

CONCLUDIAMO IL PARAGRAFO FORNENDO UN QUADRO SINTETICO, IN CUI VENGONO INDICATE LE ESPRESSIONI DELLE OSCILLAZIONI MODULATE FINORA INTRODOTTE, CORRISPONDENTI AL SEGNALE MODULANTE

$$(9.4.7) \quad x(t) = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos [\omega t - \varphi(\omega)] d\omega ,$$

E ALLA PORTANTE

$$(9.4.8) \quad s_o(t) = V_0 \cos \omega_0 t .$$

VENGONO ALTRESI' INDICATI I RELATIVI INVILUPPI COMPLESSI E LA LORO RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE.

#### SEGNALE AM (o DSB):

$$(9.4.9) \quad s(t) = V_0 [1 + K x(t)] \cos \omega_0 t ,$$

*AM(DSB)*

$$(9.4.10) \quad i(t) = V_0 [1 + K x(t)] .$$

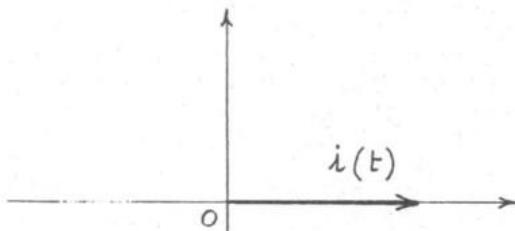


Fig. 9.4.6

#### SEGNALE SSB:

$$(9.4.11) \quad s(t) = V'_0 \cos \omega_0 t + \frac{K V_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos [(\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega ,$$

$$(9.4.12) \quad i(t) = V_0 + \frac{K V_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega .$$

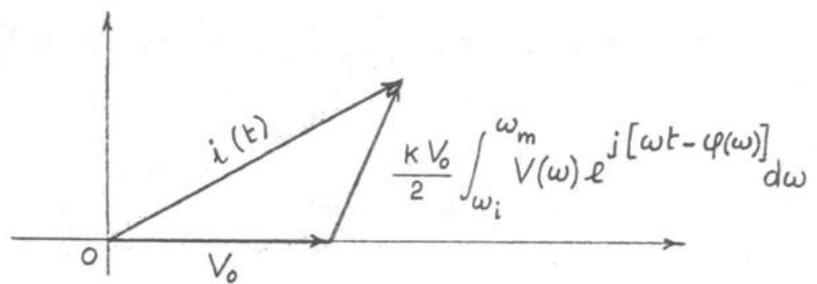


Fig. 9.4.7

SEGNALI VSB:

$$(9.4.13) \quad s(t) = V_0 \cos \omega_0 t + \frac{K V_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos [(\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega + \\ + \frac{K V_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_s} V(\omega) \cos [(\omega_0 - \omega)t + \varphi(\omega)] d\omega, \quad (\omega_s < \omega_m)$$

$$(9.4.14) \quad i(t) = V_0 + \frac{K V_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega + \\ + \frac{K V_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_s} V(\omega) e^{-j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega, \quad (\omega_s < \omega_m).$$

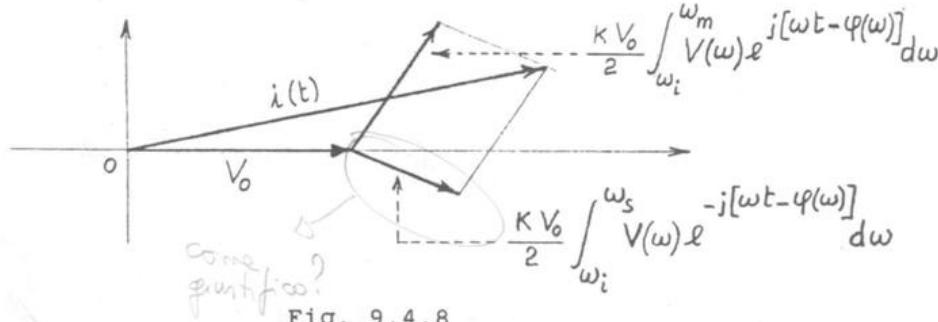


Fig. 9.4.8

SEGNALI SSB A PORTANTE PARZIALMENTE SOPPRESSA:

$$(9.4.15) \quad s(t) = a V_0 \cos \omega_0 t + \frac{K V_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos [(\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega,$$

con  $a < 1$ .

$$(9.4.16) \quad i(t) = a V_0 + \frac{K V_0}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega.$$

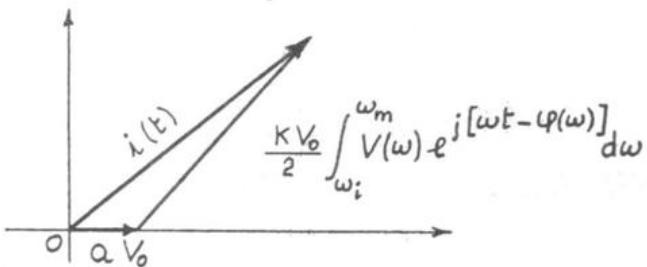


Fig. 9.4.9

SEGNALI DSB-SC:

$$(9.4.17) \quad s(t) = x(t) \cos \omega_0 t ,$$

$$(9.4.18) \quad i(t) = x(t) .$$

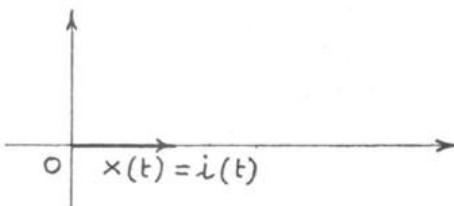


Fig. 9.4.10

SEGNALE SSB-SC O CONVERTITO IN FREQUENZA:

$$(9.4.19) \quad s(t) = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega,$$

$$(9.4.20) \quad i(t) = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega.$$

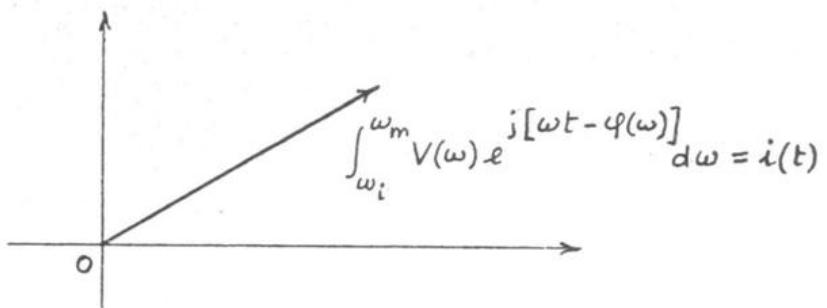


Fig. 9.4.11

## 9.5 ESERCIZI.

### ESERCIZIO N. 1

VERIFICARE CHE L'OSCILLAZIONE SSB (9.4.11) E' MODULATA SIA IN AMPIEZZA CHE IN ANGOLO, CIOE'

$$(9.5.1) \quad s(t) = V(t) \cos[\omega_0 t + \alpha(t)] ,$$

E DETERMINARE  $V(t)$  E  $\alpha(t)$ .

DALL'ESPRESSONE (9.4.12) DELL'INVILUPPO COMPLESSO O DALLA SUA RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE DI FIGURA 9.4.7, RICORDANDO CHE

$$(9.5.2) \quad i(t) = V(t) e^{j\alpha(t)} ,$$

SEGUE:

$$(9.5.3) \quad V(t) = V_0 \left\{ \left[ 1 + \frac{\kappa}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{\kappa^2}{4} \left[ \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \sin[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} ,$$

$$(9.5.4) \quad \alpha(t) = \arctg \frac{\frac{\kappa}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \sin[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega}{1 + \frac{\kappa}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega} .$$

VALE LA PENA OSSERVARE CHE PER  $\kappa$  SUFFICIENTEMENTE PICCOLO, RISULTA:

$$(9.5.5) \quad V(t) \simeq V_0 \left\{ 1 + \frac{\kappa}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega \right\} = \\ = V_0 \left[ 1 + \frac{\kappa}{2} \times (t) \right]$$

E QUINDI LA DEVIAZIONE RELATIVA DI AMPIEZZA

$$(9.5.6) \quad m(t) = \frac{k}{2} x(t)$$

E' PROPORZIONALE AL SEGNALE MODULANTE.

### ESERCIZIO N. 2

VERIFICARE CHE L'OSCILLAZIONE DSB-SC (9.4.17) E' MODULATA SIA IN AMPIEZZA CHE IN ANGOLO, CIOE'

$$(9.5.7) \quad s(t) = v(t) \cos[\omega_0 t + \alpha(t)] ,$$

E DETERMINARE  $v(t)$  E  $\alpha(t)$ .

DALL'ESPRESSONE (9.4.18) DELL'INVILUPPO COMPLESSO, SEGUE:

$$(9.5.8) \quad v(t) = |x(t)| ,$$

$$(9.5.9) \quad \alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x(t) > 0 \\ \pi & \text{quando } x(t) < 0 \end{cases} .$$

ESERCIZIO N. 3

STUDIARE LE CARATTERISTICHE SPETTRALI DI UNA OSCILLAZIONE AM QUANDO IL SEGNALE MODULANTE E' UN TONO SINUSOIDALE.

SIA

$$(9.5.10) \quad s(t) = V_0 [1 + kx(t)] \cos \omega_0 t$$

L'OSCILLAZIONE MODULATA, CON

$$(9.5.11) \quad x(t) = M \cos(\omega_m t - \varphi_m) .$$

POSTO

$$(8.5.12) \quad m_a = KM ,$$

SCRIVIAMO:

$$(9.5.13) \quad s(t) = V_0 \cos \omega_0 t + m_a V_0 \cos(\omega_m t - \varphi_m) \cos \omega_0 t = \\ = V_0 \cos \omega_0 t + \frac{m_a V_0}{2} \cos[(\omega_0 + \omega_m)t - \varphi_m] + \\ + \frac{m_a V_0}{2} \cos[(\omega_0 - \omega_m)t + \varphi_m] .$$

COME MOSTRATO IN FIGURA 9.5.1, IN VIRTU' DELLE (9.5.11) E (9.5.13), LO SPETTO DI AMPIEZZA DEL SEGNALE MODULANTE E' COSTITUITO DA UNA RIGA ALLA PULSAZIONE  $\omega_m$ , QUELLO DEL SEGNALE MODULATO DALLA RIGA IN CORRISPONDENZA ALLA PULSAZIONE  $\omega_0$  DELLA PORTANTE E DA DUE RIGHE LATERALI, ALLE PULSAZIONI  $\omega_0 \pm \omega_m$ .

$$e^{j(\omega_0 + \omega_m)t - \varphi_m}$$

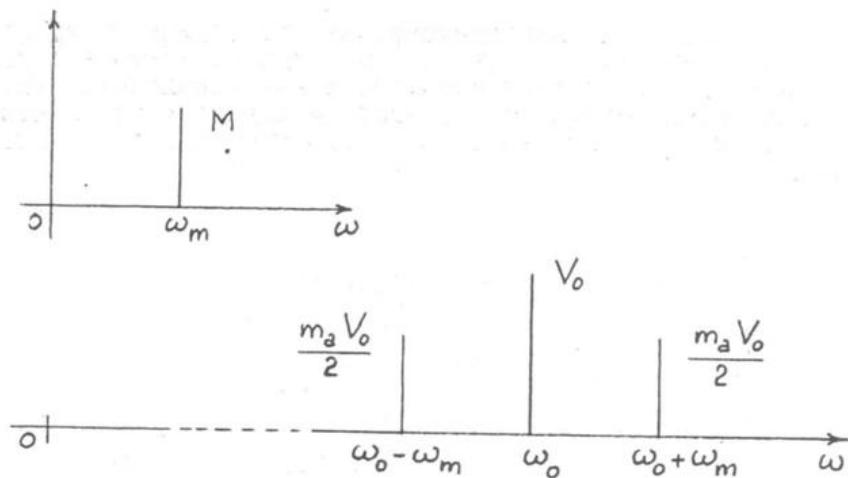


Fig. 9.5.1

LA (9.5.13) PUO' ESSERE POSTA NELLA FORMA:

$$(9.5.14) \quad s(t) = \operatorname{Re} \left\{ \left[ V_0 + \frac{m_a V_0}{2} e^{j(\omega_m t - \varphi_m)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m_a V_0}{2} e^{-j(\omega_m t - \varphi_m)} \right] e^{j\omega_0 t} \right\},$$

E QUINDI L'INVILUPPO COMPLESSO E' DATO DA:

$$(9.5.15) \quad i(t) = V_0 + \frac{m_a V_0}{2} e^{j(\omega_m t - \varphi_m)} + \\ + \frac{m_a V_0}{2} e^{-j(\omega_m t - \varphi_m)}.$$

LA RELATIVA RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE E' RIPORTATA IN FIGURA 9.5.2, IN CUI APPAIONO UN VETTORE FISSO SULL'ASSE REALE (RAPPRESENTATIVO DELLA PORTANTE) E DUE VETTORI SIMMETRICAMENTE DISPOSTI RISPETTO ALLO STESSO ASSE E RUOTANTI IN SENSO CONTRARIO CON VELOCITA' ANGOLARE  $\omega_m$ .

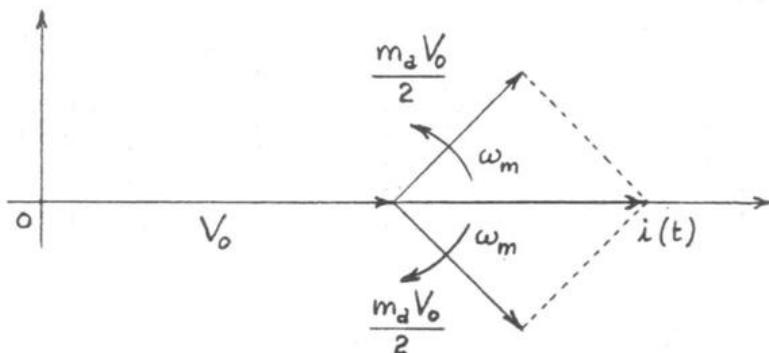


Fig. 9.5.2

SI NOTI CHE IL VETTORE RISULTANTE GIACE SEMPRE SULL'ASSE REALE, COME DEVE ESSERE IN QUANTO ESSO RAPPRESENTA UN'OSCILLAZIONE MODULATA SOLO IN AMPIEZZA E CON FASE INIZIALE NULLA. SI NOTI ALTRESI' COME L'ELIMINAZIONE DI UNA RIGA LATERALE (MODULAZIONE SSB) DIA ORIGINE AD UNA MODULAZIONE D'ANGOLO, OLTRE CHE AD UNA DIVERSA MODULAZIONE D'AMPIEZZA.

~~QAM~~

QAM

## 9.6 MODULATORI E DEMODULATORI A PRODOTTO. MODULAZIONE QAM.

RISCRIVIAMO L'ESPRESSONE (9.4.17) DI UNA OSCILLAZIONE MODULATA A PRODOTTO (O DSB-SC):

$$(9.6.1) \quad s(t) = x(t) \cos \omega_0 t .$$

ESSA PUO' ESSERE OTTENUTA A PARTIRE DALL'OSCILLAZIONE PORTANTE  $\cos \omega_0 t$  E DAL SEGNALE MODULANTE  $x(t)$  SEMPLICEMENTE EFFETTUANDONE IL PRODOTTO (MODULATORE A PRODOTTO - FIGURA 9.6.1).

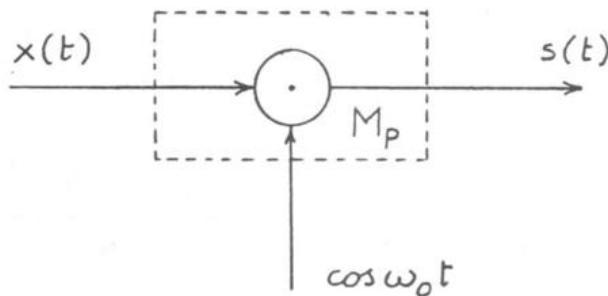


Fig. 9.6.1

LA DEMODULAZIONE PUO' ESSERE EFFETTUATA CON UN DEMODULATORE COERENTE COME INDICATO IN FIGURA 9.6.2 (DEMODULATORE A PRODOTTO).

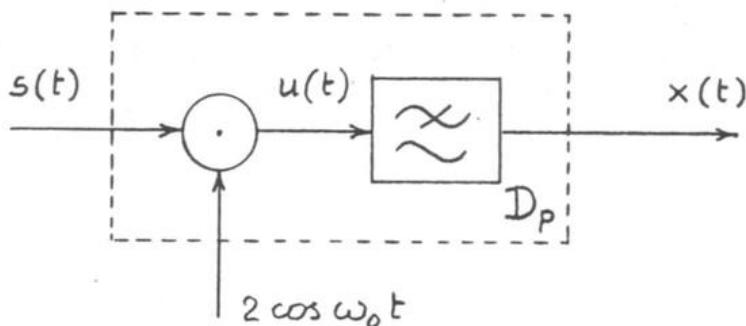


Fig. 9.6.2

INFATTI IL PRODOTTO

$$(9.6.2) \quad u(t) = x(t) \cos \omega_0 t \cdot 2 \cos \omega_0 t = \\ = x(t) + x(t) \cos 2\omega_0 t$$

E' COSTITUITO DALLA SOMMA DEL SEGNALE MODULANTE  $x(t)$  E DI UNA OSCILLAZIONE MODULATA A PRODOTTO, SEMPRE DA  $x(t)$ , CON PORTANTE DI PULSAZIONE  $2\omega_0$ . COME SI EVINCE CHIARAMENTE DALLA FIGURA 9.6.3, OVE SONO INDICATI GLI SPETTRI DEI DUE TERMINI COMPONENTI  $u(t)$ , IL SEGNALE MODULANTE  $x(t)$  PUO' ESSERE FACILMENTE ISOLATO CON UN FILTRO PASSA-BASSO.



Fig. 9.6.3

SI NOTI CHE IN PRESENZA DI UN ERRORE  $\Delta$  NELLA FASE DI RIFERIMENTO (FIGURA 9.6.4) L'USCITA DEL DEMODULATORE A PRODOTTO VALE  $x(t) \cos \Delta$ : SI HA DUNQUE UNA DIMINUZIONE DI LIVELLO DEL SEGNALE DEMODULATO.

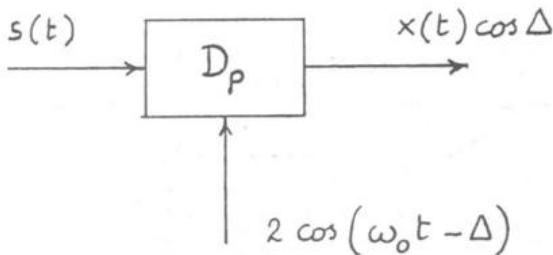


Fig. 9.6.4

$$\cos \frac{\pi}{2} = -\sin \frac{\pi}{2}$$

CONSIDERIAMO ORA DUE PORTANTI IN QUADRATURA

$$\cos \omega_0 t , -\sin \omega_0 t$$

E DUE SEGNALI MODULANTI

$$x_1(t) , x_2(t)$$

FORMIAMO I DUE SEGNALI MODULATI A PRODOTTO:

$$(9.6.3) \quad s_p(t) = x_1(t) \cos \omega_0 t$$

$$(9.6.4) \quad s_q(t) = -x_2(t) \sin \omega_0 t$$

E CONSIDERIAMO LA LORO SOMMA:

$$(9.6.5) \quad s(t) = s_p(t) + s_q(t) =$$

$$= x_1(t) \cos \omega_0 t - x_2(t) \sin \omega_0 t .$$

DA TALE SOMMA E' POSSIBILE ESTRARRE I DUE SEGNALI MODULANTI  $x_1(t)$  E  $x_2(t)$  COME E' INDICATO NELLO SCHEMA DI FIGURA 9.6.5.

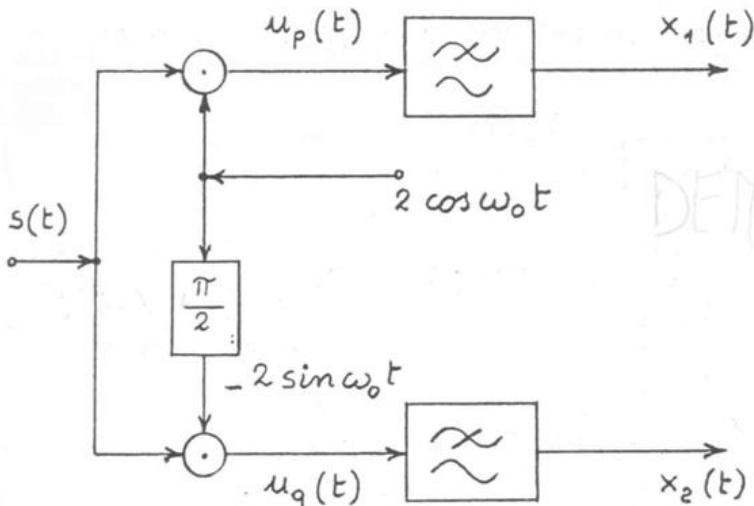


Fig. 9.6.5

# QAM

RISULTA INFATTI:

$$(9.6.6) \quad u_p(t) = x_1(t) + x_1(t) \cos 2\omega_0 t - \\ - x_2(t) \sin 2\omega_0 t,$$

$$(9.6.7) \quad u_q(t) = -x_1(t) \sin 2\omega_0 t + x_2(t) - \\ - x_2(t) \cos 2\omega_0 t.$$

E LE USCITE DEI DUE FILTRI PASSA-BASSO SONO QUINDI COSTITUITE RISPETTIVAMENTE DAI DUE SEGNALI MODULANTI  $x_1(t)$  E  $x_2(t)$  COME INDICATO IN FIGURA.

L'OSCILLAZIONE (9.6.5) CHE CONSENTE DUNQUE DI TRASMETTERE CONTEMPORANEAMENTE DUE DISTINTI SEGNALI SULLA STESSA BANDA A RADIOFREQUENZA, CONSERVANDO LA POSSIBILITA' DI RECUPERARE L'INFORMAZIONE CHE ESSI RECANO, VIENE DETTA **OSCILLAZIONE QAM** (QUADRATURE AMPLITUDE MODULATION).

LO SCHEMA DI UN MODULATORE QAM E' RIPORTATO IN FIGURA 9.6.6.

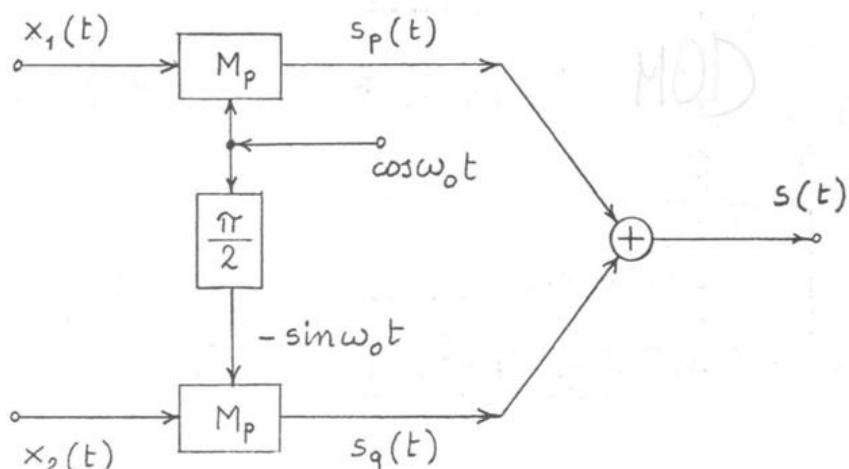


Fig. 9.6.6

COME E' AGEVOLE VERIFICARE, IN PRESENZA DI UN ERRORE  $\Delta$  NELLA FASE DI RIFERIMENTO I DUE SEGNALI ALL'USCITA DEI DUE DEMODULATORI A PRODOTTO DI FIGURA 9.6.5 SONO QUELLI INDICATI IN FIGURA 9.6.7: L'EFFETTO DI TALE ERRORE E' DUNQUE QUELLO DI PRODURRE UNA INTERFERENZA RECIPROCA FRA I DUE SEGNALI MODULANTI, OLTRE CHE UNA DIMINUZIONE DI LIVELLO DI QUELLO UTILE.

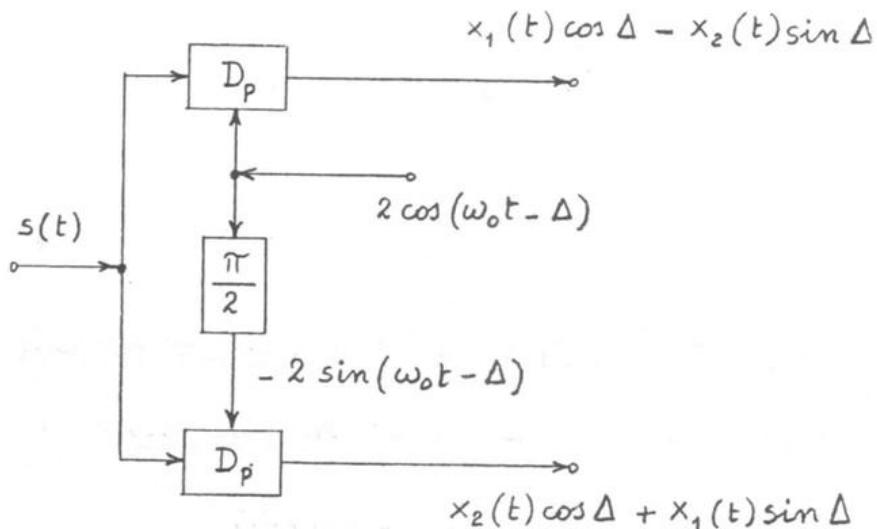


Fig. 9.6.7

RICAVIAMO ORA L'ESPRESSONE DELL'INVILUPPO COMPLESSO DI UNA OSCILLAZIONE QAM. SCRIVIAMO A TAL FINE LA (9.6.5) NELLA FORMA:

$$(9.6.8) \quad s(t) = \operatorname{Re} \left\{ [x_1(t) + j x_2(t)] e^{j \omega_0 t} \right\},$$

DA CUI DISCENDE L'INVILUPPO COMPLESSO

$$(9.6.9) \quad i(t) = x_1(t) + j x_2(t),$$

RAPPRESENTATO IN FIGURA 9.6.8.

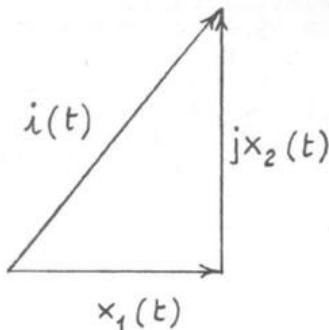


Fig. 9.6.8

### 9.7 CARATTERISTICHE SPETTRALI DI OSCILLAZIONI MODULATE IN ANGOLO.

RICORDIAMO L'ESPRESSONE DI UNA OSCILLAZIONE MODULATA D'ANGOLO:

$$(9.7.1) \quad s(t) = V_o \cos [\omega_o t + \alpha(t)] .$$

CONSIDERIAMO PER ORA COME SEGNALE MODULANTE IL TONO SINUSOIDALE:

$$(9.7.2) \quad x(t) = M \cos (\omega_m t - \varphi_m) .$$

IN MODULAZIONE DI FASE, RICORDANDO LA (9.1.13) CON  $\varphi_o = 0$ , ABBIAMO:

$$(9.7.3) \quad s(t) = V_o \cos [\omega_o t + K M \cos (\omega_m t - \varphi_m)]$$

ED IN MODULAZIONE DI FREQUENZA, RICORDANDO LA (9.1.15) SEMPRE CON  $\varphi_o = 0$ :

$$(9.7.4) \quad s(t) = V_o \cos \left[ \omega_o t + \frac{K M}{\omega_m} \sin (\omega_m t - \varphi_m) \right] .$$

LE (9.7.3) E (9.7.4) POSSONO ESSERE SCRITTE NELL'UNICA FORMA:

$$(9.7.5) \quad s(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + m \sin (\omega_m t - \psi)] ,$$

ESSENDO  $m$  L'INDICE DI MODULAZIONE ANGOLARE (PARI  $|k|/M$  IN PM E  $|k|M/\omega_m$  IN FM) E:

$$(9.7.6) \quad \begin{cases} \Psi = \varphi_m - \frac{\pi}{2} & \text{in PM} \\ \Psi = \varphi_m & \text{in FM} \end{cases}$$

VALE LA PENA OSSERVARE CHE CON RIFERIMENTO ALLA (9.7.5) POSSIAMO SCRIVERE:

$$(9.7.7) \quad \alpha(t) = m \sin (\omega_m t - \psi) ,$$

$$(9.7.8) \quad \dot{\alpha}(t) = \Delta \omega(t) = m \omega_m \cos (\omega_m t - \psi)$$

E QUINDI IL MASSIMO VALORE ASSUNTO DA  $|\Delta \omega(t)|$ , CHE INDICHIAMO CON  $\Delta \omega_{max}$ , VALE:

$$(9.7.9) \quad \Delta \omega_{max} = m \omega_m$$

DA CUI:

$$(9.7.10) \quad m = \frac{\Delta \omega_{max}}{\omega_m}$$

LA (9.7.10) E' UNA ULTERIORE ESPRESSIONE DELL'INDICE DI MODULAZIONE ANGOLARE, VALIDA PERO' SOLO QUANDO IL SEGNALE MODULANTE E' UN TONO SINUSOIDALE.

SCRIVENDO LA (9.7.5) NELLA FORMA:

$$(9.7.11) \quad s(t) = \operatorname{Re} \left\{ V_0 e^{j m \sin (\omega_m t - \psi)} e^{j \omega_0 t} \right\} ,$$

APPARE CHIARA L'ESPRESSIONE DELL'INVILUPPO COMPLESSO:

$$(9.7.12) \quad i(t) = V_o e^{j m \sin(\omega_m t - \psi)}$$

CONSIDERIAMO ORA LA FUNZIONE  $e^{j m \sin \Phi}$ , CHE E' PERIODICA RISPETTO ALLA VARIABILE  $\Phi$  CON PERIODO  $2\pi$ . IL SUO SVILUPPO IN SERIE ESPONENZIALE DI FOURIER E' PERTANTO:

$$(9.7.13) \quad e^{j m \sin \Phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Phi},$$

OVE I COEFFICIENTI  $c_n$  SONO ESPRESI DA:

$$(9.7.14) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jm \sin \Phi} e^{-jn\Phi} d\Phi.$$

RISULTA:

$$(9.7.15) \quad c_n = J_n(m),$$

ESSENDO  $J_n(m)$  LA FUNZIONE DI BESSEL DI PRIMA SPECIE DI ORDINE  $n$ .

I GRAFICI DELLE FUNZIONI  $J_n(m)$ , PER  $n \geq 0$ , SONO RIPORTATI IN FIGURA 9.7.1; PER  $n < 0$  I RELATIVI ANDAMENTI SI DEDUCONO DALLA RELAZIONE:

$$(9.7.16) \quad J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m)$$

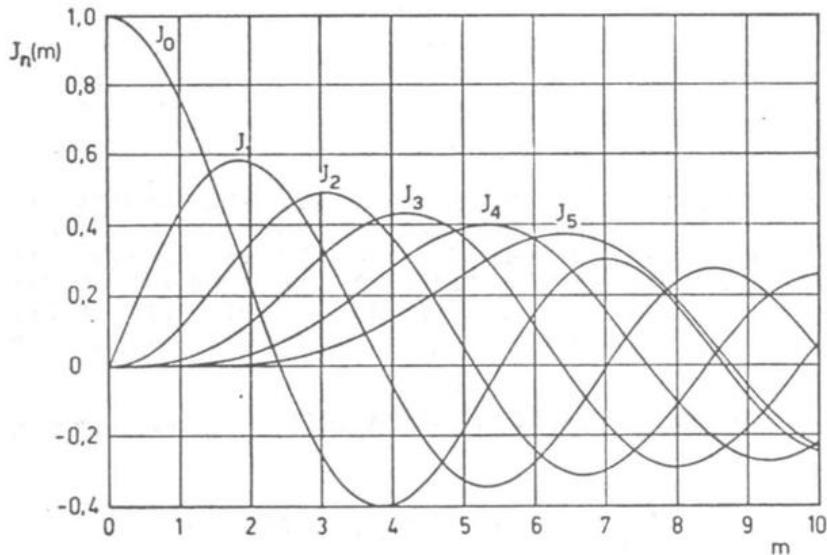


Fig. 9.7.1

DA QUANTO VISTO DISCENDE:

$$(9.7.17) \quad s(t) = V_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos[(\omega_o + n\omega_m)t - n\psi].$$

LA (9.7.17) ESPRIME L'OSCILLAZIONE MODULATA D'ANGOLO DA UN TONO SINUSOIDALE COME SOMMA DI INFINITE SINUSOIDI; IL RELATIVO SPETTRO DI AMPIEZZA RISULTA QUINDI FORMATO DA RIGHE DI AMPIEZZA  $V_o |J_n(m)|$  IN CORRISPONDENZA ALLE PULSAZIONI  $|\omega_o + n\omega_m|$  COME INDICATO IN FIGURA 9.7.2.

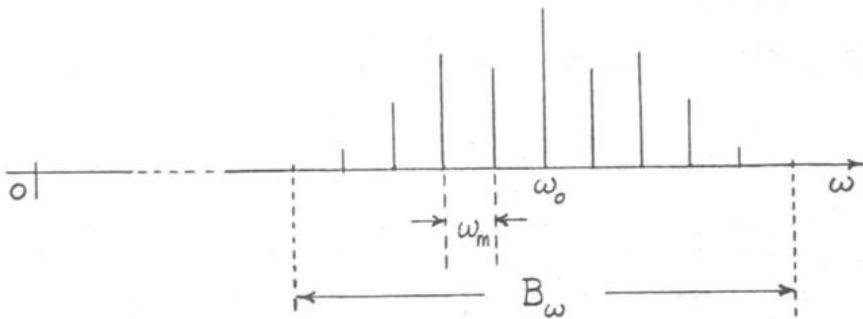


Fig. 9.7.2

IN PRATICA SI TRATTA DI UN SEGNALE PASSA-BANDA IN QUANTO I VALORI DELLE GRANDEZZE IN GIOCO ( $\omega_0$ ,  $\omega_m$ ,  $m$ ) VENGONO ASSUNTI IN MODO TALE DA RENDERE LECITA, IN UN PREFISSATO ORDINE DI APPROSSIMAZIONE, LA CONSIDERAZIONE DI UN NUMERO FINITO DI RIGHE, CHE SONO QUELLE CONTENUTE IN UNA BANDA  $B_\omega$  CENTRATA SU  $\omega_0$ , CON  $B_\omega / \omega_0 \ll 1$ .

TALE BANDA E' ESPRESSA DALLA NOTA FORMULA (FORMULA DI CARSON):

$$(9.7.18) \quad B_\omega = 2(\Delta\omega_{max} + \omega_m),$$

OVE, COME ABBIAMO GIA' DETTO,

$$(9.7.19) \quad \Delta\omega_{max} = \max |\Delta\omega(t)|$$

RAPPRESENTA LA MASSIMA DEVIAZIONE DI PULSAZIONE.

PIU' PRECISAMENTE, SE INDICHIAMO CON  $2N+1$  IL NUMERO DI RIGHE CHE CADONO NELLA SUDETTO BANDA, SI PUO' SCRIVERE, A TUTTI GLI EFFETTI PRATICI:

$$(9.7.20) \quad s(t) = V_0 \sum_{-N}^N J_n(m) \cos[(\omega_0 + n\omega_m)t - n\psi].$$

LA VERIFICA (SIA SPERIMENTALE CHE NUMERICA) DELLA (9.7.20) COSTITUISCE PER L'APPUNTO LA GIUSTIFICAZIONE DELLA FORMULA DI CARSON. IN TALI CONDIZIONI LO SPETTRO DI AMPIEZZA RISULTA SIMMETRICO RISPETTO A  $\omega_0$ .

NB

LA (9.7.17) FORNISCE ANCHE LO SPETTRO DI FASE DEL SEGNALE MODULATO  $s(t)$ . SI NOTI CHE QUEST'ULTIMO NON RISULTA ANTISIMMETRICO RISPETTO A  $\omega_0$ , A DIFFERENZA DI QUANTO AVVIENE IN MODULAZIONE DI AMPIEZZA.

FINORA ABBIAMO CONSIDERATO COME SEGNALE MODULANTE UN TONO SINUSOIDALE. NON INTENDIAMO PRESENTARE LE CONSIDERAZIONI ANALITICHE RELATIVE AD UN GENERICO SEGNALE PASSA-BASSO E CI LIMITIAMO AD ENUNCIARE IL SEGUENTE, FONDAMENTALE RISULTATO: IL SEGNALE MODULATO CHE NE RISULTA E' ANCORA IN PRATICA DI TIPO PASSA-BANDA, CON BANDA CENTRATA SULLA PULSAZIONE  $\omega_0$  DELLA PORTANTE E LARGHEZZA  $B_\omega$  ANCORA ESPRESSA DALLA FORMULA DI CARSON (9.7.18), NELLA QUALE  $\omega_m$  DEVE INTENDERSI COME ESTREMO SUPERIORE DELLA BANDA DEL SEGNALE MODULANTE E  $\Delta\omega_{max}$  E' SEMPRE DATO DALLA (9.7.19).

## 9.8 ESERCIZI.

### ESERCIZIO N. 4

SI CALCOLI LA (9.7.17) PER  $m = 0$ .

PER  $m = 0$  E':

$$(9.8.1) \quad J_n(0) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}$$

LA (9.7.17) DIVENTA PERTANTO:

$$(9.8.2) \quad s(t) = V_0 \cos \omega_0 t,$$

OSSIA  $s(t)$  COINCIDE CON LA PORTANTE  $s_0(t)$ , COME DEVE ESSERE IN ASSENZA DI MODULAZIONE ( $m = 0$ ).

### ESERCIZIO N. 5

PER  $m \ll 1$  (OSSIA PER UN PICCOLO INDICE DI MODULAZIONE), SI ESPRIMA LA (9.7.17) ED IL RELATIVO INVILUPPO COMPLESSO, DANDONE LA RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE.

POICHÉ:

$$(9.8.3) \quad \left[ \frac{d J_n(m)}{d m} \right]_{m=0} = \begin{cases} 0 & , n \neq \pm 1 \\ \frac{1}{2} & , n = 1 \\ -\frac{1}{2} & , n = -1 \end{cases}$$

TRASCURANDO NEGLI SVILUPPI IN SERIE DI POTENZE DELLE FUNZIONI  $J_n(m)$ , NELL'INTORNO DEL PUNTO  $m = 0$ , I TERMINI DI ORDINE NON INFERIORE AL SECONDO, RISULTA:

$$(9.8.4) \quad \begin{aligned} J_0(m) &= 1 \\ J_1(m) &= m/2 \\ J_{-1}(m) &= -m/2 \\ J_n(m) &= 0 \quad , \quad n \neq (0, \pm 1) \end{aligned}$$

LA (9.7.17) DIVIENE PERCIO':

$$(9.8.5) \quad s(t) = V_0 \cos \omega_0 t + \frac{m V_0}{2} \cos [(\omega_0 + \omega_m)t - \psi] - \frac{m V_0}{2} \cos [(\omega_0 - \omega_m)t + \psi].$$

GLI SPETTRI DI AMPIEZZA E DI FASE SONO RAPPRESENTATI NELLA FIGURA 9.8.1.

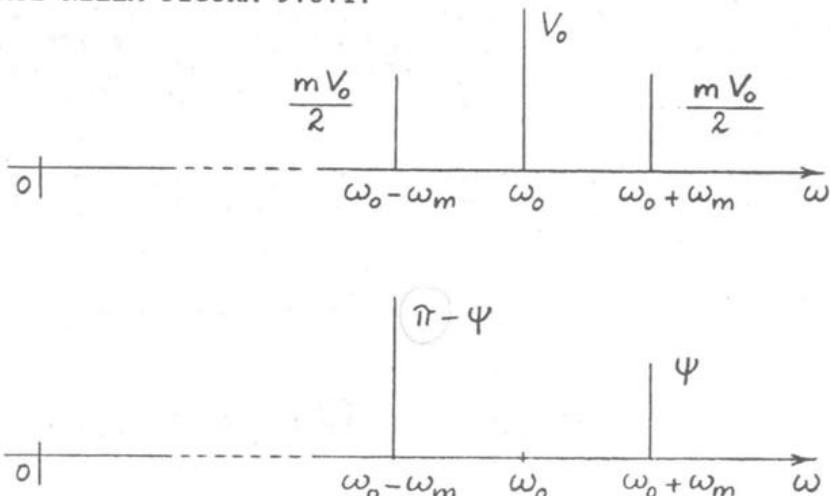


Fig. 9.8.1

L'INVILUPPO COMPLESSO DI  $s(t)$  E' ESPRESSO DA:

$$(9.8.6) \quad i(t) = V_0 + \frac{m V_0}{2} e^{j(\omega_m t - \psi)} + \frac{m V_0}{2} e^{-j(\omega_m t - \psi + \pi)}$$

ED E' RAPPRESENTATO NEL DIAGRAMMA VETTORIALE DI FIGURA 9.8.2.

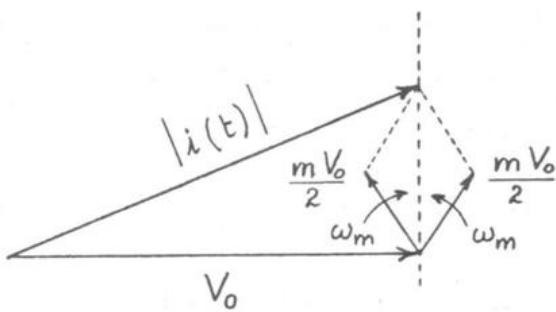


Fig. 9.8.2

E' IMPORTANTE RICORDARE CHE LA (9.8.6) ED IL DIAGRAMMA DI FIGURA 9.8.2 CHE NE DISCENDE VALGONO SOLO PER  $m \ll 1$ : SOLO IN TAL CASO INFATTI E' POSSIBILE APPROSSIMARE  $|i(t)|$  CON IL VALORE COSTANTE  $V_0$ , COME DEVE ESSERE TRATTANDOSI DI OSCILLAZIONE MODULATA D'ANGOLO E NON D'AMPIEZZA.

OSSERVIAMO CHE IL RISULTATO ESPRESSO DALLA (9.8.5) PUO' ESSERE RICAVATO DIRETTAMENTE DALLA (9.7.5). DA QUESTA OTTENIAMO INFATTI:

$$(9.8.7) \quad s(t) = V_0 \cos \omega_0 t \cos [m \sin(\omega_m t - \psi)] - \\ - V_0 \sin \omega_0 t \sin [m \sin(\omega_m t - \psi)] .$$

PER  $m \ll 1$  VALGONO LE APPROXIMAZIONI:

$$(9.8.8) \quad \cos [m \sin(\omega_m t - \psi)] \simeq 1 ,$$

$$(9.8.9) \quad \sin [m \sin(\omega_m t - \psi)] \simeq m \sin(\omega_m t - \psi) ,$$

SOSTITUENDO LE QUALI NELLA (9.8.7) DISCENDE APPUNTO LA (9.8.5).

### 9.9 NATURA DI UN SEGNALE PASSA-BANDA.

NEI PARAGRAFI 9.4 E 9.7 ABBIAMO DETERMINATO LE CARATTERISTICHE SPETTRALI DI OSCILLAZIONI MODULATE IN AMPIEZZA O IN ANGOLO E, IN ENTRAMBI I CASI, ABBIAMO CONSTATATO CHE SI TRATTA DI SEGNALI PASSA-BANDA. AD UN RISULTATO ANALOGO SAREMMO IN PRATICA GIUNTI CONSIDERANDO ANCHE SEGNALI CON MODULAZIONE IBRIDA (SIA D'AMPIEZZA CHE D'ANGOLO).

VOLENDO DARE UNA TRATTAZIONE UNITARIA DELLE CARATTERISTICHE SPETTRALI DI OSCILLAZIONI MODULATE, RISCRIVIAMO LA (9.2.2)

$$(9.9.1) \quad s(t) = \operatorname{Re} \left\{ i(t) e^{j\omega_0 t} \right\},$$

CHE PUO' ESSERE POSTA NELLA FORMA:

$$(9.9.2) \quad s(t) = \frac{1}{2} i(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} i^*(t) e^{-j\omega_0 t}.$$

SIA L'INVILUPPO COMPLESSO  $i(t)$  DOTATO DI TRASFORMATA SECONDO FOURIER  $I(\omega)$ ,

$$(9.9.3) \quad I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$(9.9.4) \quad i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

ESSENDO  $i(t)$  UNA FUNZIONE COMPLESSA DEL TEMPO, RISULTA IN GENERALE:

$$(9.9.5) \quad I(-\omega) \neq I^*(\omega).$$

LA TRASFORMATA  $s(\omega)$  DEL SEGNALE MODULATO  $s(t)$  SI OTTIENE IMMEDIATAMENTE DALLA (9.9.2) ED E' ESPRESSA DA:

$$(9.9.6) \quad S(\omega) = \frac{1}{2} I(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} I^*(-\omega - \omega_0)$$

CHE RAPPRESENTA UNA GENERALIZZAZIONE DELLA (2.5.15) LA QUALE SI RIFERISCE AL CASO IN CUI  $i(t) = x(t)$  = FUNZIONE REALE DI  $t$ .

SE  $(-\frac{B\omega}{2}, \frac{B\omega}{2})$  E' L'INTERVALLO DI PULSAZIONI SU CUI E' APPREZZABILE  $I(\omega)$ , LA BANDA DI  $s(t)$  HA AMPIEZZA  $B\omega$  ED E' CENTRATA SU  $\omega_0$  (V. FIGURA 9.9.1 IN CUI SONO RAPPRESENTATI I MODULI DELLE GRANDEZZE IN GIOCO).

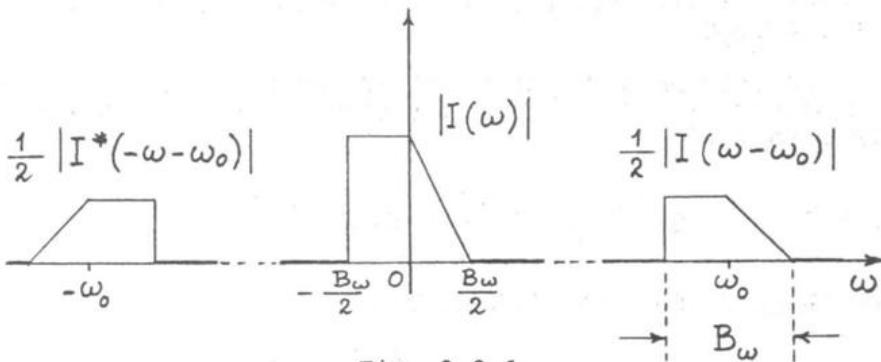


Fig. 9.9.1

DALLA TRASFORMATO  $S(\omega)$ , INFINE, DISCENDONO GLI SPETTRI DI AMPIEZZA E FASE DEL SEGNALE MODULATO NELLE CONDIZIONI CONSIDERATE.

PONIAMOCI ORA IL PROBLEMA INVERSO DI QUELLO ORA TRATTATO, OSSIA CHIEDAMOCI QUALE E' LA NATURA DI UN SEGNALE  $s(t)$  CHE PER IPOTESI ASSUMIAMO PASSA-BANDA CON BANDA  $B\omega$  CENTRATA SU UNA PULSAZIONE  $\omega_0$ .

SCRIVIAMO:

$$\begin{aligned}
 (9.9.7) \quad s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2 S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\} = \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{B\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{B\omega}{2}} 2 S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\}.
 \end{aligned}$$

PONENDO  $\omega = \omega_0 + \frac{\varphi}{2}$  E TORNANDO A CHIAMARE CON  
 $\omega$  LA VARIABILE DI INTEGRAZIONE, SI OTTIENE:

$$(9.9.8) \quad s(t) = \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{B_\omega}{2}}^{\frac{B_\omega}{2}} 2S(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \right] e^{j\omega_0 t} \right\} = \\ = \operatorname{Re} \left\{ i(t) e^{j\omega_0 t} \right\},$$

OVE

$$(9.9.9) \quad i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{B_\omega}{2}}^{\frac{B_\omega}{2}} 2S(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega.$$

DALLA (9.9.9) DISCENDE CHE LA TRASFORMATA  $I(\omega)$  DI  $i(t)$  E' ESPRESSA DA:

$$(9.9.10) \quad I(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega + \omega_0), & \text{per } |\omega| \leq \frac{B_\omega}{2}, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

LA (9.9.8) ESPRIME IL SEGNALE PASSA-BANDA  $s(t)$  COME OSCILLAZIONE MODULATA DI CUI  $i(t)$  RAPPRESENTA L'INVILUPPO COMPLESSO.

IN PARTICOLARE, ESPRIMENDO  $i(t)$  IN FORMA POLARE:

$$(9.9.11) \quad i(t) = V(t) e^{j\alpha(t)}, \quad V(t) \geq 0,$$

RISULTA:

$$(9.9.12) \quad s(t) = V(t) \cos [\omega_0 t + \alpha(t)].$$

ESPRIMENDO INVECE  $i(t)$  IN FORMA CARTESIANA:

$$(9.9.13) \quad i(t) = x_p(t) + j x_q(t),$$

ABBIAMO:

$$(9.9.14) \quad s(t) = x_p(t) \cos \omega_0 t - x_q(t) \sin \omega_0 t.$$

UN SEGNALE PASSA-BANDA RAPPRESENTA QUINDI, IN GENERALE, UNA OSCILLAZIONE MODULATA IN AMPIEZZA E IN ANGOLO OPPURE (IL CHE E' EQUIVALENTE) LA SOMMA DI DUE OSCILLAZIONI IN QUADRATURA MODULATE A PRODOTTO.

TALE INTERPRETAZIONE DELLA (9.9.14) E' RESA POSSIBILE DAL FATTO CHE, COME DISCENDE DALLA (9.9.10), I DUE SEGNALI  $x_p(t)$  E  $x_q(t)$  CHE MODULANO LE DUE PORTANTI IN QUADRATURA HANNO BANDA COMPRESA FRA 0 E  $B\omega/2$  E CHE  $B\omega/2 \ll \omega_0$  IN VIRTU' DELL'IPOTESI DI SEGNALE PASSA-BANDA FATTA SU  $s(t)$ . L'EQUIVALENZA FRA LE (9.9.12) E (9.9.14) DA' POI RAGIONE DELLA INTERPRETAZIONE DATA ALLA (9.9.12).

SI PUO' QUINDI PARLARE DI OSCILLAZIONI MODULATE POICHÉ LE LEGGI DI MODULAZIONE SONO A VARIAZIONE LENTA RISPETTO A QUELLA DELLA PORTANTE.

IN CONCLUSIONE POSSIAMO AFFERMARE CHE SEGNALE PASSA-BANDA E OSCILLAZIONE MODULATA SONO TERMINI SINONIMI.

CONSIDERIAMO ORA UN CASO PARTICOLARE: IL SEGNALE  $s(t)$  ABbia SPETTRO DI AMPIEZZA

$$(9.9.15) \quad V_s(\omega) = \frac{|S(\omega)|}{\pi}, \quad \omega \geq 0,$$

SIMMETRICO RISPETTO ALLA PULSAZIONE  $\omega_0$  E QUELLO DI FASE

$$(9.9.16) \quad \varphi_s(\omega) = -\arg S(\omega), \quad \omega \geq 0,$$

ANTISIMMETRICO COME ILLUSTRATO IN FIGURA 9.9.2.

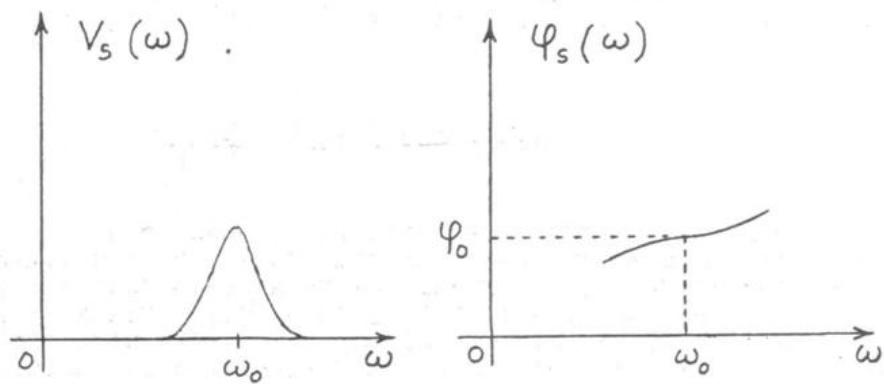


Fig. 9.9.2

IN FORMULE:

$$(9.9.17) \quad V_s(\omega_0 + \xi) = V_s(\omega_0 - \xi),$$

$$(9.9.18) \quad \varphi_s(\omega_0 + \xi) - \varphi_0 = - [\varphi_s(\omega_0 - \xi) - \varphi_0],$$

ESSENDO

$$(9.9.19) \quad \varphi_0 = \varphi_s(\omega_0).$$

IN QUESTA CIRCOstanza DALL'ESPRESSione (9.9.9)  
DELL'INVILUPPO COMPLESSO DISCENDE:

$$(9.9.20) \quad i(t) = e^{-j\varphi_0} \int_{-\frac{B\omega}{2}}^{\frac{B\omega}{2}} V_s(\omega + \omega_0) e^{-j[\varphi_s(\omega + \omega_0) - \varphi_0]} e^{j\omega t} d\omega = \\ = e^{-j\varphi_0} a(t),$$

OVE  $a(t)$  E' UNA FUNZIONE REALE DEL TEMPO.

8

IL SEGNALE MODULATO  $s(t)$  E' PERTANTO ESPRESSO DA:

$$(9.9.21) \quad s(t) = \operatorname{Re} \left\{ d(t) e^{-j\varphi_0} e^{j\omega_0 t} \right\} = \\ = d(t) \cos(\omega_0 t - \varphi_0).$$

IN ALTRI TERMINI, NEL CASO PARTICOLARE ORA ESAMINATO  $s(t)$  E' COSTITUITO DA UNA SOLA PORTANTE MODULATA A PRODOTTO. PERTANTO, RICORDANDO LE CARATTERISTICHE SPETTRALI DI UNA OSCILLAZIONE DI QUESTO TIPO VISTE NEL PARAGRAFO 9.4, POSSIAMO AFFERMARE CHE LA SIMMETRIA DELLO SPETTRO DI AMPIEZZA E L'ANTISIMMETRIA DI QUELLO DI FASE COSTITUISCONO CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHE' UN SEGNALE PASSA-BANDA SIA UNA OSCILLAZIONE MODULATA A PRODOTTO.

## 9.10 OSCILLAZIONI MODULATE CON SEGNALI MODULANTI A POTENZA FINITA.

LE CARATTERISTICHE SPETTRALI DI UNA OSCILLAZIONE MODULATA SONO STATE SINORA STUDIATE CON RIFERIMENTO A SEGNALI MODULANTI A CUI SIA APPLICABILE L'ANALISI DI FOURIER.

CIO' NON E' PIU' VERO, IN GENERALE, PER I SEGNALI MODULANTI A POTENZA FINITA. TUTTAVIA, FACENDO USO DELL'ANALISI ARMONICA GENERALIZZATA VISTA NEI CAPITOLI IV E V, E' POSSIBILE RITROVARE RISULTATI ANALOGHI A QUELLI OTTENUTI IN PRECEDENZA, COME LA NATURA PASSA-BANDA DEI SEGNALI MODULATI.

PER RAGIONI DI BREVITA', CI LIMITIAMO A GIUSTIFICARE QUESTA AFFERMAZIONE CON RIFERIMENTO ALLA MODULAZIONE A PRODOTTO.

SIA DUNQUE

$$(9.10.1) \quad s(t) = x(t) \cos \omega_0 t$$

UNA OSCILLAZIONE MODULATA A PRODOTTO, CON SEGNALE MODULANTE  $x(t)$  A POTENZA FINITA, APPARTENENTE AD UN PROCESSO ERGODICO A VALOR MEDIO NULLO.

INDICHIAMO COME AL SOLITO CON  $C(\tau)$  LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DI  $x(t)$  E CON

$$(9.10.2) \quad G(\omega) = \frac{\Im[C(\tau)]}{\pi}$$

IL SUO SPETTRO DI POTENZA, APPREZZABILE FINO ALLA PULSAZIONE  $\omega_m$  [V. FIGURA 9.10.1, IN CUI E' RIPORTATO L'ANDAMENTO DELLA FUNZIONE  $G(\omega)$  ANCHE PER  $\omega < 0$ , ESSENDO - COME NOTO -  $G(\omega)$  DEFINITA PER OGNI  $\omega$  MEDIANTE LA (9.10.2)].

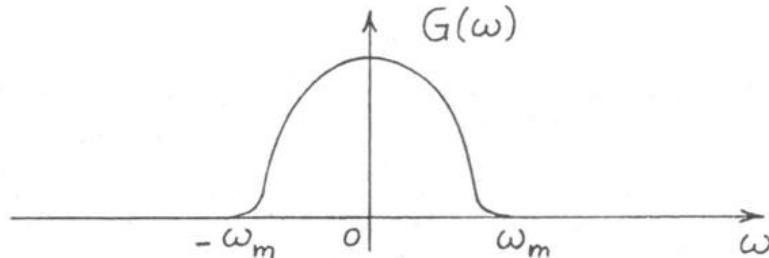


Fig. 9.10.1

L'OSCILLAZIONE PORTANTE HA PULSAZIONE  $\omega_0 \gg \omega_m$ .

CALCOLIAMO ORA LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE  $C_s(\tau)$  E LO SPETTRO DI POTENZA  $G_s(\omega)$  DELL'OSCILLAZIONE  $s(t)$ .

RISULTA:

$$\begin{aligned} (9.10.3) \quad C_s(\tau) &= \langle s(t)s(t+\tau) \rangle = \\ &= \langle x(t)x(t+\tau) \cos \omega_0 t \cos \omega_0(t+\tau) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \cos \omega_0 \tau + \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle x(t)x(t+\tau) \cos \omega_0(2t+\tau) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} C(\tau) \cos \omega_0 \tau = \\ &\approx \frac{1}{4} C(\tau) e^{j\omega_0 \tau} + \frac{1}{4} C(\tau) e^{-j\omega_0 \tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9.10.4) \quad G_s(\omega) &= \frac{\Im[C_s(\tau)]}{\pi} = \\ &= \frac{1}{4} G(\omega - \omega_0) + \frac{1}{4} G(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

CON RIFERIMENTO ALL'ANDAMENTO DI  $G(\omega)$  RIPORTATO IN FIGURA 9.10.1, RAPPRESENTIAMO IN FIGURA 9.10.2 QUELLO DI  $G_s(\omega)$ ; RICORDIAMO PERO' CHE, IN BASE ALLA PROPRIETA' (4.4.5) DELLA DENSITA' DI POTENZA, DELL'ANDAMENTO DI FIGURA 9.10.2 BASTA CONSIDERARE SOLO LA PARTE RIPORTATA SUL SEMIASSE NON NEGATIVO DELLE PULSAZIONI, ANALOGAMENTE AL CASO DI FIGURA 9.10.1, RELATIVO AL SEGNALE MODULANTE PASSA-BASSO.

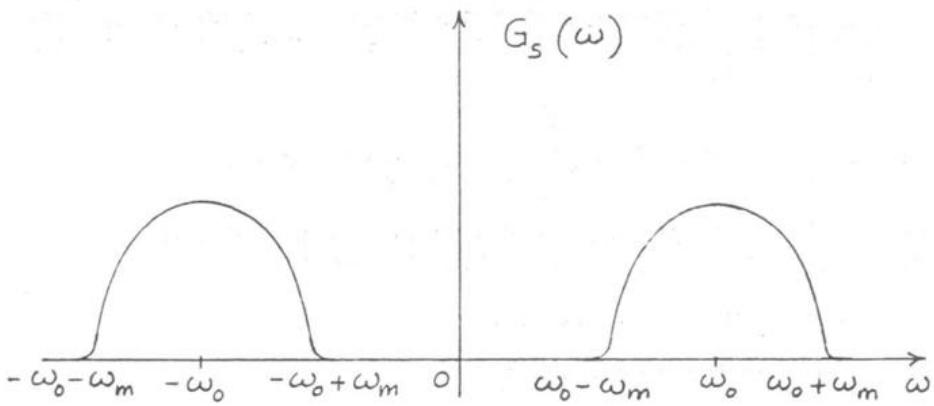


Fig. 9.10.2

ABBIAMO DUNQUE VERIFICATO CHE UNA OSCILLAZIONE MODULATA A PRODOTTO HA SPETTRO DI POTENZA CENTRATO SULLA PULSAZIONE  $\omega_0$  DELLA PORTANTE, COSTITUITO DA DUE BANDE LATERALI OTTENUTE DALLO SPETTRO DI POTENZA DEL SEGNALE MODULANTE IN MODO DEL TUTTO ANALOGO A QUANTO PRECEDENTEMENTE DESCRITTO CON RIFERIMENTO ALLO SPETTRO DI AMPIEZZA. IL SEGNALE  $s(t)$  E' DUNQUE UN SEGNALE PASSA-BANDA, CON LARGHEZZA DI BANDA IN FREQUENZE EGUALE AL DOPPIO DELLA FREQUENZA MASSIMA DEL SEGNALE MODULANTE.

## 9.11 SISTEMI DI MODULAZIONE PER SEGNALI NUMERICI.

CONSIDERIAMO ORA IN PARTICOLARE I SISTEMI DI MODULAZIONE PRECEDENTEMENTE INTRODOTTI NEL CASO IN CUI IL SEGNALE MODULANTE SIA DI TIPO NUMERICO, OSSIA IL SEGNALE PAM

$$(9.11.1) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT),$$

OVE  $g(t)$  E' UN IMPULSO RETTANGOLARE NRZ E I SIMBOLI  $a_n$  SONO SUSCETTIBILI, AD ESEMPIO, DEI VALORI

- I) 0, 1 (CODICE UNIPOLARE);
- II)  $\pm 1$  (CODICE BIPOLARE);
- III)  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm (L-1)$  [CODICE MULTILIVELLO;  
 $L=2^\ell$  E' IL NUMERO DEI SIMBOLI DIVERSI (LIVELLI)  
 CIASCUNO DEI QUALI RAPPRESENTA  $\ell$  BITS].

L'OSCILLAZIONE MODULATA A PRODOTTO

$$(9.11.1) \quad s(t) = x(t) \cos \omega_0 t$$

NEL CASO I E' CONTRADDISTINTA DALLA SIGLA OOK (ON-OFF KEYING - MODULAZIONE TUTTO-NIENTE) GIA' VISTA NEL PARAGRAFO 8.10 CHE TRATTA DI COLLEGAMENTI NUMERICI SU FIBRA. NEL CASO II SI PARLA DI MODULAZIONE 2-ASK (AMPLITUDE-SHIFT KEYING A DUE LIVELLI) E, PIU' IN GENERALE, NEL CASO III DI MODULAZIONE L-ASK (ASK A L LIVELLI).

L'OSCILLAZIONE MODULATA IN FASE

$$(9.11.2) \quad s(t) = V_o \cos [\omega_0 t + k x(t)]$$

NEL CASO III E' CONTRADDISTINTA DALLA SIGLA L-PSK (PHASE-SHIFT KEYING A L LIVELLI), MENTRE QUELLA MODULATA IN FREQUENZA

$$(9.11.3) \quad s(t) = V_o \cos [\omega_0 t + K \int x(t) dt],$$

SEMPRE NEL CASO III, DALLA SIGLA L-CPFSK (CONTINUOUS-PHASE FREQUENCY-SHIFT KEYING A L LIVELLI).

CONSIDERIAMO INFINE L'OSCILLAZIONE QAM

$$(9.11.4) \quad s(t) = x_1(t) \cos \omega_0 t - x_2(t) \sin \omega_0 t,$$

OVE

$$(9.11.5) \quad x_1(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{pn} g(t-nT),$$

$$(9.11.6) \quad x_2(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{qn} g(t-nT),$$

ESSENDONE I SIMBOLI  $a_{pn}$  E  $a_{qn}$  SUSCETTIBILI DEI VALORI  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm (L-1)$ .

LA (9.11.4) PUO' ESSERE SCRITTA NELLA FORMA:

$$(9.11.7) \quad s(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} a_n g(t-nT) e^{j\omega_0 t} \right\},$$

CON

$$(9.11.8) \quad a_n = a_{pn} + j a_{qn}.$$

POICHÉ IL NUMERO DELLE COPPIE DISTINTE DI SIMBOLI  $(a_{pn}, a_{qn})$  E' PARI A

$$(9.11.9) \quad M = L^2,$$

CON RIFERIMENTO ALLA (9.11.4) [O, IL CHE E' LO STESSO, ALLA (9.11.7)] SI PARLA DI MODULAZIONE M-QAM (O M-QASK).

ESERCIZIO

CALCOLARE LO SPETTRO DI POTENZA  $G_s(f)$  RIFERITO  
ALLE FREQUENZE DELL'OSCILLAZIONE 2-ASK

$$(9.11.10) \quad s(t) = x(t) \cos \omega_0 t ,$$

ESSENDO  $x(t)$  UN SEGNALE PAM CON CODICE BIPOLARE, SIMBOLI EQUIPROBABILI E INDIPENDENTI, IMPULSI RETTANGOLARI NRZ DI AMPIEZZA UNITARIA.

RICORDANDO LA (9.10.4) ED I RISULTATI DELL'ESERCIZIO N. 8 DEL PARAGRAFO 5.10, ABBIAMO, PER  $f \geq 0$ :

$$(9.11.11) \quad G_f(f) = \frac{1}{2 B_s} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f - f_0}{B_s}\right), \quad B_s = \frac{1}{T}.$$

ESSENDO  $f_0$  LA FREQUENZA DELLA PORTANTE.

L'ANDAMENTO DELLA (9.11.11) E' RIPORTATO IN FIGURA 9.11.1.

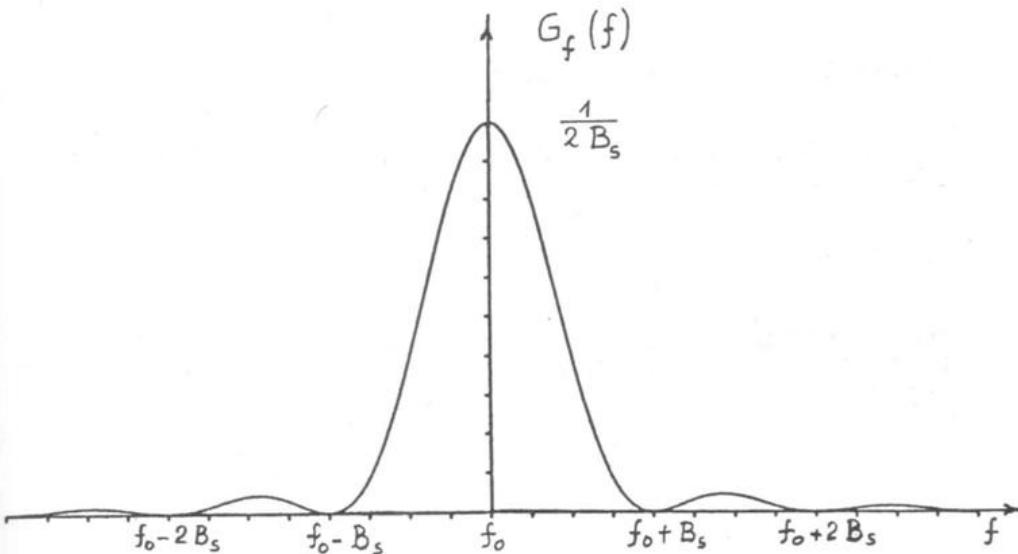


Fig. 9.11.1

CONSIDERIAMO INFINE L'ANDAMENTO IN DB DELLA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA  $G_f(f)$  NORMALIZZATA RISPETTO A  $G_f(f_o)$ :

$$(9.11.12) \quad \left[ \frac{G_f(f)}{G_f(f_o)} \right]_{dB} = 10 \log_{10} \frac{G_f(f)}{G_f(f_o)} = \\ = 20 \log_{10} \operatorname{sinc} \frac{f - f_o}{B_s}.$$

IL GRAFICO DELLA (9.11.12) E' RAPPRESENTATO IN FIGURA 9.11.2.

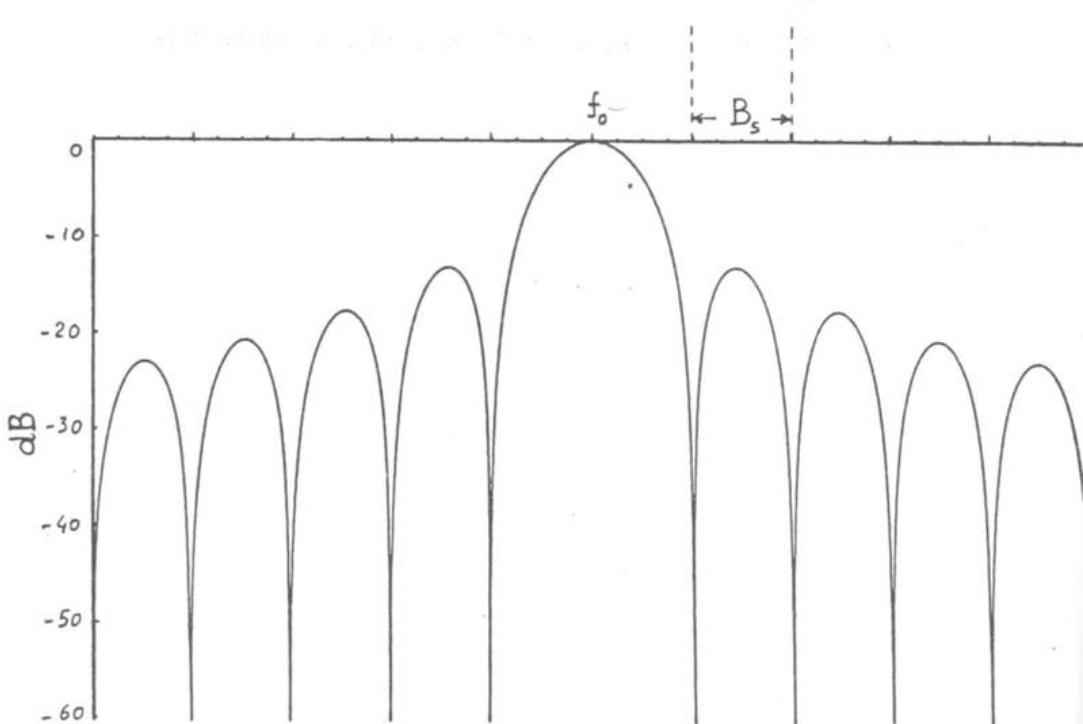


Fig. 9.11.2

DA ULTIMO, SI VERIFICHI CHE IL SEGNALE MODULATO CONSIDERATO IN QUESTO ESERCIZIO E' ANCHE UNA OSCILLAZIONE 2-PSK.

CAPITOLO X

TRASMISSIONE DI SEGNALI PASSA-BANDA

ALCUNE APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLA MODULAZIONE

### 10.1 SISTEMI DI TRASMISSIONE DI TIPO PASSA-BANDA. PRINCIPALI BANDE DI FREQUENZA.

UN SISTEMA DI TRASMISSIONE SU CANALE PASSA-BANDA COMPRENDE ESSENZIALMENTE UN TRASMETTITORE, UN MEZZO DI PROPAGAZIONE ED UN RICEVITORE (FIGURA 10.1.1).



Fig. 10.1.1

IL TRASMETTITORE PUO' ESSERE COSTITUITO SECONDO UNO DEI DUE SEGUENTI SCHEMI:

\* TRASMETTITORE A MODULAZIONE DIRETTA: ESSO COMPRENDE IN GENERALE UN AMPLIFICATORE IN BANDA BASE  $A_x$ , UN MODULATORE CHE DA' ORIGINE AD UNA OSCILLAZIONE MODULATA IN AMPIEZZA O/E IN ANGOLO ALLA FREQUENZA DI TRASMISSIONE ED UN AMPLIFICATORE DI POTENZA  $A_s$  (FIGURA 10.1.2).

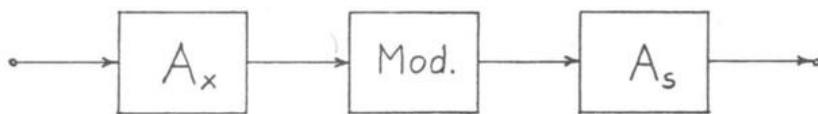
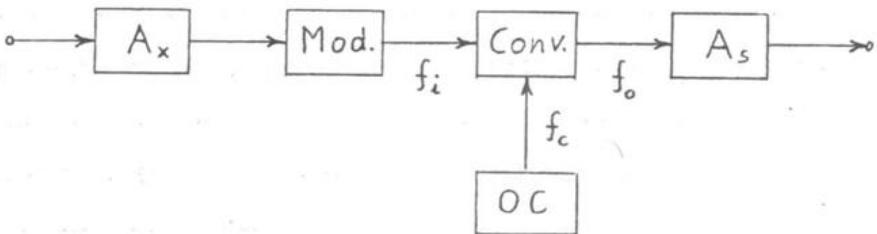


Fig. 10.1.2

\* TRASMETTITORE SUPERETERODINA: ESSO COMPRENDE IN GENERALE UN AMPLIFICATORE IN BANDA BASE  $A_x$ , UN MODULATORE CHE DA' ORIGINE AD UNA OSCILLAZIONE A FREQUENZA INTERMEDIA  $f_i$  MODULATA IN AMPIEZZA O/E IN ANGOLO, UN CONVERTITORE DI FREQUENZA CHE CONVERTE L'OSCILLAZIONE MODULATA NELLA BANDA DI TRASMISSIONE ED UN AMPLIFICATORE DI POTENZA  $A_s$  (FIGURA 10.1.3).



$f_i$  = frequenza intermedia;

$f_c$  = frequenza dell'oscillatore di conversione (OC);

$f_o$  = frequenza di trasmissione.

Fig. 10.1.3

IL MEZZO TRASMISSIVO PUO' ESSERE UN PORTANTE FISICO (COME UNA FIBRA OTTICA, UN CAVO COASSIALE) OPPURE LO SPAZIO LIBERO. IN QUESTO SECONDO CASO LO SCHEMA DI FIGURA 10.1.1 DIVENTA QUELLO DI FIGURA 10.1.4 (RADIOCOLLEGAMENTO), CHE EVIDENZIA LA PRESENZA DI UN'ANTENNA TRASMITTENTE E DI UN'ANTENNA RICEVENTE.

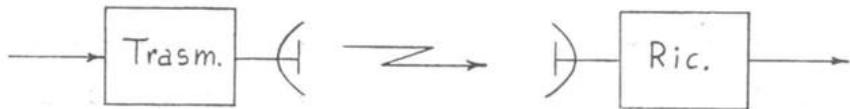


Fig. 10.1.4

NELLA TABELLA DELLA PAGINA SEGUENTE SONO INDICATE LE PRINCIPALI BANDE DI FREQUENZA NORMALIZZATE IN SEDE INTERNAZIONALE.

## PRINCIPALI BANDE DI FREQUENZA

## NORMALIZZATE IN SEDE INTERNAZIONALE

BANDA	INTERVALLO DI FREQUENZE	SIMBOLO	LUNGHEZZA D'ONDA = c/f
5	30 ÷ 300 KHZ	<u>LF</u> (LOW FREQUENCIES)	10 ÷ 1 KM (ONDE CHILOMETRICHE O LUNGHE)
6	0.3 ÷ 3 MHZ	<u>MF</u> (MEDIUM FREQUENCIES)	1000 ÷ 100 M (ONDE ETTOMETRICHE O MEDIE)
7	3 ÷ 30 MHZ	<u>HF</u> (HIGH FREQUENCIES)	100 ÷ 10 M (ONDE DECAMETRICHE O CORTE)
8	30 ÷ 300 MHZ	<u>VHF</u> (VERY HIGH FREQUENCIES)	10 ÷ 1 M (ONDE METRICHE O ULTRACORTE)
9	0.3 ÷ 3 GHZ	<u>UHF</u> (ULTRA HIGH FREQUENCIES)	100 ÷ 10 CM (ONDE DECIMETRICHE)
10	3 ÷ 30 GHZ	<u>SHF</u> (SUPER HIGH FREQUENCIES)	10 ÷ 1 CM (ONDE CENTIMETRICHE)
11	30 ÷ 300 GHZ	<u>EHF</u> (EXTREMELY HIGH FREQUENCIES)	10 ÷ 1 MM (ONDE MILLIMETRICHE)
12	0.3 ÷ 3 THZ		1 ÷ 0.1 MM (ONDE DECIMILLIMETRICHE)
13	3 ÷ 30 THZ		0.1 ÷ 0.01 MM (ONDE CENTIMILLIMETRICHE)
14	30 ÷ 300 THZ		10 ÷ 1 μm (ONDE MICROMETRICHE)
15	300 ÷ 3000 THZ		1 ÷ 0.1 μm (ONDE DECIMICROMETRICHE)

NOTA: LA BANDA DI NUMERO N SI ESTENDE DA  $0.3 \times 10^N$  A  $3 \times 10^N$  Hz.

SEGNALIAMO CHE LA DENOMINAZIONE MICROONDE E' RESERVATA ALLE Onde DI FREQUENZA SUPERIORE AD 1 GHZ FINO ALLE Onde MILLIMETRICHE ESCLUSE, IN QUANTO QUESTE ULTIME CONSERVANO LA PROPRIA DENOMINAZIONE.

IN RICEZIONE LE OPERAZIONI PRINCIPALI SONO QUELLE DI AMPLIFICAZIONE E DI DEMODULAZIONE. ABBIAMO ANCORA I DUE SEGUENTI SCHEMI:

\* RICEVITORI A DEMODULAZIONE DIRETTA: ESSI COMPRENDONO IN GENERALE UN AMPLIFICATORE  $A_r$  ALLA FREQUENZA DI TRASMISSIONE  $f_o$  SEGUITO DA UN DEMODULATORE, LA CUI USCITA VIENE AMPLIFICATA MEDIANTE UN AMPLIFICATORE IN BANDA BASE  $A_b$  (FIGURA 10.1.5).

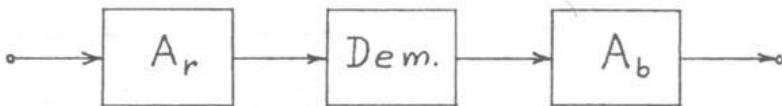
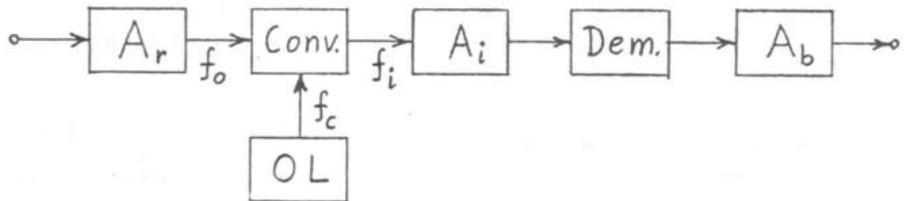


Fig. 10.1.5

\* RICEVITORE SUPERETERODINA: ESSO COMPRENDE IN GENERALE UN AMPLIFICATORE  $A_r$ , UN CONVERTITORE CHE, PILOTATO DA UN OSCILLATORE LOCALE, CONVERTE IL SEGNALE RICEVUTO NELLA BANDA A FREQUENZA INTERMEDIA, UN AMPLIFICATORE A FREQUENZA INTERMEDIA  $A_i$ , UN DEMODULATORE ED UN AMPLIFICATORE IN BANDA BASE  $A_b$  (FIGURA 10.1.6).



$f_o$  = frequenza di ricezione;

$f_i$  = frequenza intermedia;

$f_c$  = frequenza dell'oscillatore locale (OL).

$$(f_i = |f_o - f_c|)$$

Fig. 10.1.6

DI SOLITO LA DIZIONE CANALE DI TRASMISSIONE (OVIAMENTE DI TIPO PASSA-BANDA) VIENE USATA CON RIFERIMENTO ALLA PARTE DEL COLLEGAMENTO COMPRESA FRA L'USCITA DEL MODULATORE E L'INGRESSO DEL DEMODULATORE (SI VEDA A QUESTO PROPOSITO LA FIGURA 10.1.7 CHE SI RIFERISCE AGLI SCHEMI A MO/DEMODULAZIONE DIRETTE; GLI SCHEMI SUPERETERODINA NON INTRODUCONO VARIAZIONI SOSTANZIALI IN QUANTO PREVEDONO UNICAMENTE L'INSERIMENTO DI CONVERTITORI DI FREQUENZA).

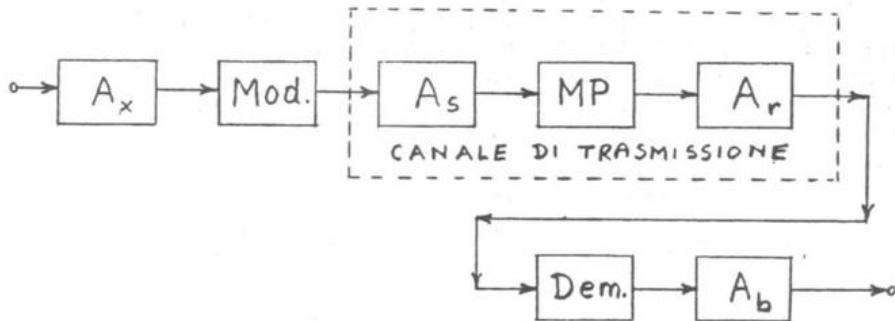
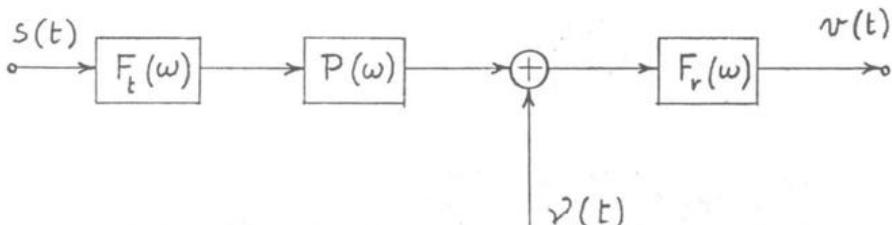


Fig. 10.1.7

CON RIFERIMENTO AL CASO IN CUI I BLOCCHI CHE COSTITUISCONO IL CANALE DI TRASMISSIONE SONO LINEARI, QUEST'ULTIMO PUO' ESSERE SCHEMATIZZATO COME IN FIGURA 10.1.8, CHE METTE IN EVIDENZA:

\* LE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO  $F_t(\omega)$ ,  $P(\omega)$ ,  $F_r(\omega)$  RISPETTIVAMENTE DELL'AMPLIFICATORE DI TRASMISSIONE, DEL MEZZO DI PROPAGAZIONE E DELL'AMPLIFICATORE DI RICEZIONE;

\* IL RUMORE EQUIVALENTE  $\eta(t)$  RIFERITO AI MORSETTI DI INGRESSO DEL RICEVITORE.



$$n(t) = s_r(t) + n(t)$$

Fig. 10.1.8

COME MOSTRA LA FIGURA 10.1.8, L'USCITA  $v(t)$  DEL CANALE DI TRASMISSIONE E' DATA DALLA SOMMA DELLA RISPOSTA  $s_r(t)$  DEL CANALE AL SEGNALE MODULATO  $s(t)$  E DEL RUMORE  $n(t)$ , RISPOSTA A  $\gamma(t)$  DELL'AMPLIFICATORE DI RICEZIONE.

PER QUANTO RIGUARDA LA CARATTERIZZAZIONE DEL RUMORE  $n(t)$  SI RINVIA A QUANTO GIA' DETTO NEL CAPITOLO VIII.

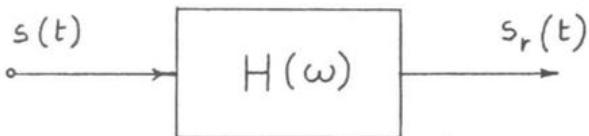
PER QUANTO CONCERNE LA DETERMINAZIONE DEL SEGNALE UTILE  $s_r(t)$  DEDICHIAMO AD ESSA IL PARAGRAFO CHE SEGUO.

10.2 RISPOSTA DI QUADRIPOLI LINEARI A OSCILLAZIONI MODULATE. EQUIVALENTE PASSA-BASSO.

CONSIDERIAMO L'OSCILLAZIONE MODULATA (O SEGNALE PASSA-BANDA)

$$(10.2.1) \quad s(t) = \operatorname{Re} \left\{ i(t) e^{j\omega_0 t} \right\} .$$

PROPONIAMOCI ORA DI ESPRIMERE LA RISPOSTA  $s_r(t)$  A  $s(t)$  DI UN QUADRIPOLO LINEARE TEMPO-INVARIANTE (FIGURA 10.2.1), DI CUI SIA NOTA LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H(\omega)$ . AFFINCHE' TALE RISPOSTA NON SIA IDENTICAMENTE NULLA, LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEVE RISULTARE DIVERSA DA 0 ALMENO SU PARTE DELLA BANDA  $B_\omega$  DI  $s(t)$ . IN TAL CASO  $s_r(t)$  E' ANCORA UN SEGNALE PASSA-BANDA DATO CHE IL QUADRIPOLO NON PUO' DARE ORIGINE A NUOVE COMPLEMENTI SPETTRALI RISPETTO A QUELLE DI INGRESSO.



$$H(\omega) = T(\omega) e^{-j\beta(\omega)}$$

Fig. 10.2.1

SCRIVIAMO ALLORA:

$$(10.2.2) \quad s_r(t) = \operatorname{Re} \left\{ i_r(t) e^{j\omega_0 t} \right\} .$$

IL PROBLEMA DI DETERMINARE  $s_r(t)$  EQUIVALE QUINDI A QUELLO DI TROVARE LA RELAZIONE FRA L'INVILUPPO COMPLESSO  $i_r(t)$  DELL'USCITA E QUELLO  $i(t)$  DELL'INGRESSO, UNA VOLTA NOTA LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H(\omega)$ .

A TAL FINE APPLICHIAMO LA (9.9.10) ALLE GRANDEZZE DI USCITA:

$$(10.2.3) \quad I_r(\omega) = \begin{cases} 2 S_r(\omega + \omega_0), & \text{per } |\omega| \leq \frac{B_\omega}{2} \\ 0 & , \text{altrove} . \end{cases}$$

~~X~~  
D'ALTRA PARTE

$$(10.2.4) \quad S_r(\omega) = H(\omega) S(\omega)$$

E QUINDI LA (10.2.3) DIVIENE:

$$(10.2.5) \quad I_r(\omega) = \begin{cases} 2H(\omega + \omega_0)S(\omega + \omega_0), & \text{per } |\omega| \leq \frac{B\omega}{2} \\ 0 & , \text{altrove.} \end{cases}$$

DAL CONFRONTO FRA LA (10.2.5) E (9.9.10) DISCENDE:

$$(10.2.6) \quad I_r(\omega) = H(\omega + \omega_0) I(\omega).$$

INTRODUCENDO LA FUNZIONE

$$(10.2.7) \quad H_o(\omega) = \begin{cases} H(\omega + \omega_0), & \omega + \omega_0 \geq 0, \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

E RICORDANDO LA NATURA PASSA-BANDA DEI SEGNALI IN GIOCO, LA (10.2.6) SI SCRIVE SEMPLICEMENTE:

$$(10.2.8) \quad I_r(\omega) = H_o(\omega) I(\omega).$$

LA FUNZIONE  $H_o(\omega)$  DEFINITA TRAMITE LA (10.2.7) VIENE CHIAMATA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO EQUIVALENTE PASSA-BASSO DEL QUADRIPOLO CONSIDERATO. ESSA DESCRIVE LA TRASFORMAZIONE LINEARE CHE, AGENDO SULL'INVILUPPO COMPLESSO  $i(t)$  DEL SEGNALE D'INGRESSO  $s(t)$ , DA' ORIGINE ALL'ANALOGO INVILUPPO  $i_r(t)$  DEL SEGNALE D'USCITA  $s_r(t)$ , CIOE' ALLE LEGGI DI MODULAZIONE D'AMPIEZZA E D'ANGOLO DI QUEST'ULTIMO. NOTO  $i_r(t)$ , DALLA (10.2.2) DISCENDE POI  $s_r(t)$ .

TUTTO CIO' E' RAPPRESENTATO SIMBOLICAMENTE IN FIGURA 10.2.2, LA PARTE INFERIORE DELLA QUALE VA INTESA SOLTANTO COME UN MODELLO MATEMATICO E NON COME UN MODELLO FISICO.

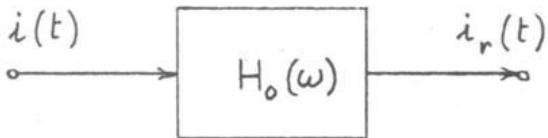
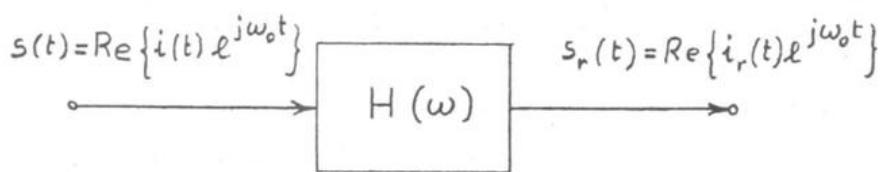


Fig. 10.2.2

E' INFATTI IMPORTANTE SOTTOLINEARE CHE L'OPERATORE LINEARE  $H_o(\omega)$  NON RAPPRESENTA SEMPRE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UNA RETE FISICAMENTE REALIZZABILE; BASTA A TAL FINE OSSERVARE CHE, IN GENERALE, RISULTA

$$(10.2.10) \quad H_o(-\omega) \neq H_o^*(\omega),$$

COME APPARE CHIARO, AD ESEMPIO, DALL'ESAME DELLA FIGURA 10.2.3 CHE SI RIFERISCE AD UNA RETE PASSA-BANDA.

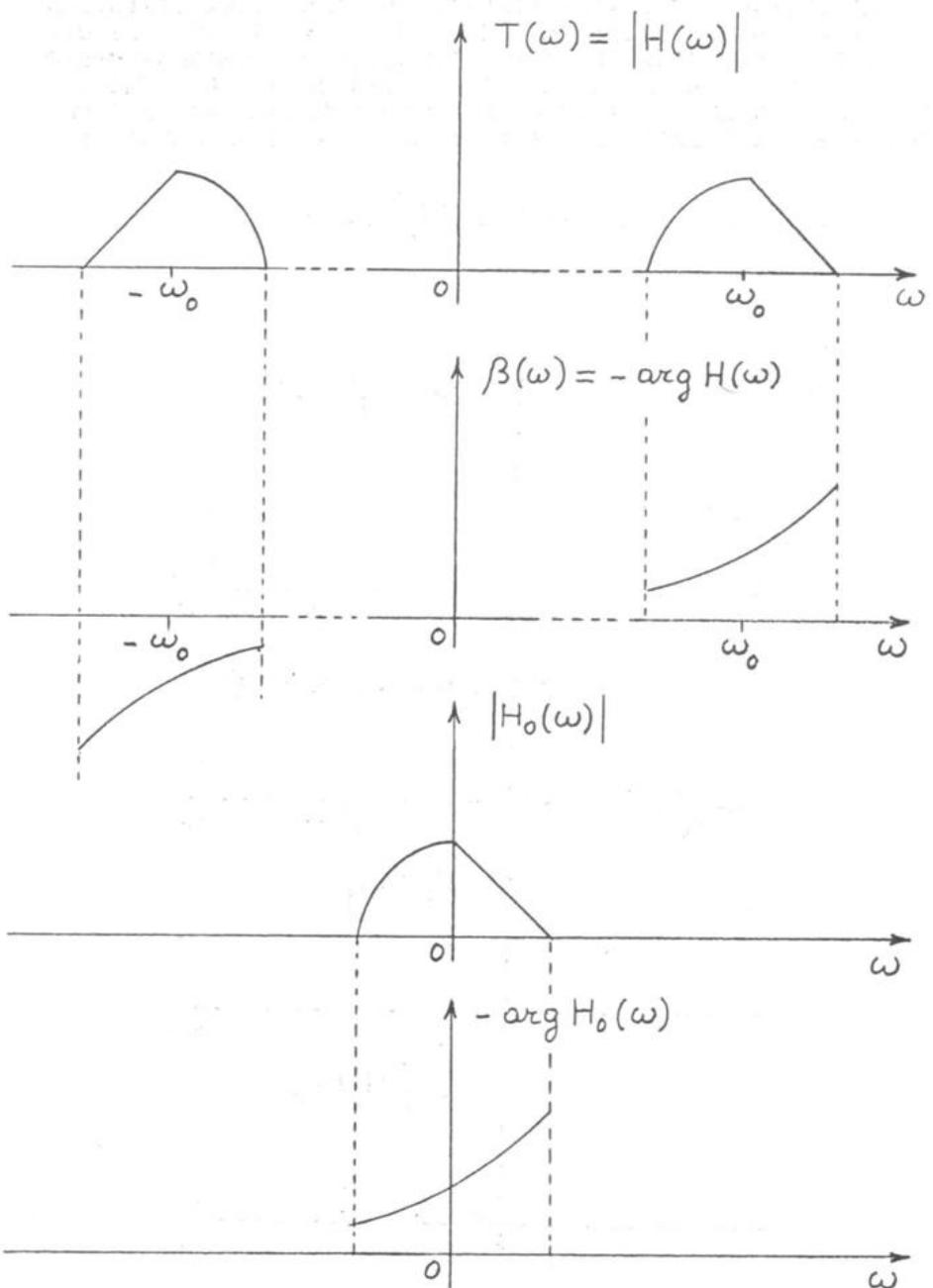


Fig. 10.2.3

QUANDO LA RETE PASSA-BANDA PRESENTA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA SIMMETRICA RISPETTO A  $\omega_0$  E CARATTERISTICA DI FASE ANTISIMMETRICA CON  $\beta(\omega_0) = 0$  (V. FIGURA 10.2.4), LA CORRISPONDENTE FUNZIONE DI TRASFERIMENTO EQUIVALENTE PASSA-BASSO PUO' RAPPRESENTARE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UN QUADRIPOLO PASSA-BASSO FISICAMENTE REALIZZABILE. PER ESSA VALE INFATTI LA RELAZIONE:

$$(10.2.11) \quad H_0(-\omega) = H_0^*(\omega) .$$

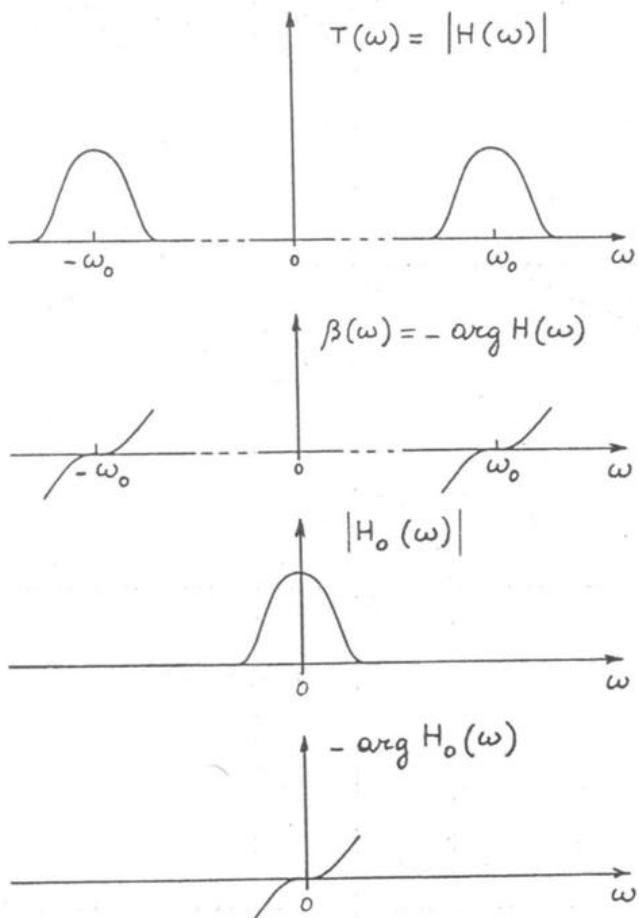


Fig. 10.2.4

### 10.3 CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE DI GRUPPO DI UNA RETE LINEARE PASSA-BANDA.

IL MODELLO MATEMATICO PRESENTATO NEL PRECEDENTE PARAGRAFO PER LO STUDIO DELLA TRASMISSIONE DI SEGNALI MODULATI ATTRAVERSO RETI LINEARI E' DELLA MASSIMA UTILITA' SIA NEL CASO DI SEGNALI MODULANTI ANALOGICI, CHE DEBBONO ESSERE CONSERVATI INDISTORTI, SIA IN QUELLO DI SEGNALI MODULANTI DI TIPO NUMERICO. PER QUESTI ULTIMI, ESSENDO L'OBIETTIVO FINALE IL RICONOSCIMENTO DEI SIMBOLI TRASMESSI, NON SI PRETENDE DI MANTENERNE INDISTORTA LA FORMA D'ONDA, REALIZZANDO COSÌ UN RISPARMIO DI BANDA, MA SI CONSENTE UNA DISTORSIONE CONTROLLATA, AD ESEMPIO TALE DA NON DAR LUOGO AD INTERFERENZA INTERSIMBOLO.

IN OGNI CASO E' IMPORTANTE INDIVIDUARE PRELIMINARMENTE LE CONDIZIONI, NECESSARIE E SUFFICIENTI, PERCHE' UNA RETE LINEARE TRASMETTA SEGNALI MODULATI CONSERVANDO INALTERATE LE LEGGI DI MODULAZIONE D'AMPIEZZA E/O D'ANGOLO, E A TALE ARGOMENTO E' DEDICATO IL PRESENTE PARAGRAFO.

TALE CIRCOSTANZA SI VERIFICA CERTAMENTE QUANDO QUESTE OSCILLAZIONI TRANSITANO ATTRAVERSO UNA RETE LINEARE (V. FIGURA 10.3.1) CHE SODDISFA SULLA LORO BANDA  $B_\omega$  ALLE CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE (3.2.6) CHE QUI RISCRIVIAMO NELLA FORMA:

$$(10.3.1) \quad \begin{cases} T(\omega) = T(\omega_0) \\ \beta(\omega) = \omega t_0 \end{cases} \quad \text{per } \omega \in B_\omega .$$

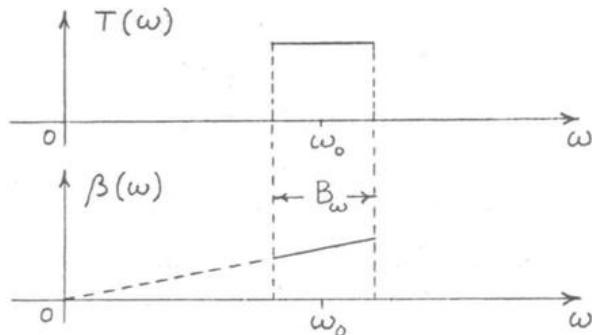


Fig. 10.3.1

IN GENERALE, MENTRE LA CONDIZIONE RELATIVA ALLA COSTANZA DELLA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA NELLA BANDA DI TRASMISSIONE PUO' ESSERE APPROXIMATA SENZA PARTICOLARI PROBLEMI, NON ALTRETTANTO PUO' DIRSI CIRCA LA PROPORZIONALITA' FRA LA CARATTERISTICA DI FASE E LA PULSAZIONE. SVILUPPANDO INFATTI QUESTA CARATTERISTICA IN SERIE DI POTENZE NELL'INTORNO DI  $\omega_0$ , POSSIAMO SCRIVERE:

$$(10.3.2) \quad \beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

ESSENDO STRETTA, IN TERMINI RELATIVI, LA BANDA  $B_\omega$ , CHE INTERESSA CONSIDERARE, LA RETE PASSA-BANDA PUO' ESSERE DIMENSIONATA SENZA ECCESSIVE DIFFICOLTÀ IN MODO CHE LA (10.3.2) POSSA ESSERE APPROXIMATA DALLA RELAZIONE:

$$(10.3.3) \quad \beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \tau(\omega - \omega_0), \text{ per } \omega \in B_\omega,$$

OVE

$$(10.3.4) \quad \tau = \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0}.$$

LA (10.3.3) STABILISCE UN LEGAME DI LINEARITA' FRA LA CARATTERISTICA DI FASE E LA PULSAZIONE, CHE IN GENERALE NON E' DI PROPORZIONALITA'. INFATTI, CON RIFERIMENTO ALLA FIGURA 10.3.2, LA PROPORZIONALITA' FRA  $\beta$  E  $\omega$  SI HA SOLO QUANDO LA RETTA TANGENTE IN  $\omega_0$  ALLA CURVA  $\beta = \beta(\omega)$  PASSA PER L'ORIGINE.

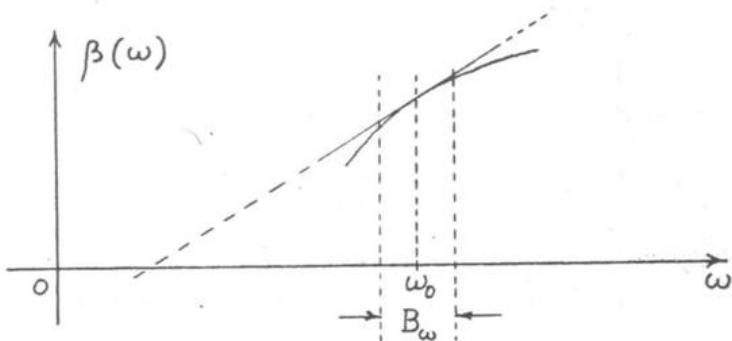


Fig. 10.3.2

DUNQUE UNA RETE PASSA-BANDA CHE SODDISFA ALLA PRIMA DELLE (10.3.1) ED ALLA (10.3.3), OSSIA A

$$(10.3.5) \quad \begin{cases} T(\omega) = T(\omega_0) \\ \beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \tau(\omega - \omega_0) \end{cases} \quad \text{per } \omega \in B_\omega,$$

IN GENERALE DISTORCE. MOSTRIAMO ORA IN COSA CONSISTE TALE DISTORSIONE.

RICORDIAMO A TAL FINE L'ESPRESSIONE DI UNA GENERICA OSCILLAZIONE SINUSOIDALE MODULATA:

$$(10.3.6) \quad s(t) = V(t) \cos[\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0] = \\ = \operatorname{Re} \left\{ i(t) e^{j\omega_0 t} \right\},$$

CON

$$(10.3.7) \quad i(t) = V(t) e^{j[\alpha(t) - \varphi_0]}.$$

D'ALTRA PARTE, QUANDO VALGONO LE (10.3.5), LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO EQUIVALENTE PASSA-BASSO E' ESPRESSA DA:

$$(10.3.8) \quad H_0(\omega) = T(\omega_0) e^{-j\beta(\omega_0)} e^{-j\omega\tau}, \quad \text{per } |\omega| \leq \frac{B_\omega}{2}.$$

PERTANTO L'INVILUPPO COMPLESSO  $i_r(t)$  DELL'USCITA  $s_r(t)$  E':

$$(10.3.9) \quad i_r(t) = T(\omega_0) e^{-j\beta(\omega_0)} i(t-\tau),$$

DA CUI:

$$(10.3.10) \quad s_r(t) = T(\omega_0) V(t-\tau) \cos[\omega_0 t + \alpha(t-\tau) - \varphi_0 - \beta(\omega_0)] = \\ = T(\omega_0) V(t-\tau) \cos[\omega_0(t-\tau_f) + \alpha(t-\tau) - \varphi_0],$$

OVE:

$$(10.3.11) \quad \tau_f = \frac{\beta(\omega_0)}{\omega_0} .$$

IL CONFRONTO FRA LE (10.3.6) E (10.3.10) MOSTRA CHE LE LEGGI DI MODULAZIONE D'AMPIEZZA E D'ANGOLO DELL'OSCILLAZIONE D'USCITA RIPRODUCONO INDISTORTE LE CORRISPONDENTI LEGGI DELL'INGRESSO. IL RITARDO  $\tau$  INTRODOTTO SU TALI LEGGI VIENE DETTO RITARDO DI GRUPPO.

PER QUANTO CONCERNE LA PORTANTE, QUESTA NELLA TRASMISSIONE ATTRAVERSO IL QUADRIPOLO SUBISCE LO SFASAMENTO  $\beta(\omega_0)$  O, IN ALTRI TERMINI, UN RITARDO IN TEMPO PARI A  $\tau_f$ , DETTO RITARDO DI FASE.

COME APPARE CHIARO DALLA FIGURA 10.3.3, I DUE RITARDI, DI GRUPPO E DI FASE, SONO IN GENERALE DIVERSI FRA LORO.

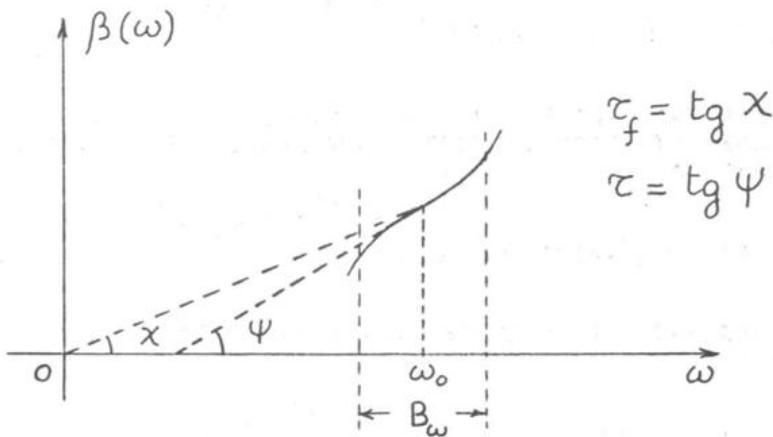


Fig. 10.3.3

SI HA DUNQUE UNO SCORRIMENTO TEMPORALE FRA PORTANTE E LEGGI DI MODULAZIONE, ED IN CIO' CONSISTE APPUNTO LA DISTORSIONE INTRODOTTA DALLA RETE.

DETTO SCORRIMENTO NON SUSSISTE QUANDO  $\tau_f = \tau$  (OS-  
SIA  $X = Y$  IN FIGURA 10.3.3); CIO' NON DEVE MERAVIGLIARE  
IN QUANTO IN TAL CASO SI HA PROPORZIONALITA' FRA  $\beta \propto \omega$   
E SONO VERIFICATE QUINDI LE CONDIZIONI DI NON DISTOR-  
SIONE (10.3.1).

IN OGNI CASO, QUANDO SONO SODDISFATTE LE (10.3.5), LE LEGGI DI MODULAZIONE DELL'USCITA RISULTANO INDISTORTE RISPETTO ALLE CORRISPONDENTI LEGGI DELL'INGRESSO E CIO' E' QUANTO INTERESSA NELLA TRASMISSIONE DI OSCILLAZIONI MODULATE DA SEGNALI ANALOGICI.

LE (10.3.5) RAPPRESENTANO DUNQUE CONDIZIONI SUFFICIENTI PERCHE' NON SI ABBIA DISTORSIONE NELLE LEGGI DI MODULAZIONE.

MOSTRIAMO ORA CHE ESSE SONO ANCHE NECESSARIE. A TAL FINE ASSUMIAMO

$$(10.3.12) \quad i_r(t) = \Gamma i(t - \tau) ,$$

CON  $\Gamma$  COSTANTE IN GENERALE COMPLESSA, OSSIA:

$$(10.3.13) \quad I_r(\omega) = \Gamma e^{-j\omega\tau} I(\omega) .$$

NE DISCENDE:

$$(10.3.14) \quad H_o(\omega) = \frac{I_r(\omega)}{I(\omega)} = \Gamma e^{-j\omega\tau}, \text{ per } |\omega| \leq \frac{B\omega}{2},$$

DA CUI:

$$(10.3.15) \quad H(\omega) = \Gamma e^{-j\tau(\omega - \omega_o)}, \text{ per } \omega \in B_\omega .$$

INFINE, OSSERVANDO CHE

$$(10.3.16) \quad \Gamma = H(\omega_o) = T(\omega_o) e^{-j\beta(\omega_o)},$$

RITROVIAMO LE (10.3.5).

IN CONCLUSIONE LE (10.3.5) ESPRIMONO LA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHE' UNA RETE PASSA-BANDA TRASMETTA UN SEGNALE MODULATO SENZA DISTORCERNE LE LEGGI DI MODULAZIONE.

ESSE VENGONO CHIAMATE CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE DI GRUPPO.

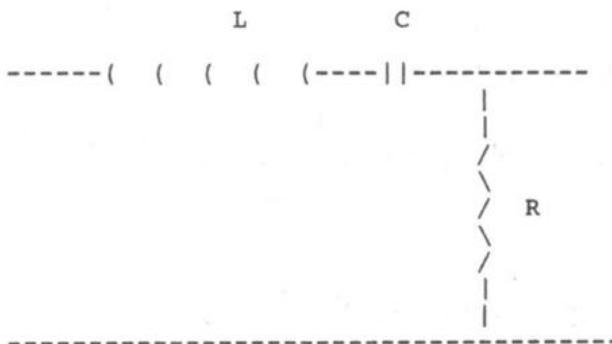
ESERCIZIO N. 1

CALCOLARE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELLA RETE  
DI FIGURA E FARE IL GRAFICO DELLE CARATTERISTICHE DI  
AMPIEZZA E DI FASE.

E' LECITO CONSIDERARE SODDISFATTE LE CONDIZIONI DI  
NON DISTORSIONE DI GRUPPO IN UNA BANDA  $B_{\omega}$  SUFFICIENTE-  
MENTE RISTRETTA NELL'INTORNO DELLA PULSAZIONE

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ?$$

IN CASO POSITIVO DARE LE ESPRESSIONI DI  $T_o = T(\omega_o)$   
E DEI RITARDI DI FASE E DI GRUPPO.

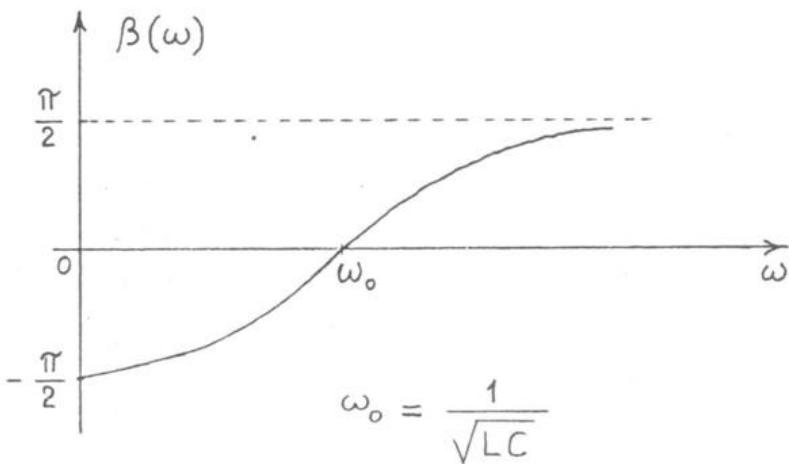
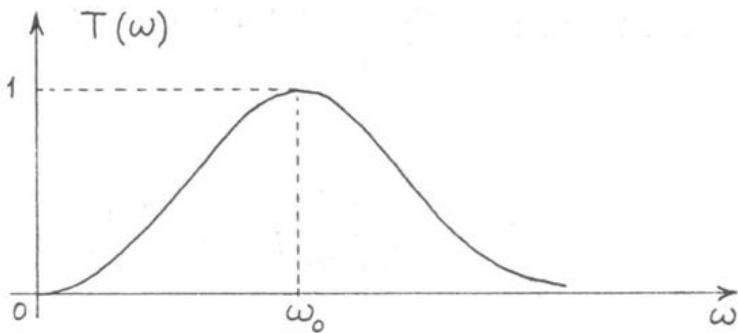


RISULTA:

$$H(\omega) = \frac{j\omega CR}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega CR},$$

$$T(\omega) = \frac{\omega CR}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}},$$

$$\beta(\omega) = \arctg \frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC} - \frac{\pi}{2}.$$



IN UNA BANDA  $B_\omega$  SUFFICIENTEMENTE RISTRETTA NELL'INTORNO DELLA PULSAZIONE

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

POSSIAMO QUINDI SCRIVERE:

$$T(\omega) \simeq 1$$

$$\beta(\omega) \simeq \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

E RISULTANO PERTANTO SODDISFATTE LE CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE DI GRUPPO CON

$$\tau_f = 0$$

$$\tau = \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} = \frac{2L}{R}$$

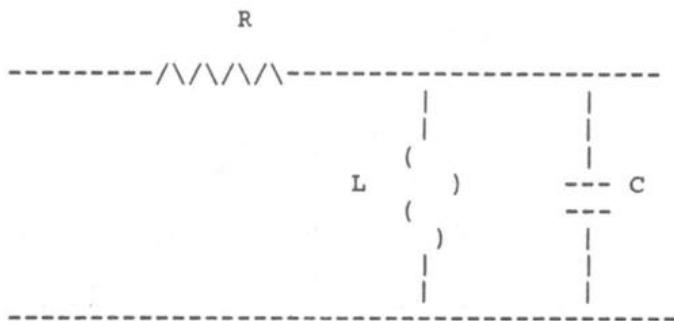
ESERCIZIO N. 2

CALCOLARE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELLA RETE  
DI FIGURA E FARE IL GRAFICO DELLE CARATTERISTICHE DI  
AMPIEZZA E DI FASE.

E' LECITO CONSIDERARE SODDISFATTE LE CONDIZIONI DI  
NON DISTORSIONE DI GRUPPO IN UNA BANDA  $B_\omega$  SUFFICIENTE-  
MENTE RISTRETTA NELL'INTORNO DELLA PULSAZIONE

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ?$$

IN CASO POSITIVO DARE LE ESPRESSIONI DI  $T_0 = T(\omega_0)$   
E DEI RITARDI DI FASE E DI GRUPPO.

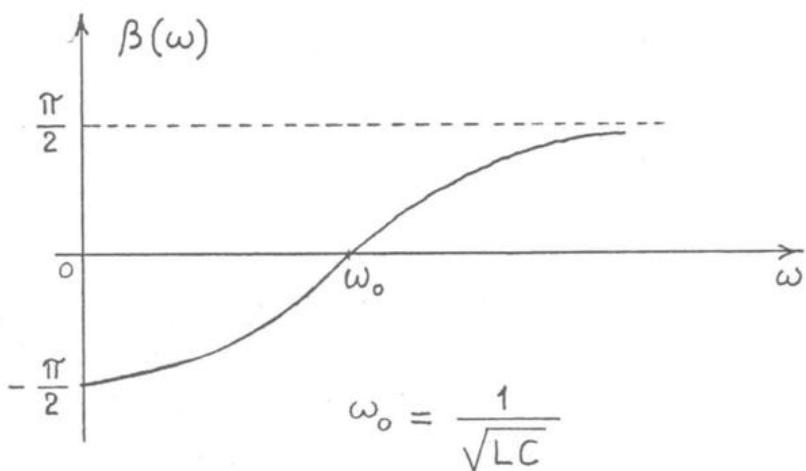
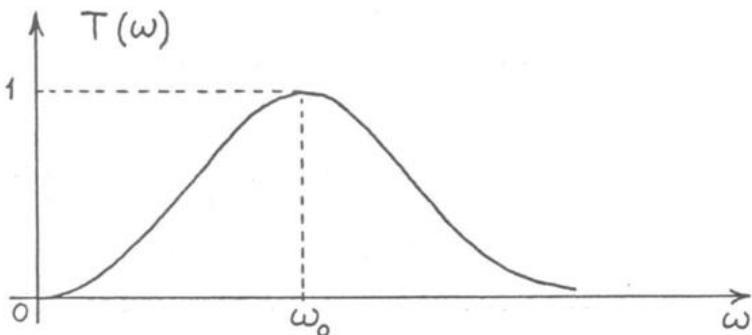


RISULTA:

$$H(\omega) = \frac{j\omega L}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L} ,$$

$$T(\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}} ,$$

$$\beta(\omega) = \arctg \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)} - \frac{\pi}{2} .$$



IN UNA BANDA  $B\omega$  SUFFICIENTEMENTE RISTRETTA NELL'INTORNO DELLA PULSAZIONE

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

POSSIAMO QUINDI SCRIVERE:

$$T(\omega) \approx 1$$

$$\beta(\omega) \approx \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

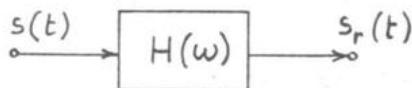
E RISULTANO PERTANTO SODDISFATTE LE CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE DI GRUPPO CON

$$\tau_f = 0$$

$$\tau = \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} = 2RC.$$

10.4 RISPOSTA DI RETI PASSA-BANDA AD OSCILLAZIONI MODULATE A PRODOTTO E DI TIPO QAM.

CONSIDERIAMO LA RETE PASSA-BANDA DI FIGURA 10.4.1, ATTRaverso cui trasmettiamo una oscillazione modulata con portante di pulsazione  $\omega_0$ .



$$H(\omega) = T(\omega) e^{-j\beta(\omega)}$$

Fig. 10.4.1

Sviluppando in serie di potenze la caratteristica di fase nell'intorno di  $\omega_0$ , possiamo scrivere:

$$(10.4.1) \quad \beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \tau(\omega - \omega_0) + \gamma(\omega) ,$$

con

$$(10.4.2) \quad \tau = \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} ,$$

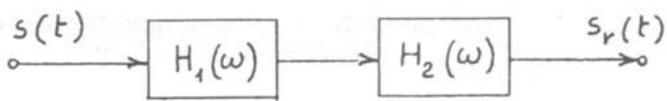
$$(10.4.3) \quad \gamma(\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \\ + \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3\beta}{d\omega^3} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^3 + \dots .$$

La rete di figura 10.4.1 è dunque equivalente a quella di figura 10.4.2, il cui primo blocco da' origine solo al ritardo di fase  $\tau_f = \beta(\omega_0)/\omega_0$  ed al ritardo di gruppo  $\tau$ . Prescindendo da tali ritardi, possiamo limitarci a considerare solo il secondo blocco, la cui funzione di trasferimento indichiamo ancora con

$$(10.4.4) \quad H(\omega) = T(\omega) e^{-j\beta(\omega)} ,$$

con l'intesa che

$$(10.4.5) \quad \beta(\omega_0) = 0 , \quad \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} = 0 .$$



$$H_1(\omega) = e^{-j[\beta(\omega_0) + \tau(\omega - \omega_0)]}, \quad \omega \geq 0,$$

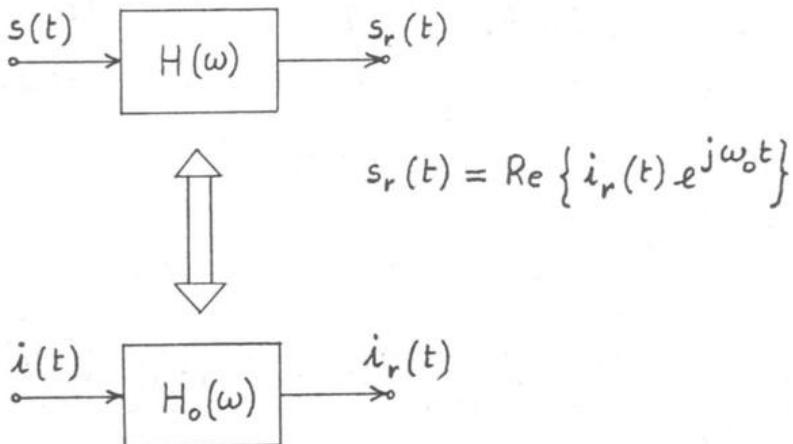
$$H_2(\omega) = T(\omega) e^{-j\gamma(\omega)}, \quad \omega \geq 0.$$

Fig. 10.4.2

TUTTO CIO' PREMESSO, CONSIDERIAMO ALL'INGRESSO DELLA RETE PASSA-BANDA IL SEGNALE MODULATO A PRODOTTO

$$(10.4.6) \quad s(t) = x(t) \cos \omega_0 t;$$

IL SUO INVILUPPO E' REALE E VALE  $x(t)$ .



$$i(t) = x(t) \quad i_r(t) = x_p(t) + j x_q(t)$$

Fig. 10.4.3

COME INDICATO IN FIGURA 10.4.3 L'INVILUPPO  $i_r(t)$  DELL'USCITA  $s_r(t)$  E' IN GENERALE COMPLESSO POICHÉ DALLA RELAZIONE

$$(10.4.7) \quad I_r(\omega) = H_o(\omega) X(\omega)$$

SI DESUME CHE IN GENERALE SI HA:

$$(10.4.8) \quad I_r(-\omega) \neq I_r^*(\omega).$$

POSSIAMO QUINDI SCRIVERE, SEMPRE IN GENERALE:

$$(10.4.9) \quad s_r(t) = \operatorname{Re} \left\{ [x_p(t) + j x_q(t)] e^{j \omega_0 t} \right\} = \\ = x_p(t) \cos \omega_0 t - x_q(t) \sin \omega_0 t,$$

CIOE' LA RISPOSTA DI UNA RETE PASSA-BANDA AD UNA OSCILLAZIONE MODULATA A PRODOTTO E' COSTITUITA DALLA SOMMA DI DUE OSCILLAZIONI IN QUADRATURA MODULATE A PRODOTTO, CON LEGGI DI MODULAZIONE DESUMIBILI DALLA (10.4.7).

IN ALTRI TERMINI, NEL SEGNALE D'USCITA E' PRESENTE, OLTRE ALL'OSCILLAZIONE

$x_p(t) \cos \omega_0 t$  (COMPONENTE IN FASE),

L'OSCILLAZIONE

$- x_q(t) \sin \omega_0 t$  (COMPONENTE IN QUADRATURA).

CONSIDERIAMO ORA UNA RETE PASSA-BANDA DI TIPO SIMMETRICO, OSSIA AVENTE CARATTERISTICA DI AMPIEZZA SIMMETRICA E CARATTERISTICA DI FASE ANTISIMMETRICA RISPETTO A  $\omega_0$ .

IN QUESTO CASO, POTENDO ASSUMERE (COME GIA' STIAMO FACENDO)  $B(\omega_0) = 0$ , VALE LA RELAZIONE (10.2.11) E QUINDI SI HA:

$$(10.4.10) \quad I_r(-\omega) = I_r^*(\omega).$$

L'INVILUPPO COMPLESSO DEL SEGNALE D'USCITA  $s_r(t)$   
E' DUNQUE REALE:

$$(10.4.11) \quad i_r(t) = x_p(t)$$

E QUINDI IN DETTO SEGNALE MANCA LA COMPONENTE IN QUADRATURA:

$$(10.4.12) \quad s_r(t) = x_p(t) \cos \omega_0 t.$$

IN CONCLUSIONE, PER UNA RETE SIMMETRICA GLI SCHEMI DEI SISTEMI DI TRASMISSIONE DELLE FIGURE 10.4.4 E 10.4.5, RISPECTIVAMENTE DI TIPO PASSA-BANDA E DI TIPO PASSA-BASSO, SONO DEL TUTTO EQUIVALENTI PER QUANTO RIGUARDA I SEGNALI D'INGRESSO E D'USCITA.

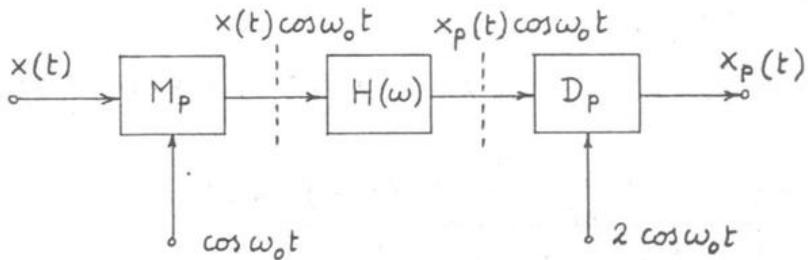


Fig. 10.4.4

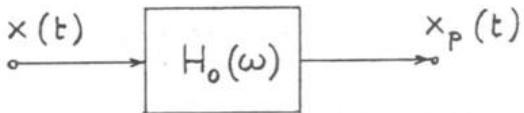


Fig. 10.4.5

PER QUESTI MOTIVI IL SISTEMA DI FIGURA 10.4.5  
VIENE CHIAMATO SISTEMA DI TRASMISSIONE EQUIVALENTE IN  
BANDA BASE DI QUELLO DI FIGURA 10.4.4.

CONSIDERIAMO ORA ALL'INGRESSO DELLA RETE, ANZICHE' L'OSCILLAZIONE MODULATA A PRODOTTO (10.4.6), IL SEGNALE QAM

$$(10.4.13) \quad s(t) = x_1(t) \cos \omega_0 t - x_2(t) \sin \omega_0 t,$$

IL CUI INVILUPPO E' DATO DA:

$$(10.4.14) \quad i(t) = x_1(t) + j x_2(t).$$

INDICANDO CON  $x_{1p}(t) + j x_{1q}(t)$  E  $x_{2p}(t) + j x_{2q}(t)$  IL RISULTATO DELLA TRASFORMAZIONE LINEARE RAPPRESENTATA DA  $H_o(\omega)$  AGENTE RISPETTIVAMENTE SU  $x_1(t)$  E  $x_2(t)$  (FIGURA 10.4.6), L'INVILUPPO DEL SEGNALE D'USCITA E' ESPRESO DA:

$$(10.4.15) \quad i_r(t) = x_{1p}(t) - x_{2q}(t) + j[x_{1q}(t) + x_{2p}(t)].$$

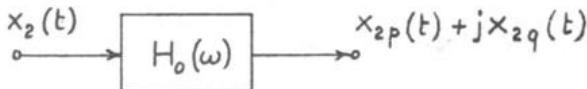
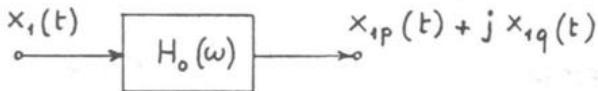


Fig. 10.4.6

ABBIAMO DUNQUE:

$$(10.4.16) \quad s_r(t) = \operatorname{Re} \left\{ i_r(t) e^{j \omega_0 t} \right\} =$$

$$= [x_{1p}(t) - x_{2q}(t)] \cos \omega_0 t - [x_{2p}(t) + x_{1q}(t)] \sin \omega_0 t.$$

LA (10.4.16) METTE IN EVIDENZA IN GENERALE, ALL'USCITA DELLA RETE, UNA INTERFERENZA FRA I DUE SEGNALI MODULATI COMPONENTI L'OSCILLAZIONE QAM.

QUANDO PERO' LA RETE PASSA-BANDA CONSIDERATA E' DI TIPO SIMMETRICO, RISULTA:

$$(10.4.17) \quad x_{1q}(t) \equiv x_{2q}(t) \equiv 0$$

E LA (10.4.16) DIVENTA SEMPLICEMENTE:

$$(10.4.18) \quad s_r(t) = x_{1p}(t) \cos \omega_0 t - x_{2p}(t) \sin \omega_0 t.$$

IN CONCLUSIONE, I DUE SEGNALI MODULATI A PRODOTTO CHE COSTITUISCONO L'OSCILLAZIONE QAM VENGONO TRASMESSI DA UNA RETE SIMMETRICA SENZA INTERFERENZE RECIPROCHE. IL RELATIVO SISTEMA DI TRASMISSIONE PASSA-BANDA (FIGURA 10.4.7) E' EQUIVALENTE, PER QUANTO CONCERNTE I SEGNALI MODULANTI  $x_1(t)$  E  $x_2(t)$ , AI DUE DISTINTI SISTEMI PASSA-BASSO RAPPRESENTATI DALLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H_o(\omega)$  (FIGURA 10.4.8).

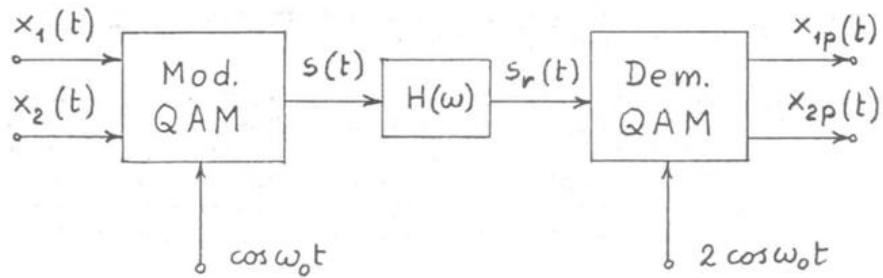


Fig. 10.4.7

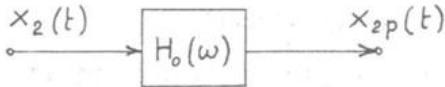
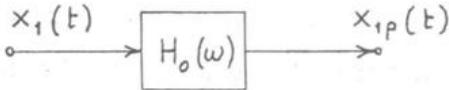


Fig. 10.4.8

## 10.5 CENNI SULLE PRINCIPALI APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLA MODULAZIONE.

COME ABBIAMO PIU' VOLTE GIA' OSSERVATO, TUTTE LE VOLTE CHE SI DISPONE DI UN CANALE PASSA-BANDA E SI DESIDERÀ TRASMETTERE UN SEGNALE PASSA-BASSO, SI RICORRE ALLA MODULAZIONE DI UNA PORTANTE.

FRA LE PIU' SIGNIFICATIVE APPLICAZIONI CITIAMO:

### - I SISTEMI DI TRASMISSIONE SU FIBRA OTTICA.

LE PORTANTI HANNO FREQUENZA NEL CAMPO DEL VISIBILE O DELL'IMMEDIATO INFRAROSSO.

DAI PRIMI SISTEMI CHE FANNO USO DELLA MODULAZIONE OOK ED UTILIZZANO PORTANTI A BASSA PUREZZA SPETTRALE, SI STA PASSANDO AI SISTEMI CON PORTANTI A PIU' ALTA COERENZA E MODULAZIONE D'ANGOLO. SI TRATTA DEL PIU' RECENTE CAPITOLO DELLA TRASMISSIONE SU FIBRA OTTICA (OTTICA COERENTE), CON SEGNALI MODULANTI CHE POSSONO ESSERE DI DIVERSI GBIT/S.

QUESTI SISTEMI DI TRASMISSIONE - CHE OFFRONO CAPACITA' DI TRASMISSIONE ELEVATISSIME - STANNO PROGRESSIVAMENTE SOSTITUENDO TUTTI GLI ALTRI COLLEGAMENTI FRA PUNTI FISSI, SIA SU LINEA METALLICA CHE SU PONTE RADIO, SIA A BREVE CHE A GRANDE DISTANZA.

### - I SISTEMI DI TRASMISSIONE MEDIANTE PROPAGAZIONE LIBERA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE.

MENTRE I RADIOCOLLEGAMENTI FRA PUNTI FISSI (PONTI RADIO), SIA TERRESTRI CHE VIA SATELLITE, RISENTONO IN GENERALE DELLA CONCORRENZA DEI SISTEMI SU FIBRA OTTICA, I COLLEGAMENTI FRA PUNTI MOBILI, CHE STANNO AVENDO UNO SVILUPPO ASSAI NOTEVOLE, VEDONO COME PROTAGONISTA INCONTRASTATO IL MEZZO RADIO. FRA QUESTI CITIAMO:

- \* SISTEMI RADIOMOBILI, SIA DI TIPO TERRESTRE CHE TRAMITE SATELLITE, E COMUNICAZIONI PERSONALI;
- \* RADIOASSISTENZA ALLA NAVIGAZIONE AEREA;
- \* RADIOASSISTENZA ALLA NAVIGAZIONE MARITTIMA;
- \* RADIOASSISTENZA AL TRAFFICO SU STRADA;
- \* RADIOLOCALIZZAZIONE;
- \* SERVIZI RADIO GOVERNATIVI (FORZE ARMATE ED ALTRI CORPI);

- \* APPLICAZIONI ALLA METEOROLOGIA;
- \* APPLICAZIONI ALLA RADIOASTRONOMIA;
- \* COMUNICAZIONI SPAZIALI.

CITIAMO INFINE LA RADIODIFFUSIONE DEI PROGRAMMI SONORI E TELEVISIVI, ALLA QUALE DEDICHIAMO IL PARAGRAFO CHE SEGUE.

#### 10.6 CENNI SULLA RADIODIFFUSIONE DEI PROGRAMMI SONORI E TELEVISIVI.

PRESENTIAMO IN MANIERA SCHEMATICA LE CARATTERISTICHE DEI PRINCIPALI SERVIZI DI RADIODIFFUSIONE DEI PROGRAMMI SONORI E TELEVISIVI, OSSERVANDO PRELIMINARMENTE CHE NELLA MAGGIOR PARTE DEI PAESI LE GAMME DI FREQUENZA UTILIZZATE PER LA RADIODIFFUSIONE SONORA A MODULAZIONE DI FREQUENZA E PER QUELLA TELEVISIVA SONO INDICATE CON I NUMERI ROMANI DA I A V. TALI GAMME SONO RIPORTATE NELLA TABELLA CHE SEGUE CON RIFERIMENTO ALLA "REGIONE" I CHE COMPRENDE L'EUROPA.

GAMMA	INTERVALLO DI FREQUENZE (MHZ)
I	47 ÷ 68
II	87.5 ÷ 108
III	174 ÷ 230
IV	470 ÷ 582
V	582 ÷ 960

## RADIODIFFUSIONE DEI PROGRAMMI SONORI

### RADIODIFFUSIONE AM.

SEGNALE MODULANTE:

AUDIO NORMALE (50 ÷ 4500 HZ).

LARGHEZZA DI BANDA DELL'OSCILLAZIONE MODULATA (DSB):

9 KHZ.

ALLOCAZIONE DELLE FREQUENZE PORTANTI:

BANDA 5 (LF - ONDE LUNGHE)

BANDA 6 (MF - ONDE MEDIE)

BANDA 7 (HF - ONDE CORTE).

PIU' PRECISAMENTE, PER QUANTO CONCERNE LA RADIOPROGRAMMAZIONE AM AD ONDE MEDIE, CHE E' QUELLA PIU' COMUNE, L'INTERVALLO DI FREQUENZE UTILIZZATO VA DA 535 A 1605 KHZ.

### RADIODIFFUSIONE FM.

SEGNALE MODULANTE:

MUSICALE AD ALTA FEDELTA' (30 ÷ 15000 HZ).

DEVIAZIONE MASSIMA DI FREQUENZA :

$\Delta f_{\max} = 75 \text{ KHZ.}$

LARGHEZZA DI BANDA DELL'OSCILLAZIONE MODULATA:

180 KHZ (FORMULA DI CARSON).

ALLOCAZIONE DELLE FREQUENZE PORTANTI:

BANDA 8 (VHF) E, PIU' PRECISAMENTE, GAMMA II.

RADIODIFFUSIONE DEI PROGRAMMI TELEVISIVI (STANDARD A 625 LINEE).

BANDA DEL SEGNALE VIDEO:

$$0 \div 5 \text{ MHZ}.$$

TIPO DI MODULAZIONE PER IL SEGNALE VIDEO:

LA MODULAZIONE DELLA PORTANTE VIDEO E' DI TIPO VSB, CON LA BANDA VESTIGIALE (INFERIORE) LARGA 1.25 MHZ.

SEGNALE MODULANTE AUDIO:

MUSICALE AD ALTA FEDELTA' (30  $\div$  15000 Hz).

TIPO DI MODULAZIONE PER IL SEGNALE AUDIO:

FM CON  $\Delta f_{\max} = 50 \text{ KHz}$ .

PORTANTE AUDIO:

SI TROVA AL DI SOPRA DELLA PORTANTE VIDEO, AD UNA DISTANZA PARI A 5.5 MHZ.

L'IMPEGNO SPETTRALE DELLE OSCILLAZIONI MODULATE VSB E FM, PARI RISPETTIVAMENTE A 6.25 MHZ E 130 KHZ (FORMULA DI CARSON), E' RAPPRESENTATO IN FIGURA 10.6.1.

LE FREQUENZE PORTANTI SONO ALLOCATE IN:

BANDA 8 (VHF) E, PIU' PRECISAMENTE, GAMME I E III  
BANDA 9 (UHF) E, PIU' PRECISAMENTE, GAMME IV E V.

LA CANALIZZAZIONE (DISTANZA FRA LE CORRISPONDENTI FREQUENZE PORTANTI DI DUE CANALI RADIO ADIACENTI) E' DI 7 MHZ NELLA BANDA VHF E DI 8 MHZ IN QUELLA UHF.

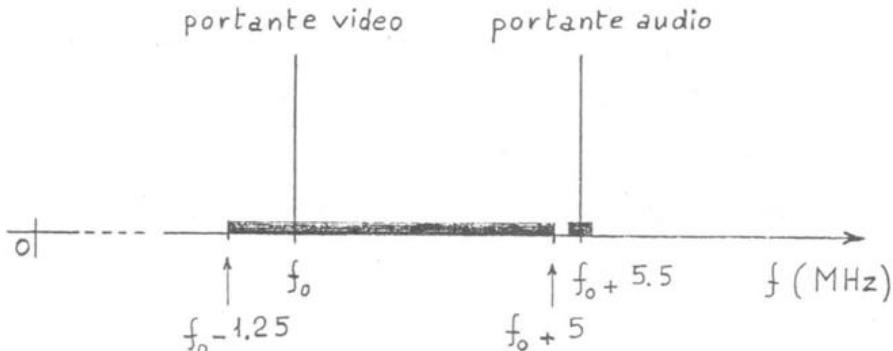


Fig. 10.6.1

**APPENDICE**

**ESERCIZI E QUESITI PROPOSTI**

SI CONSIDERI L'IMPULSO

$$x(t) = \begin{cases} A & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

- \* VERIFICARE CHE E' UNA FUNZIONE AD ENERGIA FINITA;
- \* CALCOLARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LO SPETTRO DI AMPIEZZA;
- \* CALCOLARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LO SPETTRO DI FASE;
- \* CALCOLARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LO SPETTRO DI ENERGIA;
- \* DEFINIRE CONVENZIONALMENTE LA BANDA E PRESENTARE QUALCHE CONSIDERAZIONE SUL PRODOTTO BANDA X DURATA;
- \* CALCOLARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE;
- \* SCRIVERE E VERIFICARE LA NOTA RELAZIONE FRA SPETTRO DI ENERGIA E FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE.

&

&

&

SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$x(t) = A e^{-|t|/t_0}$$

CALCOLARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE:

- \* LA TRASFORMATA SECONDO FOURIER;
- \* LO SPETTRO DI AMPIEZZA;
- \* LO SPETTRO DI FASE;
- \* LO SPETTRO DI ENERGIA;
- \* LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE.

SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$x(t) = \begin{cases} A e^{-t/t_0} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

CALCOLARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE:

- \* LA TRASFORMATA SECONDO FOURIER;
- \* LO SPETTRO DI AMPIEZZA;
- \* LO SPETTRO DI FASE;
- \* LO SPETTRO DI ENERGIA;
- \* LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE.

&

&

&

SI CONSIDERI L'IMPULSO TRIANGOLARE:

$$x(t) = \begin{cases} A [1 - \frac{2|t|}{T}] & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

- \* VERIFICARE CHE E' UNA FUNZIONE AD ENERGIA FINITA (E CALCOLARE TALE ENERGIA);
- \* CALCOLARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LO SPETTRO DI AMPIEZZA;
- \* CALCOLARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LO SPETTRO DI FASE;
- \* CALCOLARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LO SPETTRO DI ENERGIA.

FARE L'ANALISI DI FOURIER DELLE FUNZIONI:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(\pi t/T) & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$y(t) = |\cos(\pi t/T)|$$

VERIFICARE, NEL CASO SPECIFICO, LA NOTA RELAZIONE FRA LA TRASFORMATA SECONDO FOURIER DI UNA FUNZIONE ED I COEFFICIENTI DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER DELLA SUA RIPETIZIONE PERIODICA.

&

&

&

SI CONSIDERI IL TRENO SINUSOIDALE TRONCATO

$$s(t) = \begin{cases} A \cos \Omega_0 t & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

CON

$$(1) \quad \Omega_0 \gg 1/T$$

CALCOLARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE:

- \* LA TRASFORMATA SECONDO FOURIER;
- \* LO SPETTRO DI AMPIEZZA;
- \* LO SPETTRO DI FASE;
- \* LO SPETTRO DI ENERGIA.

COME GIOCA L'IPOTESI (1) ?

SI CONSIDERI LA SINUSOIDE SMORZATA

$$s(t) = \begin{cases} A e^{-t/t_0} \cos \Omega_0 t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

CON

$$(1) \quad \Omega_0 \gg 1/t_0$$

CALCOLARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE:

- \* LA TRASFORMATA SECONDO FOURIER;
- \* LO SPETTRO DI AMPIEZZA;
- \* LO SPETTRO DI FASE;
- \* LO SPETTRO DI ENERGIA.

COME GIOCA L'IPOTESI (1) ?

&

&

&

TROVARE NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE LA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHE' UNA FUNZIONE  $x(t)$  ASSUMA I VALORI:

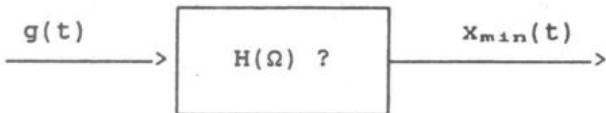
$$(1) \quad x_n = x(nT) = \begin{cases} x_0 \neq 0 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

DISCUTERE POI LA CONDIZIONE TROVATA.

IN PARTICOLARE, INDIVIDUARE LA FUNZIONE  $x_{\min}(t)$  A BANDA MINIMA PER CUI VALE LA (1).

DETERMINARE POI LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H(\Omega)$  DELLA RETE LINEARE CHE DA' IN USCITA DETTA FUNZIONE  $x_{\min}(t)$  A BANDA MINIMA QUANDO ALL'INGRESSO E' PRESENTE L'IMPULSO:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$



&

&

&

INDIVIDUARE LA FUNZIONE  $x(t)$  A BANDA MINIMA TALE CHE

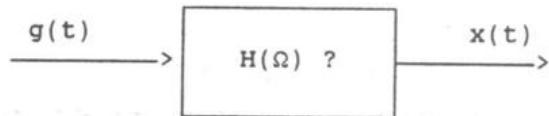
$$x(0) = x(T) = 1$$

$$x(nT) = 0 \quad n \neq 0, 1$$

ED ESPRIMERE LA SUA TRASFORMATA SECONDO FOURIER  $X(\Omega)$ .

DETERMINARE POI LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H(\Omega)$  DELLA RETE LINEARE CHE DA' IN USCITA DETTA FUNZIONE  $x(t)$  QUANDO ALL'INGRESSO E' PRESENTE L'IMPULSO:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$



CON RIFERIMENTO AD UN SEGNALE PASSA-BASSO  $x(t)$  DISCUTERE IL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DEI TEMPI.

TROVARE UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHE' DALLA SUCCESSIONE DEI VALORI CAMPIONATI  $x_n = x(nT)$  SI POSSA RISALIRE A  $x(t)$ .

MOSTRARE COME, QUANDO E' VERIFICATA LA CONDIZIONE DI CUI AL PUNTO PRECEDENTE, SI POSSA RICOSTRUIRE IL SEGNALE  $x(t)$  A PARTIRE DAI SUOI VALORI CAMPIONATI RICORRENDO AD UN FILTRO PASSA-BASSO E AD UNA OPPORTUNA RETE EQUALIZZATRICE.

QUANDO PUO' ESSERE OMESSA LA RETE EQUALIZZATRICE DI CUI AL PUNTO PRECEDENTE?

&

&

&

RICAVARE LA SEGUENTE ESPRESSIONE DI UN SEGNALE IN FUNZIONE DEI SUOI VALORI CAMPIONATI  $x_n$  ( $T \leq 1/2f_m$ ):

$$x(t) = \{x_n\} * \text{sinc}(t/T)$$

MOSTRARE CHE L'ESPRESSONE OTTENUTA RAPPRESENTA UNO SVILUPPO IN SERIE DI FUNZIONI ORTOGONALI.

UTILIZZARE IL RISULTATO DEL PUNTO PRECEDENTE PER VERIFICARE CHE

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^2$$

&

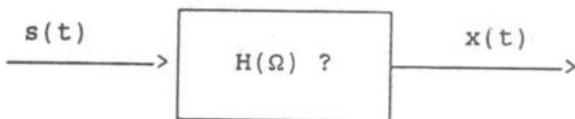
&

&

CALCOLARE LA TRASFORMATA DI FOURIER DELLA SUCCESSIONE DI IMPULSI RETTANGOLARI  $s(t)$  OTTENUTA CAMPIONANDO UN SEGNALE TEMPO-CONTINUO  $x(t)$ , AVENTE TRASFORMATA  $X(\Omega)$ , CON INTERVALLO  $T$  E TENENDO I VALORI CAMPIONATI PER UN INTERVALLO PARI A  $\tau < T$ .

MOSTRARE POI QUANDO E CON QUALE FUNZIONE DI TRASFERIMENTO SI POSSA RIOTTENERE  $x(t)$  A PARTIRE DA  $s(t)$ .

QUALI SEMPLIFICAZIONI DELLA RETE DI RICOSTRUZIONE DEL SEGNALE  $x(t)$  SONO POSSIBILI QUANDO  $\tau \ll T$ ?



&

&

&

DISCUTERE IL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE.

CON RIFERIMENTO AD UN SEGNALE  $x(t)$  DI DURATA FINITA, AVENTE TRASFORMATA SECONDO FOURIER  $X(\Omega)$ , ESPRIMERE UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PERCHE' DALLA CONOSCENZA DEI VALORI CAMPIONATI  $X(n\Omega_0)$  DI  $X(\Omega)$  SI POSSA RISALIRE A  $x(t)$ .

QUANDO E' VERIFICATA LA CONDIZIONE DI CUI AL PUNTO PRECEDENTE, TROVARE L'ESPRESSONE ANALITICA DI  $x(t)$  IN FUNZIONE DEI VALORI  $X(n\Omega_0)$ .

&

&

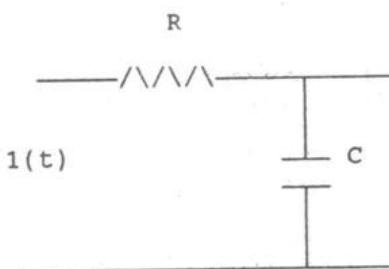
&

ESPRIMERE NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE LA FUNZIONE  
A GRADINO

$$i(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t > 0 \\ -\frac{1}{2}, & t < 0 \end{cases}$$

TROVARE POI LA RISPOSTA DI UN FILTRO IDEALE PAS-  
SA-BASSO A DETTA FUNZIONE. DEFINIRE E CALCOLARE IL TEM-  
PO DI SALITA.

TROVARE INFINE LA RISPOSTA A DETTA FUNZIONE DELLA  
RETE RC DI FIGURA.



&

&

&

SI CONSIDERI LA RIPETIZIONE PERIODICA DI UNA FUN-  
ZIONE DEL TEMPO: TROVARE LA RELAZIONE FRA I COEFFICIENTI  
DEL SUO SVILUPPO IN SERIE ESPONENZIALE DI FOURIER E  
LA TRASFORMATA SECONDO FOURIER DELLA FUNZIONE ORIGINA-  
RIA.

&

&

&

DEFINIRE LA CONVOLUZIONE FRA UNA SERIE TEMPORALE ED UNA FUNZIONE TEMPO-CONTINUA ED ESPRIMERE LA SUA TRASFORMATA SECONDO FOURIER.

DEFINIRE LA CONVOLUZIONE FRA DUE SERIE TEMPORALI ED ESPRIMERE LA SUA TRASFORMATA SECONDO FOURIER.

SI CONSIDERI INFINE LA SERIE TEMPORALE  $\{\delta_n\}$  CON:

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases} .$$

CALCOLARE:

- \* LA SUA TRASFORMATA SECONDO FOURIER;
- \* LA CONVOLUZIONE FRA DETTA SERIE TEMPORALE ED UNA GENERICA SERIE  $\{x_n\}$ ;
- \* LA CONVOLUZIONE FRA DETTA SERIE TEMPORALE ED UNA GENERICA FUNZIONE TEMPO-CONTINUA  $x(t)$ .

&

&

&

ANALOGAMENTE A QUANTO E' STATO FATTO PER LE FUNZIONI TEMPO-CONTINUE, DIMOSTRARE IL TEOREMA DI PARSEVAL PER LE FUNZIONI TEMPO-DISCRETE:

$$(1) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} x_n^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |X_a(\Omega)|^2 d\Omega .$$

SE LA SERIE TEMPORALE  $\{x_n\}$  E' STATA OTTENUTA CAMPIONANDO UNA FUNZIONE TEMPO-CONTINUA  $x(t)$ , AVENTE ENERGIA E FINITA, CON INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO  $T \leq 1/2f_m$  [ $f_m = \text{MAX. FREQUENZA A CUI E' APPREZZABILE LO SPETTRO DI } x(t)$ ], QUALE RELAZIONE INTERCORRE FRA I MEMBRI DELLA (1) E L'ENERGIA E?

DARE LA DEFINIZIONE DELLA TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER.

DARE E VERIFICARE L'ESPRESSONE DELLA TRASFORMATA INVERSA.

RICAVARE IL LEGAME ESISTENTE FRA LA TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER E QUELLA CONTINUA. DISCUTERE POI I CRITERI DI SCELTA DEI PERIODI DI RIPETIZIONE NEI DOMINI DEI TEMPI E DELLE FREQUENZE.

&

&

&

INTRODURRE L'OPERATORE DI DIRAC  $\delta(t)$ .

MEDIANTE ESSO DARE LA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI UNA FUNZIONE  $x(t)$  E MOSTRARE IL SIGNIFICATO FISICO DI TALE RAPPRESENTAZIONE.

&

&

&

SI CONSIDERI L'IMPULSO

$$D(t, \Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

TROVARE PER QUALI VALORI DI  $\Delta$  IL MODULO DELLA SUA TRASFORMATA DIFFERISCE DA 1 PER MENO DI  $\epsilon = 0.01$  NELLA BANDA  $(0, f_m)$ , CON  $f_m = 10$  MHZ.

&

&

&

CON RIFERIMENTO AD UN SISTEMA TEMPO-CONTINUO DARE LA DEFINIZIONE DI LINEARITA' E DI TEMPO-INVARIANZA.

DEFINIRE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UN SISTEMA LINEARE TEMPO-INVARIANTE IN REGIME SINUSOIDALE E ILLISTRARE COME SI MISURANO LE CARATTERISTICHE DI AMPIEZZA E DI FASE.

MOSTRARE POI CHE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO PRECEDENTEMENTE DEFINITA COINCIDE CON IL RAPPORTO FRA LE TRASFORMATE DI FOURIER DELLE GRANDEZZE DI USCITA E DI INGRESSO (QUANDO QUESTE TRASFORMATE ESISTONO).

&

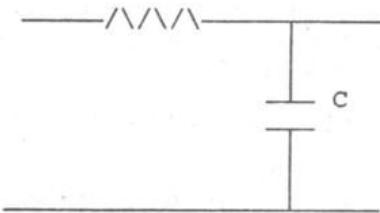
&

&

RICAVARE LE CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE DI UNA RETE LINEARE.

LA RETE RC DI FIGURA E' SEMPRE DISTORCENTE? PUO' IN QUALCHE CASO FUNZIONARE COME SEMPLICE LINEA DI RITARDO? E IN CASO POSITIVO, QUALE RITARDO INTRODUCE?

R



&

&

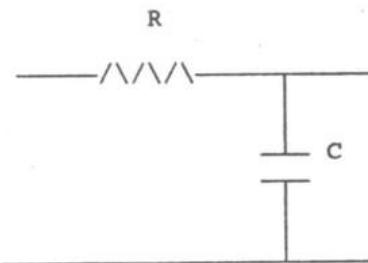
&

SI CONSIDERI UNA RETE RC E CALCOLARNE LE CARATTERISTICHE DI AMPIEZZA E DI FASE.

QUANDO LA RETE PUO' FUNZIONARE COME LINEA ARTIFICIALE DI RITARDO? QUALI SONO LE LIMITAZIONI PER I RITARDI OTTENIBILI?

QUANDO LA RETE PUO' FUNZIONARE COME INTEGRATORE?

CALCOLARE INFINE LA RISPOSTA IMPULSIVA DI DETTA RETE RC.

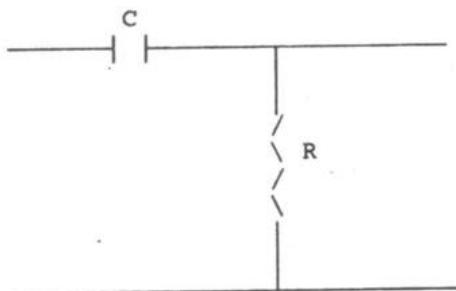


& & &

ILLUSTRARE COME SI POSSANO RILEVARE SPERIMENTALMENTE LE CARATTERISTICHE DI AMPIEZZA E DI FASE DI UNA RETE LINEARE TEMPO-INVARIANTE.

CALCOLARE POI LE CARATTERISTICHE DI AMPIEZZA E DI FASE DELLA RETE CR DI FIGURA.

QUANDO DETTA RETE PUO' FUNZIONARE COME DERIVATORE?

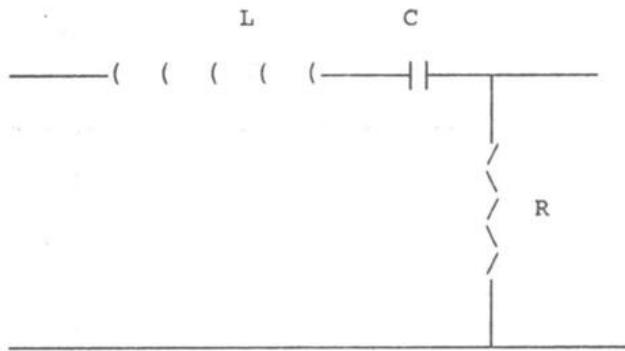


CALCOLARE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELLA RETE  
DI FIGURA E FARE IL GRAFICO DELLE CARATTERISTICHE DI  
AMPIEZZA E DI FASE.

E' LECITO CONSIDERARE SODDISFATTE LE CONDIZIONI DI  
NON DISTORSIONE DI GRUPPO IN UNA BANDA  $B_n$  SUFFICIEN-  
TEMENTE RISTRETTA NELL'INTORNO DELLA PULSAZIONE

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ?$$

IN CASO POSITIVO DARE LE ESPRESSIONI DI  $T_0 = T(\Omega_0)$   
E DEI RITARDI DI FASE E DI GRUPPO.



&

&

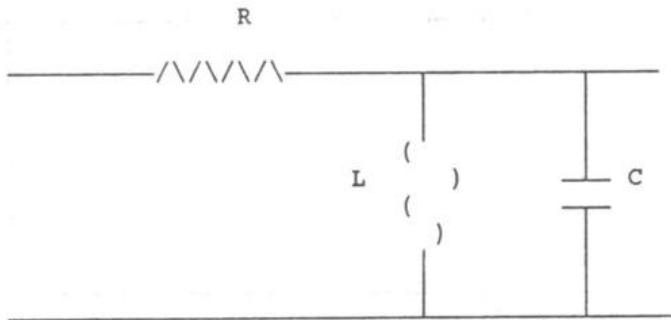
&

CALCOLARE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELLA RETE  
DI FIGURA E FARE IL GRAFICO DELLE CARATTERISTICHE DI  
AMPIEZZA E DI FASE.

E' LECITO CONSIDERARE SODDISFATTE LE CONDIZIONI DI  
NON DISTORSIONE DI GRUPPO IN UNA BANDA  $B_0$  SUFFICIENTE-  
MENTE RISTRETTA NELL'INTORNO DELLA PULSAZIONE

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ?$$

IN CASO POSITIVO DARE LE ESPRESSIONI DI  $T_0 = T(\Omega_0)$   
E DEI RITARDI DI FASE E DI GRUPPO.



&

&

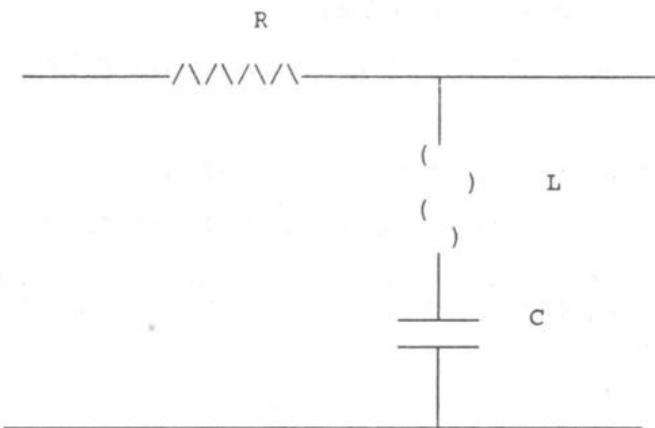
&

CALCOLARE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELLA RETE  
DI FIGURA E FARE IL GRAFICO DELLE CARATTERISTICHE DI  
AMPIEZZA E DI FASE.

COME SI COMPORTA LA RETE NEI RIGUARDI DI UN SEGNALE  
PASSA-BANDA CON BANDA SUFFICIENTEMENTE LIMITATA  
NELL'INTORNO DELLA PULSAZIONE

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ?$$

E NEI RIGUARDI DI UN SEGNALE PASSA-BASSO CON BANDA  
SUFFICIENTEMENTE PICCOLA?



&

&

&

CALCOLARE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UN FILTRO TRASVERSALE SIMMETRICO AVENTE UN NUMERO N DI PRESE DISPARI.

FACENDO POI USO DI UNO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER TRONCATO, CALCOLARE I VALORI DEI COEFFICIENTI DI PESO CON RIFERIMENTO AD UN FILTRO PASSA-BASSO CON N=101, FREQUENZA DI TAGLIO 4 KHZ E PERIODO DI RIPETIZIONE, SULL'ASSE DELLE FREQUENZE, PARI A 16 KHZ.

&

&

&

#### DISEGNARE LO SCHEMA

- \* DI UN FILTRO TRASVERSALE (NON RICORRENTE),
- \* DI UN FILTRO RICORRENTE,
- \* DI UN FILTRO PURAMENTE RICORRENTE.

CALCOLARE LE RELATIVE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO.

CALCOLARE INFINE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UN FILTRO TRASVERSALE SIMMETRICO AVENTE UN NUMERO N DI PRESE pari.

&

&

&

DEFINIRE LA RISPOSTA IMPULSIVA DI UNA RETE LINEARE E TROVARNE IL LEGAME CON LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO.

VOLOndo OSSERVARE SPERIMENTALMENTE LA RISPOSTA IMPULSIVA DI UNA RETE, QUANTO DEVE ESSERE BREVE LA SOLLECITAZIONE IMPULSIVA APPLICATA AI MORSETTI DI INGRESSO?

RICAVARE POI L'ESPRESSONE DELLA RISPOSTA DELLA RETE AD UN SEGNALE D'INGRESSO NON TRASFORMABILE SECONDO FOURIER.

CALCOLARE LA RISPOSTA IMPULSIVA DI UN FILTRO IDEALE PASSA-BASSO E PRESENTARE QUALCHE CONSIDERAZIONE SUL RISULTATO OTTENUTO.

CALCOLARE POI LA RISPOSTA AL GRADINO DI UN FILTRO IDEALE PASSA-BASSO. DEFINIRE E CALCOLARE IL TEMPO DI SALITA.

&

&

&

DEFINIRE LA RISPOSTA IMPULSIVA DISCRETA DI UN SISTEMA DISCRETO LINEARE TEMPO-INVARIANTE.

NOTA LA SERIE TEMPORALE D'INGRESSO E LA RISPOSTA IMPULSIVA DISCRETA, RICAVARE POI L'ESPRESSIONE DELLA SERIE TEMPORALE D'USCITA.

CALCOLARE INFINE LA RISPOSTA IMPULSIVA DISCRETA  $\{h_n\}$  DI UN FILTRO TRASVERSALE DISCRETO, COSTITUITO DA UNO SHIFT-REGISTER, DALLE RELATIVE PRESE E DA UN SOMMATORE. SPIEGARE IL SIGNIFICATO DELLA SIGLA FIR.

&

&

&

CALCOLARE LA RISPOSTA IMPULSIVA DISCRETA  $\{h_n\}$  DI UN FILTRO TRASVERSALE DISCRETO, COSTITUITO DA UNO SHIFT-REGISTER, DALLE RELATIVE PRESE E DA UN SOMMATORE.

RICAVARE POI L'ESPRESSIONE DELLA SERIE TEMPORALE D'USCITA  $\{y_n\}$  IN FUNZIONE DI QUELLA D'INGRESSO  $\{x_n\}$ .

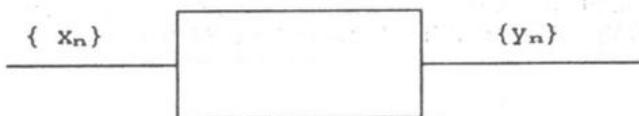
DATO IL SISTEMA DISCRETO LINEARE TEMPO-INVARIANTE  
DI FIGURA, LA CUI RELAZIONE INGRESSO-USCITA E' DESCRIPTA DALL'EQUAZIONE

$$y_n = x_n + 5 x_{n-1} + 3 x_{n-2},$$

CALCOLARE:

- \* LA SUA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO;
- \* LA SUA RISPOSTA IMPULSIVA DISCRETA;
- \* LA SUA USCITA QUANDO ALL'INGRESSO E' PRESENTE LA SEQUENZA:

$$x_n = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



&

&

&

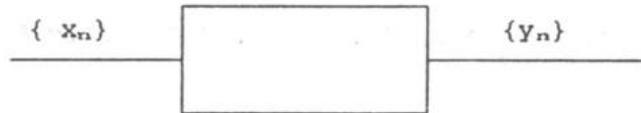
DATO IL SISTEMA DISCRETO LINEARE TEMPO-INVARIANTE  
DI FIGURA, LA CUI RELAZIONE INGRESSO- USCITA E' DESCRIPTA DALL'EQUAZIONE

$$y_n = x_n + 4x_{n-1} + 2x_{n-3},$$

CALCOLARE:

- \* LA SUA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO;
- \* LA SUA RISPOSTA IMPULSIVA DISCRETA;
- \* LA SUA USCITA QUANDO ALL'INGRESSO E' PRESENTE LA SEQUENZA:

$$x_n = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$



&

&

&

FUNZIONI AD ENERGIA FINITA: SPETTRO DI ENERGIA E  
SUA MISURA.

&

&

&

FUNZIONI A POTENZA FINITA: SPETTRO DI POTENZA E  
SUA MISURA.

MOSTRARE POI IL LEGAME FRA SPETTRO DI POTENZA ED  
ANALISI DI FOURIER.

&

&

&

SI CONSIDERI UNA FUNZIONE  $x(t)$  AVENTE POTENZA P E  
FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$C(\tau) = P e^{-|\tau|/\tau_0}$$

CALCOLARE LO SPETTRO DI POTENZA ED IL TEMPO DI  
COERENZA.

CON QUALE RETE  $x(t)$  PUO' ESSERE OTTENUTA A PARTIRE  
DA UNA FUNZIONE AVENTE SPETTRO DI POTENZA COSTANTE?

&

&

&

DESCRIVERE UN PROCESSO STOCASTICO MEDIANTE LE DENSITA' DI PROBABILITA' DEI VARI ORDINI.

NOTA LA DENSITA' DI PROBABILITA' DI ORDINE  $n$ , E-  
SPRIMERE TUTTE QUELLE DI ORDINE INFERIORE.

QUANDO E' POSSIBILE ESPRIMERE LA DENSITA' DI PRO-  
BABILITA' DEL SECONDO ORDINE, NOTA QUELLA DEL PRIMO OR-  
DINE?

CON RIFERIMENTO POI AL PROCESSO

$$x(t) = z ,$$

CON  $z$  VARIABILE ALEATORIA UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA  
NELL'INTERVALLO  $(-M, M)$ ,

- \* PRECISARE SE E' STAZIONARIO;
- \* PRECISARE SE ESSO E' ERGODICO;
- \* SCRIVERE LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO ORDI-  
NE;
- \* CALCOLARE LE MEDIE

$$E[x(t)] , \quad E[x^2(t)] , \quad \langle x(t) \rangle , \quad \langle x^2(t) \rangle .$$

&

&

&

SI CONSIDERI UN RUMORE  $n(t)$  GAUSSIANO ERGODICO, A  
VALOR MEDIO NULLO, AVENTE DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA  
 $G_0$  COSTANTE NELLA BANDA  $(0, \Omega_m)$  E NULLA PER  $\Omega > \Omega_m$ .

CALCOLARE SUA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE.

SCRIVERE LE DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO E  
DEL SECONDO ORDINE.

INDICANDO CON  $t_1$  E  $t_2$  DUE ISTANTI DI OSSERVAZIONE,  
PER QUALI VALORI DI  $|t_2 - t_1|$  LE VARIABILI ALEATORIE  
 $n(t_1)$  E  $n(t_2)$  SONO RIGOROSAMENTE INDIPENDENTI FRA LORO?

INFINE DEFINIRE CONVENZIONALMENTE IL VALORE DI  
PICCO DI UN PROCESSO GAUSSIANO ERGODICO A VALOR MEDIO  
NULLO E CALCOLARE IL FATTORE DI CRESTA.

SI CONSIDERI UN PROCESSO STOCASTICO.

DARE LA DEFINIZIONE DI STAZIONARIETA'.

DARE LA DEFINIZIONE DI ERGODICITA'.

ESISTE UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE CHE ASSICURA L'ERGODICITA' DI UN PROCESSO STAZIONARIO?

DESCRIVERE POI I RILIEVI CHE DEBBONO ESSERE EFFETTUATI SU UNA FUNZIONE CAMPIONE DI UN PROCESSO ERGODICO PER DETERMINARE LE DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO E DEL SECONDO ORDINE.

&

&

&

CON RIFERIMENTO AD UN PROCESSO STOCASTICO ERGODICO

\* ESPRIMERE LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE COME MEDIA STATISTICA (1)

\* ESPRIMERE LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE COME MEDIA TEMPORALE (2)

\* ENUNCIARE ALCUNE PROPRIETA' DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE E DIMOSTRARLE UTILIZZANDO L'ESPRESSONE (1).

MOSTRARE POI COME SI MODIFICA LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE FACENDO SUBIRE AL PROCESSO UNA TRASFORMAZIONE LINEARE RAPPRESENTATA DALLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO  $H(\Omega)$ .

&

&

&

$x(t)$ , CON POTENZA P, ABBIA SPETTRO COSTANTE NELLA BANDA  $(0, \Omega_m)$  E NULLO PER  $\Omega > \Omega_m$ . CALCOLARE LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE.

NELL'IPOTESI CHE  $x(t)$  APPARTENGA AD UN PROCESSO GAUSSIANO ERGODICO,

\* SCRIVERE LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO ORDINE;

\* SCRIVERE LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL SECONDO ORDINE;

\* DETERMINARE PER QUALI VALORI DI  $|t_2 - t_1|$  LE VARIABILI ALEATORIE  $x(t_1)$  E  $x(t_2)$  SONO INDIPIENDENTI.

&

&

&

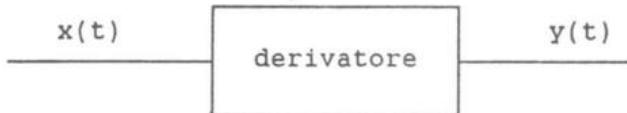
SI CONSIDERI UN RUMORE ERGODICO GAUSSIANO  $x(t)$  AVVENTE

\* VALORE EFFICACE 10  $\mu$ V;

\* SPETTRO DI POTENZA COSTANTE NELLA BANDA  $(0, 10 \text{ MHZ})$  E NULLO AL DI FUORI.

CALCOLARE IL VALORE EFFICACE DELLA SUA DERIVATA  $y(t) = dx/dt$ .

ESPRIMERE POI LE DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO E DEL SECONDO ORDINE DI  $y(t)$ .



&

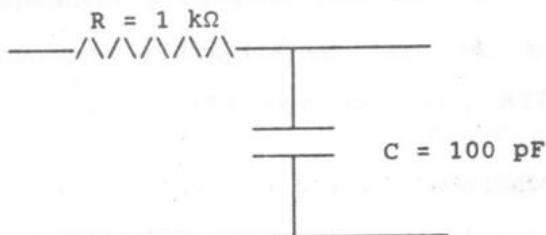
&

&

ALL'INGRESSO DELLA RETE RC DI FIGURA E' PRESENTE UN RUMORE GAUSSIANO E BIANCO NELLA BANDA 0÷5 MHZ CON VALORE EFFICACE 1 V.

CON RIFERIMENTO ALLA TENSIONE DI USCITA:

- \* CALCOLARE IL SUO VALORE EFFICACE;
- \* DETERMINARE IL SUO VALORE DI PICCO ASSUMENDO UN FATTORE DI CRESTA PARI A  $\sqrt{20}$ ;
- \* SCRIVERE LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO ORDINE.



& & &

SI CONSIDERI IL PROCESSO STOCASTICO  $y(t)$ , OTTENUTO FACENDO SUBIRE AD UN PROCESSO  $x(t)$ , AVENTE POTENZA P E SPETTRO COSTANTE NELLA BANDA  $(0, \Omega_m)$  E NULLO PER  $\Omega > \Omega_m$ , LA TRASFORMAZIONE LINEARE TEMPO INVARIANTE OPERATA DAL QUADRIPOLO RC DI FIGURA.

SI CALCOLI:

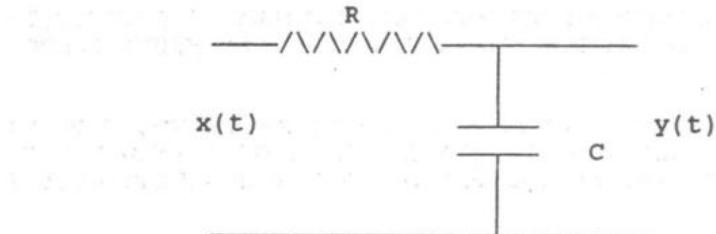
- \* LA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA DI  $y(t)$ ;
- \* LA POTENZA DI  $y(t)$ .

NELL'IPOTESI POI CHE  $x(t)$  APPARTENGA AD UN PROCESSO GAUSSIANO ERGODICO, SI SCRIVA LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO ORDINE DI  $y(t)$ .

SI ESPRIMA INFINE, FACENDO L'ULTERIORE IPOTESI

$$\Omega_m > > 1/RC,$$

LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL SECONDO ORDINE DI  $y(t)$ .



&

&

&

INTRODURRE LA FUNZIONE ERRORE  $\text{erf}(x)$ , LA FUNZIONE  
ERRORE COMPLEMENTARE  $\text{erfc}(x)$  ED ILLUSTRARNE IL SIGNIFI-  
CATO.

DEFINIRE POI CONVENZIONALMENTE IL VALORE DI PICCO  
DI UNA VARIABILE ALEATORIA GAUSSIANA E CALCOLARE IL  
RAPPORTO TRA TALE VALORE DI PICCO ED IL VALORE EFFICA-  
CE.

&

&

&

CON RIFERIMENTO AD UNA SERIE TEMPORALE ALEATORIA,  
DISCRETA NEI VALORI,

- \* INTRODURRE LE PROBABILITA' DEI VARI ORDINI;
- \* DARE LE DEFINIZIONI DI STAZIONARIETA' ED ERGODICITA';
- \* NEL CASO ERGODICO ESPRIMERE LA FUNZIONE DI AUTOCORRE-  
LAZIONE SIA COME MEDIA STATISTICA SIA COME MEDIA TEMPO-  
RALE;
- \* CALCOLARE DETTA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE PER LA  
SERIE TEMPORALE ALL'USCITA DI UN CODIFICATORE AMI,  
QUANDO L'INGRESSO E' COSTITUITO DA BIT EQUIPROBABILI E  
INDIPENDENTI.

&

&

&

CALCOLARE LO SPETTRO A RIGHE DELLA COMPONENTE PERIODICA DI UN SEGNALE PAM.

RICAVARE POI L'ESPRESSione DELLO SPETTRO DI POTENZA DELLO STESSO SEGNALE PAM PRIVATO DELLA COMPONENTE PERIODICA, RICAVARE CIOE' LA FORMULA:

$$G_{\text{pk}}(\Omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\Omega)|^2 .$$
$$\cdot \left\{ \langle a_n^2 \rangle - [\langle a_n \rangle]^2 + 2 \sum_1^{\infty} [\langle a_n a_{n+k} \rangle - [\langle a_n \rangle]^2] \cos k\Omega T \right\} .$$

&

&

&

RICAVARE L'ESPRESSIONE DELLO SPETTRO A RIGHE DELLA COMPONENTE PERIODICA DI UN SEGNALE PAM E FORNIRE UNA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEL RISULTATO OTTENUTO.

CALCOLARE POI LO SPETTRO A RIGHE DELLA COMPONENTE PERIODICA DI UN SEGNALE PAM CON IMPULSI DI MODULAZIONE RZ E DUTY CYCLE 0.5 E SIMBOLI 0, 1 EQUIPROBABILI.

&

&

&

CALCOLARE LO SPETTRO DI POTENZA DI UN SEGNALE PAM CON CODICE BIPOLARE, SIMBOLI EQUIPROBABILI E INIDIPENDENTI, IMPULSI RETTANGOLARI DI AMPIEZZA UNITARIA CON DUTY CYCLE 1.

DISEGNARE IL GRAFICO DELLO SPETTRO CALCOLATO IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA.

N.B. SI RICORDI LA FORMULA

$$G_{\kappa}(\Omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\Omega)|^2 \cdot . \{ \langle a_n^2 \rangle - [\langle a_n \rangle]^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [\langle a_n a_{n+k} \rangle - [\langle a_n \rangle]^2] \cos k\Omega T \} .$$

&

&

&

CALCOLARE LO SPETTRO DI POTENZA DI UN SEGNALE PAM CON CODICE AMI, CIFRE BINARIE PRIMA DELLA CODIFICA EQUIPROBABILI E INIDIPENDENTI, IMPULSI RETTANGOLARI DI AMPIEZZA UNITARIA CON DUTY CYCLE 0.5.

DISEGNARE IL GRAFICO DELLO SPETTRO CALCOLATO IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA.

N.B. SI RICORDI LA FORMULA

$$G_{\kappa}(\Omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\Omega)|^2 \cdot . \{ \langle a_n^2 \rangle - [\langle a_n \rangle]^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [\langle a_n a_{n+k} \rangle - [\langle a_n \rangle]^2] \cos k\Omega T \} .$$

&

&

&

SI CONSIDERI IL SEGNALE PAM  $s(t)$  GENERATO COME MOSTRATO IN FIGURA, OVE:

- \* UNA SORGENTE DI INFORMAZIONE BINARIA GENERA BIT  $b_n$  [ $b_n \in \{0,1\}$ ] EQUIPROBABILI ED INDIPIENDENTI FRA LORO;
- \* UN SUCCESSIVO CODIFICATORE (CODICE BIPOLARE) DA' ORIGINE ALLA SEQUENZA DI SIMBOLI  $\{a_n\}$  [ $a_n \in \{-1,1\}$ ];
- \* UNA ULTERIORE CODIFICA, EFFETTUATA SECONDO LA REGOLA

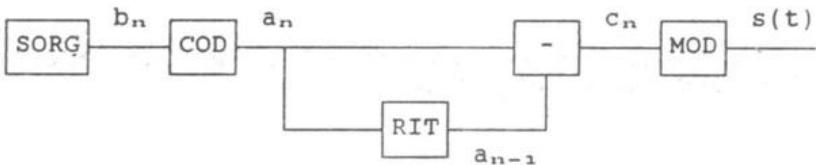
$$c_n = a_n - a_{n-1} ,$$

DA' LUOGO ALLA SERIE  $c_n$  [ $c_n \in \{-2, 0, 2\}$ ];

- \* INFINE, UN MODULATORE PAM DA':

$$s(t) = \sum_n c_n g(t - nT) ,$$

CON  $g(t)$  IMPULSO RETTANGOLARE NRZ DI AMPIEZZA UNITARIA.



CIO' PREMESSO, DETERMINARE:

- \* LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DELLA SERIE TEMPORALE  $\{b_n\}$ ;
- \* LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DELLA SERIE TEMPORALE  $\{a_n\}$ ;
- \* LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DELLA SERIE TEMPORALE  $\{c_n\}$ ;
- \* LO SPETTRO DI POTENZA DI  $s(t)$ .

DISEGNARE POI IL GRAFICO DELLO SPETTRO CALCOLATO IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA.

N.B. SI RICORDI LA FORMULA

$$G_{ss}(\Omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\Omega)|^2 .$$
$$\cdot \left\{ \langle a_n^2 \rangle - [\langle a_n \rangle]^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [\langle a_n a_{n+k} \rangle - [\langle a_n \rangle]^2] \cos k\Omega T \right\} .$$

CALCOLARE LO SPETTRO DI POTENZA DEL SEGNALE PAM  
 $s(t)$ :

$$s(t) = \sum_n a_n g(t - nT)$$

CON CODICE BIPOLARE [ $a_n \in \{-1, 1\}$ ], SIMBOLI EQUIPROBABILI E INDIPENDENTI, E  $g(t)$  ESPRESSO DA:

$$g(t) = \begin{cases} \cos \frac{\pi t}{T} & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

DISEGNARE POI IL GRAFICO DELLO SPETTRO CALCOLATO IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA.

N.B. SI RICORDI LA FORMULA

$$G_{\infty}(\Omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\Omega)|^2 .$$
$$\cdot \left\{ \langle a_n^2 \rangle - [\langle a_n \rangle]^2 + 2 \sum_1^{\infty} [\langle a_n a_{n+k} \rangle - [\langle a_n \rangle]^2] \cos k\Omega T \right\} .$$

&

&

&

SI CONSIDERI UN RESISTORE AVENTE RESISTENZA  $R = 1 \Omega$  ALLA TEMPERATURA DI  $18^\circ C$ . CALCOLARE IL VALORE EFFICACE DELLA DERIVATA DELLA SUA F.E.M. DI RUMORE NELLA BANDA DI FREQUENZE ( $10 \text{ MHz} \div 15 \text{ MHz}$ ).

&

&

&

DARE LE DEFINIZIONI, PRECISANDONE IL SIGNIFICATO FISICO, DI:

- \* TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE DI UN APPARATO LINEARE;
- \* TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE DI UNA SORGENTE DI SEGNALE;
- \* TEMPERATURA DI RUMORE DI SISTEMA.

&

&

&

DEFINIRE LA CIFRA DI RUMORE DI UN APPARATO LINEARE ED ILLUSTRARE IL PROCEDIMENTO DI MISURA.

CALCOLARE POI LA TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE E LA CIFRA DI RUMORE DI UN ATTENUATORE NORMALE ALLA TEMPERATURA  $T_a$  AVENTE GUADAGNO DISPONIBILE  $G_a$ .

&

&

&

DOPO AVER RICAVATO L'ESPRESSIONE DELLA TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE DI PIU' STADI IN CASCATA, CALCOLARE LA TEMPERATURA DI RUMORE DEL SISTEMA COSTITUITO DAI SEGUENTI BLOCCHI FUNZIONALI:

- 1) UN'ANTENNA RICEVENTE LA CUI TEMPERATURA DI RUMORE E'  $T_a = 60 \text{ }^{\circ}\text{K}$ ;
- 2) UN AMPLIFICATORE PARAMETRICO, DIRETTAMENTE COLLEGATO AI MORSETTI DI ANTENNA, RAFFREDDATO CON ELIO GASSOSO, AVENTE GUADAGNO  $G_1 = 20 \text{ dB}$  E TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE  $T_{r1} = 30 \text{ }^{\circ}\text{K}$ ;
- 3) UN SECONDO STADIO DI AMPLIFICAZIONE CON GUADAGNO  $G_2 = 10 \text{ dB}$  E CIFRA DI RUMORE  $F_2 = 4 \text{ dB}$ ;
- 4) UN GRUPPO COSTITUITO DA UN CONVERTITORE E DAGLI STADI DI AMPLIFICAZIONE A FREQUENZA INTERMEDIA, AVENTE CIFRA DI RUMORE COMPLESSIVA  $F_3 = 9 \text{ dB}$ .

RIPETERE IL CALCOLO IN ASSENZA DELLO SECONDO STADIO DI AMPLIFICAZIONE A RADIOFREQUENZA DESCRITTO AL PUNTO 3).

SI CONSIDERI UNA SORGENTE DI SEGNALE AVENTE IMPEDENZA INTERNA  $R = 75 \Omega$ , F.E.M. BIANCA NELLA BANDA 1 ÷ 10 MHZ E VALORE EFFICACE 1 V, TEMPERATURA DI RUMORE  $T_a = 350 \text{ }^{\circ}\text{K}$ . ESSA E' APPLICATA ALL'INGRESSO DI UN TRONCO DI CAVO MINICOASSIALE 1.2/4.4 LUNGO 5 KM ALLA TEMPERATURA  $T_a = 300 \text{ }^{\circ}\text{K}$ .

INFINE L'IMPEDENZA DI CARICO VALE  $R = 75 \Omega$ : SI CALCOLINO IL VALORE EFFICACE DELLA TENSIONE DI SEGNALE ED IL VALORE EFFICACE DELLA TENSIONE DI RUMORE AI MORSETTI DI TALE CARICO.

&

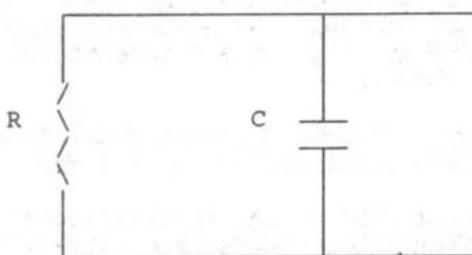
&

&

SI CONSIDERI IL GRUPPO RC DI FIGURA ALLA TEMPERATURA  $T_a$  E LA TENSIONE DI RUMORE PRESENTE A VUOTO AI SUOI MORSETTI.

CON RIFERIMENTO A TALE TENSIONE:

- \* CALCOLARE IL SUO VALORE EFFICACE;
- \* DETERMINARE IL SUO VALORE DI PICCO ASSUMENDO UN FATTORE DI CRESTA DI 13 dB;
- \* SCRIVERE LA DENSITA' DI PROBABILITA' DEL PRIMO ORDINE.



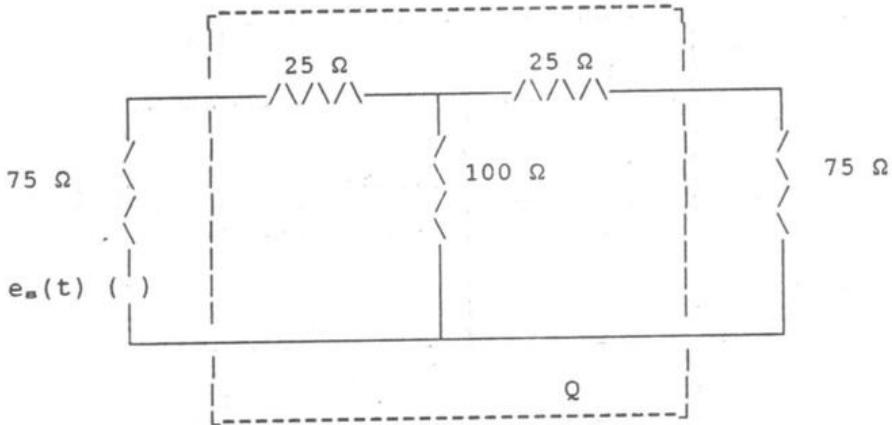
&

&

&

CON RIFERIMENTO AL CIRCUITO DI FIGURA:

- \* SI VERIFICHI CHE IL QUADRIPOLO Q E' ADATTATO SIA AI MORSETTI DI INGRESSO CHE A QUELLI DI USCITA;
- \* SI CALCOLI IL GUADAGNO DISPONIBILE DI Q E LA SUA ATTENUAZIONE IN POTENZA [IN DECIBEL];
- \* SI TROVI LA TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE DI Q QUANDO LA SUA TEMPERATURA FISICA E' DI 320 °K.



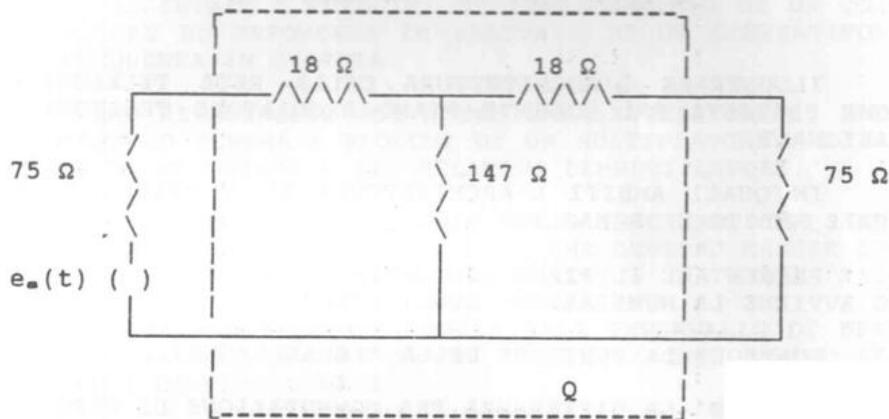
&

&

&

CON RIFERIMENTO AL CIRCUITO DI FIGURA:

- \* SI VERIFICHI CHE IL QUADRIPOLO Q E' ADATTATO SIA AI MORSETTI DI INGRESSO CHE A QUELLI DI USCITA;
- \* SI CALCOLI IL GUADAGNO DISPONIBILE DI Q E LA SUA ATTENUAZIONE IN POTENZA [IN DECIBEL];
- \* SI TROVI LA TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE DI Q QUANDO LA SUA TEMPERATURA FISICA E' DI 315 °K.



&

&

&

SI CONSIDERI UNA TRATTA DI CAVO COASSIALE 2.6/9.5 ADATTATA, LUNGA 5 KM, ALLA TEMPERATURA DI 300 °K.

SI ESPRIMA LA TEMPERATURA DI RUMORE E LA CIFRA DI RUMORE IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA E DIMOSTRARE LE FORMULE DI CUI SI FA USO.

QUALE E' IL VALORE EFFICACE DELLA TENSIONE DI RUMORE AI MORSETTI DI USCITA NELLA BANDA 300 KHZ ÷ 4 MHZ?

&

&

&

ILLUSTRARE L'ARCHITETTURA DELLA RETE TELEFONICA COME PREVISTA DAL VIGENTE PIANO REGOLATORE TELEFONICO NAZIONALE.

IN QUALI AMBITI L'ARCHITETTURA E' A STELLA ? IN QUALE AMBITO E' A MAGLIA?

PRESENTARE IL PIANO DI NUMERAZIONE. IN QUALE AMBITO AVVIENE LA NUMERAZIONE DEGLI UTENTI?

QUALE E' LA FUNZIONE DELLA SEGNALAZIONE?

QUALE E' LA DIFFERENZA FRA COMMUTAZIONE DI CIRCUITO E COMMUTAZIONE DI PACCHETTO?

&

&

&

SPIEGARE IL SIGNIFICATO DELLA SIGLA IDN. IN COSA CONSISTE LA INTEGRAZIONE DELLE TECNICHE?

SPIEGARE IL SIGNIFICATO DELLA SIGLA ISDN. IN COSA CONSISTE LA INTEGRAZIONE DEI SERVIZI?

PRESENTARE LA COMMUTAZIONE DI CIRCUITO E LA COMMUTAZIONE DI PACCHETTO. QUANDO CONVIENE ADOTTARE L'UNA O L'ALTRA?

ILLUSTRARE INFINE I PRINCIPALI SERVIZI TELEMATICI.

ILLUSTRARE LE CARATTERISTICHE SPETTRALI DEL SEGNALE TELEFONICO, DEL SEGNALE AUDIO NORMALE, DEL SEGNALE AUDIO MUSICALE E DEL SEGNALE AUDIO MUSICALE AD ALTA FREQUENZA.

ILLUSTRARE POI, GIUSTIFICANDOLE, LE CARATTERISTICHE SPETTRALI DEL SEGNALE TELEVISO (STANDARD A 625 LINEE E STANDARD A 525 LINEE).

&

&

&

PRESENTARE I PRINCIPI DI FUNZIONAMENTO DI UN CONVERTITORE DI FREQUENZA IN SALITA E DI UN CONVERTITORE DI FREQUENZA IN DISCESA.

CON RIFERIMENTO POI A TRE CANALI TELEFONICI, PRESENTARE LO SCHEMA A BLOCCHI DI UN MULTIPLATORE A DIVISIONE DI FREQUENZA E DEL RELATIVO DEMULTIPLATORE.

NEL MULTIPLATORE, QUALE E' L'INTERVALLO DI FREQUENZE FRA LE DUE BANDI LATERALI CHE DEBBONO ESSERE SEPARATE IN OGNI CONVERSIONE IN SALITA?

NEL DEMULTIPLATORE, QUALE E' L'INTERVALLO DI FREQUENZE FRA LE BANDI PASSANTI DEI FILTRI CHE DEBBONO SEPARARE I DIVERSI CANALI?

&

&

&

CON RIFERIMENTO AD UN SEGNALE TELEFONICO PRESENTARE LO SCHEMA A BLOCCHI DI UN CONVERTITORE A/D E DEL RELATIVO CONVERTITORE D/A (COMPLETO DI RETE EQUALIZZATRICE).

NEL CONVERTITORE A/D, QUALE E' LA FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO? ED IL NUMERO DI BIT DI CODIFICA PREVISTO DALLA NORMATIVA EUROPEA? CONSEGUENTEMENTE, QUANTO VALE LA FREQUENZA DI CIFRA?

NEL CONVERTITORE D/A, QUANDO PUO' ESSERE OMESSA LA RETE EQUALIZZATRICE? QUALI SONO IL LIMITE SUPERIORE DELLA BANDA PASSANTE ED IL LIMITE INFERIORE DELLA BANDA ATTENUATA DEL FILTRO PASSA-BASSO NECESSARIO PER LA RI-COSTRUZIONE DEL SEGNALE?

CON RIFERIMENTO A TRE CANALI TELEFONICI ANALOGICI,  
PRESENTARE LO SCHEMA A BLOCCHI DI UN MULTIPLATORE TDM-  
PCM E DEL RELATIVO DEMULTIPLATORE.

NEL DEMULTIPLATORE, QUALI SONO IL LIMITE SUPERIORE  
DELLA BANDA PASSANTE ED IL LIMITE INFERIORE DELLA BANDA  
ATTENUATA DEI FILTRI PASSA-BASSO NECESSARI PER LA RICO-  
STRUZIONE DEI SEGNALI?

PRESENTARE INFINE LA GERARCHIA NUMERICA COME PRE-  
VISTA DALLA NORMATIVA EUROPEA.

&

&

&

SCRIVERE L'ESPRESSONE DI UNA OSCILLAZIONE MODULA-  
TA IN AMPIEZZA E DEFINIRNE L'INDICE DI MODULAZIONE.

CON RIFERIMENTO A SEGNALI MODULANTI TRASFORMABILI  
SECONDO FOURIER, DETERMINARE POI GLI SPETTRI DI AMPIEZ-  
ZA E DI FASE.

SCRIVERE L'ESPRESSONE DELL'OSCILLAZIONE SSB CHE  
SI OTTIENE DA ESSA MEDIANTE L'ELIMINAZIONE DELLA BANDA  
LATERALE INFERIORE E SOPPRESSIONE PARZIALE DELLA POR-  
TANTE.

SCRIVERE INFINE L'ESPRESSONE DELL'OSCILLAZIONE  
VSB CHE SI OTTIENE DA ESSA MEDIANTE SOPPRESSIONE PAR-  
ZIALE DELLA BANDA LATERALE INFERIORE.

&

&

&

DISEGNARE LO SCHEMA A BLOCCHI DI UN MODULATORE  
SSB-SC ED ILLUSTRARNE I PRINCIPI DI FUNZIONAMENTO.

DISEGNARE POI LO SCHEMA A BLOCCHI DI UN DEMODULA-  
TORE SSB-SC ED ILLUSTRARE ANCHE PER ESSO I PRINCIPI DI  
FUNZIONAMENTO. SI TRATTA DI UN DEMODULATORE COERENTE?

&

&

&

ILLUSTRARE LA MODULAZIONE QAM.

MOSTRARE POI GLI EFFETTI DI UN ERRORE NELLA FASE DELLA PORTANTE DI RIFERIMENTO NELLA DEMODULAZIONE DI OSCILLAZIONI DSB-SC E QAM.

&

&

&

INTRODURRE LA MODULAZIONE D'ANGOLO DI UNA PORTANTE SINUSOIDALE. DEFINIRE IN PARTICOLARE LA MODULAZIONE DI FASE E LA MODULAZIONE DI FREQUENZA.

MOSTRARE COME

- \* UN MODULATORE DI FASE POSSA ESSERE TRASFORMATO IN UN MODULATORE DI FREQUENZA,
- \* UN MODULATORE DI FREQUENZA POSSA ESSERE TRASFORMATO IN UN MODULATORE DI FASE,
- \* UN DEMODULATORE DI FASE POSSA ESSERE TRASFORMATO IN UN DEMODULATORE DI FREQUENZA,
- \* UN DEMODULATORE DI FREQUENZA POSSA ESSERE TRASFORMATO IN UN DEMODULATORE DI FASE.

ESPRIMERE POI L'IMPEGNO DI BANDA DI UNA OSCILLAZIONE MODULATA D'ANGOLO (FORMULA DI CARSON).

&

&

&

CALCOLARE LO SPETTRO DI UNA OSCILLAZIONE MODULATA D'ANGOLO CON SEGNALE MODULANTE SINUSOIDALE.

ESPRIMERE POI L'IMPEGNO DI BANDA DI UNA OSCILLAZIONE MODULATA D'ANGOLO (FORMULA DI CARSON).

&

&

&

CALCOLARE GLI SPETTRI DI AMPIEZZA E FASE DI UNA OSCILLAZIONE MODULATA IN AMPIEZZA CON SEGNALE MODULANTE SINUSOIDALE E DARNE LA RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE.

RIPETERE IL CALCOLO CON RIFERIMENTO AD UNA OSCILLAZIONE MODULATA D'ANGOLO CON SEGNALE MODULANTE SINUSOIDALE E PICCOLO INDICE DI MODULAZIONE  $m$ .

A PARITA' DI INDICE DI MODULAZIONE, COME RISULTANO NEI DUE CASI GLI SPETTRI DI AMPIEZZA?

&

&

&

ILLUSTRARE LA NATURA DI UN SEGNALE PASSA-BANDA.

RICAVARE POI LA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHE' UN SEGNALE PASSA-BANDA SIA UNA OSCILLAZIONE MODULATA A PRODOTTO.

&

&

&

INTRODURRE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO EQUIVALENTE PASSA-BASSO  $H_o(\Omega)$  DI UNA RETE PASSA-BANDA.

RICAVARE POI LE CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE DI GRUPPO.

DEFINIRE I RITARDI DI FASE E DI GRUPPO.

IN COSA CONSISTE LA DISTORSIONE INTRODOTTA DA UNA RETE PASSA-BANDA SODDISFACENTE ALLE CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE DI GRUPPO, MA NON A QUELLE DI NON DISTORSIONE?

&

&

&

CALCOLARE LA RISPOSTA DI UNA RETE PASSA-BANDA AD UNA OSCILLAZIONE MODULATA A PRODOTTO. EFFETTUARE IL CALCOLO IN GENERALE E ANCHE CON RIFERIMENTO AD UNA RETE LINEARE DI TIPO SIMMETRICO.

NEL SECONDO CASO DISEGNARE LO SCHEMA A BLOCCHI DEL SISTEMA DI TRASMISSIONE E DEL SUO EQUIVALENTE IN BANDA BASE.

&

&

&

CALCOLARE LA RISPOSTA DI UNA RETE PASSA-BANDA AD UNA OSCILLAZIONE QAM. EFFETTUARE IL CALCOLO IN GENERALE E ANCHE CON RIFERIMENTO AD UNA RETE LINEARE DI TIPO SIMMETRICO.

NEL SECONDO CASO DISEGNARE LO SCHEMA A BLOCCHI DEL SISTEMA DI TRASMISSIONE E DEI SUOI EQUIVALENTI PASSA-BASSO, RELATIVI AI DUE SEGNALI MODULANTI.

&

&

&

CALCOLARE LO SPETTRO DI POTENZA DI UNA OSCILLAZIONE 4-ASK [SIMBOLI EQUIPROBABILI E INDIPENDENTI, IMPULSI DI MODULAZIONE RETTANGOLARI DI TIPO NRZ].

TRACCIARE IL GRAFICO DELLO SPETTRO OTTENUTO IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA.

&

&

&

DESCRIVERE I SERVIZI DI RADIODIFFUSIONE DEI PROGRAMMI SONORI E TELEVISIVI METTENDO IN EVIDENZA PER CIASCUNO DI ESSI:

- \* LE CARATTERISTICHE SPETTRALI DEL SEGNALE MODULANTE;
- \* IL TIPO DI MODULAZIONE ADOTTATO;
- \* L'IMPEGNO DI BANDA A RADIOFREQUENZA;
- \* LA GAMMA DI FREQUENZA IN CUI VIENE PRESTATO IL SERVIZIO.

&

&

&

CON RIFERIMENTO AL SEGNALE TELEVISIVO PRESENTARE:

- \* UN CALCOLO DI MASSIMA DELLA LARGHEZZA DI BANDA;
- \* I DUE STANDARD PRINCIPALI.

FACENDO RIFERIMENTO POI ALLA RADIODIFFUSIONE DEI PROGRAMMI TELEVISIVI PRECISARE:

- \* IL METODO DI MODULAZIONE ADOTTATO PER LA DIFFUSIONE DEL SEGNALE VIDEO;
- \* LA BANDA DEL SEGNALE SONORO ASSOCIATO;
- \* IL METODO DI MODULAZIONE ADOTTATO PER LA DIFFUSIONE DEL SEGNALE SONORO;
- \* LA LARGHEZZA DI BANDA COMPLESSIVA DEL CANALE RADIO;
- \* LE GAMME DELLE FREQUENZE RADIO IN CUI VIENE SVOLTO IL SERVIZIO.

&

&

&

SI CONSIDERI UN COLLEGAMENTO DI 2500 KM SU CAVO MINICOASSIALE 1.2/4.4 COSTITUITO DA TRATTE DI EGUALE LUNGHEZZA  $L_t$  COMPRENDENTI AMPLIFICATORI-EQUALIZZATORI CON GUADAGNO, AD OGNI FREQUENZA, PARI ALL'ATTENUAZIONE INTRODOTTA DA CIASCUNA TRATTA. SI DETERMINI  $L_t$  IN MODO CHE LA POTENZA DEL RUMORE TERMICO ALL'USCITA DEL COLLEGAMENTO, IN UNA BANDA  $\Delta f = 4$  KHZ CENTRATA SULLA FREQUENZA  $f = 4$  MHZ, NON SUPERI IL VALORE  $N_o = 350$  pW SAPENDO CHE ALLA STESSA FREQUENZA LA CIFRA DI RUMORE F DEGLI AMPLIFICATORI-EQUALIZZATORI VALE 5 dB. SI RIPETA IL MEDESIMO CALCOLO PER  $f = 12$  MHZ.

&amp;

&amp;

&amp;

SI CONSIDERI UN COLLEGAMENTO DI 2500 KM SU CAVO MICROCOASSIALE 0.7/2.9 COSTITUITO DA TRATTE DI EGUALE LUNGHEZZA  $L_t$  COMPRENDENTI AMPLIFICATORI-EQUALIZZATORI CON GUADAGNO, AD OGNI FREQUENZA, PARI ALL'ATTENUAZIONE INTRODOTTA DA CIASCUNA TRATTA. SI DETERMINI  $L_t$  IN MODO CHE LA POTENZA DEL RUMORE TERMICO ALL'USCITA DEL COLLEGAMENTO, IN UNA BANDA  $\Delta f = 4$  KHZ CENTRATA SULLA FREQUENZA  $f = 4$  MHZ, NON SUPERI IL VALORE  $N_o = 350$  pW SAPENDO CHE ALLA STESSA FREQUENZA LA CIFRA DI RUMORE F DEGLI AMPLIFICATORI-EQUALIZZATORI VALE 5 dB.

&amp;

&amp;

&amp;

SI CONSIDERI UN COLLEGAMENTO NUMERICO SU LINEA METALLICA.

SPIEGARE IN COSA CONSISTE L'INTERFERENZA INTERSIMBOLO.

DETERMINARE NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE LA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER L'ANNULLAMENTO DELL'INTERFERENZA INTERSIMBOLO.

SI ILLUSTRINO INFINE LE FUNZIONI DEGLI AMPLIFICATORI-EQUALIZZATORI.

RICAVARE, IN CONDIZIONI DI ASSENZA DI INTERFERENZA INTERSIMBOLO, LA PROBABILITA' DI ERRORE PER SIMBOLO IN UN COLLEGAMENTO NUMERICO CON RIFERIMENTO AI SEGUENTI CODICI DI LINEA:

- \* BIPOLARE ALTERNATO (AMI),
- \* BIPOLARE.

ESPRIMERE POI IL VALORE EFFICACE  $\sigma$  DEL RUMORE  $n(t)$  NEL PUNTO DI DECISIONE IN FUNZIONE DEI PARAMETRI CHE CARATTERIZZANO LA RUMOROSITA' DEL SISTEMA.

&

&

&

SI CONSIDERI UN SISTEMA DI TRASMISSIONE NUMERICO CON FREQUENZA DI CIFRA  $B_r = 34.368$  Mbit/s SU CAVO MICROCOASSIALE 0.7/2.9. IL CODICE DI LINEA E' BIPOLARE ALTERNATO (AMI), GLI IMPULSI TRASMESSI SONO RETTANGOLARI CON DUTY CYCLE 0.5, IL PASSO DI RIGENERAZIONE  $L_c = 2$  KM, L'INTERFERENZA INTERSIMBOLO VIENE RESA NULLA MEDIANTE AMPLIFICATORI-EQUALIZZATORI CHE REALIZZANO, IN CIASCUNA TRATTA, UNA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA DEL CANALE DI TRASMISSIONE EQUIVALENTE A COSENO RIALZATO CON FATTORE DI ROLL-OFF  $\alpha = 0.8$ , LA CIFRA DI RUMORE DEGLI AMPLIFICATORI-EQUALIZZATORI E'  $F = 7$  dB IN TUTTA LA BANDA DI FREQUENZE DI LAVORO.

SI DETERMINI IL VALORE MINIMO CHE DEVE AVERE LA AMPIEZZA  $V_m$  DEGLI IMPULSI TRASMESSI AFFINCHE' LA PROBABILITA' DI ERRORE  $P_e$ , PER OGNI SEZIONE DI RIGENERAZIONE, SIA NON SUPERIORE A  $10^{-9}$ .

&

&

&

## IL SEGNALE PAM

$$s(t) = \sum_n a_n g(t - nT),$$

CON CODICE BIPOLARE [ $a_n \in \{-1, 1\}$ ], SIMBOLI EQUIPROBABILI E INIDIPENDENTI, E  $g(t)$  IMPULSO RETTANGOLARE DI AMPIEZZA  $V_m$  E DUTY CYCLE 1, VIENE TRASMESSO SU UN MEZZO LINEARE IDEALE, AVENTE FUNZIONE DI TRASFERIMENTO:

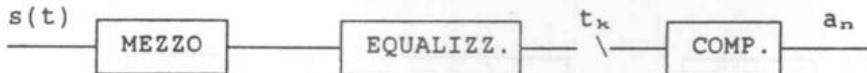
$$P(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega t_0} & |\Omega| \leq 2\pi/T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

I SIMBOLI  $a_n$  VENGONO RIGENERATI CON UN APPARATO CHE COMPRENDE:

- \* UN EQUALIZZATORE, AVENTE CIFRA DI RUMORE  $F$ , CHE REALIZZA UNA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA DEL CANALE DI TRASMISSIONE EQUIVALENTE A COSENO RIALZATO (AMPIEZZA MASSIMA UNITARIA) CON FATTORE DI ROLL-OFF  $\alpha$  ED UNA CARATTERISTICA DI FASE DELLO STESSO CANALE PROPORZIONALE AD  $\Omega$  (LIVELLO DI IMPEDENZA:  $R$ );
- \* UN SUCCESSIVO ORGANO DI LETTURA CHE PRELEVA I VALORI DELL'USCITA DELL'EQUALIZZATORE NEGLI INSTANTI IN CUI MANCA L'INTERFERENZA INTERSIMBOLO;
- \* UN SUCCESSIVO ORGANO DI DECISIONE (COMPARATORE DI TENSIONE CON SOGLIA POSTA IN CORRISPONDENZA ALLO 0).

CIO' PREMESSO, ESPRIMERE:

- \* LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELL'EQUALIZZATORE;
- \* IL VALORE EFFICACE DEL RUMORE ALL'USCITA DELL'EQUALIZZATORE;
- \* LA PROBABILITA' DI ERRORE PER SIMBOLO.



IL SEGNALE PAM

$$s(t) = \sum_n a_n g(t - nT)$$

CON CODICE BIPOLARE  $[a_n \in \{-1, 1\}]$ , SIMBOLI EQUIPROBABILI E INDIPENDENTI, E  $g(t)$  IMPULSO RETTANGOLARE DI AMPIEZZA  $V_m$  E DUTY CYCLE 1, VIENE TRASMESSO SU UN MEZZO LINEARE IDEALE, AVENTE FUNZIONE DI TRASFERIMENTO:

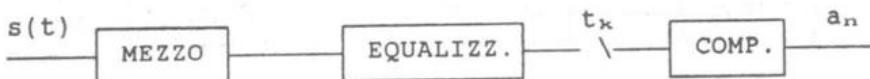
$$P(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega t_0} & |\Omega| \leq 3\pi/(2T) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

I SIMBOLI  $a_n$  VENGONO RIGENERATI CON UN APPARATO CHE COMPRENDE:

- \* UN EQUALIZZATORE, AVENTE CIFRA DI RUMORE  $F$ , CHE REALIZZA UNA CARATTERISTICA DI AMPIEZZA DEI CANALE DI trasmissione EQUIVALENTE A COSENO RIALZATO (AMPIEZZA MASSIMA UNITARIA) CON FATTORE DI ROLL-OFF  $\alpha$  ED UNA CARATTERISTICA DI FASE DELLO STESSO CANALE PROPORZIONALE AD  $\Omega$  (LIVELLO DI IMPEDENZA:  $R$ );
- \* UN SUCCESSIVO ORGANO DI LETTURA CHE PRELEVA I VALORI DELL'USCITA DELL'EQUALIZZATORE NEGLI ISTANTI IN CUI MANCA L'INTERFERENZA INTERSIMBOLO;
- \* UN SUCCESSIVO ORGANO DI DECISIONE (COMPARATORE DI TENSIONE CON SOGLIA POSTA IN CORRISPONDENZA ALLO 0).

CIO' PREMESSO, ESPRIMERE:

- \* LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELL'EQUALIZZATORE ED IL MASSIMO POSSIBILE VALORE DI  $\alpha$ ;
- \* IL VALORE EFFICACE DEL RUMORE ALL'USCITA DELL'EQUALIZZATORE;
- \* LA PROBABILITA' DI ERRORE PER SIMBOLO.



SI ILLUSTRI LO SCHEMA A BLOCCHI DI UN COLLEGAMENTO NUMERICO SU FIBRA OTTICA.

SI ACCENNI ALLE PRINCIPALI CAUSE DI RUMORE NEL RICEVITORE OTTICO.

SI ESPRIMA IL LIMITE QUANTICO ED SE NE DIA IL SIGNIFICATO.

&

&

&

IN UN COLLEGAMENTO NUMERICO SU FIBRA OTTICA QUALI SONO LE TRE FINESTRE ATTUALMENTE IMPIEGATE? IN QUALE ZONA DELLO SPETTRO ELETTROMAGNETICO SONO COMPRESE?

QUALE E' L'ORDINE DI GRANDEZZA DELL'ATTENUAZIONE DELLA FIBRA IN CORRISPONDENZA ALLA TERZA FINESTRA?

RICORDANDO POI CHE LA PROBABILITA'  $P_e$  CHE UN IMPULSO OTTICO RICEVUTO IN CORRISPONDENZA AL SIMBOLÒ 1 NON GENERI ALCUNA COPPIA ELETTRONE-LACUNA E' DATA DA:

$$P_e = e^{-\frac{E_o}{hf}}$$

OVE  $E_o$  E' L'ENERGIA ASSOCIATA ALL'IMPULSO OTTICO E  $hf$  L'ENERGIA DI CIASCUN FOTONE, CALCOLARE IL LIMITE QUANTICO PER AVERE UNA PROBABILITA' DI ERRORE PER SIMBOLÒ INFERIORE A  $10^{-9}$ .

&

&

&

SU UN COLLEGAMENTO IN FIBRA OTTICA IN TERZA FINESTRA (LAMBDA = 1.55  $\mu$ m), COSTITUITO DA PIU' SEZIONI DI RIGENERAZIONE IN CASCATA, VENGONO TRASMESSI BIT EQUIPROBABILI ED INDIPENDENTI CHE MODULANO ON-OFF LA PORTANTE.

SI SA CHE:

- LA FREQUENZA DI CIFRA E' PARI AD 1 GBIT/S;
- I RICEVITORI OTTICI USATI NEI RIPETITORI RIGENERATIVI SONO A RIVELAZIONE DIRETTA E RICHIEDONO 40 FOTONI/BIT;
- LA POTENZA MEDIA TRASMESSA DA CIASCUN RIPETITORE E' 1 mW;
- L'ATTENUAZIONE DELLA FIBRA VALE 0.2 DB/KM.

CALCOLARE IL PASSO DI RIGENERAZIONE ASSUMENDO L'ATTENUAZIONE DELLA FIBRA COME CAUSA PRINCIPALE CHE DETERMINA TALE PASSO.

N.B. IL VALORE DELLA COSTANTE DI PLANCK E'

$$h = 6.55 \cdot 10^{-34} \text{ J/Hz}$$

&

&

&

IN UN COLLEGAMENTO OOK SU FIBRA OTTICA IN TERZA FINESTRA (LAMBDA = 1.55 μm). SIA P<sub>r</sub> LA POTENZA MEDIA RICEVUTA E B<sub>r</sub> LA FREQUENZA DI CIFRA (BIT EQUIPROBABILI E INDIPENDENTI).

CIO' PREMESSO:

- TROVARE IL NUMERO DI FOTONI RICEVUTI PER BIT;
- MOSTRARE CHE, FISSATO IL NUMERO DI FOTONI PER BIT DA CONSEGNARE AL FOTORIVELATORE, LA POTENZA CHE DOBBIAMO RICEVERE E' PROPORZIONALE ALLA FREQUENZA DI CIFRA;
- TROVARE LA POTENZA MEDIA CHE E' NECESSARIO RICEVERE PER AVERE 100 FOTONI/BIT QUANDO B<sub>r</sub> = 1 GBIT/S;
- NEL CASO DELLA DOMANDA PRECEDENTE, SIA 1 mW LA POTENZA MEDIA CHE POSSIAMO LANCIARE E 0.2 DB/KM L'ATTENUAZIONE DELLA FIBRA: QUALE DISTANZA POSSIAMO COPRIRE?

N.B. IL VALORE DELLA COSTANTE DI PLANCK E'

$$h = 6.55 \times 10^{-34} \text{ J/Hz}$$

&

&

&

CON RIFERIMENTO AD UN SISTEMA DI TRASMISSIONE DI TIPO PASSA BANDA, FORNIRE:

- \* GLI SCHEMI A BLOCCHI DEI TRASMETTITORI A MODULAZIONE DIRETTA E SUPERETERODINA;
- \* GLI SCHEMI A BLOCCHI DEI RICEVITORI A DEMODULAZIONE DIRETTA E SUPERETERODINA;
- \* LO SCHEMA A BLOCCHI DEL CANALE DI TRASMISSIONE, EVIDENZIANDO ANCHE IL RUMORE GAUSSIANO CHE INEVITABILMENTE SI SOMMA AL SEGNALE UTILE TRASMESSO.

MOSTRARE POI COME SI POSSA CARATTERIZZARE IL SUDETTO RUMORE.

&

&

&

SI DESIDERÀ RICEVERE UN'OSCILLAZIONE MODULATA IN AMPIEZZA DA UN SEGNALE MODULANTE DI FREQUENZA  $f_m = 5$  MHZ.

SI DISPONE DI UN RICEVITORE AVENTE BANDA B PARI A QUELLA DELL'OSCILLAZIONE MODULATA E CIFRA DI RUMORE  $F = 13$  DB, DI UN'ANTENNA CON TEMPERATURA DI RUMORE  $T_a = 350$  °K, DI UNA DISCESA DI ANTENNA CON ATTENUAZIONE 3 DB.

DETERMINARE LA POTENZA  $P_r$  CHE SI DEVE RICEVERE SE SI VUOLE CHE IL RAPPORTO FRA LA POTENZA DI SEGNALE E QUELLA DI RUMORE ALL'INGRESSO DEL DEMODULATORE SIA DI 35 DB.

