**7. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ.**

**7.1. Типы случайных процессов.**

***Случайным называется процесс u(t), мгновенные значения которого являются случайными величинами.***

1. дискретная случайная последо­ва­тель­ность (дис­кретный про­цесс с дис­крет­ным временем). Такие процессы могут быть по­лучены квантованием слу­чай­ного процесса в дис­крет­ные мо­менты времени при ограни­чен­ной разряд­ной сетке.
2. Случайная последователь­ность (непрерывный процесс с дискретным временем .
3. Дискретный (разрывный) про­цесс с непрерывным вре­менем.



1. Непревывнозначеый случай­ный процесс – непрерывен во времени, но могут быть разрывы (скачки – разрывы первого рода). Если скачков нет – непрерывный процесс.



1. Случайный точечный процесс(поток) – потоки событий. Например, простейший поток, поток Пальма.



1. Импульсные случайные процессы.



**6.2. Описание случайных процессов.**

**6.2.1.Функция распределения и плотность вероятности.**

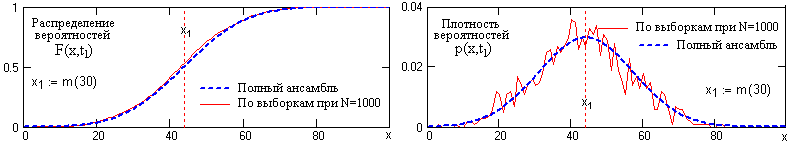
Усреднение по ансамблю: имеются реализации случайного процесса *u(t1), … u(tn)*. В момент времени *t1* имеем отсчеты *{X1}*



Двумерная функция распределения:



и т.д. Самое полное описание – *n*-мерные законы распределения. Такое усреднение называется усреднением по ансамблю. Случайные процессы называются эквивалентными, если совпадают их n-мерные законы распределения.



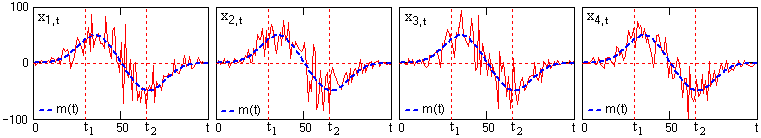
**6.2.2. Моментные функции случайных процессов.**

Рассмотрим ансамбль реализаций случайного процесса в момент времени t1. Определим числовые характеристики случайной величины X1, представляющей собой значения случайного процесса в момент времени t1.

Начальный момент

.

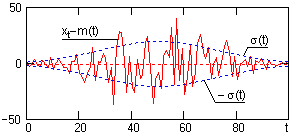
Для *k*=1 – математическое ожидание.



Центральный момент



Дисперсия случайного процесса представляет собой второй центральный момент:



***Моментной функцией случайного процесса u(t) называется неслучайная функция αk(t) или μk (t) аргумента t, которые при значении tравны моментам (начальным или центральным) соответствующих сечений случайного процесса.***

Смешанный начальный момент второго порядка определим для двух сечений случайного процесса:



Смешанный центральный момент



Начальные и центральные смешанные моменты могут быть определены и для большего числа сечений случайного процесса:



* + 1. **Корреляционные функции.**

Пусть имеется два случайных процесса u1(t) и u2(t). Процессы имеют одинаковые математические ожидания m1(t) = m2(t) и дисперсии D1(t) = D2(t). Процессы различаются по скорости изменения. Степень зависимости двух сечений случайного процесса u(t) в моменты времени t1 и t2 определим как ковариацию случайных величин X1 иX2 сечений случайного процесса в моменты времени t1 и t2:



***Корреляционной функцией случайного процесса u(t) называется неслучайная функция ku(t1,t2) двух аргументов t1 и t2, которая при паре значений t1 и t2 равна ковариации соответствующих сечений случайного процесса.***

Свойства.

1. ******ku(t1,t1)=Du(t1).
2. ku(t1,t2) = ku(t2,t1).

Нормированная корреляционная функция



Свойства нормированной корреляционной функции.

ru(t1,t1) = 1.

ru(t1,t2) = ru(t2,t1).

|ru(t1,t1)| ≤ 1.

Расчетные формулы:



***Пример****. *

*my(t)=M[X∙e-t]=e-t ∙m.*

*Dy(t)=D[X∙e-t]=e-2tσ2.*

**

Взаимная корреляционная функция.

Пусть имеется два случайных процесса u(t) и v(t). Взаимосвязь значений случайных процессов в моменты времени t1 и t2 определим так:



***Взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов u(t) и v(t) называется неслучайная функция двух аргументов t1 и t2, которая при каждой паре значений t1 и t2 равна ковариации двух сечений случайных процессов u(t) и v(t).***

Свойства.

1. 
2. 
3. 
4. 

**6.3. Стационарные и нестационарные процессы.**

Случайный процесс называется стационарным в *узком* смысле, если конечномерные функции распределения вероятностей любого порядка инварианты относительно сдвигов во времени:



Стационарный процесс ведет себя однородно во времени.

Стационарный процесс в широком смысле требует совпадения только двумерных характеристик:



Свойства:



Нормированная корреляционная функция и ее свойства:



Нормированная корреляционная функция убывающая.

* 1. **Эргодическе и неэргодическе случайные процессы.**

Все рассмотренные ранее характеристики случайных процессов получены в результате усреднения по ансамблю. Существуют процессы, для которых характеристики могут быть получены по результату анализа одной реализации, т. е. усреднением по времени. Такие процессы обладают свойством эргодичности, которое состоит в том, что *любая реализация эргодического случайного процесса достаточной продолжительности является представительной.* Для таких процессов характеристики, полученные усреднением по времен совпадают с характеристиками, полученными усреднением по ансамблю.

Расчетные формулы для определения характеристик случайного процесса усреднением по времени:

|  |  |
| --- | --- |
| Расчетные формулы | условия применения |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

*Пример случайного процесса, неэргодичного по математическому ожиданию:*

*u(t)=x(t)+V, где:*

*x(t) – стационарный случайный процесс;*

*V – независимая случайная величина.*

*mu(t)=mx+mv. ku(τ)=kx(τ)+Dv.*

**

* 1. **Преобразование случайных процессов.**

**6.4.1. Сложение случайных процессов.**

* сложение двух случайных функций: z(t)=x(t)+y(t).

M[z(t)]=mx(t)+my(t);

kz(t1,t2)=M[(x(t1)+y(t1)—mx(t1)—my(t1))⋅ (x(t2)+y(t2)—mx(t2)—my(t2))]=

=M[((x(t1)—mx(t1))+(y(t1)—my(t1)))⋅((x(t2)—mx(t2))+(y(t2)—my(t2)))]=

=M[{(x(t1)—mx(t1))⋅ (x(t2)—mx(t2))}+{(x(t1)—mx(t1))⋅ (y(t2)—my(t2))}+

+{(y(t1)—my(t1))⋅ (x(t2)—mx(t2))}+{(y(t1)—my(t1))⋅(y(t2)—my(t2))}]=

=M[(x(t1)—mx(t1))⋅ (x(t2)—mx(t2))]+M[(x(t1)—mx(t1))⋅ (y(t2)—my(t2))]+

+M[(y(t1)—my(t1))⋅ (x(t2)—mx(t2))]+M[(y(t1)—my(t1))⋅(y(t2)—my(t2))]=

kx(t1,t2)+kxy(t1,t2)+kyx(t1,t2)+ky(t1,t2).

Если процессы не коррелированны, то kz(t1,t2)= kx(t1,t2) +ky(t1,t2).

* сложение случайной функции с неслучайной: z(t)=x(t)+с(t).

M[z(t)]=mx(t)+с(t);

kz(t1,t2)=kx(t1,t2).

* сложение случайной функции с некоррелированной случайной величиной: z(t)=x(t)+Y.

M[z(t)]=mx(t)+my;

kz(t1,t2)=kx(t1,t2)+D[Y]

**6.4.2. Линейное преобразование случайных процессов.**

Преобразование называется линейным, если оно обладает следующими свойствами:

Z=L(cX)=cL(X).

Z=L(X+Y)=L(X)+L(Y).



Определение взаимной корреляционной функции:



*Пример. z(t)=c(t)∙x(t), где c(t) – неслучайная функция.*

*mz(t)=c(t)∙mx(t);*

*kz(t1,t2)=c(t1)∙c(t2)∙kx(t1,t2).*

**6.4.3. Преобразование стационарных процессов.**

* Сумма двух стационарных случайных процессов с характеристиками mx, my, kx(τ), ky(τ) является стационарной, т.к.



* сумма стационарного процесса и неслучайной функции – нестационарный по математическому ожиданию, т.к.



* Произведение стационарного случайного процесса на неслучайную функцию – нестационарный случайный процесс.



* производная стационарного случайного процесса стационарна:



* Интеграл от стационарного случайного процесса – нестационарный процесс:



**6.5. Спектральное представление СП**

**6.5.1.Финитное преобразование Фурье случайных функций**.

По аналогии с функциями детерминированных сигналов, отдельно взятая на интервале 0-Т реализация uk(t) стационарного случайного процесса 0X(t) может быть представлена в виде ряда Фурье:

uk(t) =Vu,k(i) exp(jit)  (6.12)

Vu,k(i) = (1/T)uk(t) exp(-jit) dt, (6.13)

или, в односторонней тригонометрической форме:

uk(t) = Au,k(0) + 2(Au,k(i) cos(it) + Bu,k(i) sin(it)), (6.12')

Au,k(i) = (1/T)uk(t) cos(it) dt, (6.13')

Bu,k(i) = (1/T)uk(t) sin(it) dt. (6.13'')

где i = i⋅ - частоты спектра,  = 2/T - шаг по частоте. Выражения (9.2.13) обычно называют *спектральными характеристиками реализаций*.

Спектральная характеристика Vu,k), а равно и ее составляющие Au,k() и Bu,k(),являются случайными функциями частоты - единичными реализациями случайных функций Vu(), Au() и Bu(). Соответственно, и частотное распределение амплитуд и фаз составляющих гармонических колебаний случайного процесса 0U(t) представляет собой случайные функции с соответствующими неслучайными функциями дисперсий.

Если функция 0U(t) является дискретной последовательностью случайных величин 0U(n⋅t) в интервале по n от 0 до N, то, как это и положено для дискретных преобразований Фурье, расчет спектральных характеристик выполняется в Главном частотном диапазоне (до частоты Найквиста N = /t), с заменой в выражениях (6.13) интегрирования на суммирование по n и с соответствующим изменением пределов суммирования в выражениях (6.12). Данное пояснение сохраняется и на все дальнейшие выкладки.

Спектральные характеристики единичных реализаций случайных процессов, как правило, интереса не представляют, и на практике используются довольно редко. Спектральная характеристика случайной функции 0U(t), как ансамбля реализаций, может быть определена осреднением функций (6.12-13) по реализациям, в результате которого мы получим те же самые функции (6.12-13), только без индексов k. При этом, в силу центрированности стационарной случайной функции 0U(t), мы должны иметь:

M{U(t)} =M{Vu(i)} exp(jit) = 0 (6.14)

Последнее будет выполняться при условии M{Vu(i)} = 0, т.е. математическое ожидание значений спектральной характеристики центрированного стационарного случайного процесса должно быть равно нулю на всех частотах. Другими словами, спектральной характеристики центрированного стационарного случайного процесса не существует. Существуют только спектральные характеристики его отдельных реализаций, которые и используются, например, для моделирования этих реализаций.

Для произвольных нецентрированных случайных процессов U(t), при записи последних в форме U(t) = mu(t) + 0U(t), будем соответственно иметь преобразование Фурье:

mu(t) + 0U(t) ⬄ mu() + Vu() = mu(),

т.е., по существу, функцию спектра (или спектральной плотности) неслучайной функции математического ожидания случайного процесса, естественно, в пределах той точности, которую может обеспечить выборочный ансамбль реализаций. Это лишний раз подтверждает отсутствие в спектрах случайных процессов какой-либо информации о флюктуационной составляющей процессов, и говорит о том, что фазы спектральных составляющих в реализациях процесса являются случайными и независимыми.

С учетом вышеизложенного, под спектрами случайных процессов (или спектральной плотностью при интегральном преобразовании Фурье) повсеместно понимается не преобразования Фурье собственно случайных функций, а преобразования Фурье функций мощности случайных процессов, поскольку функции мощности не зависят от соотношения фаз спектральных составляющих процессов.

**6.2.Спектры мощности случайных функций**

Средняя мощность случайного процесса U(t), зарегистрированного в процессе одной реализации на интервале 0-Т, с использованием равенства Парсеваля может быть вычислена по формуле:

WT =[u2(t)/T] dt =[|UT(f)|2/T] df,

где U(f) – спектральная плотность единичной реализации u(t). При увеличении интервала Т энергия процесса на интервале неограниченно нарастает, а средняя мощность стремится к определенному пределу:

W =[ |UT(f)|2] df,

где подынтегральная функция представляет собой спектральную плотность мощности данной реализации случайного процесса:

W(f) = |UT(f)|2. (6.15)

Очень часто это выражение называют просто спектром мощности. Плотность мощности является вещественной, неотрицательной и четной функцией частоты. В общем случае, плотность мощности необходимо усреднять по множеству реализаций, но для эргодических процессов допустимо усреднение по одной достаточно длительной реализации.

**6.3. Теорема Винера-Хинчина.**

R() = (1/2) W() exp(j) d.

Отсюда следует, что корреляционная функция случайного стационарного эргодического процесса представляет собой обратное преобразование Фурье его спектра мощности. Соответственно, для спектра мощности случайного процесса имеем прямое преобразование Фурье:

W() = R() exp(-j) d.

В этом состоит суть теоремы Винера-Хинчина. Функции W() и R() являются вещественными и четными, а соответственно в тригонометрической форме:

R() = 2W(f)cos(2f) df, W(f) = 2R()cos(2f) d.

Преобразования Фурье ковариационных функций, являются спектрами мощности флюктуирующей составляющей процессов. С этих позиций дисперсия случайных процессов представляет собой среднюю мощность его флюктуаций

K() = 2 = (1/2)W() d

т.е., равна суммарной мощности всех его частотных составляющих процессов.

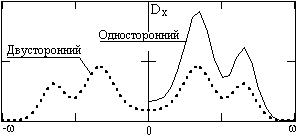


Рис. 9.2.1. Спектры случайных функций.

Дисперсия стационарного случайного процесса U(t) может определяться по формуле (9.2.23) при  = 0:

Du =Du(i),

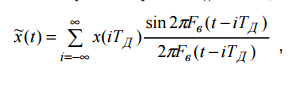
т.е. дисперсия стационарного случайного процесса равна сумме дисперсий всех случайных гармоник ее спектрального разложения.

[**Ширина спектра сигнала**](http://technical_translator_dictionary.academic.ru/272139/%D1%88%D0%B8%D1%80%D0%B8%D0%BD%D0%B0_%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D0%B3%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B0) — величина, характеризующая часть спектра сигнала, содержащего спектральные составляющие, суммарная мощность которых составляет заданную часть полной мощности сигнала.

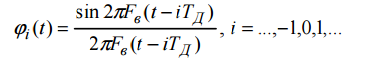
**6.4. Дискретизация сигналов во времени**

Под дискретизацией сигналов понимают преобразование функций непрерывных переменных в функции дискретных переменных, по которым исходные непрерывные функции могут быть восстановлены с заданной точностью. Для точного представления произвольной непрерывной функции x(t) на конечном интервале времени Т необходимо располагать данными о мгновенных значениях (отсчётах) этой функции во всех точках интервала, т.е. непрерывным множеством отсчётов, отстоящих друг от друга на бесконечно малые интервалы. Некоторое приближённое представление о функции x(t) можно составить по её отображению в виде дискретной последовательности импульсов, имеющих на интервалах ∆t значения x(i∆t), называемых отсчётами. Операция замены непрерывной функции последовательностью отсчётов её мгновенных значений называется дискретизацией.

При представлении сигналов регулярными отсчётами основным является выбор частоты дискретизации Fд = 1/Tд и базисных функций ϕi(t). Особенно важно найти минимальную частоту Fд, при которой еще имеется принципиальная возможность восстановления непрерывного сигнала с заданной погрешностью. При решении этих задач следует принимать во внимание свойства исходных сигналов, способы восстановления и требуемую точность восстановления. Для модели сигнала с ограниченным спектром решение содержится в теореме Котельникова, формулировка которой звучит так: любую непрерывную функцию со спектром, ограниченным полосой частот от нуля до Fв , можно однозначно определить последовательностью ее мгновенных значений, взятых через интервалы Tд ≤ 1/2 Fв по формуле



Восстановление непрерывной функции производится в соответствии с приведенным выражением, которое называется рядом Котельникова. Базисными функциями в данном случае служат функции отсчётов



Фундаментальное значение теоремы Котельникова заключается в том, что она обосновывает возможность дискретизации по аргументу (времени) любых функций с ограниченным спектром.

Пусть для некоторых сигналов x(t) с ограниченным спектром все отсчёты в точках k∆t, лежащих за пределами некоторого интервала времени длительностью Т, равны нулю. Тогда ряд вырождается в конечную сумму, число членов которой n равно числу отсчётных точек, умещающихся на интервале Т: n ≈ Т /∆t = 2FвT, эта величина представляет размерность пространства. В теории связи ее называют базой сигнала. Иногда полученный результат формулируют следующим образом: сигнал длительностью Т, спектр которого не содержит частот выше Fв полностью определяется заданием 2FвT его отсчётов.

*Выдающийся русский ученый В.А. Котельников (1908-2005) написал и опубликовал в 1933 г. фундаментальную работу "О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи", в которой им впервые была сформулирована теорема (известная в радиотехнике как теорема Котельникова). Работа была заявлена как доклад на намечавшийся I Всесоюзный съезд по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. Съезд не состоялся, но материалы к нему были опубликованы в 1933 г. Заканчивая аспирантуру, В.А.Котельников доложил свои работы на Ученом совете факультета. Доклад был одобрен, но работу "О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи" как и значение сформулированной в ней теоремы отсчётов на совете не поняли — "все, вроде, верно, но похоже на научную фантастику". Впервые в ней математически обоснована возможность цифровой передачи информации. Идея автора стала основой современной теории информации. В этом аспекте работа опередила свое время, по крайней мере, на 15 лет. Похожая ситуация произойдет и с докторской диссертацией В.А. Котельникова "Теорией потенциальной помехоустойчивости", которая была оценена современниками только спустя годы. Понимая значение теоремы отсчётов, В.А. Котельников в 1936 г. попытался опубликовать статью в более широко читаемом специалистами журнале "Электричество", но получил отказ, и не стал повторять попытки. Через 15 лет в 1948 г. Клод Шеннон опубликовал свою теорему отсчётов. В 1977 г. при расстановке приоритетов ее было предложено называть WKS- теоремой или УКШ-теоремой в честь Уиттекерра-Котельникова-Шеннона (Whittaker - Kotelnikov – Shannon). Наконец в 1999 г. Фонд Эдуарда Рейна, подводя тоги наиболее выдающихся научных достижений XX века, присудил премию в номинации "за фундаментальные исследования" российскому ученому Котельникову Владимиру Александровичу за "впервые математически точно сформулированную и опубликованную теорему отсчётов", на которую опирается вся современная, ставшая цифровой, радиотехника и вычислительная техника.*

В заключение данного раздела еще раз отметим, что спектральные плотности случайных процессов и спектры плотности мощности, это одно и то же понятие. Оба термина используются достаточно широко в научно-технической литературе. Учитывая то обстоятельство, что понятие мощности по своему смыслу больше связано с энергетическими понятиями, а понятие спектральной плотности - с анализом сигналов и систем, при дальнейшем рассмотрении случайных сигналов и процессов будем использовать, в основном, понятие спектральной плотности или (для дискретных величин) спектров случайных сигналов и процессов.

**6.6. Марковские случайные процессы.**

*Процесс, протекающий в физической системе, называется* ***Марковским*** *(или процессом без последействия), если он обладает следующими свойствами:* ***для любого момента времени t0 вероятность любого состояния системы в будущем (t>t0) зависит только от ее состояния в настоящем и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние.***

Марковские процессы могут быть дискретными и непрерывными как по времени, так и по состоянию. Будем рассматривать Марковские процессы с дискретными состояниями. Такие процессы удобно задавать в виде графа состояний.

Марковский случайный процесс с дискретным состоянием и дискретным временем обычно называют *марковской цепью*. Для такого процесса время целесообразно рассматривать как последовательность шагов 1, 2, …, k, …. В этом случае процесс описывается последовательностью состояний S(0), S(1), …, S(k), …

Событие {S(k)=si}={сразу после k-го шага система находится в состоянии si} является случайным событием. Последовательность таких событий образуют марковскую цепь.

Пусть pi(k)=P{S(k)=si} – вероятность состояния цепи Маркова. Очевидно, что



Распределение вероятностей в начале процесса, т.е. pi(0), i=1, …, n называется *начальным распределением вероятностей* марковской цепи.

Вероятностью перехода на k-м шаге из состояния si в состояние sj называется вероятность того, что система S после k-го шага окажется в состоянии sj, при условии, что непосредственно перед этим (на k-1-м шаге) она находилась в состоянии si. Эти вероятности также называют *переходными*.

Марковская цепь называется *однородной*, если переходные вероятности не зависят от номера шага, а зависят от того, из какого состояния и в какое осуществляется переход:

P{S(k)=sj/S(k-1)=si}=pij.

Переходные вероятности однородной марковской цепи pij образует квадратную матрицу:



Сумма переходных вероятностей в любой строке матрицы равна единице:



Такую матрицу называют *стохастической*.

Если для однородной цепи Маркова заданы начальное распределение вероятностей и матрица переходных вероятностей, то вероятности состояния системы на pi(k) могут быть определены по реккурентной формуле:



Марковский случайный процесс с дискретным состояниями и непрерывным временем называют *непрерывной цепью Маркова*. Для такой цепи вероятность перехода из одного состояния в другое в любой фиксированный момент времени равна нулю. Вместо вероятности перехода pij рассматривают *плотность вероятности перехода λij*, которая определяется как предел отношения вероятности перехода из состояния si в состояние sj за малый промежуток времени Δt, примыкающий к моменту t, к длине этого промежутка. Плотность вероятности может быть постоянной, а может быть зависящей от времени. При постоянной плотности вероятности процесс называется однородным.

При рассмотрении случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем принято представлять переходы системы из состояния в состояние как происходящие под влиянием некоторых *потоков событий*; при этом плотности вероятностей перехода получают смысл *интенсивностей λij* соответствующих потоков событий. Как только происходит первое событие из потока с интенсивностью *λij*, система переходит из состояния si в состояние sj. Если эти потоки событий пуассоновские, то процесс, протекающий в система будет марковским.

Для описания марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно пользоваться *размеченным* графом состояний, в котором дуги помечаются интенсивностями *λij*.

Вероятность того, что произойдет переход из состояния si в состояние sj в течении интервала времени [t, t+Δt) есть вероятность того, что за время Δt появится хотя бы одно сыбытие из потока с интенсивностью λij. Эта вероятность равна λij· Δt.

Потоком вероятности перехода из состояния si в состояние sj называется величина λij·pi(t).

Рассмотрим случай, когда система S имеет конечное число состояний s1, …sn. Для описания случайного процесса, протекающего в системе, применяются вероятности состояний pi(t) – вероятности того, что в момент времени t система находится в состоянии si. Очевидно, что для любого t выполняется условие: 

Для нахождения вероятностей состояния системы необходимо решить систему дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова), имеющих вид:



Уравнения удобно составлять, пользуясь размеченным графом состояний системы и следующим правилом: *производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, идущих из других состояний в данное, минус сумма всех потоков вероятности, идущих из данного состояния в другие.*

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений относительно вероятностей состояний pi (t), нужно задать начальное распределение вероятностей pi(0), сумма которых должна быть равна 1.

В том случае, когда процесс, протекающий в системе, длиться достаточно долго, возникает вопрос и предельных вероятностях pi(t) при t→∞. Если все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются простейшими, то в некоторых случаях существуют *финальные* (или предельные) вероятности состояний



не зависящие от того, в каком состоянии система находилась в начальный момент времени. Это означает, что в системе устанавливается предельный *стационарный режим,* в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности состояний уже не меняются. В этом предельном режиме каждая финальная вероятность может быть истолкована *как среднее относительное время* пребывания системы в i-м состоянии.

Система, в которой существуют финальные вероятности, называется *эргодической*, а протекающий в этой системе процесс является эргодическим.

Для существования финальных вероятностей одного условия λij = const недостаточно, требуется выполнение еще некоторых условий, проверить которые можно по графу состояний, выделив в нем *существенные* и *несущественные* состояния.

Состояние si  называется *существенным*, если нет другого состояния sj, такого, что перейдя однажды каким-то способом из si в sj, система уже не в состоянии вернуться в si. Все состояния, не обладающие этим свойством, называются *несущественными.*

Например, для системы S, граф которой изображен на рисунке, состояния s1, s2 несущественны, а остальные существенны.

При конечном числе состояний n для существования финальных вероятностей необходимо и достаточно, ***чтобы из каждого существенного состояния можно было (за какое-то конечное число шагов) перейти в каждое другое существенное состояние.*** Граф, приведенный на рисунке, этому условию не удовлетворяет.

Для несущественных состояний характерно, что система рано ли поздно из этих состояний выйдет и никогда не вернется. Поэтому для несущественных состояний финальные вероятности всегда равны нулю.

Финальные вероятности (если они существуют) могут быть получены решением *системы линейных алгебраических уравнений*. Эти уравнения получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова, если положить в них левые части равными нулю. При составлении уравнений по графу состояний системы следует пользоваться следующим правилом: *для каждого состояния системы суммарный выходящий поток вероятности равен суммарному входящему потоку*.

Для системы, размеченный граф которой приведен на рисунке, система алгебраических уравнений имеет вид:



К уравнениям необходимо добавить условие нормировки:

На практике часто приходится встречаться с системами, граф состояний которой имеет вид (схема гибели и размножения):

λ-интенсивности размножения;

μ – интенсивности гибели.



Для схемы гибели и размножения финальные вероятности имеют вид:



* 1. **Потоки событий**

*Потоком событий* называется последовательность событий, про­исходящих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Различают потоки однородных и неоднородных событий. *Поток событий* называется *однородным,* если он характеризуется только моментами поступления этих событий (вызывающими моментами) и задается последовательностью *{tn}* = {0≤ *t1* ≤ *t2* ≤ ...≤ *tn* ≤…}, где *tn —* момент наступления *n*-го события — неотрицательное ве­щественное число. Однородный поток событий также может быть задан в виде последовательности промежутков времени между *n*-м и *(n—1)*-м событиями {*τn*}, которая однозначно связана с последо­вательностью вызывающих моментов { *tn* }, где τn = *tn - tn-1*.

*Потоком неоднородных событий* называется последовательность *{tn,* *fn},* где *tn—*вызывающие моменты; *fn —*набор признаков события. Например, применительно к процессу обслуживания для неоднородного потока заявок может быть задана принадлежность к тому или иному источнику заявок, наличие приоритета, возмож­ность обслуживания тем или иным типом канала и т. п.

Рассмотрим поток, в котором события разделены интервалами времени τ1, τ2, …, которые вообще являются случайными величинами. Пусть интервалы τ1, τ2, ... независимы между собой. Тогда поток событий называется потоком с *ограниченным последействием.*

**7.6.1. Простейший поток событий**

Пусть на оси времени 0t случайным образом возникают точки – моменты появления каких-то однородных событий.

*Поток событий* называется *ординарным,* если вероятность того, что на ма­лый интервал времени *Δt* примыкающий к моменту времени *t,* попадает больше одного событий *P>1 (t, Δt)*, пренебрежительно мала по сравнению с вероятно­стью того, что на этот же интервал времени *Δt* попадает ровно одно событие *P1 (t, Δt)*, т. е. *P1 (t, Δt)>> P>1 (t, Δt)*.

*Стационарным потоком событий* называется поток, для которого вероятность появления того или иного числа событий на интервале времени τ зависит лишь от длины этого участка и не зависит от того, где на оси времени *Ot* взят этот участок.

Рассмотрим на оси времени *Ot* ординарный поток событий и найдем среднее число событий, наступающих на интервале времени *Δt*, примыкающем к моменту времени *t.* Получим

*0∙ P0 (t, Δt)+1∙ P1 (t, Δt)= P1 (t, Δt).*

Тогда среднее число событий, наступающих на участке времени *Δt* в единицу времени, составит *[P>1(t,Δt)]/Δt*. Рассмотрим предел этого выражения при *Δt →0*. Если этот предел существует, то он называется *интенсивностью (плотностью) ор­динарного потока событий*



Интенсивность потока может быть любой неотрицательной функцией времени, имеющей размерность, обратную размерности времени. Для стационарного потока его интенсивностьне зависит от времени и представляет собой постоянное значение, равное среднему числу событий, наступающих в единицу времени *λ(t) = λ=* const.

Поток событий называется *потоком без последействи*я, если для любых неперекрывающихся интервалов времени число событий, попадающих на один из них не зависит от числа событий, попадающих на другие интервалы.

Поток, обладающий тремя перечисленными выше свойствами, а именно стационарностью, ординарностью и отсутствием последействия, называется ***простейшим потоком***.

Разделим участок τ на n частей так, чтобы Δt=τ/n. Вероятность появления единицы на элементарном участке Δt определяется так:

P(1, Δt)=λΔt=λτ/n.

Представим n участков как n независимых испытаний. Такое представление справедливо в силу свойства отсутствия последействия для простейшего потока. В каждом испытании событие может произойти с вероятностью P(1, Δt) =λτ/n. Число наступления события в течении времени τ есть случайная величина, распределенная по биноминальному закону с вероятностью



При неограниченном увеличении числа интервалов Δt, т.е. при n→∞ и Δt→0 биноминальное распределение сходится к распределению Пуассона и вероятность определяется так:

 .

Рассмотрим случайную величину T – интервал времени между соседними событиями.

.

Таким образом интервал времени t между соседними событиями в простейшем потоке есть случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром λ:

*λe-λt, t>0*

*f(t)=*

*0, t<0*

Если поток событий нестационарен, то его основной характеристикой является мгновенная плотность λ(t). *Мгновенной плотностью* потока называется предел отношения среднего числа событий, приходящихся на элементарный участок времени *(t, t+Δt)* к длине этого участка, когда áîоследняя стремится к нулю:



где *m(t)* = математическое ожидание числа событий на участке (0,t).

Для потока событий, обладающего свойствами ординарности, отсутствием последействия, но нестационарного (*нестационарного пуассоновского потока*) вероятность появления k событий на интервале времени длительностью τ, и примыкающему к точке t0 подчиняется закону Пуассона

,

где *a* – математическое ожидание числа событий на участке времени от *t0*до t0+τ, равное



Функция распределения случайной величины t, раной интервалу времени между соседними событиями в нестационарном пуассоновском потоке имеет вид:



а плотность распределения запишется так:



Этот закон распределения уже не будет показательным, его вид зависит от параметра *t0* и вида функции *λ(t)*.

Например, при линейном изменении *λ(t)* = *a+b(t)* плотность распределения имеет вид:



Поток называется потоком с ограниченным последействием (или потоком Пальма), если промежутки времени между последовательными событиями представляют собой независимые случайные величины.

Поток Пальма часто получается в виде выходных потоков систем массового обслуживания. Если на какую-нибудь систему поступает поток заявок, то он разделяется на два потока: поток обслуженных и поток необслуженных заявок. Поток необслуженных заявок может поступать н некоторую другую систему массового обслуживания, поэтому представляет –интерес рассмотреть его свойства. Основной в теории выходных потоков является теорема Пальма:

Пусть на систему массового обслуживания поступает поток заявок типа Пальма, причем заявка, заставшая все каналы занятыми, получает отказ (не обслуживается). Если при этом время обслуживания имеет показательное распределение, то поток необслуженных заявок также является потоком типа Пальма.

Примером потока с ограниченным последействием являются *потоки Эрланга.* Они образуются «просеиванием» из простейшего потока.

Потоком Эрланга k-го порядка (Эk) называется поток, получаемый из простейшего, если сохранить каждую (k+1)-ю точку, а остальные выбросить. Очевидно, что простейший поток можно рассматривать как поток Эрланга нулевого порядка. Случайная величина интервала времени между соседними событиями в потоке Эрланга может быть представлена как сумма k случайных величин интервалов времени между соседними событиями в исходном простейшем потоке: . Плотность распределения этой случайной величины (закон распределения Эрланга k-го порядка) имеет вид:



Числовые характеристики распределения Эрланга определяются через свойства числовых характеристик случайных величин:

mk = (k+1)m0; Dk=(k+1)D0.

Подставив в эти выражения значения математического ожидания и дисперсии случайной величины T0 интервалов времени между соседними событиями исходного простейшего потока, получаем:

Из этих выражений следует, что с увеличением порядка потока Эрланга увеличиваются математическое ожидание промежутка времени между соседними событиями, а интенсивность потока падает. Пронормируем величину Tk таким образом, чтобы математическое ожидание нормированной случайной величины не изменялось при увеличении порядка потока Эрланга: T\*=Tk/(k+1). Такой поток называется нормированным потоком Эрланга k-го порядка. Закон распределения промежутка T\* между событиями для этого потока будет:

 где *Λk = (k+1)Λ.*

Математическое ожидание случайной величины T\* не зависит от k и равно: где λ – интенсивность исходного простейшего потока.

Дисперсия случайной величины T\* равна



и неограниченно убывает с увеличением k.

Таким образом, при неограниченном увеличении k нормированный поток Эрланга приближается к регулярному потоку с постоянными интервалами, равными 1/λ.