

# 离散数学章节自测题汇总

Tony

计算机科学与技术

2025 年 1 月 17 日

**写在前面：**这篇文档结合多位同学的学习通题目，旨在方便大家复习离散数学，**仅供学习交流使用**，如有侵权，请联系删除。**不要只看题目序号，选项可能会换顺序!!!** 由于题目数量大，文档中难免会有小的文字识别错误，还望谅解。

## 前言

### 1. 测验题 0.1

下面说法正确的有：

- A. 离散数学是以可枚举的数量或形状作为研究对象的数学分支。
- B. 离散数学中可枚举的含义是指研究对象与若干自然数有一一对应关系。
- C. 学习离散数学课程知识必须具有一定的编程能力。
- D. 学习离散数学课程可以对逻辑，集合，排列组合等相关基础知识完全没有了解。
- E. 课程所用教材《离散数学基础》正文中与 " 例子 " 一起编号的 " 问题 " 需要学生自己解答。

答案：ABD

### 2. 测验题 0.2

离散数学基础课程应该学习的离散数学语言包括：

- A. 逻辑语言
- B. 集合语言
- C. 算法语言
- D. 图论语言
- E. 代数语言

答案：ABCDE

### 3. 测验题 0.3

计算机类专业的离散数学基础课程应该培养的专业思维包括：

- A. 逻辑思维
- B. 关系思维
- C. 量化思维
- D. 计算思维
- E. 递归思维

答案：ABCDE

### 4. 测验题 0.4

计算机类专业的离散数学基础课程应该培养的专业意识包括：

- A. 离散化
- B. 模块化
- C. 层次化
- D. 系统化
- E. 公理化

答案：ABCDE

## 一、基础知识

### 1. 测验题 1.1

下面命题真值为真的命题是？

- A. 2020 年是闰年而且 2021 年是闰年。
- B. 2021 年是闰年或者 2022 年是闰年。
- C. 如果 2021 年是闰年, 则 2022 年是闰年。
- D. 2020 年是闰年当且仅当 2021 年是闰年。

答案：C

解析：C 中前件为假, 蕴涵式为真。

### 2. 测验题 1.2

下面表达“年份是 4 的倍数”是“年份是闰年”的必要条件的句子是？

- A. 一个年份是 4 的倍数时, 则它是闰年。
- B. 只有一个年份是 4 的倍数时, 它才是闰年。
- C. 只要一个年份是 4 的倍数, 则它是闰年。
- D. 一个年份是 4 的倍数, 仅当它是闰年。

答案：B

### 3. 测验题 1.3

下面句子中是全称量化命题的是？

- A. 有的年份不是 4 的倍数, 但它是闰年。
- B. 1900 年是 4 的倍数, 但它不是闰年。
- C. 如果 2020 年是闰年, 则有的闰年年份不是 100 的倍数。
- D. 一个年份是闰年当且仅当它是 4 的倍数。

答案：D

### 4. 测验题 1.4

出自 Raymond Smullyan 的 “*Logic Labyrinths*”

人类学家 Edgar Abercrombie 来到一个岛上, 这个岛上的居民要么是骑士 (Knight), 要么是无赖 (Knave), 二者必居其一, 骑士总是说真话, 而无赖总是说假话。Abercrombie 碰到了岛上三个居民 A, B, C。他问 A: “你是骑士还是无赖?” A 回答了, 但是 Abercrombie 没有听清, 于是他问 B: “刚才 A 说什么?”, B 回答说: “A 说他是无赖。”这时 C 大声说: “不要相信 B, 他说谎!” 根据这个故事, 下面正确的是?

- A. 可以断定 A 是骑士
- B. 可以断定 A 是无赖
- C. 可以断定 B 是骑士
- D. 可以断定 C 是骑士

答案: D

解析: 假如 A 是无赖, 那么 A 只会说自己是骑士; 如果 A 是骑士, 那么 A 会说自己是骑士。不管 A 如何, B 说的都一定是假话, 即 B 是无赖。也就可以推出 C 说的是真话, 即 C 是骑士。A 到底是什么无法判断。

## 5. 测验题 1.5

设  $P = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \text{ 是质数且小于 } 10\}$ ,  $Q = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \text{ 是大于 } 1 \text{ 且小于 } 9 \text{ 的奇数}\}$ , 下面正确的是?

- A.  $P \in Q$
- B.  $P \subseteq Q$
- C.  $Q \in P$
- D.  $Q \subseteq P$

答案: D

## 6. 测验题 1.6

设  $D = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Q = D \times D$ , 在  $Q$  上定义关系  $R$ , 对任意  $a, b, c, d \in D$ ,  $\langle a, b \rangle$  和  $\langle c, d \rangle$  有关系  $R$ , 当且仅当  $a \cdot d = b \cdot c$  (这里  $\cdot$  是整数乘法), 即:

$$\langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle \in R \text{ 当且仅当 } a \cdot d = b \cdot c$$

下面属于  $R$  的元素是?

- A.  $\langle 1, 2 \rangle$
- B.  $\langle \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \rangle$
- C.  $\langle \langle 1, 2 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \rangle$
- D.  $\langle \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 6 \rangle \rangle$

答案: B

## 7. 测验题 1.7

归纳定义集合  $A$ :

(1) 归纳基:  $4 \in A$  且  $6 \in A$ ;

(2) 归纳步: 如果  $a \in A$  和  $b \in A$ , 则  $a + b \in A$ , 这里  $+$  是整数加法。下面不属于集合  $A$  的元素是?

A. 20

B. 21

C. 22

D. 26

答案: B

## 8. 测验题 1.8

下面在定义函数时错误的是?

A. 定义函数  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, f(x) = x + 1$ 。B. 定义函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ , 如果  $x$  是有理数, 则  $f(x) = 1$ , 否则  $f(x) = -1$ 。C. 定义函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x+1}$ 。D. 定义函数  $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, f(1) = f(2) = f(3) = 1, f(4) = 2$ 。

答案: C

## 9. 测验题 1.9

下面哪个选项给出的不是连通图?

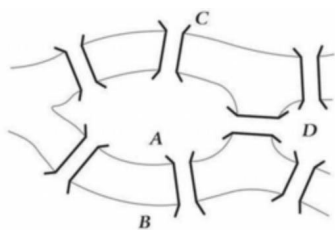


图 1: 测验题 1.9 A 选项

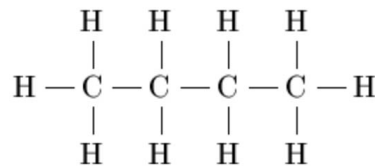


图 2: 测验题 1.9 B 选项

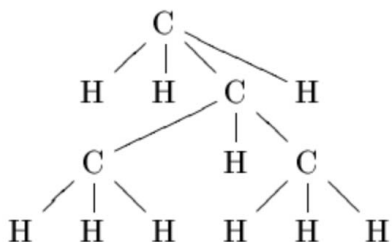


图 3: 测验题 1.9 C 选项

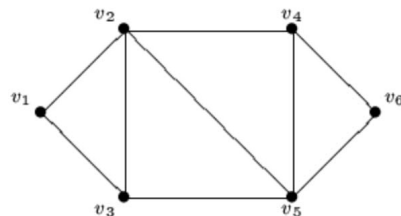


图 4: 测验题 1.9 D 选项

答案: A

解析: A 选项只是一个形式上的图, 并不是离散数学范畴的图。

## 10. 测验题 1.10

下面哪个选项给出的是无向树?



图 5: 测验题 1.10 A 选项

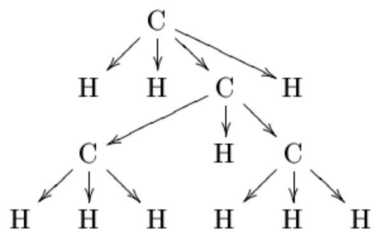


图 6: 测验题 1.10 B 选项

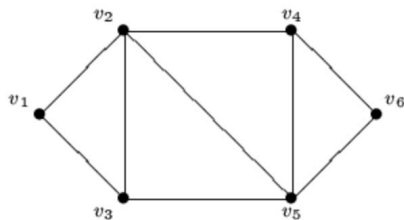


图 7: 测验题 1.10 C 选项

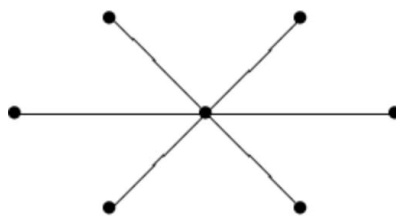


图 8: 测验题 1.10 D 选项

答案: D

## 11. 测验题 1.11

下面哪个说法是正确的?

- A. 开平方根是实数集合上的运算。
- B. 减法是自然数集上的运算。
- C. 除法是实数集上的运算。
- D. 平方是自然数集上的运算。

答案: D

## 12. 测验题 1.12

在实数集  $\mathbb{R}$  上定义二元运算  $*$ : 对任意实数  $x, y, x * y = xy - x - y$ 。下面哪个说法是错误的?

- A. 该运算满足交换律。
- B. 该运算满足结合律。
- C. 该运算没有单位元。
- D. 该运算没有零元。

答案: B

### 13. 测验题 1.13

下面哪个说法是不正确的?

- A. 算法就是求解一个问题的过程。
- B. 算法的步骤必须精确定义, 而且每个步骤都可在有限时间内执行完毕。
- C. 算法的总执行步骤数必须是有限的, 即经过有限步执行必须终止并产生输出。
- D. 算法必须具有通用性, 可用于解决一类问题而不仅仅是某一个具体问题。

答案: A

### 14. 测验题 1.14

下面哪个说法是不正确的?

- A. 算法的基本步骤需要对算法要求解的问题进行分析而提炼出来。
- B. 算法步骤描述中将基本步骤组合成的复合步骤主要有顺序结构、选择结构和循环结构三种。
- C. 递归算法可以既没有选择结构也没有循环结构。
- D. 设计算法时不仅要考虑算法的正确性还要考虑算法的效率。

答案: C

### 15. 测验题 1.15

对于算法 1.4 给出的递归算法:

---

**Algorithm 1** 判断一个二进制串是否属于例子 1.9 定义的集合

---

输入: 二进制串  $u$

输出: 如果  $u$  属于  $H$  返回“是”, 否则返回“否”

```
1: if  $u$  是串 0 或串 1 then
2:   return “是”
3: end if
4: if  $u$  具有  $1v1$  或  $0v0$  的形式 then
5:   返回以  $v$  为输入执行本算法的结果
6: else
7:   return “否”;
8: end if
```

---

如果以二进制串 001100 为输入, 那么在第 2 行递归调用算法的次数是:

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

答案: B

## 16. 测验题 1.16

对于算法 1.5 给出的求两个非负整数的最大公因数的朴素算法:

---

**Algorithm 2** 计算两个非负整数的最大公因数  $\gcd(-, -)$  的朴素算法

---

输入: 两个非负整数  $a$  和  $b$

输出: 返回  $\gcd(a, b)$

```
1: 令  $d$  是  $a$  和  $b$  的小者;  
2: if  $d$  等于 0 then  
3:   返回  $a$  和  $b$  的大者;  
4: end if  
5: while  $d$  大于等于 1 do  
6:   if  $a$  是  $d$  的倍数而且  $b$  是  $d$  的倍数 then  
7:     返回  $d$ ;  
8:   end if  
9:    $d \leftarrow d - 1$ ;  
10: end while
```

---

如果以 45 和 117 为输入, 那么在第 6 行执行的次数是:

A. 45

B. 117

C. 36

D. 9

答案: C

## 17. 测验题 1.17

对于算法 1.6 给出的求两个非负整数的最大公因数的欧几里得算法:

---

**Algorithm 3** 计算两个非负整数的最大公因数  $\gcd(-, -)$  的欧几里得算法

---

输入: 两个非负整数  $a$  和  $b$

输出: 返回  $\gcd(a, b)$

```
1: 令  $x$  是  $a$  和  $b$  的小者.  $y$  是  $a$  和  $b$  的大者;  
2: while  $x$  大于 0 do  
3:   令  $r$  等于  $y$  整除  $x$  的余数;  
4:   令  $y$  等于  $x$ , 而  $x$  等于  $r$   
5: end while  
6: return  $y$ ; // 当循环终止时  $y$  是最后一次的除数. 因此是  $a$  和  $b$  的最大公因数
```

---

如果以 45 和 117 为输入, 那么算法第 4 行执行的次数是:

A. 3

B. 4

C. 5

D. 9

答案: B



## 二、命题逻辑

### 1. 测验题 2.1

下面哪个说法是不正确的?

- A. 命题逻辑公式的抽象语法树忽略了公式中圆括号等细节问题。
- B. 通过命题逻辑公式抽象语法树容易判断公式是否否定式、合取式、析取式、蕴涵式还是双蕴涵式。
- C. 命题逻辑公式抽象语法树叶子节点 (方形节点) 个数等于公式中含有的不同命题逻辑变量个数。
- D. 命题逻辑公式抽象语法树内部节点 (圆形节点) 个数等于公式中含有的逻辑运算符个数。

答案: C

### 2. 测验题 2.2

下面哪个说法是不正确的?

- A. 符合命题逻辑公式归纳定义的公式中左右圆括号数相等, 且等于公式中逻辑运算符个数。
- B. 命题逻辑公式的抽象语法树的一棵子树对应公式的一个子公式。
- C. 命题逻辑公式中否定运算符的优先级最高, 双蕴涵运算符的优先级最低。
- D. 命题逻辑公式中所有逻辑运算符的结合性都是从左至右结合。

答案: D

### 3. 测验题 2.3

下面哪个选项正确地给出了某个命题逻辑公式的抽象语法树?

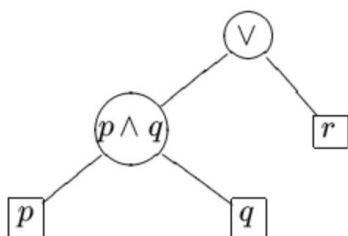


图 9: 测验题 2.3 A 选项

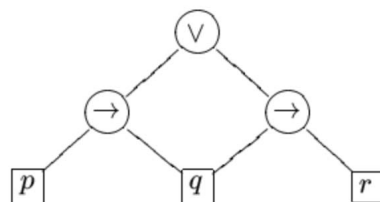


图 10: 测验题 2.3 B 选项

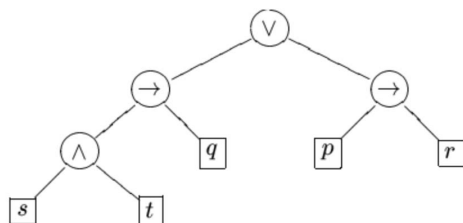


图 11: 测验题 2.3 C 选项

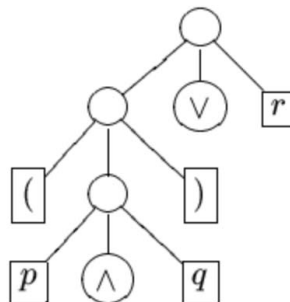


图 12: 测验题 2.3 D 选项

答案: C

#### 4. 测验题 2.4

公式  $\neg(p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$  是?

- A. 否定式
- B. 合取式
- C. 蕴涵式
- D. 析取式

答案: C

#### 5. 测验题 2.5

公式  $r \vee s \leftrightarrow (q \rightarrow t) \wedge \neg r$  是?

- A. 合取式
- B. 蕴涵式
- C. 析取式
- D. 双蕴涵式

答案: D

#### 6. 测验题 2.6

公式  $((t \vee q) \wedge (q \leftrightarrow r) \rightarrow s) \wedge p$  是?

- A. 合取式
- B. 蕴涵式
- C. 析取式
- D. 双蕴涵式

答案: A

**7. 测验题 2.7**

下面哪个公式不是公式  $\neg(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge s \vee r)$  的子公式?

- A.  $p \wedge q$
- B.  $\neg p \wedge q$
- C.  $q \wedge s$
- D.  $q \wedge s \vee r$

答案: B

解析: 注意子公式包含自身。

**8. 测验题 2.8**

下面哪个公式是公式  $p \wedge q \rightarrow r \rightarrow s \vee t$  的子公式?

- A.  $q \rightarrow r$
- B.  $r \rightarrow s$
- C.  $p \wedge q \rightarrow r$
- D.  $r \rightarrow s \vee t$

答案: D

**9. 测验题 2.9**

公式  $((\neg p) \wedge (q \vee ((r \rightarrow s) \wedge (p \leftrightarrow q))))$  总共多少个不同的子公式?

- A. 9
- B. 10
- C. 11
- D. 12

答案: B

**10. 测验题 2.10**

公式  $(\neg(s \leftrightarrow t) \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$  总共多少个不同子公式?

- A. 9
- B. 10
- C. 11
- D. 12

答案: A

**11. 测验题 2.11**

给定  $\sigma$  是真值赋值函数,  $A, B$  是任意的命题逻辑公式, 下列说法不正确的是:

- A. 当  $\sigma(A) = 1$  时,  $\sigma(A \wedge B) = \sigma(B)$ 。
- B. 当  $\sigma(A) = 1$  时,  $\sigma(A \vee B) = 1$ 。
- C. 当  $\sigma(A) = 1$  时,  $\sigma(A \rightarrow B) = \sigma(B)$
- D. 当  $\sigma(B) = 1$  时,  $\sigma(A \rightarrow B) = \sigma(A)$

答案: D

**12. 测验题 2.12**

给定  $\sigma$  是真值赋值函数,  $A, B$  是任意的命题逻辑公式, 下列说法不正确的是?

- A. 当  $\sigma(A) = 0$  时,  $\sigma(A \wedge B) = 0$ 。
- B. 当  $\sigma(A) = 0$  时,  $\sigma(A \vee B) = \sigma(B)$ 。
- C. 当  $\sigma(A) = 0$  时,  $\sigma(A \rightarrow B) = \sigma(B)$
- D. 当  $\sigma(B) = 0$  时,  $\sigma(A \rightarrow B) = \sigma(\neg A)$

答案: C

**13. 测验题 2.13**

给定命题变量  $p$  和  $q$  的真值, 计算公式  $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$  的真值, 若要一次只考虑一个逻辑运算符, 则它的一些子公式按需要计算的顺序排列最合理的是

- A.  $p \rightarrow q, \neg p, \neg q, \neg p \wedge \neg q$
- B.  $\neg p, p \rightarrow q, \neg p \wedge \neg q, \neg q$
- C.  $\neg p \wedge \neg q, \neg p, \neg q, p \rightarrow q$
- D.  $\neg p, \neg q, p \rightarrow q, \neg q \wedge \neg p$

答案: A

解析: 计算  $p \rightarrow q$  不需要知道  $\neg p$ , D 选项最后一个写反, 还需要多使用一次交换律。

**14. 测验题 2.14**

给定命题变量  $p, q, r, s$  和  $t$  的真值, 计算公式  $(r \wedge s \leftrightarrow q \vee p) \wedge (t \rightarrow r)$  的真值, 若要一次只考虑一个逻辑运算符, 则它的一些子公式按需要计算的顺序排列最合理的是?

- A.  $s \leftrightarrow q, r \wedge s \leftrightarrow q, r \wedge s \leftrightarrow q \vee p, t \rightarrow r$
- B.  $t \rightarrow r, r \wedge s \leftrightarrow q \vee p, r \wedge s \leftrightarrow q, r \wedge s$
- C.  $r \wedge s, q \vee p, r \wedge s \leftrightarrow q \vee p, t \rightarrow r$
- D.  $r \wedge s \leftrightarrow q \vee p, r \wedge s, q \vee p, t \rightarrow r$

答案: C

**15. 测验题 2.15**

下面每个选项中的二进制串表示对命题变量  $p, q, r$  依次赋值的一个真值赋值函数, 其中是公式  $(p \wedge q \rightarrow r \vee q) \wedge (p \leftrightarrow r)$  的成真赋值有

- A. 000
- B. 001
- C. 101
- D. 111

答案: ACD

**16. 测验题 2.16**

下面每个选项中的二进制串表示对命题变量  $p, q, r$  依次赋值的一个真值赋值函数, 其中是公式  $(q \wedge p \leftrightarrow q \rightarrow r) \wedge (r \vee p)$  的成假赋值有

- A. 000
- B. 001
- C. 101
- D. 111

答案: ABC

**17. 测验题 2.17**

下面每个选项中的二进制串表示对命题变量  $p, q, r, s$  依次赋值的一个真值赋值函数, 其中是公式  $(r \rightarrow s \leftrightarrow q \vee p) \wedge q \wedge p$  的成真赋值有

- A. 0000
- B. 0101
- C. 1100
- D. 1111

答案: CD

**18. 测验题 2.18**

下面每个选项中的二进制串表示对命题变量  $p, q, r, s$  依次赋值的一个真值赋值函数, 其中是公式  $s \leftrightarrow \neg q \wedge r \wedge p$  的成假赋值有

- A. 0000
- B. 0101
- C. 1100
- D. 1111

答案: BD

### 19. 测验题 2.19

下面是公式  $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \wedge p \rightarrow p \vee q)$  的真值表,

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$q \wedge p \rightarrow p \vee q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \wedge p \rightarrow p \vee q)$
0	0	(1)	0	0	1	1
0	1	0	0	(2)	1	0
1	0	0	0	1	(3)	0
1	1	1	1	1	1	(4)

其中的空 (1),(2),(3),(4) 依次填入的真值应该是:

A. 0000

B. 0101

C. 1100

D. 1111

答案: D

### 20. 测验题 2.20

下面是公式  $(p \wedge r \rightarrow q \vee r) \leftrightarrow \neg p$  的真值表,

$p$	$q$	$r$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge r \rightarrow q \vee r$	$\neg p$	$p \wedge r \rightarrow q \vee r \leftrightarrow \neg p$
0	0	0	0	(1)	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	(2)	1	(3)
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	(4)
1	1	1	1	1	1	0	0

其中的空 (1),(2),(3),(4) 依次填入的真值应该是:

A. 0000

B. 0110

C. 1100

D. 0111

答案: B

### 21. 测验题 2.21

下面是公式  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$  的真值表,

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$((p \leftrightarrow q) \rightarrow p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
0	0		0		1	1	1	(1)
0	1		0		1	0	1	(2)
1	0		0		0	1	1	(3)
1	1		1		0	0	0	(4)

其中的空 (1), (2), (3), (4) 依次填入的真值应该是:

- A. 0000
- B. 0101
- C. 0110
- D. 1111

答案: C

## 22. 测验题 2.22

下面是公式  $r \leftrightarrow q \wedge ((p \rightarrow r) \vee \neg p)$  的真值表,

$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow r$	$\neg p$	$(p \rightarrow r) \vee \neg p$	$q \wedge ((p \rightarrow r) \vee \neg p)$	$r \leftrightarrow q \wedge ((p \rightarrow r) \vee \neg p)$
0	0	0	1	1			1
0	0	1	1	1			0
0	1	0	1	1			0
0	1	1	1	1			(1)
1	0	0	0	0			(2)
1	0	1	1	0			0
1	1	0	0	0			(3)
1	1	1	1	0			(4)

其中的空 (1), (2), (3), (4) 依次填入的真值应该是:

- A. 0000
- B. 0110
- C. 1100
- D. 1111

答案: D

## 23. 测验题 2.23

公式  $A$  的一个替换实例是用公式  $B$  去替换一个命题变量  $p$  在  $A$  中所有出现而得到的公式, 即若  $A, B$  是公式,  $p$  是命题变量, 则  $A[B/p]$  是  $A$  的一个替换实例。下面说法不正确的是

- A. 永真式的任意替换实例仍然是永真式。
- B. 永真式的否定是矛盾式, 矛盾式的否定是永真式。

- C. 矛盾式的任意替换实例仍然是矛盾式。  
D. 可满足式的任意替换实例仍然是可满足式。

答案: D

## 24. 测验题 2.24

公式  $A$  的一个替换实例是用公式  $B$  去替换一个命题变量  $p$  在  $A$  中所有出现而得到的公式, 即若  $A, B$  是公式,  $p$  是命题变量, 则  $A[B/p]$  是  $A$  的一个替换实例。一般地, 设  $p_1, p_2, \dots, p_n$  是公式  $A$  中的命题变量, 分别使用  $B_1, B_2, \dots, B_n$  替换  $A$  中的  $p_1, p_2, \dots, p_n$  的所有出现而得到的公式也称为  $A$  的一个替换实例, 记为  $A[B_1/p_1, B_2/p_2, \dots, B_n/p_n]$ 。现在设公式  $A = \neg q \vee (\neg p \wedge (q \leftrightarrow \neg p))$ 。下面说法正确的是?

- A. 公式  $\neg q \vee (\neg p \wedge ((p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p))$  是公式  $A$  的一个替换实例。  
B. 公式  $\neg q \vee ((r \wedge s) \wedge (q \leftrightarrow (r \wedge s)))$  是公式  $A$  的一个替换实例。  
C. 公式  $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge ((p \vee q) \leftrightarrow \neg p))$  是公式  $A$  的一个替换实例。  
D. 公式  $\neg p \vee (\neg q \wedge (p \leftrightarrow \neg q))$  是公式  $A$  的一个替换实例。

答案: CD

解析: 注意 B 选项替换的  $\neg p$  不是命题变量, 可以只替换  $p$ 。

## 25. 测验题 2.25

下面公式中是永真式的是?

- A.  $\neg(r \rightarrow \neg q) \vee (p \rightarrow \neg r)$   
B.  $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$   
C.  $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$   
D.  $(p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$

答案: D

解析: 注意运算符的优先级为:  $\neg > \vee > \wedge > \rightarrow > \leftrightarrow$ , 其中只有  $\rightarrow$  的结合性是从右到左。

## 26. 测验题 2.26

下面公式中不是永真式的是?

- A.  $((p \vee q \rightarrow (p \leftrightarrow q))) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$   
B.  $r \vee ((p \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q))$   
C.  $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$   
D.  $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

答案: B



**27. 测验题 2.27**

公式  $((p \rightarrow q) \rightarrow q \rightarrow p) \rightarrow q \rightarrow p$  的 (语义) 类型是:

- A. 永真式
- B. 矛盾式
- C. 非永真的可满足式
- D. 无法判断

答案: A

**28. 测验题 2.28**

公式  $p \wedge (q \leftrightarrow (r \wedge p) \vee (q \rightarrow r))$  的 (语义) 类型是:

- A. 永真式
- B. 矛盾式
- C. 非永真的可满足式
- D. 无法判断

答案: C

**29. 测验题 2.29**

下面哪个说法是不正确的?

- A. 公式  $A$  和  $B$  逻辑等值, 则对它们中的命题变量取任何真值时, 这两个公式的真值都相同。
- B. 公式  $A$  和  $B$  逻辑等值, 则  $A \rightarrow B$  是永真式。
- C. 公式  $A$  和  $B$  逻辑等值, 则  $A$  和  $B$  是相同的公式。
- D. 公式  $A$  和  $B$  逻辑等值, 且公式  $B$  和  $C$  逻辑等值, 则  $A$  和  $C$  也逻辑等值。

答案: C

**30. 测验题 2.30**

下面哪个说法是正确的?

- A. 要证明公式  $A$  和  $B$  逻辑等值, 必须将  $A$  等值变换为公式  $B$ 。
- B. 在等值变换时, 必须将公式  $A$  的一个子公式  $B$  的所有出现都置换为与  $B$  等值的公式  $B'$ 。
- C. 要证明公式  $A$  和  $B$  逻辑等值, 只能使用等值演算或构造真值表的方法。
- D. 如果公式  $A$  和  $B$  逻辑等值, 那么  $A \rightarrow C$  和  $B \rightarrow C$  也逻辑等值。

答案: D

## 31. 测验题 2.31

下面哪些是基本逻辑等值式模式分配律的实例?

- A.  $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$
- B.  $(p \vee q) \wedge (r \vee q) \equiv (p \wedge r) \vee q$
- C.  $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv (p \vee q \vee p) \wedge (p \vee q \vee r)$
- D.  $(p \wedge q) \wedge (p \vee r) \equiv (p \wedge q \wedge p) \vee (p \wedge q \wedge r)$

答案: ABD

## 32. 测验题 2.32

下面哪些是基本逻辑等值式模式吸收律的实例?

- A.  $p \vee (q \wedge p) \equiv p$
- B.  $(p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r) \equiv p \vee q$
- C.  $(p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r) \equiv p \wedge q$
- D.  $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$

答案: ABCD

## 33. 测验题 2.33

下面哪些是基本逻辑等值式模式德摩尔根律的实例?

- A.  $(p \wedge q) \equiv \neg(p \vee q)$
- B.  $\neg(p \wedge q \wedge r) \equiv \neg(p \wedge q) \vee \neg r$
- C.  $\neg p \wedge \neg(q \vee r) \equiv \neg(p \vee q \vee r)$
- D.  $\neg\neg(p \wedge q) \equiv \neg\neg p \vee \neg\neg q$

答案: BC

## 34. 测验题 2.34

下面的等值演算中 (1),(2) 处使用的基本逻辑等值式模式依次是:

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \\
 \equiv & (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) && // \text{蕴涵等值式} \\
 \equiv & (\neg p \wedge \neg q) \vee r && // (1) \\
 \equiv & \neg(p \vee q) \vee r && // \text{德摩尔根律} \\
 \equiv & (p \vee q) \rightarrow r && // (2)
 \end{aligned}$$

答案: (1) 分配律 (2) 蕴涵等值式

## 35. 测验题 2.35

下面的等值演算中 (1), (2) 处使用的基本逻辑等值式模式依次是 \_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_:

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \\
 \equiv & (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) && // \text{蕴涵等值式} \\
 \equiv & (\neg p \vee \neg q) \vee (r \vee r) && // \text{交换律、结合律} \\
 \equiv & (\neg p \vee \neg q) \vee r && //(1) \\
 \equiv & \neg(p \wedge q) \vee r && //(2) \\
 \equiv & (p \wedge q) \rightarrow r && // \text{蕴涵等值式}
 \end{aligned}$$

答案: (1) 幂等律 (2) 德摩尔根律; 德摩根律

## 36. 测验题 2.36

下面的等值演算中 (1), (2) 处使用的基本逻辑等值式模式依次是:

$$\begin{aligned}
 & \neg(r \vee (q \wedge (\neg r \rightarrow \neg p))) \\
 \equiv & \neg(r \vee (q \wedge (r \vee \neg p))) && // \text{蕴涵等值式} \\
 \equiv & \neg(r \vee ((q \wedge r) \vee (q \wedge \neg p))) && // \text{分配律} \\
 \equiv & \neg(r \vee (q \wedge \neg p)) && //(1) \\
 \equiv & \neg r \wedge \neg(q \wedge \neg p) && //(2) \\
 \equiv & \neg r \wedge (\neg q \vee \neg \neg p) && // \text{德摩尔根律} \\
 \equiv & \neg r \wedge (p \vee \neg q) && // \text{双重否定律、交换律}
 \end{aligned}$$

答案: (1) 吸收律 (2) 德摩尔根律; 德摩根律

## 37. 测验题 2.37

下面的等值演算中 (1), (2) 处使用的基本逻辑等值式模式依次是:

$$\begin{aligned}
& \neg(p \vee \neg q) \rightarrow (q \rightarrow r) \\
& \equiv (\neg p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow r) \quad // \text{德摩尔根律、双重否定律} \\
& \equiv (\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg q \vee r) \quad // \text{蕴涵等值式} \\
& \equiv \neg(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \vee r) \quad // \quad (1) \\
& \equiv (\neg\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee r) \quad // \quad (2) \\
& \equiv (p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee r) \quad // \text{双重否定律} \\
& \equiv \neg q \vee (p \vee r) \quad // \text{幂等律、交换律} \\
& \equiv q \rightarrow (p \vee r) \quad // \text{蕴涵等值式}
\end{aligned}$$

答案：(1) 蕴涵等值式 (2) 德摩尔根律；德摩根律

### 38. 测验题 2.38

下面哪一组两个公式是逻辑等值的？

- A. 公式  $(p \rightarrow q) \wedge p$  和  $q$
- B. 公式  $(p \vee q) \wedge q$  和  $q$
- C. 公式  $(p \wedge q) \wedge q$  和  $q$
- D. 公式  $(p \leftrightarrow q) \wedge p$  和  $q$

答案：B

### 39. 测验题 2.39

下面哪一组两个公式是逻辑等值的？

- A. 公式  $(p \rightarrow q) \vee p$  和  $q$
- B. 公式  $(p \vee q) \vee q$  和  $q$
- C. 公式  $(p \wedge q) \vee q$  和  $q$
- D. 公式  $(p \leftrightarrow q) \vee p$  和  $q$

答案：C

### 40. 测验题 2.40

下面哪一组两个公式是逻辑等值的？

- A. 公式  $\neg(p \rightarrow q)$  和  $\neg p \rightarrow q$
- B. 公式  $\neg(p \leftrightarrow q)$  和  $\neg p \leftrightarrow q$
- C. 公式  $\neg(p \rightarrow q)$  和  $\neg p \rightarrow \neg q$
- D. 公式  $\neg(p \leftrightarrow q)$  和  $\neg p \leftrightarrow \neg q$

答案: B

#### 41. 测验题 2.41

下面哪一组两个公式是逻辑等值的?

- A. 公式  $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$  和  $p \wedge (q \leftrightarrow r)$
- B. 公式  $(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$  和  $p \vee (q \leftrightarrow r)$
- C. 公式  $(p \wedge q) \leftrightarrow r$  和  $(p \leftrightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow r)$
- D. 公式  $(p \vee q) \leftrightarrow r$  和  $(p \leftrightarrow r) \vee (q \leftrightarrow r)$

答案: B

#### 42. 测验题 2.42

下面哪一组两个公式不是逻辑等值的?

- A. 公式  $p \rightarrow q$  和  $\neg q \rightarrow \neg p$
- B. 公式  $p \leftrightarrow q$  和  $\neg q \leftrightarrow \neg p$
- C. 公式  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  和  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
- D. 公式  $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$  和  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

答案: C

#### 43. 测验题 2.43

下面哪一组两个公式不是逻辑等值的?

- A. 公式  $\neg(p \vee q)$  和  $\neg p \wedge \neg q$
- B. 公式  $\neg(p \wedge q)$  和  $\neg p \vee \neg q$
- C. 公式  $\neg(p \rightarrow q)$  和  $p \rightarrow \neg q$
- D. 公式  $\neg(p \leftrightarrow q)$  和  $p \leftrightarrow \neg q$

答案: C

#### 44. 测验题 2.44

下面哪个说法不是正确的?

- A. 析取范式是一个或多个简单合取式的析取。
- B. 合取范式是一个或多个简单析取式的合取。
- C. 每一个简单析取式都既是合取范式又是析取范式。
- D. 每一个只含与、或、非逻辑运算符的公式不是析取范式就是合取范式。

答案: D

解析：析取范式中的合取式都是一个或多个文字的合取；合取范式中的析取式都是一个或多个文字的析取。因此  $p \vee q$  既是析取范式又是合取范式。

#### 45. 测验题 2.45

下面哪个说法不是正确的？

- A. 每一个文字都既是合取范式又是析取范式。
- B. 每一个文字都既是简单析取式又是简单合取式。
- C. 每个命题逻辑公式都存在与之等值的只含合取和析取运算符的公式。
- D. 无论是析取范式还是合取范式，逻辑否定运算符都只出现在命题变量之前。

答案：C

#### 46. 测验题 2.46

下面哪些公式是析取范式？

- A.  $\neg p$
- B.  $\neg(p \vee q)$
- C.  $\neg p \wedge \neg q$
- D.  $\neg p \vee \neg q$

答案：ACD

#### 47. 测验题 2.47

下面哪些公式是合取范式？

- A.  $\neg p$
- B.  $\neg(p \vee q)$
- C.  $\neg p \wedge \neg q$
- D.  $\neg p \vee \neg q$

答案：ACD

#### 48. 测验题 2.48

下面哪些公式是析取范式？

- A.  $\neg(p \wedge q) \vee r$
- B.  $(\neg p \wedge q) \vee r$
- C.  $(\neg p \vee q) \wedge r$
- D.  $(\neg p \wedge q) \vee (p \vee r)$

答案：BD

**49. 测验题 2.49**

下面哪些公式是合取范式?

- A.  $\neg(p \vee q) \wedge r$
- B.  $(\neg p \wedge q) \vee r$
- C.  $(\neg p \wedge q) \wedge r$
- D.  $(\neg p \wedge q) \vee (p \vee r)$

答案: C

**50. 测验题 2.50**

下面哪些公式是与公式  $p \leftrightarrow q$  逻辑等值的析取范式?

- A.  $\neg(p \vee q) \vee (p \wedge q)$
- B.  $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
- C.  $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
- D.  $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

答案: D

**51. 测验题 2.51**

下面哪些公式是与公式  $p \leftrightarrow q$  逻辑等值的合取范式?

- A.  $\neg(p \vee q) \vee (p \wedge q)$
- B.  $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
- C.  $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
- D.  $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

答案: C

**52. 测验题 2.52**

下面哪些公式是与公式  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$  逻辑等值的析取范式?

- A.  $\neg p \vee \neg q \vee r$
- B.  $(p \wedge \neg q) \vee r$
- C.  $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$
- D.  $(\neg p \wedge q) \vee r$

答案: B

**53. 测验题 2.53**

下面哪些公式是与公式  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$  逻辑等值的合取范式?

- A.  $\neg p \vee \neg q \vee r$
- B.  $(p \wedge \neg q) \vee r$
- C.  $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$
- D.  $(\neg p \wedge q) \vee r$

答案: C

**54. 测验题 2.54**

- A. 含有  $n$  个不同命题变量的极小项和极大项都恰好有  $2^n$  个
- B. 极小项是简单析取式, 极大项是简单合取式
- C. 主析取范式是一个或多个极小项的析取, 主合取范式是一个或多个极大项的合取
- D. 主析取范式是析取范式, 主合取范式是合取范式

答案: BC

**55. 测验题 2.55**

下面哪些说法不是正确的?

- A. 每个命题逻辑公式既存在与之等值的主合取范式, 也存在与之等值的主析取范式
- B. 极小项的编码是使得这个极小项的真值为真的唯一的真值赋值方式
- C. 设有 3 个命题变量, 极小项  $m_2$  的否定与  $M_2$  逻辑等值。
- D. 与主析取范式  $m_1 \vee m_3 \vee m_5$  逻辑等值的主合取范式是  $M_1 \wedge M_3 \wedge M_5$ 。

答案: D

**56. 测验题 2.56**

设公式含  $p, q, r$  三个命题变量, 下面哪些公式是极小项?

- A.  $p \vee \neg q \vee r$
- B.  $p \wedge \neg q \wedge r$
- C.  $p \wedge r$
- D.  $p \vee r$

答案: B

**57. 测验题 2.57**

设公式含  $p, q, r$  三个命题变量, 下面哪些公式是极大项?



A.  $p \vee \neg q \vee r$

B.  $p \wedge \neg q \wedge r$

C.  $p \wedge r$

D.  $p \vee r$

答案: A

解析: 合取极小项, 析取极大项 (可以看第一个字的笔画数来记忆)。

### 58. 测验题 2.58

设公式含  $p, q, r, s$  四个命题变量, 且极小项编码遵循  $p, q, r, s$  的顺序。下面哪些极小项会包含在简单合取式  $\neg q \wedge \neg s$  扩展得到的主析取范式中?

A.  $m_2$

B.  $m_4$

C.  $m_6$

D.  $m_8$

答案: AD

解析: 主析取范式为  $m$ , 例如  $p\bar{q}r\bar{s}$  为  $m_{10}$ ; 主合取范式为  $M$ 。

### 59. 测验题 2.59

设公式含  $p, q, r, s$  四个命题变量, 且极小项编码遵循  $p, q, r, s$  的顺序。下面哪些极小项会包含在简单合取式  $\neg p \wedge r$  扩展得到的主析取范式中?

A.  $m_1$

B.  $m_3$

C.  $m_5$

D.  $m_7$

答案: BD

### 60. 测验题 2.60

设公式含  $p, q, r, s$  四个命题变量, 且极大项编码遵循  $p, q, r, s$  的顺序。下面哪些极大项会包含在简单析取式  $\neg q \vee \neg s$  扩展得到的主合取范式中?

A.  $M_1$

B.  $M_3$

C.  $M_5$

D.  $M_7$

答案: CD

**61. 测验题 2.61**

设公式含  $p, q, r, s$  四个命题变量, 且极大项编码遵循  $p, q, r, s$  的顺序。下面哪些极大项会包含在简单析取式  $\neg p \vee r$  扩展得到的主合取范式中?

- A.  $M_8$
- B.  $M_{10}$
- C.  $M_{12}$
- D.  $M_{16}$

答案: AC

**62. 测验题 2.62**

与公式  $p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$  逻辑等值的主范式有?

- A.  $m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4$
- B.  $m_5 \vee m_6 \vee m_7$
- C.  $M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4$
- D.  $M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$

答案: AD

**63. 测验题 2.63**

与公式  $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow q$  逻辑等值的主范式有

- A.  $m_0 \vee m_1 \vee m_5$
- B.  $m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$
- C.  $M_0 \wedge M_1 \wedge M_5$
- D.  $M_2 \vee M_3 \vee M_4 \vee M_6 \vee M_7$

答案: BC

**64. 测验题 2.64**

下面是公式  $(p \rightarrow r) \wedge (\neg r \rightarrow q)$  的真值表,

$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow r$	$\neg r$	$\neg r \rightarrow q$	$(p \rightarrow r) \wedge (\neg r \rightarrow q)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1

则与该公式等值的主范式是

A.  $m_1 \wedge m_2 \wedge m_3 \wedge m_5 \wedge m_7$

B.  $m_0 \wedge m_4 \wedge m_6$

C.  $m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$

D.  $m_0 \vee m_4 \vee m_6$

答案: C

## 65. 测验题 2.65

下面是公式  $(p \rightarrow r) \wedge (\neg r \rightarrow q)$  的真值表。

$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow r$	$\neg r$	$\neg r \rightarrow q$	$(p \rightarrow r) \wedge (\neg r \rightarrow q)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1

则与该公式等值的主范式是

A.  $M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_5 \wedge M_7$

B.  $M_0 \wedge M_4 \wedge M_6$

C.  $M_1 \vee M_2 \vee M_3 \vee M_5 \vee M_7$

D.  $M_0 \vee M_4 \vee M_6$

答案: B

## 66. 测验题 2.66

下面哪个说法是不正确的?

A. 如果推理  $A_1, \dots, A_n \implies B$  是有效的, 则公式  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$  是永真式。

B. 如果推理  $A_1, \dots, A_n \implies B$  是有效的, 则公式  $B$  的真值一定为真。

C. 如果  $B$  是永真式, 则推理  $A_1, \dots, A_n \implies B$  是有效的。

D. 如果  $B$  不是永真式, 则推理  $A_1, \dots, A_n \implies B$  不可能是有效的。

答案: BD

## 67. 测验题 2.67

下面哪些说法是不正确的?

A. 由前提“如果 2020 年是闰年, 则 2021 年是闰年”和前提“2020 年是闰年”, 推出结论“2021 年是闰年”的推理是有效的。

B. 由前提“如果 2020 年是闰年, 则 2021 年是闰年”和前提“2020 年不是闰年”, 推出结论“2021 年不是闰年”的推理是有效的。

C. 由前提“如果 2020 年是闰年, 则 2021 年是闰年”和前提“2021 年不是闰年”, 推出结论“2020 年不是闰年”的推理是有效的。

D. 由前提“如果 2020 年是闰年, 则 2021 年是闰年”和前提“2021 年是闰年”, 推出结论“2020 年是闰年”的推理是有效的。

答案: BD

## 68. 测验题 2.68

从前提“如果 2020 年是闰年, 则 2021 年不是闰年”和前提“2020 年是闰年”, 推出结论“2021 年不是闰年”使用的推理规则是

- A. 假言推理
- B. 假言易位
- C. 附加规则
- D. 析取三段论

答案: A

## 69. 测验题 2.69

从前提“如果 2020 年是闰年, 则 2021 年不是闰年”和前提“2021 年是闰年”, 推出结论“2020 年不是闰年”使用的推理规则是

- A. 假言推理
- B. 假言易位
- C. 附加规则
- D. 析取三段论

答案: B

## 70. 测验题 2.70

从前提“2020 年是闰年而且 2021 年不是闰年”推出结论“2021 年不是闰年”使用的推理规则是

- A. 假言推理
- B. 假言易位
- C. 合取规则
- D. 化简规则

答案: D

### 71. 测验题 2.71

从前提"2020 年是闰年" 和前提"2021 年不是闰年" 推出结论"2020 年是闰年而且 2021 年不是闰年" 使用的推理规则是

- A. 假言推理
- B. 假言易位
- C. 合取规则
- D. 化简规则

答案: C

### 72. 测验题 2.72

从前提" 或者 2020 年是闰年, 或者 2021 年是闰年" 和前提"2021 年不是闰年", 推出结论"2020 年是闰年" 使用的推理规则是

- A. 假言推理
- B. 假言易位
- C. 附加规则
- D. 析取三段论

答案: D

### 73. 测验题 2.73

从前提 " 2020 年是闰年 " , 推出结论 " 或者 2020 年是闰年, 或者 2021 年是闰年 " 使用的推理规则是

- A. 假言推理
- B. 假言易位
- C. 附加规则
- D. 析取三段论

答案: C

### 74. 测验题 2.74

下面是验证推理  $q \rightarrow p, s \rightarrow p, t \rightarrow s, t \wedge r \implies p \wedge q$  有效性的论证:

- (1)  $t \wedge r$  // 前提
- (2)  $t$  // (1) 化简规则
- (3)  $t \rightarrow s$  // 前提
- (4)  $s$  // (2), (3) 假言推理
- (5)  $s \rightarrow q$  // 前提
- (6)  $q$  // (4), (5) 假言推理
- (7)  $q \rightarrow p$  // 前提
- (8)  $p$  // (6), (7) 假言推理
- (9)  $p \wedge q$  // (8), (6) 合取规则

记公式  $H$  是前提的合取, 即  $H$  是  $(q \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow p) \wedge (t \rightarrow s) \wedge (t \wedge r)$ , 下面哪些说法是正确的?

- A. 由上面 (4) 可得到公式  $H \rightarrow s$  是永真式。
- B. 上面 (4) 给出的公式  $s$  是由  $t$  和  $t \rightarrow s$  通过假言推理规则得到的。
- C. 由公式  $t$  和  $t \rightarrow s$  推出  $s$  是假言推理规则  $A, A \rightarrow B \implies B$  的实例。
- D. 因为  $H \rightarrow t$  和  $H \rightarrow (t \rightarrow s)$  都是永真式, 而且  $(t \wedge (t \rightarrow s)) \rightarrow s$  也是永真式, 从而得到  $H \rightarrow s$  也是永真式。

答案: ABCD

## 75. 测验题 2.75

下面是验证推理  $p \rightarrow (q \vee s) \wedge \neg(q \wedge s), q \rightarrow \neg r \implies (r \wedge \neg s) \rightarrow \neg p$  有效性的论证:

- (1)  $r \wedge \neg s$  // 附加前提
- (2)  $r$  // (1) 化简规则
- (3)  $q \rightarrow \neg r$  // 前提
- (4)  $\neg q$  // (2), (3) 假言易位
- (5)  $p$  // 附加前提
- (6)  $p \rightarrow (q \vee s) \wedge \neg(q \wedge s)$  // 前提
- (7)  $(q \vee s) \wedge \neg(q \wedge s)$  // (5), (6) 假言推理
- (8)  $q \vee s$  // (7) 化简规则
- (9)  $s$  // (4), (8) 析取三段论
- (10)  $\neg s$  // (1) 化简规则
- (11)  $\neg p$  // (5), (9), (10) 反证法
- (12)  $(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg p$  // (1), (11) 附加前提法

记公式  $H$  是前提的合取, 即  $H$  是  $(p \rightarrow (q \vee s) \wedge \neg(q \wedge s)) \wedge (q \rightarrow \neg r)$ , 下面哪些说法是正

确的?

- A. 由上面 (9) 可得到公式  $H \rightarrow s$  是永真式。
- B. 由上面 (9) 可得到公式  $(H \wedge (r \wedge \neg s)) \rightarrow s$  是永真式。
- C. 由上面 (9) 可得到公式  $(H \wedge (r \wedge \neg s) \wedge p) \rightarrow s$  是永真式。
- D. 由上面 (11) 可得到公式  $(H \wedge (r \wedge \neg s)) \rightarrow \neg p$  是永真式。

答案: CD

## 76. 测验题 2.76

下面是验证推理  $p \rightarrow (q \rightarrow s), \neg r \vee p, q \implies r \rightarrow s$  有效性的论证:

- (1)  $r$  // 附加前提
- (2)  $\neg r \vee p$  // 前提
- (3)  $p$  // (1),(2) 析取三段论
- (4)  $p \rightarrow (q \rightarrow s)$  // 前提
- (5)  $q \rightarrow s$  // (3),(4) 假言推理
- (6)  $q$  // 前提
- (7)  $s$  // (5),(6) 假言推理
- (8)  $r \rightarrow s$  // (1),(7) 附加前提法

记公式  $H$  是前提的合取, 即  $H$  是  $(p \rightarrow (q \rightarrow s)) \wedge (\neg r \vee p) \wedge q$ , 下面哪些说法是正确的?

- A. 由上面 (1) 可得到公式  $H \rightarrow r$  是永真式。
- B. 由上面 (3) 可得到公式  $H \rightarrow p$  是永真式。
- C. 由上面 (5) 可得到公式  $(H \wedge r) \rightarrow (q \rightarrow s)$  是永真式。
- D. 由上面 (8) 可得到公式  $H \rightarrow (r \rightarrow s)$  是永真式。

答案: CD

## 77. 测验题 2.77

下面是验证推理  $s \rightarrow \neg q, r \vee s, \neg q \vee \neg r \implies \neg q$  有效性的论证:

- (1)  $q$  // 附加前提
- (2)  $s \rightarrow \neg q$  // 前提
- (3)  $\neg s$  // (1),(2) 假言易位
- (4)  $r \vee s$  // 前提
- (5)  $r$  // (3),(4) 析取三段论
- (6)  $\neg q \vee \neg r$  // 前提
- (7)  $\neg r$  // (1),(6) 析取三段论
- (8)  $\neg q$  // (1),(5),(7) 反证法

记公式  $H$  是前提的合取, 即  $H$  是  $(s \rightarrow \neg q) \wedge (r \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg r)$ , 下面哪些说法是正确的?

- A. 上面 (5) 给出的公式  $r$  是由  $\neg s$  和  $r \vee s$  通过析取三段论规则得到的。
- B. 由上面 (3) 可得到公式  $H \rightarrow \neg s$  是永真式。
- C. 由上面 (5) 可得到公式  $(H \wedge q) \rightarrow r$  是永真式。
- D. 由上面 (8) 可得到公式  $H \rightarrow \neg q$  是永真式。

答案: ACD

解析: B 选项应为  $(H \wedge q) \rightarrow \neg s$ 。

## 78. 测验题 2.78

下面是验证推理  $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(r \vee s), (q \rightarrow p) \vee \neg r, r \implies p \leftrightarrow q$  有效性的论证:

- (1)  $r$  // 前提
- (2)  $(q \rightarrow p) \vee \neg r$  // 前提
- (3)  $q \rightarrow p$  // (a)
- (4)  $r \vee s$  // (1) 附加规则
- (5)  $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(r \vee s)$  // 前提
- (6)  $p \rightarrow q$  // (b)
- (7)  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  // (3), (6) 合取规则
- (8)  $p \leftrightarrow q$  // (7) 双蕴涵逻辑等值式

其中 (a), (b) 两个空应该依次填写?

答案: (a) (1),(2) 析取三段论 (b) (4),(5) 假言易位

## 79. 测验题 2.79

下面是验证推理  $\neg(p \wedge q), q \vee r, \neg r \implies \neg p$  有效性的论证:



- (1)  $p$  //附加前提
- (2)  $\neg r$  //前提
- (3)  $q \vee r$  //前提
- (4)  $q$  //(a)
- (5)  $p \wedge q$  //(1), (4) 合取规则
- (6)  $\neg(p \wedge q)$  //前提
- (7)  $\neg p$  //(b)

其中 (a),(b) 两个空应该依次填写?

答案: (a) (2),(3) 析取三段论 (b)(1),(5),(6) 反证法

## 80. 测验题 2.80

下面是验证推理  $\neg r \rightarrow (\neg p \vee s), q \rightarrow \neg s \implies p \rightarrow (q \rightarrow r)$  有效性的论证:

- (1)  $p$  //附加前提
- (2)  $q$  //附加前提
- (3)  $q \rightarrow \neg s$  //前提
- (4)  $\neg s$  // (2), (3) 假言推理
- (5)  $\neg r$  //附加前提
- (6)  $\neg r \rightarrow (\neg p \vee s)$  //前提
- (7)  $\neg p \vee s$  // (5), (6) 假言推理
- (8)  $\neg p$  // (4), (7) 析取三段论
- (9)  $r$  //(a)
- (10)  $q \rightarrow r$  // (2), (9) 附加前提法
- (11)  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  //(b)

其中 (a),(b) 两个空应该依次填写?

答案: (a) (1),(5),(8) 反证法 (b) (1),(10) 附加前提法

## 81. 测验题 2.81

下面哪些是命题?

- A. C++ 语言是一门难学的程序设计语言。
- B. C++ 语言真难学啊!
- C. C++ 语言真的很难学吗?

D. 只要你认真学习,C++ 语言就不是难学的程序设计语言。

答案: AD

## 82. 测验题 2.82

设  $p$  表示 " 学生学过 C++ 语言 " ,  $q$  表示 " 学生学过 Java 语言 " , 命题 " 学生不仅学过 C++ 语言, 而且学过 Java 语言 " 符号化为

A.  $p \rightarrow q$

B.  $q \rightarrow p$

C.  $p \wedge q$

D.  $p \vee q$

答案: C

## 83. 测验题 2.83

设  $p$  表示 " 学生学过 C++ 语言 " ,  $q$  表示 " 学生学过 Java 语言 " 。命题 " 学生要么学过 C++ 语言, 要么学过 Java 语言 " 符号化为

A.  $p \rightarrow q$

B.  $q \rightarrow p$

C.  $p \wedge q$

D.  $p \vee q$

答案: D

## 84. 测验题 2.84

设  $p$  表示 " 学生学过 C++ 语言 " ,  $q$  表示 " 学生学过 Java 语言 " 。命题 " 学生只要学过 C++ 语言, 就会学过 Java 语言 " 符号化为?

A.  $p \rightarrow q$

B.  $q \rightarrow p$

C.  $p \wedge q$

D.  $p \vee q$

答案: A

## 85. 测验题 2.85

设  $p$  表示 " 学生学过 C++ 语言 " ,  $q$  表示 " 学生学过 Java 语言 " 。命题 " 学生只有学过 C++ 语言, 才会学过 Java 语言 " 符号化为

A.  $p \rightarrow q$

B.  $q \rightarrow p$

C.  $p \wedge q$

D.  $p \vee q$

答案: B

### 86. 测验题 2.86

设  $p$  表示“学生学过 C++ 语言”,  $q$  表示“学生学过 Java 语言”,  $r$  表示“学生理解面向对象编程思想”, 命题“学生不仅学过 C++ 语言, 而且学过 Java 语言, 但并不理解面向对象编程思想”符号化为

A.  $(p \vee q) \rightarrow \neg r$

B.  $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$

C.  $p \wedge q \wedge \neg r$

D.  $(p \wedge q) \vee \neg r$

答案: C

### 87. 测验题 2.87

设  $p$  表示“学生学过 C++ 语言”,  $q$  表示“学生学过 Java 语言”,  $r$  表示“学生理解面向对象编程思想”。命题“学生学过 C++ 语言或 Java 语言, 但并不理解面向对象编程思想”符号化为?

A.  $(p \vee q) \rightarrow \neg r$

B.  $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$

C.  $(p \vee q) \wedge \neg r$

D.  $(p \wedge q) \vee \neg r$

答案: C

解析: 注意“虽然但是”表示的是合取关系。

### 88. 测验题 2.88

设  $p$  表示“学生学过 C++ 语言”,  $q$  表示“学生学过 Java 语言”,  $r$  表示“学生理解面向对象编程思想”。命题“学生不理解面向对象编程思想, 除非学过 C++ 语言或 Java 语言”符号化为?

A.  $(p \vee q) \rightarrow \neg r$

B.  $(p \vee q) \rightarrow r$

C.  $\neg r \rightarrow (p \vee q)$

D.  $r \rightarrow (p \vee q)$

答案: D

**89. 测验题 2.89**

设  $p$  表示“学生学过 C++ 语言”,  $q$  表示“学生学过 Java 语言”,  $r$  表示“学生理解面向对象编程思想”。命题“如果学生没有学过 C++ 语言或 Java 语言, 那么他不理解面向对象编程思想”符号化为?

A.  $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg r$

B.  $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg r$

C.  $(\neg p \vee q) \rightarrow \neg r$

D.  $p \vee q \rightarrow r$

答案: B

**90. 测验题 2.90**

设  $p$  表示“学生学过 C++ 语言”,  $q$  表示“学生学过 Java 语言”,  $r$  表示“学生理解面向对象编程思想”。命题“除非既学过 C++ 语言又学过 Java 语言, 否则学生不理解面向对象编程思想”符号化为?

A.  $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$

B.  $(p \wedge q) \rightarrow r$

C.  $\neg r \rightarrow (p \wedge q)$

D.  $r \rightarrow (p \wedge q)$

答案: D

**91. 测验题 2.91**

设  $p$  表示“学生学过 C++ 语言”,  $q$  表示“学生学过 Java 语言”,  $r$  表示“学生理解面向对象编程思想”。命题“学生学过 C++ 语言, 而且如果他还学过 Java 语言, 那么他理解面向对象编程思想”符号化为

A.  $p \wedge (q \rightarrow r)$

B.  $(p \wedge q) \rightarrow r$

C.  $p \wedge q \wedge r$

D.  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

答案: A

**92. 测验题 2.92**

设  $p$  表示“学生学过 C++ 语言”,  $q$  表示“学生学过 Java 语言”,  $r$  表示“学生理解面向对象编程思想”。命题“学生如果学过 C++ 语言, 那么若还学过 Java 语言, 则他理解面向对象编程思想”符号化为

- A.  $p \wedge (q \rightarrow r)$
- B.  $(p \wedge q) \rightarrow r$
- C.  $p \wedge q \wedge r$
- D.  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

答案: D

### 93. 测验题 2.93

设  $p$  表示“学生学过 C++ 语言”,  $q$  表示“学生学过 Java 语言”,  $r$  表示“学生理解面向对象编程思想”。命题“学生如果学过 C++ 语言, 则他理解面向对象编程思想, 除非他没有学过 Java 语言”符号化为?

- A.  $(p \rightarrow r) \rightarrow \neg q$
- B.  $\neg(p \rightarrow r) \rightarrow \neg q$
- C.  $\neg q \rightarrow (p \rightarrow r)$
- D.  $\neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow r)$

答案: B

解析:  $p$  除非  $q$  等价于 除非  $q$  否则  $p$  等价于 除非  $q$  才非  $p$  等价于  $\neg p \rightarrow q$ 。借用汉语词典的例子:

1. 除非在这里修个水库, 否则不能解决供水问题。
2. 不能解决供水问题, 除非在这里修个水库。
3. 除非在这里修个水库, 才能解决供水问题。

解决了供水问题可以推出修建了水库, 因此是  $\neg p \rightarrow q$ ; 但是不能保证修了水库就能解决供水问题。

记忆: 除非后面的东西是蕴涵式的后件。

### 94. 测验题 2.94

命题“如果学生学过 C++ 语言, 则他理解面向对象编程思想”题是?

- A. “如果学生没学过 C++ 语言, 则他不理解面向对象编程思想”
- B. “如果学生理解面向对象编程思想, 则他学过 C++ 语言”
- C. “如果学生不理解面向对象编程思想, 则他没学过 C++ 语言”
- D. “只要学生学过 C++ 语言, 他就理解面向对象编程思想”

答案: B

### 95. 测验题 2.95

命题“如果学生学过 C++ 语言, 则他理解面向对象编程思想”的否命题是

- A. “如果学生没学过 C++ 语言, 则他不理解面向对象编程思想”

- B. “如果学生理解面向对象编程思想, 则他学过 C++ 语言”
- C. “如果学生不理解面向对象编程思想, 则他没学过 C++ 语言”
- D. “只要学生学过 C++ 语言, 他就理解面向对象编程思想”

答案: A

## 96. 测验题 2.96

命题“如果学生学过 C++ 语言, 则他理解面向对象编程思想”的逆否命题是?

- A. “如果学生没学过 C++ 语言, 则他不理解面向对象编程思想”
- B. “如果学生理解面向对象编程思想, 则他学过 C++ 语言”
- C. “如果学生不理解面向对象编程思想, 则他没学过 C++ 语言”
- D. “只要学生学过 C++ 语言, 他就理解面向对象编程思想”

答案: C

## 97. 测验题 2.97

说一组命题是一致的, 如果存在对其中原子命题的真值赋值使得所有命题的真值都为真。设有一组命题: (1) 如果学生没有学过 C++ 语言, 则他不理解面向对象编程思想。(2) 如果学生不理解面向对象编程思想, 则他不能编程求解复杂问题。(3) 如果学生学过 Java 语言, 则他能编程求解复杂问题。这一组命题加入下面哪个命题将会是不一致的?

- A. 学生学过 C++ 语言, 但没学过 Java 语言。
- B. 学生学过 C++ 语言, 且能编程求解复杂问题。
- C. 学生没学过 Java 语言, 但能理解面向对象编程思想。
- D. 学生学过 Java 语言, 但不能理解面向对象编程思想。

答案: D

## 98. 测验题 2.98

说一组命题是一致的, 如果存在对其中原子命题的真值赋值使得所有命题的真值都为真。设有一组命题: (1) 如果学生没有学过 C++ 语言, 则他不理解面向对象编程思想。(2) 如果学生不理解面向对象编程思想, 则他不能编程求解复杂问题。(3) 如果学生学过 Java 语言, 则他能编程求解复杂问题。这一组命题加入下面哪个命题将会是不一致的?

- A. 学生没学过 C++ 语言, 但学过 Java 语言。
- B. 学生没学过 C++ 语言, 且不能编程求解复杂问题。
- C. 学生学过 Java 语言, 但能理解面向对象编程思想。
- D. 学生没学过 Java 语言, 且不能理解面向对象编程思想。

答案: A

**99. 测验题 2.100**

学校要从程序设计竞赛集训队赵、钱、孙、李、周五人中挑选若干人组队参加下次的国际程序设计竞赛, 经过考察平时配合情况, 发现: (1) 如果赵去, 则钱也去; (2) 周和李两人中至少去一人; (3) 钱和孙去且仅去一人; (4) 孙、李同去或同不去; (5) 若周去, 则赵和钱都去。

分别使用  $p, q, r, s, t$  表示原子命题“赵/钱/孙/李/周去参加竞赛”, 并按照  $p, q, r, s, t$  的顺序对范式中的极大项或极小项进行编码。那么将描述可能组队方案的公式展开为主范式, 会包含下面哪些项?

A.  $m_{30}$

B.  $m_{22}$

C.  $m_{25}$

D.  $m_{28}$

答案: C

### 三、一阶逻辑

#### 1. 测验题 3.1

假设为研究自然数性质提取了常量符号  $0, 1$ , 运算符号  $+, *$ , 关系符号  $=, \geq$ , 并使用变量符号  $x, y, z$ , 逻辑运算符  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ , 量词符号  $\forall, \exists$ 。这些符号中讲些是非逻辑符号?

- A. 关系符号  $=, \geq$
- B. 变量符号  $x, y, z$
- C. 运算符号  $+, *$
- D. 量词符号  $\forall, \exists$

答案: AC

解析: 一阶逻辑公式中出现的逻辑符号包括: (1) 个体变量符号, 使用小写字母  $x, y, z, \dots$  等表示个体变量, 记所有个体变量符号构成的集合为  $V$ ; (2) 逻辑运算符, 包括否定  $\neg$  逻辑与  $\wedge$ 、逻辑或  $\vee$ 、逻辑蕴涵  $\rightarrow$  和逻辑双蕴涵  $\leftrightarrow$ ; (3) 量词符号: 包括全称量词  $\forall$  和存在量词  $\exists$ ; (4) 辅助符号, 包括圆括号 (和), 以及逗号。

一阶逻辑公式中出现的非逻辑符号包括: (1) 个体常量符号, 使用小写字母  $a, b, c, \dots$  等表示个体常量; (2) 函数符号, 使用小写字母  $f, g, h, \dots$  等表示函数, 每个函数都有一个元数信息, 表明该函数是几元函数; (3) 谓词符号, 使用大写字母  $F, G, H, \dots$  表示谓词, 每个谓词都有一个元数信息, 表明该谓词是几元谓词。

#### 2. 测验题 3.2

假设为研究自然数性质提取了常量符号  $0, 1$ , 运算符号  $+, *$ , 关系符号  $=, \geq$ , 并使用变量符号  $x, y, z$ , 逻辑运算符  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ , 量词符号  $\forall, \exists$ 。这些符号中哪些是逻辑符号?

- A. 关系符号  $=, \geq$
- B. 变量符号  $x, y, z$
- C. 运算符号  $+, *$
- D. 量词符号  $\forall, \exists$

答案: BD

#### 3. 测验题 3.3

假设为研究自然数性质提取了常量符号  $0, 1$ , 运算符号  $+, *$ , 关系符号  $=, \geq$ , 并使用变量符号  $x, y, z$ , 逻辑运算符  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ , 量词符号  $\forall, \exists$ 。下面哪些是一阶逻辑公式中的项?

- A.  $x + 1$
- B.  $x \geq 0$
- C.  $\forall x(x \geq 0)$



D.  $x * (y + z)$

答案: AD

解析: 将一阶逻辑公式中可以出现的符号分为逻辑符号和非逻辑符号是因为非逻辑符号与一阶逻辑的具体应用领域相关, 例如应用一阶逻辑公式研究整数的性质, 可以使用 0,1 等作为个体常量符号,  $+$   $-$   $\times$ ,  $\div$  等作为函数符号,  $\geq$ ,  $\leq$ ,  $=$  等作为谓词符号。

而对于项的定义如下:

定义 3.1 给定非逻辑符号集  $\mathcal{L}$  和个体变量集  $V$ , 一阶逻辑公式的项 (term) 归纳定义为:

(1) 归纳基:  $\mathcal{L}$  的任意个体常量  $c$  都是项;  $V$  的任意个体变量  $x$  也是项;

(2) 归纳步: 对  $\mathcal{L}$  的任意  $n$  元函数  $f$ , 如果  $t_1, t_2, \dots, t_n$  是项, 则  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  也是项。

归纳步中只提到了  $n$  元函数, 没有提到  $n$  元谓词, 因此谓词符号连接的不是项。逆天...

#### 4. 测验题 3.4

假设为研究自然数性质提取了常量符号 0,1, 运算符号  $+$ ,  $*$ , 关系符号  $=$ ,  $\geq$ , 并使用变量符号  $x, y, z$ , 逻辑运算符  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ , 量词符号  $\forall, \exists$ . 下面哪些是一阶逻辑的原子公式?

A.  $x + y$

B.  $x \geq z$

C.  $\forall x(x \geq z)$

D.  $(x + y) \wedge (x * z)$

答案: B

#### 5. 测验题 3.5

下面哪些公式是一阶逻辑公式  $\forall x \exists y(x + y \geq 0) \rightarrow \exists x(\forall y(x * y = x) \wedge \forall z(x + z = z))$  的子公式?

A.  $x + y$

B.  $\exists y(x + y \geq 0)$

C.  $\exists x \forall y(x * y = x)$

D.  $x + z = z$

答案: BD

#### 6. 测验题 3.6

下面哪些公式是一阶逻辑公式  $\forall x(F(x) \wedge H(x, y)) \rightarrow \exists x(G(x, y) \rightarrow (\neg \exists y H(x, y)))$  的子公式?

A.  $\forall x F(x)$

B.  $\exists x G(x, y)$

C.  $H(x, y)$

$$D. G(x, y) \rightarrow (\neg \exists y H(x, y))$$

答案: CD

### 7. 测验题 3.7

一阶逻辑公式  $\forall x \exists y (x + y \geq 0) \rightarrow \exists x (\forall y (x * y = x) \wedge \forall z (x + z = z))$  中量词  $\forall x$  的辖域是

A.  $\forall x \exists y (x + y \geq 0)$

B.  $\exists y (x + y \geq 0) \rightarrow \exists x (\forall y (x * y = x) \wedge \forall z (x + z = z))$

C.  $\exists y (x + y \geq 0)$

D.  $(x + y \geq 0)$

答案: C

### 8. 测验题 3.8

一阶逻辑公式  $\forall x \exists y (x + y \geq 0) \rightarrow \exists x (\forall y (x * y = x) \wedge \forall z (x + z = z))$  中量词  $\exists x$  的辖域是

A.  $\forall y (x * y = x)$

B.  $\forall y (x * y = x) \wedge \forall z (x + z = z)$

C.  $\forall z (x + z = z)$

D.  $(x * y = x)$  和  $(x + z = z)$

答案: B

### 9. 测验题 3.9

一阶逻辑公式  $\forall x \exists y (F(x) \wedge H(x, y)) \rightarrow \exists x (G(x, y) \rightarrow (\neg \exists y H(x, y)))$  中量词  $\forall x$  的辖域是

A.  $\forall x \exists y (F(x) \wedge H(x, y))$

B.  $F(x) \wedge H(x, y)$

C.  $\exists y (F(x) \wedge H(x, y))$

D.  $F(x)$  和  $H(x, y)$

答案: C

### 10. 测验题 3.10

一阶逻辑公式  $\forall x \exists y (F(x) \wedge H(x, y)) \rightarrow \exists x (G(x, y) \rightarrow (\neg \exists y H(x, y)))$  中量词  $\exists x$  的辖域是

A.  $G(x, y)$

B.  $\exists x (G(x, y) \rightarrow (\neg \exists y H(x, y)))$

C.  $G(x, y)$  和  $H(x, y)$

D.  $G(x, y) \rightarrow (\neg \exists y H(x, y))$

答案: D

**11. 测验题 3.11**

对于一阶逻辑公式  $\forall x(\exists y(x * y = z) \wedge \exists z(x + y = z))$ ，下面哪些说法是正确的？

- A. 子公式  $x * y = z$  中的  $x$  是自由出现的。
- B. 子公式  $x * y = z$  中的  $y$  是自由出现的。
- C. 子公式  $x + y = z$  中的  $y$  是自由出现的。
- D. 子公式  $x + y = z$  中的  $z$  是自由出现的。

答案：C

**12. 测验题 3.12**

对于一阶逻辑公式  $\forall x \exists y(x * y = z) \rightarrow \exists z(x + y = z)$ ，下面哪些说法是正确的？

- A. 子公式  $x * y = z$  中的  $x$  是约束出现的。
- B. 子公式  $x * y = z$  中的  $z$  是约束出现的。
- C. 子公式  $x + y = z$  中的  $y$  是自由出现的。
- D. 子公式  $x + y = z$  中的  $z$  是自由出现的。

答案：AC

**13. 测验题 3.13**

对于一阶逻辑公式  $\forall x(\exists y(x * y = z) \wedge \exists z(x + y = z))$ ，下面哪些说法是正确的？

- A. 个体变量  $x$  是这个公式的约束变量。
- B. 个体变量  $y$  是这个公式的约束变量。
- C. 个体变量  $z$  是这个公式的自由变量。
- D. 个体变量  $z$  是这个这个公式的约束变量，又是这个公式的自由变量。

答案：AC

**14. 测验题 3.14**

对于一阶逻辑公式  $\exists x \forall y F(x, y) \rightarrow \exists y(G(y, z) \wedge \forall z H(y, z))$ ，下面哪些说法是正确的？

- A. 个体变量  $x$  是这个公式的约束变量。
- B. 个体变量  $y$  是这个公式的约束变量。
- C. 个体变量  $z$  是这个公式的自由变量。
- D. 个体变量  $z$  既是这个公式的约束变量，又是这个公式的自由变量。

答案：ABC

**15. 测验题 3.15**

对于一阶逻辑公式  $\exists x \forall y F(x, y) \rightarrow \exists y (G(y, z) \wedge \forall z H(y, z))$ , 下面哪些说法是正确的?

- A. 子公式  $F(x, y)$  中的  $x$  是约束出现的。
- B. 子公式  $G(y, z)$  中的  $y$  是约束出现的。
- C. 子公式  $G(y, z)$  中的  $z$  是自由出现的。
- D. 子公式  $H(y, z)$  中的  $y$  是自由出现的。

答案: ABC

**16. 测验题 3.16**

对于一阶逻辑公式  $\exists x F(x, y) \wedge \forall x (\exists y G(y, z) \rightarrow \exists z H(x, y, z))$ , 下面哪些说法是正确的?

- A. 子公式  $F(x, y)$  中的  $y$  是自由出现的。
- B. 子公式  $G(y, z)$  中的  $z$  是自由出现的。
- C. 子公式  $H(x, y, z)$  中的  $y$  是约束出现的。
- D. 子公式  $H(x, y, z)$  中的  $x$  是约束出现的。

答案: ABD

**17. 测验题 3.17**

对于一阶逻辑公式  $\exists x F(x, y) \wedge \forall x (\exists y G(y, z) \rightarrow \exists z H(x, y, z))$ , 下面哪些说法是正确的?

- A. 个体变量  $x$  是这个公式的约束变量。
- B. 个体变量  $y$  是这个公式的约束变量。
- C. 个体变量  $y$  既是这个公式的约束变量, 又是这个公式的自由变量。
- D. 个体变量  $z$  是这个公式的自由变量。

答案: AD

**18. 测验题 3.18**

对于公式  $\forall x \exists y (x * y = z) \rightarrow \exists z (x + z = x)$ , 下面哪些是约束变量改名规则的正确使用?

- A. 子公式  $\exists y (x * y = z)$  约束变量改名为  $\exists x (x * x = z)$ 。
- B. 子公式  $\exists y (x * y = z)$  约束变量改名为  $\exists z (x * z = z)$ 。
- C. 子公式  $\exists z (x + z = x)$  约束变量改名为  $\exists y (x + y = x)$ 。
- D. 子公式  $\exists z (x + z = x)$  约束变量改名为  $\exists x (y + x = y)$ 。

答案: C

## 19. 测验题 3.19

对于公式  $\exists x \forall y F(x, y) \rightarrow \exists y (G(y, z) \wedge \forall z H(x, z))$ , 下面哪些是约束变量改名规则的正确使用?

- A. 子公式  $\forall y F(x, y)$  约束变量改名为  $\forall z(x, z)$ 。
- B. 子公式  $\exists y (G(y, z) \wedge \forall z H(x, z))$  约束变量改名为  $\exists x (G(x, z) \wedge \forall z H(x, z))$ 。
- C. 子公式  $\forall z H(x, z)$  约束变量改名为  $\forall y (H(x, y))$ 。
- D. 子公式  $\forall z H(x, z)$  约束变量改名为  $\forall x (H(x, x))$ 。

答案: A

## 20. 测验题 3.20

对于公式  $\forall x (\exists y G(y, z) \rightarrow \exists z H(x, y, z))$ , 下面哪些是约束变量改名规则的正确使用?

- A. 子公式  $\exists y(y, z)$  约束变量改名为  $\exists x G(x, z)$ 。
- B. 子公式  $\exists z H(x, y, z)$  约束变量改名为  $\exists y H(x, z, y)$ 。
- C. 子公式  $\exists z H(x, y, z)$  约束变量改名为  $\exists u H(x, y, u)$ 。
- D. 子公式  $\forall x (\exists y G(y, z) \rightarrow \exists z H(x, y, z))$  约束变量改名为  $\forall u (\exists y G(y, z) \rightarrow \exists z H(u, y, z))$ 。

答案: CD

## 21. 测验题 3.21

对于一阶逻辑公式的解释, 下面哪些说法是正确的?

- A. 一组一阶逻辑公式可以有多个不同的解释。
- B. 一阶逻辑公式解释的论域可以是任意集合。
- C. 一阶逻辑公式的解释需要给出公式中个体常量、个体变量、函数符号、谓词符号的解释。
- D. 在一阶逻辑公式的解释中, 个体常量解释为论域的元素。

答案: AD

解析: C 选项个体变量不需要。个体变量使用个体变量函数  $\sigma$  赋值。

## 22. 测验题 3.22

给定一阶逻辑公式的解释  $\mathcal{M}$ , 论域是  $D = \{a, b, c, d\}$ 。又设个体变量集  $V = \{x, y, z\}$ , 解释  $\mathcal{M}$  的一个个体变量指派函数  $\sigma: V \rightarrow D$  定义为  $\sigma(x) = a, \sigma(y) = b, \sigma(z) = d$ , 则  $\sigma[y \mapsto c]$  的定义是

- A.  $\sigma[y \mapsto c](x) = c, \quad \sigma[y \mapsto c](y) = c, \quad \sigma[y \mapsto c](z) = c$
- B.  $\sigma[y \mapsto c](x) = a, \quad \sigma[y \mapsto c](y) = b, \quad \sigma[y \mapsto c](z) = d$
- C.  $\sigma[y \mapsto c](x) = a, \quad \sigma[y \mapsto c](y) = c, \quad \sigma[y \mapsto c](z) = d$
- D.  $\sigma[y \mapsto c](x) = c, \quad \sigma[y \mapsto c](y) = b, \quad \sigma[y \mapsto c](z) = c$

答案: C

## 23. 测验题 3.23

给定一阶逻辑公式的解释  $\mathcal{M}$ ，论域是自然数集。个体常量 0 和 1 分别解释为自然数 0 和 1，函数符号 + 和 \* 分别解释为自然数集上的加法和乘法，谓词符号 = 和  $\geq$  分别解释为自然数相等和自然数大于等于关系。设个体变量集  $V = \{x, y, z\}$ ，解释  $\mathcal{M}$  的一个个体变量指派函数  $\sigma : V \rightarrow D$  定义为  $\sigma(x) = 2, \sigma(y) = 4, \sigma(z) = 6$ 。下面哪些说法是正确的？

- A. 一阶公式的项  $x + y$  在  $\sigma$  下的解释  $\llbracket x + y \rrbracket_\sigma$  等于自然数 6
- B. 一阶公式的项  $x + 1$  在  $\sigma$  下的解释  $\llbracket x + 1 \rrbracket_\sigma$  等于自然数 3
- C. 一阶公式的项  $x * z$  在  $\sigma[x \mapsto 1]$  下的解释  $\llbracket x * z \rrbracket_{\sigma[x \mapsto 1]}$  等于自然数 12
- D. 一阶公式的项  $x + (y + z)$  在  $\sigma[x \mapsto 1]$  下的解释  $\llbracket x + (y + z) \rrbracket_{\sigma[x \mapsto 1]}$  等于自然数 12

答案：AB

## 24. 测验题 3.24

给定一阶逻辑公式的解释  $\mathcal{M}$ ，论域是自然数集。个体常量 0 和 1 分别解释为自然数 0 和 1，函数符号 + 和 \* 分别解释为自然数集上的加法和乘法，谓词符号 = 和  $\geq$  分别解释为自然数相等和自然数大于等于关系。设个体变量集  $V = \{x, y, z\}$ ，解释  $\mathcal{M}$  的一个个体变量指派函数  $\sigma : V \rightarrow D$  定义为  $\sigma(x) = 2, \sigma(y) = 4, \sigma(z) = 6$ 。下面哪些说法是正确的？

- A. 一阶公式  $x \geq 0$  在  $\sigma$  下的真值  $\sigma(x \geq 0)$  等于 0
- B. 一阶公式  $(x + y) = z$  在  $\sigma$  下的真值  $\sigma((x + y) = z)$  等于 1
- C. 一阶公式  $x * z \geq z$  在  $\sigma[x \mapsto 1]$  下的真值  $\sigma[x \mapsto 1](x * z \geq z)$  等于 0
- D. 一阶公式  $x + (y + z) = z$  在  $\sigma[x \mapsto 0][y \mapsto 0]$  下的真值  $\sigma[x \mapsto 0][y \mapsto 0](x + (y + z) = z)$

等于 1

答案：BD

解析：如果赋值的变量是自由变量，那就直接代入；如果是约束变量，就要在论域中遍历。

## 25. 测验题 3.25

给定一阶逻辑公式的解释  $\mathcal{M}$ ，论域是自然数集。个体常量 0 和 1 分别解释为自然数 0 和 1，函数符号 + 和 \* 分别解释为自然数集上的加法和乘法，谓词符号 = 和  $\geq$  分别解释为自然数相等和自然数大于等于关系。设个体变量集  $V = \{x, y, z\}$ ，解释  $\mathcal{M}$  的一个个体变量指派函数  $\sigma : V \rightarrow D$  定义为  $\sigma(x) = 2, \sigma(y) = 4, \sigma(z) = 6$ 。下面哪些说法是正确的？

- A. 一阶公式  $\forall x(x \geq 0)$  在  $\sigma$  下的真值  $\sigma(\forall x(x \geq 0))$  等于 1
- B. 一阶公式  $\forall x(x \geq y)$  在  $\sigma$  下的真值  $\sigma(\forall x(x \geq y))$  等于 1
- C. 一阶公式  $\forall x \exists z(x * z \geq z)$  在  $\sigma$  下的真值  $\sigma(\forall x \exists z(x * z \geq z))$  等于 1
- D. 一阶公式  $\forall x \exists y \exists z(x + (y + z) = z)$  在  $\sigma$  下的真值  $\sigma(\forall x \exists y \exists z(x + (y + z) = z))$  等于 1

答案：AC

## 26. 测验题 3.26

给定一阶逻辑公式的解释  $\mathcal{M}$ , 论域是自然数集。个体常量 0 和 1 分别解释为自然数 0 和 1, 函数符号 + 和 \* 分别解释为自然数集上的加法和乘法, 谓词符号 = 和  $\geq$  分别解释为自然数相等和自然数大于等于关系。设个体变量集  $V = \{x, y, z\}$ , 解释  $\mathcal{M}$  的一个个体变量指派函数  $\sigma : V \rightarrow D$  定义为  $\sigma(x) = 2, \sigma(y) = 4, \sigma(z) = 6$ 。下面哪些说法是正确的?

- A. 一阶公式  $\forall x(x \geq 0)$  在  $\sigma$  下的真值与  $\sigma(x)$  的值无关。
- B. 一阶公式  $\forall x(x \geq y)$  在  $\sigma$  下的真值与  $\sigma(x)$  和  $\sigma(y)$  的值都无关。
- C. 一阶公式  $\forall x \exists z(x * z \geq z)$  在  $\sigma$  下的真值与  $\sigma$  对个体变量的赋值无关。
- D. 一阶公式  $\forall x \exists y \exists z(x + (y + z) = z)$  在  $\sigma$  下的真值与  $\sigma$  对个体变量的赋值无关。

答案: ACD

## 27. 测验题 3.27

给定一阶逻辑公式的解释  $\mathcal{M}$ , 论域是  $D = \{a, b\}$ , 一元谓词符号  $F$  的解释  $\llbracket F \rrbracket$  是  $D$  的子集  $\{a\}$ , 二元谓词符号  $G$  的解释  $\llbracket G \rrbracket$  是  $D \times D$  的子集  $\{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle\}$ 。设个体变量集  $V = \{x, y, z\}$ , 解释  $\mathcal{M}$  的一个个体变量指派函数  $\sigma : V \rightarrow D$  定义为  $\sigma(x) = a, \sigma(y) = b, \sigma(z) = a$ 。下面哪些说法是正确的?

- A. 一阶公式  $F(x)$  在  $\sigma$  下的真值  $\sigma(F(x))$  等于 1 当且仅当  $\sigma(x) \in \llbracket F \rrbracket$ 。
- B. 一阶公式  $G(y, z)$  在  $\sigma$  下的真值  $\sigma(G(y, z))$  等于 1 当且仅当  $\langle \sigma(y), \sigma(z) \rangle \in \llbracket G \rrbracket$ 。
- C. 一阶公式  $F(x) \rightarrow G(y, z)$  在  $\sigma$  下的真值  $\sigma(F(x) \rightarrow G(y, z))$  等于 1。
- D. 一阶公式  $F(z) \rightarrow G(x, y)$  在  $\sigma$  下的真值  $F(z) \rightarrow G(x, y)$  等于 1。

答案: ABD

解析: D 选项疑似少写了一个  $\sigma$ , 应该是  $\sigma(F(z) \rightarrow G(x, y))$ 。

## 28. 测验题 3.28

给定一阶逻辑公式的解释  $\mathcal{M}$ , 论域是  $D = \{a, b\}$ , 一元谓词符号  $F$  的解释  $\llbracket F \rrbracket$  是  $D$  的子集  $\{a\}$ , 二元谓词符号  $G$  的解释  $\llbracket G \rrbracket$  是  $D \times D$  的子集  $\{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle\}$ 。设个体变量集  $V = \{x, y, z\}$ , 解释  $\mathcal{M}$  的一个个体变量指派函数  $\sigma : V \rightarrow D$  定义为  $\sigma(x) = a, \sigma(y) = b, \sigma(z) = a$ 。下面哪些说法是正确的?

- A. 对一阶公式  $\forall x F(x), \sigma(\forall x F(x)) = \sigma[x \mapsto a](F(x)) \wedge \sigma[x \mapsto b](F(x)) = 1$ 。
- B. 对一阶公式  $\forall z G(y, z), \sigma(\forall z G(y, z)) = \sigma[z \mapsto a](G(y, z)) \wedge \sigma[z \mapsto b](G(y, z)) = 0$ 。
- C. 对一阶公式  $\exists x F(x), \sigma(\exists x F(x)) = \sigma[x \mapsto a](F(x)) \vee \sigma[x \mapsto b](F(x)) = 1$ 。
- D. 对一阶公式  $\exists y G(y, z), \sigma(\exists y G(y, z)) = \sigma[y \mapsto a](G(y, z)) \vee \sigma[y \mapsto b](G(y, z)) = 0$ 。

答案: BC

## 29. 测验题 3.29

给定一阶逻辑公式的解释  $\mathcal{M}$ , 论域是  $D = \{a, b\}$ , 一元谓词符号  $F$  的解释  $\llbracket F \rrbracket$  是  $D$  的子集  $\{a\}$ , 二元谓词符号  $G$  的解释  $\llbracket G \rrbracket$  是  $D \times D$  的子集  $\{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle\}$ 。设个体变量集  $V = \{x, y, z\}$ , 解释  $\mathcal{M}$  的一个个体变量指派函数  $\sigma : V \rightarrow D$  定义为  $\sigma(x) = a, \sigma(y) = b, \sigma(z) = a$ 。下面哪些说法是正确的?

- A. 一阶公式  $\forall x F(x)$  在  $\sigma$  下的真值与  $\sigma$  对个体变量的赋值无关。
- B. 一阶公式  $\forall z G(y, z)$  在  $\sigma$  下的真值与  $\sigma$  对个体变量的赋值无关。
- C. 一阶公式  $\exists x F(x)$  在  $\sigma$  下的真值与  $\sigma$  对个体变量的赋值无关。
- D. 一阶公式  $\exists y G(y, z)$  在  $\sigma$  下的真值与  $\sigma$  对个体变量的赋值无关。

答案: ACD

解析: A 选项, 没有自由变量直接无关 (因为无论如何赋值都无法影响约束变量); B 选项, 当  $y = a$  为真,  $y = b$  为假, 所以与赋值有关。

lhr 的总结:  $\sigma$  只对自由变量起作用。如果有不自由的: 如果他问, 真值是什么, 那就直接带, 然后对那个约束变量对论域中的所有元素遍历, 看真值; 如果他问, 是否有影响, 那就不能直接带, 就要对这个自由变量遍历所有元素 (同时也要对其他的约束遍历), 看会不会对真值产生影响

## 30. 测验题 3.30

给定一阶逻辑公式解释的论域是  $D = \{a, b\}$ , 在按照类似等值演算形式展开量词时, 下面哪些说法是正确的?

- A. 一阶公式  $\forall x (F(x) \vee G(x))$  展开为  $(F(a) \vee G(a)) \wedge (F(b) \vee G(b))$ 。
- B. 一阶公式  $\forall x (F(x) \vee G(x))$  展开为  $(F(a) \wedge G(a)) \vee (F(b) \wedge G(b))$ 。
- C. 一阶公式  $\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$  展开为  $(F(a) \vee G(a)) \wedge (F(b) \vee G(b))$ 。
- D. 一阶公式  $\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$  展开为  $(F(a) \wedge G(a)) \vee (F(b) \wedge G(b))$ 。

答案: A

## 31. 测验题 3.31

给定一阶逻辑公式解释的论域是  $D = \{a, b\}$ , 在按照类似等值演算形式展开量词时, 下面哪些说法是正确的?

- A. 一阶公式  $\exists x (F(x) \wedge G(x))$  展开为  $(F(a) \vee G(a)) \wedge (F(b) \vee G(b))$ 。
- B. 一阶公式  $\exists x (F(x) \wedge G(x))$  展开为  $(F(a) \wedge G(a)) \vee (F(b) \wedge G(b))$ 。
- C. 一阶公式  $\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$  展开为  $(F(a) \vee G(a)) \wedge (F(b) \vee G(b))$ 。
- D. 一阶公式  $\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$  展开为  $(F(a) \wedge G(a)) \vee (F(b) \wedge G(b))$ 。

答案: B

解析: 注意 C 选项应为  $(F(a) \vee F(b)) \wedge (G(a) \vee G(b))$ 。



## 32. 测验题 3.32

给定一阶逻辑公式解释的论域是  $D = \{a, b\}$ , 在按照类似等值演算形式展开量词时, 下面哪些说法是正确的?

- A. 一阶公式  $\exists x(F(x) \wedge G(x))$  展开为  $(F(a) \vee F(b)) \wedge (G(a) \vee G(b))$ 。
- B. 一阶公式  $\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$  展开为  $(F(a) \vee F(b)) \wedge (G(a) \vee G(b))$ 。
- C. 一阶公式  $\forall x(F(x) \vee G(x))$  展开为  $(F(a) \wedge F(b)) \vee (G(a) \wedge G(b))$ 。
- D. 一阶公式  $\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$  展开为  $(F(a) \wedge F(b)) \vee (G(a) \wedge G(b))$ 。

答案: BD

## 33. 测验题 3.33

给定一阶逻辑公式解释的论域是  $D = \{a, b\}$ , 按照类似等值演算形式展开量词, 一阶公式  $\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$  展开为

- A.  $(F(a) \rightarrow G(a)) \wedge (F(a) \rightarrow G(b)) \wedge (F(b) \rightarrow G(a)) \wedge (F(b) \rightarrow G(b))$
- B.  $(F(a) \rightarrow G(a)) \wedge (F(b) \rightarrow G(b))$
- C.  $(F(a) \wedge F(b)) \rightarrow (G(a) \wedge G(b))$
- D.  $(F(a) \wedge G(a)) \rightarrow (F(b) \wedge G(b))$

答案: C

## 34. 测验题 3.34

给定一阶逻辑公式解释的论域是  $D = \{a, b\}$ , 按照类似等值演算形式展开量词, 一阶公式  $\forall x \exists y (F(x) \rightarrow G(y))$  展开为

- A.  $((F(a) \rightarrow G(a)) \vee (F(b) \rightarrow G(a))) \wedge ((F(a) \rightarrow G(b)) \vee (F(b) \rightarrow G(b)))$
- B.  $((F(a) \rightarrow G(a)) \wedge (F(b) \rightarrow G(a))) \vee ((F(a) \rightarrow G(b)) \wedge (F(b) \rightarrow G(b)))$
- C.  $((F(a) \rightarrow G(a)) \vee (F(a) \rightarrow G(b))) \wedge ((F(b) \rightarrow G(a)) \vee (F(b) \rightarrow G(b)))$
- D.  $((F(a) \rightarrow G(a)) \wedge (F(a) \rightarrow G(b))) \vee ((F(b) \rightarrow G(a)) \wedge (F(b) \rightarrow G(b)))$

答案: C

## 35. 测验题 3.35

给定一阶逻辑公式解释的论域是  $D = \{a, b\}$ , 按照类似等值演算形式展开量词, 一阶公式  $\exists x \forall y (F(x) \rightarrow G(y))$  展开为

- A.  $((F(a) \rightarrow G(a)) \vee (F(b) \rightarrow G(a))) \wedge ((F(a) \rightarrow G(b)) \vee (F(b) \rightarrow G(b)))$
- B.  $((F(a) \rightarrow G(a)) \wedge (F(b) \rightarrow G(a))) \vee ((F(a) \rightarrow G(b)) \wedge (F(b) \rightarrow G(b)))$
- C.  $((F(a) \rightarrow G(a)) \vee (F(a) \rightarrow G(b))) \wedge ((F(b) \rightarrow G(a)) \vee (F(b) \rightarrow G(b)))$
- D.  $((F(a) \rightarrow G(a)) \wedge (F(a) \rightarrow G(b))) \vee ((F(b) \rightarrow G(a)) \wedge (F(b) \rightarrow G(b)))$

答案: D

### 36. 测验题 3.36

给定一阶逻辑公式解释的论域是  $D = \{a, b\}$ , 按照类似等值演算形式展开量词, 一阶公式  $\forall y \exists x H(x, y)$  展开为

- A.  $(H(a, a) \vee H(b, a)) \wedge (H(a, b) \vee H(b, b))$
- B.  $(H(a, a) \wedge H(b, a)) \vee (H(a, b) \wedge H(b, b))$
- C.  $(H(a, a) \vee H(a, b)) \wedge (H(b, a) \vee H(b, b))$
- D.  $(H(a, a) \wedge H(a, b)) \vee (H(b, a) \wedge H(b, b))$

答案: A

### 37. 测验题 3.37

给定一阶逻辑公式解释的论域是  $D = \{a, b\}$ , 按照类似等值演算形式展开量词, 一阶公式  $\exists y \forall x H(x, y)$  展开为

- A.  $(H(a, a) \vee H(b, a)) \wedge (H(a, b) \vee H(b, b))$
- B.  $(H(a, a) \wedge H(b, a)) \vee (H(a, b) \wedge H(b, b))$
- C.  $(H(a, a) \vee H(a, b)) \wedge (H(b, a) \vee H(b, b))$
- D.  $(H(a, a) \wedge H(a, b)) \vee (H(b, a) \wedge H(b, b))$

答案: B

### 38. 测验题 3.38

下面哪个一阶公式是命题逻辑永真式的替换实例?

- A.  $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(H(x, y) \rightarrow F(y)))$
- B.  $\forall x F(x) \rightarrow \exists y(H(x, y) \rightarrow F(y))$
- C.  $\forall x F(x) \rightarrow (\exists y H(x, y) \rightarrow \forall x F(x))$
- D.  $\forall x F(x) \rightarrow (\exists y H(x, y) \rightarrow \exists x F(x))$

答案: C

解析: 设  $A$  是命题逻辑公式, 其中出现的命题变量是  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , 用任意的一阶逻辑公式  $A_1, A_2, \dots, A_n$  分别替换  $A$  中  $p_1, p_2, \dots, p_n$  的所有出现得到的一阶逻辑公式称为命题逻辑公式  $A$  的替换实例。

例: (1) 一阶逻辑公式  $\forall x F(x) \rightarrow (\exists x G(x, y) \rightarrow \forall x F(x))$  是命题逻辑公式  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$  的替换实例, 是用  $\forall x F(x)$  替换其中的  $p$ , 而用  $\exists x G(x, y)$  替换其中的  $q$ 。(2) 一阶逻辑公式  $\forall x F(x) \rightarrow \forall x F(x)$  是命题逻辑公式  $p \rightarrow p$  的替换实例, 但是  $\forall x(F(x) \rightarrow F(x))$  不是命题逻辑公式  $p \rightarrow p$  的替换实例。(课本 P86)

## 39. 测验题 3.39

下面哪些公式是一阶逻辑的永真式?

- A.  $\forall x \forall y F(x, y) \rightarrow \forall y \forall x F(x, y)$
- B.  $\forall x \exists y F(x, y) \rightarrow \exists y \forall x F(x, y)$
- C.  $\exists x \forall y F(x, y) \rightarrow \forall y \exists x F(x, y)$
- D.  $\exists x \forall y F(x, y) \rightarrow \forall x \exists y F(x, y)$

答案: AC

解析: 对于 B 选项, 构造论域为全体人类,  $F(x, y)$  表示  $y$  为  $x$  的母亲。则前件表示对于任意一个人  $x$ , 都有一个母亲; 后件表示存在一个人  $x$ , 她是所有人的母亲, 显然不成立;

对比 BC 两个选项, B 选项的前件  $y$  不是固定的, 也即每一个  $x$  都可以对应到一个不同的  $y$ 。而 C 选项的前件  $x$  是固定的, 也即对于所有的  $y$  都对应到同一个  $x$ 。因此  $\exists x \forall y F(x, y)$  是强于  $\forall y \exists x F(x, y)$  的, 即前者可以推出后者但后者推不出前者。

## 40. 测验题 3.40

下面哪些公式是一阶逻辑的永真式?

- A.  $\forall x (F(x) \vee G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$
- B.  $(\forall x F(x) \vee \forall x G(x)) \rightarrow \forall x (F(x) \vee G(x))$
- C.  $\exists x (F(x) \wedge G(x)) \rightarrow (\exists x F(x) \wedge \exists x G(x))$
- D.  $(\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)) \rightarrow \exists x (F(x) \wedge G(x))$

答案: BC

## 41. 测验题 3.41

下面哪些说法是正确的?

- A. 在等值变换时, 必须将公式  $A$  的一个子公式  $B$  的所有出现都置换为与  $B$  等值的公式  $B'$ 。
- B. 要证明两个一阶逻辑公式  $A$  和  $B$  逻辑等值, 可使用等值演算或构造真值表的方法。
- C. 如果公式  $A$  和  $B$  逻辑等值, 那么对任意个体变量  $x$ , 公式  $\forall x A$  和  $\forall x B$  也逻辑等值。
- D. 如果公式  $A$  和  $B$  逻辑等值, 那么对任意个体变量  $x$ , 公式  $\exists x A$  和  $\exists x B$  也逻辑等值。

答案: CD

## 42. 测验题 3.42

下面哪一组是命题逻辑基本逻辑等值式分配律的替换实例?

- A.  $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x))$
- B.  $\forall x (A(x) \wedge (B(x) \vee C(x))) \equiv \forall x ((A(x) \vee B(x)) \wedge (A(x) \vee C(x)))$
- C.  $\forall x A(x) \wedge \exists x (B(x) \vee C(x)) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x)) \vee \forall x (A(x) \wedge C(x))$

$$D. \forall x A(x) \wedge (\exists x B(x) \vee \exists x C(x)) \equiv (\forall x A(x) \wedge \exists x B(x)) \vee (\forall x A(x) \wedge \exists x C(x))$$

答案: D

#### 43. 测验题 3.43

下面哪一组是命题逻辑基本逻辑等值式德摩尔根律的替换实例?

- A.  $\neg \forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x (\neg A(x) \vee \neg B(x))$
- B.  $\neg \forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \exists x (\neg A(x) \vee \neg B(x))$
- C.  $\neg \forall x A(x) \wedge \neg \forall x B(x) \equiv \neg (\forall x A(x) \vee \forall x B(x))$
- D.  $\forall x (\neg A(x) \wedge \neg B(x)) \equiv \neg \exists x \neg (A(x) \vee B(x))$

答案: C

#### 44. 测验题 3.44

下面哪一组是量词否定等值式的替换实例?

- A.  $\neg \forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x (\neg A(x) \vee \neg B(x))$
- B.  $\neg \forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \exists x \neg (A(x) \wedge B(x))$
- C.  $\neg \forall x A(x) \wedge \neg \forall x B(x) \equiv \neg (\forall x A(x) \vee \forall x B(x))$
- D.  $\forall x (\neg A(x) \wedge \neg B(x)) \equiv \neg \exists x \neg (A(x) \vee B(x))$

答案: B

#### 45. 测验题 3.45

下面哪一组是量词辖域扩充/收缩等值式的替换实例?

- A.  $\forall x (A(x) \vee B(x)) \equiv \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$
- B.  $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
- C.  $\forall x (A(x) \rightarrow B) \equiv \forall x A(x) \rightarrow B, B$  不出现  $x$
- D.  $\exists x (A(x) \rightarrow B) \equiv \forall x A(x) \rightarrow B, B$  不出现  $x$

答案: D

解析: 注意 B 选项是量词分配等值式。

#### 46. 测验题 3.46

下面哪一组是量词辖域扩充/收缩等值式的替换实例?

- A.  $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \exists x A(x) \wedge \forall x B(x)$
- B.  $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \equiv \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$
- C.  $\exists x (A(x) \rightarrow B) \equiv \forall x A(x) \rightarrow B, B$  不出现  $x$
- D.  $\exists x (A(x) \rightarrow B) \equiv \exists x A(x) \rightarrow B, B$  不出现  $x$

答案: C

#### 47. 测验题 3.47

下面的等值演算中 (1) 和 (2) 处使用的基本等值式依次是:

$$\begin{aligned}
 & \neg \exists x(N(x) \wedge \forall y(N(y) \rightarrow G(x, y))) \\
 \equiv & \forall x(\neg(N(x) \wedge \forall y(N(y) \rightarrow G(x, y)))) \quad // \text{量词否定等值式} \\
 \equiv & \forall x(\neg N(x) \vee \neg \forall y(N(y) \rightarrow G(x, y))) \quad // \text{德摩根律} \\
 \equiv & \forall x(\neg N(x) \vee \exists y(\neg(N(y) \rightarrow G(x, y)))) \quad // (1) \\
 \equiv & \forall x(\neg N(x) \vee \exists y(\neg(\neg N(y) \vee G(x, y)))) \quad // \text{蕴涵等值式} \\
 \equiv & \forall x(\neg N(x) \vee \exists y(N(y) \wedge \neg G(x, y))) \quad // (2) \\
 \equiv & \forall x(N(x) \rightarrow \exists y(N(y) \wedge \neg G(x, y))) \quad // \text{蕴涵等值式}
 \end{aligned}$$

答案: (1) 量词否定等值式; 量词否定 (2) 德摩尔根律; 德摩根律

#### 48. 测验题 3.48

下面的等值演算中 (1) 和 (2) 处使用的基本等值式依次是:

$$\begin{aligned}
 & \neg \forall x(N(x) \rightarrow \exists y(N(y) \wedge G(x, y))) \\
 \equiv & \exists x \neg(N(x) \rightarrow \exists y(N(y) \wedge G(x, y))) \quad // (1) \\
 \equiv & \exists x(\neg \neg N(x) \vee \neg \exists y(N(y) \wedge G(x, y))) \quad // \text{蕴涵等值式} \\
 \equiv & \exists x(N(x) \wedge \neg \exists y(N(y) \wedge G(x, y))) \quad // \text{德摩根律} \\
 \equiv & \exists x(N(x) \wedge \forall y \neg(N(y) \wedge G(x, y))) \quad // (2) \\
 \equiv & \exists x(N(x) \wedge \forall y(\neg N(y) \vee \neg G(x, y))) \quad // \text{德摩根律} \\
 \equiv & \exists x(N(x) \wedge \forall y(N(y) \rightarrow \neg G(x, y))) \quad // \text{蕴涵等值式}
 \end{aligned}$$

答案: (1) 量词否定等值式; 量词否定 (2) 量词否定等值式; 量词否定

#### 49. 测验题 3.49

下面的等值演算中 (1) 和 (2) 处使用的基本等值式依次是:

$$\begin{aligned}
& \forall x N(x) \rightarrow \exists x M(x) \\
\equiv & \forall x N(x) \rightarrow \exists y M(y) \quad // (1) \\
\equiv & \neg \forall x N(x) \vee \exists y M(y) \quad // \text{蕴涵等值式} \\
\equiv & \exists x \neg N(x) \vee \exists y M(y) \quad // \text{量词否定等值式} \\
\equiv & \exists x (\neg N(x) \vee \exists y M(y)) \quad // \text{量词辖域扩张} \\
\equiv & \exists x \exists y (\neg N(x) \vee M(y)) \quad // (2) \\
\equiv & \exists x \exists y (N(x) \rightarrow M(y)) \quad // \text{蕴涵等值式}
\end{aligned}$$

答案：(1) 约束变量改名；约束变量改名规则 (2) 量词辖域扩张；量词辖域扩张等值式；量词辖域扩张收缩；量词辖域扩张收缩等值式

### 50. 测验题 3.50

下面的等值演算中 (1) 和 (2) 处使用的基本等值式依次是？

$$\begin{aligned}
& \forall x N(x) \rightarrow \exists x \neg M(x) \\
\equiv & \neg \forall x N(x) \vee \exists x \neg M(x) \quad // \text{蕴涵等值式} \\
\equiv & \exists x (\neg N(x)) \vee \exists x \neg M(x) \quad // \text{量词否定等值式} \\
\equiv & \exists x (\neg N(x) \vee \neg M(x)) \quad // (1) \\
\equiv & \exists x (\neg (N(x) \wedge M(x))) \quad // \text{德摩尔根律} \\
\equiv & \neg \forall x (N(x) \wedge M(x)) \quad // (2)
\end{aligned}$$

答案：(1) 量词分配；量词分配等值式；存在量词对析取分配 (2) 量词否定等值式；量词否定

### 51. 测验题 3.51

下面哪些是一阶逻辑的前束范式？

- A.  $\forall x \neg \exists y (F(x) \rightarrow G(y))$
- B.  $\forall x (F(x) \rightarrow \exists y G(y))$
- C.  $\forall x \exists y \neg (F(x) \rightarrow G(y))$
- D.  $\forall x \exists y (F(x) \wedge \neg G(y))$

答案：CD

### 52. 测验题 3.52

下面哪些是一阶逻辑的前束范式？

- A.  $\forall x(F(x) \rightarrow \neg \exists y(G(y) \wedge K(x, y)))$
- B.  $\forall x \neg \exists y(F(x) \rightarrow (G(y) \rightarrow K(x, y)))$
- C.  $\forall x F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge K(x, y))$
- D.  $\forall x \exists y(F(x) \rightarrow (G(y) \wedge K(y, z)))$

答案: D

### 53. 测验题 3.53

下面哪几组的两个一阶逻辑公式是逻辑等值的?

- A.  $\forall x(F(x) \wedge G(x))$  和  $\forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$
- B.  $\forall x(F(x) \vee G(x))$  和  $\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$
- C.  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$  和  $\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$
- D.  $\forall x(F(x) \leftrightarrow G(x))$  和  $\forall x F(x) \leftrightarrow \forall x G(x)$

答案: A

解析: 量词分配等值式有且仅有两条: 全称量词的合取分配以及特称量词的析取分配。

### 54. 测验题 3.54

下面哪几组的两个一阶逻辑公式是逻辑等值的?

- A.  $\exists x(F(x) \wedge G(x))$  和  $\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$
- B.  $\exists x(F(x) \vee G(x))$  和  $\exists x F(x) \vee \exists x G(x)$
- C.  $\exists x(F(x) \rightarrow G(x))$  和  $\exists x F(x) \rightarrow \exists x G(x)$
- D.  $\exists x(F(x) \leftrightarrow G(x))$  和  $\exists x F(x) \leftrightarrow \exists x G(x)$

答案: B

### 55. 测验题 3.55

下面哪几组的两个一阶逻辑公式是逻辑等值的?

- A.  $\forall x(F(x) \wedge G)$  和  $\forall x F(x) \wedge G$ , 公式  $G$  不出现  $x$
- B.  $\forall x(F(x) \vee G)$  和  $\forall x F(x) \vee G$ , 公式  $G$  不出现  $x$
- C.  $\forall x(F(x) \rightarrow G)$  和  $\forall x F(x) \rightarrow G$ , 公式  $G$  不出现  $x$
- D.  $\forall x(F(x) \rightarrow G)$  和  $\exists x F(x) \rightarrow G$ , 公式  $G$  不出现  $x$

答案: ABD

### 56. 测验题 3.56

下面哪几组的两个一阶逻辑公式是逻辑等值的?

- A.  $\exists x(F(x) \wedge G)$  和  $\exists x F(x) \wedge G$ , 公式  $G$  不出现  $x$

- B.  $\exists x(F(x) \vee G)$  和  $\exists xF(x) \vee G$ , 公式  $G$  不出现  $x$   
 C.  $\exists x(F(x) \rightarrow G)$  和  $\forall xF(x) \rightarrow G$ , 公式  $G$  不出现  $x$   
 D.  $\exists x(F(x) \rightarrow G)$  和  $\exists xF(x) \rightarrow G$ , 公式  $G$  不出现  $x$

答案: ABC

### 57. 测验题 3.57

下面哪几组的两个一阶逻辑公式是逻辑等值的?

- A.  $\exists x(F \rightarrow G(x))$  和  $F \rightarrow \exists xG(x)$ , 公式  $F$  不出现  $x$   
 B.  $\exists x(F \rightarrow G(x))$  和  $F \rightarrow \forall xG(x)$ , 公式  $F$  不出现  $x$   
 C.  $\forall x(F \rightarrow G(x))$  和  $F \rightarrow \exists xG(x)$ , 公式  $F$  不出现  $x$   
 D.  $\forall x(F \rightarrow G(x))$  和  $F \rightarrow \forall xG(x)$ , 公式  $F$  不出现  $x$

答案: AD

### 58. 测验题 3.58

下面哪几组的两个一阶逻辑公式是逻辑等值的?

- A.  $\forall x\forall yH(x, y)$  和  $\forall y\forall xH(x, y)$   
 B.  $\forall x\exists yH(x, y)$  和  $\exists y\forall xH(x, y)$   
 C.  $\exists x\forall yH(x, y)$  和  $\forall y\exists xH(x, y)$   
 D.  $\exists x\exists yH(x, y)$  和  $\exists y\exists xH(x, y)$

答案: AD

### 59. 测验题 3.59

下面哪几组的两个一阶逻辑公式是逻辑等值的?

- A.  $\forall x\exists yH(x, y)$  和  $\forall y\exists xH(x, y)$   
 B.  $\exists x\forall yH(x, y)$  和  $\exists y\forall xH(x, y)$   
 C.  $\forall x\exists y(F(x) \rightarrow G(y))$  和  $\exists y\forall x(F(x) \rightarrow G(y))$   
 D.  $\exists x\forall y(F(x) \rightarrow G(y))$  和  $\forall y\exists x(F(x) \rightarrow G(y))$

答案: CD

解析: 直接使用量词辖域的收缩/扩张等值式。

### 60. 测验题 3.60

下面哪几组的两个一阶逻辑公式是逻辑等值的?

- A.  $\forall x\exists y(F(x) \wedge G(y))$  和  $\forall y\exists x(F(x) \wedge G(y))$   
 B.  $\forall x\exists y(F(x) \wedge G(y))$  和  $\exists y\forall x(F(x) \wedge G(y))$



C.  $\exists x \forall y (F(x) \wedge G(y))$  和  $\exists y \forall x (F(x) \wedge G(y))$

D.  $\exists x \forall y (F(x) \vee G(y))$  和  $\forall y \exists x (F(x) \vee G(y))$

答案: BD

解析: 直接使用量词辖域的收缩等值式。区别于测验题 3.39, 该题的  $x$  和  $y$  位于同一个函数中。

### 61. 测验题 3.61

下面哪些推理是假言推理规则的实例?

A.  $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$

B.  $\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x), \forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$

C.  $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)), \exists x A(x) \Rightarrow \exists x B(x)$

D.  $\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x), \exists x A(x) \Rightarrow \exists x B(x)$

答案: BD

### 62. 测验题 3.62

下面哪些推理是假言易位规则的实例?

A.  $\forall x (\neg A(x) \rightarrow \neg B(x)), \forall x (\neg B(x)) \Rightarrow \forall x A(x)$

B.  $\exists x (\neg A(x) \rightarrow \neg B(x)), \exists x (\neg B(x)) \Rightarrow \exists x A(x)$

C.  $\neg \forall x A(x) \rightarrow \neg \forall x B(x), \forall x B(x) \Rightarrow \forall x A(x)$

D.  $\neg \exists x A(x) \rightarrow \neg \exists x B(x), \exists x B(x) \Rightarrow \exists x A(x)$

答案: CD

### 63. 测验题 3.63

下面哪些推理是析取三段论规则的实例?

A.  $\forall x (\neg A(x) \vee B(x)), \forall x (\neg A(x)) \Rightarrow \forall x B(x)$

B.  $\neg \forall x A(x) \vee \forall x B(x), \forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$

C.  $\neg \exists x A(x) \vee \exists x B(x), \exists x A(x) \Rightarrow \exists x B(x)$

D.  $\exists x (\neg A(x) \vee B(x)), \exists x (\neg A(x)) \Rightarrow \exists x B(x)$

答案: BC

### 64. 测验题 3.64

下面哪些推理是有效的推理?

A.  $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \forall x A(x)$

B.  $\forall x (A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \forall x A(x)$

$$C. \exists x(A(x) \wedge B(x)) \implies \exists xA(x)$$

$$D. \exists x(A(x) \vee B(x)) \implies \exists xA(x)$$

答案: AC

### 65. 测验题 3.65

下面哪些推理是有效的推理?

$$A. \forall xA(x) \implies \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$B. \forall xA(x) \implies \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$$

$$C. \exists xA(x) \implies \exists x(A(x) \vee B(x))$$

$$D. \exists xA(x) \implies \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

答案: ABCD

### 66. 测验题 3.66

假定  $H(x, y)$  是原子公式, 下面哪些是全称例化规则 (全称量词消除规则) 的正确使用?

$$A. \text{由 } \forall x\forall yH(x, y) \text{ 消除 } \forall x \text{ 得到 } \forall yH(x, y)$$

$$B. \text{由 } \forall x\forall yH(x, y) \text{ 消除 } \forall x \text{ 得到 } \forall yH(y, y)$$

$$C. \text{由 } \forall x\forall yH(x, y) \text{ 消除 } \forall x \text{ 得到 } \forall yH(z, y), \text{ 然后再消除 } \forall y \text{ 得到 } H(z, z)。$$

$$D. \text{由 } \forall x\forall yH(x, y) \text{ 消除 } \forall x \text{ 得到 } \forall yH(z, y), \text{ 然后再消除 } \forall y \text{ 得到 } H(y, y)。$$

答案: AC

解析: B 选项对于全称例化  $\forall xA(x) \implies A(y)$ ,  $x$  不应在  $A(x)$  中任意量词  $\forall y$  或  $\exists y$  的辖域中自由出现。

### 67. 测验题 3.67

假定  $F(x)$  和  $H(x, y)$  都是原子公式, 下面哪些是全称泛化规则 (全称量词引入规则) 的正确使用?

A.

$$(1) \forall x\forall yH(x, y) \quad // \text{前提}$$

$$(2) \forall yH(x, y) \quad // (1) \text{ 全称例化}$$

$$(3) H(x, y) \quad // (2) \text{ 全称例化}$$

$$(4) \forall xH(x, y) \quad // (3) \text{ 全称泛化}$$

$$(5) \forall y\forall xH(x, y) \quad // (4) \text{ 全称泛化}$$

B.

- (1)  $\forall x \forall y H(x, y)$  // 前提
- (2)  $\forall y H(x, y)$  // (1) 全称例化
- (3)  $H(x, x)$  // (2) 全称例化
- (4)  $\forall x H(x, x)$  // (3) 全称泛化

C.

- (1)  $\forall x H(x, y)$  // 前提
- (2)  $H(y, y)$  // (1) 全称例化
- (3)  $\forall y H(y, y)$  // (2) 全称泛化

D.

- (1)  $F(x)$  // 附加前提
- (2)  $\forall x F(x)$  // (1) 全称泛化
- (3)  $F(x) \rightarrow \forall x F(x)$  // (1), (2) 附加前提法

答案: AB

解析: C 选项  $y$  是在前提中出现的自由变量, 全称泛化不能对在前提公式中或消除附加前提之前的附加前提中的自由变量进行泛化。

## 68. 测验题 3.68

假定  $F(x)$ ,  $G(x)$  和  $H(x, y)$  都是原子公式, 下面哪些是存在例化规则 (存在量词消除规则) 的正确使用?

A.

- (1)  $\forall x \exists y H(x, y)$  // 前提
- (2)  $\exists y H(x, y)$  // (1) 全称例化
- (3)  $H(x, a)$  // (2) 存在例化
- (4)  $\forall x H(x, a)$  // (3) 全称泛化
- (5)  $\exists y \forall x H(x, y)$  // (4) 存在泛化

B.

- (1)  $\exists x \forall y H(x, y)$  // 前提
- (2)  $\forall y H(a, y)$  // (1) 存在例化
- (3)  $H(a, y)$  // (2) 全称例化
- (4)  $\exists x H(x, y)$  // (3) 存在泛化
- (5)  $\forall y \exists x H(x, y)$  // (4) 全称泛化

C.

- (1)  $\exists x F(x)$  // 前提
- (2)  $F(a)$  // (1) 存在例化
- (3)  $\exists x G(x)$  // 前提
- (4)  $G(a)$  // (3) 存在例化

D.

- (1)  $\exists x H(x, a)$  // 前提
- (2)  $H(a, a)$  // (1) 存在例化
- (3)  $\exists y H(y, y)$  // (2) 存在泛化

答案: B

### 69. 测验题 3.69

假定  $a$  和  $b$  是个体常量符号,  $F(x)$  和  $G(x)$  是原子公式, 下面哪些是存在泛化规则 (存在量词引入规则) 的正确使用?

A.

- (1)  $F(a) \rightarrow G(b)$  // 前提
- (2)  $\exists x F(x) \rightarrow G(b)$  // (1) 存在泛化
- (3)  $\exists x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$  // (2) 存在泛化

B.

- (1)  $F(a) \rightarrow G(b)$  // 前提
- (2)  $\exists x (F(x) \rightarrow G(b))$  // (1) 存在泛化
- (3)  $\exists x \exists y (F(x) \rightarrow G(y))$  // (2) 存在泛化

C.

- (1)  $F(a) \rightarrow G(b)$  // 前提
- (2)  $\exists y (F(a) \rightarrow G(y))$  // (1) 存在泛化
- (3)  $\exists x \exists y (F(x) \rightarrow G(y))$  // (2) 存在泛化

D.

- (1)  $F(a)$  // 附加前提
- (2)  $\exists x F(x)$  // (1) 存在泛化
- (3)  $F(a) \rightarrow \exists x F(x)$  // (1), (2) 附加前提法

答案: CD

### 70. 测验题 3.70

假定  $F(x), G(x)$  都是原子公式, 下面哪些公式序列是正确论证的一部分?

A.

- (1)  $\exists x (F(x) \wedge G(x))$  // 前提
- (2)  $\exists x F(x)$  // (1) 化简规则
- (3)  $F(a)$  // (2) 存在例化

B.

- (1)  $\forall x (F(x) \wedge G(x))$  // 前提
- (2)  $F(a) \wedge G(a)$  // (1) 全称例化
- (3)  $F(a)$  // (2) 化简规则

C.

- (1)  $\neg\forall xF(x)$  // 前提  
 (2)  $\neg F(a)$  // (1) 全称例化

D.

- (1)  $\neg F(a)$  // 前提  
 (2)  $\neg\exists xF(x)$  // (1) 存在泛化

答案: B

解析: A 选项不符合化简规则的实例, 存在不能对合取进行分配。更改: 可以先使用存在例化得到  $F(a) \wedge G(a)$ , 再使用化简规则得到  $F(a)$ 。C 选项不能仅对公式的子公式 (除自身) 应用推理规则 (教材 P104)。

### 71. 测验题 3.71

假定  $H(x, y)$  都是原子公式, 下面哪些公式序列是 (正确的) 论证?

A.

- (1)  $\forall x\forall yH(x, y)$  // 前提  
 (2)  $\forall yH(x, y)$  // (1) 全称例化  
 (3)  $H(x, y)$  // (2) 全称例化  
 (4)  $\forall xH(x, y)$  // (3) 全称泛化  
 (5)  $\forall y\forall xH(x, y)$  // (4) 全称泛化

B.

- (1)  $\forall x\exists yH(x, y)$  // 前提  
 (2)  $\exists yH(a, y)$  // (1) 全称例化  
 (3)  $H(a, b)$  // (2) 存在例化  
 (4)  $\exists xH(x, b)$  // (3) 存在泛化  
 (5)  $\exists y\exists xH(x, y)$  // (4) 存在泛化

C.

- (1)  $\forall x\exists yH(x, y)$  // 前提  
 (2)  $\exists yH(x, y)$  // (1) 全称例化  
 (3)  $H(x, a)$  // (2) 存在例化  
 (4)  $\forall xH(x, a)$  // (3) 全称泛化  
 (5)  $\exists y\forall xH(x, y)$  // (4) 存在泛化

D.

- (1)  $\exists x\exists yH(x, y)$  // 前提  
 (2)  $\exists yH(a, y)$  // (1) 存在例化  
 (3)  $H(a, b)$  // (2) 存在例化  
 (4)  $\exists xH(x, b)$  // (3) 存在泛化  
 (5)  $\exists y\exists xH(x, y)$  // (4) 存在泛化

答案: ABD

解析：C 选项存在例化公式中不能含有其他的自由变量。

## 72. 测验题 3.72

假定  $F(x), G(x)$  都是原子公式, 下面哪些公式序列是正确论证的一部分?

A.

(1)  $\exists x F(x)$  // 前提

(2)  $\exists x (F(x) \vee G(x))$  // (1) 附加规则

B.

(1)  $\forall x F(x)$  // 附加前提

(2)  $\forall x G(x)$  // 前提

(3)  $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$  // (1), (2) 附加前提法

C.

(1)  $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$  // 前提

(2)  $F(a) \rightarrow G(a)$  // (1) 全称例化

D.

(1)  $\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$  // 前提

(2)  $F(a) \rightarrow G(a)$  // (1) 全称泛化

答案：C

## 73. 测验题 3.73

假定  $F(x), G(x)$  都是原子公式. 下面哪些公式序列是 (正确的) 论证?

A.

(1)  $\exists x (F(x) \wedge G(x))$  // 前提

(2)  $F(a) \wedge G(a)$  // (1) 存在例化

(3)  $F(a)$  // (2) 化简规则

(4)  $\exists x F(x)$  // (3) 存在泛化

(5)  $G(a)$  // (2) 化简规则

(6)  $\exists x G(x)$  // (5) 存在泛化

(7)  $\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$  // (4), (6) 合取规则

B.

(1)  $\forall x (F(x) \wedge G(x))$  // 前提

(2)  $F(x) \wedge G(x)$  // (1) 全称例化

(3)  $F(x)$  // (2) 化简规则

(4)  $\forall x F(x)$  // (3) 全称泛化

(5)  $G(x)$  // (2) 化简规则

(6)  $\forall x G(x)$  // (5) 全称泛化

(7)  $\forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$  // (4),(6) 合取规则

C.

- (1)  $\forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$  // 前提  
 (2)  $\forall xF(x)$  // (1) 化简规则  
 (3)  $F(x)$  // (2) 全称例化  
 (4)  $\forall xG(x)$  // (2) 化简规则  
 (5)  $G(x)$  // (4) 全称例化  
 (6)  $F(x) \wedge G(x)$  // (3), (5) 合取规则  
 (7)  $\forall x(F(x) \wedge G(x))$  // (6) 全称泛化

D.

- (1)  $\exists xF(x)$  // 附加前提  
 (2)  $F(a)$  // (1) 存在例化  
 (3)  $\exists x(F(x) \rightarrow G(x))$  // 前提  
 (4)  $F(a) \rightarrow G(a)$  // (3) 存在例化  
 (5)  $G(a)$  // (2), (4) 假言推理  
 (6)  $\exists xG(x)$  // (5) 存在泛化  
 (7)  $\exists xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$  // (1), (6) 附加前提法

答案: ABC

## 74. 测验题 3.74

对于验证推理  $\forall x((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)), \exists xP(x), \exists xQ(x) \implies \exists x\exists y(R(x) \wedge R(y))$  有效性的论证构造, 下面哪些说法是正确的?

- A. 推理的结论  $\exists x\exists y(R(x) \wedge R(y))$  可由公式  $R(a) \wedge R(a)$  通过两次使用存在泛化规则得到。  
 B. 由前提  $\exists xP(x)$  用存在例化规则可得  $P(a)$ , 再由  $\exists xQ(x)$  用存在例化规则又可得  $Q(a)$ 。  
 C. 推理的结论  $\exists x\exists y(R(x) \wedge R(y))$  需要由公式  $R(a) \wedge R(b)$  通过两次使用存在泛化规则得到。  
 D. 由前提  $\exists xP(x)$  用存在例化规则可得  $P(a)$ , 再由  $\exists xQ(x)$  用存在例化规则只能得  $Q(b)$ 。

答案: CD

解析: A 选项不能针对公式的子公式 (除自身) 应用推理规则 (教材 P104)。

## 75. 测验题 3.75

对于验证推理  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x)), \exists x(F(x) \wedge Q(x)) \implies \exists x((H(x) \wedge Q(x))$  有效性的论证构造, 下面哪些说法是正确的?

- A. 推理的结论  $\exists x((H(x) \wedge Q(x))$  可由公式  $H(a) \wedge Q(a)$  通过使用存在泛化规则得到。  
 B. 推理的前提  $\exists x(F(x) \wedge Q(x))$  应用存在例化规则得到  $F(a) \wedge Q(a)$ 。  
 C. 推理的前提  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x))$  应使用全称例化规则得到  $F(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x)$ 。  
 D. 推理的前提  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x))$  应使用全称例化规则得到  $F(a) \rightarrow G(a) \wedge H(a)$ 。

答案: ABD

## 76. 测验题 3.76

下面的论证验证推理  $\exists xF(x) \vee \exists xG(x) \implies \exists x(F(x) \vee G(x))$  的有效性:

- (1)  $\neg(\exists x(F(x) \vee G(x)))$  //附加前提
- (2)  $\forall x(\neg(F(x) \vee G(x)))$  //(1) 量词否定等值式
- (3)  $\forall x(\neg F(x) \wedge \neg G(x))$  //(2) 德摩尔根律
- (4)  $\neg\exists xF(x)$  //附加前提
- (5)  $\exists xF(x) \vee \exists xG(x)$  //前提
- (6)  $\exists xG(x)$  //(4), (5) 析取三段论
- (7)  $G(a)$  //(6) 存在例化
- (8)  $\neg F(a) \wedge \neg G(a)$  //(a)
- (9)  $\neg G(a)$  //(8) 化简规则
- (10)  $\exists xF(x)$  //(b)
- (11)  $F(b)$  //(10) 存在例化
- (12)  $\neg F(b) \wedge \neg G(b)$  //(3) 全称例化
- (13)  $\neg F(b)$  //(12) 化简规则
- (14)  $\exists x(F(x) \vee G(x))$  //(1), (11), (13) 反证法

其中 (a)、(b) 两个空依次填写什么?

答案: (a) (1)(3) 全称例化; (3) 全称量词消除 (b) (2)(4),(7),(9) 反证法

## 77. 测验题 3.77

验证推理  $\exists x(F(x) \vee G(x)) \implies \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$  的有效性:



- (1)  $\neg(\exists x(F(x) \vee \exists xG(x)))$  // 附加前提
- (2)  $\neg\exists xF(x) \wedge \neg\exists xG(x)$  // (1) 德摩根律
- (3)  $\forall x(\neg F(x)) \wedge \forall x(\neg G(x))$  // (2) 量词否定等值式
- (4)  $\exists x(F(x) \vee G(x))$  // 前提
- (5)  $F(a) \vee G(a)$  // (4) 存在实例化
- (6)  $\forall x(\neg F(x))$  // (3) 化简规则
- (7)  $\neg F(a)$  // (6) 全称实例化
- (8)  $G(a)$  // (a)
- (9)  $\forall x(\neg G(x))$  // (3) 化简规则
- (10)  $\neg G(a)$  // (9) 全称实例化
- (11)  $\exists xF(x) \vee \exists xG(x)$  // (b)

其中 (a)、(b) 两个空依次填写什么?

答案: (a)(5),(7) 析取三段论;(5),(7) 析取三段论规则 (b)(1),(8),(10) 反证法

## 78. 测验题 3.78

下面的论证验证推理  $\forall x(F(x) \vee G(x)), \forall x(F(x) \rightarrow H(x)), \exists x(\neg H(x)) \Rightarrow \exists xG(x)$  的有效性:

- (1)  $\exists x(\neg H(x))$  // 前提
- (2)  $\neg H(a)$  // (a)
- (3)  $\forall x(F(x) \rightarrow H(x))$  // 前提
- (4)  $F(a) \rightarrow H(a)$  // (3) 全称例化
- (5)  $\neg F(a)$  // (2), (4) 假言易位
- (6)  $\forall x(F(x) \vee G(x))$  // 前提
- (7)  $F(a) \vee G(a)$  // (6) 全称例化
- (8)  $G(a)$  // (5), (7) 析取三段论
- (9)  $\exists xG(x)$  // (b)

其中 (a)、(b) 两个空依次填写?

答案: (a) (1) 存在例化; (1) 存在量词消除 (b) (8) 存在泛化; (8) 存在量词引入

## 79. 测验题 3.79

验证推理  $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$  的有效性:

- (1)  $\neg(\forall x(F(x) \vee G(x)))$  // 附加前提
- (2)  $\exists x(\neg(F(x) \vee G(x)))$  // (1) 量词否定等值式
- (3)  $\exists x(\neg F(x) \wedge \neg G(x))$  // (2) 德摩根律
- (4)  $\neg F(a) \wedge \neg G(a)$  // (3) 存在实例化
- (5)  $\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$  // 前提
- (6)  $\forall x F(x) \vee \forall y G(y)$  // (5) 约束变量改名
- (7)  $\forall x \forall y (F(x) \vee G(y))$  // (6) 两次量词域扩充
- (8)  $\forall y (F(a) \vee G(y))$  // (7) 存在实例化
- (9)  $F(a) \vee G(a)$  // (8) 存在实例化
- (10)  $\neg F(a)$  // (4) 化简规则
- (11)  $G(a)$  // (a)
- (12)  $\neg G(a)$  // (4) 化简规则
- (13)  $\forall x (F(x) \vee G(x))$  // (b)

其中 (a)、(b) 两个空依次填写什么?

答案: (a) (9),(10) 析取三段论 (b) (1),(11),(12) 反证法

### 80. 测验题 3.80

下面的论证验证推理  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \rightarrow \exists x G(x)$  的有效性:

- (1)  $\exists x F(x)$  // (a)
- (2)  $F(a)$  // (1) 存在例化
- (3)  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$  // 前提
- (4)  $F(a) \rightarrow G(a)$  // (3) 全称例化
- (5)  $G(a)$  // (2), (4) 假言推理
- (6)  $\exists x G(x)$  // (5) 存在泛化
- (7)  $\exists x F(x) \rightarrow \exists x G(x)$  // (b)

其中 (a)、(b) 两个空依次填写?

答案: (a) 附加前提 (b) (1), (6) 附加前提法

### 81. 测验题 3.81

对于命题 " 张三学过 C++ 语言 " , 下面哪些说法是正确的?

A. 这个命题是一个量化命题。

- B. " C++ 语言 " 是一个具体的个体, 可符号化为个体常量。
- C. " ..... 学过 C++ 语言 " 可符号化为一个一元谓词。
- D. " ..... 学过..... " 可符号化为一个二元谓词。

答案: BCD

## 82. 测验题 3.82

对于命题 " 所有程序员都学过 C++ 语言 " , 下面哪些说法是正确的?

- A. 这个命题是一个量化命题, 且是一个全称命题。
- B. 只能使用全总域作为符号化这个命题的论域。
- C. 使用全总域符号化这个命题时, " ..... 是程序员 " 是特征谓词。
- D. " ..... 学过 C++ 语言 " 可符号化为一个一元谓词。

答案: ACD

## 83. 测验题 3.83

对于命题“并非所有程序员都学过所有面向对象编程语言”, 下面哪些说法是正确的?

- A. 可使用所有程序员构成的集合作为符号化这个命题的论域。
- B. 符号化这个命题时, 可提取“... 学过面向对象编程语言”作为一元谓词。
- C. 这是对个体类之间关系进行判断的命题, “程序员”和“面向对象编程语言”都是个体类。
- D. 符号化这个命题时, “所有程序员”和“所有面向对象编程语言”都要用到全称量词。

答案: CD

解析: 对于 B 选项, 因为面向对象编程语言也是一个个体类, 因此要先提取“... 是面向对象编程语言”作为一元谓词, 再提取“... 学过...”作为二元谓词。

## 84. 测验题 3.84

对于命题“有的程序员学过所有面向对象编程语言”, 下面哪些说法是正确的?

- A. 可使用所有程序员构成的集合作为符号化这个命题的论域。
- B. 符号化这个命题时, 可提取“..... 学过面向对象编程语言”作为一元谓词。
- C. 可符号化为  $\forall x S(x)$ , 论域是程序员的集合,  $S(x)$  是谓词“ $x$  学过面向对象编程语言”。
- D. 符号化这个命题时, 需要提取“..... 是面向对象编程语言”这个一元谓词。

答案: D

## 85. 测验题 3.85

对于命题“所有学过面向对象编程语言的程序员都理解面向对象编程思想”, 下面哪些说法是正确的?

- A. 可使用所有学过面向对象编程语言的程序员作为符号化这个命题的论域。
- B. 符号化这个命题时, 必须提取“..... 学过面向对象编程语言”作为一元谓词。
- C. 符号化这个命题时, 必须提取“..... 是面向对象编程思想”作为一元谓词。
- D. 可符号化为  $\forall x(P(x) \rightarrow U(x))$ , 论域是全总域,  $P(x)$  是谓词“ $x$  是学过面向对象编程语言的程序员”,  $U(x)$  是谓词“ $x$  理解面向对象编程思想”。

答案: AD

### 86. 测验题 3.86

对于命题“所有程序员学过某门面向对象编程语言就能理解面向对象编程思想”, 下面哪些说法是正确的?

- A. 可使用所有程序员作为符号化这个命题的论域。
- B. 符号化这个命题时, 可提取“..... 是面向对象编程语言”作为一元谓词。
- C. 符号化这个命题时, 必须提取“..... 是面向对象编程思想”作为一元谓词。
- D. 可符号化为  $\forall x(P(x) \rightarrow (\exists y(O(y) \wedge S(x, y)) \rightarrow U(x)))$ , 论域是全总域,  $P(x)$  是谓词“ $x$  是程序员”,  $O(x)$  是谓词“ $x$  是面向对象编程语言”,  $S(x, y)$  是谓词“ $x$  学过  $y$ ”,  $U(x)$  是谓词“ $x$  理解面向对象编程思想”。

答案: BD

解析: A 选项为面向对象被量词“某门”修饰, 是个体类, 整个命题涉及多个个体类, 所以需要使用更大的集合作为论域。

### 87. 测验题 3.87

给定谓词  $P(x)$  表示“ $x$  是程序员”,  $S(x)$  表示“ $x$  学过面向对象编程语言”,  $T(x)$  表示“ $x$  是学过面向对象编程语言的程序员”,  $U(x)$  表示“ $x$  理解面向对象编程思想”。对于命题“有的学过面向对象编程语言的程序员不理解面向对象编程思想”, 下面哪些说法是正确的?

- A. 可将论域定为全总域, 符号化为  $\exists x((P(x) \wedge S(x)) \rightarrow \neg U(x))$ 。
- B. 可将论域定为所有程序员, 符号化为  $\exists x(S(x) \wedge \neg U(x))$ 。
- C. 可将论域定为全总域, 符号化为  $\exists x(T(x) \wedge \neg U(x))$ 。
- D. 可将论域定为所有学过面向对象编程语言的程序员, 符号化为  $\exists x(\neg U(x))$ 。

答案: BCD

### 88. 测验题 3.88

给定谓词  $P(x)$  表示“ $x$  是程序员”,  $S(x)$  表示“ $x$  学过面向对象编程语言”,  $T(x)$  表示“ $x$  是学过面向对象编程语言的程序员”,  $U(x)$  表示“ $x$  理解面向对象编程思想”。对于命题“没有学过面向对象编程语言的程序员都不理解面向对象编程思想”, 下面哪些说法是正确的?

- A. 可将论域定为全总域, 符号化为  $\forall x((P(x) \wedge \neg S(x)) \rightarrow \neg U(x))$ 。
- B. 可将论域定为所有程序员, 符号化为  $\forall x(\neg S(x) \rightarrow \neg U(x))$ 。
- C. 可将论域定为全总域, 符号化为  $\forall x(\neg T(x) \rightarrow \neg U(x))$ 。
- D. 可将论域定为所有学过面向对象编程语言的程序员, 符号化为  $\forall x(\neg U(x))$ 。

答案: AB

### 89. 测验题 3.89

给定谓词  $P(x)$  表示 "  $x$  是程序员 ",  $S(x)$  表示 "  $x$  学过面向对象编程语言 ",  $T(x)$  表示 "  $x$  是学过面向对象编程语言的程序员 ",  $U(x)$  表示 "  $x$  理解面向对象编程思想 "。对于命题 " 有的程序员虽然没学过面向对象编程语言, 但他也理解面向对象编程思想 ", 下面哪个说法是正确的?

- A. 可将论域定为全总域, 符号化为  $\exists x(P(x) \wedge \neg S(x) \wedge U(x))$ 。
- B. 可将论域定为所有程序员, 符号化为  $\exists x(\neg S(x)) \wedge \exists x U(x)$ 。
- C. 可将论域定为全总域, 符号化为  $\exists x(\neg T(x) \wedge U(x))$ 。
- D. 可将论域定为所有学过面向对象编程语言的程序员, 符号化为  $\exists x U(x)$ 。

答案: A

### 90. 测验题 3.90

给定谓词  $P(x)$  表示 "  $x$  是程序员 ",  $S(x)$  表示 "  $x$  学过面向对象编程语言 ",  $T(x)$  表示 "  $x$  是学过面向对象编程语言的程序员 ",  $U(x)$  表示 "  $x$  理解面向对象编程思想 "。对于命题 " 并非所有程序员都学过面向对象编程语言或理解面向对象编程思想 ", 下面哪个说法是正确的?

- A. 可将论域定为全总域, 符号化为  $\neg \forall x(P(x) \wedge (S(x) \vee U(x)))$ 。
- B. 可将论域定为所有程序员, 符号化为  $\neg \forall x(S(x) \vee U(x))$ 。
- C. 可将论域定为全总域, 符号化为  $\neg \forall (T(x) \rightarrow U(x))$ 。
- D. 可将论域定为所有程序员, 符号化为  $\exists x(\neg S(x) \vee \neg U(x))$ 。

答案: B

解析: 对于 A 选项, 等价于 "并非 (对所有  $x$ , 如果  $P(x)$ , 那么  $S(x) \vee U(x)$ )" (教材 P109 页末) 因此符号化为  $\neg \forall x(P(x) \rightarrow (S(x) \vee U(x)))$ 。

### 91. 测验题 3.91

对于命题 " 不同的程序员学过不同的面向对象编程语言 ", 下面哪个说法是正确的?

- A. 符号化这个命题时, 可提取  $P(x)$  表示 "  $x$  是不同的程序员 "。
- B. 符号化这个命题时, 可提取  $O(x)$  表示 "  $x$  是不同的面向对象编程语言 "。
- C. 符号化这个命题时, 可使用所有程序员构成的集合作为论域。

D. 可符号化为下面的公式

$$\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \rightarrow \forall u \forall v (O(u) \wedge O(v) \wedge S(x, u) \wedge S(y, v) \rightarrow u \neq v))$$

这里论域是全总域,  $P(x)$  表示“ $x$  是程序员”,  $O(x)$  表示“ $x$  是面向对象编程语言”,  $S(x, y)$  表示“ $x$  学过  $y$ ”,  $x \neq y$  表示“ $x$  与  $y$  不同”(即  $x$  不等于  $y$ )。

答案: D

## 92. 测验题 3.92

对于命题“没有两个程序员学过同一门面向对象编程语言”, 下面哪个说法是正确的?

A. 符号化这个命题时, 可提取  $P(x)$  表示“ $x$  是两个程序员”。

B. 符号化这个命题时, 可提取  $O(x)$  表示“ $x$  是同一门面向对象编程语言”。

C. 符号化这个命题时, 可使用所有程序员构成的集合作为论域。

D. 可符号化为公式  $\neg \exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge (x \neq y) \wedge \exists z (O(z) \wedge S(x, z) \wedge S(y, z)))$ , 这里论域是全总域,  $P(x)$  表示“ $x$  是程序员”,  $O(x)$  表示“ $x$  是面向对象编程语言”,  $S(x, y)$  表示“ $x$  学过  $y$ ”,  $x \neq y$  表示“ $x$  与  $y$  不同”(即  $x$  不等于  $y$ )。

答案: D

## 93. 测验题 3.93

以全总域为论域. 并给定谓词  $P(x)$  表示“ $x$  是程序员”,  $O(x)$  表示“ $x$  是面向对象编程语言”,  $S(x, y)$  表示“ $x$  学过  $y$ ”。符号化命题“所有面向对象编程语言都有程序员学过”最合适的一阶逻辑公式是

A.  $\forall x (O(x) \wedge \exists y (P(y) \wedge S(x, y)))$

B.  $\forall x \exists y (O(x) \wedge (P(y) \rightarrow S(x, y)))$

C.  $\forall x (O(x) \rightarrow \exists y (P(y) \wedge S(x, y)))$

D.  $\forall x \exists y (O(x) \wedge P(y) \rightarrow S(x, y))$

答案: C

## 94. 测验题 3.94

以全总域为论域, 并给定谓词  $P(x)$  表示“ $x$  是程序员”,  $O(x)$  表示“ $x$  是面向对象编程语言”,  $S(x, y)$  表示“ $x$  学过  $y$ ”。符号化命题“存在所有程序员都学过的面向对象编程语言”最合适的一阶逻辑公式是

A.  $\exists x (O(x) \rightarrow \forall y (P(y) \wedge S(x, y)))$

B.  $\exists x (O(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow S(x, y)))$

C.  $\exists x \forall y (O(x) \wedge P(y) \rightarrow S(x, y))$

D.  $\exists x \forall y (O(x) \rightarrow P(y) \rightarrow S(x, y))$

答案: B

### 95. 测验题 3.95

以所有程序员为论域, 并给定谓词  $O(x)$  表示 "  $x$  是面向对象编程语言 ",  $S(x, y)$  表示 "  $x$  学过  $y$  ",  $U(x)$  表示 "  $x$  能理解面向对象编程思想 "。符号化命题 " 并非所有程序员学过某门面向对象编程语言就能理解面向对象编程思想 " 最合适的一阶逻辑公式是

- A.  $\neg \forall x (\exists y (O(y) \wedge S(x, y)) \wedge U(x))$
- B.  $\forall x (\neg \exists y (O(y) \wedge S(x, y)) \wedge U(x))$
- C.  $\neg \forall x (\exists y (O(y) \wedge S(x, y)) \rightarrow U(x))$
- D.  $\forall x (\neg \exists y (O(y) \wedge S(x, y)) \rightarrow U(x))$

答案: C

### 96. 测验题 3.96

以所有程序员为论域, 并给定谓词  $S(x)$  表示 "  $x$  学过面向对象编程语言 ",  $U(x)$  表示 "  $x$  能理解面向对象编程思想 "。对于推理 " 所有程序员都学过面向对象编程语言, 但并非所有程序员只要学过面向对象编程语言就都能理解面向对象编程思想, 因此并非所有程序员都能理解面向对象编程思想 ", 下面哪些说法是正确的?

- A. 前提 " 所有程序员都学过面向对象编程语言 " 符号化为  $\forall x S(x)$
- B. 前提 " 并非所有程序员只要学过面向对象编程语言就能理解面向对象编程思想 " 符号化为  $\neg \forall x (S(x) \rightarrow U(x))$
- C. 结论 " 并非所有程序员都能理解面向对象编程思想 " 符号化为  $\neg \forall x U(x)$
- D. 这个推理不是有效的推理。

答案: ABC

### 97. 测验题 3.97

以所有程序员为论域, 并给定谓词  $S(x)$  表示 "  $x$  学过面向对象编程语言 ",  $U(x)$  表示 "  $x$  能理解面向对象编程思想 "。对于推理 " 所有程序员都学过面向对象编程语言, 有的程序员只要学过面向对象编程语言就能理解面向对象编程思想, 因此有的程序员能理解面向对象编程思想 ", 下面哪些说法是正确的?

- A. 前提 " 所有程序员都学过面向对象编程语言 " 符号化为  $\forall x S(x)$
- B. 前提 " 有的程序员只要学过面向对象编程语言就能理解面向对象编程思想 " 符号化为  $\exists x (S(x) \wedge U(x))$
- C. 结论 " 有的程序员能理解面向对象编程思想 " 符号化为  $\exists x U(x)$
- D. 这个推理不是有效的推理。

答案: AC

### 98. 测验题 3.98

以所有程序员为论域, 并给定谓词  $S(x)$  表示“ $x$  学过面向对象编程语言”,  $U(x)$  表示“ $x$  能理解面向对象编程思想”。对于推理“所有程序员都学过面向对象编程语言, 所有程序员只要学过面向对象编程语言就都能理解面向对象编程思想, 因此所有程序员都能理解面向对象编程思想”, 下面哪些说法是正确的?

- A. 前提“所有程序员都学过面向对象编程语言”符号化为  $\forall xS(x)$
- B. 前提“所有程序员只要学过面向对象编程语言就都能理解面向对象编程思想”符号化为  $\forall x(S(x) \rightarrow U(x))$
- C. 结论“所有程序员都能理解面向对象编程思想”符号化为  $\forall xU(x)$
- D. 这个推理是有效的推理。

答案: ABCD

### 99. 测验题 3.99

以所有程序员为论域, 并给定谓词  $S(x)$  表示“ $x$  学过面向对象编程语言”,  $U(x)$  表示“ $x$  能理解面向对象编程思想”。对于推理“有的程序员学过面向对象编程语言, 有的程序员没有学过面向对象编程语言就不能理解面向对象编程思想, 因此有的程序员不能理解面向对象编程思想”, 下面哪些说法是正确的?

- A. 前提“有的程序员学过面向对象编程语言”符号化为  $\exists xS(x)$
- B. 前提“有的程序员只要没有学过面向对象编程语言就不能理解面向对象编程思想”符号化为  $\exists x(\neg S(x) \wedge \neg U(x))$
- C. 结论“有的程序员不能理解面向对象编程思想”符号化为  $\exists x\neg U(x)$
- D. 这个推理不是有效的推理。

答案: ACD

### 100. 测验题 3.100

论域与谓词设置同上题。对于推理“有的程序员学过面向对象编程语言, 有的程序员只要学过面向对象编程语言就能理解面向对象编程思想, 因此有的程序员能理解面向对象编程思想”, 下面哪些说法是正确的?

- A. 前提“有的程序员学过面向对象编程语言”符号化为  $\exists xS(x)$
- B. 前提“有的程序员只要学过面向对象编程语言就能理解面向对象编程思想”符号化为  $\exists x(S(x) \wedge U(x))$
- C. 结论“有的程序员能理解面向对象编程思想”符号化为  $\exists xU(x)$



D. 这个推理是有效的推理。

答案: AC

## 四、证明方法

### 1. 测验题 4.1

下面哪些说法是正确的?

- A. 公理是不需要证明的, 公认为真的命题。
- B. 定理是重要的, 要证明为真的数学命题。
- C. 引理, 推论, 猜想实际上也都是定理。
- D. 数学证明与逻辑推理理论中验证推理有效性的论证类似, 是一些命题构成的序列。

答案: ABD

### 2. 测验题 4.2

下面哪些说法是正确的?

- A. 证明 " 对任意自然数  $n$  有  $6 \mid n^3 - n$  " 时, 从假定  $n$  是任意的自然数开始, 这隐含地运用了存在量词消除规则。
- B. 命题 " 任意连续三个自然数相乘的乘积必然被 6 整除 " 可符号化为  $6 \mid k(k+1)(k+2)$ , 这里论域是自然数集。
- C. 命题 " 对任意自然数  $n$  有  $6 \mid (n^3 - n)$  " 是形如  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  这样的命题。
- D. 命题 " 对任意正奇数  $n$  有  $8 \mid (n^2 - 1)$  " 是形如  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  这样的命题。

答案: CD

### 3. 测验题 4.3

证明命题 " 设  $n$  是自然数, 若  $2 \mid n$ , 则  $2 \mid n^2$  " 最合适的方法是:

- A. 直接证明法
- B. 反证法
- C. 通过逆否命题证明
- D. 分情况证明

答案: A

### 4. 测验题 4.4

证明命题 " 设  $n$  是自然数, 若  $2 \mid n^3$ , 则  $2 \mid n$  " 最合适的方法是:

- A. 直接证明法
- B. 反证法
- C. 通过反例证明
- D. 分情况证明

答案: B

### 5. 测验题 4.5

证明命题 " 对任意实数  $x, y$  有  $|xy| = |x||y|$  " 最合适的方法是:

- A. 直接证明法
- B. 反证法
- C. 通过反例证明
- D. 分情况证明

答案: D

### 6. 测验题 4.6

证明命题 " 设  $n, m$  是任意自然数, 若  $5 \mid m$  或  $5 \mid n$ , 则  $5 \mid mn$  " 最合适的方法是:

- A. 直接证明法
- B. 反证法
- C. 通过反例证明
- D. 分情况证明

答案: D

### 7. 测验题 4.7

证明命题“任意两个不相等的有理数之间必存在一个无理数”最合适的方法是:

- A. 反证法
- B. 通过反例证明
- C. 构造性存在证明
- D. 分情况证明

答案: C

### 8. 测验题 4.8

证明命题 " 存在有理数  $a$  和无理数  $b$  使得  $a^b$  是无理数 " 最合适的方法是:

- A. 反证法
- B. 通过反例证明
- C. 构造性存在证明
- D. 非构造性存在证明

答案: D

### 9. 测验题 4.9

证明命题 " 存在有理数  $a$  和有理数  $b$  使得  $a^b$  是无理数 " 最合适的方法是:

- A. 反证法
- B. 通过反例证明
- C. 构造性存在证明
- D. 非构造性存在证明

答案: C

### 10. 测验题 4.10

对于命题 " 设  $n, m$  是任意自然数, 若  $2 \mid mn$ , 则  $2 \mid m$  或  $2 \mid n$  " 的证明, 下面哪些思路是可行的?

- A. 使用直接证明法, 从  $2 \mid mn$ , 则存在  $k$  使得  $mn = 2k$  开始证明, 推出  $2 \mid m$  或  $2 \mid n$ 。
- B. 使用反证法, 从假定  $2 \nmid m$  且  $2 \nmid n$  开始证明, 推出与  $2 \mid mn$  矛盾。
- C. 利用  $p \vee q$  逻辑等值于  $\neg p \rightarrow q$ , 将  $2 \nmid m$  作为附加前提, 与前提  $2 \mid mn$  一起推出  $2 \mid n$ 。
- D. 使用分情况证明法, 分  $2 \mid m$  和  $2 \mid n$  两种情况进行证明。

答案: BC

### 11. 测验题 4.11

证明 " 对任意实数  $x$ , 如果  $|x-3| < 3$  则  $0 < x < 6$  ", 考虑如果  $x-3 \geq 0$ , 则  $|x-3| = x-3$ , 从而由  $|x-3| < 3$  得到  $x-3 < 3$ , 即  $x < 6$ , 而若  $x-3 < 0$ , 则  $|x-3| = 3-x$ , 从而由  $|x-3| < 3$  得到  $3-x < 3$ , 即  $x > 0$ , 綜上有  $x < 6$  且  $x > 0$ 。对于这个证明思路, 下面说法正确的有哪些?

- A. 这是分情况证明, 在假定  $|x-3| < 3$  成立时分两种情况证明  $0 < x < 6$ 。
- B. 这个证明思路是错误的, 从而所证明的命题也是不成立的。
- C. 这个证明思路是正向推理, 从考虑  $|x-3| < 3$  成立时开始考虑如何得到  $0 < x < 6$ 。
- D. 这个分情况证明在两个情况中最后得到的结论是不一样的, 一个得到  $x < 6$ , 一个得到  $x > 0$ , 不能综合得到  $0 < x < 6$ 。

答案: CD

### 12. 测验题 4.12

证明 " 形如  $3n-1$  的质数有无穷多个 ", 先假定形如  $3n-1$  的质数只有  $p_1, \dots, p_n$  这几个, 然后考虑若  $N = 3(p_1 \cdots p_n) - 1$  不是质数, 则它能因数分解为  $q_1 \cdots q_m$ , 这里  $q_1, \dots, q_m$  都是质数, 因为  $q_i (i = 1, \dots, m)$  能整除  $N$ , 但  $p_j (j = 1, \dots, n)$  都不能整除  $N$ , 因此每个  $q_i$  都与  $p_j$  不

同。进一步，由于两个  $3n+1$  型整数相乘只能得到  $3n+1$  型整数，因此  $q_i (i=1, \dots, m)$  必有一个是  $3n-1$  型质数。对于这个证明思路，下面说法正确的有哪些？

- A. 这个证明是一个构造性存在证明，构造了一个形如  $N = 3(p_1 \cdots p_n) - 1$  的质数。
- B. 这个证明使用的是反证法，在假定形如  $3n-1$  的质数只有有穷多个开始进行证明。
- C. 这个证明思路是反向推理，从考虑形如  $3n-1$  的质数为什么有无穷多个开始考虑。
- D. 这个证明的关键之一是两个  $3n+1$  型整数相乘只能得到  $3n+1$  型整数。

答案：BD

### 13. 测验题 4.13

证明 " 存在有理数  $a$  和无理数  $b$  使得  $a^b$  是无理数 "，考虑  $a=2, b=\sqrt{2}$ ，若  $2^{\sqrt{2}}$  是无理数则命题得证，否则再令  $a=2^{\sqrt{2}}, b=\sqrt{2}/4$ ，则  $a^b = (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}/4} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$  是无理数。对于这个证明思路，下面说法正确的有哪些？

- A. 这是一个非构造性存在证明，利用二难推理来论证存在满足性质的  $a$  和  $b$ 。
- B. 这是一个非构造性存在证明，使用反证法考虑当  $2^{\sqrt{2}}$  不是无理数时会导致什么矛盾。
- C. 这个证明思路是正向推理，基于  $\sqrt{2}$  是无理数论证存在满足性质的  $a$  和  $b$ 。
- D. 这是一个构造性存在证明，构造了一个无理数  $2^{\sqrt{2}}$ 。

答案：AC

### 14. 测验题 4.14

证明 " 若存在  $n$  个整数的积等于  $n$ ，而它们的和等于  $0$ ，则  $n$  是  $4$  的倍数 "，考虑要证明  $n$  是  $4$  的倍数，因为存在  $n$  个整数的积等于  $n$ ，只要证明这  $n$  个整数中至少有两个偶数即可，为此证明这  $n$  个整数都是奇数或只有一个偶数都会导致矛盾。对于这个证明思路，下面说法正确的有哪些？

- A. 这是一个非构造性存在证明，使用反证法证明存在这样的  $n$  个整数。
- B. 这个证明思路是一个反向推理，从考  $n$  为什么是  $4$  的倍数开始思考。
- C. 这个证明思路综合运用了分情况证明和反证法，考虑两种情况分别导致什么矛盾。
- D. 这个命题是错误的，不可能存在  $n$  个整数的积等于  $n$  且和等于  $0$ 。

答案：BC

### 15. 测验题 4.15

证明 " 若  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $1, \dots, n$  的某个排列，则  $n$  是奇数蕴涵乘积  $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$  是偶数 "，考虑要证明  $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$  是偶数，则要证明  $a_i-i (i=1, \dots, n)$  中存在偶数，而如果  $a_i-i$  这  $n$  个数全是奇数的话，由于  $n$  是奇数，那么它们的和  $(a_1-1)+\cdots+(a_n-n)$

也是奇数, 但  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $1, \dots, n$  的某个排列, 因此  $(a_1 - 1) + \dots + (a_n - n) = 0$  是偶数, 矛盾! 对于这个证明思路, 下面说法正确的有哪些?

- A. 这是一个构造性存在证明, 构造了  $a_i - i$  这  $n$  个数使得它们的乘积是偶数。
- B. 这个证明思路是反向推理, 从乘积  $(a_1 - 1) \cdots (a_n - n)$  为什么是偶数开始思考。
- C. 这个证明思路要用到 " 只有偶数个奇数的和才是偶数 " 这个引理。
- D. 这个证明思路用到了反证法, 考虑  $a_i - i$  这  $n$  个数全是奇数会导致什么矛盾。

答案: BCD

## 16. 测验题 4.16

假定论域都是自然数集, 下面哪些对待证命题的符号化是正确的?

- A. " 对任意  $n > 6$  有  $3^n < n!$  " 符号化为  $\forall n (3^n < n)$  。
- B. " 对任意  $n, 6 \mid (n^3 - n)$  " 符号化为  $\forall n (6 \mid (n^3 - n))$  。
- C. " 对任意正整数  $n$ , 若  $x$  和  $y$  是正整数且  $\max(x, y) = n$  则  $x = y$  " 符号化为  $\forall n > 0 \forall x > 0 \forall y > 0 (\max(x, y) = n \rightarrow x = y)$  。
- D. " 任意大于 12 分邮资可由 3 分和 7 分邮票支付 " 符号化为  $\forall n > 12 \forall s \forall t (3s + 7t = n)$  。

答案: BC

## 17. 测验题 4.17

下面哪些说法是正确的?

- A. 能用良序原理证明第一数学归纳法的有效性。
- B. 有些命题只能使用第二数学归纳法证明, 无法使用第一数学归纳法证明。
- C. 能用良序原理证明第二数学归纳法的有效性。
- D. 凡是能用第二数学归纳法证明的命题都能使用第一数学归纳法证明。

答案: ACD

## 18. 测验题 4.18

下面哪些说法是正确的?

- A. 任意一些整数构成的集合都存在最小的整数。
- B. 任意一些正整数构成的集合都存在最小的正整数。
- C. 任意一些自然数构成的集合都存在最小的自然数。
- D. 任意一些实数构成的集合都存在最小的实数。

答案: BC

## 19. 测验题 4.19

下面哪些证明是正确的?

A. 证明对任意自然数  $n$  有  $3 \mid (4^n + 2)$ : 当  $n = 0$  时显然成立, 假定当  $n = k$  时成立, 即 A. 有  $3 \mid (4^k + 2)$ , 则  $4^{k+1} + 2 = 3 \cdot 4^k + 4^k + 2$ , 因此也有  $3 \mid (4^{k+1} + 2)$ , 从而由数学归纳法, 命题得证。

B. 证明对任意正整数  $n$  有  $\sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1$ : 当  $n = 1$  时显然成立, 假定当  $n = m$  时成立, 则  $\sum_{k=1}^{m+1} k \times k! = \sum_{k=1}^m k \times k! + (m+1) \times (m+1)! = (m+1)! - 1 + (m+1) \times (m+1)! = (m+2)! - 1$ . 从而由数学归纳法, 命题得证。

C. 证明对任意自然数  $n$  有  $2 \mid (3^n + 2)$ : 当  $n = 0$  时显然成立, 假定当  $n = k$  时成立, 即有  $2 \mid (3^k + 2)$ , 则  $3^{k+1} + 2 = 2 \cdot 3^k + 3^k + 2$ , 因此也有  $2 \mid (3^{k+1} + 2)$ . 从而由数学归纳法, 命题得证。

D. 证明设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $1, 2, \dots, n$  的某个排列, 则当  $n$  是奇数时  $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$  是偶数: 当  $n = 1$  时显然成立, 假定当  $n = k$  时成立, 考虑当  $n = k+2$  时, 那些数是  $1$  到  $k+2$  的某个排列, 则其中肯定也存在数  $a_1, \dots, a_k$  是  $1$  到  $k$  的排列, 从而由归纳假设  $(a_1 - 1) \cdots (a_k - k)$  是偶数, 从而  $(a_1 - 1) \cdots (a_k - k)(a_{k+1} - (k+1))(a_{k+2} - (k+2))$  也是偶数, 从而由数学归纳法, 命题得证。

答案: AB

## 20. 测验题 4.20

下面试图使用第一数学归纳法证明对任意大于等于 12 分的邮资可由 3 分和 7 分的邮票支付:

**归纳基**: 显然 12 分邮资可由 4 张 3 分邮票支付。

**归纳步**: 假定对任意  $k \geq 12$ ,  $k$  分邮资可由 3 分和 7 分邮票支付, 从而将两张 3 分邮票换成一张 7 分邮票就可支付  $k+1$  分邮资。

对于这个证明, 下面哪些说法是正确的?

A. 这个证明虽然没有给出命题的符号化形式, 不够规范, 但是一个正确的证明。

B. 这个证明没有用到条件  $k \geq 12$ , 因此不是正确的证明, 从而要证明的命题也不成立。

C. 归纳步应针对  $k$  分邮资由 3 分和 7 分邮票支付时, 对是否至少有两张 3 分邮票分情况讨论。

D. 设论域是自然数集, 要证明的命题可符号化为  $\forall n \geq 12 \exists s \exists t (3s + 7t = n)$ 。

答案: CD

## 21. 测验题 4.21

下面试图使用第二数学归纳法证明对任意大于等于 20 分的邮资可由 5 分和 6 分的邮票支付:

**归纳基**: 显然 20 分邮资可由 4 张 5 分邮票支付。

**归纳步：**假定对任意  $k \geq 20$ , 20 分邮资到  $k$  分邮资都可由 5 分和 6 分邮票支付, 从而  $k + 1$  分邮资, 由假定有  $k - 4$  分邮资可由 5 分和 6 分邮票支付, 在这个支付方案上增加一张 5 分邮票则可支付  $k + 1$  分邮资。

对于这个证明, 下面哪些说法是正确的?

- A. 这个证明虽然没有给出命题的符号化形式, 不够规范, 但是一个正确的证明
- B. 归纳步没有考虑到  $k \geq 4$  是否大于等于 20, 因此不是正确的证明。
- C. 只有将归纳步中对  $k$  的条件改为  $k \geq 24$ , 从而保证  $k - 4 \geq 20$  能利用归纳假设才可能是正确的证明。
- D. 这个证明只要加上在归纳基中验证对于 20 分, 21 分, 22 分, 23 分, 24 分邮资都可由 5 分和 6 分邮票支付就可得到正确的证明。

答案: BC

## 22. 测验题 4.22

下面试图使用第一数学归纳法证明对任意大于等于 20 分的邮资可由 5 分和 6 分的邮票支付: 四票就可支付  $k + 1$  分邮资对于这个证明, 下面哪些说法是正确的?

- A. 这个证明虽然没有给出命题的符号化形式, 不够规范, 但是一个正确的证明。
- B. 这个证明没有用到条件  $k \geq 20$ , 因此不是正确的证明, 从而要证明的命题也不成立。
- C. 归纳步应针对  $k$  分邮资由 5 分和 6 分邮票支付时, 对是否至少有一张 5 分邮票分情况讨论。
- D. 设论域是自然数集, 要证明的命题可符号化为  $\forall n \exists s \exists t (5s + 6t = n)$ 。

答案: C

## 23. 测验题 4.23

下面试图使用第二数学归纳法证明对任意大于等于 12 分的邮资可由 3 分和 7 分的邮票支付:

**归纳基：**显然 12 分邮资可由 4 张 3 分邮票支付。

**归纳步：**假定对任意  $k \geq 12$ , 12 分邮资到  $k$  分邮资都可由 3 分和 7 分邮票支付, 从而  $k + 1$  分邮资,

由假定有  $k - 2$  分邮资可由 3 分和 7 分邮票支付, 在这个支付方案上增加一张 3 分邮票则可支付  $k + 1$  分邮资。

对于这个证明, 下面哪些说法是正确的?

- A. 这个证明虽然没有给出命题的符号化形式, 不够规范, 但是一个正确的证明。
- B. 归纳步没有考虑到  $k - 2$  是否大于等于 12, 因此不是正确的证明。
- C. 只要将归纳步中对  $k$  的条件改为  $k \geq 14$ , 从而保证  $k - 2 \geq 12$  能利用归纳假设就得到了一个正确的证明。



D. 这个证明只有在归纳基中验证对于 12 分, 13 分, 14 分邮资都可由 3 分和 7 分邮票支付后才会是正确的证明。

答案: BD

## 24. 测验题 4.24

下面试图使用第一数学归纳法证明任意凸  $n(n \geq 3)$  边形的内角和等于  $(n - 2) \times 180^\circ$  :

**归纳基:** 当  $n = 3$  时, 由三角形内角和等于  $180^\circ$ , 命题成立。

**归纳步:** 假定对任意  $k \geq 3$ , 凸  $k$  边形内角和是  $(k - 2) \times 180^\circ$ , 在凸  $k$  边形的任意一条边, 例如下图的边  $a$  上面增加两条边  $b, c$ , 那么边  $b, c$  和凸  $k$  边形除边  $a$  以外的边构成一个凸  $k + 1$  边形, 这个凸  $k + 1$  边形的内角和是原来的凸  $k$  边形的内角和 (按归纳假设是  $(k - 2) \times 180^\circ$ ) 再加上由边  $a, b, c$  构成的三角形的内角和, 即加上  $180^\circ$ , 等于  $((k + 1) - 2) \times 180^\circ$ , 命题得证。

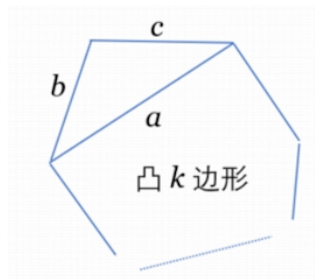


图 13: 测验题 4.24 用图

设谓词  $P(n)$  表示 "任意的凸  $n$  边形的内角和等于  $(n - 2) \times 180^\circ$ ", 对于上面的证明, 下面哪些说法是正确的?

- A. 这个证明虽然没有给出命题的符号化形式, 不够规范, 但是是一个正确的证明。
- B. 归纳步的主要目标是证明  $P(k + 1)$  成立, 应该从任意的凸  $k + 1$  边形出发, 而非从任意的凸  $k$  边形出发开始证明, 所以上述归纳步的证明不正确。
- C. 即使是任意的凸  $k$  边形任选一条边, 按照上述方法增加两条边得到的凸  $k + 1$  边形也不能认为是任意的凸  $k + 1$  边形, 因此上述归纳步的证明不是合平逻辑的证明。
- D. 归纳步应针对任意的凸  $k \geq 3$  边形, 选两条相邻边的不是共同端点的那两个端点连线, 将凸  $k + 1$  边形分成一个三角形和一个凸  $k$  边形, 再利用归纳假设进行证明。

答案: BCD

## 25. 测验题 4.25

下面试图使用第一数学归纳法证明任意  $n(n \geq 2)$  个顶点的连通图至少有  $n - 1$  条边:

**归纳基:** 当  $n = 2$  时, 两个顶点要连通 (即有通路), 则至少要有一条边, 命题成立。

**归纳步:** 假定对任意  $k \geq 2$ , 任意  $k$  个顶点的连通图至少有  $k - 1$  条边, 那么在这样的图中增加一个顶点, 而且要连通的话, 这个顶点必须与原来  $k$  个顶点中的某个顶点有一条边相连, 因

此它至少有  $k - 1 + 1 = k$  条边，命题得证。

设谓词  $P(n)$  表示 "任意的  $n$  个顶点的连通图至少有  $n - 1$  条边"，对于上面的证明，下面哪些说法是正确的？

A. 这个证明虽然没有给出命题的符号化形式，不够规范，但是一个正确的证明。

B. 归纳步的主要目标是证明  $P(k + 1)$  成立，应该从任意有  $k + 1$  个顶点的连通图出发，而非从任意有  $k$  个顶点的连通图出发开始证明，所以上述归纳步的证明不正确。

C. 即使是任意有  $k$  个顶点的连通图增加一个顶点，并让这个顶点与原来  $k$  个顶点的某个顶点有边相连，这样得到的有  $k + 1$  个顶点的连通图也不能认为是任意的有  $k + 1$  个顶点的连通图，因此上述归纳步的证明不是合乎逻辑的证明。

D. 归纳步应针对任意的有  $k + 1$  个顶点的连通图，考虑去掉一个顶点及其相连的边，从而得到一个或多个少于等于  $k$  个顶点的连通图，再利用归纳假设进行证明。

答案：BCD

## 26. 测验题 4.26

对于命题 "对任意自然数  $a$  和正整数  $b$ ，存在自然数  $q$  和  $r$  使得  $a = bq + r$  且  $0 \leq r < b$ "，下面哪些证明思路是可行的？

A. 针对自然数  $a$  做第一数学归纳法或强归纳法证明。

B. 针对自然数  $q$  做第一数学归纳法或强归纳法证明。

C. 令集合  $S = \{bq + r \mid q \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}\}$ ，对  $S$  使用良序原理进行证明。

D. 令集合  $S = \{a - bq \mid q \in \mathbb{N}\}$ ，对  $S$  使用良序原理进行证明。

答案：A

## 27. 测验题 4.27

设论域是正整数集， $P(x, y)$  是二元谓词。如果证明了  $P(1, 1)$  为真，且对任意正整数  $n, k$  有  $P(n, k) \rightarrow P(n + 1, k) \wedge P(n, k + 1)$ ，那么就证明了对任意正整数  $n, k$  有  $P(n, k)$  为真。下面试图使用良序原理说明该证明方法的有效性，哪个途径是最合适的？

A. 令集合  $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k (P(n, k) \text{ 不为真})\}$ ，针对  $S$  使用良序原理。

B. 令集合  $S = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists n (P(n, k) \text{ 不为真})\}$ ，针对  $S$  使用良序原理。

C. 令集合  $S = \{(n, k) \in \mathbb{N} \mid P(n, k) \text{ 不为真}\}$ ，针对  $S$  使用良序原理。

D. 令集合  $S = \{s \in \mathbb{N} \mid \text{存在正整数 } n \text{ 和 } k \text{ 使得 } n + k = s \text{ 且 } P(n, k) \text{ 不为真}\}$ ，针对  $S$  使用良序原理。

答案：D

**28. 测验题 4.28**

设论域是正整数集,  $P(x, y)$  是二元谓词。如果证明了对任意正整数  $k$  有  $P(1, k)$  为真, 且对任意正整数  $n, k$  有  $P(n, k) \rightarrow P(n+1, k)$ , 那么就证明了对任意正整数  $n, k$  有  $P(n, k)$  为真。下面试图使用良序原理说明该证明方法的有效性, 哪个途径是最合适的?

- A. 令集合  $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k(P(n, k) \text{ 不为真})\}$ , 针对  $S$  使用良序原理。
- B. 令集合  $S = \{k \in \mathbb{N} \mid \forall n(P(n, k) \text{ 不为真})\}$ , 针对  $S$  使用良序原理。
- C. 令集合  $S = \{(n, k) \in \mathbb{N} \mid P(n, k) \text{ 不为真}\}$ , 针对  $S$  使用良序原理。
- D. 令集合  $S = \{s \in \mathbb{N} \mid \text{存在正整数 } n \text{ 和 } k \text{ 使得 } n+k=s \text{ 且 } P(n, k) \text{ 不为真}\}$ , 针对  $S$  使用良序原理。

答案: A

**29. 测验题 4.29**

下面哪些说法是正确的?

- A. 归纳定义集合时归纳基只能给出一个基本元素。
- B. 归纳定义集合时归纳步只能给出一个构造规则。
- C. 归纳定义的集合的元素都是零次或有限次使用构造规则从基本元素构造得到。
- D. 实际使用归纳定义时常省略最小化声明, 但最小化声明是每个归纳定义的一部分。

答案: CD

**30. 测验题 4.30**

下面哪些说法是正确的?

- A. 归纳定义集合可以说是给出一个算法用于构造该集合的元素。
- B. 归纳定义集合的每个元素的构造总是可用唯一的一棵构造树描述。
- C. 总是可容易地判断一个元素是否属于一个归纳定义的集合。
- D. 当归纳定义集合的每个元素的构造可用唯一的一棵构造树描述时, 很容易设计算法判断一个元素是否属于该集合。

答案: AD

**31. 测验题 4.31**

下面哪些说法是正确的?

- A. 结构归纳法的归纳基用于验证归纳定义集合的基本元素满足待证性质。
- B. 结构归纳法的归纳步要针对归纳定义集合的每个归纳步构造规则分情况证明。
- C. 结构归纳法的归纳步假设用于构造的元素满足待证性质 (这就是归纳步的归纳假设), 然后证明构造得到的元素也满足待证性质。

D. 结构归纳法实际上是根据归纳定义集合的元素的结构,或者说元素的构造方式分情况证明。

答案: ABCD

### 32. 测验题 4.33

假定集合  $A$  是归纳定义的集合,集合  $B$  是用性质概括法定义的集合,下面哪些说法是正确的?

- A. 可使用结构归纳法证明集合  $A$  的每个元素都属于集合  $B$ 。
- B. 可使用结构归纳法证明集合  $B$  的每个元素都属于集合  $A$ 。
- C. 证明集合  $A$  等于集合  $B$  后意味着集合  $A$  的每个元素的构造都对应唯一的一棵构造树。
- D. 证明集合  $B$  等于集合  $A$  后意味着可设计算法构造集合  $B$  的元素。

答案: AD

### 33. 测验题 4.34

归纳定义自然数的集合  $S$  :

**归纳基**:  $4 \in S$  且  $6 \in S$  ;

**归纳步**: 若  $x, y \in S$  , 则  $x + y \in S$  。

下面哪些说法是正确的?

- A. 集合  $S$  的每个元素都有唯一的一个构造过程,对应唯一的一棵构造树。
- B. 集合  $S$  的每个自然数要么是 4 要么是 6, 要么是由  $S$  中的两个自然数相加而得到。
- C. 自然数 20, 26, 30, 36, 40, 46 都属于  $S$  。
- D. 所有大于等于 4 的自然数都属于  $S$  。

答案: BC

### 34. 测验题 4.35

归纳定义自然数的集合  $S$  : **归纳基**:  $4 \in S$  且  $6 \in S$  ; **归纳步**: 若  $x, y \in S$  , 则  $x + y \in S$  。  
设集合  $A = \{2k \in \mathbb{N} \mid k \geq 2\}$ ,  $B = \{4k \in \mathbb{N} \mid k \geq 1\}$  。下面哪些说法是正确的?

A. 可使用结构归纳法证明  $S \subseteq A$  : **归纳基**, 显然  $4, 6 \in A$  ; **归纳步**, 对任意  $s \in S$  , 若存在  $x, y \in S$  , 使得  $s = x + y$  , 则这时归纳假设是  $x, y \in A$  , 即存在  $k_1 \geq 2, k_2 \geq 2$  使得  $x = 2k_1, y = 2k_2$  , 显然这时  $s = 2(k_1 + k_2), (k_1 + k_2) \geq 2$  , 因此  $s \in A$  。

B. 可使用强归纳法证明  $S \subseteq A$  : **归纳基**, 若  $s$  是使用不超过 0 次归纳步构造规则得到的  $S$  的元素, 也即  $s$  是 4 或 6, 显然  $s \in A$  ; **归纳步**, 对任意  $k \geq 0$  , 假定对任意使用不超过  $k$  次 (含  $k$  次) 归纳步构造规则得到的  $S$  的元素  $s$  有  $s \in A$  , 对任意使用不超过  $k + 1$  次归纳构造规则得到的  $S$  的元素  $s'$  , 若它最后一步是使用  $x$  和  $y$  构造得到, 即有  $s' = x + y$  , 那么  $x$  和  $y$  都是使

用不超过  $k$  次归纳步构造规则得到的  $S$  的元素, 根据归纳假设有  $x \in A$  且  $y \in A$ , 容易得到也有  $s' \in A$ 。

C. 可使用结构归纳法证明  $B \subseteq S$ : **归纳基**, 当  $k = 1$ , 显然  $4 \in S$ ; **归纳步**, 假定  $4k \in S$ , 由于  $4 \in S$ , 根据  $S$  的归纳步定义, 显然有  $4k + 4 = 4(k + 1) \in S$ 。

D. 可使用强归纳法证明  $A \subseteq S$ : **归纳基**, 显然  $4, 6 \in S$ ; **归纳步**, 对任意  $k \geq 3$ , 假定  $4, 6, \dots, 2k \in S$ , 由于  $k \geq 3$ , 因此  $k - 1 \geq 2$ , 因此由归纳假设有  $2(k - 1) \in S$ , 由  $4 \in S$ , 根据  $S$  的归纳步构造规则就有  $2(k + 1) = 2(k - 1) + 4 \in S$ 。

答案: ABD

### 35. 测验题 4.36

归纳定义自然数的集合  $S$ : **归纳基**:  $6 \in S$  且  $9 \in S$ ; **归纳步**: 若  $x, y \in S$ , 则  $x + y \in S$ 。下面哪些说法是正确的?

- A, 集合  $S$  的每个元素都有唯一的一个构造过程, 对应唯一的一棵构造树。
- B, 集合  $S$  的每个自然数要么是 6 要么是 9, 要么是由  $S$  中的两个自然数相加而得到。
- C, 自然数 21, 33, 39, 51, 60 都属于  $S$ 。
- D, 所有大于等于 6 的自然数都属于  $S$ 。

答案: BC

### 36. 测验题 4.37

归纳定义自然数的集合  $S$ : **归纳基**:  $6 \in S$  且  $9 \in S$ ; **归纳步**: 若  $x, y \in S$ , 则  $x + y \in S$ 。设集合  $A = \{3k \in \mathbb{N} \mid k \geq 2\}$ ,  $B = \{6k \in \mathbb{N} \mid k \geq 1\}$ 。下面哪些说法是正确的?

A. 可使用结构归纳法证明  $S \subseteq A$ : **归纳基**, 显然  $6, 9 \in A$ ; **归纳步**, 对任意  $s \in S$ , 若存在  $x, y \in S$ , 使得  $s = x + y$ , 则这时归纳假设是  $x, y \in A$ , 即存在  $k_1 \geq 2, k_2 \geq 2$  使得  $x = 3k_1, y = 3k_2$ , 显然这时  $s = 3(k_1 + k_2), (k_1 + k_2) \geq 2$ , 因此  $s \in A$ 。

B. 可使用强归纳法证明  $S \subseteq A$ : **归纳基**, 若  $s$  是使用不超过 0 次归纳步构造规则得到的  $S$  的元素, 也即  $s$  是 6 或 9, 显然  $s \in A$ ; **归纳步**, 对任意  $k \geq 0$ , 假定对任意使用不超过  $k$  次 (含  $k$  次) 归纳步构造规则得到的  $S$  的元素  $s$  有  $s \in A$ , 对任意使用不超过  $k + 1$  次归纳构造规则得到的  $S$  的元素  $s'$ , 若它最后一步是使用  $x$  和  $y$  构造得到, 即有  $s' = x + y$ , 那么  $x$  和  $y$  都是使用不超过  $k$  次归纳步构造规则得到的  $S$  的元素, 根据归纳假设有  $x \in A$  且  $y \in A$ , 容易得到也有  $s' \in A$ 。

C. 可使用结构归纳法证明  $B \subseteq S$ : **归纳基**, 当  $k = 1$ , 显然  $6 \in S$ ; **归纳步**, 假定  $6k \in S$ , 由于  $6 \in S$ , 根据  $S$  的归纳步定义, 显然有  $6k + 6 = 6(k + 1) \in S$ 。

D. 可使用强归纳法证明  $A \subseteq S$ : **归纳基**, 显然  $6, 9 \in S$ ; **归纳步**, 对任意  $k \geq 3$ , 假定  $6, 9, \dots, 3k \in S$ , 由于  $k \geq 3$ , 因此  $k - 1 \geq 2$ , 因此由归纳假设有  $3(k - 1) \in S$ , 由  $6 \in S$ , 根据  $S$  的归纳步构造规则就有  $3(k + 1) = 3(k - 1) + 6 \in S$ 。

答案: ABD

### 37. 测验题 4.38

归纳定义自然数对的集合  $S$ : **归纳基**:  $\langle 1, 1 \rangle \in S$  且  $\langle 2, 2 \rangle \in S$ ; **归纳步**: 若  $\langle a, b \rangle \in S$ , 则  $\langle a+2, b \rangle \in S$  且  $\langle a, b+2 \rangle \in S$ 。下面哪些说法是正确的?

- A. 集合  $S$  的每个元素都有唯一的一个构造过程, 对应唯一的一棵构造树。
- B. 自然数对  $\langle 6, 6 \rangle$  可通过至多使用 4 次  $S$  的归纳步构造规则得到, 因此它属于  $\langle 6, 6 \rangle \in S$ 。
- C. 自然数对  $\langle 1, 6 \rangle$  无法由  $S$  的基本元素使用  $S$  的归纳步构造规则得到, 因此  $\langle 1, 6 \rangle \notin S$ 。
- D. 集合  $S$  中的所有元素都具有  $\langle x, x \rangle$  的形式, 这里  $x$  是大于等于 1 的自然数。

答案: BC

### 38. 测验题 4.39

归纳定义正整数对的集合  $S$ : **归纳基**:  $\langle 1, 1 \rangle \in S$  且  $\langle 2, 2 \rangle \in S$ ; **归纳步**: 若  $\langle a, b \rangle \in S$ , 则  $\langle a+2, b \rangle \in S$  且  $\langle a, b+2 \rangle \in S$ 。设集合  $A = \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in \mathbb{Z}^+ \text{ 且 } a+b \text{ 是偶数}\}$ 。下面哪些说法是正确的?

- A. 可针对  $S$  的元素的结构使用结构归纳法证明  $S \subseteq A$ 。
- B. 可针对  $S$  的元素使用归纳步构造规则的构造次数使用强归纳法证明  $S \subseteq A$ 。
- C. 可针对  $A$  的元素的结构使用结构归纳法证明  $A \subseteq S$ 。
- D. 可针对  $A$  的元素  $\langle a, b \rangle$  对  $a+b$  使用强归纳法证明  $A \subseteq S$ 。

答案: ABD

### 39. 测验题 4.40

归纳定义字母表  $\Sigma$  上的字符串集  $\Sigma^*$ : **归纳基**, 不含任何字符的空串  $\lambda \in \Sigma^*$ ; **归纳步**, 若  $u \in \Sigma^*, x \in \Sigma$ , 则  $ux \in \Sigma^*$ 。归纳定义两个字符串  $w$  和  $u$  的连接  $w \circ u$ : **归纳基**, 若  $u = \lambda$ , 则  $w \circ u = w$ ; **归纳步**, 若  $u = vx$ , 则  $w \circ u = w \circ vx = (w \circ v)x$ 。对于这两个定义, 下面哪些说法是正确的?

- A. 根据上述字符串集  $\Sigma^*$  的定义, 单个字符  $x \in \Sigma$  也是字符串  $x \in \Sigma^*$ , 准确地说, 这时是  $\lambda x$  的简写, 由于  $\lambda$  不含任何字符, 所以被省去。
- B. 根据上述字符串集  $\Sigma^*$  的定义, 将字符  $x$  放在字符串  $u$  后面得到  $ux$  是构造字符串的归纳步规则, 与字符串连接  $u \circ v$  不同, 但有  $u \circ x = ux$ 。
- C. 根据上述字符串集  $\Sigma^*$  的定义, 将字符  $x$  放在字符串  $u$  前面得到  $xu$  是构造字符串的归纳步规则, 与字符串连接  $u \circ v$  不同, 且有  $x \circ u = xu$ 。
- D. 给定  $x, y \in \Sigma$ , 则有  $x, y, xy \in \Sigma^*$ , 且  $x \circ y = xy$ 。

答案: ABD

## 40. 测验题 4.41

归纳定义字母表  $\Sigma$  上的字符串集  $\Sigma^*$ ：归纳基，不含任何字符的空串  $\lambda \in \Sigma^*$ ；归纳步，若  $u \in \Sigma^*, x \in \Sigma$ ，则  $ux \in \Sigma^*$ 。归纳定义两个字符串  $w$  和  $u$  的连接  $w \circ u$ ：归纳基，若  $u = \lambda$ ，则  $w \circ u = w$ ；归纳步，若  $u = vx$ ，则  $w \circ u = w \circ vx = (w \circ v)x$ 。下面哪些说法是正确的？

A. 根据字符串连接定义的归纳基，对任意字符串  $u$  直接就有  $u \circ \lambda = u$ 。

B. 根据字符串连接定义的归纳基，对任意字符串  $u$  直接就有  $\lambda \circ u = u$ 。

C. 根据字符串连接定义的归纳基，直接就有  $\lambda \circ \lambda = \lambda$ 。

D. 对字符串  $w$  的结构进行归纳证明  $\lambda \circ w = w$  时的归纳步是考虑存在字符串  $u$  和字符  $x$  使得  $w = ux$ ，这时归纳假设是  $\lambda \circ u = u$ 。

答案：ACD

## 41. 测验题 4.42

归纳定义字母表  $\Sigma$  上的字符串集  $\Sigma^*$ ：归纳基，不含任何字符的空串  $\lambda \in \Sigma^*$ ；归纳步，若  $u \in \Sigma^*, x \in \Sigma$ ，则  $ux \in \Sigma^*$ 。归纳定义两个字符串  $w$  和  $u$  的连接  $w \circ u$ ：归纳基，若  $u = \lambda$ ，则  $w \circ u = w$ ；归纳步，若  $u = vx$ ，则  $w \circ u = w \circ vx = (w \circ v)x$ 。下面哪些说法是正确的？

A. 对任意字符串  $w, u, v \in \Sigma^*$ ，应对  $w$  的结构用结构归纳法证明  $w \circ (u \circ v) = (w \circ u) \circ v$ 。

B. 对任意字符串  $w, u, v \in \Sigma^*$ ，应对  $u$  的结构用结构归纳法证明  $w \circ (u \circ v) = (w \circ u) \circ v$ 。

C. 对任意字符串  $w, u, v \in \Sigma^*$ ，应对  $v$  的结构用结构归纳法证明  $w \circ (u \circ v) = (w \circ u) \circ v$ 。

D. 对任意字符串  $w, u, v \in \Sigma^*$ ，对  $v$  的结构用结构归纳法证明  $w \circ (u \circ v) = (w \circ u) \circ v$  时，考虑存在字符串  $s$  和字符  $x$  使得  $v = sx$ ，这时归纳假设是  $w \circ (u \circ s) = (w \circ u) \circ s$ 。

答案：CD

## 42. 测验题 4.43

归纳定义字母表  $\Sigma$  上的字符串集  $\Sigma^*$ ：归纳基，不含任何字符的空串  $\lambda \in \Sigma^*$ ；归纳步，若  $u \in \Sigma^*, x \in \Sigma$ ，则  $ux \in \Sigma^*$ 。归纳定义两个字符串  $w$  和  $u$  的连接  $w \circ u$ ：归纳基，若  $u = \lambda$ ，则  $w \circ u = w$ ；归纳步，若  $u = vx$ ，则  $w \circ u = w \circ vx = (w \circ v)x$ 。对任意字符串  $w, u, v \in \Sigma^*$ ，对  $v$  的结构用结构归纳法证明  $w \circ (u \circ v) = (w \circ u) \circ v$ ：

归纳基：若  $v = \lambda$ ，则由 (1) 有  $w \circ (u \circ v) = w \circ (u \circ \lambda) = w \circ u$  且  $(w \circ u) \circ v = (w \circ u) \circ \lambda = w \circ u$ 。

归纳步：存在字符串  $s$  和字符  $x$  使得  $v = sx$ ，则有



$$\begin{aligned}
(w \circ u) \circ v &= (w \circ u) \circ sx & // & \quad v = sx \\
&= ((w \circ u) \circ s)x & // & \quad \underline{(2)} \\
&= (w \circ (u \circ s))x & // & \quad \underline{(3)} \\
&= w \circ (u \circ s)x & // & \quad \underline{(4)} \\
&= w \circ (u \circ sx) & // & \quad \underline{(5)} \\
&= w \circ (u \circ v) & // & \quad v = sx
\end{aligned}$$

从下面选项中选择合适的理由依次填写到上面的空 (1) 到 (5)，只需填写代表选项的大写字母即可。

- A. 连接满足交换律
- B. 归纳假设
- C. 空串是连接的单位元
- D. 连接的定义
- E. 连接满足结合律

答案：(1) C；c；空串是连接的单位元 (2) D；d；连接的定义 (3) B；b；归纳假设 (4) D；d；连接的定义 (5) D；d；连接的定义

#### 43. 测验题 4.44

归纳定义字母表  $\Sigma$  上的字符串集  $\Sigma^*$ ：归纳基，不含任何字符的空串  $\lambda \in \Sigma^*$ ；归纳步，若  $u \in \Sigma^*, x \in \Sigma$ ，则  $ux \in \Sigma^*$ 。归纳定义两个字符串  $w$  和  $u$  的连接  $w \circ u$ ：归纳基，若  $u = \lambda$ ，则  $w \circ u = w$ ；归纳步，若  $u = vx$ ，则  $w \circ u = w \circ vx = (w \circ v)x$ 。归纳定义字符串  $w$  的逆  $w^R$ ：归纳基，若  $w = \lambda$ ，则  $w^R = \lambda$ ；归纳步，若  $w = ux$ ，则  $w^R = (ux)^R = x \circ u^R$ 。对任意字符串  $w, u$ ，对  $u$  的结构用结构归纳法证明  $(w \circ u)^R = u^R \circ w^R$ ：

**归纳基**：若  $u = \lambda$ ，则由  $\lambda$  是连接的单位元和逆的定义有  $(w \circ u)^R = (w \circ \lambda)^R = w^R$  且  $w^R \circ u^R = w^R \circ \lambda^R = w^R \circ \lambda = w^R$ 。

**归纳步**：存在字符串  $v$  和字符  $x$  使得  $u = vx$ ，则有

$$\begin{aligned}
(w \circ u)^R &= (w \circ vx)^R & // & \quad u = vx \\
&= ((w \circ v)x)^R & // & \quad \underline{(1)} \\
&= x \circ (w \circ v)^R & // & \quad \underline{(2)} \\
&= x \circ (v^R \circ w^R) & // & \quad \underline{(3)} \\
&= (x \circ v^R) \circ w^R & // & \quad \underline{(4)} \\
&= (vx)^R \circ w^R & // & \quad \underline{(5)} \\
&= u^R \circ w^R & // & \quad u = vx
\end{aligned}$$

从下面选项中选择合适的理由依次填写到上面的空 (1) 到 (5)，只需填写代表选项的大写字



母即可。

- A. 连接满足交换律
- B. 归纳假设
- C. 逆的定义
- D. 连接的定义
- E. 连接满足结合律

答案: (1) D; d; 连接的定义 (2) C; c; 逆的定义 (3) B; b; 归纳假设 (4) E; e; 连接满足结合律 (5) C; c; 逆的定义

#### 44. 测验题 4.45

归纳定义斐波那契数列  $F_n, F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1} (n \geq 1)$ 。令  $P(n)$  表示  $2 \mid F_n$ ，下面试图使用数学归纳法证明  $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ：

**归纳基：**当  $n = 0$  时有  $2 \mid 0$ ，因此有  $P(0)$  成立。

**归纳步：**对任意  $k \geq 0$ ，假定  $P(0), P(1), \dots, P(k)$  成立，对于  $P(k+1)$ ，由于  $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ ，而根据归纳假设有  $P(k)$  和  $P(k-1)$  成立，即有  $2 \mid F_k$  和  $2 \mid F_{k-1}$ ，从而也有  $2 \mid F_{k+1}$ ，即有  $P(k+1)$  成立。

综上由强归纳法有  $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$  成立。对于这个证明，下面哪些说法是正确的？

- A. 这个证明给出了待证命题的符号化形式，按照强归纳法的规范书写，是一个正确的证明。
- B. 这个证明是错误的，因为归纳基只验证了  $P(0)$ ，强归纳法的归纳基不可能只验证一种情况。
- C. 这个证明是错误的，归纳步不能假定  $P(1)$  成立，因为  $P(1)$  是  $2 \mid F_1$ ，明显不成立。
- D. 这个证明是错误的，归纳步用了归纳假设  $P(k-1)$  成立，但这时  $k$  仅仅是大于等于 0，因此  $k-1$  可能小于 0，从而  $P(k-1)$  不在归纳假设的范围内。

答案: D

## 五、集合

### 1. 测验题 5.1

设  $a$  是全集  $U$  的一个元素, 下面哪些命题是正确的?

- A.  $a \in \{a\}$
- B.  $\{a\} \in \{a\}$
- C.  $\{a\} \subseteq \{a\}$
- D.  $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$

答案: AC

### 2. 测验题 5.2

设  $a$  是全集  $U$  的一个元素, 下面哪些命题是正确的?

- A.  $\{a, a\} = \{a\}$
- B.  $\{a, b\} = \{b, a\}$
- C.  $\{a, \{a\}\} = \{a\}$
- D.  $\{a\} = \{\{a\}\}$

答案: AB

### 3. 测验题 5.3

下面哪些命题是正确的?

- A.  $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- B.  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- C.  $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$
- D.  $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

答案: ABD

### 4. 测验题 5.4

下面哪些命题是正确的?

- A.  $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- B.  $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- C.  $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- D.  $\{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

答案: AC

### 5. 测验题 5.5

设  $a, b, c$  是全集  $U$  中三个不同的元素, 下面哪些命题是正确的?

- A.  $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
- B.  $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
- C.  $\{a, b\} \in \{a, b, \{a, b\}\}$
- D.  $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$

答案: BCD

### 6. 测验题 5.6

设  $A, B, C$  是任意集合, 下面哪些命题是正确的?

- A. 若  $A \in B$  且  $B \in C$  则必有  $A \in C$
- B. 若  $A \in B$  且  $B \subseteq C$  则必有  $A \subseteq C$
- C. 若  $A \subseteq B$  且  $B \in C$  则必有  $A \in C$
- D. 若  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq C$  则必有  $A \subseteq C$

答案: D

### 7. 测验题 5.7

设  $A, B, C$  是任意集合, 下面哪些命题是正确的?

- A. 若  $A \in B$  且  $B \in C$  则必有  $A \subseteq C$
- B. 若  $A \in B$  且  $B \subseteq C$  则必有  $A \in C$
- C. 若  $A \subseteq B$  且  $B \in C$  则必有  $A \subseteq C$
- D. 若  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq C$  则必有  $A \in C$

答案: B

### 8. 测验题 5.8

设全集  $U$  是整数集  $\mathbb{Z}$ , 定义集合  $A = \{x \mid \exists y((x - y = 1) \wedge (0 \leq y \leq 3))\}$ , 下面哪些公式为真?

- A.  $\forall x(x \in A \rightarrow x \leq 4)$
- B.  $\forall x(x \leq 4 \rightarrow x \in A)$
- C.  $\forall x(0 \leq x \leq 3 \rightarrow (x + 1) \in A)$
- D.  $\forall x(x \in A \rightarrow \exists y(x - y = 1))$

答案: ACD

**9. 测验题 5.9**

设全集  $U$  是整数集  $\mathbb{Z}$ , 定义集合  $A = \{x \mid \forall y((x - y = 1) \rightarrow (0 \leq y \leq 3))\}$ , 下面哪些公式为真?

- A.  $\forall x(x \in A \rightarrow x \leq 4)$
- B.  $\forall x(x \leq 4 \rightarrow x \in A)$
- C.  $\forall x(0 \leq x \leq 3 \rightarrow (x + 1) \in A)$
- D.  $\forall x(x \in A \rightarrow \forall y(x - y = 1))$

答案: AC

**10. 测验题 5.10**

设全集  $U$  是整数集  $\mathbb{Z}$ , 定义集合  $A = \{x \mid \exists y((x + y = 1) \wedge (0 \leq y \leq 3))\}$ , 下面哪些公式为真?

- A.  $\forall x(x \in A \rightarrow x \leq 4)$
- B.  $\forall x(x \leq 4 \rightarrow x \in A)$
- C.  $\forall x(0 \leq x \leq 3 \rightarrow (x + 1) \in A)$
- D.  $\forall x(x \in A \rightarrow \exists y(x + y = 1))$

答案: AD

**11. 测验题 5.11**

设全集  $U$  是整数集  $\mathbb{Z}$ . 定义集合  $A = \{x \mid \forall y((x + y = 1) \rightarrow (0 \leq y \leq 3))\}$ , 下面哪些公式为真?

- A.  $\forall x(x \in A \rightarrow x \leq 4)$
- B.  $\forall x(x \leq 4 \rightarrow x \in A)$
- C.  $\forall x(0 \leq x \leq 3 \rightarrow (x + 1) \in A)$
- D.  $\forall x(x \in A \rightarrow \forall y(x + y = 1))$

答案: A

**12. 测验题 5.12**

设全集  $U$  是整数集  $\mathbb{Z}$ , 定义集合  $A = \{2^k \mid 0 \leq k \leq 3\}$ , 下面哪些公式为真?

- A.  $\forall x(x \in A \rightarrow 2 \mid x)$
- B.  $\forall x(\exists y(2^y = x) \rightarrow x \in A)$
- C.  $\forall x(0 \leq x \leq 3 \rightarrow 2^x \in A)$
- D.  $\forall x(x \in A \rightarrow \exists y(2^y = x))$

答案: CD

## 13. 测验题 5.13

设全集  $U$  是整数集  $\mathbb{Z}$ , 定义集合  $A = \{x + y \mid (0 \leq x \leq 3) \wedge (0 \leq y \leq 2)\}$ . 下面哪些公式为真?

A.  $\forall x \forall y (x + y \in A \rightarrow (0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2))$

B.  $\forall x (x \in A \rightarrow 0 \leq x \leq 5)$

C.  $\forall x \forall y (x + y \in A \wedge (0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2))$

D.  $\forall x (0 \leq x \leq 5 \rightarrow x \in A)$

答案: BD

## 14. 测验题 5.14

设全集  $U$  是整数集  $\mathbb{Z}$ , 定义集合  $A = \{x - y \mid (0 \leq x \leq 3) \wedge (0 \leq y \leq 2)\}$ , 下面哪些公式为真?

A.  $\forall x \forall y (x - y \in A \rightarrow (0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2))$

B.  $\forall x (x \in A \rightarrow -2 \leq x \leq 3)$

C.  $\forall x \forall y ((0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2) \rightarrow (x - y \in A))$

D.  $\forall x (-2 \leq x \leq 3 \rightarrow x \in A)$

答案: BCD

## 15. 测验题 5.15

下面针对两个任意的集合画的文氏图, 哪些是正确的?

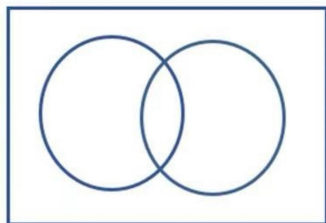


图 14: 测验题 5.15 A 选项

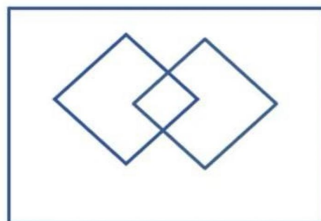


图 15: 测验题 5.15 B 选项

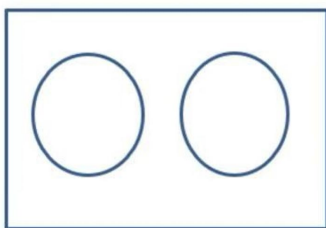


图 16: 测验题 5.15 C 选项



图 17: 测验题 5.15 D 选项

答案: AB

解析：要绘制多个集合的文氏图时，对任意两个集合  $A$  和  $B$ ，除非特别说明没有元素同时属于  $A$  和  $B$ ，否则绘制的表示  $A$  的封闭图形和表示  $B$  的封闭图形要相交（课本 P162）。逆天...

## 16. 测验题 5.16

对于下面的成员关系表（见测验题 5.16 用图），下面哪些说法是正确的？

$A$	$B$	$C$	$S$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

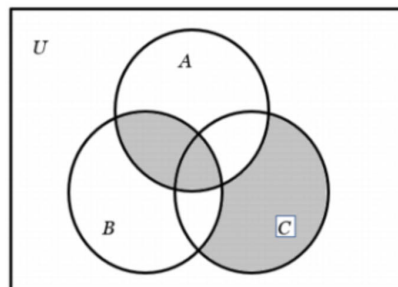


图 18: 测验题 5.16 用图

- A. 对全集任意元素  $x$ , 若  $x \in A$  且  $x \in B$  且  $x \in C$ , 则  $x \in S$
- B. 对全集任意元素  $x$ , 若  $x \notin A$  且  $x \in B$  且  $x \in C$ , 则  $x \in S$
- C. 对全集任意元素  $x$ , 若  $x \notin A$  且  $x \notin B$  且  $x \in C$ , 则  $x \in S$
- D. 上面右边给出的图是这个成员关系表所描述集合  $S$  的文氏图

答案：ACD

## 17. 测验题 5.17

对于下面的成员关系表（见测验题 5.17 用图），下面哪些说法是正确的？

$A$	$B$	$C$	$S$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

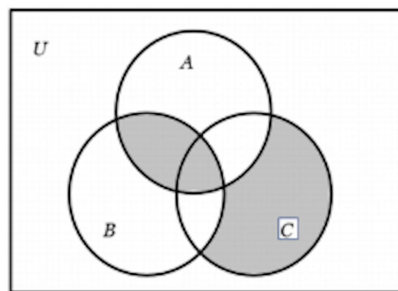


图 19: 测验题 5.17 用图

- A. 对全集任意元素  $x$ , 若  $x \in A$  且  $x \in B$ , 则  $x \in S$
- B. 对全集任意元素  $x$ , 若  $x \notin A$  且  $x \in B$ , 则  $x \in S$
- C. 对全集任意元素  $x$ , 若  $x \notin A$  且  $x \notin B$ , 则  $x \notin S$
- D. 上面右边给出的图是这个成员关系表所描述集合  $S$  的文氏图

答案: AC

### 18. 测验题 5.18

对于下面的成员关系表 (见测验题 5.18 用图), 下面哪些说法是正确的?

$A$	$B$	$C$	$S$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

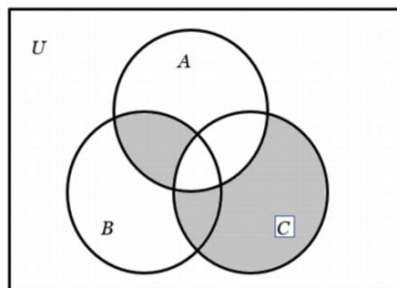


图 20: 测验题 5.18 用图

- A. 对全集任意元素  $x$ , 若  $x \in A$  且  $x \in B$ , 则  $x \in S$
- B. 对全集任意元素  $x$ , 若  $x \notin A$  且  $x \in C$ , 则  $x \in S$
- C. 对全集任意元素  $x$ , 若  $x \notin A$  且  $x \notin B$ , 则  $x \notin S$
- D. 上面右边给出的图是这个成员关系表所描述集合  $S$  的文氏图

答案: BD

### 19. 测验题 5.19

设全集  $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9\}$ , 集合  $A = \{0, 4, 8, 9\}$ ,  $B = \{1, 4, 7, 8\}$ , 则  $A \cap B = \{ \quad \}$   
 $A \cup B = \{ \quad \}$ ,  $A - B = \{ \quad \}$ ,  $\bar{A} = \{ \quad \}$ 。(分别填写这些集合的元素, 无需花括号, 元素从小到大依次填写, 并用逗号隔开)

答案: (1) 4,8 (2) 0,1,4,7,8,9 (3) 0,9 (4) 1,2,3,5,6,7

### 20. 测验题 5.20

设全集  $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9\}$ , 集合  $A = \{0, 1, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ , 则  $A \cap B = \{ \quad \}$ ,  $A \cup B = \{ \quad \}$ ,  $A - B = \{ \quad \}$ ,  $\bar{A} = \{ \quad \}$ 。(分别填写这些集合的元素, 无需花括号, 元素从小到大依次填写, 并用逗号隔开)

答案: (1) 6,8 (2) 0,1,2,4,6,7,8,9 (3) 0,1,7,9 (4) 2,3,4,5

### 21. 测验题 5.21

设全集  $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9\}$ , 集合  $A = \{0, 1, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $C = \{0, 4, 8, 9\}$ . 下面哪些命题是正确的?

A.  $\{2, 6\} \subseteq (A \cup B) - C$

B.  $\{2, 6\} \subseteq (A \cap B) - C$

C.  $\{2, 6\} \subseteq A \cup (B - C)$

D.  $\{2, 6\} \subseteq A \cap (B - C)$

答案: AC

**22. 测验题 5.22**

设全集  $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9\}$ , 集合  $A = \{0, 1, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $C = \{0, 4, 8, 9\}$ 。

下面哪些命题是正确的?

A.  $\{1, 6, 7\} \subseteq A \cap (\overline{B \cup C})$

B.  $\{1, 6, 7\} \subseteq A \cap (\overline{B \cap C})$

C.  $\{2, 3, 5\} \subseteq \bar{A} - (B \cup C)$

D.  $\{2, 3, 5\} \subseteq \bar{A} - (B \cap C)$

答案: BD

**23. 测验题 5.23**

设全集  $U$  是自然数集  $\mathbb{N}$ , 定义集合  $A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ ,  $B = \{4k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ 。下面哪些命题是正确的?

A. 对任意自然数  $k$ ,  $12k + 5 \in A \cap B$

B. 对任意自然数  $k$ ,  $12k + 5 \in A \cup B$

C. 对任意自然数  $k$ ,  $12k + 5 \in A - B$

D. 对任意自然数  $k$ ,  $12k + 5 \in \bar{B}$

答案: BCD

**24. 测验题 5.24**

设全集  $U$  是自然数集  $\mathbb{N}$ , 定义集合  $A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ ,  $B = \{4k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ 。下面哪些命题是正确的?

A. 对任意自然数  $k$ ,  $12k + 5 \in A \cap B$

B. 对任意自然数  $k$ ,  $12k + 5 \in A \cup B$

C. 对任意自然数  $k$ ,  $12k + 5 \in A - B$

D. 对任意自然数  $k$ ,  $12k + 5 \in \bar{B}$

答案: AB



**25. 测验题 5.25**

设全集  $U$  是自然数集  $\mathbb{N}$ , 定义集合  $A = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ ,  $B = \{4k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ . 下面哪些命题是正确的?

- A. 对任意自然数  $k$ ,  $12k + 10 \in A \cap B$
- B. 对任意自然数  $k$ ,  $12k + 10 \in A \cup B$
- C. 对任意自然数  $k$ ,  $12k + 10 \in A - B$
- D. 对任意自然数  $k$ ,  $12k + 10 \in \bar{A}$

答案: AB

**26. 测验题 5.26**

设全集  $U$  是正整数集  $\mathbb{Z}^+$ , 对任意正整数  $n$ , 定义集合  $A_n$  是  $n$  的所有正因子构成的集合, 对于集合族  $\mathcal{A} = \{A_{12}, A_{18}, A_{24}, A_{36}\}$ , 下面哪些命题是正确的?

- A.  $\bigcap \mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$
- B.  $\{1, 2, 3\} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$
- C.  $\bigcup \mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
- D.  $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$

答案: BD

**27. 测验题 5.27**

设全集  $U$  是正整数集  $\mathbb{Z}^+$ , 对任意正整数  $n$ , 定义集合  $A_n$  是  $n$  的所有正因子构成的集合, 对于集合族  $\mathcal{A} = \{A_{12}, A_{18}, A_{24}, A_{36}\}$ , 下面哪些命题是正确的?

- A. 对任意正整数  $k$ , 若  $k \in \bigcap \mathcal{A}$ , 则  $k$  是 12 的正因子
- B. 对任意正整数  $k$ , 若  $k \in \bigcup \mathcal{A}$ , 则  $k$  是 12 的正因子
- C. 对任意正整数  $k$ , 只要  $k$  是 12 的正因子, 则  $k \in \bigcap \mathcal{A}$
- D. 对任意自然数  $k$ , 只要  $k$  是 12 的正因子, 则  $k \in \bigcup \mathcal{A}$

答案: AD

**28. 测验题 5.28**

设全集  $U$  是正整数集  $\mathbb{Z}^+$ , 对任意正整数  $n$ , 定义集合  $A_n$  是  $n$  的所有正因子构成的集合. 对于集合族  $\mathcal{A} = \{A_{6k} \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ , 下面哪些命题是正确的?

- A.  $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$
- B.  $\bigcap \mathcal{A} = \{1, 2, 3, 6\}$
- C.  $\bigcup \mathcal{A} = \mathbb{Z}^+$
- D.  $\bigcup \mathcal{A} = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$

答案: BC

### 29. 测验题 5.29

下面哪些命题是正确的?

- A. 对任意集合  $A, B, A \cap B = A$  当且仅当  $A \subseteq B$
- B. 对任意集合  $A, B, A \cap B = A$  当且仅当  $B \subseteq A$
- C. 对任意集合  $A, B, C, A \cap B \subseteq C$  当且仅当  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq C$
- D. 对任意集合  $A, B, C, C \subseteq A \cap B$  当且仅当  $C \subseteq A$  且  $C \subseteq B$

答案: AD

### 30. 测验题 5.30

下面哪些命题是正确的?

- A. 对任意集合  $A, B, A \cup B = A$  当且仅当  $A \subseteq B$
- B. 对任意集合  $A, B, A \cup B = A$  当且仅当  $B \subseteq A$
- C. 对任意集合  $A, B, C, A \cup B \subseteq C$  当且仅当  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq C$
- D. 对任意集合  $A, B, C, C \subseteq A \cup B$  当且仅当  $C \subseteq A$  且  $C \subseteq B$

答案: BC

### 31. 测验题 5.31

下面哪些命题是正确的?

- A. 对任意集合  $A, B, C, A \cap B \subseteq C$  当且仅当  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq C$
- B. 对任意集合  $A, B, C, A \cup B \subseteq C$  当且仅当  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq C$
- C. 对任意集合  $A, B, C, C \subseteq A \cup B$  当且仅当  $C \subseteq A$  且  $C \subseteq B$
- D. 对任意集合  $A, B, C, C \subseteq A \cap B$  当且仅当  $C \subseteq A$  且  $C \subseteq B$

答案: BD

### 32. 测验题 5.32

下面哪些命题是正确的?

- A. 对任意集合  $A, B, A \subseteq B$  当且仅当  $A - B = \emptyset$
- B. 对任意集合  $A, B, A \subseteq B$  当且仅当  $B - A = \emptyset$
- C. 对任意集合  $A, B, A \subseteq B$  当且仅当  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$
- D. 对任意集合  $A, B, A \subseteq B$  当且仅当  $\bar{B} \subseteq \bar{A}$

答案: AD

**33. 测验题 5.33**

下面哪些命题是正确的?

- A. 对任意集合  $A, B, \bar{A} \subseteq \overline{A \cap B}$
- B. 对任意集合  $A, B, \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$
- C. 对任意集合  $A, B, \bar{A} \subseteq \overline{A - B}$
- D. 对任意集合  $A, B, \bar{A} \subseteq \overline{B - A}$

答案: AC

**34. 测验题 5.34**

下面哪些命题是正确的?

- A. 对任意集合  $A, B, A - B = A \cup \bar{B}$
- B. 对任意集合  $A, B, A - B = \bar{A} \cup B$
- C. 对任意集合  $A, B, A - B = A \cap \bar{B}$
- D. 对任意集合  $A, B, A - B = \bar{A} \cap B$

答案: C

**35. 测验题 5.35**

下面哪些命题是正确的?

- A. 对任意集合  $A, B, A \subseteq B$  当且仅当  $A = A \cup B$
- B. 对任意集合  $A, B, A \subseteq B$  当且仅当  $A = A \cap B$
- C. 对任意集合  $A, B, A \subseteq B$  当且仅当  $A = A - B$
- D. 对任意集合  $A, B, A \subseteq B$  当且仅当  $\emptyset = A - B$

答案: BD

**36. 测验题 5.36**

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 下面关于  $A$  的幂集  $\wp(A)$  的命题哪些是正确的?

- A.  $\{1, 2\} \subseteq \wp(A)$
- B.  $\{1, 2\} \in \wp(A)$
- C.  $\{\{1\}, \{2\}\} \subseteq \wp(A)$
- D.  $\{\{1\}, \{2\}\} \in \wp(A)$

答案: BC

**37. 测验题 5.37**

下面哪些命题是正确的?

- A. 空集  $\emptyset$  的幂集  $\wp(\emptyset)$  等于  $\emptyset$
- B. 集合  $\{\emptyset\}$  的幂集  $\wp(\{\emptyset\})$  等于  $\{\emptyset\}$
- C. 集合  $\{\emptyset\}$  是幂集  $\wp(\emptyset)$  的一个元素
- D. 集合  $\{\emptyset\}$  是幂集  $\wp(\{\emptyset\})$  的一个元素

答案: D

**38. 测验题 5.38**

下面哪些命题是正确的?

- A. 集合  $\{\{\emptyset\}\}$  是空集  $\emptyset$  的幂集  $\wp(\emptyset)$  的子集, 即有  $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \wp(\emptyset)$
- B. 集合  $\{\{\emptyset\}\}$  是空集  $\emptyset$  的幂集  $\wp(\emptyset)$  的元素, 即有  $\{\{\emptyset\}\} \in \wp(\emptyset)$
- C. 集合  $\{\{\emptyset\}\}$  是集合  $\{\emptyset\}$  的幂集  $\wp(\{\emptyset\})$  的子集, 即有  $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \wp(\{\emptyset\})$
- D. 集合  $\{\{\emptyset\}\}$  是集合  $\wp(\{\emptyset\})$  的幂集  $\wp(\wp(\{\emptyset\}))$  的元素, 即有  $\{\{\emptyset\}\} \in \wp(\wp(\{\emptyset\}))$

答案: CD

**39. 测验题 5.39**

对任意集合  $A$  和  $B$ , 要证明  $A = B$ , 下面哪些方法是正确的?

- A. 证明对任意  $x$ , 有  $x \in A$  当且仅当  $x \in B$
- B. 证明  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$
- C. 分别画出表示集合  $A$  和集合  $B$  的文氏图, 看它们是否相同
- D. 列出  $A$  和  $B$  的成员关系表, 看它们是否相同

答案: ABD

**40. 测验题 5.40**

对任意集合  $A, B, C$ , 下面哪些命题是正确的?

- A.  $A \cup B = A \cup C$  蕴涵  $B = C$
- B.  $A \cap B = A \cap C$  蕴涵  $B = C$
- C.  $A \cup B = A \cup C$  且  $\bar{A} \cup B = \bar{A} \cup C$  蕴涵  $B = C$
- D.  $A \cap B = A \cap C$  且  $\bar{A} \cap B = \bar{A} \cap C$  蕴涵  $B = C$

答案: CD

## 41. 测验题 5.41

下面的集合等式演算中 (1),(2) 使用的集合基本等式分别是：

$$\begin{aligned}
 & (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup C) && // \text{分配律} \\
 & = ((A \cup B) \cap \bar{A}) \cup ((A \cup B) \cap C) && // \text{分配律} \\
 & = (A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) && // \text{矛盾律, 同一律} \\
 & = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) && // (1)、同一律 \\
 & = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap C) \cup ((B \cap C) \cap (A \cup \bar{A})) && // \text{分配律} \\
 & = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap C) \cup ((B \cap C \cap A) \cup (B \cap C \cap \bar{A})) && // \text{交换律, 结合律} \\
 & = ((B \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A} \cap C)) \cup ((A \cap C) \cup (B \cap A \cap C)) && // (2) \\
 & = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap C) && // \text{交换律} \\
 & = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap C)
 \end{aligned}$$

答案：(1) 排中律 (2) 吸收律

## 42. 测验题 5.42

下面的集合等式演算中 (1),(2) 使用的集合基本等式分别是：

$$\begin{aligned}
 & (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap C) && // \text{分配律} \\
 & = ((A \cap B) \cup \bar{A}) \cap ((A \cap B) \cup C) && // \text{分配律} \\
 & = (A \cup \bar{A}) \cap (B \cup \bar{A}) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) && // \text{排中律, 同一律} \\
 & = (B \cup \bar{A}) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) && // (1)、同一律 \\
 & = (B \cup \bar{A}) \cap (A \cup C) \cap ((B \cup C) \cup (A \cap \bar{A})) && // \text{分配律} \\
 & = (B \cup \bar{A}) \cap (A \cup C) \cap ((B \cup C \cup A) \cap (B \cup C \cup \bar{A})) && // \text{交换律, 结合律} \\
 & = ((B \cup \bar{A}) \cap (B \cup \bar{A} \cup C)) \cap ((A \cup C) \cap (B \cup A \cup C)) && // (2) \\
 & = (B \cup \bar{A}) \cap (A \cup C) && // \text{交换律} \\
 & = (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup C)
 \end{aligned}$$

答案：(1) 矛盾律 (2) 吸收律

## 43. 测验题 5.43

下面的集合等式演算中 (1), (2), (3) 使用的集合基本等式分别是

$$\begin{aligned}
& \overline{(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup C)} && // \text{德摩尔根律} \\
& = \overline{A \cup B \cup \bar{A} \cup C} && // (1) \\
& = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{\bar{A}} \cap \bar{C}) && // \text{双重否定律} \\
& = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) && // \text{分配律} \\
& = ((\bar{A} \cap \bar{B}) \cup A) \cap ((\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{C}) && // \text{分配律} \\
& = (\bar{A} \cup A) \cap (\bar{B} \cup A) \cap (\bar{A} \cup \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) && // \text{排中律, 同一律} \\
& = (\bar{B} \cup A) \cap (\bar{A} \cup \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) && // (2), \text{同一律} \\
& = (\bar{B} \cup A) \cap (\bar{A} \cup \bar{C}) \cap ((\bar{B} \cup \bar{C}) \cup (A \cap \bar{A})) && // \text{分配律} \\
& = (\bar{B} \cup A) \cap (\bar{A} \cup \bar{C}) \cap ((\bar{B} \cup \bar{C} \cup A) \cap (\bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{A})) && // \text{交换律, 结合律} \\
& = ((\bar{B} \cup A) \cap (\bar{B} \cup A \cup \bar{C})) \cap ((\bar{A} \cup \bar{C}) \cap (\bar{A} \cup \bar{C} \cup \bar{B})) && // (3) \\
& = (\bar{B} \cup A) \cap (\bar{A} \cup \bar{C})
\end{aligned}$$

答案: (1) 德摩尔根律; 德摩根律 (2) 矛盾律 (3) 吸收律

#### 44. 测验题 5.44

下面的集合等式演算中 (1), (2), (3) 使用的集合基本等式分别是

$$\begin{aligned}
& \overline{(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap C)} && // \text{德摩尔根律} \\
& \overline{A \cap B \cap \bar{A} \cap C} && // (1) \\
& (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{\bar{A}} \cup \bar{C}) && // \text{双重否定律} \\
& (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cup \bar{C}) && // \text{分配律} \\
& ((\bar{A} \cup \bar{B}) \cap A) \cup ((\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \bar{C}) && // \text{分配律} \\
& (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{B} \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap \bar{C}) && // \text{排中律, 同一律} \\
& (\bar{B} \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap \bar{C}) && // (2), \text{同一律} \\
& (\bar{B} \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) \cup ((\bar{B} \cap \bar{C}) \cap (A \cup \bar{A})) && // \text{分配律} \\
& (\bar{B} \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) \cup ((\bar{B} \cap \bar{C} \cap A) \cup (\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{A})) && // \text{交换律, 结合律} \\
& ((\bar{B} \cap A) \cup (\bar{B} \cap A \cap \bar{C})) \cup ((\bar{A} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C} \cap \bar{B})) && // (3) \\
& (\bar{B} \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) && // \text{同一律}
\end{aligned}$$

答案: (1) 德摩尔根律; 德摩根律 (2) 排中律 (3) 吸收律

#### 45. 测验题 5.45

设 A, B 是任意集合, 下面哪一组的两个集合表达式给出的集合是相等的?

- A. 集合  $(A - B) \cap A$  和集合 A
- B. 集合  $(A - B) \cup A$  和集合 A

C. 集合  $\overline{A - B} \cap A$  和集合  $A$

D. 集合  $\overline{A - B} \cup A$  和集合  $A$

答案: B

#### 46. 测验题 5.46

设  $A, B$  是任意集合, 且已知对称差  $\oplus$  定义为  $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$ . 下面哪一组的两个集合表达式给出的集合是相等的?

A. 集合  $(A - B) \cap A$  和集合  $A \cap B$

B. 集合  $(A - B) \cup A$  和集合  $A \cup B$

C. 集合  $(A \oplus B) \cap A$  和集合  $A \cap B$

D. 集合  $(A \oplus B) \cup A$  和集合  $A \cup B$

答案: D

#### 47. 测验题 5.47

设  $A, B$  是任意集合, 且已知对称差  $\oplus$  定义为  $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$ . 下面哪一组的两个集合表达式给出的集合是相等的?

A. 集合  $\overline{A - B}$  和集合  $\bar{A} - B$

B. 集合  $\overline{A - B}$  和集合  $\bar{A} - \bar{B}$

C. 集合  $\overline{A \oplus B}$  和集合  $\bar{A} \oplus B$

D. 集合  $\overline{A \oplus B}$  和集合  $\bar{A} \oplus \bar{B}$

答案: C

#### 48. 测验题 5.48

设  $A, B, C$  是任意集合, 下面哪一组的两个集合表达式给出的集合是不相等的?

A. 集合  $(A - B) - C$  和集合  $A - (B - C)$

B. 集合  $(A - B) - C$  和集合  $(A - C) - B$

C. 集合  $(A - B) - C$  和集合  $A - (B \cup C)$

D. 集合  $(A - B) - C$  和集合  $(A - C) - (B - C)$

答案: A

#### 49. 测验题 5.49

设  $A, B, C$  是任意集合, 下面哪一组的两个集合表达式给出的集合是相等的?

A. 集合  $(A - B) \cup (A - C)$  和集合  $A - (B \cup C)$

B. 集合  $(A - B) \cap (A - C)$  和集合  $A - (B \cup C)$

C. 集合  $(A - C) \cap (B - C)$  和集合  $(A \cup B) - C$

D. 集合  $(A - C) \cup (B - C)$  和集合  $(A \cap B) - C$

答案: B

### 50. 测验题 5.50

设  $A, B, C$  是任意集合,  $(A - B) \cup (A - C) = A$  的充分必要条件是

A.  $A \cap B = \emptyset$  且  $A \cap C = \emptyset$

B.  $A \cap B \cap C = \emptyset$

C.  $A \cap (B \cup C) = \emptyset$

D.  $B \cup C \subseteq \bar{A}$

答案: B

### 51. 测验题 5.51

设  $A, B, C$  是任意集合,  $(A - B) \cup (A - C) = \emptyset$  的充分必要条件是?

A.  $A = B = C$

B.  $A = B \cap C$

C.  $A \subseteq B \cap C$

D.  $A \subseteq B \cup C$

答案: C

### 52. 测验题 5.52

设  $A, B, C$  是任意集合,  $(A - B) \cap (A - C) = A$  的充分必要条件是?

A.  $A \cap B = \emptyset$  且  $A \cap C = \emptyset$

B.  $A \cap B \cap C = \emptyset$

C.  $A \cup B \cup C = \emptyset$

D.  $\bar{A} \subseteq B \cup C$

答案: A

### 53. 测验题 5.53

设  $A, B, C$  是任意集合,  $(A - B) \cap (A - C) = \emptyset$  的充分必要条件是

A.  $A = B = C$

B.  $A = B \cup C$

C.  $A \subseteq B \cap C$

D.  $A \subseteq B \cup C$



答案: D

#### 54. 测验题 5.54

设  $A, B$  是任意集合,  $(A - B) \cup (B - A) = A$  的充分必要条件是?

A.  $A \cup B = \emptyset$

B.  $A = \emptyset$

C.  $A \cap B = \emptyset$

D.  $B = \emptyset$

答案: D

#### 55. 测验题 5.55

设  $A, B$  是任意集合,  $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$  的充分必要条件是?

A.  $A \cup B = \emptyset$

B.  $A = \emptyset$

C.  $A \cap B = \emptyset$

D.  $B = \emptyset$

答案: C

#### 56. 测验题 5.56

设  $A, B, C$  是任意集合, 下面哪个命题是正确的?

A. 集合  $A \subseteq B \cup C$ , 当且仅当  $A \subseteq B$  或  $A \subseteq C$

B. 集合  $A \subseteq B \cap C$ , 当且仅当  $A \subseteq B$  且  $A \subseteq C$

C. 集合  $B \cap C \subseteq A$ , 当且仅当  $B \subseteq A$  且  $C \subseteq A$

D. 集合  $B \cup C \subseteq A$ , 当且仅当  $B \subseteq A$  或  $C \subseteq A$

答案: B

#### 57. 测验题 5.57

如果你查找的不是这道题, 请查看测验题 6.57

设  $A, B, C, D$  是任意集合, 下面哪些命题不是正确的?

A. 集合  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq D$ , 蕴涵  $A \cup B \subseteq C \cup D$

B. 集合  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq D$ , 蕴涵  $A \cap B \subseteq C \cap D$

C. 集合  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq D$ , 蕴涵  $A - B \subseteq C - D$

D. 集合  $A \subset C$  且  $B \subset D$ , 蕴涵  $A \cup B \subset C \cup D$

答案: CD

解析: D 选项反例:  $A = \{1\}, B = \{2\}, C = D = \{1, 2\}$ .

### 58. 测验题 5.58

设  $A, B, C, D$  是任意集合, 下面哪些命题不是正确的?

- A. 集合  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq D$ , 蕴涵  $A \cup B \subseteq C \cup D$
- B. 集合  $A \subset C$  且  $B \subset D$ , 蕴涵  $A \cap B \subset C \cap D$
- C. 集合  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq D$ , 蕴涵  $A - B \subseteq C - D$
- D. 集合  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq D$ , 蕴涵  $A - D \subseteq C - B$

答案: BC

### 59. 测验题 5.59

设  $A, B, C$  是任意集合且  $A - B \subseteq C$ , 证明  $A - C \subseteq B$ . 下面的证明是否正确?

【证明】对任意元素  $x \in A - B$ , 则  $x \in A$  且  $x \notin B$ , 而  $A - B \subseteq C$ , 因此  $x \in C$ , 因此  $x \notin A - C$ , 这表明当  $x \notin B$  时有  $x \notin A - C$ , 因此  $A - C \subseteq B$ .

答案: 错

### 60. 测验题 5.60

设  $A, B$  是任意集合且  $A \subseteq B$ , 证明  $\wp(A) \subseteq \wp(B)$ , 下面的证明是否正确?

【证明】对任意  $x \in A$ , 因此  $\{x\} \in \wp(A)$ , 而由  $A \subseteq B$  有  $x \in B$ , 从而也有  $\{x\} \in \wp(B)$ , 因此  $\wp(A) \subseteq \wp(B)$ 。

答案: 错

### 61. 测验题 5.61

设  $A, B, C$  是任意集合,  $A - B \subseteq C$  且  $A \not\subseteq C$ , 证明  $A \cap B \neq \emptyset$ , 下面的证明是否正确?

【证明】若  $A \cap B = \emptyset$ , 则  $A - B = A$ , 从而由  $A - B \subseteq C$  得  $A \subseteq C$ , 这与  $A \not\subseteq C$  矛盾, 因此必有  $A \cap B \neq \emptyset$ 。

答案: 对

## 六、关系

### 1. 测验题 6.1

设  $A, B, C$  是任意集合, 对于笛卡尔积, 下面哪个等式是正确的?

A.  $A \times B = B \times A$

B.  $A \times \emptyset = \emptyset \times A$

C.  $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

D.  $A \times (A \times A) = (A \times A) \times A$

答案: B

### 2. 测验题 6.2

设  $A, B, C, D$  是任意集合, 对于笛卡尔积, 下面哪个等式是正确的?

A.  $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

B.  $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

C.  $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$

D.  $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

答案: D

解析: 正确选项应为 BD, czg 说这道题因答案设置错误不应该再出现在学习通中。

### 3. 测验题 6.3

设集合  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{0, 1, 4, 9\}$ , 定义关系  $R = \{\langle a, b \rangle \in A \times B \mid \exists c \in \mathbb{N}(b = ac)\}$ 。对于关系  $R$ , 下面哪些命题是正确的?

A. 定义集合  $S = \{x \in A \mid \forall y \in B(\langle x, y \rangle \in R)\}$ , 则  $S = \{1\}$

B. 关系  $R$  的元素总共有 9 个有序对。

C. 下面的图是  $R$  的关系图。

D. 下面的矩阵  $R$  的关系矩阵, 其中每行依次对应  $A$  的元素 0, 1, 2, 3, 而每列依次对应  $B$  的元素 0, 1, 4, 9。

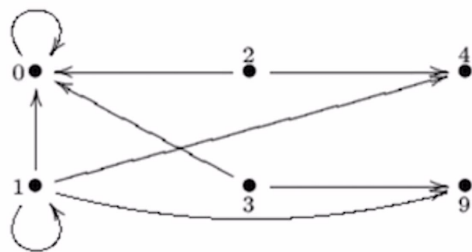


图 21: 测验题 6.3 C 选项用图

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

图 22: 测验题 6.3 D 选项用图

答案: ABD

#### 4. 测验题 6.4

设集合  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 9\}$ . 定义关系  $R = \{(a, b) \in A \times A \mid \exists c \in A (b = ac)\}$  对于关系  $R$ . 下面哪些命题是正确的?

- A. 定义集合  $S = \{x \in A \mid \forall y \in B (\langle y, x \rangle \in R)\}$ , 则  $S = \{0\}$
- B. 关系  $R$  的元素总共有 9 个有序对。
- C. 右边的图是  $R$  的关系图。
- D. 下面的矩阵  $R$  的关系矩阵。其中每行、每列依次对应  $A$  的元素 0, 1, 2, 3, 4, 9.

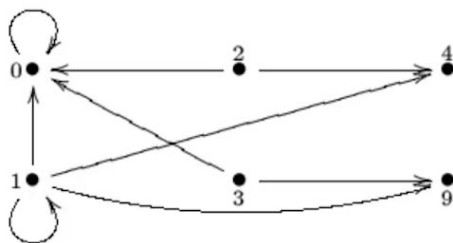


图 23: 测验题 6.4 C 选项

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

图 24: 测验题 6.4 D 选项

答案: AD

#### 5. 测验题 6.5

设集合  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{0, 1, 4, 9\}$ , 定义关系  $R = \{(a, b) \in A \times B \mid a \equiv b \pmod{2}\}$ 。对于关系  $R$ , 下面哪些命题是正确的?

- A. 定义集合  $S = \{x \in A \mid \langle x, 4 \rangle \in R\}$ , 则  $S = \{0, 2, 4\}$
- B. 关系  $R$  的元素总共有 8 个有序对。
- C. 右边的图是  $R$  的关系图。

D. 下面的矩阵  $R$  的关系矩阵, 其中每行依次对应  $A$  的元素  $0, 1, 2, 3$ , 而每列依次对应  $B$  的元素  $0, 1, 4, 9$ 。

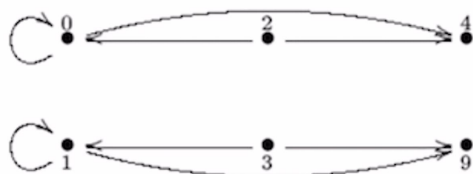


图 25: 测验题 6.5 C 选项用图

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

图 26: 测验题 6.5 D 选项用图

答案: BD

## 6. 测验题 6.6

设集合  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 9\}$ , 定义关系  $R = \{\langle a, b \rangle \in A \times A \mid a \equiv b(\text{mod} 2)\}$ 。对于关系  $R$ , 下面哪些是正确的?

- A. 定义集合  $S = \{x \in A \mid \langle x, 4 \rangle \in R\}$ , 则  $S = \{0, 2, 4\}$
- B. 关系  $R$  的元素总共有 8 个有序对。
- C. 右边的图是  $R$  的关系图。
- D. 下面的矩阵  $R$  的关系矩阵, 其中每行、每列依次对应  $A$  的元素  $0, 1, 2, 3, 4, 9$ 。

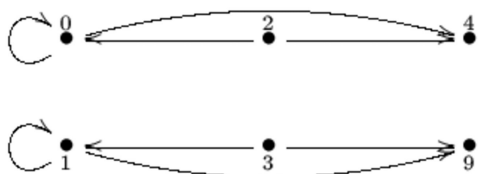


图 27: 测验题 6.6 C 选项用图

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

图 28: 测验题 6.6 D 选项用图

答案: AD

## 7. 测验题 6.7

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 关系  $R = \{\langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle\}$ ,  $S = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 5, 5 \rangle\}$ . 下面哪些关系运算的结果是正确的?

- A.  $R^{-1} = \{\langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 5, 3 \rangle\}$
- B.  $S \circ R = \{\langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 5 \rangle\}$
- C.  $R \circ S = \{\langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 3, 5 \rangle\}$

$$D. R^{-1} \circ S^{-1} = \{\langle 2, 3 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 5, 3 \rangle\}$$

答案: D

### 8. 测验题 6.8

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 关系  $R = \{\langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle\}$ ,  $S = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 4, 1 \rangle\}$ . 下面哪些关系运算的结果是正确的?

$$A. S^{-1} = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 5, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 1, 4 \rangle\}$$

$$B. S \circ R = \{\langle 2, 3 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$$

$$C. R \circ S = \{\langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$$

$$D. R^{-1} \circ S^{-1} = \{\langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$$

答案: AC

### 9. 测验题 6.9

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 关系  $R = \{\langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 3 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$ ,  $S = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 5, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$ . 下面哪些关系运算的结果是正确的?

$$A. R^{-1} = \{\langle 3, 5 \rangle, \langle 5, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$$

$$B. S \circ R = \{\langle 5, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

$$C. R \circ S = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 5, 5 \rangle\}$$

$$D. S^{-1} \circ R^{-1} = \{\langle 4, 5 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$$

答案: BC

### 10. 测验题 6.10

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 关系  $R = \{\langle 5, 4 \rangle, \langle 5, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$ ,  $S = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$ . 下面哪些关系运算的结果是正确的?

$$A. S^{-1} = \{\langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$$

$$B. R \circ S = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 5, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$$

$$C. S \circ R = \{\langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$$

$$D. S^{-1} \circ R^{-1} = \{\langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$$

答案: BD

### 11. 测验题 6.11

设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 关系  $R = \{\langle 4, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 5, 4 \rangle\}$ ,  $S = \{\langle 1, 4 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 5, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ . 下面哪些使用关系矩阵表示的关系运算结果是正确的?

- A. 关系  $R^{-1}$  的关系矩阵是  $M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- B. 关系  $R \circ S$  的关系矩阵是  $M_{R \circ S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- C. 关系  $R^{-1} \circ S^{-1}$  的关系矩阵是  $M_{R^{-1} \circ S^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- D. 关系  $S^{-1} \circ R^{-1}$  的关系矩阵是  $M_{S^{-1} \circ R^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

答案: CD

## 12. 测验题 6.12

设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . 关系  $R = \{(4, 5), \langle 3, 3 \rangle, (2, 4), (2, 5), (5, 4)\}$ ,  $S = \{(1, 4), (5, 2), \langle 5, 4 \rangle, (2, 5), (2, 4)\}$ . 下面哪些使用关系矩阵表示的关系运算结果是正确的?

- A. 关系  $S^{-1}$  的关系矩阵是  $M_{S^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- B. 关系  $R \circ S$  的关系矩阵是  $M_{R \circ S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{l}
 \text{C. 关系 } R^{-1} \circ S^{-1} \text{ 的关系矩阵是 } M_{R^{-1} \circ S^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{D. 关系 } S^{-1} \circ R^{-1} \text{ 的关系矩阵是 } M_{S^{-1} \circ R^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

答案: ABC

### 13. 测验题 6.13

定义整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R = \{\langle x, y \rangle \mid x + y = 0\}$  和关系  $S = \{\langle x, y \rangle \mid xy = 0\}$ . 下面哪些说法是正确的?

- A.  $S \circ R = S$
- B.  $R \circ S = S$
- C.  $R \circ R = \Delta_{\mathbb{Z}}$
- D.  $S \circ S = \{\langle 0, 0 \rangle\}$

答案: ABC

### 14. 测验题 6.14

定义整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R = \{\langle x, y \rangle \mid x - y = 0\}$  和关系  $S = \{\langle x, y \rangle \mid xy = 0\}$ , 下面哪些说法是正确的?

- A.  $S \circ R = R$
- B.  $R \circ S = S$
- C.  $R \circ R = \Delta_{\mathbb{Z}}$
- D.  $S \circ S = \{\langle 0, 0 \rangle\}$

答案: BC

### 15. 测验题 6.15

设  $R$  和  $S$  都是集合  $A$  上的关系, 下面哪些说法是正确的?

- A.  $(R \circ S)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$
- B. 若  $R \subseteq S$ , 则  $S^{-1} \subseteq R^{-1}$



$$C. (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$D. (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

答案: CD

解析: 关系逆运算保持子集关系且有 C 和 D 选项的性质。

## 16. 测验题 6.16

设  $R$  和  $S$  都是集合  $A$  上的关系, 下面哪些说法是正确的?

$$A. S \circ R = R \circ S$$

$$B. R \circ (R \circ R) = (R \circ R) \circ R$$

$$C. R \circ (R \cup S) = (R \circ R) \cup (R \circ S)$$

$$D. R \circ (R \cap S) = (R \circ R) \cap (R \circ S)$$

答案: BC

解析: 关系复合满足结合律, 保持子集关系, 对集合并有分配律, 对集合交只满足包含关系  
 $T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$

## 17. 测验题 6.17

设  $R, S, T$  都是集合  $A$  上的关系, 下面哪些说法是正确的?

$$A. T \circ (R \cup S) \subseteq (T \circ R) \cup (T \circ S)$$

$$B. (T \circ R) \cup (T \circ S) \subseteq T \circ (R \cup S)$$

$$C. T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$$

$$D. (T \circ R) \cap (T \circ S) \subseteq T \circ (R \cap S)$$

答案: ABC

## 18. 测验题 6.18

设  $R, S, T$  都是集合  $A$  上的关系, 下面对于  $T \circ (R \cup S) \subseteq (T \circ R) \cup (T \circ S)$  的证明是否正确?

【证明】由于关系复合保持子集关系, 因此  $T \circ (R \cup S) \subseteq T \circ R$  且  $T \circ (R \cup S) \subseteq T \circ S$ , 因此由集合并运算与子集关系的联系有  $T \circ (R \cup S) \subseteq (T \circ R) \cup (T \circ S)$ 。

答案: 错

## 19. 测验题 6.19

设  $R, S, T$  都是集合  $A$  上的关系, 下面对于  $T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$  的证明是否正确?

【证明】由于关系复合保持子集关系, 因此  $T \circ (R \cap S) \subseteq T \circ R$  且  $T \circ (R \cap S) \subseteq T \circ S$ , 因此由集合交运算与子集关系的联系有  $T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$ 。

答案: 对

## 20. 测验题 6.20

设  $R, S, T$  都是集合  $A$  上的关系, 下面对于  $T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$  的证明是否正确?

【证明】由于关系复合保持子集关系, 因此  $T \circ R \subseteq T \circ (R \cap S)$  且  $T \circ S \subseteq T \circ (R \cap S)$ , 因此由集合交运算与子集关系的联系有  $(T \circ R) \cap (T \circ S) \subseteq T \circ (R \cap S)$ 。

答案: 错

## 21. 测验题 6.21

下面哪些说法是正确的?

- A. 空集上的空关系既是自反关系也是反自反关系。
- B. 非空集  $A$  上的空关系既是自反关系也是反自反关系。
- C. 非空集  $A$  上的一个关系如果不是自反关系, 那么就是反自反关系。
- D. 非空集  $A$  上的一个关系如果是自反关系, 那么就不是反自反关系。

答案: AD

解析: 自反关系和反自反关系、对称关系和反对称关系满足以下的维恩图:

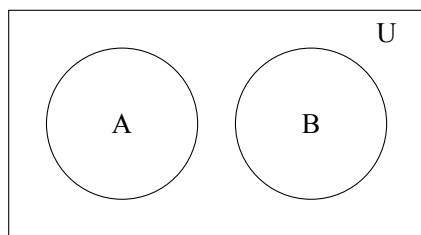


图 29: 自反关系与反自反关系

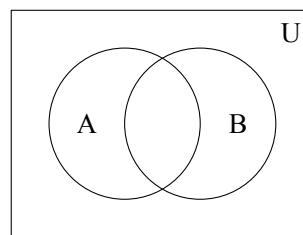


图 30: 对称关系与反对称关系

## 22. 测验题 6.22

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 下面哪些  $A$  上的关系是自反的?

- A. 关系  $R_1 = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$
- B. 关系  $R_2 = \{\langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$
- C. 关系  $R_3 = \{\langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle\}$
- D. 关系  $R_4 = \{\langle 4, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$

答案: BD

## 23. 测验题 6.23

下面哪个选项定义的关系是自反关系?

- A. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_1 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z} (z \neq 0 \wedge x = y + z)\}$
- B. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z} (z \neq 1 \wedge x = y \cdot z)\}$
- C. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_3 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z} (z \geq 2 \wedge x \bmod z = y \bmod z)\}$

D. 非空集  $U$  的幂集  $\wp(U)$  上的关系  $R_4 = \{(x, y) \mid \exists z \in \wp(U)(z \neq U \wedge x = y \cap z)\}$

答案: C

## 24. 测验题 6.24

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 下面哪些  $A$  上的关系是反自反的?

A. 关系  $R_1 = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$

B. 关系  $R_2 = \{\langle 4, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

C. 关系  $R_3 = \{\langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle\}$

D. 关系  $R_4 = \{\langle 4, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$

答案: AC

## 25. 测验题 6.25

下面哪个选项定义的关系是反自反关系?

A. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_1 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}(z \neq 0 \wedge x = y + z)\}$

B. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}(z \neq 1 \wedge x = y \cdot z)\}$

C. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_3 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}(z \geq 2 \wedge x \bmod z = y \bmod z)\}$

D. 非空集  $U$  的幂集  $\wp(U)$  上的关系  $R_4 = \{(x, y) \mid \exists z \in \wp(U)(z \neq U \wedge x = y \cap z)\}$

答案: A

## 26. 测验题 6.26

下面哪些说法是正确的?

A. 空集上的空关系既是对称关系也是反对称关系。

B. 非空集  $A$  上的空关系既是对称关系也是反对称关系。

C. 非空集  $A$  上的一个关系如果不是对称关系, 那么就是反对称关系。

D. 非空集  $A$  上的一个关系如果是对称关系, 那么就不是反对称关系。

答案: AB

## 27. 测验题 6.27

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 下面哪些  $A$  上的关系是对称的?

A. 关系  $R_1 = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$

B. 关系  $R_2 = \{\langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

C. 关系  $R_3 = \{\langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$

D. 关系  $R_4 = \{\langle 4, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$

答案: BC

## 28. 测验题 6.28

下面哪些选项定义的关系是对称关系?

- A. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_1 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}(z \neq 0 \wedge x = y + z)\}$
- B. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}(z \neq 1 \wedge x = y \cdot z)\}$
- C. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_3 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}(z \geq 2 \wedge x \bmod z = y \bmod z)\}$
- D. 非空集  $U$  的幂集  $\wp(U)$  上的关系  $R_4 = \{(x, y) \mid \exists z \in \wp(U)(z \neq U \wedge x = y \cap z)\}$

答案: AC

## 29. 测验题 6.29

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 下面哪些  $A$  上的关系是反对称的?

- A. 关系  $R_1 = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$
- B. 关系  $R_2 = \{\langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$
- C. 关系  $R_3 = \{\langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$
- D. 关系  $R_4 = \{\langle 4, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$

答案: BD

## 30. 测验题 6.30

下面哪些选项定义的关系是反对称关系?

- A. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_1 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}(z \neq 0 \wedge x = y + z)\}$
- B. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}(z \neq 1 \wedge x = y \cdot z)\}$
- C. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_3 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}(z \geq 2 \wedge x \bmod z = y \bmod z)\}$
- D. 非空集  $U$  的幂集  $\wp(U)$  上的关系  $R_4 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \wp(U)(z \neq U \wedge x = y \cap z)\}$

答案: D

## 31. 测验题 6.31

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 下面哪些  $A$  上的关系是传递的?

- A. 关系  $R_1 = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$
- B. 关系  $R_2 = \{\langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$
- C. 关系  $R_3 = \{\langle 3, 4 \rangle\}$
- D. 关系  $R_4 = \{\langle 4, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$

答案: ABC

**32. 测验题 6.32**

下面哪些选项定义的关系是传递关系?

- A. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_1 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}(z \neq 0 \wedge x = y + z)\}$
- B. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}(z \neq 1 \wedge x = y \cdot z)\}$
- C. 整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R_3 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}(z \geq 2 \wedge x \bmod z = y \bmod z)\}$
- D. 非空集  $U$  的幂集  $\wp(U)$  上的关系  $R_4 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \wp(U)(z \neq U \wedge x = y \cap z)\}$

答案: D

**33. 测验题 6.33**

定义实数集  $\mathbb{R}$  上的关系  $R = \{\langle x, y \rangle \mid |x - y| < 8\}$ , 关系  $R$  具有哪些性质?

- A. 自反性
- B. 反自反性
- C. 对称性
- D. 反对称性
- E. 传递性

答案: AC

**34. 测验题 6.34**

定义整数集  $\mathbb{Z}$  上的关系  $R = \{\langle x, y \rangle \mid 2 \mid x + y\}$ , 关系  $R$  具有哪些性质?

- A. 自反性
- B. 反自反性
- C. 对称性
- D. 反对称性
- E. 传递性

答案: ACE

**35. 测验题 6.35**

定义非空集  $U$  的幂集  $\wp(U)$  上的关系  $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \cap y \neq \emptyset\}$ , 关系  $R$  具有哪些性质?

- A. 自反性
- B. 反自反性
- C. 对称性
- D. 反对称性
- E. 传递性

答案: C

**36. 测验题 6.36**

定义非空集  $U$  的幂集  $\wp(U)$  上的关系  $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \cap y = \emptyset\}$ , 关系  $R$  具有哪些性质?

- A. 自反性
- B. 反自反性
- C. 对称性
- D. 反对称性
- E. 传递性

答案: C

**37. 测验题 6.37**

定义非空集  $U$  的幂集  $\wp(U)$  上的关系  $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \cap y = \emptyset \wedge x \cup y = U\}$ ,  $R$  具有哪些性质?

- A. 自反性
- B. 反自反性
- C. 对称性
- D. 反对称性
- E. 传递性

答案: BC

**38. 测验题 6.38**

设  $V$  是非空的命题变量集,  $F$  是以  $V$  的命题变量和逻辑运算符  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$  归纳构造的所有命题逻辑公式的集合, 在  $F$  上定义关系  $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \rightarrow y \text{ 是永真式} \}$ , 则  $R$  具有哪些性质?

- A. 自反性
- B. 反自反性
- C. 对称性
- D. 反对称性
- E. 传递性

答案: AE

**39. 测验题 6.39**

设  $V$  是非空的命题变量集,  $F$  是以  $V$  的命题变量和逻辑运算符  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$  归纳构造的所有命题逻辑公式的集合, 在  $F$  上定义关系  $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \leftrightarrow y \text{ 是永真式} \}$ , 则  $R$  具有哪些性质?

- A. 自反性
- B. 反自反性
- C. 对称性

D. 反对称性

E. 传递性

答案: ACE

#### 40. 测验题 6.40

设  $R$  是非空集  $A$  上的关系, 且  $R \neq \emptyset$ , 下面哪个说法是不正确的?

A. 如果  $R \cup R^{-1} = R$ , 则  $R$  是对称的。

B. 如果  $R \cap R^{-1} = R$ , 则  $R$  是对称的。

C. 如果  $R \cup R^{-1} = A \times A$ , 则  $R$  是对称的。

D. 如果  $R \cap R^{-1} = A \times A$ , 则  $R$  是对称的。

答案: C

#### 41. 测验题 6.41

设  $R$  是非空集  $A$  上的关系, 且  $R \neq \emptyset$ , 下面哪个说法是不正确的?

A. 如果  $R \subseteq \Delta_A$ , 则  $R$  是对称的。

B. 如果  $R \subseteq \Delta_A$ , 则  $R$  是反对称的。

C. 如果  $R \subseteq \Delta_A$ , 则  $R$  是自反的。

D. 如果  $R \subseteq \Delta_A$ , 则  $R$  是传递的。

答案: C

#### 42. 测验题 6.42

设  $A$  是非空集, 对于全关系  $A \times A$ , 下面哪个说法是不正确的?

A. 全关系  $A \times A$  是自反的。

B. 全关系  $A \times A$  是对称的。

C. 全关系  $A \times A$  是反对称的。

D. 全关系  $A \times A$  是传递的。

答案: C

#### 43. 测验题 6.43

设  $R$  是非空集  $A$  上的关系, 且  $R \neq \emptyset$ , 下面哪个说法是不正确的?

A. 如果  $R \circ R = R$ , 则  $R$  是传递的。

B. 如果  $R$  是对称的, 且  $R \circ R \subseteq \Delta_A$ , 则  $R$  是传递的。

C. 如果  $R$  是自反的, 且  $R \circ R \subseteq \Delta_A$ , 则  $R$  是传递的。

D. 如果  $R$  是自反的且传递的, 则  $R \circ R = R$ 。

答案: B

#### 44. 测验题 6.44

设  $R, S$  都是非空集  $A$  上的关系, 下面哪个说法是不正确的?

- A. 如果  $R \cap S$  是自反的, 则  $R$  和  $S$  都是自反的。
- B. 如果  $R$  和  $S$  都是自反的, 则  $R \cap S$  也是自反的。
- C. 如果  $R$  和  $S$  都是传递的, 则  $R \cap S$  也是传递的。
- D. 如果  $R \cap S$  是传递的, 则  $R$  和  $S$  都是传递的。

答案: D

#### 45. 测验题 6.45

设  $R, S$  都是非空集  $A$  上的关系, 下面哪个说法是不正确的?

- A. 如果  $R \cup S$  是反自反的, 则  $R$  和  $S$  都是反自反的。
- B. 如果  $R$  和  $S$  都是反自反的, 则  $R \cup S$  也是反自反的。
- C. 如果  $R$  和  $S$  都是反对称的, 则  $R \cup S$  也是反对称的。
- D. 如果  $R \cup S$  是反对称的, 则  $R$  和  $S$  都是反对称的。

答案: C

#### 46. 测验题 6.46

设  $R, S$  都是非空集  $A$  上的关系, 下面哪个说法是正确的?

- A. 如果  $R$  和  $S$  都是传递的, 则  $R \cap S$  是传递的。
- B. 如果  $R$  和  $S$  都是传递的, 则  $R \cup S$  是传递的。
- C. 如果  $R$  和  $S$  都是传递的, 则  $R - S$  是传递的。
- D. 如果  $R$  和  $S$  都是传递的, 则  $R \circ S$  是传递的。

答案: A

#### 47. 测验题 6.47

设  $R, S$  都是非空集  $A$  上的关系, 下面哪个说法是正确的?

- A. 如果  $R$  和  $S$  都是自反的, 则  $R \circ S$  是自反的。
- B. 如果  $R$  和  $S$  都是对称的, 则  $R \circ S$  是对称的。
- C. 如果  $R$  和  $S$  都是反对称的, 则  $R \circ S$  是反对称的。
- D. 如果  $R$  和  $S$  都是传递的, 则  $R \circ S$  是传递的。

答案: A



**48. 测验题 6.48**

设  $R$  是非空集  $A$  上的关系, 下面哪些说法是正确的?

A. 如果  $R \subseteq \Delta_A$ , 则  $t(R) = \Delta_A$ 。

B. 如果  $R \subseteq \Delta_A$ , 则  $r(R) = \Delta_A$ 。

C. 如果  $R \subseteq \Delta_A$ , 则  $t(R) = R$ 。

D. 如果  $R \subseteq \Delta_A$ , 则  $s(R) = \Delta_A$ 。

答案: BC

**49. 测验题 6.49**

设  $R$  是非空集  $A$  上的关系, 下面哪些说法是正确的?

A. 如果  $r(R) = \Delta_A$ , 则  $R = \Delta_A$ 。

B. 如果  $t(R) \subseteq \Delta_A$ , 则  $R \subseteq \Delta_A$ 。

C. 如果  $r(R) \subseteq \Delta_A$ , 则  $R \subseteq \Delta_A$ 。

D. 如果  $s(R) \subseteq \Delta_A$ , 则  $R \subseteq \Delta_A$ 。

答案: BCD

**50. 测验题 6.50**

设  $R$  是非空集  $A$  上的关系, 下面哪些说法是正确的?

A.  $(s(R))^{-1} = s(R)$

B.  $R \circ R \subseteq t(R)$

C.  $\Delta_A \subseteq r(R)$

D.  $t(R) \circ t(R) = t(R)$

答案: ABC

解析: D 选项反例:  $R = \{\langle 1, 2 \rangle\}$ ,  $t(R) = \{\langle 1, 2 \rangle\}$ ,  $t(R) \circ t(R) = \emptyset \neq t(R)$

**51. 测验题 6.51**

设  $R$  是非空集  $A$  上的关系, 下面哪些说法是正确的?

A. 对任意传递关系  $S$ , 若  $t(R) \subseteq S$ , 则  $R \subseteq S$

B. 对任意关系  $S$ , 若  $R \subseteq S$ , 则  $r(R) \subseteq S$

C. 对任意关系  $S$ , 若  $r(R) \subseteq S$ , 则  $R \subseteq S$

D. 对任意传递关系  $S$ , 若  $R \subseteq S$ , 则  $t(R) \subseteq S$

答案: ACD

**52. 测验题 6.52**

设  $R$  是非空集  $A$  上的关系, 下面哪些说法是正确的?

A.  $s(R^{-1}) = (s(R))^{-1}$

B.  $s(R^{-1}) = s(R)$

C.  $r(R^{-1}) = (r(R))^{-1}$

D.  $t(R^{-1}) = (t(R))^{-1}$

答案: ABCD

**53. 测验题 6.53**

设  $R$  和  $S$  都是非空集  $A$  上的关系, 下面哪些说法是正确的?

A.  $r(R \cup S) = r(R) \cup r(S)$

B.  $s(R \cup S) = s(R) \cup s(S)$

C.  $s(R \cap S) = s(R) \cap s(S)$

D.  $t(R \cup S) = t(R) \cup t(S)$

答案: AB

**54. 测验题 6.54**

设  $R$  是非空集  $A$  上的关系, 下面哪些说法是正确的?

A.  $r(R) = \Delta_A \cap R$

B.  $r(R) = \Delta_A \cup R$

C.  $s(R) = R \cap R^{-1}$

D.  $s(R) = R \cup R^{-1}$

答案: BD

**55. 测验题 6.55**

设  $A$  是非空集, 下面哪些说法是正确的?

A.  $s(A \times A) = A \times A$

B.  $s(\emptyset) = \emptyset$

C.  $r(A \times A) = \Delta_A$

D.  $r(\emptyset) = \emptyset$

答案: AB

**56. 测验题 6.56**

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  上的关系  $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ , 下面哪些计算是正确的?

A.  $s(R) = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$

B.  $r(R) = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$

C.  $s(R) = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$

D.  $r(R) = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$

答案: BC

**57. 测验题 6.57 (题目标号错误?) 原题标注为 5.57**

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  上的关系  $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ . 下面哪些计算是正确的?

A.  $r(R) = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$

B.  $r(R) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$

C.  $s(R) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$

D.  $s(R) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$

答案: C

**58. 测验题 6.58**

对任意自然数  $n$ , 非空集合  $A$  上关系  $R$  的  $n$  次幂  $R^n$  定义为,  $R^0 = \Delta_A, R^1 = R$ , 对  $n \geq 1, R^{n+1} = R^n \circ R$ , 下面哪些等式是成立的?

A. 对任意自然数  $n, m, (R^n)^m = R^{nm}$

B. 对任意自然数  $n, (R^{-1})^n = (R^n)^{-1}$

C. 对任意自然数  $n, m, R^n \circ R^m = R^{n+m}$

D. 对任意自然数  $n, m$ , 假定  $n \geq m, R^{n-m} = R^n \circ (R^{-1})^m$

答案: ABC

**59. 测验题 6.59**

对任意自然数  $n$ , 非空集合  $A$  上关系  $R$  的  $n$  次幂  $R^n$  定义为,  $R^0 = \Delta_A, R^1 = R$ , 对  $n \geq 1, R^{n+1} = R^n \circ R$ . 设  $R$  和  $S$  都是非空集合  $A$  上的关系. 下面哪些等式是成立的?

A. 对任意自然数  $n, (R \cap S)^n = R^n \cap S^n$

B. 对任意自然数  $n, (R \circ S)^n = R^n \circ S^n$

C. 对任意自然数  $n, (R \cup S)^n = R^n \cup S^n$

D. 对任意自然数  $n, (R^{-1})^n = (R^n)^{-1}$

答案: D

## 60. 测验题 6.60

对任意自然数  $n$ , 非空集合  $A$  上关系  $R$  的  $n$  次幂  $R^n$  定义为,  $R^0 = \Delta_A, R^1 = R$ , 对  $n \geq 1, R^{n+1} = R^n \circ R$ 。设  $R$  是非空集  $A$  上的关系, 且  $|A| = n$ , 即  $A$  有  $n$  个元素, 下面关于  $R$  的传递闭包  $t(R)$  的计算, 哪些是正确的?

A.  $t(R) = \bigcup_{k=1}^n R^k$

B.  $t(R) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$

C.  $t(R) = \bigcup_{k=0}^n R^k$

D.  $t(R) = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$

答案: AB

## 61. 测验题 6.61

对于非空集合  $A$  上关系  $R$ , 记  $R^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$ , 下面哪些说法是正确的?

A. 对任意  $x, y, z \in A$ , 若  $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R^*$ , 则存在正整数  $i$ , 使得  $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R^i$ 。

B. 对集合  $A$  上任意关系  $S$ , 若  $R \subseteq S$ , 则对任意正整数  $n$  有  $R^n \subseteq S$

C. 对集合  $A$  上任意传递关系  $S, R \subseteq S$  当且仅当  $R^* \subseteq S$

D.  $R^* \circ R^* \subseteq R^*$

答案: CD

## 62. 测验题 6.62

设  $A$  是非空集合, 下面哪些说法是正确的?

A.  $t(A \times A) = A \times A$

B. 对  $A$  上任意关系  $R, t(R \circ R) \subseteq t(R)$

C.  $t(\emptyset) = \emptyset$

D.  $t(\Delta_A) = \Delta_A$

答案: ABCD

## 63. 测验题 6.63

设  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 下面对传递闭包的计算哪些是正确的?

A. 对  $A$  上关系  $R_4 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}, t(R_4) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$

B. 对  $A$  上关系  $R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle\}, t(R_1) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$

C. 对  $A$  上关系  $R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle\}, t(R_2) = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$

D. 对  $A$  上关系  $R_3 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}, t(R_3) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$

答案: A

## 64. 测验题 6.64

设  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 下面对传递闭包的计算哪些是正确的?

- A. 对  $A$  上关系  $R_3 = \{(1, 3), \{3, 1\}\}$ ,  $t(R_3) = \{(1, 3), \langle 3, 1 \rangle, \{1, 1\}, \{3, 3\}\}$
- B. 对  $A$  上关系  $R_2 = \{(2, 2)\}$ ,  $t(R_2) = \{(1, 1), \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$
- C. 对  $A$  上关系  $R_4 = \{(1, 2), \{1, 3\}\}$ ,  $t(R_4) = \{(1, 2), (1, 3), \{2, 3\}\}$
- D. 对  $A$  上关系  $R_1 = \{(2, 3)\}$ ,  $t(R_1) = \{(2, 3), \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

答案: A

## 65. 测验题 6.65

下面对传递闭包的计算哪些是正确的?

- A. 正整数集  $\mathbb{Z}^+$  上关系  $R_4 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}^+(x = y \cdot z)\}$ ,  $t(R_4) = \{\langle x, y \rangle \mid y \text{ 整除 } x\}$
- B. 整数集  $\mathbb{Z}$  上关系  $R_1 = \{\langle x, y \rangle \mid |x - y| < 10\}$ ,  $t(R_1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 。
- C. 自然数集  $\mathbb{N}$  上关系  $R_2 = \{\langle n, n + 1 \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,  $t(R_2) = \mathbb{N}$
- D. 整数集  $\mathbb{Z}$  上关系  $R_3 = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in \mathbb{Z}(z \geq 0 \wedge x = y + z)\}$ ,  $t(R_3) = \{\langle x, y \rangle \mid x > y\}$

答案: AB

## 66. 测验题 6.66

设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 集合  $A$  上关系  $R$  的关系矩阵是:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基于矩阵的逻辑积计算关系  $R$  的传递闭包  $t(R)$  的关系矩阵, 下面  $M_R^{[k]}$  是  $R^k$  的关系矩阵, 请依次填写其中的空 (a), (b), (c), (d)。

$$M_R^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \underline{(a)} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{(b)} & 1 \end{pmatrix} \quad M_R^{[4]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{(c)} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{(d)} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

答案: (a) 1 (b) 0 (c) 1 (d) 0

## 67. 测验题 6.67

设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合  $A$  上关系  $R$  的关系矩阵是：

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基于矩阵的逻辑积计算关系  $R$  的传递闭包  $t(R)$  的关系矩阵，下面  $M_R^{[k]}$  是  $R^k$  的关系矩阵，请依次填写其中的空 (a)，(b)，(c)，(d)。

$$M_R^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{(a)} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \underline{(b)} & 0 \end{pmatrix} \quad M_R^{[4]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \underline{(c)} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \underline{(d)} \end{pmatrix}$$

答案：(a) 0 (b) 1 (c) 1 (d) 1

## 68. 测验题 6.68

设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合  $A$  上关系  $R$  的关系矩阵是：

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基于 Warshall 算法计算关系  $R$  的传递闭包  $t(R)$  的关系矩阵，下面  $W_k$  是算法第  $k$  次循环后的中间结果矩阵，请依次填写其中的空 (a)，(b)，(c)，(d)。

$$W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \underline{(a)} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \underline{(b)} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \underline{(c)} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{(d)} & 1 \end{pmatrix}$$

答案：(a) 0 (b) 1 (c) 1 (d) 0

## 69. 测验题 6.69

设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合  $A$  上关系  $R$  的关系矩阵是：

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

基于 Warshall 算法计算关系  $R$  的传递闭包  $t(R)$  的关系矩阵，下面  $W_k$  是算法第  $k$  次循环后的中间结果矩阵，请依次填写其中的空 (a)，(b)，(c)，(d)。

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \underline{(a)} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{(b)} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \underline{(c)} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{(d)} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

答案：(a) 1 (b) 0 (c) 0 (d) 1

## 70. 测验题 6.70

设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合  $A$  上关系  $R$  的关系矩阵是：

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基于 Warshall 算法计算关系  $R$  的传递闭包  $t(R)$  的关系矩阵，下面  $W_k$  是算法第  $k$  次循环后的中间结果矩阵，请依次填写其中的空 (a)，(b)，(c)，(d)。

$$W_2 = \begin{pmatrix} 0 & \underline{(a)} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \underline{(b)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad W_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \underline{(c)} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \underline{(d)} & 1 \end{pmatrix}$$

答案：(a) 0 (b) 1 (c) 1 (d) 1

## 71. 测验题 6.71

设  $A$  是非空集合, 下面哪些说法是正确的?

- A. 如果  $R$  是  $A$  上的等价关系, 则  $R \circ R = R$
- B. 如果  $R$  是  $A$  上的等价关系, 则  $R \cup R^{-1} = R$
- C. 如果  $R$  是  $A$  上的对称, 传递关系, 则  $R \cup \Delta_A$  是  $A$  上的等价关系
- D. 如果  $R$  是  $A$  上的自反, 传递关系, 则  $R \cup R^{-1}$  是  $A$  上的等价关系

答案: ABC

解析: D 选项反例: 取  $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ , 则  $R \cup R^{-1}$  破坏了传递关系。

## 72. 测验题 6.72

设  $R$  和  $S$  都是非空集合  $A$  上的等价关系, 下面哪些关系也是等价关系?

- A.  $R \cup S$
- B.  $R \cap S$
- C.  $r(R - S)$
- D.  $R \circ S$

答案: B

解析: 取  $R$  为模 2 同余的关系,  $S$  为模 3 同余的关系, 则  $\langle 1, 3 \rangle \in R \cup S$  且  $\langle 3, 6 \rangle \in R \cup S$ , 但是  $\langle 1, 6 \rangle \notin R \cup S$ , 所以  $R \cup S$  不是等价关系, A 选项错误; 同理,  $\langle 2, 4 \rangle \in r(R - S)$  且  $\langle 4, 14 \rangle \in r(R - S)$ , 但是  $\langle 2, 14 \rangle \notin r(R - S)$ , 所以 C 选项错误。

## 73. 测验题 6.73

设  $A = 1, 2, 3, 4$ , 下面哪些关系是集合  $A$  上的等价关系?

- A.  $R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$
- B.  $R_2 = \Delta_A \cup \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$
- C.  $R_3 = \Delta_A \cup \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$
- D.  $R_4 = A \times A$

答案: ABD

## 74. 测验题 6.74

设  $A$  是中山大学计算机学院所有学生构成的集合, 下面哪些关系是集合  $A$  上的等价关系?

- A.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a \text{ 和 } b \text{ 在相同专业学习}\}$  (注意每位学生只在学院的一个专业学习)
- B.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a \text{ 和 } b \text{ 会用相同编程语言编程}\}$  (注意一位学生可能会用多门语言编程)
- C.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a \text{ 和 } b \text{ 在相同班级学习}\}$  (注意每位学生只在学院的一个班级学习)
- D.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid a \text{ 和 } b \text{ 选修了相同课程}\}$  (注意一位学生可能会选修多门课程)



答案: AC

### 75. 测验题 6.75

下面关于等价类或商集的哪些说法是正确的?

A. 设集合  $A = \{a, b, c\}$ , 则  $A/\Delta_A = \{a, b, c\}$

B. 设集合  $A = \{a, b, c\}$ , 则  $A/A \times A = \{a, b, c\}$

C. 对于集合  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  上的等价关系  $R = \Delta_B \cup \{\langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$ ,  $[3]_R = \{2, 3\}$

D. 对于集合  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  上的关系  $T = \{\langle 1, 2 \rangle\}$ , 设  $S$  是包含  $T$  的最小等价关系, 则  $[3]_S = \{3, 4\}$

答案: C

解析: 注意等价类与商集的定义。商集是等价类构成的集合, 即集合的集合。

定义 6.12 设  $R$  是非空集合  $A$  上的等价关系。

(1) 元素  $a \in A$  所在的等价关系  $R$  的等价类 (equivalence class), 简称  $a$  的等价类, 记为  $[a]_R$  是所有与  $a$  有关系  $R$  的元素构成的集合, 即:

$$[a]_R = \{x \in A \mid \langle a, x \rangle \in R\}$$

(2) 对元素  $b \in A$ , 若  $b \in [a]_R$ , 则称  $b$  为等价类  $[a]_R$  的一个代表 (representative), 特别地,  $a$  是  $[a]_R$  的一个代表, 即总有  $a \in [a]_R$  (因为等价关系  $R$  是自反关系)。

(3) 集合  $A$  的所有元素的等价类构成的集合称为集合  $A$  关于等价关系  $R$  的商集 (quotient set), 记为  $A/R$ , 即:

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

### 76. 测验题 6.76

对集合  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  上的关系  $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 4, 5 \rangle\}$ , 设  $T$  是包含  $R$  的最小等价关系. 下面关于  $T$  的等价类的计算哪些是正确的?

A.  $[0]_T = \{0, 3\}$

B.  $[1]_T = \{1, 2\}$

C.  $[2]_T = \{1, 2, 4, 5\}$

D.  $[3]_T = \{3\}$

答案: BD

**77. 测验题 6.77**

对集合  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  上的关系  $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$ ，设  $T$  是包含  $R$  的最小等价关系。下面关于  $T$  的等价类的计算哪些是正确的？

- A.  $[0]_T = \{0\}$
- B.  $[1]_T = \{1, 2\}$
- C.  $[2]_T = \{1, 2, 3\}$
- D.  $[4]_T = \{4, 5\}$

答案：AC

**78. 测验题 6.78**

在自然数集  $N$  上定义关系  $R = \{\langle a, b \rangle \mid 2 \mid (a + b)\}$ ，不难证明  $R$  是等价关系。下面关于  $R$  的等价

- A.  $[0]_R = \{0\}$
- B.  $[1]_R = \{1\}$
- C.  $0 \in [2]_R$
- D.  $1 \in [3]_R$

答案：CD

**79. 测验题 6.79**

设  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ，在  $A \times A$  上定义关系  $R = \{\langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle \mid |a - b| = |c - d|\}$ ，不难证明  $R$  是等价关系，下面关于  $R$  的等价类的说法哪些是正确的？

- A.  $[1]_R = \{1\}$
- B.  $\langle 4, 3 \rangle \in [\langle 1, 2 \rangle]_R$
- C.  $[\langle 1, 1 \rangle]_R = \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\}$
- D.  $[\langle 1, 3 \rangle]_R = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$

答案：BC

**80. 测验题 6.80**

在正整数对集  $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$  上定义关系  $R = \{\langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle \mid ad = bc\}$ ，可证明  $R$  是等价关系，下面关于  $R$  的等价类的说法哪些是正确的？

- A.  $[1]_R = \mathbb{Z}^+$
- B.  $[\langle 1, 1 \rangle]_R = \{\langle a, a \rangle \mid a \in \mathbb{Z}^+\}$
- C.  $\langle 2, 1 \rangle \in [\langle 1, 2 \rangle]_R$
- D.  $\langle 3, 9 \rangle \in [\langle 1, 3 \rangle]_R$

答案: BD

### 81. 测验题 6.81

设集合  $A$  是所有长度为 8 的所有二进制串构成的集合, 下面哪些集合族是  $A$  的划分?

A.  $\mathcal{F}_1 = \{ \text{所有以 1 开头的串构成的集合, 所有以 01 开头的串构成的集合, 所有以 00 开头的串构成的集合} \}$

B.  $\mathcal{F}_2 = \{ \text{所有包含 00 的串构成的集合, 所有包含 01 的串构成的集合, 所有包含 10 的串构成的集合, 所有包含 11 的串构成的集合} \}$

C.  $\mathcal{F}_3 = \{ \text{所有以 00 结尾的串构成的集合, 所有以 01 结尾的串构成的集合, 所有以 10 结尾的串构成的集合, 所有以 11 结尾的串构成的集合} \}$

D.  $\mathcal{F}_4 = \{ \text{所有恰好含有偶数个 0 的串构成的集合, 所有恰好含有偶数个 1 的串构成的集合, 所有恰好含有奇数个 0 的串构成的集合, 所有恰好含有奇数个 1 的串构成的集合} \}$

答案: AC

### 82. 测验题 6.82

设集合  $A$  是所有长度为 8 的所有三进制串构成的集合, 下面哪些集合族是  $A$  的划分?

A.  $\mathcal{F}_1 = \{ \text{所有以 0 开头的串构成的集合, 所有以 1 开头的串构成的集合, 所有以 20 开头的串构成的集合, 所有以 21 开头的串构成的集合, 所有以 22 开头的串构成的集合} \}$

B.  $\mathcal{F}_2 = \{ \text{所有包含恰好一个 0 的串构成的集合, 所有包含恰好一个 1 的串构成的集合, 所有包含恰好一个 2 的串构成的集合} \}$

C.  $\mathcal{F}_3 = \{ \text{所有以 00 结尾的串构成的集合, 所有以 01 结尾的串构成的集合, 所有以 02 结尾的串构成的集合, 所有以 1 结尾的串构成的集合, 所有以 2 结尾的串构成的集合} \}$

D.  $\mathcal{F}_4 = \{ \text{所有恰好含有偶数个 0 的串构成的集合, 所有恰好含有偶数个 1 的串构成的集合, 所有恰好含有偶数个 2 的串构成的集合} \}$

答案: A

### 83. 测验题 6.83

设集合  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , 下面哪些集合族是  $A$  的划分?

A.  $\mathcal{F}_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

B.  $\mathcal{F}_2 = \{\{0, 1\}, \{4, 5\}\}$

C.  $\mathcal{F}_3 = \{\{0, 1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$

D.  $\mathcal{F}_4 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

答案: C

解析: 如果 A 选项改为  $\mathcal{F}_1 = \{\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ , 则 A 选项也是划分。

**84. 测验题 6.84**

设  $A$  是非空集合,  $R$  是  $A$  上的关系, 下面哪些说法是正确的?

- A.  $R$  是反对称关系, 当且仅当  $R \cap R^{-1} = \Delta_A$
- B. 如果  $R$  是反对称关系, 则  $R \cup \Delta_A$  也是反对称关系
- C. 如果  $R$  是传递关系, 则  $R - R^{-1}$  也是传递关系
- D. 无论  $R$  是怎样的关系, 总有  $R - R^{-1}$  是反对称关系

答案: BCD

**85. 测验题 6.85**

设  $A$  是非空集合, 下面哪些说法是正确的?

- A. 如果  $R$  是  $A$  上的偏序关系, 则  $R \circ R = R$
- B. 如果  $R$  是  $A$  上的偏序关系, 则  $R \cap R^{-1} = \Delta_A$
- C. 如果  $R$  是  $A$  上的反对称, 传递关系, 则  $R \cup \Delta_A$  是  $A$  上的偏序关系
- D. 如果  $R$  是  $A$  上的自反, 传递关系, 则  $r(R - R^{-1})$  是  $A$  上的偏序关系

答案: ABCD

**86. 测验题 6.86**

设  $R$  和  $S$  都是非空集合  $A$  上的偏序关系, 下面哪些关系也是  $A$  上的偏序关系?

- A.  $R \cap S$
- B.  $R \cup S$
- C.  $r(R - S)$
- D.  $R \circ S$

答案: A

**87. 测验题 6.87**

设  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 下面哪些关系是集合  $A$  上的偏序关系?

- A.  $R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$
- B.  $R_2 = \Delta_A \cup \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$
- C.  $R_3 = \Delta_A \cup \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$
- D.  $R_4 = A \times A$

答案: AC

## 88. 测验题 6.88

下面哪些选项中定义的关系是偏序关系?

- A. 正整数集  $\mathbb{Z}^+$  上的关系  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid \exists z(z > 0 \wedge a = b + z)\}$
- B. 正整数集  $\mathbb{Z}^+$  上的关系  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid \exists z(a = b \cdot z)\}$
- C. 非空集  $U$  的幂集  $\wp(U)$  上的关系  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid \exists z(a = b \cup z)\}$
- D. 正整数对集  $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$  上的关系  $R_4 = \{\langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle \mid (a < c \vee (a = c \wedge b \leq d))\}$

答案: BCD

## 89. 测验题 6.89

设  $R$  是非空集合  $A$  上的偏序关系, 下面关于  $R$  的哈斯图的哪些说法是正确的?

- A.  $R$  的关系图就是  $R$  的哈斯图
- B.  $R$  的哈斯图必定是一个连通图
- C. 如果关系  $R$  的哈斯图中对应  $A$  的元素  $a$  和  $b$  的两个顶点之间有边, 则必有  $\langle a, b \rangle \in R$  或  $\langle b, a \rangle \in R$
- D. 如果在关系  $R$  中  $A$  的元素  $a$  覆盖  $b$ , 则在  $R$  的哈斯图中对应  $a$  和  $b$  的顶点之间有边

答案: CD

解析: 覆盖的定义: 对  $A$  的任意两个元素  $a, b$ , 若  $a \prec b$ , 且不存在  $c$  使得  $a \prec c$  且  $c \prec b$ , 则称  $b$  覆盖 (cover)  $a$ 。即哈斯图上两个元素有边。

## 90. 测验题 6.90

设  $A$  是偏序集, 下面哪些说法是正确的?

- A. 偏序集  $A$  的极大元存在的话一定也是它的最大元
- B. 偏序集  $A$  的最小元存在的话一定也是它的极小元
- C. 偏序集  $A$  至多存在一个最小元
- D. 偏序集  $A$  可能同时存在无穷多个极大元和极小元

答案: BCD

## 91. 测验题 6.91

设  $A$  是偏序集,  $S$  是  $A$  的子集, 下面哪些说法是正确的?

- A. 子集  $S$  如果存在最大元, 则  $S$  必存在上确界
- B. 子集  $S$  如果存在一个属于  $S$  的下界, 则  $S$  必存在下确界
- C. 子集  $S$  的所有上界都必然属于  $S$
- D. 如果  $A$  存在最小元, 则  $S$  一定存在下确界

答案: AB

解析：最大元不是最大的元素，有最大元说明该元素和其他元素都是可比的且大于等于其他元素；上界可能不唯一，上确界是最小的上界。下界同理；上界和下界其实就是针对偏序集的子集的最大元和最小元。

## 92. 测验题 6.92

设集合  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$  以整除关系为偏序构成偏序集，下面哪些说法是正确的？

- A. 偏序集  $A$  的最小元是 1
- B. 偏序集  $A$  的最大元是 10
- C. 6, 7, 8, 9, 10 都是偏序集  $A$  的极大元
- D. 1, 2, 3, 4, 5 都是偏序集  $A$  的极小元

答案：AC

## 93. 测验题 6.93

设集合  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ 是 } 60 \text{ 的正因子}\}$  以整除关系为偏序构成偏序集，下面哪些说法是正确的？

- A. 偏序集  $A$  的最小元是 1
- B. 偏序集  $A$  的最大元是 60
- C. 60, 30, 20, 10 都是偏序集  $A$  的极大元
- D. 1, 2, 3, 4, 5 都是偏序集  $A$  的极小元

答案：AB

## 94. 测验题 6.94

设集合  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 12\}$  以整除关系为偏序构成偏序集， $S = \{2, 3, 6\}$ ，下面哪些说法是正确的？

- A. 子集  $S$  不存在上确界
- B. 子集  $S$  不存在下确界
- C. 6 和 12 都是子集  $S$  的上界
- D. 1 是子集  $S$  的下界

答案：CD

## 95. 测验题 6.95

设集合  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ 是 } 60 \text{ 的正因子}\}$  以整除关系为偏序构成偏序集， $S = \{2, 4, 6\}$ ，下面哪些说法是正确的？

- A. 子集  $S$  的上确界是 60

- B. 子集  $S$  的下确界是 1
- C. 12, 24, 48, 60 都是子集  $S$  的上界
- D. 1 和 2 都是子集  $S$  的下界

答案: D

## 七、函数

### 1. 测验题 7.1

设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$ , 下面笛卡尔积集  $A \times B$  的哪些子集是函数?

A.  $F_1 = \{\langle 5, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 5, d \rangle\}$

B.  $F_2 = \{\langle 4, c \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 5, c \rangle, \langle 1, c \rangle, \langle 3, b \rangle\}$

C.  $F_3 = \{\langle 2, c \rangle, \langle 4, b \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 1, b \rangle\}$

D.  $F_4 = \{\langle 1, d \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, a \rangle, \langle 5, d \rangle\}$

答案: D

### 2. 测验题 7.2

设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$ , 函数  $f: A \rightarrow B$  定义为  $f = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, d \rangle\}$ . 下面对于函数像集和逆像集的计算哪些是正确的?

A.  $f(A) = \{a, b, c, d\}$

B.  $f(\{1\}) = a$

C.  $f^{-1}(\{a, b\}) = \{1, 2\}$

D.  $f^{-1}(B) = \{1, 3, 4, 5\}$

答案: AC

解析: 私以为 A 选项错误.  $f(A)$  求的就是值域, 应为  $\{a, c, d\}$ , 所以答案应为 C。

### 3. 测验题 7.3

对于函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \lfloor (x+1)/2 \rfloor$ , 下面对于函数像集和逆像集的计算哪些是正确的?

A.  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

B.  $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

C.  $f(\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}) = \{0\}$

D.  $f^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}) = \{0\}$

答案: BC

### 4. 测验题 7.4

对于函数  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = \lceil (x+1)/2 \rceil$ , 下面对于函数像集和逆像集的计算哪些是正确的?

A.  $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

B.  $f^{-1}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

C.  $f(\{-1, 0, 1\}) = \{0, 1\}$

D.  $f^{-1}(\{-1, 0, 1\}) = \{-2, -1, 0\}$



答案: ABC

### 5. 测验题 7.5

设  $A, B$  是任意集合,  $S$  和  $T$  是  $A$  的子集,  $W, U$  是  $B$  的子集, 对于函数  $f: A \rightarrow B$ , 下面哪些等式是不正确的?

- A.  $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$
- B.  $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$
- C.  $f^{-1}(W \cap V) = f^{-1}(W) \cap f^{-1}(V)$
- D.  $f^{-1}(W \cup V) = f^{-1}(W) \cup f^{-1}(V)$

答案: A

### 6. 测验题 7.6

下面定义的集合  $A$  到  $B$  的函数哪些是单函数?

- A. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$ , 函数  $f_1 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, c \rangle\}$
- B. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$ , 函数  $f_2 = \{\langle 1, d \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, a \rangle\}$
- C. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ , 函数  $f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 3, c \rangle, \langle 4, b \rangle\}$
- D. 集合  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d, e\}$ , 函数  $f_4 = \{\langle 1, e \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 3, b \rangle\}$

答案: CD

### 7. 测验题 7.7

下面定义的集合  $A$  到  $B$  的函数哪些是满函数?

- A. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$ , 函数  $f_1 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, c \rangle\}$
- B. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$ , 函数  $f_2 = \{\langle 1, d \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, a \rangle\}$
- C. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ , 函数  $f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 3, c \rangle, \langle 4, b \rangle\}$
- D. 集合  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d, e\}$ , 函数  $f_4 = \{\langle 1, e \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 3, b \rangle\}$

答案: BC

### 8. 测验题 7.8

下面定义的集合  $A$  到  $B$  的函数哪些是双函数?

- A. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$ , 函数  $f_1 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, c \rangle\}$
- B. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$ , 函数  $f_2 = \{\langle 1, d \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, a \rangle\}$
- C. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ , 函数  $f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 3, c \rangle, \langle 4, b \rangle\}$
- D. 集合  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d, e\}$ , 函数  $f_4 = \{\langle 1, e \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 3, b \rangle\}$

答案: C

**9. 测验题 7.9**

下面定义的自然数集  $\mathbb{N}$  上的函数哪些是单函数?

- A. 函数  $f_1(n) = 2n^2 + 1$
- B. 函数  $f_2(n) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$
- C. 函数  $f_3(n) = \lceil (2n+1)/2 \rceil$
- D. 函数  $f_4(n) = |n-5|$

答案: AC

**10. 测验题 7.10**

下面定义的自然数集  $\mathbb{N}$  上的函数哪些是满函数?

- A. 函数  $f_1(n) = 2n^2 + 1$
- B. 函数  $f_2(n) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$
- C. 函数  $f_3(n) = \lceil (2n+1)/2 \rceil$
- D. 函数  $f_4(n) = |n-5|$

答案: BD

**11. 测验题 7.11**

下面定义从自然数集  $\mathbb{N}$  到整数集  $\mathbb{Z}$  的函数哪些是双函数?

- A. 函数  $f_1(n) = 2n + 1$
- B. 函数  $f_2(n) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$
- C. 函数  $f_3(n) = \lceil (2n+1)/2 \rceil$
- D. 函数  $f_4(n) = \begin{cases} -k & \text{若 } n = 2k - 1, k \geq 1 \\ k & \text{若 } n = 2k \end{cases}$

答案: D

**12. 测验题 7.12**

下面函数都是实数集  $\mathbb{R}$  上的函数, 下面哪些对函数性质的判断是正确的?

- A. 函数  $f_1(x) = x^2$  是单函数
- B. 函数  $f_2(x) = x^3$  是单函数
- C. 函数  $f_3(x) = \lfloor x \rfloor$  是满函数
- D. 函数  $f_4(x) = 2x + 1$  是满函数

答案: BD

**13. 测验题 7.13**

下面函数都是从自然数对集  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  到自然数集  $\mathbb{N}$  的函数，下面哪些对函数性质的判断是正确的？

- A. 函数  $f_1(m, n) = m^2 + n^2$  是单函数
- B. 函数  $f_2(m, n) = |m - n|$  是单函数
- C. 函数  $f_3(m, n) = \lfloor (m + n)/2 \rfloor$  是满函数
- D. 函数  $f_4(m, n) = m$  是满函数

答案：CD

**14. 测验题 7.14**

设下面对函数  $f$  和  $g$  所做的函数复合都是可行的，下面哪些说法是正确的？

- A. 函数  $f$  和  $g$  都是单函数，则函数  $g \circ f$  也是单函数
- B. 函数  $g \circ f$  是满函数，则函数  $f$  和  $g$  也都是满函数
- C. 函数  $g \circ f$  是双函数当且仅当  $f$  和  $g$  都是双函数
- D. 函数  $g \circ f$  是单函数，则函数  $f$  也是单函数

答案：AD

**15. 测验题 7.15**

设下面对函数  $f$  和  $g$  所做的函数复合都是可行的，下面哪些说法是正确的？

- A. 函数  $g \circ f$  是单函数，则函数  $f$  和  $g$  也都是单函数
- B. 函数  $f$  和  $g$  都是满函数，则函数  $g \circ f$  也是满函数
- C. 函数  $g \circ f$  是双函数，则函数  $f$  是双函数
- D. 函数  $g \circ f$  是满函数，则函数  $g$  也是满函数

答案：BD

**16. 测验题 7.16**

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{a, b, c, d, e\}$ ，函数  $f = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 3, e \rangle, \langle 4, b \rangle\}$ ，下面哪些函数  $g_i$  可使得  $g_i \circ f = \text{id}_A$ ？

- A. 函数  $g_1 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle, \langle d, 4 \rangle, \langle e, 4 \rangle\}$
- B. 函数  $g_2 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle c, 3 \rangle, \langle d, 2 \rangle, \langle e, 3 \rangle\}$
- C. 函数  $g_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, c \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 3, e \rangle\}$
- D. 函数  $g_4 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle c, 1 \rangle, \langle d, 2 \rangle, \langle e, 3 \rangle\}$

答案：BD

## 17. 测验题 7.17

设集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$ , 函数  $f = \{\langle 1, d \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 4, b \rangle, \langle 5, c \rangle, \langle 6, b \rangle\}$ . 下面哪些函数  $g_i$  可使得  $f \circ g_i = \text{id}_B$ ?

- A. 函数  $g_1 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle, \langle d, 4 \rangle\}$
- B. 函数  $g_2 = \{\langle 3, a \rangle, \langle 4, b \rangle, \langle 5, c \rangle, \langle 6, b \rangle\}$
- C. 函数  $g_3 = \{\langle a, 3 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle c, 5 \rangle, \langle d, 2 \rangle\}$
- D. 函数  $g_3 = \{\langle a, 3 \rangle, \langle b, 6 \rangle, \langle c, 5 \rangle, \langle d, 1 \rangle\}$

答案: CD

## 18. 测验题 7.18

对于自然数集  $\mathbb{N}$  上的函数  $f(n) = 2n$ , 下面哪些函数  $g_i$  可使得  $g_i \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$ ?

- A. 函数  $g_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 定义为  $\forall n, g_1(n) = n$
- B. 函数  $g_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ , 定义为  $\forall n, g_2(n) = n/2$
- C. 函数  $g_3: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 定义为  $\forall n, g_3(n) = \lfloor n/2 \rfloor$
- D. 函数  $g_4: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 定义为  $\forall n, g_4(n) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$

答案: CD

## 19. 测验题 7.19

对于自然数对集  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  到  $\mathbb{N}$  的函数  $f(m, n) = |m - n|$ , 下面哪些函数  $g_i$  可使得  $f \circ g_i = \text{id}_{\mathbb{N}}$ ?

- A. 函数  $g_1(n) = (m, n)$
- B. 函数  $g_2(n) = (n, n+1)$
- C. 函数  $g_3(m, n) = |m + n|$
- D. 函数  $g_4(n) = (1, n+1)$

答案: D

## 20. 测验题 7.20

下面哪些说法是正确的?

- A. 函数  $f: A \rightarrow B$  是双函数当且仅当存在函数  $g: B \rightarrow A$  使得  $g \circ f = \text{id}_A$
- B. 函数  $f: A \rightarrow B$  是双函数当且仅当存在函数  $g: B \rightarrow A$  使得  $f \circ g = \text{id}_B$
- C. 对任意的函数  $f, g: A \rightarrow A$ , 有  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- D. 对函数  $f: A \rightarrow B$ , 若存在函数  $g: B \rightarrow A$  使得  $g \circ f = \text{id}_A$  且  $f \circ g = \text{id}_B$ , 则  $f$  是双函数

答案: D

**21. 测验题 7.21\***

下面哪些说法是正确的?

- A. 集合 A 与 B 等势当且仅当 A 和 B 之间存在双函数
- B. 集合 A 与 B 等势当且仅当存在 A 到 B 的单函数且存在 B 到 A 的单函数
- C. 集合 A 与 B 等势且集合 B 与 C 等势, 则集合 A 与 C 等势
- D. 集合 A 与 B 等势当且仅当集合 B 与 A 等势

答案: ABCD

**22. 测验题 7.22\***

下面哪些说法是正确的?

- A. 所有偶自然数构成的集合是自然数集的子集, 因此它不与自然数集等势
- B. 实数集的开区间  $(0, 1)$  是开区间  $(-1, 1)$  的子区间, 因此这两个区间不等势
- C. 所有偶自然数构成的集合与所有 3 的倍数的自然数构成的集合等势
- D. 自然数集与正整数集等势

答案: CD

**23. 测验题 7.23\***

根据自然数集的集合论定义, 下面哪些说法是正确的?

- A. 每个自然数都是一个集合, 0 是空集, 1 是有一个元素的集合等等
- B. 如果集合 A 是归纳集, 则 A 的每个元素都是自然数
- C. 对任意自然数  $m, n$ , 若  $m \in n$ , 则  $m \subset n$
- D. 对任意自然数  $m$ , 必有  $m \in m^+$  且  $m \subseteq m^+$

答案: ACD

**24. 测验题 7.24\***

下面关于有穷集的哪些说法是正确的?

- A. 有穷集与某个自然数等势
- B. 如果一个集合的任意真子集都是有穷集, 则这个集合也是有穷集
- C. 如果一个集合的某个真子集是有穷集, 则这个集合就是有穷集
- D. 有穷集不与它的任何真子集等势

答案: ABD

**25. 测验题 7.25\***

下面关于无穷集的哪些说法是正确的?

- A. 无穷集不可能与自然数集等势
- B. 如果  $A$  是无穷集, 则存在  $A$  的一个真子集  $B$  使得  $A$  与  $B$  等势
- C. 如果  $A$  是无穷集  $B$  的真子集, 则  $A$  与  $B$  等势
- D. 如果  $A$  是无穷集, 则存在  $A$  的一个子集  $B$  使得  $B$  与自然数集等势

答案: BD

**26. 测验题 7.26\***

下面关于可数集和不可数集的哪些说法是正确的?

- A. 可数集一定是有穷集
- B. 不可数集一定是无穷集
- C. 有穷集一定是可数集
- D. 无穷集一定是不可数集

答案: BC

**27. 测验题 7.27\***

下面关于可数集和不可数集的哪些说法是正确的?

- A. 不可数集的子集一定还是不可数集
- B. 可数集的子集一定还是可数集
- C. 两个可数集的并集还是可数集
- D. 两个可数集的笛卡尔积还是可数集

答案: BCD

**28. 测验题 7.28\***

下面哪些集合是可数集?

- A. 空集  $\emptyset$
- B. 自然数  $n$
- C. 自然数集  $\mathbb{N}$
- D. 自然数集的幂集  $\wp(\mathbb{N})$

答案: ABC

**29. 测验题 7.29\***

下面哪些集合不是可数集?

- A. 自然数对集  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- B. 有理数对集  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
- C. 实数对集  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- D. 正整数集上的所有函数构成的集合  $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$

答案: CD

**30. 测验题 7.30\***

下面哪些集合不是可数集?

- A. 所有自然数有穷序列构成的集合  $N^*$
- B. 人类目前编写的所有计算机程序构成的集合
- C. 人类目前出版的所有书籍构成的集合
- D. 所有复数构成的集合

答案: D

**31. 测验题 7.31**

设  $f$  和  $g$  都是数集上的函数, 对于大  $O$  记号, 下面哪些说法是正确的?

- A. 函数  $f \in O(g)$  当且仅当对任意  $x$ , 存在  $C > 0$  和  $k$  使得当  $x > k$  时  $|f(x)| \leq C|g(x)|$
- B. 函数  $f \notin O(g)$  当且仅当对任意  $C > 0$  和  $k$ , 存在  $x$  使得  $x > k$  且  $|f(x)| > C|g(x)|$
- C. 如果存在  $C > 0$  和  $k$  使得, 对任意  $x$ , 当  $x > k$  时  $|f(x)| \leq C|g(x)|$ , 那么  $f \in O(g)$
- D. 如果  $f \notin O(g)$ , 则存在  $x$  使得, 对任意  $C > 0$  和  $k$  当  $x > k$  时  $|f(x)| > C|g(x)|$

答案: BC

解析: 注意 A 和 D 选项有关  $x$  范围的表述应该在  $C$  和  $k$  之后。

**32. 测验题 7.32**

设  $f, g, h$  都是数集上的函数, 对于大  $O$  记号, 下面哪些说法是正确的?

- A. 如果  $f \in O(g)$  且  $g \in O(h)$ , 则  $f \in O(h)$
- B. 如果  $f \in O(h)$  且  $g \in O(h)$ , 则  $f + g \in O(h)$
- C. 如果  $f \in O(h)$  且  $g \in O(h)$ , 则  $f \cdot g \in O(h)$
- D. 如果  $f \notin O(g)$  且  $g \notin O(h)$ , 则  $f \notin O(h)$

答案: AB

**33. 测验题 7.33**

设  $f$  和  $g$  都是数集上的函数，下面哪些说法是正确的？

- A. 如果  $f \in O(g)$ ，则  $f \in \Theta(g)$
- B. 如果  $f \in \Theta(g)$ ，则  $f \in O(g)$
- C. 如果  $f \in O(g)$ ，则  $g \in \Omega(f)$
- D. 如果  $f \in O(g)$  且  $g \in O(f)$ ，则  $f \in \Theta(g)$

答案：BCD

解析：

定义 7.12 设  $f, g$  是两个数集上的函数，称  $f$  是  $O(g)$ ，记为  $f \in O(g)$ ，如果存在常数  $C > 0$  和  $k$ ，使得当  $x > k$  时总有  $|f(x)| \leq C|g(x)|$ ，这时常数  $C$  和  $k$  称为函数  $f$  是  $O(g)$  的见证 (witness)。

定义 7.13 设  $f, g$  是两个数集上的函数，称  $f$  是  $\Omega(g)$ ，记为  $f \in \Omega(g)$ ，如果存在常数  $C > 0$  和  $k$ ，使得当  $x > k$  时总有  $|f(x)| \geq C|g(x)|$ ；称  $f$  是  $\Theta(g)$ ，记为  $f \in \Theta(g)$ ，如果  $f \in O(g)$  而且  $f \in \Omega(g)$ 。如果  $f$  是  $\Theta(g)$ ，通常称  $f$  和  $g$ （在函数增长方面）有相同的阶 (order)。

**34. 测验题 7.34**

假设下面函数都是数集上的函数，哪些函数是  $O(x)$ ？

- A.  $f_1(x) = 100$
- B.  $f_2(x) = 100x + 123$
- C.  $f_3(x) = x^2 + 2x + 1$
- D.  $f_4(x) = 2 \log x + 1$

答案：ABD

**35. 测验题 7.35**

假设下面函数都是数集上的函数，哪些函数是  $O(x^3)$ ？

- A.  $f_1(x) = (x^4 + 2x^2 + 1) / 100$
- B.  $f_2(x) = 100x^2 + 123$
- C.  $f_3(x) = x \log(x^2 + 2x)$
- D.  $f_4(x) = 2^x + x^3 + 1$

答案：BC

**36. 测验题 7.36**

假设下面函数都是正整数集上的函数，哪些函数是  $O(2^n)$ ？

- A.  $f_1(n) = n^{100} + 2n^{50} + 1$
- B.  $f_2(n) = 3^n + 2^n + 1$



C.  $f_3(n) = 4n^2 \log(3^n + 2^n + 1)$

D.  $f_4(n) = n(n! + 1)$

答案: AC

### 37. 测验题 7.37

下面哪些说法是正确的?

A.  $n^2 \in O(n \log n^4)$

B.  $n^{100} \in O(2^n)$

C.  $(\log n)^4 \in O(n^2)$

D.  $3^n \in O(n^{100})$

答案: BC

### 38. 测验题 7.38

下面哪些说法是正确的?

A.  $n \log n \in O(n^3)$

B.  $2^n \in O(n!)$

C.  $n^2 \in O(n^4)$

D.  $n \in O(\log n^2)$

答案: ABC

### 39. 测验题 7.39

对于函数  $f(n) = (n^3 + n^2 \log n)(\log n + 1) + (12 \log n)(n^3 + 1)$ , 下面哪些说法是正确的?

A.  $f \in O(n^3)$

B.  $f \in O(n^2 \log n)$

C.  $f \in O(n^3 \log n)$

D.  $f \in O(n^2)$

答案: C

### 40. 测验题 7.40

对于函数  $f(n) = (n^4 + n^2 \log n) / (n^2 + (\log n)^2)$ , 下面哪些说法是正确的?

A.  $f \in O(n^4)$

B.  $f \in O(n^2)$

C.  $f \in O(n \log n)$

D.  $f \in O(n)$

答案: AB

#### 41. 测验题 7.41

对于函数  $f(x) = (x \log x + x^2)(x + 2)$  , 下面哪些说法是正确的?

- A.  $f \in O(x \log x)$
- B.  $f \in O(x^2 \log x)$
- C.  $f \in O(x^3 \log x)$
- D.  $f \in O(x^3)$

答案: CD

#### 42. 测验题 7.42

对于函数  $f(x) = (x^3 + 5 \log x) / (x^4 + 1)$  , 下面哪些说法是正确的?

- A. 函数  $f \in O(x^{-4})$
- B. 函数  $f \in O(x^{-1})$
- C. 函数  $f \in O(x^{-2})$
- D. 函数  $f \in O(x)$

答案: BD

#### 43. 测验题 7.43

对于函数  $f(x) = 10x^3 + 2x^2 \log x^2$  , 下面哪些说法是正确的?

- A.  $f \in O(x^2)$  且  $f \notin O(x)$
- B.  $f \in O(x^3)$  且  $f \notin O(x^2)$
- C.  $f \in O(x^4)$  且  $f \notin O(x^3)$
- D.  $f \in O(x^5)$  且  $f \notin O(x^4)$

答案: B

#### 44. 测验题 7.44

对于函数  $f(x) = (2x^4 + 4x^2 + 2x) / (x^3 + 3x^2 + 1)$  , 下面哪些说法是正确的?

- A.  $f \in O(x)$  且  $f \notin O(1)$
- B.  $f \in O(x^2)$  且  $f \notin O(x)$
- C.  $f \in O(x^3)$  且  $f \notin O(x^2)$
- D.  $f \in O(x^4)$  且  $f \notin O(x^3)$

答案: A

**45. 测验题 7.45**

对于下面算法，下面哪些说法是正确的？

---

**Algorithm 4 判断两个数是否是倍数关系**

---

输入：整数  $a$  和整数  $b$

输出：如果整数  $b$  是整数  $a$  的倍数，则返回“真”，否则返回“假”

```
1: if  $a = 0$  then return “假”
2: end if
3: 令  $x$  和  $y$  分别等于  $a$  和  $b$  的绝对值，且令  $c$  等于 0
4: while ( $c$  小于  $y$ ) do 令  $c$  等于  $c + x$ 
5: end while
6: if  $c = y$  then return “真”
7: else
8:   return “假”
9: end if
```

---

- A. 算法输入规模应该用  $a$  或  $b$  的整数值大小进行度量
- B. 整数之间的等于，小于判断，计算整数的绝对值，以及整数加法是算法的基本操作
- C. 算法第（3）行的循环是算法的基本操作
- D. 算法的时间复杂度是  $O(\log |b|)$

答案：AB

**46. 测验题 7.46**

---

**Algorithm 5 计算两个数的最大公约数**

---

输入：两个非负整数  $a$  和  $b$

输出：返回  $\gcd(a, b)$

```
1: 令  $d$  是  $a$  和  $b$  的小者
2: if  $d = 0$  then
3:   return  $a$  和  $b$  的大者
4: end if
5: while  $d \geq 1$  do
6:   if  $a$  是  $d$  的倍数而且  $b$  是  $d$  的倍数 then
7:     return  $d$ 
8:   end if
9:   令  $d$  等于  $d - 1$ 
10: end while
```

---

- A. 算法输入规模应该用  $a$  或  $b$  的整数值大小进行度量
- B. 判断一个整数是否是另一个整数的倍数不是算法的基本操作
- C. 算法第（3）行的循环是算法的基本操作
- D. 算法的时间复杂度是  $O(\min\{a, b\})$

答案：ABD

**47. 测验题 7.47**

下面哪些说法是正确的?

- A. 无需过于关注算法时间复杂度, 随着硬件发展指数级算法也会在短时间内执行完毕
- B. 易解问题就是目前存在多项式时间复杂度算法的问题, 也称为 **P** 类问题
- C. 非易解问题就是目前尚不存在多项式时间复杂度算法的问题, 也称为 **NP** 类问题
- D. 不可解问题就是目前计算机不能求解的问题

答案: **BD**

**48. 测验题 7.48**

下面哪些说法是正确的?

- A. **P** 类问题都肯定存在多项式时间复杂度算法
- B. **NP** 类问题都不可能存在多项式时间复杂度算法
- C. 存在多项式时间度的算法验证一个候选解是否是 **P** 类问题的真正解
- D. 存在多项式时间度的算法验证一个候选解是否是 **NP** 类问题的真正解

答案: **ACD**

## 八、计数与组合

### 1. 测验题 8.1

设全集  $U$  是四位数（这一题所说的数都是指自然数）构成的集合,  $A$  是四位数奇数构成的集合,  $B$  是四位数偶数构成的集合,  $C$  是含有奇数数字的四位数构成的集合,  $D$  是含有偶数数字的四位数构成的集合,  $E$  是只含有奇数数字的四位数构成的集合,  $F$  是只含有偶数数字的四位数构成的集合。下面哪些说法是正确的?

- A. 根据加法原理,  $|U| = |A| + |B|$
- B. 根据加法原理,  $|U| = |C| + |D|$
- C. 根据加法原理,  $|U| = |E| + |F|$
- D. 根据加法原理,  $|U| = |C| + |F|$

答案: AD

### 2. 测验题 8.2

设全集  $U$  是长度为 8 的小写英文字母串构成的集合,  $A$  是  $U$  中含有元音字母的串构成的集合,  $B$  是  $U$  中含有辅音字母的串构成的集合,  $C$  是  $U$  中以元音字母开头的串构成的集合,  $D$  是  $U$  中以辅音字母开头的串构成的集合,  $E$  是  $U$  中只含有元音字母的串构成的集合,  $F$  是  $U$  中只含有辅音字母的串构成的集合。下面哪些说法是正确的?

- A. 根据加法原理,  $|U| = |A| + |B|$
- B. 根据加法原理,  $|U| = |C| + |D|$
- C. 根据加法原理,  $|U| = |E| + |F|$
- D. 根据加法原理,  $|U| = |A| + |F|$

答案: BD

### 3. 测验题 8.3

设计算机学院有计算机系统、计算机软件和计算机应用三个专业。令全集  $U$  是从计算机学院这三个专业学生中推选 10 位学生干部的所有不同方案构成的集合,  $A$  是  $U$  中含有计算机系统专业学生的方案构成的集合,  $B$  是  $U$  中含有计算机软件专业学生的方案构成的集合,  $C$  是  $U$  中含有计算机应用专业学生的方案构成的集合,  $D$  是  $U$  中只含有计算机系统专业学生的方案构成的集合,  $E$  是  $U$  中只含有计算机软件专业学生的方案构成的集合,  $F$  是  $U$  中只含有计算机应用专业学生的方案构成的集合,  $G$  是  $U$  中恰好含有一个专业学生的方案构成的集合,  $H$  是  $U$  中恰好含有两个专业学生的方案构成的集合,  $I$  是  $U$  中恰好含有三个专业学生的方案构成的集合。下面哪些说法是正确的?

- A. 根据加法原理,  $|U| = |A| + |B| + |C|$
- B. 根据加法原理,  $|U| = |D| + |E| + |F|$

C. 根据加法原理,  $|U| = |G| + |H| + |I|$

D. 根据加法原理,  $|G| = |D| + |E| + |F|$

答案: CD

#### 4. 测验题 8.4

计算只含奇数数字的四位数个数, 将确定四位数的个位、十位、百位和千位看做子任务, 下面哪些说法是正确的?

A. 按照确定个位、十位、百位、千位的顺序考虑, 这些子任务之间具有相关性。

B. 按照确定千位、百位、十位、个位的顺序考虑, 这些子任务之间具有相关性。

C. 按照确定个位、十位、百位、千位的顺序考虑, 这些子任务之间具有独立性。

D. 按照确定千位、百位、十位、个位的顺序考虑, 这些子任务之间具有独立性。

答案: CD

解析: 注意没有说数字不同, 那么一定没有相关性。每一位都可以独立考虑, 那么先看哪一位完全没有关系, 具有独立性。

#### 5. 测验题 8.5

计算只含偶数数字的四位数个数, 将确定四位数的个位、十位、百位和千位看做子任务, 下面哪些说法是正确的?

A. 按照确定个位、十位、百位、千位的顺序考虑, 这些子任务之间具有相关性。

B. 按照确定千位、百位、十位、个位的顺序考虑, 这些子任务之间具有相关性。

C. 按照确定个位、十位、百位、千位的顺序考虑, 这些子任务之间具有独立性。

D. 按照确定千位、百位、十位、个位的顺序考虑, 这些子任务之间具有独立性。

答案: CD

解析: 同测验题 8.4。

#### 6. 测验题 8.6

计算只含奇数数字且数字不同的四位数个数, 将确定四位数的个位、十位、百位和千位看做子任务, 下面哪些说法是正确的?

A. 按照确定个位、十位、百位、千位的顺序考虑, 这些子任务之间具有相关性。

B. 按照确定千位、百位、十位、个位的顺序考虑, 这些子任务之间具有相关性。

C. 按照确定个位、十位、百位、千位的顺序考虑, 这些子任务之间具有独立性。

D. 按照确定千位、百位、十位、个位的顺序考虑, 这些子任务之间具有独立性。

答案: ABCD

解析：数字不同，不管按照什么顺序考虑，选择了一位数字都会对之后的位有影响。其次不用考虑 0 的位置，一定都有独立性。

## 7. 测验题 8.7

计算只含偶数数字且数字不同的四位数个数，将确定四位数的个位、十位、百位和千位看做子任务，下面哪些说法是正确的？

- A. 按照确定个位、十位、百位、千位的顺序考虑，这些子任务之间具有相关性。
- B. 按照确定千位、百位、十位、个位的顺序考虑，这些子任务之间具有相关性。
- C. 按照确定个位、十位、百位、千位的顺序考虑，这些子任务之间具有独立性。
- D. 按照确定千位、百位、十位、个位的顺序考虑，这些子任务之间具有独立性。

答案：ABD

解析：数字不同，不管按照什么顺序考虑，选择了一位数字都会对之后的位有影响。其次需要考虑 0 的位置，只有先考虑了千位才可以直接用乘法原理。

## 8. 测验题 8.8

计算数字不同的四位数，下面哪些说法是正确的？

- A. 可以按确定个位、十位、百位、千位的顺序考虑，分别有 10, 9, 8, 7 个可选数字，因此共有  $10 \times 9 \times 8 \times 7$  个。
- B. 可以按确定千位、百位、十位、个位的顺序考虑，分别有 9, 9, 8, 7 个可选数字，因此共有  $9 \times 9 \times 8 \times 7$  个。
- C. 可以按确定个位、千位、百位、十位的顺序考虑，分别有 10, 8, 8, 7 个可选数字，因此共有  $10 \times 8 \times 8 \times 7$  个。
- D. 可以按确定千位、个位、百位、十位的顺序考虑，分别有 9, 9, 8, 7 个可选数字，因此共有  $9 \times 9 \times 8 \times 7$  个。

答案：BD

## 9. 测验题 8.9

计算数字不同的四位数奇数，下面哪些说法是正确的？

- A. 可以按确定个位、十位、百位、千位的顺序考虑，分别有 5, 9, 8, 6 个可选数字，因此共有  $5 \times 9 \times 8 \times 6$  个。
- B. 可以按确定千位、百位、十位、个位的顺序考虑，分别有 9, 9, 8, 5 个可选数字，因此共有  $9 \times 9 \times 8 \times 5$  个。
- C. 可以按确定个位、千位、百位、十位的顺序考虑，分别有 5, 8, 8, 7 个可选数字，因此共有  $5 \times 9 \times 8 \times 7$  个。

D. 可以按确定千位、个位、百位、十位的顺序考虑, 分别有 9, 5, 8, 7 个可选数字, 因此共有  $9 \times 5 \times 8 \times 7$  个。

答案: C

解析: C 选项的结果应为  $5 \times 8 \times 8 \times 7$

## 10. 测验题 8.10

计算数字不同的四位数偶数, 下面哪些说法是正确的?

A. 可以按确定个位、十位、百位、千位的顺序考虑, 分别有 5, 9, 8, 6 个可选数字, 因此共有  $5 \times 9 \times 8 \times 6$  个。

B. 可以按确定千位、百位、十位、个位的顺序考虑, 分别有 9, 9, 8, 5 个可选数字, 因此共有  $9 \times 9 \times 8 \times 5$  个。

C. 可以按确定个位、千位、百位、十位的顺序考虑, 个位选 0, 则千位、百位、十位分别有 9, 8, 7 个可选数字, 个位不选 0, 则个位、千位、百位、十位分别有 4, 8, 8, 7 个可选数字, 因此共有  $1 \times 9 \times 8 \times 7 + 4 \times 8 \times 8 \times 7$  个。

D. 可以按确定千位、个位、百位、十位的顺序考虑, 千位选偶数, 则千位、个位、百位、十位分别有 4, 4, 8, 7 个可选数字, 千位选奇数, 则千位、个位、百位、十位分别有 5, 5, 8, 7 个可选数字, 因此共有  $4 \times 4 \times 8 \times 7 + 5 \times 5 \times 8 \times 7$  个。

答案: CD

## 11. 测验题 8.11

使用减法原理计算满足条件的四位数个数, 下面哪些是正确的?

A. 用数字不同的四位数总数减去数字不同的四位数奇数个数得到数字不同的四位数偶数个数。

B. 用四位数总数减去含有奇数数字的四位数个数得到含有偶数数字的四位数个数。

C. 用四位数总数减去含有数字 0 的四位数个数得到不含数字 0 的四位数个数。

D. 用四位数总数减去含有数字 0 的四位数个数, 再减去含有数字 1 的四位数个数, 得到不含有数字 0 或不含有数字 1 的四位数个数。

答案: AC

## 12. 测验题 8.12

计算机学院有计算机系统、计算机软件和计算机应用三个专业的学生, 要推选 10 位学生担任学生干部。使用减法原理计算推选方案数, 下面哪些是正确的?

A. 总的推选方案数减去含有计算机系统专业学生的推选方案数得到只含有计算机软件或计算机应用专业学生的推选方案数。



B. 总的推选方案数减去含有男生的推选方案数得到只含有女生的推选方案数。

C. 总的推选方案数减去含有计算机系统专业学生的推选方案数, 再减去含有计算机软件专业学生的推选方案数, 得到只含有计算机应用专业学生的推选方案数。

D. 总的推选方案数减去含有计算机系统专业男生的推选方案数得到含有计算机系统专业女生的推选方案数。

答案: AB

解析: C 选项同时选中计算机系统与计算机软件专业的情况被重复减去。

### 13. 测验题 8.13

自然数的三位数中只含奇数数字的有 (1) 个, 只含偶数数字的有 (2) 个, 只含奇数数字且数字不同的有 (3) 个, 只含偶数数字且数字不同的有 (4) 个 (直接填写结果)。

答案: (1) 125 (2) 100 (3) 60 (4) 48

### 14. 测验题 8.14

自然数的三位数中含有奇数数字的有 (1) 个, 含有偶数数字的有 (2) 个, 含有数字 0 的有 (3) 个, 含有数字 1 的有 (4) 个 (直接填写结果)。

答案: (1) 800 (2) 775 (3) 171 (4) 252

### 15. 测验题 8.15

自然数中数字不同的三位数有 (1) 个, 数字不同的三位数奇数有 (2) 个, 数字不同的三位数偶数有 (3) 个 (直接填写结果)。

答案: (1) 648 (2) 320 (3) 328

### 16. 测验题 8.16

由 0,1,2,3,4 这五个数字能组成的三位数有 (1) 个, 其中数字不同的有 (2) 个。由 0,1,2,3,4 这五个数字能组成的大于 210 的三位数有 (3) 个, 其中数字不同的又有 (4) 个 (直接填写结果)。

答案: (1) 100 (2) 48 (3) 69 (4) 32

### 17. 测验题 8.17

计算机学院有计算机软件专业 40 名学生, 其中男女学生各 20 名, 计算机应用专业 20 名学生, 其中男女学生各 10 名。现在要推选一位学生任学生会主席, 则有 (1) 种推选方法。如果要推选一位学生任主席, 另一位任副主席则有 (2) 种推选方法, 其中主席和副主席来自不同专业的推选方法有 (3) 种, 而主席和副主席来自不同专业且性别也不同的推选方法有 (4) 种 (直接填写结果)。

答案: (1) 60 (2) 3540 (3) 1600 (4) 800

## 18. 测验题 8.18

整数  $3^4 \times 5^2 \times 7^6 \times 11$  有 (1) 个正因子, 整数 620 有 (2) 个正因子, 而整数  $10^{10}$  有 (3) 个正因子。

答案: (1) 210 (2) 12 (3) 121

解析:

(1) 结论: 指数加一再连乘。例如对于  $3^4 \times 5^2 \times 7^6 \times 11$ , 共有  $(4+1) \times (2+1) \times (6+1) \times (1+1) = 210$  个正因子。结论的理解也比较直观, 对于  $3^4$  这一项, 它能分解出的因子有  $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4$  共 5 个, 对于  $5^2$  这一项, 它能分解出的因子有  $5^0, 5^1, 5^2$  共 3 个, 以此类推。从每一项中选一种因子分解再乘起来即为答案。

(2)  $620 = 2^2 \times 5 \times 31$ , 共有  $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$

## 19. 测验题 8.19

假定全集是  $U$ ,  $A, B, C$  都是  $U$  的任意子集, 下面关于集合元素个数的等式哪些是正确的?

A.  $|A \cap \bar{B}| = |A| - |B|$

B.  $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|$

C.  $|A \cap B \cap \bar{C}| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C|$

D.  $|A \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |A| - |B| - |C| + |B \cap C|$

答案: BC

## 20. 测验题 8.20

假定全集是  $U$ ,  $A, B, C$  都是  $U$  的任意子集, 下面关于集合元素个数的等式哪些是正确的

A.  $|A \cup \bar{B}| = |U| - |B| + |A \cap B|$

B.  $|\bar{A} \cup \bar{B}| = |U| - |A \cap B|$

C.  $|A \cup B \cup \bar{C}| = |A| + |B| - |C|$

D.  $|A \cup \bar{B} \cup \bar{C}| = |A| - |B| - |C| + |B \cap C|$

答案: AB

## 21. 测验题 8.21

假定全集  $U$  是正整数集, 集合  $A$  是能被 3 整除的正整数集合, 集合  $B$  是能被 5 整除的正整数集合, 集合  $C$  是能被 7 整除的正整数集合, 下面哪些说法是正确的?

A. 能被 3 或 5 整除的正整数集合是  $A \cup B$

B. 能被 3, 5, 7 之一整除的正整数集合是  $A \cup B \cup C$

C. 不能被 3 或 5 整除的正整数集合是  $\bar{A} \cup \bar{B}$

D. 不能被 3, 5 或 7 之一整除的正整数集合是  $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

答案: AB

## 22. 测验题 8.22

假定全集  $U$  是正整数集, 集合  $A$  是能被 3 整除的正整数集合, 集合  $B$  是能被 5 整除的正整数集合, 集合  $C$  是能被 7 整除的正整数集合, 下面哪些说法是正确的?

- A. 能同时被 3 和 5 整除的正整数集合是  $A \cap B$
- B. 能被 3 整除, 但不能被 5 整除的正整数集合是  $A \cup \bar{B}$
- C. 或者被 3 整除, 或者被 5 整除, 或者不被 7 整除的正整数集合是  $A \cup B \cup \bar{C}$
- D. 能同时被 3 和 5 整除, 但不能被 7 整除的正整数集合是  $A \cap B \cup \bar{C}$

答案: AC

## 23. 测验题 8.23

假定全集  $U$  是计算机学院所有学生, 集合  $A$  是选修了数理逻辑课程的学生, 集合  $B$  是选修了数论课程的学生, 集合  $C$  是选修了抽象代数课程的学生, 下面哪些说法是正确的?

- A. 选修了数理逻辑、数论或抽象代数课程的学生集合是  $A \cup B \cup C$
- B. 只选修了数理逻辑而没有选修其他两门课程的学生集合是  $A \cap \overline{B \cap C}$
- C. 选修了数理逻辑或者没有选修抽象代数课程的学生集合是  $A \cap \bar{C}$
- D. 选修了数理逻辑或数论, 但没有选修抽象代数课程的集合是  $(A \cup B) \cap \bar{C}$

答案: AD

## 24. 测验题 8.24

假定全集  $U$  是所有三位正整数构成的集合, 集合  $A$  是能被 3 整除的正整数集合, 集合  $B$  是能被 5 整除的正整数集合, 集合  $C$  是能被 7 整除的正整数集合, 下面哪些计算是正确的?

- A.  $|A| = \lfloor (999 - 100)/3 \rfloor = 300$
- B.  $|B| = \lfloor 999/5 \rfloor - \lfloor 99/5 \rfloor = 180$
- C.  $|A \cap \bar{B}| = \lfloor 999/3 \rfloor - \lfloor 99/3 \rfloor - \lfloor 999/15 \rfloor + \lfloor 99/15 \rfloor = 240$
- D.  $|A \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = \lfloor 999/3 \rfloor - \lfloor 99/3 \rfloor - \lfloor 999/15 \rfloor + \lfloor 99/15 \rfloor - \lfloor 999/21 \rfloor + \lfloor 99/21 \rfloor = 197$

答案: BC

## 25. 测验题 8.25

假定全集  $U$  是所有三位正整数构成的集合, 集合  $A$  是能被 2 整除的正整数集合, 集合  $B$  是能被 4 整除的正整数集合, 集合  $C$  是能被 6 整除的正整数集合, 下面哪些计算是正确的?

- A.  $|A| = \lfloor (999 - 100)/2 \rfloor = 450$
- B.  $|A \cap B| = \lfloor 999/8 \rfloor - \lfloor 99/8 \rfloor = 112$

$$C. |B \cap C| = \lfloor 999/12 \rfloor - \lfloor 99/12 \rfloor = 75$$

$$D. |A \cap B \cap C| = \lfloor 999/48 \rfloor - \lfloor 99/48 \rfloor = 18$$

答案: C

解析: A 选项结果计算正确但是计算过程有误, 应该是  $|A| = \lfloor 999/2 \rfloor - \lfloor 99/2 \rfloor = 450$

## 26. 测验题 8.26

能被 2 或 3 整除的三位正整数有 (1) 个, 能被 5 但不能被 7 整除的三位正整数有 (2) 个, 不能被 3 或 5 整除的三位正整数有 (3) 个 (直接填写结果)。

答案: (1) 600 (2) 154 (3) 480

## 27. 测验题 8.27

能被 4 或 6 整除的三位正整数有 (1) 个, 能被 4 但不能被 6 整除的三位正整数有 (2) 个, 不能被 4 整除或者不能被 6 整除的三位正整数有 (3) 个 (直接填写结果)。

答案: (1) 300 (2) 150 (3) 825

## 28. 测验题 8.28

长度为 6 的二进制串以 1 开头的有 (1) 个, 长度为 6 的二进制串以 01 结束的有 (2) 个, 长度为 6 的二进制串以 1 开头或者以 01 结束的有 (3) 个 (直接填写结果)。

答案: (1) 32 (2) 16 (3) 40

## 29. 测验题 8.29

长度为 5 的三进制串以 1 开头的有 (1) 个, 长度为 5 的三进制串以 01 结束的有 (2) 个, 长度为 5 的三进制串以 1 开头或者以 01 结束的有 (3) 个 (直接填写结果)。

答案: (1) 81 (2) 27 (3) 99

## 30. 测验题 8.30

计算机学院一个班 40 名学生中有 20 人选修数理逻辑课程, 15 人选取数论课程, 有 5 人同时选修了这两门课程, 则这两门课程都没有选修的学生有 (1) 人, 只选修数理逻辑而没有选数论课程的学生有 (2) 人, 只选修了数论而没有选修数理逻辑课程的学生有 (3) 人。

答案: (1) 10 (2) 15 (3) 10

## 31. 测验题 8.31

假定计算机学院每位学生必须至少选修数理逻辑、数论和抽象代数三门课程之一。已知选修数理逻辑课程的学生有 170 人, 选修数论课程的学生有 130 人, 选修抽象代数课程的学生有 120 人,

同时选修数理逻辑和数论课程的学生有 50 人, 同时选修数理逻辑和抽象代数的学生有 20 人, 同时选修数论和抽象代数课程的学生有 25 人, 三门课程都选修的学生有 5 人, 则计算机学院总共有 (1) 位学生, 其中只选修了数理逻辑课程的学生有 (2) 人, 只选修了数论课程的学生有 (3) 人, 只选修了抽象代数课程的学生有 (4) 人。

答案: (1) 330 (2) 105 (3) 60 (4) 80

### 32. 测验题 8.32

含有数字 0 的三位正整数有 (1) 个, 含有数字 1 的三位正整数有 (2) 个, 含有数字 0 或数字 1 的三位正整数有 (3) 个。

答案: (1) 171 (2) 252 (3) 388

### 33. 测验题 8.33

如果一个班级每周班会的时间经常变动, 那么需要至少 (1) 周, 才能保证至少有两次班会的时间一周的同一天 (例如同是星期一) 召开。

答案: (1) 8

### 34. 测验题 8.34

至少需选取 (1) 个正整数才能保证其中至少有 2 个正整数的差是 10 的倍数。

答案: (1) 11

### 35. 测验题 8.35

至少需选取 (1) 个正整数才能保证其中至少有 10 个正整数整除 7 的余数都相同。

答案: (1) 64

### 36. 测验题 8.36

如果选修离散数学课程的学生总共有 199 人, 分为 6 个班级, 那么学生最多的班级至少有 (1) 人。

答案: (1) 34

### 37. 测验题 8.37

至少选修离散数学课程的学生有 (1) 人时分 6 个班级才会使得至少有一个班级的学生人数不会少于 30 人。

答案: (1) 175

**38. 测验题 8.38**

如果选修离散数学课程的学生总共有 199 人,至多分为 (1) 个班级时,才会使得至少有一个班级的学生人数不会少于 30 人。

答案: (1) 6

**39. 测验题 8.39**

从 10 本离散数学课程参考书,15 本程序设计课程参考书,18 本数据结构课程参考书和 6 本计算机组成原理课程参考书中,至少拿 (1) 本书才会使得至少有 2 本是同一个课程的参考书,至少拿 (2) 本书才会使得至少有 8 本是同一个课程的参考书。

答案: (1) 5 (2) 28

**40. 测验题 8.40**

从 10 本离散数学课程参考书, 15 本程序设计课程参考书, 18 本数据结构课程参考书和 6 本计算机组成原理课程参考书中,至少拿 (1) 本书才会使得至少有 10 本是同一个课程的参考书,至少拿 (2) 本书才会使得至少有 12 本是同一个课程的参考书。

答案: (1) 34 (2) 39

**41. 测验题 8.41**

下面的计数问题中属于 (不允许重复的) 排列问题的有哪些?

- A. 从班级 60 位学生中推选 3 位学生分别担任学生会主席、副主席和书记的方法数。
- B. 从班级 60 位学生中推选 3 位学生担任学生会干部的方法数。
- C. 从班级 60 位学生中推选 3 位学生各获得伍仟元奖学金的方法数。
- D. 从班级 60 位学生中推选 3 位学生分别获得一等奖学金壹万元, 二等奖学金伍仟元和三等奖学金贰仟元的方法数。

答案: AD

**42. 测验题 8.42**

下面的计数问题中属于 (不允许重复的) 排列问题的有哪些?

- A. 由数字 1,2,3,4,5,6 构成的六位数个数。
- B. 由数字 1,2,3,4,5,6 构成的数字不同的六位数个数。
- C. 长度为 6 的小写英文字符串个数。
- D. 长度为 6 的不出现重复字符的小写英文字符串个数。

答案: BD

**43. 测验题 8.43**

下面的计数问题中属于（不允许重复的）组合问题的有哪些？

- A. 从班级 60 位学生中推选 3 位学生分别担任学生会主席、副主席和书记的方法数。
- B. 从班级 60 位学生中推选 3 位学生担任学生会干部的方法数。
- C. 从班级 60 位学生中推选 3 位学生各获得伍仟元奖学金的方法数。
- D. 从班级 60 位学生中推选 3 位学生分别获得一等奖学金壹万元, 二等奖学金伍仟元和三等奖学金贰仟元的方法数。

答案: BC

**44. 测验题 8.44**

下面的计数问题中属于（不允许重复的）组合问题的有哪些？

- A. 长度为 6 的小写英文字符串个数。
- B. 长度为 6 的不出现重复字符的小写英文字符串个数。
- C. 长度为 6 的二进制串个数。
- D. 长度为 6 的包含 3 个 1 的二进串个数。

答案: D

**45. 测验题 8.45**

计算长度为 4, 含有字符 a 且不重复字符的小写英文字符串, 下面哪些解题思路是正确的？

- A. 字符 a 在 4 个位置中确定一个位置, 剩下是 25 个字符选 3 个进行排列, 因此答案是  $4 * P(25, 3)$ 。
- B. 长度为 4 且不重复字符的字符串总数是  $P(26, 4)$ , 其中不含字符 a 的不重复字符的字符串有  $P(25, 4)$  个, 因此答案是  $P(26, 4) - P(25, 4)$ 。
- C. 不含字符 a 且不重复字符的长度为 3 的字符串共有  $P(25, 3)$  个, 然后在每个三位串再插入一个 a, 插入的位置有 4 个, 因此答案是  $4 * P(25, 3)$  个。
- D. 字符 a 出现在第 1 位、第 2 位、第 3 位和第 4 位的不重复字符的长度为 4 的字符串分别有  $P(25, 3), P(25, 3), P(25, 3)$  和  $P(25, 3)$  个, 因此答案是  $4 * P(25, 3)$ 。

答案: ABCD

**46. 测验题 8.46**

计算含有数字 1 且数字不同的四位数正整数个数, 下面哪些解题思路是正确的？

- A. 数字 1 在四位数中确定一个位置, 然后剩下是 9 个数字选 3 个进行排列, 因此答案是  $4 * P(9, 3)$ 。
- B. 数字不同的四位数总数是  $9 * P(9, 3)$ , 不含数字 1 的数字不同的四位数有  $8 * P(8, 3)$  个, 因此答案是  $9 * P(9, 3) - 8 * P(8, 3)$ 。

C. 不含数字 1 的三位数字共有  $9 * 9 * 8$  个, 然后在每个三位数再插入一个 1, 插入的位置有 4 个, 因此答案是  $4 * 9 * 9 * 8$  个。

D. 数字 1 出现在千位、百位、个位和十位的数字不同的四位数分别有  $P(9, 3)$ ,  $8 * P(8, 2)$ ,  $8 * P(8, 2)$  和  $8 * P(8, 2)$  个, 因此答案是  $P(9, 3) + 3 * 8 * P(8, 2)$ 。

答案: BD

#### 47. 测验题 8.47

由数字 1,2,3,4,5,6 构成的数字不同的四位数有 (1) 个, 其中含有数字 1 的有 (2), 含有数字 2 的有 (3) 个, 含有数字 1 或数字 2 的有 (4) 个 (直接填写结果)。

答案: (1) 360 (2) 240 (3) 240 (4) 336

#### 48. 测验题 8.48

由数字 0,1,2,3,4,5,6 构成的数字不同的四位数有 (1) 个, 其中含有数字 0 的有 (2), 含有数字 1 的有 (3) 个, 含有数字 0 或数字 1 的有 (4) 个 (直接填写结果)。

答案: (1) 720 (2) 360 (3) 420 (4) 600

#### 49. 测验题 8.49

由数字 1,2,3,4,5,6 构成的数字不同且不包含 12 作为子串的四位数有 (1) 个, 由数字 1,2,3,4,5,6 构成的数字不同且包含 12 作为子串的四位数有 (2) 个 (直接填写结果)。

答案: (1) 324 (2) 36

#### 50. 测验题 8.50

下面哪些是对组合数  $C(n, r)$  的正确解释?

- A. 从有  $n$  个一模一样的球的袋子中选取  $r$  个球的方法数。
- B. 从有  $n$  个元素的集合中选取  $r$  个元素的方法数。
- C. 从有  $n$  位学生的班级中推选  $r$  位学生担任学生代表的方法数。
- D. 长度为  $n$  且含有  $r$  个 0 的二进制串个数。

答案: BCD

#### 51. 测验题 8.51

下面对于组合数的计算哪些是正确的?

- A.  $C(8, 4) = (8 * 7 * 6 * 5 * 4) / (4 * 3 * 2 * 1) = 280$
- B.  $C(7, 5) = (7 * 6 * 5) / (1 * 2) = 105$
- C.  $C(6, 3) = 6! / (2 * 3!) = 60$



$$D. C(9, 4) = (9 * 8 * 7 * 6) / (1 * 2 * 3 * 4) = 126$$

答案: D

## 52. 测验题 8.52

下面使用组合数对计数问题进行求解哪些是正确的?

- A. 长度为 10 含有 5 个元音字母的英文小写字符串的个数是  $C(26, 10) * C(10, 5)$ 。
- B. 长度为 10 含有 5 个 1 的二进制串的个数是  $C(10, 5)$
- C. 从 10 个学生中推选 5 位学生任学生代表的方法数是  $C(10, 5)$
- D. 从 10 个学生中推选 5 位学生依次发言的方法数是  $C(10, 5)$

答案: BC

## 53. 测验题 8.53

下面使用组合数对计数问题进行求解哪些是正确的?

- A. 长度为 10 至多含有 3 个 1 的二进制串的个数是  $C(10, 0) + C(10, 1) + C(10, 2) + C(10, 3)$
- B. 长度为 10 至少含有 3 个 1 的二进制串的个数是  $C(10, 0) + C(10, 1) + C(10, 2) + C(10, 3)$
- C. 长度为 10 恰好含有 3 个 1 的二进制串的个数是  $C(10, 0) + C(10, 1) + C(10, 2) + C(10, 3)$
- D. 长度为 10 而且没有 3 个 1 的二进制串的个数是  $2^{10} - C(10, 3)$

答案: A

## 54. 测验题 8.54

下面使用组合数对计数问题进行求解哪些是正确的?

- A. 长度为 8 且恰好含有 3 个 0 的三进制串有  $C(8, 3)$  个。
- B. 长度为 8 且至少含有 3 个 0 的三进制串有  $3^8 - (2^8 + C(8, 1) * 2^7 + C(8, 2) * 2^6)$  个。
- C. 长度为 8 且至多含有 3 个 0 的三进制串有  $C(8, 0) + C(8, 1) + C(8, 2) + C(8, 3)$  个。
- D. 长度为 8 且没有含有 3 个 0 的三进制串有  $2^8 + C(8, 1) * 2^7 + C(8, 2) * 2^6$  个。

答案: BD

## 55. 测验题 8.55

下面使用组合数对计数问题进行求解哪些是正确的?

- A. 从计算机学院 40 位学生、10 位教师中推选恰好包含 3 位教师的 8 位代表的方法数有  $C(50, 8)$  种。
- B. 从计算机学院 20 位男生, 15 位女生中推选至少包含 3 位女生的 8 位代表的方法数有  $C(15, 3) * C(20 + 12, 5)$  种。

C. 从计算机学院 20 位男生、15 位女生中推选至多包含 3 位女生的 8 位代表的方法数有  $C(20, 5) * C(15 + 15, 3)$  种。

D. 从计算机学院 20 位软件专业学生、15 位系统专业学生和 10 位应用专业学生推选恰好包含 3 位软件专业、2 位系统专业和 3 位应用专业共 8 位学生代表的方法数有  $C(20, 3) * C(15, 2) * C(10, 3)$  种

答案: D

### 56. 测验题 8.56

计算长度为 4, 含有字符 a 且允许重复字符的小写英文字符串, 下面哪些解题思路是正确的?

A. 字符 a 在 4 个位置中确定一个位置, 剩下每个位置都可是其他任意字符, 因此答案是  $4 * 25^3$

B. 长度为 4 的字符串有  $26^4$  个, 其中不含字符 a 的有  $25^4$  个, 因此答案是  $26^4 - 25^4$ 。

C. 不含字符 a 且长度为 3 的字符串共有  $25^3$  个, 然后在每个三位串再插入一个 a, 插入的位置有 4 个, 因此答案是  $4 * 25^3$  个。

D. 字符 a 出现在第 1 位、第 2 位、第 3 位和第 4 位的长度为 4 的字符串分别有  $25^3, 25^3, 25^3$  和  $25^3$  个, 因此答案是  $4 * 25^3$ 。

答案: B

### 57. 测验题 8.57

计算含有数字 1 的四位数正整数个数, 下面哪些解题思路是正确的?

A. 数字 1 在四位数中确定一个位置. 然后剩下是 9 个数字选 3 个, 因此答案是  $4 * C(9, 3)$ 。

B. 四位数总数是 9000 个, 不含数字 1 的四位数有  $8 * 9^3$  个, 因此答案是  $9000 - 8 * 9^3$ 。

C. 不含数字 1 的三位数字共有  $8 * 9^2$  个, 然后在每个三位数再插入一个 1, 插入的位置有 4 个, 因此答案是  $4 * 8 * 9^2$  个。

D. 数字 1 出现在千位、百位、个位和十位的四位数分别有  $9^3, 8 * 9^2, 8 * 9^2$  和  $8 * 9^2$  个, 因此答案是  $9^3 + 3 * 8 * 9^2$ 。

答案: B

### 58. 测验题 8.58

长度为 10 且恰好含有 3 个 0 的二进制串有 (1) 个, 长度为 10 且至少含有 3 个 0 的二进制串有 (2) 个, 长度为 10 且至多含有 3 个 0 的二进制串有 (3) 个 (直接填写结果)。

答案: (1) 120 (2) 968 (3) 176

解析: (2)  $2^{10} - C(10, 0) - C(10, 1) - C(10, 2) = 968$

**59. 测验题 8.59**

长度为 6 且恰好含有 3 个 0 的三进制串有 (1) 个, 长度为 6 且至少含有 3 个 0 的三进制串有 (2) 个, 长度为 6 且至多含有 3 个 0 的三进制串有 (3) 个 (直接填写结果)。

答案: (1) 160 (2) 233 (3) 656

**60. 测验题 8.60**

在长度为 8 的三进制串中, 有 (1) 个恰好含有 2 个 0 且恰好含有 2 个 1, 又有 (2) 个至少含有 2 个 0 或至少含有 2 个 1, 又有 (3) 个至多含有 2 个 0 或至多含有 2 个 1 (直接填写结果)。

答案: (1) 420 (2) 6488 (3) 5259

解析: (3) 即求 0 和 1 的数量不同时多于两个的字符串的数量, 它的反面是 0 和 1 的数量同时大于 2, 只有这几种情况: (3,3)、(3,4)、(3,5)、(4,3)、(4,4)、(5,3)。因此总数为  $3^8 - C(8,3) \times C(5,3) - C(8,3) \times C(5,4) - C(8,3) \times C(5,5) - C(8,4) \times C(4,3) - C(8,4) \times C(4,4) - C(8,5) \times C(3,3) = 5259$

**61. 测验题 8.61**

从计算机学院 10 位男生、8 位女生中推选 5 位学生代表, 其中有 (1) 种推选方法恰好有 2 位女生, 又有 (2) 种推选方法至少有 2 位女生, 又有 (3) 个推选方法至多有 2 位女生 (直接填写结果)。

答案: (1) 3360 (2) 6636 (3) 5292

**62. 测验题 8.62**

从计算机学院 10 位软件专业学生、8 位系统专业学生和 6 为应用专业学生中推选 5 位学生代表, 其中有 (1) 种方法推选的代表恰好全由其中一个专业的学生构成, 又有 (2) 种方法推选的代表恰好全由其中两个专业的学生构成 (直接填写结果)。

答案: (1) 314 (2) 14310

解析: 第二问要记得减去由一个专业学生构成的情况:  $C(18,5) + C(16,5) + C(14,5) - 2 \times 314 = 14310$  (每一次计算两个专业的时候都算了一次仅含一个专业的, 因此要减去两倍的 314)。

**63. 测验题 8.63**

从计算机学院 10 位软件专业学生、8 位系统专业学生和 6 为应用专业学生中推选 5 位学生代表, 其中有 (1) 种推选方法恰好有 2 位软件专业学生, 又有 (2) 种推选方法每个专业都至少有一位学生 (直接填写结果)。

答案: (1) 16380 (2) 27880

## 64. 测验题 8.64

- A.  $C(n-1, k-1)C(n, k)C(n+1, k+1) = C(n-1, k)C(n, k+1)C(n+1, k-1), n \geq 1, 1 \leq k < n$
- B.  $C(n, m)C(m, k) = C(n, k)C(n-k, m-k), n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0, k \leq m \leq n$
- C.  $k * C(n, k) = n * C(n-1, k-1), n \geq 0, k \geq 0, 1 \leq k < n$
- D.  $k * C(n, k) = (n-k+1)C(n, n-k+1), n \geq 0, k \geq 0, 1 \leq k < n$

答案: BCD

## 65. 测验题 8.65

下面哪些组合等式是正确的?

- A.  $C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k), n \geq 1, k \geq 1$
- B.  $\sum_{k=0}^n C(k, m) = C(n+1, m+1), n \geq 0, m \geq 0$
- C.  $C(n, 2) + n^2 = C(2n, 2), n \geq 0$
- D.  $\sum_{k=0}^r C(m, r-k)C(n, n-k) = C(m+n, r), m \geq 0, n \geq 0, 0 \leq r \leq m, 0 \leq r \leq n$

答案: BD

## 66. 测验题 8.66

下面哪些组合等式是正确的?

- A.  $\sum_{k=1}^n C(k, 1) = C(n+1, 2), n \geq 1$
- B.  $\sum_{k=1}^n kC(n, k) = n * 2^n, n \geq 1$
- C.  $\sum_{k=1}^n k[C(n, k)]^2 = n * C(2n-1, n-1), n \geq 1$
- D.  $\sum_{k=1}^n C(n, k)C(n, k-1) = C(2n+1, n+1)/2 - C(2n, n), n \geq 1$

答案: AC

解析: D 选项应为  $\sum_{k=1}^n C(n, k)C(n, k-1) = C(2n+1, n+1) - C(2n, n) = C(2n, n+1), n \geq 1$

详细证明见课本练习题 8.33 (要注意练习题的题干写错了, 应为  $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} = \binom{2n+2}{n+1}/2 - \binom{2n}{n}$ 。课本写的与 D 选项一致。正确的式子和证明可以直接查看课本答案。)

## 67. 测验题 8.67

下面的计数问题中属于允许重复的排列问题的有暇些?

- A. 由数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 构成的六位数个数。
- B. 由数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 构成的数字不同的六位数个数。
- C. 长度为 6 的小写英文字符串个数。
- D. 长度为 6 的不出现重复字符的小写英文字符串个数。

答案: AC

**68. 测验题 8.68**

下面的计数问题中属于允许重复的排列问题的有哪些?

- A. 从班级 60 位学生中推选 5 位代表进行依次发言的方法数。
- B. 从班级 60 位学生中推选 3 位学生获得一等奖学金壹万元,5 学生获得二等奖学金伍仟元和 10 位学生获得三等奖学金贰仟元的方法数。
- C. 从班级 60 位学生中推选 8 位学生担任学生会干部的方法数。
- D. 从班级 60 位学生中推选 8 位学生各获得伍仟元奖学金的方法数。

答案: B

**69. 测验题 8.69**

下面的计数问题中属于允许重复的组合问题的有哪些?

- A. 从 10 种苹果中选取 3 种苹果的方法数。
- B. 从一堆苹果、一堆梨子和一堆橙子中选 20 个水果的方法数。
- C. 从 10 个苹果、20 个梨子和 30 个橙子中选 20 个水果的方法数。
- D. 从 10 位软件专业学生, 20 位系统专业学生和 30 位应用专业学生选 20 位学生作为代表的方法数。

答案: BC

**70. 测验题 8.70**

下面的计数问题中属于允许重复的组合问题的有哪些?

- A. 将编号为 1 到  $n$  的  $n$  个球放到编号为 1 到  $m$  的盒子的方法数。
- B. 将编号为 1 到  $n$  的  $n$  个球放到不可区别的  $m$  个盒子的方法数。
- C. 将  $n$  个不可区别的球放到编号为 1 到  $m$  的盒子的方法数。
- D. 将  $n$  个不可区别的球放到不可区别的  $m$  个盒子的方法数。

答案: C

**71. 测验题 8.71**

对于从个数不限的  $n$  类物体允许重复地选  $r$  个物体的方法数, 下面哪些说法是正确的?

- A. 这等于将  $n$  个不可区别的球放到  $r$  个可区别的盒子中的方法数。
- B. 这等于将  $r$  个不可区别的球放到  $n$  个可区别的盒子中的方法数。
- C. 这等于由  $n$  个 1 和  $r$  个 0 能构成的二进制串的个数。
- D. 这等于不定方程  $x_1 + \cdots + x_n = r$  的正整数解个数。

答案: B

**72. 测验题 8.72**

对于从一堆苹果、一堆梨子、一堆橙子和一堆橘子中选 10 个水果的方法数, 下面哪些说法是正确的?

- A. 这等于将 10 个不可区别的球放到 4 个可区别的盒子中的方法数。
- B. 这等于长度为 14 且含有 10 个 1 的二进制串个数。
- C. 这等于长度为 13 且含有 3 个 0 的二进制串个数。
- D. 这等于不定方程  $x_1 + \cdots + x_4 = 10$  的正整数解个数。

答案: AC

**73. 测验题 8.73**

对于从一叠语文书、一叠数学书、一叠历史书和一叠政治书中选 10 本书的方法数, 下面哪些说法是正确的?

- A. 这等于将 10 本作业本分别放到标有语文、数学、历史和政治的袋子中的方法数。
- B. 这等于用 3 个 0 将 10 个 1 分隔成 4 段而构成的长度为 13 的二进制串个数。
- C. 这等于 10 个星星和 3 条竖线排成一行的不同排列个数。
- D. 这等于不定方程  $x_1 + \cdots + x_4 = 10$  的正整数解个数。

答案: ABC

**74. 测验题 8.74**

对于从一堆苹果、一堆梨子、一堆橙子和一堆橘子中选 10 个水果且至少要有 2 个苹果、3 个梨子的方法数, 下面哪些说法是正确的?

- A. 这等于从这 4 堆水果中选 5 个水果的方法数, 因此等于  $C(5, 4)$ 。
- B. 这等于长度为 13 含有 3 个 0 且第一个 0 之前至少 2 个 1, 第一个 0 和第二 0 之间至少 3 个 1 的二进制串个数。
- C. 这等于长度为 9 且含有 5 个 1 的二进制串个数, 即等于  $C(9, 5)$ 。
- D. 这等于不定方程  $x_1 + \cdots + x_4 = 10$  满足  $x_1 \geq 2, x_2 \geq 3$  的非负整数解个数。

答案: BD

**75. 测验题 8.75**

从 8 个苹果, 10 个梨子, 12 个橙子和 14 个橘子中选 6 个水果的方法数是

- A.  $C(44, 6)$
- B.  $C(10, 6)$
- C.  $C(9, 6)$
- D.  $C(11, 6)$

答案: C

### 76. 测验题 8.76

从 10 本语文书, 10 本数学书, 10 本历史书和 10 本政治书中选 6 本书的方法数是

- A.  $C(40, 6)$
- B.  $C(12, 6)$
- C.  $C(10, 6)$
- D.  $C(9, 6)$

答案: D

### 77. 测验题 8.77

对于不等式  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 15$  满足  $x_1 \geq 2, x_2 \geq 3$  的非负整数解个数. 下面哪个说法是正确的?

- A. 这等于不定方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$  满足  $x_1 \geq 2, x_2 \geq 3$  的非负整数解个数。
- B. 这等于不定方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$  满足  $x_1 \geq 2, x_2 \geq 3$  的非负整数解个数。
- C. 这等于不定方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$  满足  $x_1 \geq 2, x_2 \geq 3$  的非负整数解个数。
- D. 这等于不定方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$  的非负整数解个数。

答案: C

### 78. 测验题 8.78

对于不等式  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$  满足  $x_1 \leq 4, x_2 \leq 5$  的非负整数解个数, 下面哪个说法是正确的?

- A. 这等于  $x_1 + x_2 + x_3 = 15$  满足  $x_1 \leq 4, x_2 \leq 5$  的非负整数解个数。
- B. 这等于  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$  的非负整数解总数减去其中满足  $x_1 > 4$  或  $x_2 > 5$  的解个数。
- C. 这等于  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$  的非负整数解总数减去其中满足  $x_1 \geq 4$  且  $x_2 \geq 5$  的解个数。
- D. 这等于  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$  的非负整数解总数减去其中满足  $x_1 \geq 4$  或  $x_2 \geq 5$  的解个数。

答案: B

### 79. 测验题 8.79

对于不定方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$  满足  $x_1 < 5, x_2 < 6$  的非负整数解个数, 下面哪个说法是正确的?

- A. 这等于  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$  的非负整数解总数减去其中满足  $x_1 \geq 5$  的解个数。
- B. 这等于  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$  的非负整数解总数减去其中满足  $x_2 \geq 6$  的解个数。
- C. 这等于  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$  的非负整数解总数减去其中满足  $x_1 \geq 5$  且  $x_2 \geq 6$  的解个数。

D. 这等于  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$  的非负整数解总数减去其中满足  $x_1 \geq 5$  或  $x_2 \geq 6$  的解个数。

答案: D

### 80. 测验题 8.80

对于不定方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$  满足  $2 \leq x_1 \leq 6, 3 \leq x_2 \leq 8$  的非负整数解个数, 下面哪个说法是正确的?

A. 这等于不定方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$  的非负整数解总数减去其中满足  $x_1 \geq 7$  或  $x_2 \geq 9$  的解个数。

B. 这等于不定方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$  的非负整数解总数减去其中满足  $x_1 \geq 6$  或  $x_2 \geq 8$  的解个数。

C. 这等于不定方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$  满足  $x_1 \leq 6$  且  $x_2 \leq 8$  的非负整数解个数。

D. 这等于不定方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$  的非负整数解总数减去其中满足  $x_1 \geq 6$  且  $x_2 \geq 8$  的解个数。

答案: A

### 81. 测验题 8.81

用 3 个字母 a, 2 个字母 b 和 5 个 c 能组成 (1) 个长度为 10 的字母串。

答案: (1) 2520

### 82. 测验题 8.82

用数 6688822211 中的数字能组成 (1) 个 10 位数。

答案: (1) 25200

### 83. 测验题 8.83

从 8 个苹果, 8 个梨子和 8 个橙子中选 6 个水果的方法数是 (1), 而从 8 个苹果, 8 个梨子和 8 个橙子中选 10 个水果的方法数是 (2)。

答案: (1) 28 (2) 57

解析: (2) 这道题可以先算出所有的情况再减去三种之中有任意一种多于 8 个的情况。这些情况包含: (9,1,0) 以及 (10,0,0), 前者有 6 种排列, 后者有 3 种。因此答案为  $C(12, 2) - 6 - 3 = 57$ 。

### 84. 测验题 8.84

从 6 本语文书, 6 本数学书和 6 本物理书中选 4 本书的方法数是 (1), 而从 6 本语文书, 6 本数学书和 6 本物理书中选 8 本书的方法数是 (2)。

答案: (1) 15 (2) 36



解析：(1) 注意不是  $C(18, 4)$ , 这里考虑的每种书都是一样的。(2) 同理不是  $C(18, 8)$ 。

### 85. 测验题 8.85

不等式  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$  的非负整数解中, 有 (1) 个满足  $x_1 \geq 5$  且  $x_2 \geq 2$  的解, 有 (2) 个满足  $x_1 \geq 5$  且  $x_2 \geq 5$  的解, 有 (3) 个满足  $2 \leq x_1 \leq 4$  且  $2 \leq x_2 \leq 4$  的解。

答案: (1) 56 (2) 10 (3) 63

### 86. 测验题 8.86

不定方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$  的非负整数解中, 有 (1) 个满足  $x_1 \geq 6$  且  $x_2 \geq 3$  的解, 有 (2) 个满足  $x_1 \geq 6$  且  $x_2 \geq 6$  的解, 有 (3) 个满足  $3 \leq x_1 \leq 5$  且  $3 \leq x_2 \leq 5$  的解。

答案: (1) 120 (2) 35 (3) 81

### 87. 测验题 8.87

设集合  $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ , 下面哪些数字串是集合  $S$  的 6 排列?

- A. 563471
- B. 346325
- C. 132518
- D. 458671

答案: AD

### 88. 测验题 8.88

设集合  $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ , 下面哪些数字串是集合  $S$  的 6 组合?

- A. 563471
- B. 134567
- C. 133566
- D. 234678

答案: BD

解析: 注意 1、非降序 2、默认情况下不重复 (例如测验题 8.89 明确说明了允许重复才可以重复)。

### 89. 测验题 8.89

设集合  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , 下面哪些数字串可表示从集合  $S$  允许重复选 6 个数字的组合?

- A. 563471
- B. 134567

C. 133566

D. 468871

答案: BC

解析: 数字的组合要求数字以非降序进行排列。

### 90. 测验题 8.90

设集合  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , 下面作为  $S$  的全排列的数字串哪个是以 15 开头的最大串?

A. 15672348

B. 15876342

C. 15678243

D. 15876432

答案: D

### 91. 测验题 8.91

设集合  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , 下面作为  $S$  的全排列的数字串哪个是以 15 开头的最小串?

A. 15672348

B. 15234876

C. 15234678

D. 15876432

答案: C

### 92. 测验题 8.92

设集合  $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ , 在基于词典序的  $S$  全排列生成中, 数字串 15234876 的下一个串是哪个?

A. 15243678

B. 15236478

C. 15234678

D. 15876432

答案: B

### 93. 测验题 8.93

设集合  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , 在基于词典序的  $S$  全排列生成中, 数字串 15876432 的下一个串是哪个?

A. 15243678

- B. 15236478
- C. 16234578
- D. 16875432

答案: C

#### 94. 测验题 8.94

设集合  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , 在基于词典序的  $S$  的 5 组合生成中, 数字串 12478 的下一个串是哪个?

- A. 13456
- B. 14578
- C. 12578
- D. 12567

答案: D

#### 95. 测验题 8.95

设集合  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , 在基于词典序的  $S$  的 5 组合生成中, 数字串 24678 的下一个串是哪个?

- A. 34678
- B. 25678
- C. 24671
- D. 28765

答案: B

#### 96. 测验题 8.96

下面关于递推关系式说法正确的有哪些?

- A. 等式  $a_n = (a_{n+1} + a_{n-1}) / 2, n \geq 1$  是序列  $a_n$  的一个递推关系式。
- B. 等式  $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2}) / 2, n \geq 2$  是序列  $a_n$  的一个递推关系式。
- C. 等式  $a_n = 3^n + 4^{n-1} + a_{n-1}$  是序列  $a_n$  的一个递推关系式的封闭公式解。
- D. 等式  $a_n = 2^n$  是序列  $a_n$  的递推关系式  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$  的封闭公式解。

答案: BD

解析: 猜测 B 选项应为  $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2}) / 2, n \geq 2$

## 97. 测验题 8.97

记长度为  $n$  且不含有连续两个 0 的二进制串个数为  $a_n$ , 且其中以 0 开始的串个数记为  $a_n^0$ , 以 1 开始的串个数记为  $a_n^1$ , 即  $a_n = a_n^0 + a_n^1$ , 下面关于序列  $\{a_n\}$  的说法哪些是正确的?

A. 长度为  $n$  且不含有连续两个 0, 以 0 开头的二进制串在开头的 0 之后可以是任意长度为  $n-1$  且不含有连续两个 0 的二进制串, 因此  $a_n^0 = a_{n-1}, n \geq 1$ 。

B. 长度为  $n$  且不含有连续两个 0, 以 1 开头的二进制串在开头的 1 之后必须是长度为  $n-1$  且不含有连续两个 0 以 0 开头的二进制串, 因此  $a_n^1 = a_{n-1}^0, n \geq 1$ 。

C. 长度为  $n$  且不含有连续两个 0, 以 0 开头的二进制串在开头的 0 之后必须是长度为  $n-1$  且不含有连续两个 0 以 1 开头的二进制串, 因此  $a_n^0 = a_{n-1}^1, n \geq 1$ 。

D. 序列  $\{a_n\}$  的一个递推关系式是  $a_n = a_n^0 + a_n^1 = a_{n-2} + a_{n-1}, n \geq 2$ , 且  $a_0 = 1, a_1 = 2$ 。

答案: CD

## 98. 测验题 8.98

记长度为  $n$  且含有子串 01 的二进制串个数为  $a_n$ , 且其中以 0 开始的串个数记为  $a_n^0$ , 以 1 开始的串个数记为  $a_n^1$ , 即  $a_n = a_n^0 + a_n^1$ , 下面关于序列  $\{a_n\}$  的说法哪些是正确的?

A. 长度为  $n$  且含有子串 01, 以 0 开头的二进制串在开头的 0 之后可以是任意长度为  $n-1$  且含有子串 01 的二进制串, 因此  $a_n^0 = a_{n-1}, n \geq 1$ 。

B. 对长度为  $n$  且含有子串 01, 以 0 开头的二进制串个数, 有  $a_n^0 = a_{n-1}^0 + 2^{n-2}$ , 从而  $a_n^0 = 2^{n-1} - 1, n \geq 1$ 。

C. 长度为  $n$  且含有子串 01, 以 1 开头的二进制串在开头的 1 之后可以是任意长度为  $n-1$  且含有子串 01 的二进制串, 因此  $a_n^1 = a_{n-1}, n \geq 1$ 。

D. 序列  $\{a_n\}$  的一个递推关系式是  $a_n = a_n^0 + a_n^1 = a_{n-1} + 2^{n-1} - 1, n \geq 1$ , 且  $a_0 = 0$ 。

答案: BCD

## 99. 测验题 8.99

记长度为  $n$  且含有连续两个 0 的三进制串个数为  $a_n$ , 且其中以 0 开始的串个数记为  $a_n^0$ , 以 1 开始的串个数记为  $a_n^1$ , 以 2 开始的串个数记为  $a_n^2$ , 即  $a_n = a_n^0 + a_n^1 + a_n^2$ , 下面关于序列  $\{a_n\}$  的说法哪些是正确的?

A. 对以 0 开头长度为  $n$  且含有连续两个 0 个数, 有  $a_n^0 = 3^{n-2} + a_{n-1}^1 + a_{n-1}^2$ 。

B. 对以 1 开头长度为  $n$  且含有连续两个 0 个数, 有  $a_n^1 = 3^{n-2} + a_{n-1}^0 + a_{n-1}^2$ 。

C. 对以 2 开头长度为  $n$  且含有连续两个 0 个数, 有  $a_n^2 = 3^{n-2} + a_{n-1}^0 + a_{n-1}^1$ 。

D. 序列  $\{a_n\}$  的一个递推关系式是  $a_n = a_n^0 + a_n^1 + a_n^2 = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3^{n-2}, n \geq 2$ , 且  $a_0 = 0, a_1 = 0$ 。

答案: AD

## 100. 测验题 8.100

记长度为  $n$  且不含有连续两个 0 也不含有连续两个 1 的三进制串个数为  $a_n$ , 且其中以 0 开始的串个数记为  $a_n^0$ , 以 1 开始的串个数记为  $a_n^1$ , 以 2 开始的串个数记为  $a_n^2$ , 即  $a_n = a_n^0 + a_n^1 + a_n^2$ , 下面关于序列  $\{a_n\}$  的说法哪些是正确的?

A. 对以 0 开头长度为  $n$  且不含有连续两个 0 也不含有连续两个 1 的三进制串个数, 有  $a_n^0 = a_{n-1}^1 + a_{n-1}^2$ .

B. 对以 1 开头长度为  $n$  且不含有连续两个 0 也不含有连续两个 1 的三进制串个数, 有  $a_n^1 = a_{n-1}^0 + a_{n-1}^2$ .

C. 对以 2 开头长度为  $n$  且不含有连续两个 0 也不含有连续两个 1 的三进制串个数, 有  $a_n^2 = a_{n-1}^0 + a_{n-1}^1$ .

D. 序列  $\{a_n\}$  的一个递推关系式是  $a_n = a_n^0 + a_n^1 + a_n^2 = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ , 且  $a_0 = 1, a_1 = 3$ .

答案: ABD

解析: C 选项应为  $a_n^2 = a_{n-1}^0 + a_{n-1}^1 + a_{n-2}$ , 长度为  $n$  的字符串以 2 开头分为三种情况: 1. 以 0 开头, 长度为  $n-1$ ; 2. 以 1 开头, 长度为  $n-1$ ; 3. 以 2 开头, 长度为  $n-2$ 。前两者的个数分别为  $a_{n-1}^0$  和  $a_{n-1}^1$ , 第三种情况相当于长度为  $n$  的字符串开头为两个 2, 只需后面的  $n-2$  个字符满足条件即可, 个数为  $a_{n-2}$ 。

## 101. 测验题 8.101

下面哪些递推关系式是常系数线性齐次递推关系式?

A. 序列  $\{a_n\}$  的递推关系式  $a_n = a_{n-1} + (n-1), n \geq 1$

B. 序列  $\{b_n\}$  的递推关系式  $b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}, n \geq 2$

C. 序列  $\{c_n\}$  的递推关系式  $c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \cdots + c_{n-1}c_0, n \geq 1$

D. 序列  $\{d_n\}$  的递推关系式  $d_n = 2d_{n-1} + 2d_{n-2} + 3^{n-2}, n \geq 2$

E. 序列  $\{e_n\}$  的递推关系式  $e_n = (n-1)(e_{n-1} + e_{n-2}), n \geq 2$

F. 序列  $\{f_n\}$  的递推关系式  $f_n = -4f_{n-1} - 9f_{n-2}, n \geq 2$

G. 序列  $\{g_n\}$  的递推关系式  $g_n = 3g_{n-1} - 5g_{n-2} + 1, n \geq 2$

答案: BF

## 102. 测验题 8.102

下面哪些递推关系式是常系数线性非齐次递推关系式?

A. 序列  $\{a_n\}$  的递推关系式  $a_n = a_{n-1} + (n-1), n \geq 1$

B. 序列  $\{b_n\}$  的递推关系式  $b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}, n \geq 2$

C. 序列  $\{c_n\}$  的递推关系式  $c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \cdots + c_{n-1}c_0, n \geq 1$

D. 序列  $\{d_n\}$  的递推关系式  $d_n = 2d_{n-1} + 2d_{n-2} + 3^{n-2}, n \geq 2$

E. 序列  $\{e_n\}$  的递推关系式  $e_n = (n-1)(e_{n-1} + e_{n-2}), n \geq 2$

F. 序列  $\{f_n\}$  的递推关系式  $f_n = -4f_{n-1} - 9f_{n-2}, n \geq 2$

G. 序列  $\{g_n\}$  的递推关系式  $g_n = 3g_{n-1} - 5g_{n-2} + 1, n \geq 2$

答案: ADG

### 103. 测验题 8.103

对于序列  $\{a_n\}$  的递推关系式  $a_n = 10a_{n-1} - 24a_{n-2}$  和初始条件  $a_0 = 1, a_1 = 0$ , 下面哪些说法是正确的?

A. 该递推关系式的特征方程是  $x^2 + 10x - 24 = 0$ 。

B. 令序列  $b_n = a_n - 4a_{n-1}, n \geq 1$ , 则  $b_n = -4 \cdot 6^{n-1}, n \geq 2$ 。

C. 该递推关系式的解具有形式  $\beta_1 n 6^n + \beta_2 4^n$ , 其中  $\beta_1, \beta_2$  是待定系数。

D. 序列  $a_n$  的通项公式是  $a_n = 3 \cdot 4^n - 2 \cdot 6^n$ 。

答案: BD

### 104. 测验题 8.104

对于序列  $\{a_n\}$  的递推关系式  $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$  和初始条件  $a_0 = 1, a_1 = 2$ , 下面哪些说法是正确的?

A. 该递推关系式的特征方程是  $x^2 - 4x + 4 = 0$ 。

B. 令序列  $b_n = a_n - 2a_{n-1}, n \geq 1$ , 则  $b_n = 2^n, n \geq 2$ 。

C. 该递推关系式的解具有形式  $\beta_1 n 2^n + \beta_2 2^n$ , 其中  $\beta_1, \beta_2$  是待定系数。

D. 序列  $a_n$  的通项公式是  $a_n = 2^n$ 。

答案: ACD

### 105. 测验题 8.105

下面关于线性非齐次递推关系式的特解的说法哪些是正确的?

A. 递推关系式  $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4} + 2^n$  的一个特解是  $p_0 2^n$ , 其中  $p_0$  是待定系数。

B. 递推关系式  $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4} + n^2 2^n$  的一个特解是  $n^2(p_0 + p_1 n + p_2 n^2) 2^n$ , 其中  $p_0, p_1, p_2$  是待定系数。

C. 递推关系式  $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4} + n^2 4^n$  的一个特解是  $n^2 p_0 2^n$ , 其中  $p_0$  是待定系数。

D. 递推关系式  $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4} + 2$  的一个特解是  $p_0$ , 其中  $p_0$  是待定系数。

答案: BD

### 106. 测验题 8.106

下面关于线性非齐次递推关系式的特解的说法哪些是正确的?

- A. 递推关系式  $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2^n$  的一个特解是  $p_0 2^n$ , 其中  $p_0$  是待定系数。
- B. 递推关系式  $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + n^2 2^n$  的一个特解是  $n^2 (p_0 + p_1 n + p_2 n^2) 2^n$ , 其中  $p_0, p_1, p_2$  是待定系数。
- C. 递推关系式  $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + n^2$  的一个特解是  $p_0 n^2$ , 其中  $p_0$  是待定系数。
- D. 递推关系式  $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2$  的一个特解是  $p_0$ , 其中  $p_0$  是待定系数。

答案: A

### 107. 测验题 8.107

对于序列  $\{a_n\}$  的递推关系式  $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2, n \geq 1$  和初始条件  $a_0 = 1$ , 下面哪些说法是正确的?

- A. 该递推关系式的伴随齐次递推关系式的特征方程是  $x = 2 + 2n^2$ .
- B. 该递推关系式的一个特解具有形式  $2n^2$ .
- C. 为确定该递推关系式的一个特解  $p_0 n^2$  中的待定系数  $p_0$ , 利用初始条件  $a_0 = 1$  则可解得  $p_0$ .
- D. 将该递推关系式的一个特解  $p_0 + p_1 n + p_2 n^2$  代入得

$$(p_0 + p_1 n + p_2 n^2) = 2(p_0 + p_1(n-1) + p_2(n-1)^2) + 2n^2$$

整理可得  $(p_2 + 2)n^2 + (p_1 - 4p_2)n + (2p_2 - 2p_1 + p_0) = 0$ , 这个等式对于所有大于 1 的  $n$  成立, 因此  $p_2 + 2 = 0, p_1 - 4p_2 = 0$  且  $2p_2 - 2p_1 + p_0 = 0$ , 从而可解得  $p_2 = -2, p_1 = -8, p_0 = -12$ , 因此该递推关系式的一个特解是  $-12 - 8n - 2n^2$ .

答案: D

### 108. 测验题 8.108

对于序列  $\{a_n\}$  的递推关系式  $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 3^n, n \geq 2$  和初始条件  $a_0 = 0, a_1 = 1$ , 下面哪些说法是正确的?

- A. 该递推关系式的伴随齐次递推关系式的特征方程是  $x^2 = 6x - 9$ 。
- B. 该递推关系式的一个特解具有形式  $p_0 3^n$ 。
- C. 为确定该递推关系式的一个特解  $p_0 3^n$  中的待定系数  $p_0$ , 利用初始条件  $a_0 = 0, a_1 = 1$  则可解得  $p_0$ 。
- D. 将该递推关系式的一个特解  $n^2 p_0 3^n$  代入得到

$$n^2 p_0 3^n = 6(n-1)^2 p_0 3^{n-1} - 9(n-2)^2 p_0 3^{n-2} + n 3^n$$

整理可得  $9 - 18p_0 = 0$ , 从而  $p_0 = 1/2$ , 因此该递推关系式的一个特解是  $\frac{n^2 3^n}{2}$ 。

答案: AD

解析: D 选项其实有问题, 代入特解后的最后一项应该是  $3^n$ , 而不是  $n 3^n$ 。但是算出的  $p_0 = 1/2$  是没有问题的。

**109. 测验题 8.109**

对于序列  $\{a_n\}$  的递推关系式  $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n3^n, n \geq 2$  和初始条件  $a_0 = 0, a_1 = 1$ , 下面哪些说法是正确的?

- A. 该递推关系式的伴随齐次递推关系式的特征方程是  $x^2 = 6x - 9 + n3^n$ 。
- B. 该递推关系式的一个特解具有形式  $(p_1n + p_0)3^n$ 。
- C. 为确定该递推关系式的一个特解  $n^2(p_1n + p_0)3^n$  中的待定系数  $p_1, p_0$ , 利用初始条件  $a_0 = 0, a_1 = 1$  则可解得  $p_1, p_0$ 。
- D. 将该递推关系式的一个特解  $n^2(p_1n + p_0)3^n$  代入得到

$$n^2(p_1n + p_0)3^n = 6(n-1)^2(p_1(n-1) + p_0)3^{n-1} - 9(n-2)^2(p_1(n-2) + p_0)3^{n-2} + n3^n$$

整理可得到等式  $(9 - 54p_1)n + (54p_1 - 18p_0) = 0$ , 该等式对于所有大于 1 的  $n$  成立, 因此有  $9 - 54p_1 = 0$  且  $54p_1 - 18p_0 = 0$ , 从而可解得  $p_1, p_0$ 。

答案: D

**110. 测验题 8.110**

对于满足递推关系是  $f(n) = 2f(n/3) + n$  的函数  $f$ , 根据主定理给出它的一个大 O 估计是?

- A.  $O(n^2)$
- B.  $O(n)$
- C.  $O(n \log n)$
- D.  $O(n^{\log_3 2})$

答案: B

**111. 测验题 8.111**

对于满足递推关系是  $f(n) = 4f(n/3) + n$  的函数  $f$ , 根据主定理给出它的一个大 O 估计是?

- A.  $O(n^2 \log n)$
- B.  $O(n)$
- C.  $O(n \log n)$
- D.  $O(n^{\log_3 4})$

答案: D

**112. 测验题 8.112**

对于满足递推关系是  $f(n) = 4f(n/2) + n^2$  的函数  $f$ , 根据主定理给出它的一个大 O 估计是?

- A.  $O(n^2 \log n)$
- B.  $O(n^2)$



C.  $O(n \log n)$

D.  $O(n^{\log_2 4})$

答案: A

### 113. 测验题 8.113

自然数的三位数中, 含有偶数数字的有多少个?

A. 840

B. 800

C. 775

D. 450

答案: C

解析: 这道题来源于第三次小测的第三题。测验题 8.14 有与这道题完全相同的题目, 不清楚为什么又在这里出现。

### 114. 测验题 8.114

自然数的三位数中, 含有数字 1 的有多少个?

A. 226

B. 252

C. 280

D. 310

答案: B

解析: 题同测验题 8.32 第二问。

## 九、图与树

### 1. 测验题 9.1

对于图的基本概念，下面哪些说法是正确的？

- A, 一个非空图的顶点集可以是空集，边集也可以是空集。
- B, 有向图的基图必然是无向图。
- C,  $n$  阶图是指图的边有  $n$  条。
- D,  $n$  阶零图有  $n$  个顶点，且边集为空集。

答案：BD

### 2. 测验题 9.2

对于图的基本概念，下面哪些说法是正确的？

- A. 若无向图中有边  $e_1 = (u, v)$  和  $e_2 = (v, w)$ ，则  $e_1$  和  $e_2$  是相邻边。
- B. 若无向图中有边  $e = (u, v)$ ，则  $e$  邻接到  $u$  和  $v$ 。
- C. 若有向图中有边  $e_1 = \langle u, v \rangle$  和  $e_2 = \langle v, u \rangle$ ，则  $e_1$  和  $e_2$  是重边。
- D. 简单有向图是没有环和重边的有向图。

答案：AD

### 3. 测验题 9.3

对于图的顶点度数，下面哪些说法是正确的？

- A. 存在一个 6 阶无向图，它的每个顶点的度数分别是 0, 1, 3, 3, 5, 5。
- B. 存在一个 6 阶无向图，它的每个顶点的度数分别是 1, 3, 5, 7, 9, 11。
- C. 一个无向图的所有顶点度数之和必然是偶数。
- D. 若无向图  $G$  的最小度  $\delta(G) = 3$ ，则  $G$  存在唯一的一个度数为 3 的顶点。

答案：BC

### 4. 测验题 9.4

给定无向图  $G = (V, E)$ ，其中  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ， $E = \{e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_1, v_3), e_3 = (v_1, v_3), e_4 = (v_2, v_3), e_5 = (v_3, v_4), e_6 = (v_2, v_4), e_7 = (v_2, v_5), e_8 = (v_4, v_5), e_9 = (v_5, v_6), e_{10} = (v_4, v_6), e_{11} = (v_2, v_2), e_{12} = (v_4, v_4)\}$ ，下面对于图  $G$  的顶点度数，计算正确的有哪些？

- A.  $d(v_2) = 5$
- B.  $d(v_3) = 4$
- C.  $d(v_4) = 6$
- D.  $d(v_5) = 2$

答案: BC

### 5. 测验题 9.5

给定有向图  $G = (V, E)$ , 其中  $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ,  $E = \{e_0 = \langle v_3, v_3 \rangle, e_1 = \langle v_0, v_1 \rangle, e_2 = \langle v_5, v_6 \rangle, e_3 = \langle v_0, v_4 \rangle, e_4 = \langle v_0, v_0 \rangle, e_5 = \langle v_1, v_6 \rangle, e_6 = \langle v_4, v_2 \rangle, e_7 = \langle v_4, v_3 \rangle, e_8 = \langle v_6, v_2 \rangle, e_9 = \langle v_6, v_0 \rangle, e_{10} = \langle v_2, v_5 \rangle, e_{11} = \langle v_3, v_2 \rangle\}$ , 下面对于图  $G$  的顶点度数, 计算正确的有哪些?

A.  $d^+(v_0) = 2$

B.  $d^-(v_2) = 1$

C.  $d^+(v_4) = 2$

D.  $d^-(v_6) = 2$

答案: CD

### 6. 测验题 9.6

下面哪些说法是正确的?

A. 如果图  $G$  是一个  $n$  阶 3 正则图, 则  $n$  必定是一个偶数。

B. 完全图  $K_6$  是一个 5 正则图。

C. 完全图  $K_6$  总共有 36 条边。

D. 如果图  $G$  是一个 16 阶 4 正则图, 则图  $G$  总共有 32 条边。

答案: ABD

### 7. 测验题 9.7

下面哪些说法是正确的?

A. 圈图  $C_n$  是  $n$  阶 2 正则图, 总共有  $n$  条边。

B. 轮图  $W_n$  是  $n$  阶 3 正则图, 总共有  $2n$  条边。

C. 立方体图  $Q_n$  是  $2^n$  阶  $n$  正则图, 总共有  $n2^{n-1}$  条边。

D. 完全二部图  $K_{n,n}$  是  $2n$  阶  $n$  正则图, 总共有  $n^2$  条边。

答案: ACD

### 8. 测验题 9.8

下面哪些图是二部图?

A. 完全图  $K_6$

B. 圈图  $C_6$

C. 轮图  $W_6$

D. 立方体图  $Q_3$

答案: BD

## 9. 测验题 9.9

给定无向图  $G = (V, E)$ , 其中  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ,  $E = \{e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_1, v_3), e_3 = (v_1, v_3), e_4 = (v_2, v_3), e_5 = (v_3, v_4), e_6 = (v_2, v_4), e_7 = (v_2, v_5), e_8 = (v_4, v_5), e_9 = (v_5, v_6), e_{10} = (v_4, v_6), e_{11} = (v_2, v_2), e_{12} = (v_4, v_4)\}$ , 对于图  $G$  中的通路或回路, 下面哪些说法是正确的?

- A,  $\Gamma_1 = v_1 e_1 v_2 e_{11} v_4 e_{12} v_4 e_5 v_3 e_2 v_1$  是长度为 5 的回路。
- B,  $\Gamma_2 = v_1 e_1 v_2 e_{11} v_2 e_7 v_5 e_9 v_6 e_{10} v_4 e_5 v_3$  是长度为 6 的初级通路。
- C,  $\Gamma_3 = v_1 e_2 v_3 e_3 v_1 e_1 v_2 e_6 v_4 e_5 v_3 e_4 v_2 e_{11} v_2$  是长度为 7 的简单通路。
- D,  $\Gamma_4 = v_1 e_2 v_3 e_5 v_4 e_{12} v_4 e_{10} v_6 e_9 v_5 e_7 v_2 e_1 v_1$  是长度为 7 的初级回路。

答案: C

## 10. 测验题 9.10

给定有向图  $G = (V, E)$ , 其中  $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ,  $E = \{e_0 = \langle v_3, v_3 \rangle, e_1 = \langle v_0, v_1 \rangle, e_2 = \langle v_5, v_6 \rangle, e_3 = \langle v_6, v_4 \rangle, e_4 = \langle v_0, v_0 \rangle, e_5 = \langle v_1, v_6 \rangle, e_6 = \langle v_4, v_2 \rangle, e_7 = \langle v_4, v_3 \rangle, e_8 = \langle v_6, v_2 \rangle, e_9 = \langle v_6, v_0 \rangle, e_{10} = \langle v_2, v_5 \rangle, e_{11} = \langle v_3, v_2 \rangle\}$ , 对于图  $G$  中的有向通路或有向回路, 下面哪些说法是正确的?

- A.  $\Gamma_1 = v_0 e_1 v_1 e_5 v_6 e_8 v_2 e_{10} v_5 e_2 v_6 e_9 v_0$  是长度为 6 的有向回路。
- B.  $\Gamma_2 = v_0 e_4 v_0 e_3 v_4 e_7 v_3 e_0 v_3 e_{11} v_2 e_{10} v_5 e_2 v_6 e_8 v_2$  是长度为 8 的有向简单通路。
- C.  $\Gamma_3 = v_0 e_1 v_1 e_5 v_6 e_9 v_0 e_3 v_4 e_6 v_2 e_{10} v_5 e_2 v_6$  是长度为 7 的初级有向通路。
- D.  $\Gamma_4 = v_2 e_{10} v_5 e_2 v_6 e_9 v_0 e_4 v_0 e_3 v_4 e_7 v_3 e_{11} v_2$  是长度为 7 的初级有向回路。

答案: AB

## 11. 测验题 9.11

下面哪些说法是正确的?

- A. 设图  $G$  有  $n$  个顶点, 若存在顶点  $u$  到顶点  $v$  的通路, 则存在  $u$  到  $v$  的长度小于等于  $n - 1$  的通路。
- B. 设图  $G$  有  $n$  个顶点, 若存在顶点  $u$  到自身的回路, 则存在  $u$  到自身的长度小于等于  $n - 1$  的回路。
- C. 如果图  $G$  是二部图, 则  $G$  不存在长度为奇数的回路。
- D. 如果图  $G$  的每条回路的长度都是偶数, 则  $G$  是二部图。

答案: ACD

## 12. 测验题 9.12

设图  $G$  的顶点数是  $n$ ，边数是  $m$ ，下面哪些说法是正确的？

- A. 如果图  $G$  是简单图，则  $m \leq n(n-1)/2$ 。
- B. 如果图  $G$  是连通图，则  $m \geq n$ 。
- C. 如果  $m > (n-1)(n-2)/2$ ，则图  $G$  是连通图。
- D. 如果  $m \leq n(n-1)/2$ ，则图  $G$  是简单图。

答案：AC

## 13. 测验题 9.13

对于下图的点割集，下面哪些说法是正确的？

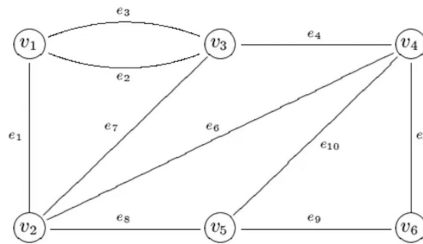


图 31: 测验题 9.13 用图

- A. 顶点集  $V_1 = \{v_2, v_3, v_5\}$  是上图的一个点割集。
- B. 顶点集  $V_2 = \{v_3, v_5\}$  是上图的一个点割集。
- C. 顶点集  $V_3 = \{v_3, v_4, v_5\}$  是上图的一个点割集。
- D. 上图的点连通度是 2。

答案：D

## 14. 测验题 9.14

对于下图的点割集，下面哪些说法是正确的？

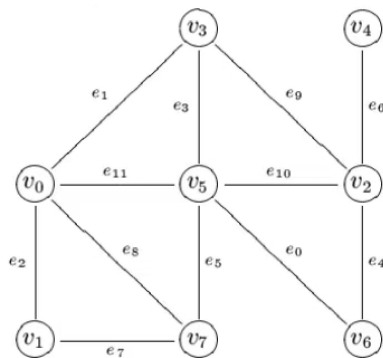


图 32: 测验题 9.14 用图

- A. 顶点集  $V_1 = \{v_0, v_7\}$  是上图的一个点割集。
- B. 顶点集  $V_2 = \{v_2, v_5\}$  是上图的一个点割集。
- C. 顶点集  $V_3 = \{v_3, v_5\}$  是上图的一个点割集。
- D. 上图的点连通度是 2。

答案: AC

### 15. 测验题 9.15

对于下图的边割集，下面哪些说法是正确的？

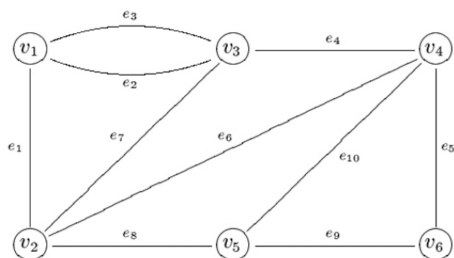


图 33: 测验题 9.15 用图

- A. 顶点集  $E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$  是上图的一个边割集。
- B. 顶点集  $E_2 = \{e_1, e_5, e_7, e_6, e_{10}\}$  是上图的一个边割集。
- C. 顶点集  $E_3 = \{e_4, e_6, e_8, e_{10}\}$  是上图的一个边割集。
- D. 上图的边连通度是 3。

答案: AB

### 16. 测验题 9.16

对于下图的边割集，下面哪些说法是正确的？

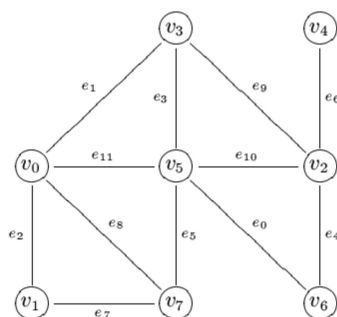


图 34: 测验题 9.16 用图

- A. 顶点集  $E_1 = \{e_0, e_5, e_9, e_{10}\}$  是上图的一个边割集。  
 B. 顶点集  $E_2 = \{e_2, e_7\}$  是上图的一个边割集。  
 C. 顶点集  $E_3 = \{e_1, e_5, e_{11}\}$  是上图的一个边割集。  
 D. 上图的边连通度是 2。

答案: BC

### 17. 测验题 9.17

下面哪些图只是单向连通有向图而非强连通有向图?

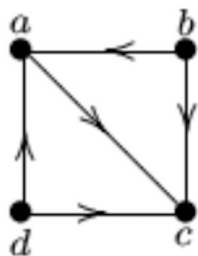


图 35: 测验题 9.17 A 选项

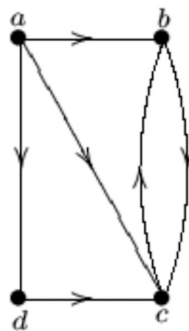


图 36: 测验题 9.17 B 选项

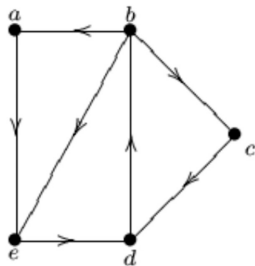


图 37: 测验题 9.17 C 选项

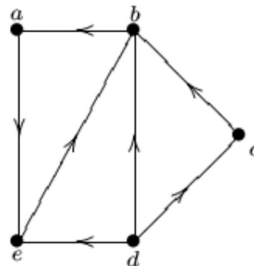


图 38: 测验题 9.17 D 选项

答案: BD

### 18. 测验题 9.18

下面哪些图是强连通有向图?

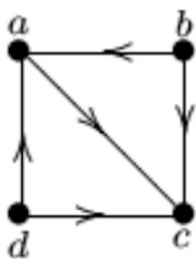


图 39: 测验题 9.18 A 选项

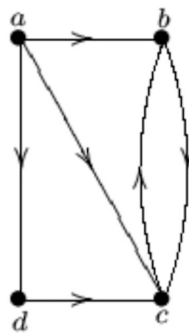


图 40: 测验题 9.18 B 选项

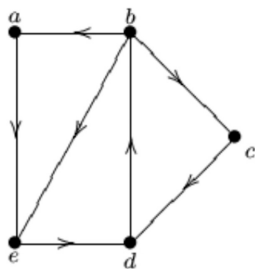


图 41: 测验题 9.18 C 选项

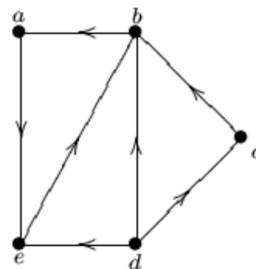


图 42: 测验题 9.18 D 选项

答案: BC

### 19. 测验题 9.19

使用图的邻接矩阵计算下面有向图的有向通路和有向回路条数, 下面哪些是正确的?

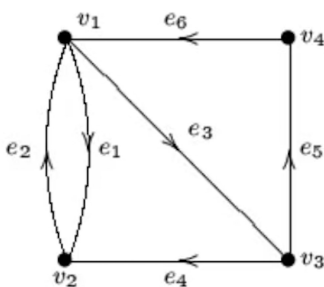


图 43: 测验题 9.19 用图



- A. 长度为 2 的有向回路总共有两条，分别是  $v_1e_1v_2e_2v_1$  和  $v_2e_2v_1e_1v_2$ 。
- B. 长度为 2 的有向通路（含有向回路）总共有 5 条。
- C. 长度为 3 的有向通路（含有向回路）总共有 14 条。
- D. 顶点  $v_3$  到  $v_2$  长度为 2 的有向通路有 2 条，顶点  $v_4$  到  $v_2$  长度为 2 的有向通路有 1 条。

答案：AC

## 20. 测验题 9.20

使用图的邻接矩阵计算下面有向图的有向通路和有向回路条数，下面哪些是正确的？

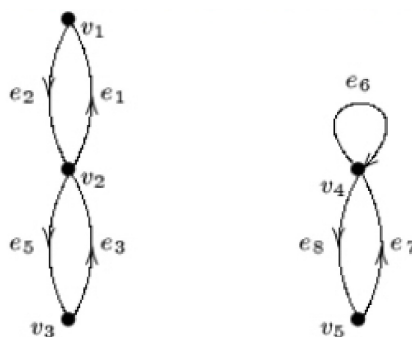


图 44: 测验题 9.20 用图

- A. 长度为 3 的有向回路总共有 4 条，分别是  $v_4e_6v_4e_6v_4$ ,  $v_4e_6v_4e_8v_5e_7v_4$ ,  $v_4e_8v_5e_7v_4e_6v_4$  和  $v_5e_7v_4e_6v_4e_8v_5$ 。
- B. 长度为 2 的有向通路（含有向回路）总共有 11 条。
- C. 长度为 3 的有向通路（含有向回路）总共有 15 条。
- D. 顶点  $v_3$  到  $v_2$  的长度为 3 的有向通路有 2 条，顶点  $v_2$  到  $v_3$  的长度为 3 的有向通路也有 2 条。

答案：ABD

## 21. 测验题 9.21

使用深度优先策略从顶点  $v_1$  开始对下面的无向图进行顶点遍历，下面哪些说法是正确的？

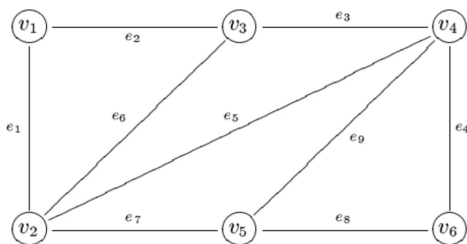


图 45: 测验题 9.21 用图

- A. 顶点序列  $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$  是一个可能的先深遍历结果。
- B. 顶点序列  $v_1v_3v_2v_4v_6v_5$  是一个可能的先深遍历结果。
- C. 顶点序列  $v_1v_2v_5v_4v_3v_6$  是一个可能的先深遍历结果。
- D. 顶点序列  $v_1v_3v_4v_2v_5v_6$  是一个可能的先深遍历结果。

答案: ABCD

## 22. 测验题 9.22

使用深度优先策略从顶点  $v_0$  开始对下面的无向图进行顶点遍历, 下面哪些说法是正确的?

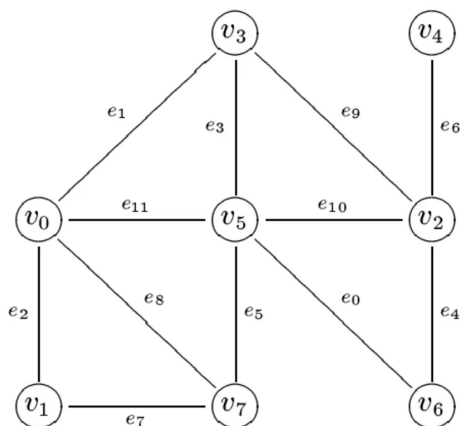


图 46: 测验题 9.22 用图

- A. 顶点序列  $v_0v_1v_7v_3v_5v_6v_2v_4$  是一个可能的先深遍历结果。
- B. 顶点序列  $v_0v_3v_5v_7v_1v_6v_2v_4$  是一个可能的先深遍历结果。
- C. 顶点序列  $v_0v_5v_3v_2v_4v_6v_7v_1$  是一个可能的先深遍历结果。
- D. 顶点序列  $v_0v_7v_5v_2v_4v_6v_3v_1$  是一个可能的先深遍历结果。

## 23. 测验题 9.23

使用广度优先策略从顶点  $v_1$  开始对下面的无向图进行顶点遍历, 下面哪些说法是正确的?

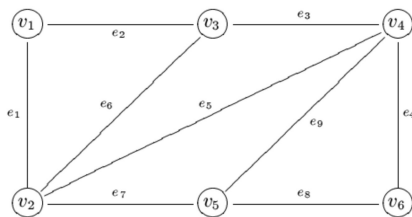


图 47: 测验题 9.23 用图

- A. 顶点序列  $v_1v_2v_3v_4v_6v_5$  是一个可能的先广遍历结果。
- B. 顶点序列  $v_1v_3v_2v_4v_5v_6$  是一个可能的先广遍历结果。

C. 顶点序列  $v_1v_2v_5v_4v_3v_6$  是一个可能的先广遍历结果。

D. 顶点序列  $v_1v_2v_3v_5v_4v_6$  是一个可能的先广遍历结果。

答案: BD

## 24. 测验题 9.24

使用广度优先策略从顶点  $v_0$  开始对下面的无向图进行顶点遍历, 下面哪些说法是正确的?

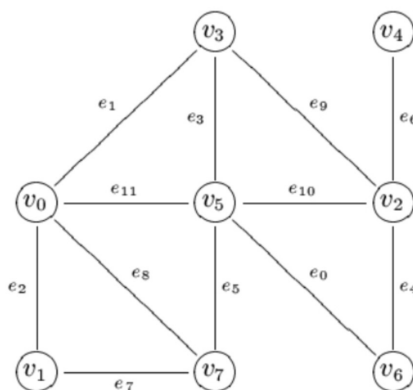


图 48: 测验题 9.24 用图

A. 顶点序列  $v_0v_1v_3v_7v_5v_2v_4v_6$  是一个可能的先广遍历结果。

B. 顶点序列  $v_0v_3v_5v_7v_1v_2v_6v_4$  是一个可能的先广遍历结果。

C. 顶点序列  $v_0v_5v_3v_2v_4v_6v_7v_1$  是一个可能的先广遍历结果。

D. 顶点序列  $v_0v_7v_5v_1v_3v_2v_4v_6$  是一个可能的先广遍历结果。

答案: B

## 25. 测验题 9.25

使用深度优先策略从顶点  $v_0$  开始对下面的无向图进行顶点遍历, 下面哪些说法是正确的?

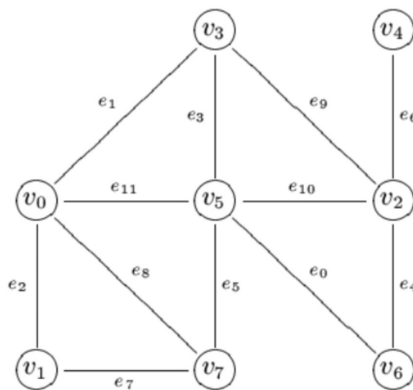


图 49: 测验题 9.25 用图

- A. 当依次遍历  $v_0, v_1, v_7$  后, 这时在栈中的顶点从栈底到栈顶依次是  $v_0, v_1, v_7$ 。
- B. 当依次遍历  $v_0, v_1, v_7, v_5, v_2, v_3, v_4$  后, 这时在栈中的顶点从栈底到栈顶依次是  $v_0, v_1, v_7, v_5, v_2, v_3, v_4$ 。
- C. 当依次遍历  $v_0, v_1, v_7, v_5, v_2, v_3, v_4, v_6$  后, 这时在栈中的顶点从栈底到栈顶依次是  $v_0, v_1, v_7, v_5, v_2, v_6$ 。
- D. 当依次遍历  $v_0, v_1, v_7, v_5, v_2, v_3, v_4, v_6$  后且在栈中的顶点从栈底到栈顶依次是  $v_0, v_1, v_7, v_5, v_2$  时, 算法已经做了三次从栈顶弹出顶点的操作。

答案: ACD

## 26. 测验题 9.26

关于无向树的基本性质, 下面哪些说法是正确的?

- A. 无向树都是简单图。
- B. 无向树连通且没有回路。
- C. 无向树删除任意一个顶点之后就不再是连通图。
- D. 无向树删除任意一条边之后就不再是连通图。

答案: ABD

## 27. 测验题 9.27

关于无向树的基本性质, 下面哪些说法是正确的?

- A. 无向树删除一条边之后总是得到两个连通分支。
- B. 无向树在任意两个不相邻顶点增加一条新边总得到唯一一个回路。
- C. 如果一个无向图的边数等于顶点数减 1, 则这个图是一棵无向树。
- D. 如果一个无向图的每条边都是桥, 则这个图是一棵无向树。

答案: AB

## 28. 测验题 9.28

关于根树的基本性质, 下面哪些说法是正确的?

- A. 只有一个顶点的入度为 0, 其他顶点的入度都为 1 的有向图一定是根树。
- B. 根树除根之外的所有顶点的入度都等于 1。
- C. 根树任意两个顶点之间都有唯一的有向通路。
- D. 若根树至少有 3 个顶点, 则它至少有两个叶子顶点。

答案: B

## 29. 测验题 9.29

关于  $m$  元树, 下面哪些说法是正确的?

- A.  $m$  元树的每个顶点的出度不是  $m$  就是 0。

- B. 满  $m$  元树的每个内部顶点的出度都是  $m$ 。
- C. 所有完全  $m$  元树都是满  $m$  元树。
- D. 所有平衡  $m$  元树都是满  $m$  元树。

答案: BC

### 30. 测验题 9.30

下面哪些图是满二叉树?

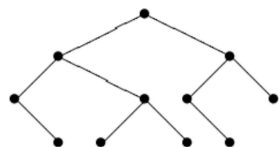


图 50: 测验题 9.30 A 选项

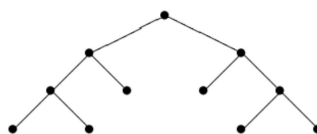


图 51: 测验题 9.30 B 选项

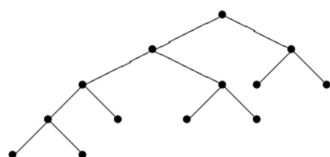


图 52: 测验题 9.30 C 选项

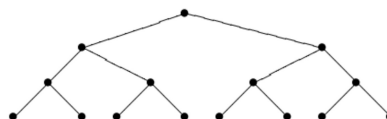


图 53: 测验题 9.30 D 选项

答案: BCD

### 31. 测验题 9.31

下面哪些图是平衡二叉树?

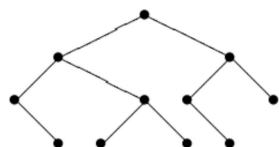


图 54: 测验题 9.30 A 选项

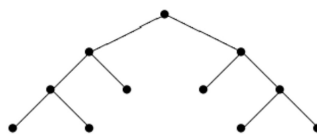


图 55: 测验题 9.30 B 选项

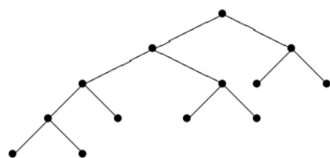


图 56: 测验题 9.30 C 选项

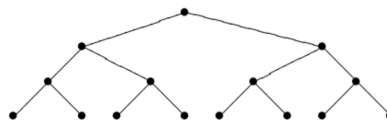


图 57: 测验题 9.30 D 选项

答案: ABD

**32. 测验题 9.32**

如果  $T$  是一棵满 3 叉树（满 3 元树），且有 22 个顶点，则它有 (1) 个内部顶点，且有 (2) 片叶子。

答案：(1) 7, (2) 15

**33. 测验题 9.33**

如果  $T$  是一棵满 3 叉树（满 3 元树），且有 9 个内部顶点，则它总共有 (1) 个顶点，其中有 (2) 片叶子。

答案：(1) 28, (2) 19

**34. 测验题 9.34**

如果  $T$  是一棵满 3 叉树（满 3 元树），且有 13 片叶子，则它总共有 (1) 个顶点，其中有 (2) 个内部顶点。

答案：(1) 19, (2) 6

**35. 测验题 9.35**

如果  $T$  是高度为 3 的完全 3 叉树（完全 3 元树），则它总共有 (1) 个顶点，其中有 (2) 个内部顶点和 (3) 片叶子。

答案：(1) 40, (2) 13, (3) 27

**36. 测验题 9.36**

如果  $T$  是一棵平衡满 3 叉树（平衡满 3 元树），且总共有 64 个顶点，则它有 (1) 个内部顶点和 (2) 片叶子，且树高为 (3)。

答案：(1) 21, (2) 43, (3) 4

**37. 测验题 9.37**

如果对下面二叉树顶点实施广度优先遍历策略，则遍历结果是？

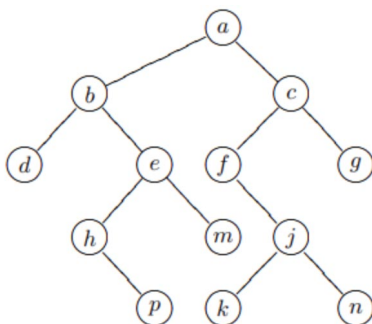


图 58: 测验题 9.37 用图

- A. 顶点序列:  $a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h \ m \ j \ p \ k \ n$   
 B. 顶点序列:  $a \ b \ d \ e \ h \ m \ p \ c \ f \ g \ j \ k \ n$   
 C. 顶点序列:  $a \ b \ d \ e \ h \ p \ m \ c \ f \ j \ k \ n \ g$   
 D. 顶点序列:  $a \ b \ d \ h \ p \ e \ m \ f \ k \ j \ n \ c \ g$

答案: A

### 38. 测验题 9.38

下面二叉树顶点的中序遍历结果是?

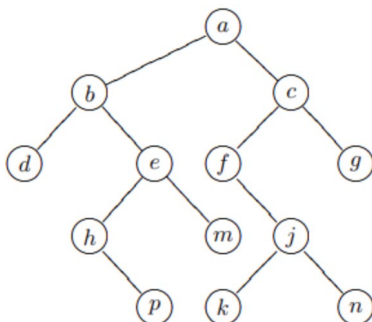


图 59: 测验题 9.38 用图

- A. 顶点序列:  $d \ e \ p \ h \ m \ b \ f \ g \ k \ n \ j \ c \ a$   
 B. 顶点序列:  $d \ p \ h \ m \ e \ b \ k \ n \ j \ f \ g \ c \ a$   
 C. 顶点序列:  $d \ b \ e \ h \ p \ m \ a \ k \ j \ n \ f \ c \ g$   
 D. 顶点序列:  $d \ b \ h \ p \ e \ m \ a \ f \ k \ j \ n \ c \ g$

答案: D

### 39. 测验题 9.39

下面二叉树顶点的前序遍历结果是?

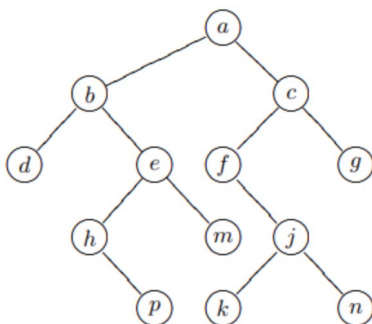


图 60: 测验题 9.39 用图

- A. 顶点序列:  $a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h \ m \ j \ p \ k \ n$   
 B. 顶点序列:  $a \ b \ d \ e \ h \ m \ p \ c \ f \ j \ k \ n \ g$   
 C. 顶点序列:  $a \ b \ d \ e \ h \ m \ p \ c \ f \ g \ j \ k \ n$   
 D. 顶点序列:  $a \ b \ d \ h \ p \ e \ m \ f \ k \ j \ n \ c \ g$

答案: B

#### 40. 测验题 9.40

下面二叉树顶点的后序遍历结果是?

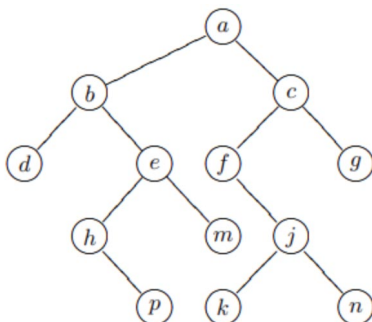


图 61: 测验题 9.40 用图

- A. 顶点序列:  $d \ e \ p \ h \ m \ b \ f \ g \ k \ n \ j \ c \ a$   
 B. 顶点序列:  $d \ b \ p \ h \ m \ e \ f \ k \ j \ n \ g \ c \ a$   
 C. 顶点序列:  $d \ p \ h \ m \ e \ b \ k \ n \ j \ f \ g \ c \ a$   
 D. 顶点序列:  $d \ h \ p \ e \ m \ b \ f \ k \ j \ n \ g \ c \ a$

答案: C

#### 41. 测验题 9.42\*

下面是一个带权无向图的邻接矩阵 (矩阵行分别对应顶点  $a, b, c, d, e, f, g, h$ ), 使用 Dijkstra 算法求这个图的顶点到其他所有顶点的最短距离, 下面说法正确的有哪些?



$$D = \begin{bmatrix} \infty & 10 & 6 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\ 10 & \infty & 13 & 13 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 6 & 13 & \infty & 12 & 4 & \infty & 12 & \infty \\ \infty & 13 & 12 & \infty & 5 & 6 & 5 & \infty \\ 6 & \infty & 4 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 10 & \infty & 6 & \infty & \infty & 4 & 8 \\ \infty & \infty & 12 & 5 & \infty & 4 & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

- A. 算法在确定顶点  $e$  的最短距离之后, 只修改了顶点  $d$  的当前距离和当前路径。  
 B. 算法在确定顶点  $d$  的最短距离之后, 只修改了顶点的当前距离和当前路径。  
 C. 算法在确定顶点  $g$  的最短距离之后, 只修改了顶点  $h$  的当前距离和当前路径。  
 D. 算法最终确定的顶点  $a$  到顶点  $h$  的最短路径是  $a \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow g \rightarrow h$ 。

答案: AC

#### 42. 测验题 9.43\*

使用 Dijkstra 算法求下面有向图的顶点  $a$  到其他所有顶点的最短距离:

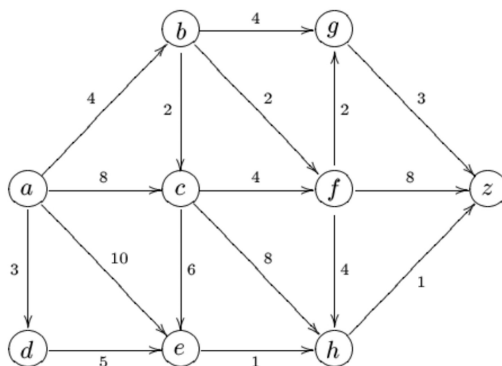


图 62: 测验题 9.43 用图

完成下面表格中的空以给出完整的算法求解过程(每个空以 " 整数/字母 " 的形式填写, 其中整数表示当前距离, 而字母表示直接前驱顶点, 整数和字母之间用斜杠分隔, 中间不要有任何空格, 无需考虑用于表示选中的方框)。

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>z</i>
Step 0	<span style="border: 1px solid black;">0</span> /−	4/ <i>a</i>	8/ <i>a</i>	3/ <i>a</i>	10/ <i>a</i>	∞/−	∞/−	∞/−	∞/−
Step 1		4/ <i>a</i>	8/ <i>a</i>	<span style="border: 1px solid black;">3</span> / <i>a</i>	8/ <i>d</i>	∞/−	∞/−	∞/−	∞/−
Step 2		<span style="border: 1px solid black;">4</span> / <i>a</i>	6/ <i>b</i>		8/ <i>d</i>	6/ <i>b</i>	8/ <i>b</i>	∞/−	∞/−
Step 3			<span style="border: 1px solid black;">6</span> / <i>b</i>		8/ <i>d</i>	6/ <i>b</i>	8/ <i>b</i>	<u>(1)</u>	∞/−
Step 4					8/ <i>d</i>	6/ <i>b</i>	8/ <i>b</i>	<u>(2)</u>	14/ <i>f</i>
Step 5					<span style="border: 1px solid black;">8</span> / <i>d</i>		8/ <i>b</i>	<u>(3)</u>	<u>(4)</u>
Step 6							<span style="border: 1px solid black;">8</span> / <i>b</i>	9/ <i>e</i>	<u>(5)</u>
Step 7								<span style="border: 1px solid black;">9</span> / <i>e</i>	<u>(6)</u>
Step 8									<span style="border: 1px solid black;">10</span> / <i>h</i>

答案：(1) 14/*c* (2) 10/*f* (3) 9/*e* (4) 14/*f* (5) 11/*g* (6) 10/*h*

43. 测验题 9.44\*

44. 测验题 9.61

下面哪些图是极大平面图?

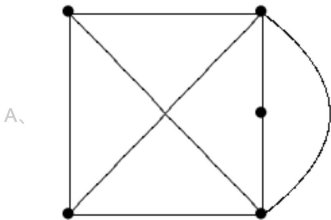


图 63: 测验题 9.61 A 选项

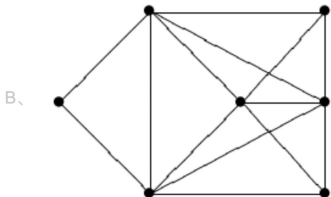


图 64: 测验题 9.61 B 选项

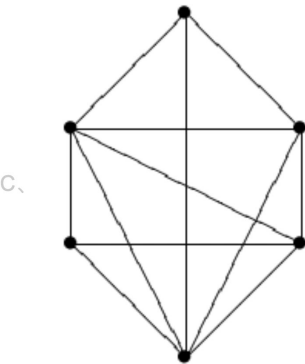


图 65: 测验题 9.61 C 选项

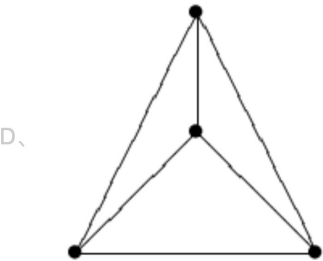


图 66: 测验题 9.61 D 选项

答案：CD

**45. 测验题 9.64**

设平面图  $G$  的顶点数是  $n$ ，边数是  $m$ ，面数是  $d$ ，下面哪些说法是正确的？

- A. 若  $G$  是极大平面图，则  $m = 3n - 6$  且  $d = 2n - 4$ 。
- B. 若  $m = 3n - 6$  且  $d = 2n - 4$ ，则  $G$  是极大平面图。
- C. 对于任意平面图  $G$ ，总有  $n - m + d = 2$ 。
- D. 对于任意平面图  $G$ ，总有  $m \leq 3n - 6$  且  $d \leq 2n - 4$ 。

答案：A

**46. 测验题 9.65**

设图  $G$  是连通的简单平面图，顶点数  $n = 6$ ，且所有顶点的度数之和是 24，则图  $G$  有 (1) 个面，且其中外部面的度数是 (2)。

答案：(1) 8, (2) 3

**47. 测验题 9.69**

下面哪些图是欧拉图？

- A. 完全图  $K_6$
- B. 圈图  $C_6$
- C. 轮图  $W_6$
- D. 完全二部图  $K_{6,6}$

答案：BD

**48. 测验题 9.72**

下面哪些图是哈密顿图？

- A. 完全图  $K_6$
- B. 圈图  $C_6$
- C. 轮图  $W_6$
- D. 完全二部图  $K_{6,6}$

答案：ABCD

## 十、代数系统 \*