UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

PROCESSAMENT DIGITAL DEL SENYAL

GRAU EN ENGINYERIA INFORMÀTICA

PRÀCTICA 1

SENYALS

Autor:
Daniel DONATE

Professor:
Antoni GRAU

Q1 Curs 2020-2021

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat d'Informàtica de Barcelona

Part A

Utilitzant el Matlab

Pregunta: Introdueix: a=0:10. Feu ara que b sigui una ona sinusoïdal usant els valors d'a.

Resposta: `a=0:10; b=sin(a); plot(a,b);`

Pregunta: Defineix ara a de manera que prengui els valors entre 0 i 10 en passos de 0.1. Llavors crea una ona sinusoidal en b usant els valors d'a.

Resposta: `a=0:0.1:10; b=sin(a); plot(a,b);`

Pregunta: Dibuixa ara el que veus comparant les dues ones i dóna una breu explicació.

Resposta: Els gràfics obtinguts amb les dues ones anteriors es mostren a les següents dues figures.

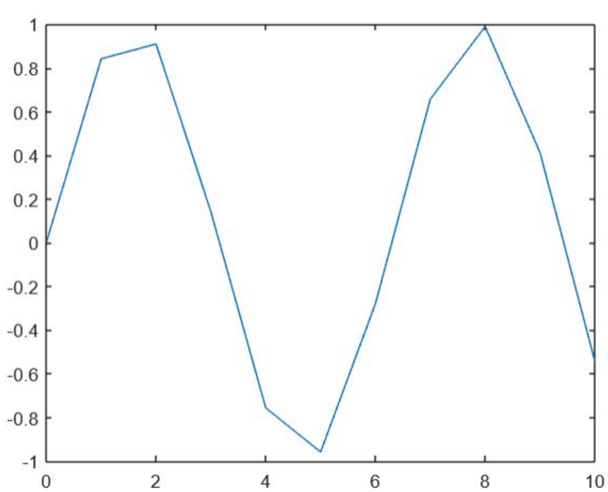

Figura 1: sin(a), entre a=0:10

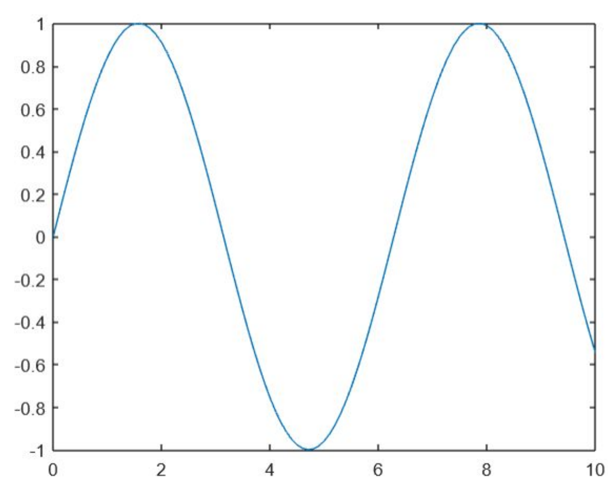

Figura 2: sin(a), entre a=0:0.1:10

La primera ona té 10 vegades menys mostres que la segona en cada cicle, és a dir, una freqüència de mostreig 10 vegades inferior. Un efecte molt visible d'això s'aprecia en els pics del senyal. Els sinus tenen els pics a múltiples de $\pi/2$. Però com els salts en la n es fan d'un en un, no s'arriba al valor del pic. La segona gràfica, en canvi, té un aspecte molt més *suau*, més fàcilment associable a un sinus.

5 Cicles d'una Ona Sinusoïdal

Pregunta: Un ona sinusoïdal té un cicle complet sobre 2*PI. Construeix un vector amb valors entre 0 i 5x2xPI amb passos de 0.1. Genera un sinus amb 5 cicles calculat sobre n. Dibuixa el resultat.

Resposta: `n=0:0.1:5*2*pi; y=sin(n); plot(n,y);`

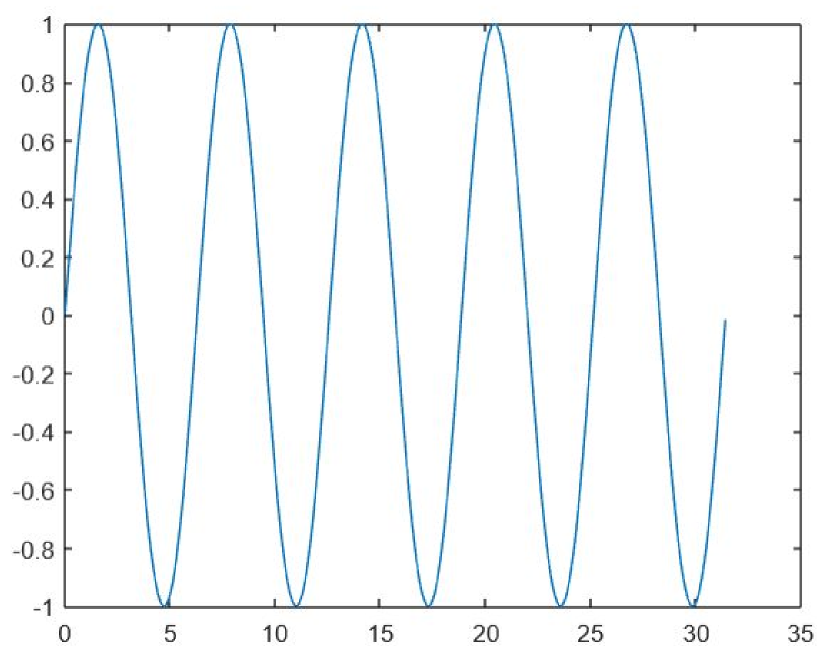

Figura 3: sin(n), entre n=0:0.1:5*2π

Pregunta: Quantes mostres s'han usat per generar aquest sinus en un cicle?

Resposta: En un cicle tenim size(n)/5 mostres, o sigui (10π/0.1)/5 = 63.

Pregunta: Incrementa la mida del pas fins a trobar el màxim que encara genera un sinus. Quina mida us ha resultat i quantes mostres per cicle té el sinus corresponent?

Resposta: Penso que aquesta resposta és una mica subjectiva, però he considerat que amb 4 mostres per cicle encara es pot intuir la forma del sinus en el gràfic (amb una molt marcada distorsió, és clar). Així, la següent figura mostra la representació de sin(n), amb un pas de 1.6.

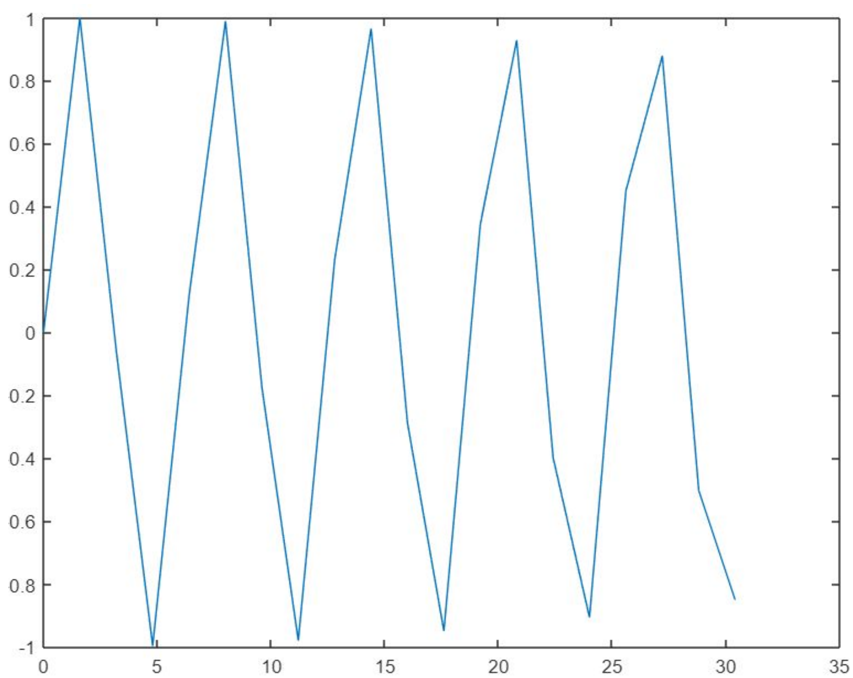

Figura 4: sin(n), amb n=0:1.6:5*2π

Generant una Ona Sinusoïdal Digital (mostrejada)

Pregunta: Esborra la memòria i la pantalla. Defineix el nombre de mostres per segon (8000 Hertz). Defineix la freqüència del sinus (500 Hertz). Defineix la durada del sinus. Defineix les mostres en la durada anterior. Llavors defineix el valors del sinus. Dibuixa el sinus en la pantalla.

Resposta: `clear all; clc; fs=8000; f=500; mida=0.01; n=0:fs*mida; y=sin(n*2*pi*f/fs); plot(n,y);`

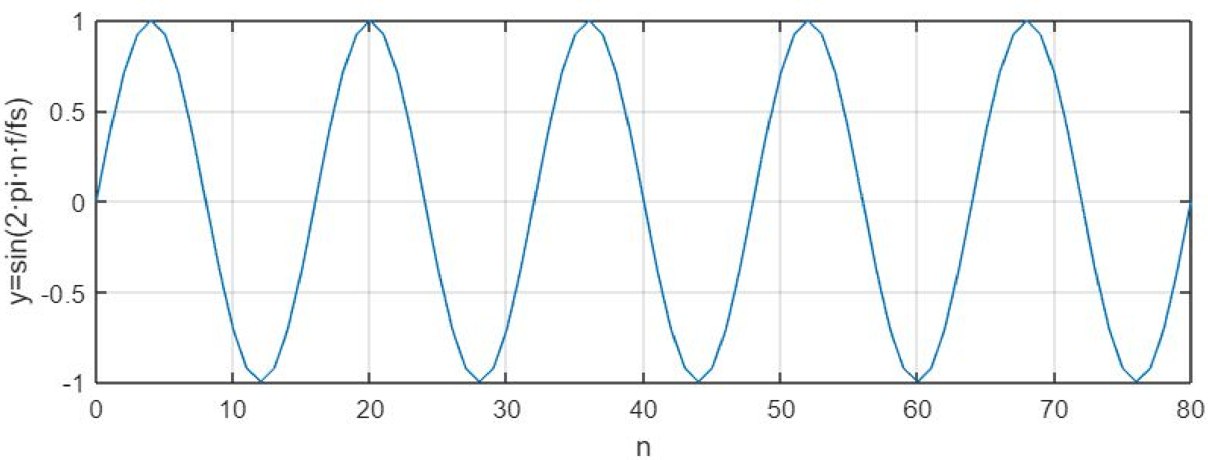

Figura 5: sin(2πnf/fs), amb n=0:fs*mida

Pregunta: Quantes mostres hi ha en un cicle d'aquest sinus?

Resposta: En un cicle tindrem fs/f mostres, o sigui 8000/500 = 16 mostres.

Pregunta: *n* correspon a les mostres. Defineix un nou vector que correspongui als segons des de 0 fins a mida segons en intervals d'1/fs segons. Recalcula el sinus usant els segons (t) enlloc de les mostres. Dibuixa el sinus amb el temps com eix de les abscisses.

Resposta: `t=0:1/fs:mida; y2=sin(t*2*pi*f); plot(t,y2);`

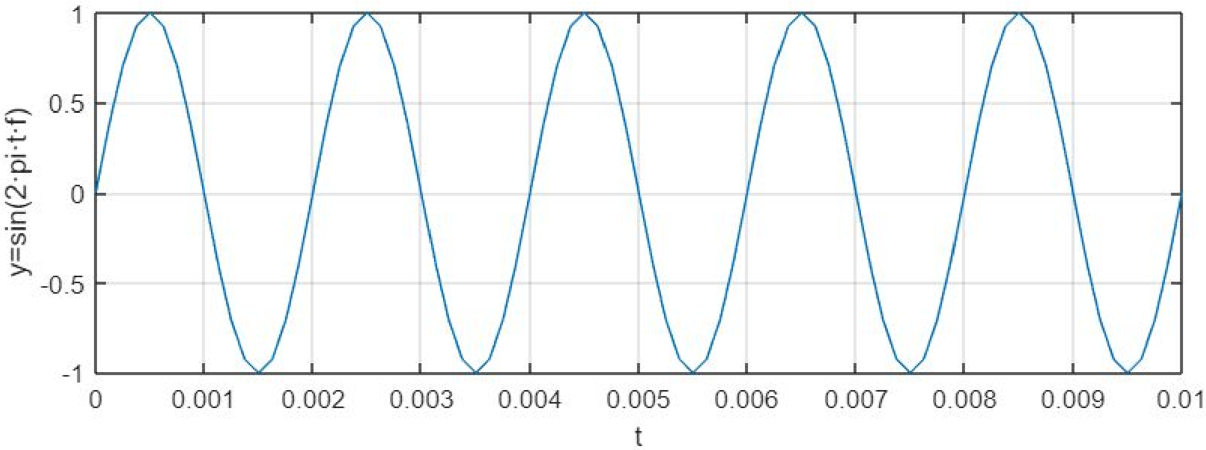

Figura 6: sin(2πft), amb t=0:1/fs:mida

Pregunta: Quants segons hi ha en 1 cicle del sinus? Considera la relació entre el nombre de mostres en cada cicle, la freqüència de mostreig (8000Hz) i la freqüència del sinus (500Hz).

Resposta: El nombre de segons en un cicle serà *pas**(fs/f), essent *pas* els augments que fem entre 0 i mida en el vector temps. Com *pas* és, justament, 1/fs, aleshores el nombre de segons en un cicle serà 1/f=0.002.

Part B

Exercici 2: Trobeu la freqüència digital de $x(n)=\cos(2\pi n/\sqrt{3})$. És un senyal periòdic? Si ho fos, trobeu el seu període més curt.

Resposta: Recordem que una ona sinusoïdal digital, com ara $x[n] = a\cos(2\pi\Omega n + \theta)$ està caracteritzada per una amplitud, *a*, una freqüència digital, **Ω** i una fase, θ. En l'ona donada, x(n), tenim que $\Omega = 1/\sqrt{3}$.

D'altra banda, si x(n) és un senyal periòdic, aleshores s'ha de satisfer que $x(n)=x(n+T)$, essent T el període del senyal, $T \in \mathbb{N}$. Desenvolupant, tenim:

$$\cos(2\pi\Omega n) = \cos(2\pi\Omega(n+kT)), \text{ amb } k \in \mathbb{Z}. \text{ Per tant:}$$

$$\cos(2\pi\Omega n) = \cos(2\pi\Omega n)\cos(2\pi\Omega kT) - \sin(2\pi\Omega n)\sin(2\pi\Omega kT)$$

Per tal que les dues equacions siguin iguals, s'ha de satisfer que:

$$\cos(2\pi\Omega kT) = 1$$

$$\sin(2\pi\Omega n)\sin(2\pi\Omega kT) = 0$$

Això passa quan $\Omega T = m$, $m \in \mathbb{Z}$. Notem, doncs, que si **Ω** no és racional, aleshores el senyal no pot ser periòdic, ja que si no, T no podria ser un natural. Ara bé, $\Omega = 1/\sqrt{3}$, que no és racional. Per tant, x(n) no és un senyal periòdic.

Exercici 3: Trobeu la freqüència digital de $x(n)=\cos(2\pi n/\sqrt{4})$. És un senyal periòdic? Si ho fos, trobeu el seu període més curt.

Resposta: $\Omega = 1/\sqrt{4} = 1/2$ (prenent l'arrel positiva). Tornant a l'expressió que hem trobat en l'anterior apartat pel període:

$T = m/\Omega$, amb $m \in \mathbb{Z}$, tenim que el període serà 2m. Usant m=1, tenim que el període més curt és 2 (nombre de mostres en un cicle).

Exercici 4: Trobeu la freqüència digital de x(n)=sin(2πn*3/7). És un senyal periòdic? Si ho fos, trobeu el seu període més curt.

Resposta: Ω = 3/7. Tenim, doncs, que T = 7m/3. La m més petita que satisfà aquest quocient (amb un T natural, és clar) és 3. Per tant, T = 7.

Exercici 5: Donats els senyals x1(t)=sin(2πt) i x2(n)=sin(πn/10), calculeu la potència d'un període. Quina és la freqüència digital de x2(n)?

Resposta: L'energia d'un senyal analògic, x(t), de període T, es pot calcular amb la següent expressió integral:

$$P_T = \frac{1}{T}\int_0^T |x|^2 dx$$

Per la nostra primera senyal, x1(t), de període T=1, obtenim una potència de 0.5 W.

D'altra banda, la potència d'un senyal discret x(n) de període N, en un sòl període, es pot calcular de la següent manera:

$$P_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 dx$$

La potència obtinguda és, novament, 0.5W. Per aquesta segona senyal, notem que tenim un període N = 20, amb una freqüència digital de 1/20 radians.

PART C

Exercici 1: Genereu les següents seqüències usant funcions bàsiques del Matlab i operacions de senyals. Mostrar el gràfic usant la funció stem. Comenteu la forma d'ona que us dóna

1. $x_1(n) = 3\delta(n+2) + 2\delta(n) - \delta(n-3) + 5\delta(n-7)$, $-5 \le n \le 15$

   El que obtenim és la combinació de diferents impulsos. Per tant, tenim valors de 0 en els punts on l'argument de cap funció delta val 0, i un valor igual al coeficient que multiplica les funcions delta, en els punts on passa el contrari.

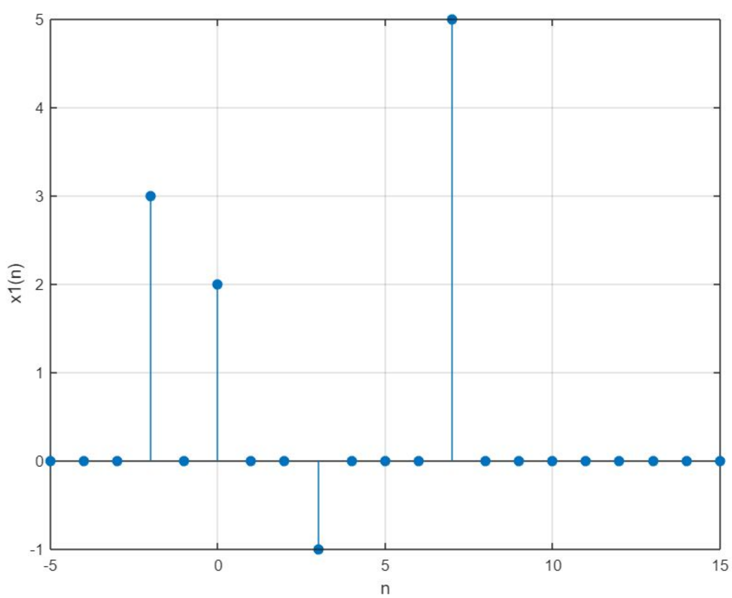

Figura 7: $x_1(n) = 3\delta(n+2) + 2\delta(n) - \delta(n-3) + 5\delta(n-7)$, amb $-5 \le n \le 15$

2. $x_3(n) = 10u(n) - 5u(n-5) - 10u(n-10) + 5u(n-15)$

   En aquest cas, tenim funcions esglaó. Com l'esglaó manté el seu valor de 1 un cop ha arribat al seu llindar, el que tenim és que en els diferents punts on les funcions valen 1, el resultat s'incrementa amb el valor del coeficient corresponent. Notem que al punt n=15, les quatre funcions *u* valen 1, i per tant tenim 10-5-10+5 = 0.

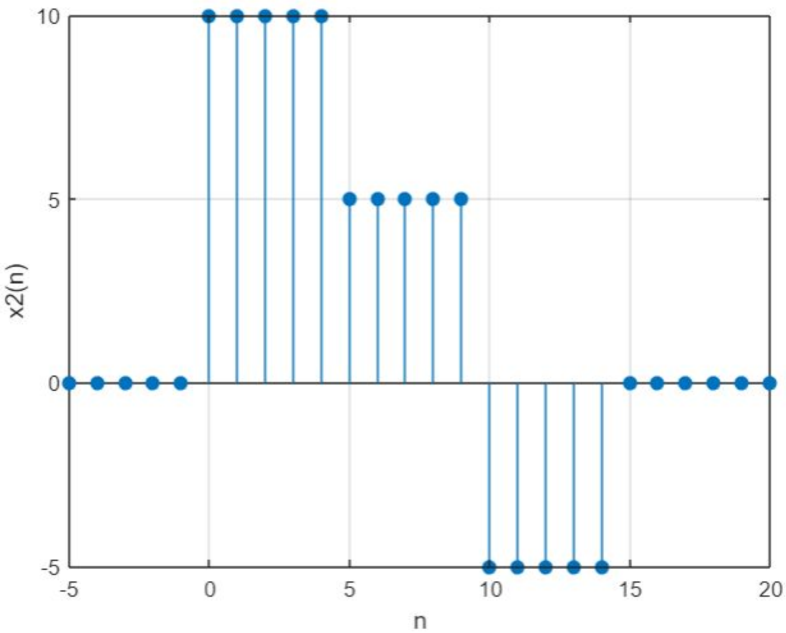

Figura 8: x_2 (n) = 10u(n) - 5u(n - 5) - 10u(n - 10) + 5u(n - 15), amb -5 ≤ n ≤15

3. x_4 (n) = e^0.1n · [u(n + 20) - u(n - 10)]

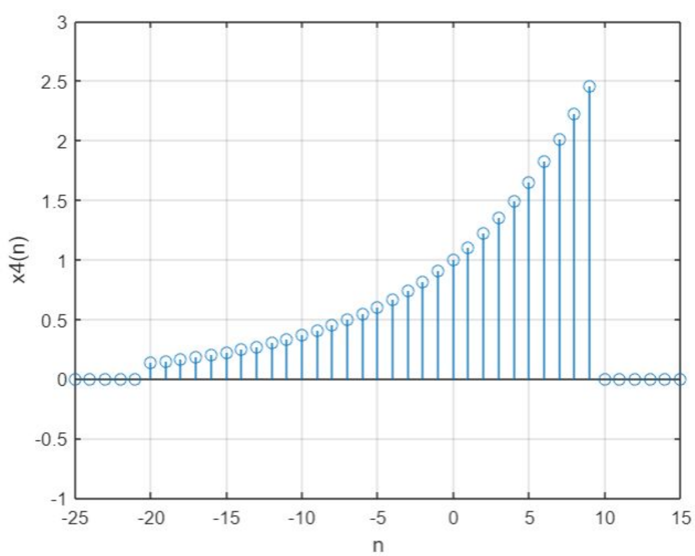

Figura 9: x_4 (n) = e^0.1n [u(n + 20) - u(n - 10)], amb -5 ≤ n ≤15

El que tenim és el mostreig de la funció exponencial en els punts on la resta dels esglaons no s'anul·la, o sigui, entre -20 i 10.

4. x_5 (n) = 5[cos(0.49πn) + cos(0.51πn)], -200 ≤ n ≤200

La funció que tenim és una suma de cosinus. Com a tal, arribarà al seu valor màxim en aquells punts on la suma dels dos cosinus valgui 1. Això es dona en els múltiples de 2π. Per tant, tindrem aquests pics en n=0, en n=-200 i en n=200. Anàlogament, el valor més negatiu de la funció s'obté quan el valor de tots dos cosinus és -1. Per tant, aquests pics estaran a n=-100 i a n=100. D'altra banda, obtindrem 0's en els punts on tinguem múltiples de π/2 en els cosinus, o sigui, a n = -150, -50, 50 i 150.

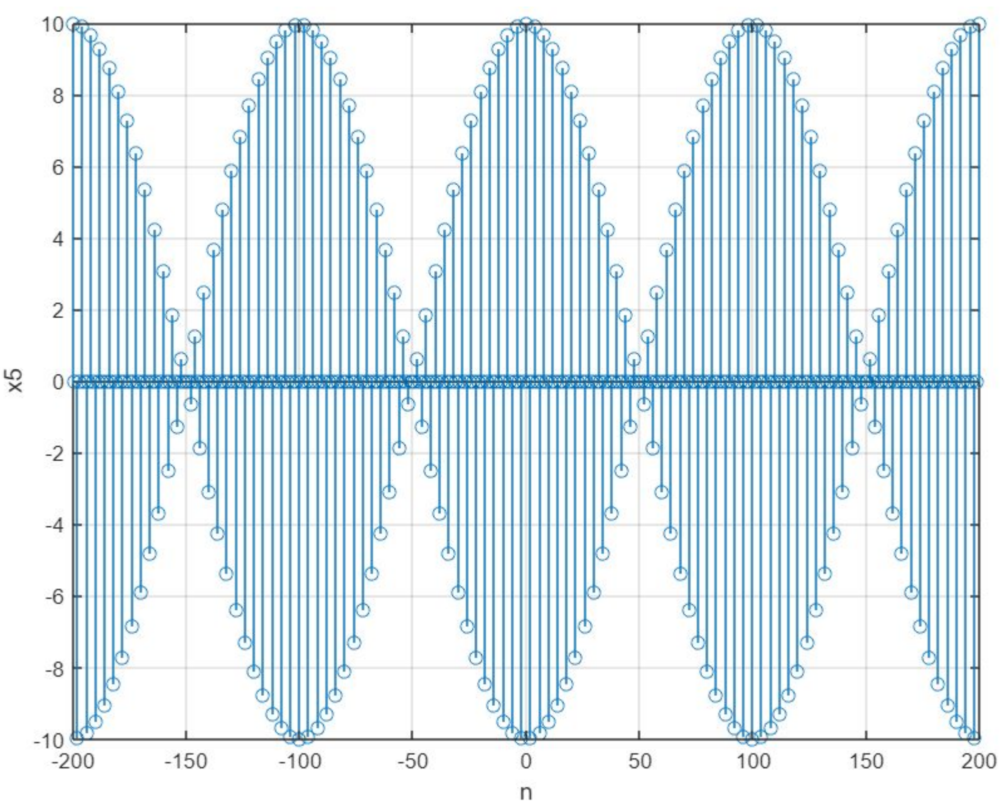

Figura 10: x_5 (n) = 5[cos(0.49πn) + cos(0.51πn)], amb -200 ≤ n ≤200

5. x_6 (n) = 2 sin(0.01πn)cos(0.5πn), -200 ≤ n ≤200

Aquesta vegada tenim un producte *sin* per *cos*. Així doncs, ara tindrem un valor de 0 als punts on s'anul·len el *sin* o el *cos*, o sigui, a n=-200,-100,0,100 i 200 (pel que fa al *sin*) i a tots els *n* senars (pel que fa al *cos*). D'altra banda, els pics (màxims i mínims) es donaran quan el mòdul de les dues funcions sigui 1. Per exemple, els màxims es trobaran a n=-50 i a n=150.

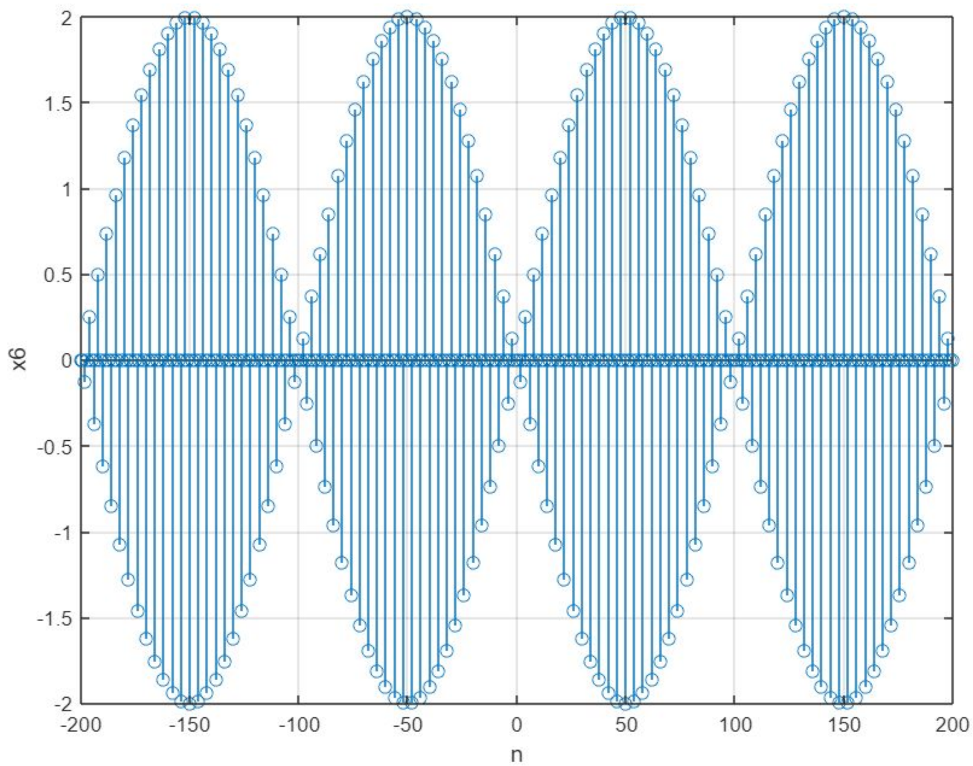

Figura 11: x_6 (n) =2 sin(0.01πn)cos(0.5πn), amb -200 ≤ n ≤200

6. x_8 (n) = e^(0.01n)sin(0.1πn), 0 ≤ n ≤100

El que tenim és el producte d'una funció exponencial per un sinus no periòdic. Per tant, observem que la gràfica presenta el mostreig d'un *sinus*, la amplitud del qual es va accentuant a mesura que creix la n a causa de l'efecte de la funció exponencial.

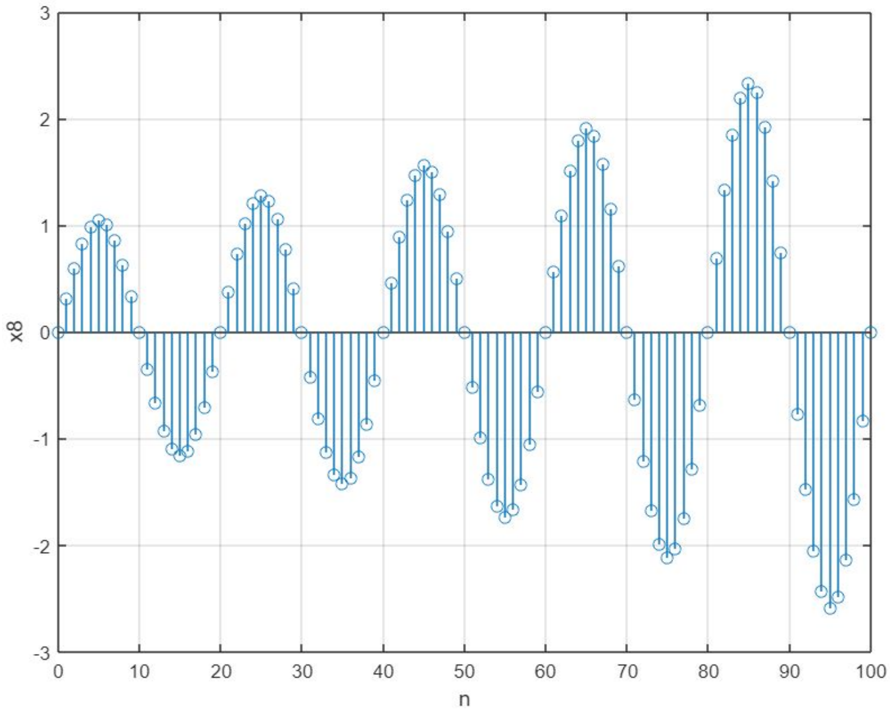

Figura 12: x_8 (n) =e^(0.01n)sin(0.1πn), amb 0≤ n ≤100

Exercici 2: Genereu les següents seqüències periòdiques i dibuixeu les seves mostres (amb la funció stem) sobre el nombre de períodes indicats:

1. x_1 (n) = {. . . , -2, -1, 0, 1, 2, . . .} periòdic. Mostreu 5 períodes

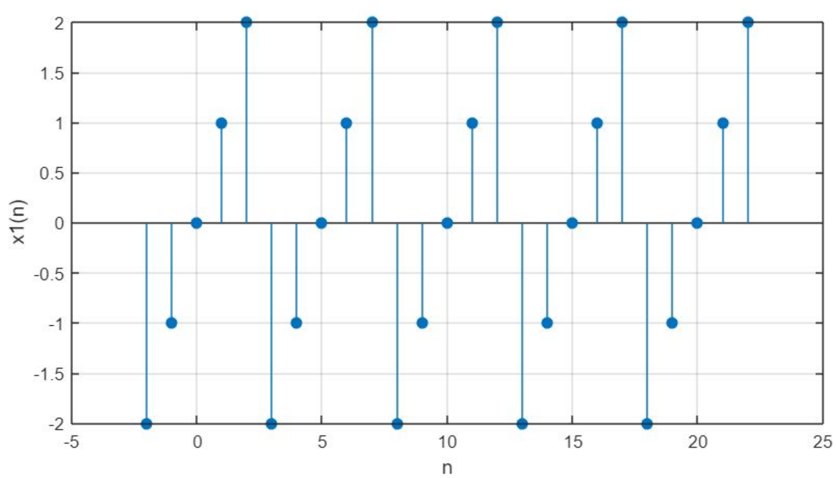

Figura 13: 5 períodes de {. . . , -2, -1, 0, 1, 2, . . .}, amb 0 com a element n = 0

2. x_2 (n) = e^0.1n[u(n) - u(n - 20)]periòdic. Mostreu 3 períodes

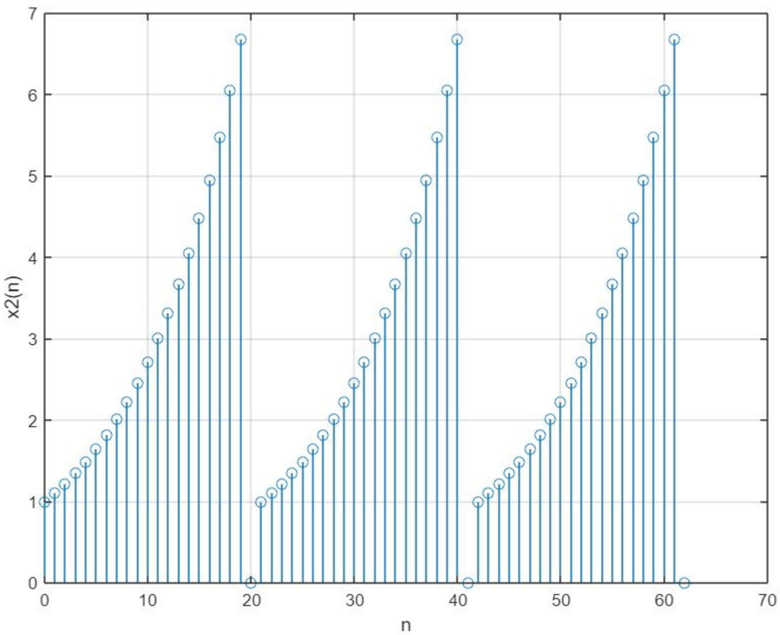

Figura 14: 3 períodes de (e^0.1n)[u(n) - u(n - 20)]

3. x_3 (n) = sin(0.1πn)[u(n) - u(n - 10)]periòdic. Mostreu 4 períodes

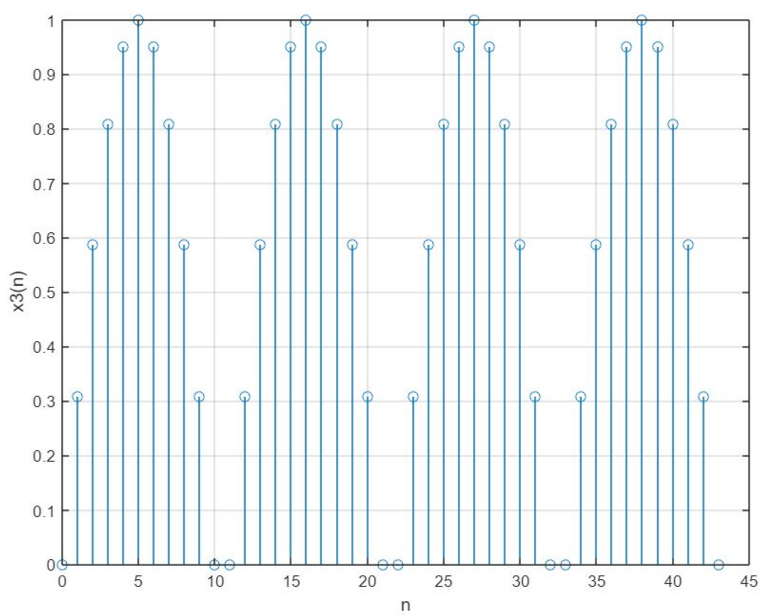

Figura 15: 4 períodes de sin(0.1πn)[u(n) - u(n - 10)]

4. x_4 (n) = {. . . , 1, 2, 3, . . .}periòdic + {. . . , 1, 2, 3, 4, . . .}periòdic, 0 ≤ n ≤24

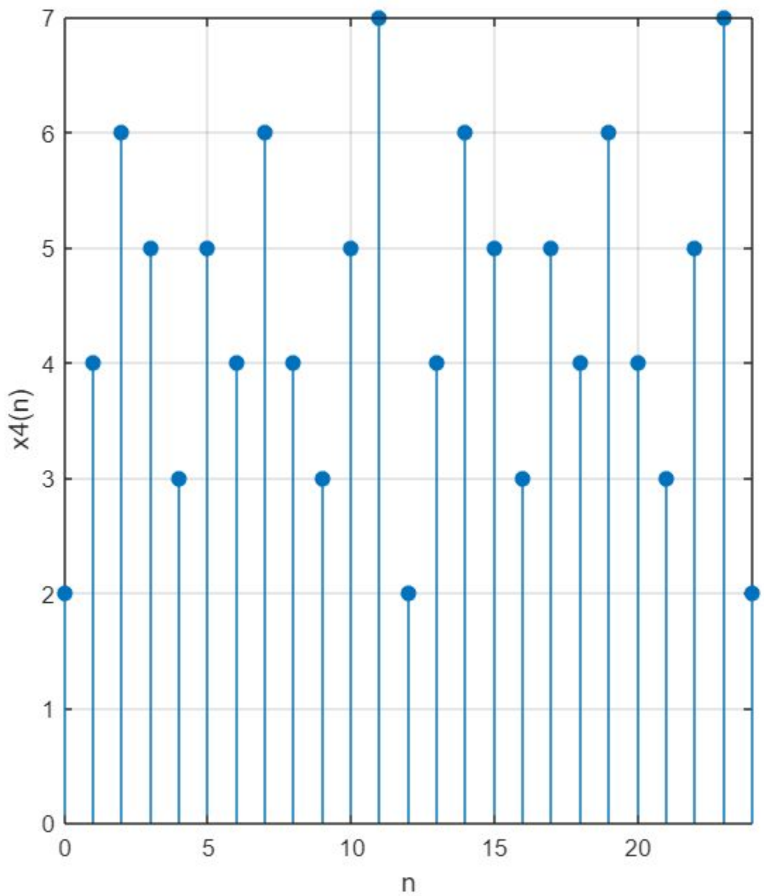

Figura 16: 2 períodes de {. . . , 1, 2, 3, . . .}+{. . . , 1, 2, 3, 4, . . .}, amb 1 per a n=0

Com s'observa, el període d'aquesta última seqüència que resulta de sumar {...,1,2,3,...} amb {...,1,2,3,4,...} és el seu mínim comú múltiple, és a dir, 12.

Exercici 3: Sigui x(n) = {2,4, -3, 1, -5, 4, 7}:

Genereu i dibuixeu les mostres (usant stem) de les següents seqüències.

1. x_1 (n) = 2x(n - 3) + 3x(n + 4) - x(n)

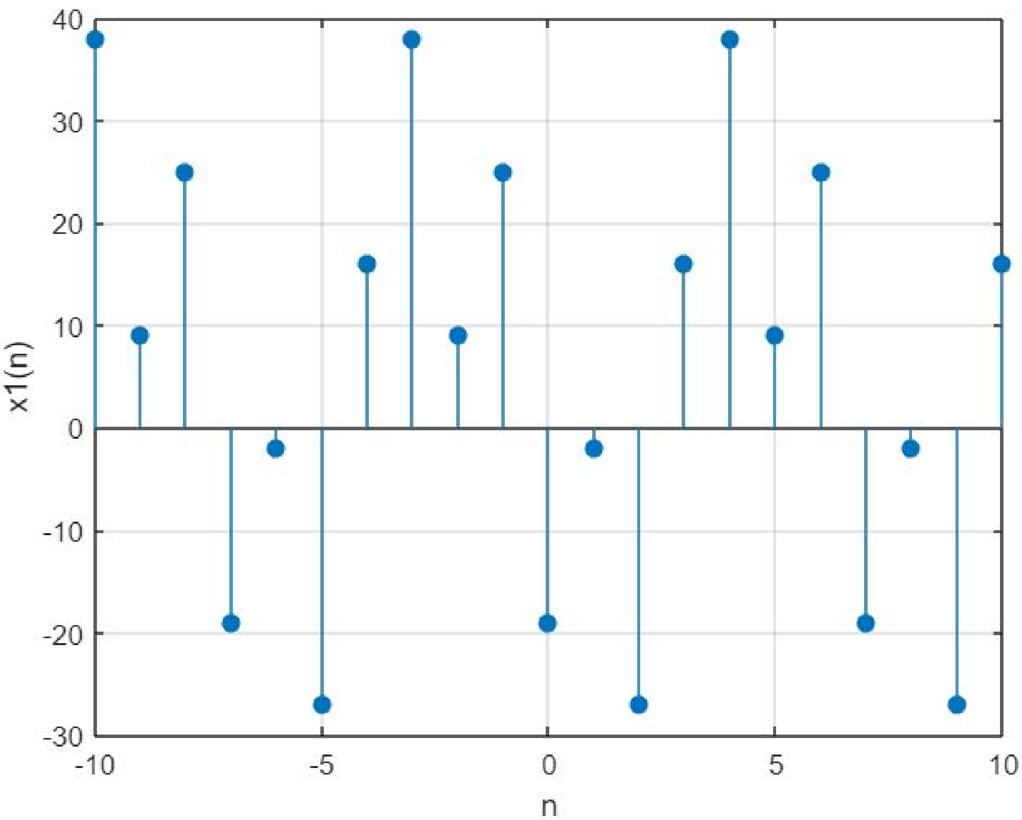

Figura 17: x_1 (n) = 2x(n - 3) + 3x(n + 4) - x(n), amb -10 ≤ n ≤ 10

2. x_2 (n) = 4x(4 + n) + 5x(n + 5) + 2x(n)

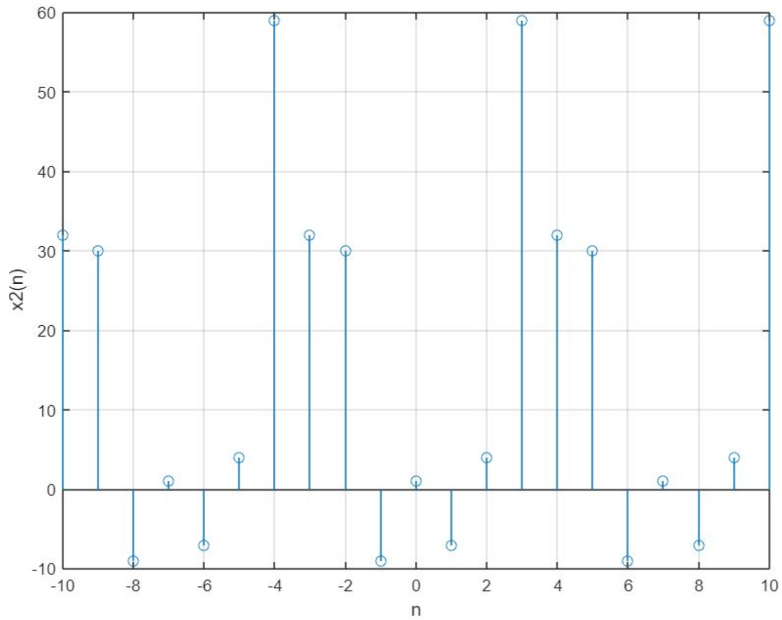

Figura 18: x_2 (n) = 4x(4 + n) + 5x(n + 5) + 2x(n), amb -10 ≤ n ≤ 10

3. x_3 (n) = x(n + 3)x(n - 2) + x(1 - n)x(n + 1)

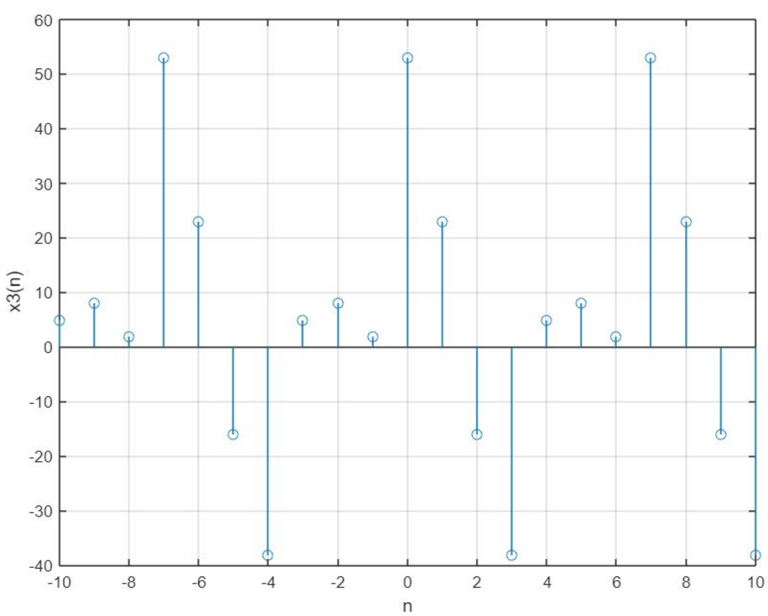

Figura 19: x_3 (n) = x(n + 3)x(n - 2) + x(1 - n)x(n + 1), amb -10 ≤ n ≤ 10

4. x_4 (n) = 2e^0.5nx(n) + cos(0.1πn) x(n + 2) , -10 ≤ n ≤ 10

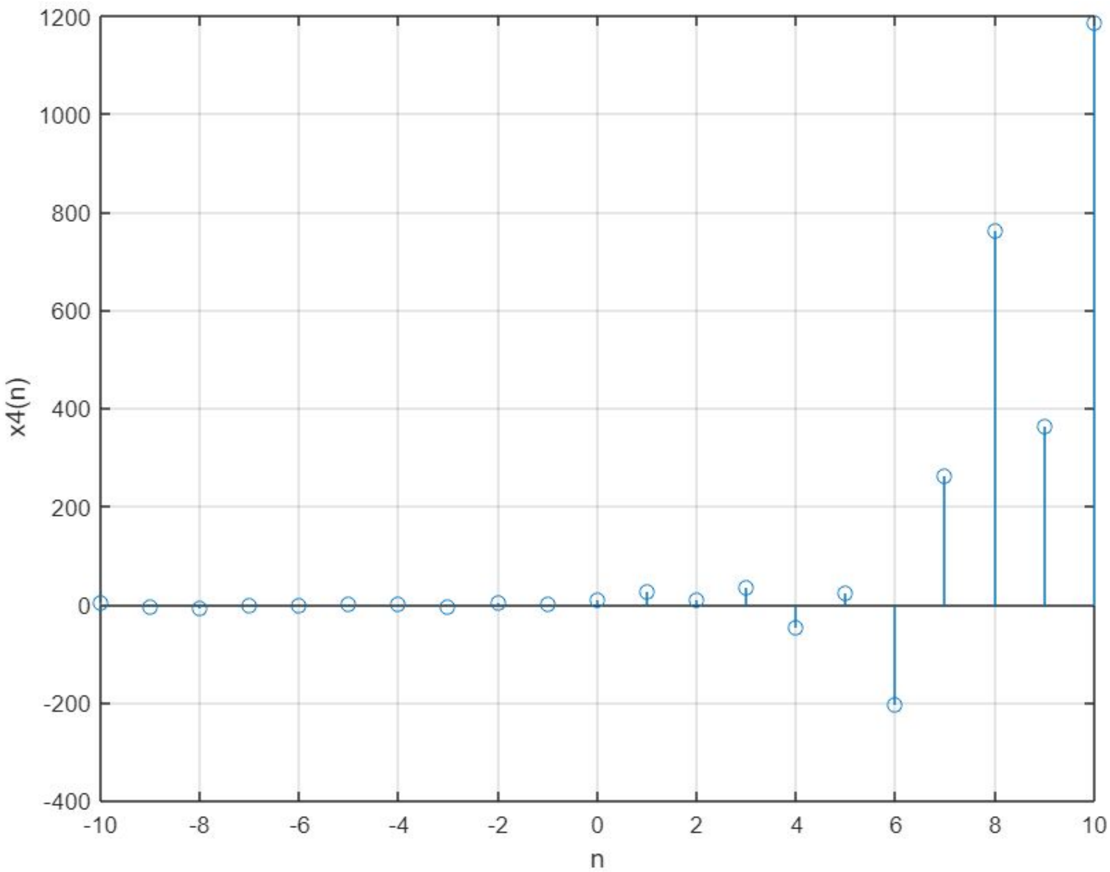

Figura 20: x_4 (n) = 2e^(0.5n)·x(n) + cos(0.1πn)· x(n + 2), amb -10 ≤ n ≤ 10

Exercici 4: La seqüència exponencial e^{jw_0n} o la seqüència sinusoïdal cos(w_0 n) són periòdiques si la freqüència normalitzada f_0 = $w_0/2\pi$ és un nombre racional, això és, f_0 = K/N, on K i N són enters.

1. Proveu el resultat anterior

   Com ja s'ha fet una demostració similar per al *cos* en el primer exercici, passem a la seqüència exponencial complexa. Per definició, la funció serà periòdica si existeix un N natural (el període de la seqüència) tal que:

$$e^{jw_0n} = e^{jw_0(n+kN)}\text{, amb k} \in \mathbb{Z}$$

Desenvolupant l'expressió anterior, tenim:

$$e^{jw_0n} = e^{jw_0n} \cdot e^{jw_0(kN)}$$

Per tant, tenim que: $e^{jw_0kN} = 1$. Per la fórmula d'Euler, sabem que:

$$e^{jw_0kN} = cos(w_0kN) + isin(w_0kN) \rightarrow isin(w_0kN) = 0, \ \ cos(w_0kN) = 1$$

De les dues últimes equacions, podem treure, per exemple, que:

$$cos(w_0kN) = 0 \rightarrow w_0kN = \text{M}\pi/2\text{, amb un M enter}$$

D'aquesta forma, $w_0 = \text{P}\pi/2$, on P és un racional. Així, queda vist que $f_0 = w_0/2\pi$ serà un racional.

2. Genereu $e^{0.1j\pi n}$, $-100 \leq n \leq 100$. Dibuixeu les seves parts reals i imaginàries usant la funció stem. És una seqüència periòdica? Si ho fos, quin és el seu període fonamental? Segons el dibuix, quina interpretació podeu donar a K i N?

   Com veiem, $w_0 = 0.1\pi$. Com que $f_0 = 1/20$, que és racional, sabem que $e^{0.1j\pi n}$ és una seqüència periòdica. El període fonamental és N = 20, ja que el període és la inversa de la freqüència, que és 1/20 (d'aquí treiem també que K=1, seguint la fòrmula $f_0 = K/N$). La interpretació de *K* i *N* és clara. Els valors K = 1, N = 20 ens diuen que, cada 20 mostres de n tenim 1 període del senyal.

   La *Figura 21* mostra el gràfic de la seqüència, generat amb MATLAB.

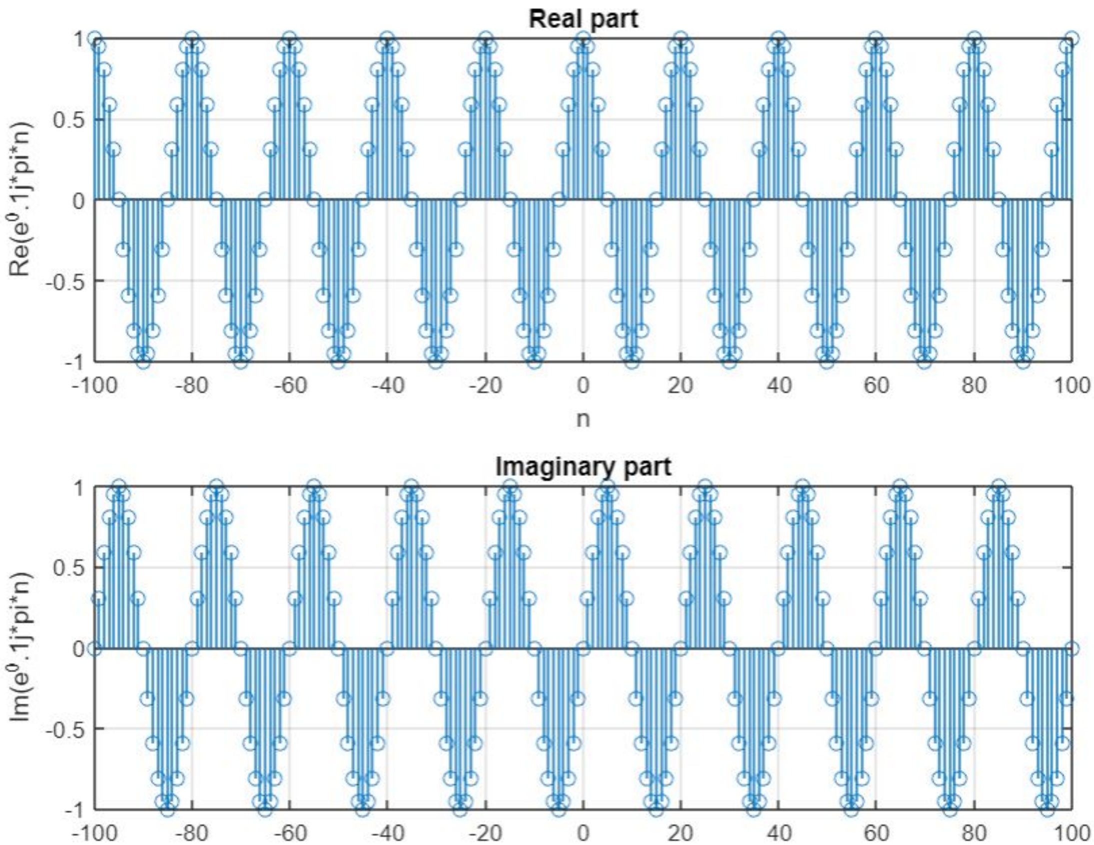

Figura 21: Parts Re i Im de $e^{0.1j\pi n}$, amb $-100 \leq n \leq 100$

3. Genereu el dibuix de cos(0.1n), $-20 \leq n \leq 20$. És una seqüència periòdica? Quina conclusió treieu del dibuix?

   Aquesta vegada, $f_0 = 1/20\pi$, que és irracional. Per tant, la seqüència no és periòdica.

   Al dibuix podem veure que la seqüència no assoleix els valors de 0, ja que, lògicament, mai arribem a una *n* que faci que 0.1n sigui múltiple de $\pi/2$. D'igual manera, si representem un gràfic amb un interval de *n* més gran, veurem que no s'assoleix mai el valor 1 per la mateixa raó (excepte a n=0). La *Figura 22* mostra el gràfic de la seqüència.

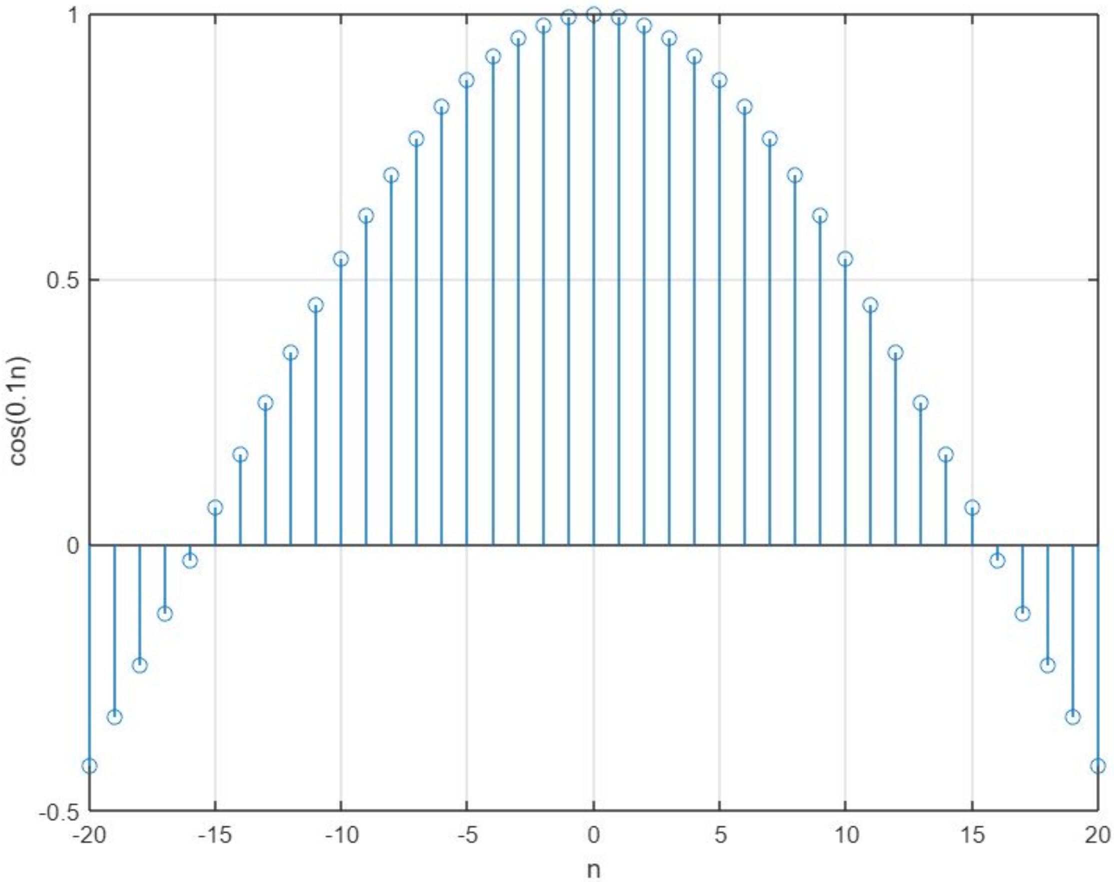

Figura 22: cos(0.1n), amb $-20 \le n \le 20$