Cognoms | Nom — SENYALS (1)

Assignatura

DNI | Curs | Grup | Data

Ex 1. Senyal exponencial

Sigui $x(n) = a^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \mathbb{R}$

Si $a \in \mathbb{R}$, llavors $x(n)$ és real

Si $a \in \mathbb{C}$, llavors

$$a \equiv r \cdot e^{j\theta} \quad \text{on } r \text{ i } \theta \text{ són els paràmetres}$$

i llavors

$$x(n) = r^n e^{j\theta n} = r^n(\cos\theta n + j\sin\theta n)$$

es pot representar gràficament dibuixant la part real i la imaginària

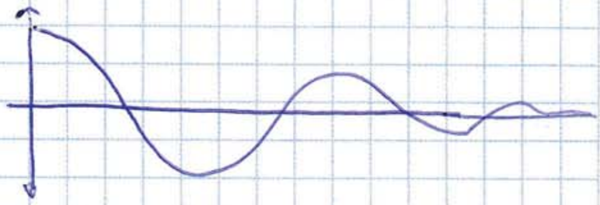
$$X_R(n) = r^n \cdot \cos\theta n$$
$$X_I(n) = r^n \cdot \sin\theta n$$

representació polar:

$$\text{mòdul} \equiv |x(n)| = A(n) \equiv r^n$$
$$\text{fase} \equiv \angle x(n) = \phi(n) = \theta \cdot n$$

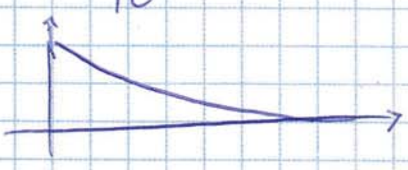
Ex: $a = 0{,}9 \cdot e^{j\pi/10}$; $x(n) = a^n$

$$X_R(n) = (0{,}9)^n \cos\frac{\pi}{10} \cdot n$$



$$X_I(n) = (0.9)^n \cdot \sin\frac{\pi}{10} \cdot n$$

mòdul $= 0{,}9^n$



$fd \Rightarrow \frac{\pi}{10} = 2\pi fd$

$fd = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{20}$

Ex 2 Energia E d'un senyal es defineix com:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$ tant per senyals reals com complexes.

si E és finita $(0 < E < \infty)$ llavors $x(n)$ és un senyal d'energia

Tot i que els senyals poden tenir E infinita, poden tenir potència finita.
·La potència mitjana d'un senyal discret és:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$ on $2N+1$ és el nombre de mostres en l'interval

si definim l'energia d'un senyal sobre un interval finit $-N \leq n \leq N$ com:

$$E_N = \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

llavors podem expressar l'energia E d'un senyal com:

$$E = \lim_{N\to\infty} E_N$$

i la potència mitjana d'un senyal $x(n)$ com:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_N$$

si E és finita, llavors $P = \emptyset$
si E és infinita, la potència pot ser infinita o finita.

si P és finita, el senyal $x(n)$ és un senyal de potència

Ex 2 (cont):

Calculeu la potència i energia d'un senyal esglaó:

$$E_N = \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N} |u(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N} 1 = N+1$$

$$E = \lim_{N\to\infty} E_N = \lim_{N\to\infty} N+1 = \infty$$

El glaó no és un senyal d'energia

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot N+1 = \frac{1}{2}$$

La seqüència glaó és un senyal de potència amb energia infinita

Exemple: Demostreu que la seqüència $x(n) = A e^{j w_0 \cdot n}$

té una potència mitjana $P = A^2$ i és per tant un senyal de potència.

Senyals Periòdics

Un senyal $x(n)$ és periòdic de periode N $(N>0)$ sii

$$x(n+N) = x(n) \quad \forall n$$

El valor més petit d'N es diu periode fonamental

Si no existeix cap valor d'N es diu senyal no periòdic

L'energia d'un senyal periòdic $x(n)$ és finita en un sol periode $0 \leq n \leq N-1$ si $x(n)$ és finita.

En canvi, l'energia d'un senyal periòdic $-\infty \leq n \leq \infty$ és infinita

Llavors, la potència mitjana d'un senyal periòdic és finita i igual a la potència mitjana en un sol periode i val

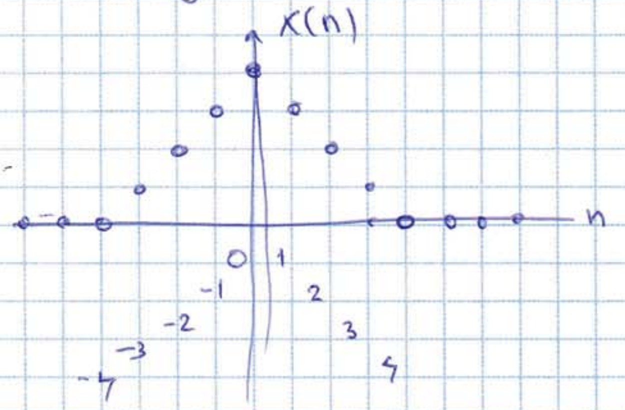
$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

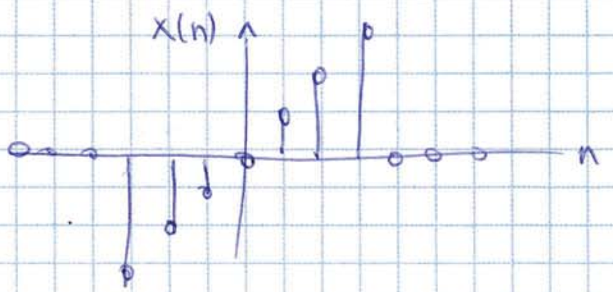
Per tant, els senyals periòdics són senyals de potència.

Senyals asimètrics i simètrics

Un senyal $x(n)$ és simètric (parell) si $x(-n) = x(n)$

Un senyal $x(n)$ és asimètric (senar) si $x(-n) = -x(n)$





Per a qualsevol senyal arbitrari, es compleix que

$$x_p(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) + x(-n) \right]$$

$$x_s(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) - x(-n) \right]$$

si ara sumem els dos senyals, resulta que:

$$x(n) = x_p(n) + x_s(n) \quad \text{per a qualsevol senyal.}$$

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm. | Nombre total de fulls | Qualificació

Cognoms | Nom: SENYALS | 4

Assignatura

DNI | Curs | Grup | Data

Manipulació simple de senyals discrets

* Transformació de la variable independent (t, el temps)

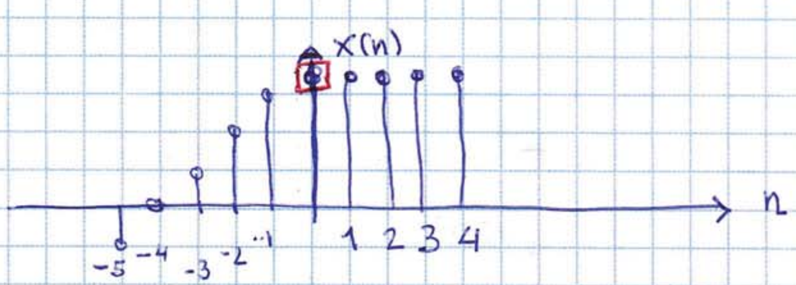
Un senyal $x(n)$ es pot desplaçar en el temps reemplaçant la variable independent n per $n-k$, amb $k \in \mathbb{Z}$.

si $k > \emptyset$, el desplaçament produeix un retard

si $k < \emptyset$, el senyal s'avança k unitats de temps.

Ex Donat $x(n)$, trobeu $x(n-3)$ i $x(n+2)$

$y(n) = x(n)$



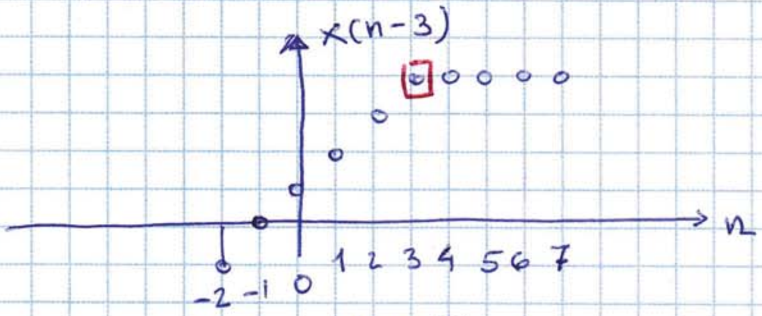
Senyal original

$y(n) = x(n-3)$

$y(3) = x(0)$

$y(4) = x(1)$

$\vdots$



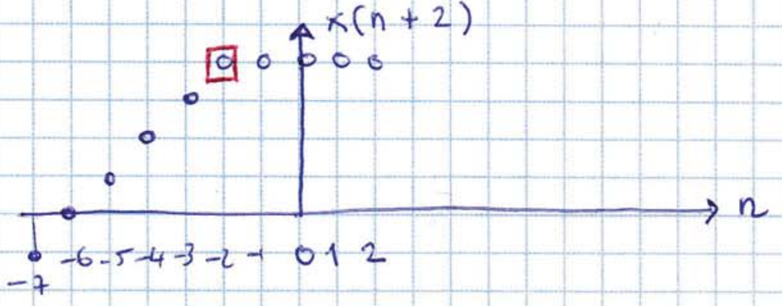
Senyal retardat

$y(n) = x(n+2)$

$y(0) = x(2)$

$y(1) = x(3)$

$\vdots$



Senyal avançat

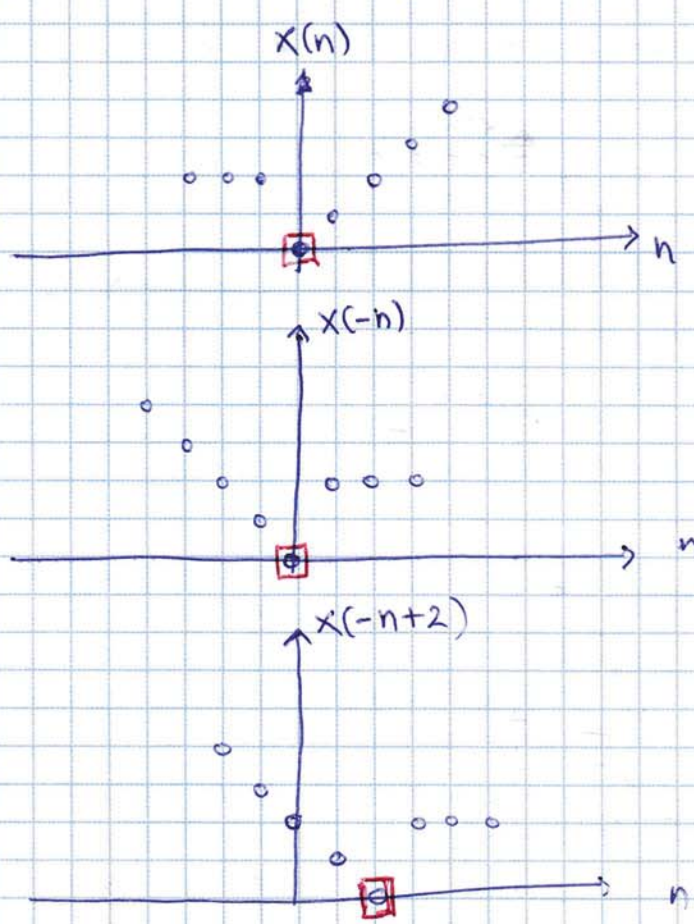
Exercici: Donat $x(n)$, representar $x(-n)$ i $x(-n+2)$

$y(n) = x(-n)$

$$\left.\begin{array}{ll} y(\emptyset) = x(\emptyset) & \\ y(1) = x(-1) & y(-1) = x(1) \\ y(2) = x(-2) & y(-2) = x(2) \end{array}\right\} y(n) \text{ és el senyal reflexat}$$

$y(n) = x(-n+2)$

$$\left.\begin{array}{ll} y(0) = x(2) & y(-1) = x(3) \\ y(1) = x(1) & y(-2) = x(4) \\ y(2) = x(\emptyset) & \end{array}\right\} y(n) \text{ senyal reflexat i retardat 2 unitats}$$



Senyal original

$y(n) = x(-n)$
Senyal reflexat

$y(n) = x(-n+2)$

senyal reflexat retardat 2 unitats

Folding i Delay:

Les operacions de solapament i retard (o avançament) temporal d'un senyal no són commutatives.

si TD : time delay, retard en el temps
FD : folding, solapament,

llavors

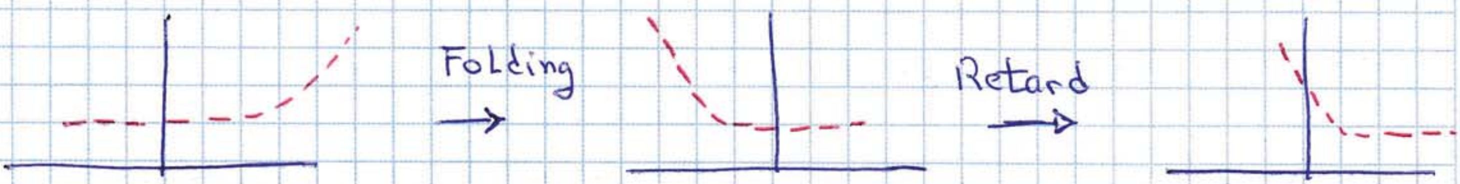
$$TD_k[x(n)] = x(n-k) \quad k>0 \quad \text{retard}$$

$$FD[x(n)] = x(-n)$$

Resulta que:

$$TD_k\{FD[x(n)]\} = TD_k[x(-n)] = x(-(n-k)) = x(-n+k)$$

$$FD\{TD_k[x(n)]\} = FD[x(n-k)] = x((-n)-k) = x(-n-k)$$

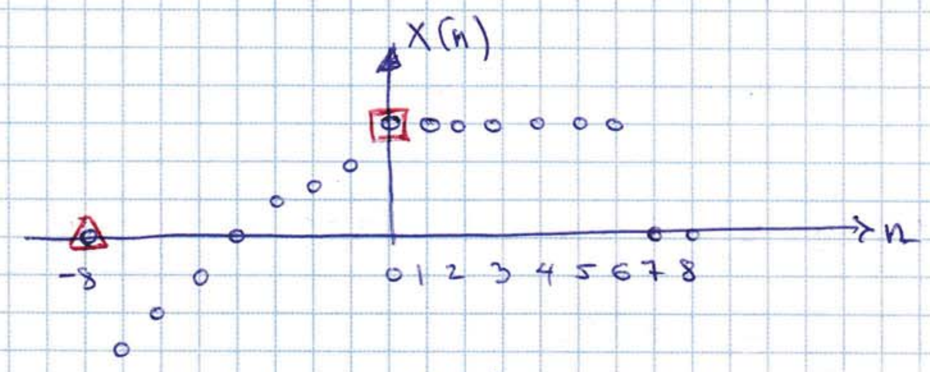


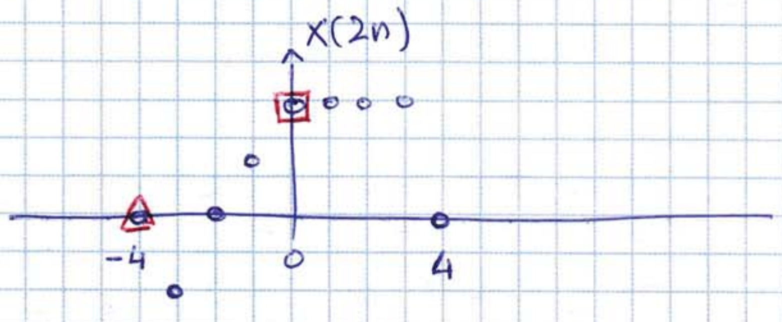
Escalat temporal o submostreig

Ex: representar gràficament el senyal $y(n) = x(2 \cdot n)$

Solució: EL senyal $y(n)$ s'obté agafant una de cada 2 mostres del senyal $x(n)$

$$\left.\begin{array}{ll} y(0) = x(0) & \\ y(1) = x(2) & y(-1) = x(-2) \\ y(2) = x(4) & y(-2) = x(-4) \end{array}\right\}$$ s'han descartat totes les mostres senars d' $x(n)$





EL senyal $x(n)$ es va obtenir mostrejant el senyal analògic $x_a(t)$ de manera que:

$x(n) = x_a(nT)$ on T és un periode de mostreig.

Llavors:

$x(2n) = x_a(2nT)$

on $T \rightarrow 2T$ augmentant el periode de mostreig

$f = \frac{1}{T} \rightarrow f' = \frac{1}{2T}$ la freqüència disminueix en un factor 2

Això s'anomena submostreig

Escola Tècnica Superior
d'Enginyeria Industrial de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

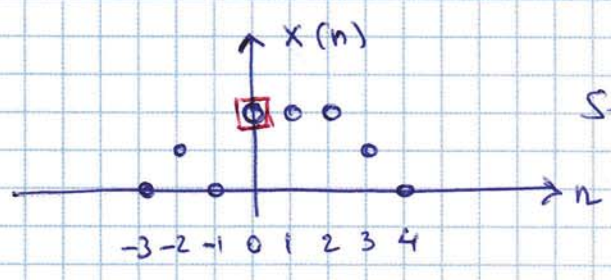
Full núm. | Nombre total de fulls | Qualificació

SENYALS (6)
Cognoms | Nom
Assignatura
DNI | Curs | Grup | Data

Exercicis

(1) Si $X(n) = \{0, 1, 0, \underset{\uparrow}{2}, 2, 2, 1, 0\}$. Llavors calculeu

a) $x(n-2)$



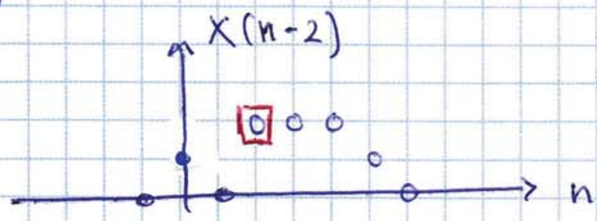
senyal original

El senyal $x(n-2)$ és un senyal retardat 2 unitats

$y(n) = x(n-2)$

$y(0) = x(-2) = 1$

$y(1) = x(-1) = 0$

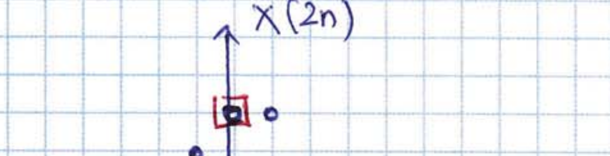


b) $x(2n)$: senyal submostrejat 2 unitats

$y(n) = x(2n)$

$y(0) = x(0)$

$y(1) = x(2)$



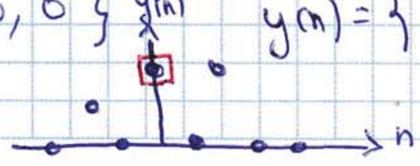
c) $y(n) = \frac{1}{2}x(n) + (-1)^n \cdot \frac{1}{2}x(n)$

Solució 1

$\frac{1}{2}x(n) = \{0, 1/2, 0, 1, 1, 1, 1/2, 0\}$

$(-1)^n \frac{1}{2}x(n) = \{0, 1/2, 0, 1, -1, 1, -1/2, 0\}$

$y(n) = \{0, 1, 0, \underset{\uparrow}{2}, 0, 2, 0, 0\}$



Solució 2 : $y(n) = \frac{1}{2}x(n)\left[1 + (-1)^n\right]$

n parells $\Rightarrow y(n) = x(n)$

n senar $\Rightarrow y(n) = \emptyset$

$y(n) = \{0, 1, 0, \underset{\uparrow}{2}, 0, 2, 0, 0\}$

Exercicis proposats a partir del senyal $x(n)$ anterior

* $x(n+1)$, $x(-n)$, $x(4-n)$, $x(n^2)$, $x(n-1)\cdot\delta(n-2)$

Full núm. | Nombre total de fulls | Qualificació 1

SISTEMES

Cognoms | Nom | Assignatura | DNI | Curs | Grup | Data

INTRODUCCIÓ I PROPIETATS

Tenim un sistema T en repòs, que quan s'executa amb una entrada $x(n)$ produeix una sortida $y(n)$, llavors $y(n) = T[x(n)]$

- Invariància en el temps $x(n) \xrightarrow{T} y(n)$ i $x(n-k) \xrightarrow{T} y(n-k)$ per tota entrada $x(n)$ i tot desplaçament en temps k.
- Retardador $x[n] \rightarrow \boxed{z^{-1}} \rightarrow x[n-1]$
- Avançador $x[n] \rightarrow \boxed{z} \rightarrow x[n+1]$ no apte per a temps real
- Causalitat: els sistemes en temps real són tots causals.

Dir si els següents sistemes són causals

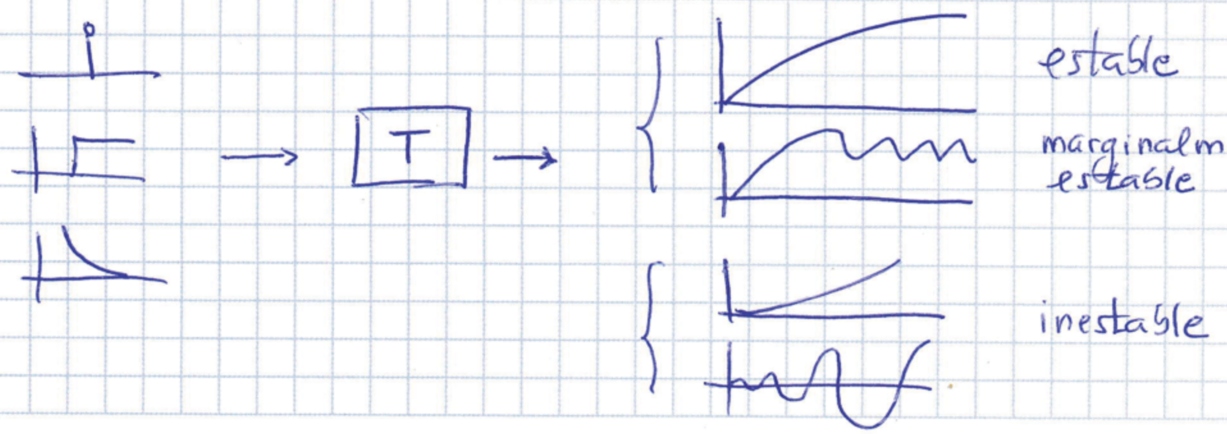
- $y(n) = x(n) - x(n-1)$
- $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$
- $y(n) = a \cdot x(n)$
- $y(n) = x(n) + 3 \cdot x(n+4)$
- $y(n) = x(n^2)$
- $y(n) = x(2n)$
- $y(n) = x(-n)$

- Estabilitat: existeix un parell de números M_x i M_y tals que:

$|x(n)| \leq M_x < \infty$ i $|y(n)| \leq M_y < \infty$ per $\forall n$

Si per alguna entrada afitada la sortida és no afitada, llavors és inestable

Hi ha 3 tipus de sortida en front de les entrades



Exercici Determinar si els següents sistemes són invariants en el temps?

a) $y(n) = x(n) - x(n-1)$ diferenciador

b) $y(n) = n \cdot x(n)$ multiplicador per temps.

c) $y(n) = x(-n)$ mirall

d) $y(n) = x(n) \cdot \cos \omega_0 n$ modulador

Solució.

a) $y(n) = T[x(n)] = x(n) - x(n-1)$

si retardem l'entrada k unitats i apliquem el sistema, la sortida serà:

$$y(n,k) = x(n-k) - x(n-k-1)$$

si retardem $y(n)$ en k unitats de temps, obtenim

$$y(n-k) = x(n-k) - x(n-k-1)$$

i per tant $y(n,k) = y(n-k)$, és un sistema invariant en el temps

b) $y(n) = T[x(n)] = n \cdot x(n)$

La resposta a un retard $\underline{k}$ a l'entrada és

$$y(n,k) = n \cdot x(n-k)$$

si retardem $y(n)$ en k unitats, obtenim

$$y(n-k) = (n-k) \cdot x(n-k)$$

i per tant $y(n,k) \neq y(n-k)$ és un sistema que varia amb el temps