UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

PROCESSAMENT DIGITAL DEL SENYAL

GRAU EN ENGINYERIA INFORMÀTICA

PRÀCTICA 2

SISTEMES LTI I PROPIETATS

Autor:
Daniel DONATE

Professor:
Antoni GRAU

Q1 Curs 2020-2021

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat d'Informàtica de Barcelona

MOSTREIG I CORRELACIÓ

Exercici 1: Genereu 2 periodes d'una sinusoide analògica d'amplitud 1 i freqüència 200Hz, mostrejada a 1kHz.

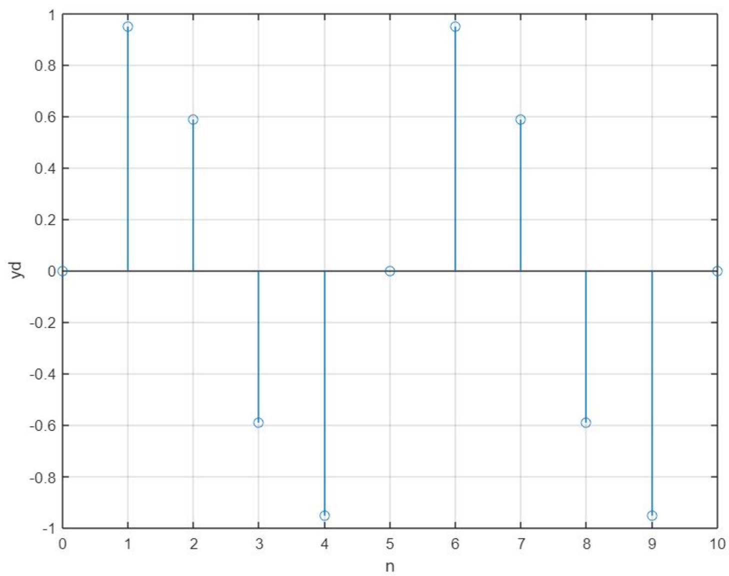


Figura 1: sin(2πnf/fs), on f=200Hz i fs=1kHz

Exercici 2: Feu la mateixa operació però ara la sinusoide a mostrejar és de 1.2kHz.

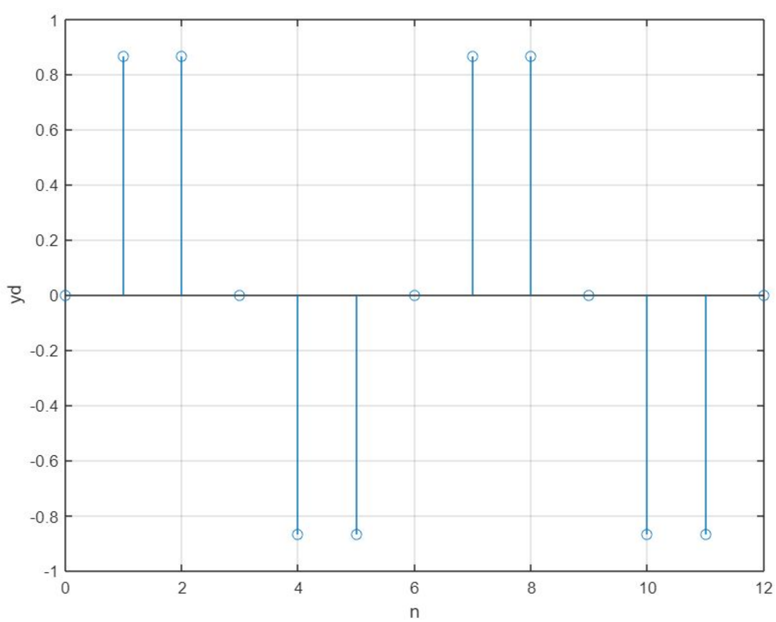


Figura 2: sin(2πnf/fs), on f=200Hz i fs=1.2kHz

Com observem, el resultat obtingut en augmentar la freqüència de sampling és més similar a l'aspecte de la sinusoide que volem representar. La diferència és més acusada si fem servir *plot* enlloc de *stem* (veure *Figura 3*).

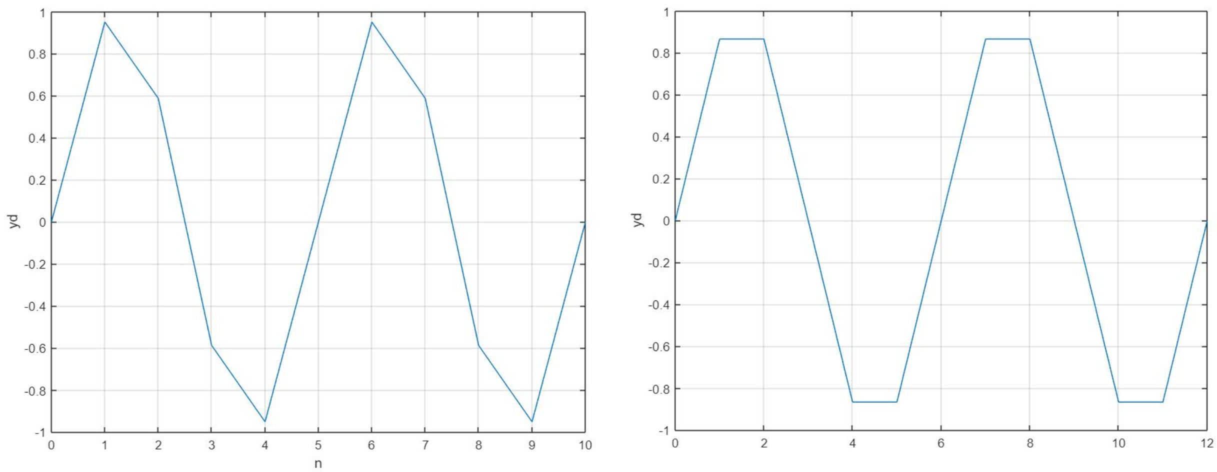


Figura 3: plot de sin(2πnf/fs), amb fs=1kHz (esquerra) i fs=1.2kHz (dreta)

Exercici 3: Superposeu ara les gràfiques dels dos exercicis anteriors. Què ha passat? Quines conseqüències se'n poden extreure? Superposeu els senyals analògics també.

Resposta: Com sabem, la superposició de dues ones sinusoidales d'igual freqüència produeix una altra nova sinusoide amb la mateixa freqüència, però amb diferent amplitud i fase. El que obtenim en la superposició analògica és una ona idèntica a la original, però amb el doble d'amplitud, ja que estem sumant dues ones iguals. Però en la superposició digital, com tenim dues freqüències de mostreig diferents, tenim que les ones interfereixen d'altra manera entre elles, produint amplituds que no són iguals a les amplituds originals de les dues ones, alterant la periodicitat del senyal.

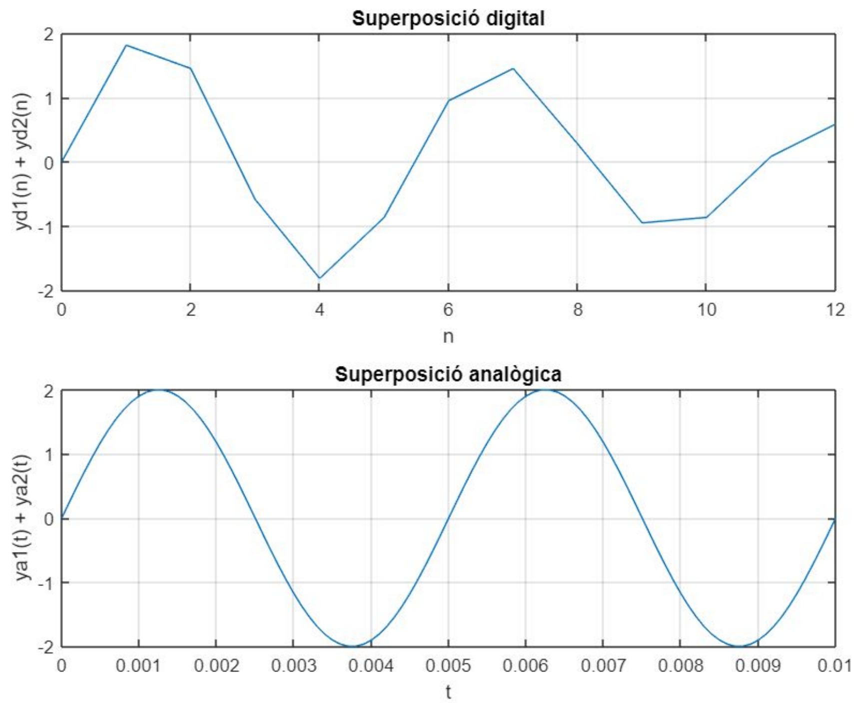


Figura 4: plot de la superposició de les dues ones anteriors

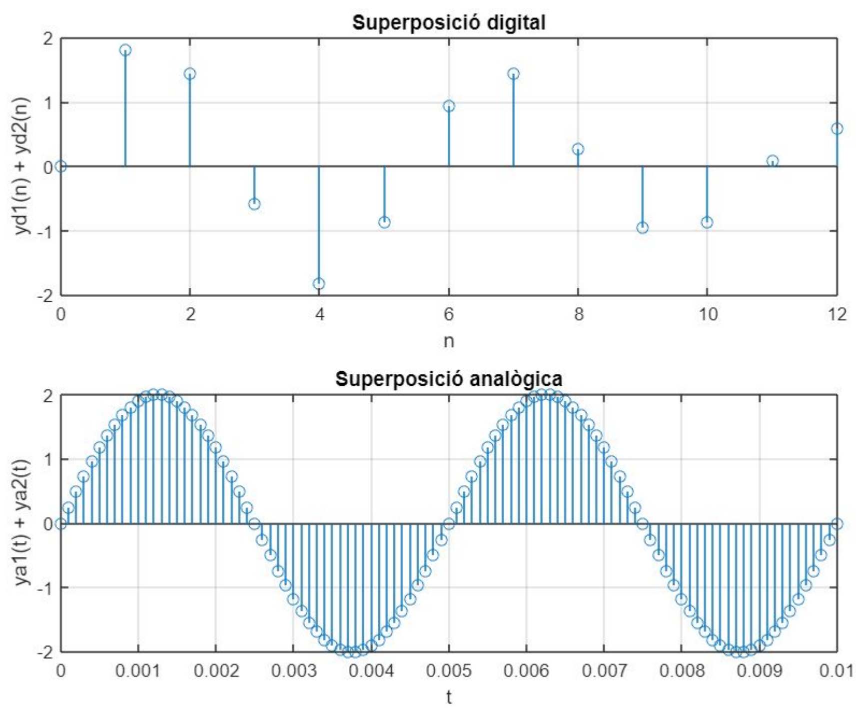


Figura 5: stem de la superposició de les dues ones anteriors

Exercici 4: Determineu si els sistemes definits per les equacions en diferències següents verifiquen les propietats de linealitat, invariancia temporal i estabilitat.

a) $y(n) = x(n)^2 + 1$
b) $y(n) = \frac{n-1}{n} y(n-1) + \frac{1}{n} x(n)$
c) $y(n) = ay(n-1) + x(n),\ a = 1.2,\ 0.8$

Resposta: Si un sistema és lineal, aleshores podem *descriure* l'efecte del sistema separant el senyal d'entrada en parts més simples i superposant les diferents sortides per restaurar la sortida inicial del sistema. Matemàticament, diem que un sistema amb transformació *Tr* és lineal si satisfà la següent equació:

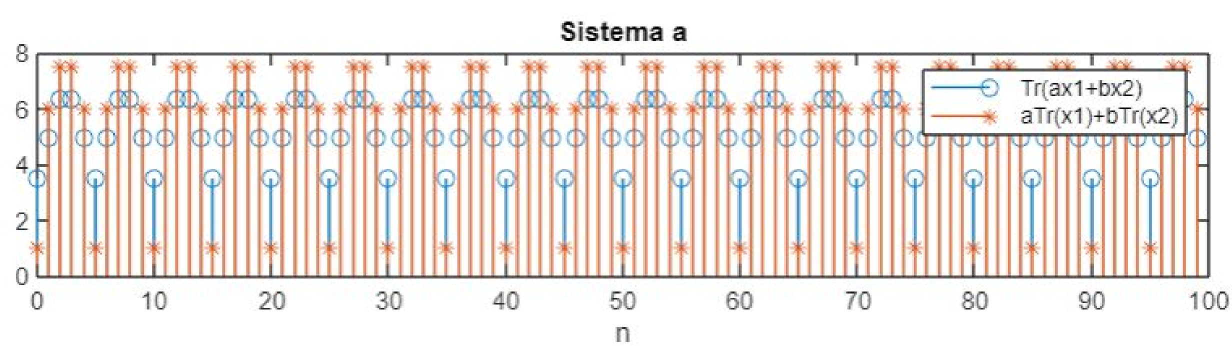
$$Tr(a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n)) = a \cdot Tr(x_1(n)) + b \cdot Tr(x_2(n)) \quad (1)$$

Siguin $x_1(n)$, $x_2(n)$ dues funcions d'entrada que definim d'aquesta manera:

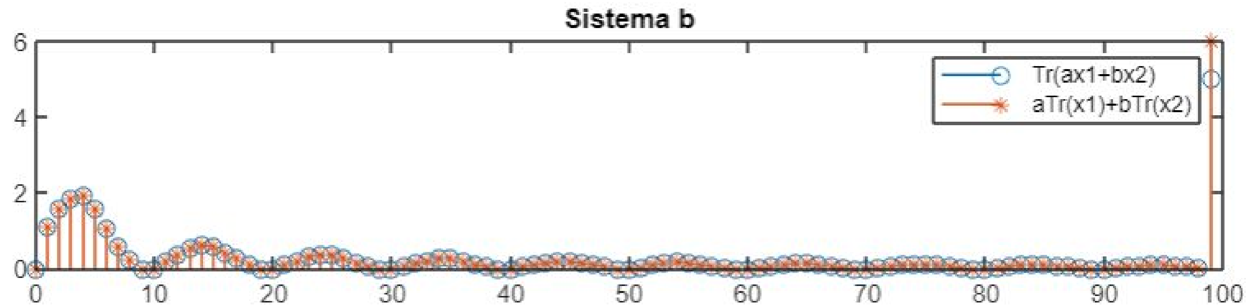
$$x_1(n) = sin(2\pi \cdot 0.1 \cdot n) \quad x_2(n) = sin(2\pi \cdot 0.3 \cdot n) \quad n \in [0, 99],\ enter$$

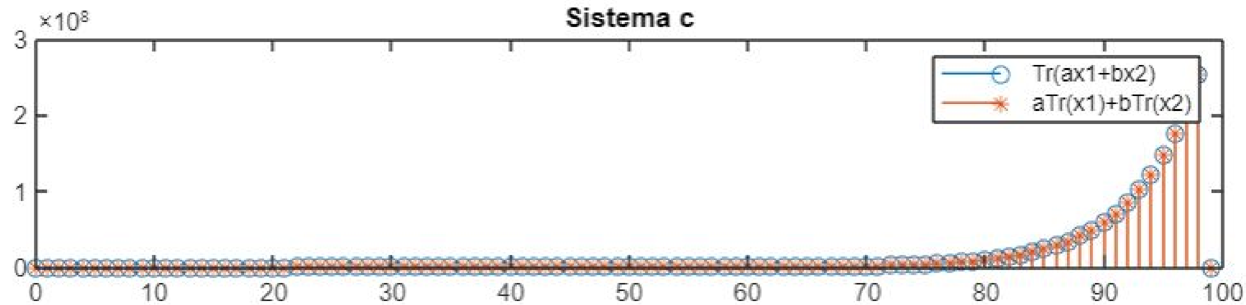
Les següents figures mostren el resultat d'aplicar les transformacions a, b i c a aquests senyals, seguint la definició proposada a (1).

No ens sorprèn veure que el primer sistema no és lineal, doncs eleva l'entrada al quadrat. Podem veure-ho clarament en la següent imatge.



La sortida dels altres sistemes, en canvi, és simplement una combinació lineal de les entrades, de manera que el resultat que obtenim apunta a la linealitat.





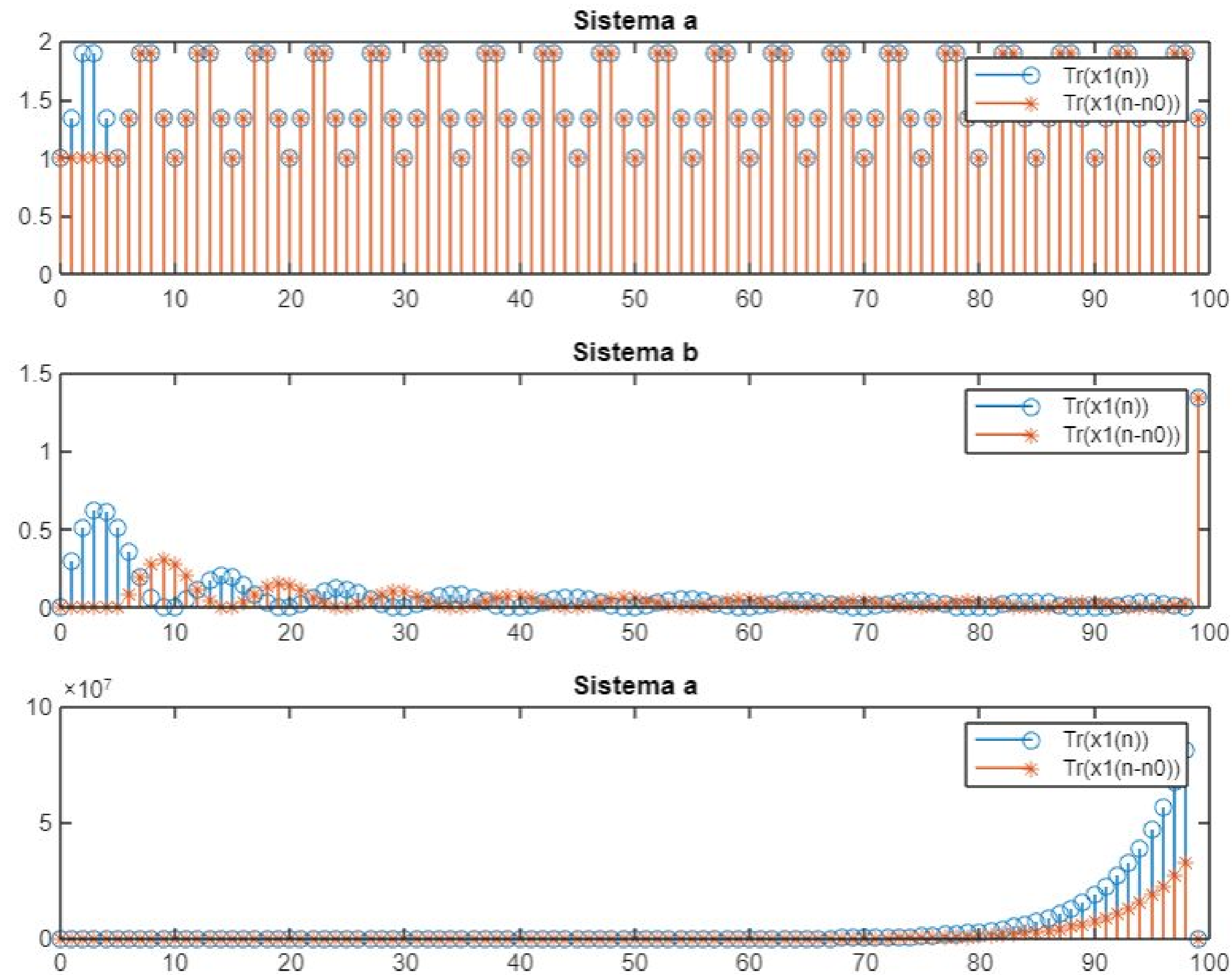
No obstant, cal a dir que aquesta no és una prova de que els sistemes b i c són lineals. Per afirmar tal cosa caldria fer una demostració matemàtica basada en la relació entrada-sortida del sistema, però entenc que aquest no és el propòsit de l'exercici.

D'altra banda, un sistema és invariant en el temps si la seva sortida no depèn del *temps absolut*, és a dir, que si per un senyal d'entrada $x_1(n)$ la sortida és $y_1(n) = Tr(x_1(n))$, aleshores un *shiftat* temporal del senyal d'entrada provoca un shiftat en la sortida, de manera que:

$$y_2(n) = Tr(x_1(n-n_0)) = y_1(n-n_0) \quad (2)$$

Així, aplicarem (2) amb els senyal $x_1(n)$ i $x_1(n-n_0)$, amb n_0=5 (el nombre de *samples* d'un semi-cicle del senyal original). És fàcil encertar que el primer sistema és invariant en el temps, mentre que els altres dos no ho són, ja que aquests últims multipliquen el senyal d'entrada pel temps, de manera que la seva sortida és depenent del temps absolut.

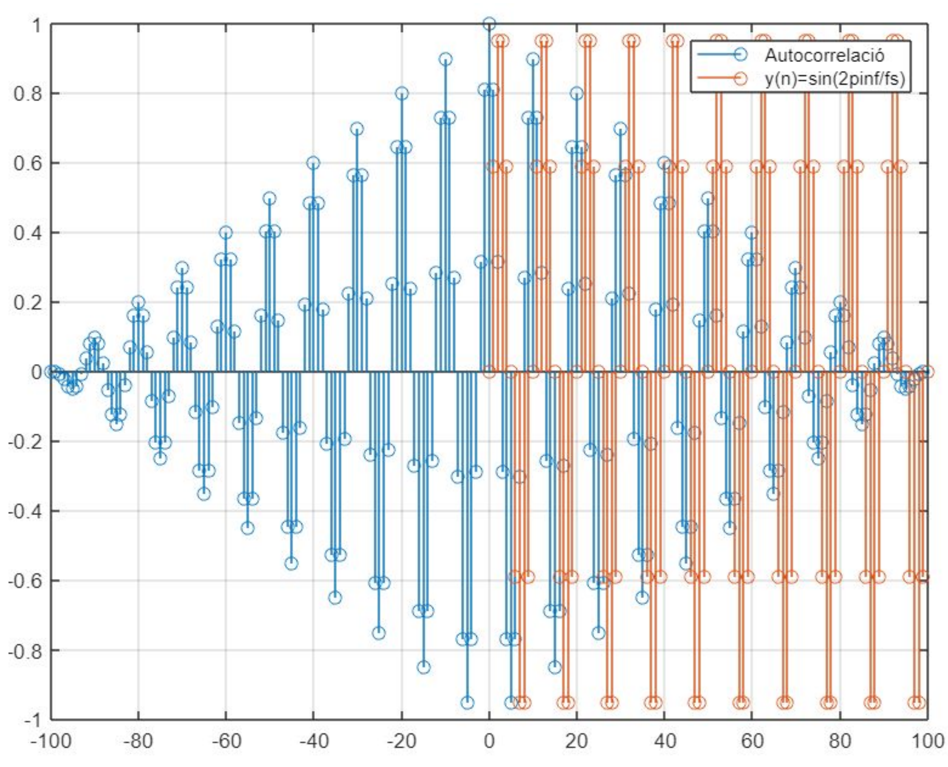
El resultat d'aplicar el procediment enunciat sobre el senyal d'entrada $x_1(n)$ es mostra en les tres imatges següents, per cadascun dels sistemes.



Per últim, recordem que un sistema és estable si la seva sortida és fitada per una entrada fitada. De manera que fàcilment veiem que això es satisfà pel primer sistema i pel tercer sistema, però no pel segon, ja que presenta una indeterminació en n=0. Per tant, no és estable.

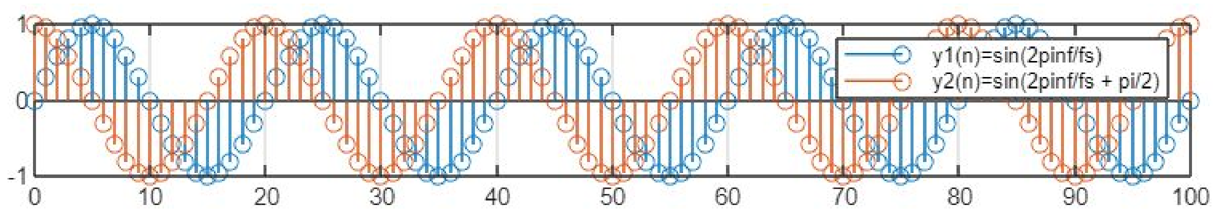
Exercici 5: Genereu una sinusoide de freqüència igual a 100Hz amb amplitud unitària i mostrejada a 1kHz, considerant una seqüència de 100 punts. Determineu l'autocorrelació d'aquest senyal normalitzada a ú i representeu-la juntament amb la seqüència. Quines conclusions se'n poden treure?

Resposta: Per calcular l'autocorrelació del senyal, fem servir la funció *xcorr* de MATLAB, que retorna la correlació creuada de dues seqüències de temps discret. La correlació creuada mesura la similitud entre un vector X i còpies desplaçades (amb *lag*) d'un vector Y en funció del lag. Com estem calculant el *xcorr* de dos senyals iguals, tenim que, com es mostra a la següent figura (en blau), l'autocorrelació és màxima quan lag=0, ja que el senyal coincideix perfectament amb si mateix. Així mateix, veiem que el següent pic es troba *a un període de distància* del senyal, i així successivament pels següents pics. Aquests pics són menors que el pic a lag=0 degut al desplaçament del senyal (notem que el senyal no està definit fora del rang [0,100)), que provoca que el senyal desplaçant tingui valors no coincidents amb el senyal original.

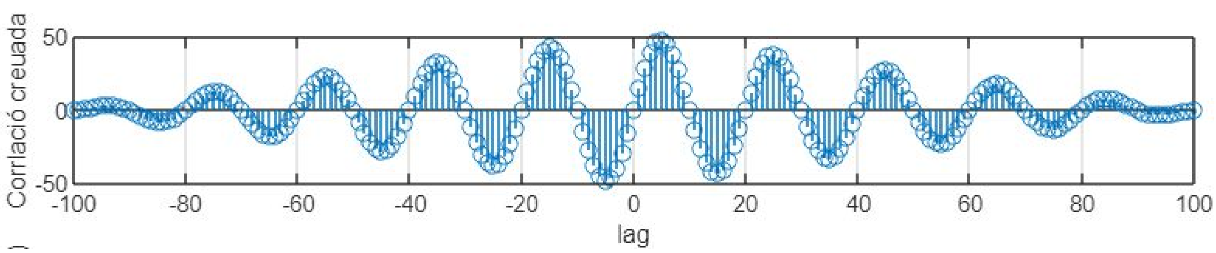


Exercici 6: Genereu dues ones sinusoidals de freqüència 50Hz (Fm=1kHz), amplitud unitària i desfasades 90º i determineu la correlació creuada entre elles. Com es pot determinar el desfasament entre els senyals?. Representeu l'autocorrelació i la correlació creuada. Quines conclusions se'n poden treure?

Resposta: Volem calcular la correlació creuada d'aquests dos senyals, on el senyal blau és la sinusoide amb fase 0, i el vermell la sinusoide amb 90º de desfasament.

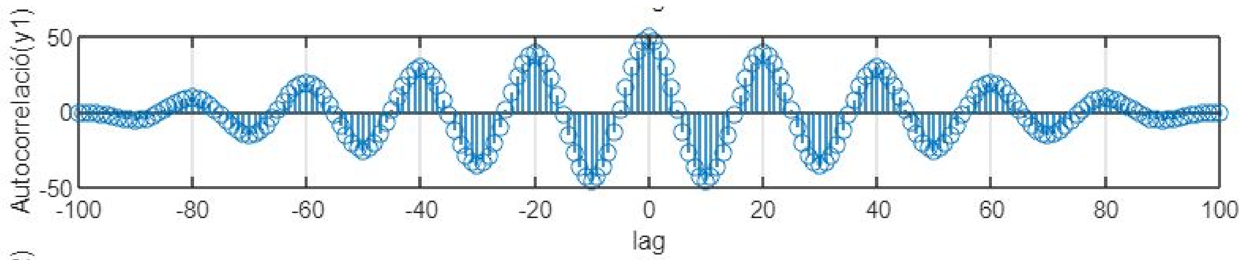


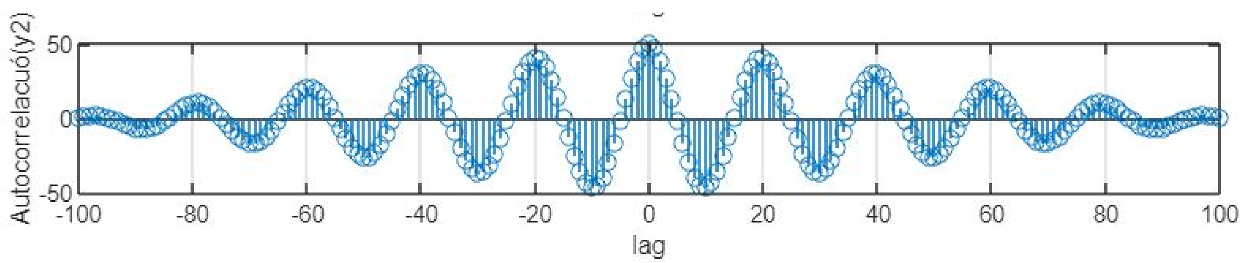
Com és lògic, la correlació creuada tindrà una forma similar a l'autocorrelació que hem vist a l'exercici anterior, però en aquest cas, el pic màxim es trobarà a un quart de període del senyal original, és a dir, la correlació serà 1 quan el lag faci coincidir el senyal desplaçat amb el senyal amb desfasament (a n=5[1]).



Les dues imatges següents mostren l'autocorrelació de y1 i l'autocorrelació de y2, respectivament. És fàcil veure que els dos gràfics, per construcció, són idèntics, ja que els senyals són iguals, llevats del desfasament i, com esmentavem a l'exercici anterior, l'autocorrelació és màxima a n=0, amb pics a múltiples del període del senyal.

[1] Notem que un període de la gràfica de correlació creuada són 20 mostres, de manera que el pic a n=5 ens indica que els senyals estan desfasats 5/20=1/4 de període, és a dir, 90º


Autocorrelació(y1)
50
0
-50
-100 -80 -60 -40 -20 0 20 40 60 80 100
lag


Autocorrelacuó(y2)
50
0
-50
-100 -80 -60 -40 -20 0 20 40 60 80 100
lag