CAPÍTOL 1. MOSTREIG I PERIODICITAT

Exercici

Considerem el senyal analògic $x(t) = 3 \cdot \cos(100\pi * t)$ t segons

a) Dibuixeu el senyal en $x(t)$ en $0 \le t \le 30$ ms.

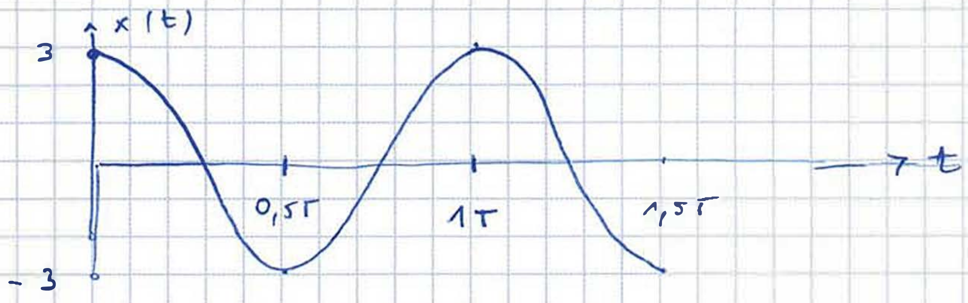
Solució

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 3 \cdot \cos(100\pi t) \\ &= A \cdot \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}\right\} \quad A = 3 \quad \phi = 0^\circ \quad \omega = 100\pi$$

$$2\pi f = 100\pi \rightarrow f = 50\,Hz$$

Si $F = 50\,Hz \rightarrow T = \frac{1}{50} = 0{,}02\,s = \underline{20\,ms}$

si hem de dibuixar fins 30 ms $\Rightarrow$ $\underline{N \text{ periodes}} = \frac{t}{T} = \frac{30\,ms}{20\,ms} = \underline{1{,}5}$



b) $x(t)$ es mostreja a $T_s = \frac{1}{300}\,s$; obtingueu la freqüència digital del senyal discret $x(n)$ i comproveu si la seqüència és periòdica.

$$f_d = \frac{f}{f_s} = f \cdot T_s = 50\,Hz \cdot \frac{1}{300}\,s = \frac{50}{300} \Rightarrow \underline{f_d = \frac{1}{6}}$$

Com que f_d compleix $-\frac{1}{2} < f_d < \frac{1}{2}$ el mostreig és correcte

Per tant, queda

$$x(n) = 3\cos 2\pi f_d n \Rightarrow x(n) = 3\cdot\cos 2\pi \frac{1}{6} n$$

$$= 3\cdot\cos \frac{\pi}{3} n$$

Perquè el senyal discret sigui periòdic, cal verificar que:

$x(n) = x(n+N)$ amb N sent el periode

$$3\cos\frac{\pi}{3} n = 3\cos\frac{\pi}{3}(n+N)$$

o sigui $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{3} N = 2\pi k$; $k = 1, 2, 3, \ldots$

$\frac{\cancel{\pi}}{3} N = 2\cancel{\pi} k \rightarrow \underbrace{N = 6k}_{N = 6 \text{ mostres}}$, si $k = 1$ pel periode mínim o fonamental

$N = 6$ mostres

c) Obtenir les mostres de $x(n)$ en un periode

Solució $x(n) = 3\cos\frac{\pi}{3} n$

$n = 0 \rightarrow x(0) = 3\cos 0^\circ = 3$

$n = 1 \rightarrow x(1) = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

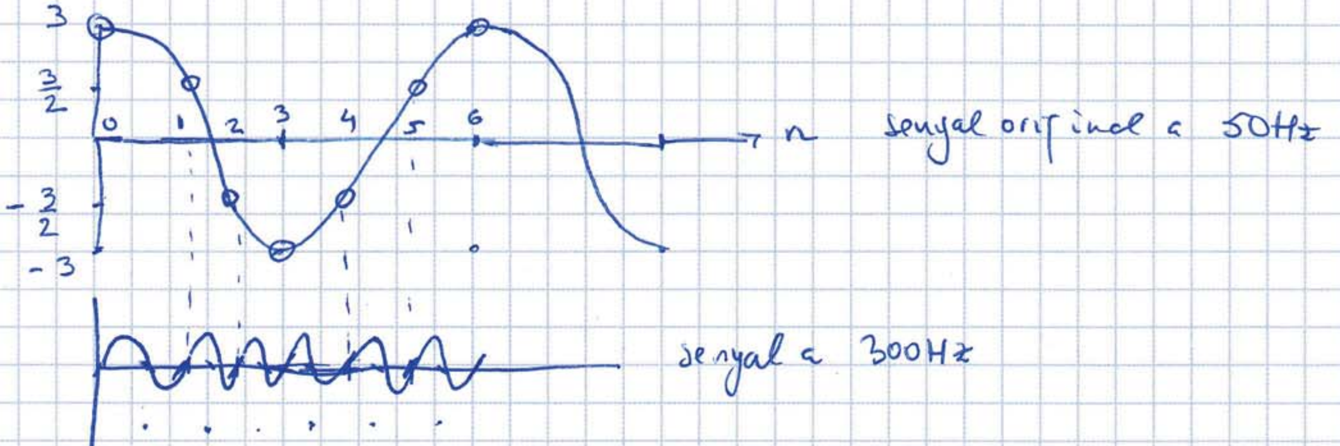
$n = 2 \rightarrow x(2) = 3\cos\frac{\pi}{3}2 = 3\cdot -\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

$n = 3 \rightarrow x(3) = 3\cos\pi = -3$

$n = 4 \rightarrow x(4) = 3\cos\frac{\pi 4}{3} = 3\cdot\frac{-1}{2} = \frac{-3}{2}$

$n = 5 \rightarrow x(5) = 3\cdot\cos\frac{\pi 5}{3} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$n = 6 \rightarrow x(6) = 3\cos\frac{\pi 6}{3} = 3\cdot 1 = 3$



Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm. | Nombre total de fulls | Qualificació (2)

CAPÍTOL 1. MOSTREIG I PERIODICITAT

Cognoms | Nom | Assignatura | DNI | Curs | Grup | Data

Continuació Ex.

d) Determineu un valor de freqüència de mostreig perquè el senyal mostrejat tingui un valor de pic de 3.
Què passaria si el senyal fos $x(t) = 3 \sin 400\pi t$?

Solució: Per tenir un pic de 3, al ser un cosinus, cal mostrejar en els múltiples de 2π.

$$\cos 2\pi \frac{f}{f_s} n = \cos 2\pi k \Rightarrow 2\pi \frac{f}{f_s} n = 2\pi k \Rightarrow \begin{cases} n \in N \\ k \in N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f}{f_s} n = k \qquad \Rightarrow \frac{f}{f_s} = \frac{k}{n}$$

al ser $\frac{k}{n}$ racional el senyal mostrejat és periòdic

Llavors el període fonamental és a $k = 1$ i

$$\boxed{f_s = nf} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

i per complir amb el mostreig $\Rightarrow$

$n \geq 2$

Si el senyal fos un sinus, llavors els pics són a $\pi/2$

$$2\pi \frac{f}{f_s} n = \frac{\pi}{2} \rightarrow f_s = 4f \cdot n \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Si el senyal tingués fase, llavors pel cosinus seria:

$$2\pi \frac{f}{f_s} n + \phi = 2\pi \Rightarrow \frac{f}{f_s} n + \frac{\phi}{2\pi} = 1 \rightarrow \frac{f}{f_s} n = 1 - \frac{\phi}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{f_s = \frac{f}{1 - \frac{\phi}{2\pi}} n}}, \quad n > 2$$

// Pel sinus $f_s = \frac{4f}{1 - \frac{2\phi}{\pi}} n$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

CAPÍTOL 1. MOSTREIG I PERIODICITAT

Cognoms Nom

Assignatura

DNI Curs Grup Data

② Anàlisi de la periodicitat en el mostreig

$$\sin(2\pi \cdot f \cdot n) = \sin\left(2\pi f (n + k \cdot N)\right) \qquad \begin{cases} N = \text{periode} \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{Z} \\ f \text{ freqüència digital} \end{cases}$$

$$= \sin(2\pi f n)\cdot\cos(2\pi f k N) + \cos(2\pi f \cdot n)\cdot\sin(2\pi f k N)$$

Per tal que les 2 expressions siguin iguals, llavors

$$\left.\begin{array}{l} \cos 2\pi \cdot f k N = 1 \\ \sin 2\pi f \cdot k \cdot N = 0 \end{array}\right\} \text{ i això passa si } fN = m \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$N = \frac{m}{f}$$

Situacions:

1 Si f no és racional, llavors no és periodic $\Rightarrow N$ no seria $\mathbb{N}$

2 $f = 2 \rightarrow N = \frac{m}{2} \rightarrow$ si $m = 2 \rightarrow N = 1$ mal periode

$f = \frac{3}{2} = 1{,}5 \Rightarrow N = \frac{m}{3/2} = \frac{2m}{3} \Rightarrow m = 3 \rightarrow N = 2 \cdot \frac{3}{3} = 2$ mal periode

3 $f = \frac{1}{8} \Rightarrow N = \frac{m}{1/8} = 8m \Rightarrow m = 1 \rightarrow N = 8$ bon periode

En definitiva, això significa $\begin{cases} N = \text{nombre de mostres} \\ m = \text{nombre de periodes} \end{cases}$

CAPITOL 1. MOSTREIG I PERIODICITAT

3) Exercici Un senyal analògic conté freqüències de fins a 20kHz.

a) Quina freqüència de mostreig es pot utilitzar per a poder reconstruir el senyal a partir de les seves mostres?

Solució

Per que es verifiqui el Teorema del mostreig, cal tenir 2 mostres o més per periode. Això es compleix si $f_m \geq 2 f_{màx}$

Aquí només cal que es verifiqui $f_m \geq 2B$, B ample de banda del senyal i per tant:

$f_{max} = 20kHz \longrightarrow f_m \geq 40kHz$

b) Si $f_m = 16kHz$, que passaria amb un senyal de 10kHz present en el senyal?

Solució: si $f_m = 16kHz$ no es verificarà el Teorema del mostreig i hi haurà aliasing.

Amb $f_m = 16kHz \longrightarrow f_{max} = 8kHz$ i llavors $f = 10kHz$ s'interpretarà com el seu àlias en l'interval $-\frac{f_m}{2} < f < \frac{f_m}{2}$

Els àlias els podem obtenir amb l'expressió:

$$f_K = \pm f_0 + K f_m \qquad K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

sent f_K els àlias de f_0 per a una freqüència de mostreig f_m

$$10 = f_0 + K \cdot 16 \Rightarrow f_0 = 10 - 16 = -6kHz$$

considerant $K = 1$, el senyal de 10kHz es comporta com un senyal de $-6kHz$.

$-\frac{f_m}{2} \leq f_0 \leq \frac{f_m}{2}$ només per $K = 1$

c) Què passaria amb un senyal de 18 kHz?

si $f = 18$ kHz, necessitaríem $f_m = 36$ kHz per un correcte mostreig, llavors

$$f_k = f_0 + k f_m \Rightarrow 18 = f_0 + k \cdot 16 \to \underline{f_0 = 2\,\text{kHz}}$$

El senyal s'interpretarà com si la freqüència fos de 2 kHz.
Tinguem en compte que $\underline{k}$ es pren de manera que f_0 estigui sempre

$$-\frac{f_m}{2} < f_0 < \frac{f_m}{2}$$

$\boxed{\text{MATLAB}}$ ex_alias.m ‖ Cap-02

CAPITOL 1. MOSTREIG I PERIODICITAT

4) Exercici El senyal $x(t)$ es mostreja a 500 Hz, responeu.

$$x(t) = \sin(450\pi t) + 3\sin(1450\pi t) \quad t \text{ en segons.}$$

a) Determineu la freqüència de Nyquist per aquest senyal

Solució les freqüències per aquest senyal són:

$\Omega_1 \quad \omega_1 = 450\pi = 2\pi f_1 \qquad \omega_2 = 1450\pi = 2\pi f_2$

$f_1 = 225\,Hz \qquad f_2 = 725\,Hz$

Per aquest senyal, $f_m = 2 f_{max} = 2 \cdot 725 = 1450\,Hz$

com que el mostreig és de 500 Hz, es produirà aliasing

b) A quines freqüències apareix aliasing per el mostreig indegut?

$$f_n = f_0 + k f_m \Rightarrow 725 = f_0 + k \cdot 500 \Rightarrow f_0 = 725 - 500 = 225\,Hz$$

La freqüència f_1 verifica el Teorema de mostreig i no pateix canvis

c) Quines són les freqüències digitals del senyal resultant del mostreig?

Solució El senyal mostrejat és:

$$x(n) = \sin\left(\frac{450\pi}{500} n\right) + 3\sin\left(\frac{1450\pi}{500} n\right)$$

$$= \sin\left(\frac{450\pi}{500} n\right) + 3\sin\left(\frac{(1000+450)\pi}{500} n\right)$$

$$= \sin\left(\frac{450\pi}{500} n\right) + 3\sin\left(\frac{450\pi}{500} n + 2\pi n\right) \quad // \sin \text{ és periòdic}$$

$$= \sin\left(\frac{450\pi}{500} n\right) + 3\sin\left(\frac{450\pi}{500} n\right) = 4\sin\left(\frac{9\pi}{10} n\right)$$

$$\boxed{f_{d1} = f_{d2} = \frac{9}{20}} \Leftarrow 2\pi f_d n = \frac{9}{10}\pi n$$

d) Si les mostres passessin per un conversor ideal D/A, quines freqüències tindria el senyal analògic reconstruït?

Solució

Al reconstruir el senyal, sabem que

$$f_d = \frac{f_{analògic}}{f_m} \Rightarrow \underline{f_{a_1} = f_{a_2}} = f_d \cdot f_m = \frac{9}{20} \cdot 500 = \underline{225\,Hz}$$

i per tant el senyal serà després del conversor D/A:

$$y(t) = \sin(2 \cdot 225 \cdot \pi t) + 3 \sin(2 \cdot 225 \pi \cdot t) = 4 \sin(450 \pi t)$$

com ja havíem obtingut en l'apartat b.

$\boxed{\text{MATLAB}}$ Exercici Ex_fd.m

CAPITOL 1. MOSTREIG i PERIODICITAT

Cognoms Nom

5 **Exercici**: El següent senyal analògic es mostreja amb una freqüència tal que la component de major freqüència té 27 mostres per periode.

$$x(t) = 2\sin(100\pi t) + 0{,}8\cos(178\pi t) \quad t \text{ en segons}$$

a) Representeu 54 punts del senyal obtingut

Solució: les freqüències analògiques presents en $x(t)$ són:

$$\omega_1 = 100\pi = 2\pi f_1 \rightarrow f_1 = 50\,Hz$$

$$\omega_2 = 178\pi = 2\pi f_2 \rightarrow f_2 = 89\,Hz \quad \leftarrow \text{freqüència superior}$$

Nb. de mostres es pot obtenir com: $Nb = \frac{f_m}{f} \rightarrow f_m = Nb\,mostres \times f \rightarrow$

[o també $\frac{f}{f_m} = \frac{1}{N}$ periòdic, N mostres en 1 cicle]

per tant $\rightarrow f_m = f_2 * nb.\ mostres$

$$f_m = 89\,Hz * 27\,mostres = 2403\,Hz$$

El senyal obtingut al mostrejar serà:

$$x(n) = 2\sin\left(\frac{2\cdot\pi\cdot 50}{2403}n\right) + 0{,}8\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot 89}{2403}n\right)$$

En MATLAB $\Rightarrow$ fitxer EX_1_6.m

```
>> n = 0:53; N = 27;
>> fs = 2403;
>> x = 2*sin(2*50*pi*n/fs) + 0,8.cos(2*89*pi*n/fs);
>> stem(n,x)
```

b) Quants periodes del senyal menor freqüència hi ha en la representació anterior?

$$Nb\ mostres = \frac{f_m}{f_1} = \frac{2403}{50} \simeq 48 \text{ mostres per periode}$$

$$N6\ periodes = nb\ mostres / nb\ mostres\ per\ periode = 54/48 \simeq 1{,}125\ periodes$$