Universitat Politècnica de Catalunya

Processament Digital Del Senyal

Grau en Enginyeria Informàtica

Pràctica 3

Transformada Discreta de Fourier, DFT

Autor:
Daniel DONATE

Professor:
Antoni GRAU

Q1 Curs 2020-2021

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat d'Informàtica de Barcelona

Exercici 1: Determineu la DFT de $x(n) = (0.5)^n u(n)$. Agafeu 501 punts equiespaiats entre [-pi,pi]. Mostreu la seva magnitud, fase i parts real i imaginària. Nota: proveu de dividir l'eix w per pi abans de mostrar el gràfic, així estarà en unitats de pi, per a la seva millor comprensió.

Resposta: Com que el senyal és absolutament sumable, la DFT existeix i és:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 0.5^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (0.5 \cdot e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-0.5e^{-j\omega n}}$$

Transformant l'exponencial complexa de la darrera expressió, tenim:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-0.5\cos\omega n + j0.5\sin\omega n}$$

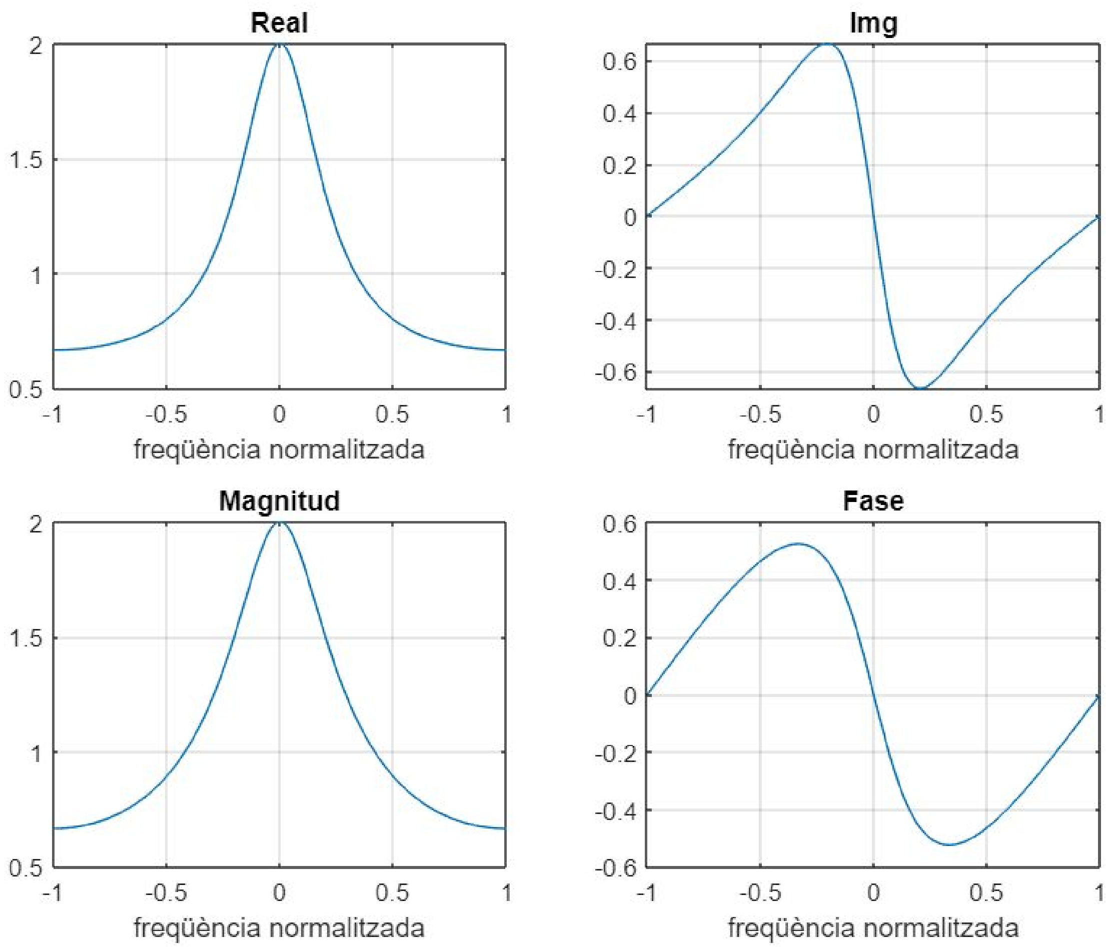
Així, tenim que el mòdul i la fase són els següents:

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1-0.5\cos\omega n)^2 + (0.5\sin\omega n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1.25-\cos\omega}}$$

$$\phi(j\omega) = arctg\frac{0.5\sin\omega}{1-0.5\cos\omega}$$

En la següent figura podem veure representats en MATLAB el mòdul i la fase de la DFT, respectivament. L'eix de les ω d'aquestes dues gràfiques està dividit per π.

Nota: en els següents exercicis evitarem realitzar un desenvolupament tan extens per l'expressió de la DFT.

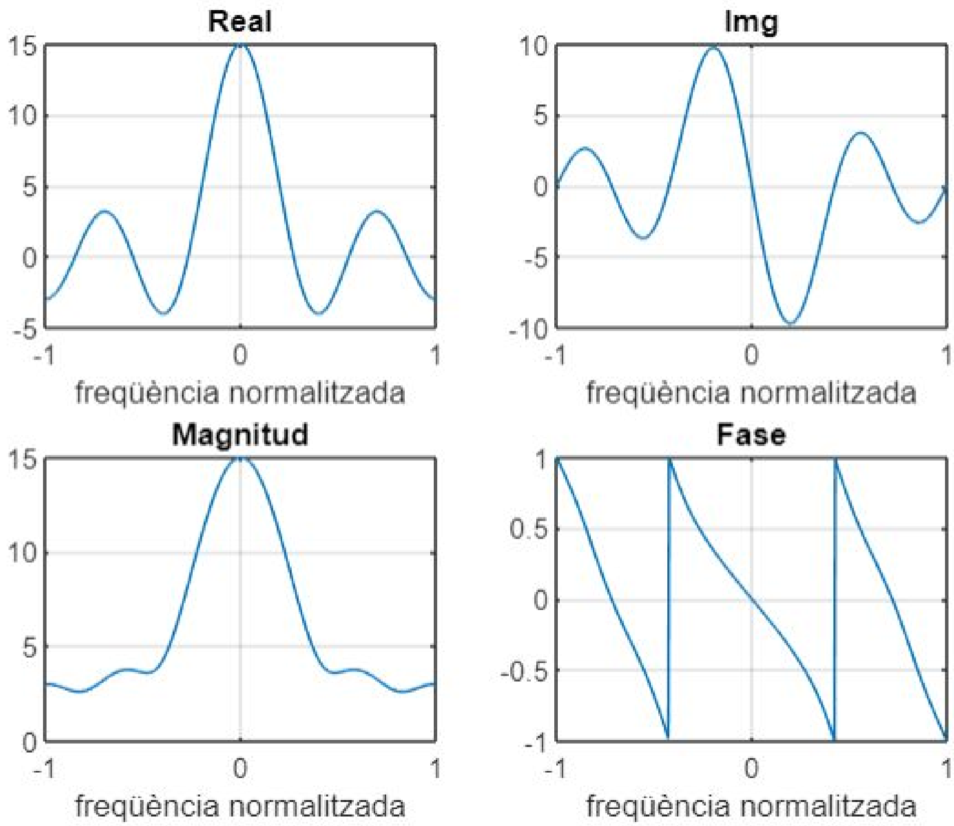


Exercici 2: Calculeu numèricament la DFT de la seqüència x(n)= {1,2,3,4,5} (on x(0) = 2). Mostreu la seva magnitud, fase i parts real i imaginària.

Resposta: La DFT de la seqüència (amb el segon element com a n=0) és, simplement:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-1}^{+3} \left(x(n)e^{-j\omega n}\right) = e^{j\omega} + 2 + 3e^{-j\omega} + 4e^{-j\omega 2} + 5e^{-j\omega 3}$$

La DFT de la seqüència s'ilustra a continuació.

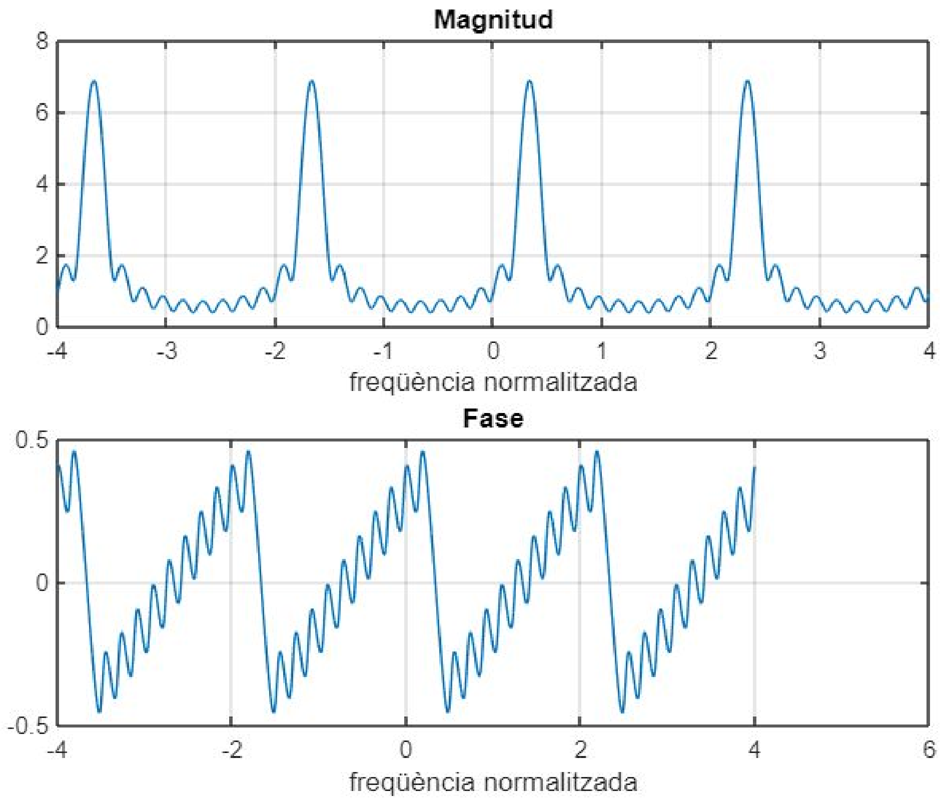


Exercici 3: Sigui $x(n) = (0.9exp(j\pi/3))^n$, $0 \leq n \leq 10$. Determineu $X(e^{j\omega})$ i investigueu la seva periodicitat. Escolliu un interval de freqüències escaient.

Resposta: La DFT d'aquest senyal és la següent:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{+10} \left(x(n)e^{-j\omega n}\right) = \sum_{n=0}^{+10} 0.9e^{j\pi n/3}e^{-j\omega n}$$

A la primera de les dues figures següents es mostra el mòdul dels coeficients de la transformada de Fourier entre -4π i 4π. Com un esperaria, a la figura apareixen 4 períodes de la transformada, ja que, com sabem, la DFT és periòdica, de període 2π.

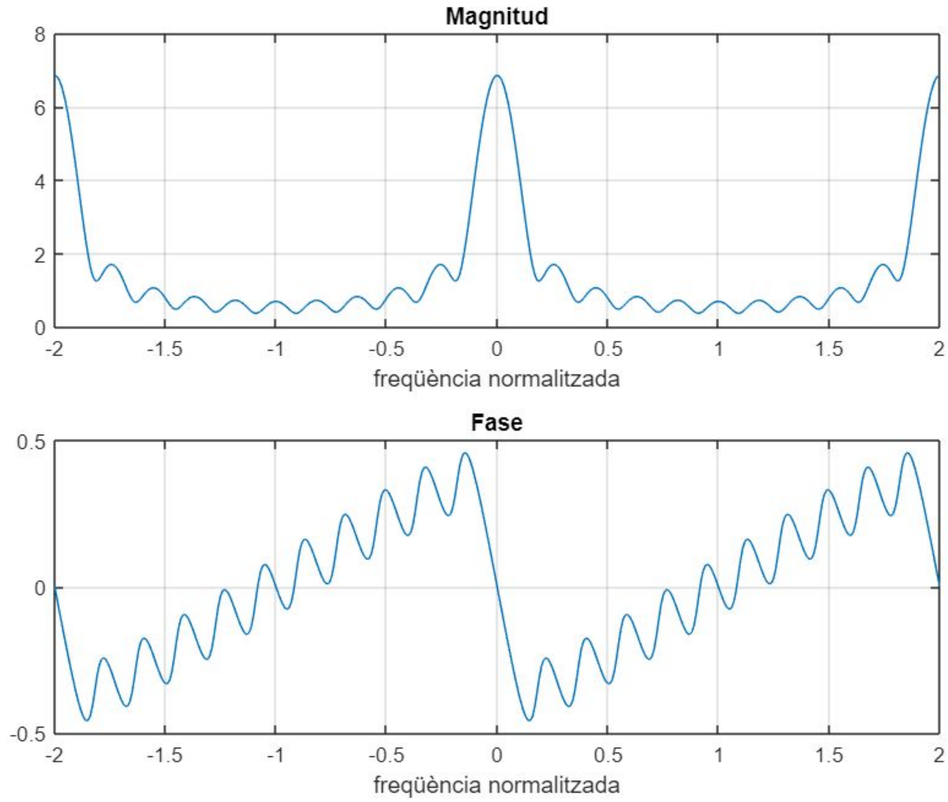


Exercici 4: Sigui $x(n) = (0.9)^n$, $0 \leq n \leq 10$. Determineu $X(e^{j\omega})$ i investigueu la propietat de la simetria conjugada en la seva DFT.

Resposta: La DFT d'aquest senyal és:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{+10} \left(x(n)e^{-j\omega n}\right) = \sum_{n=0}^{+10} 0.9^{n} e^{-j\omega n}$$

Com sabem, si $x(n)$ és real, aleshores la seva DFT $X(e^{j\omega})$ és simètrica conjugada, és a dir, que: $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$. La seqüència $x(n) = (0.9)^n$ és, clarament, una seqüència real, de manera que la seva DFT és simètrica conjugada. Ho podem comprovar en la següent imatge, on calculem la DFT entre -2π i 2π:



Exercici 5: Verifiqueu la propietat del desplaçament en freqüència de la DFT representant els següents senyals:

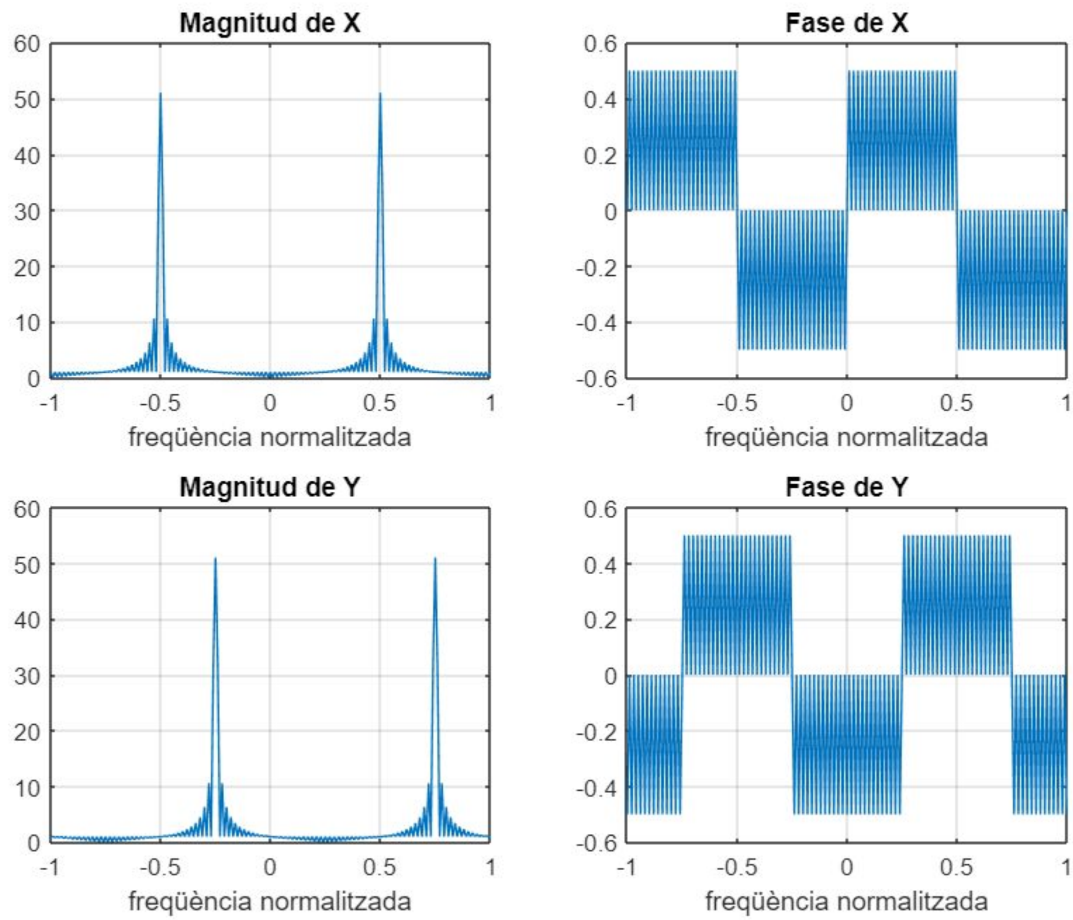
$$x(n) = cos(\pi n/2),\ \ 0 \le n \le 100 \text{ i }\ \ y(n) = exp(j\pi n/4)\cdot x(n)$$

Resposta: Les DFT de x(n) i y(n) són, respectivament:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{100}\left(\cos(\pi n/2)e^{-j\omega n}\right), \qquad Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{100}\left(\cos(\pi n/2)e^{j\pi n/4}e^{-j\omega n}\right)$$

Les dues gràfiques següents mostren la DFT de x(n), $X(e^{j\omega})$ i la DFT de y(n), que *és un desplaçament de* $\pi/4$ respecte la primera, ja que recordem que la propietat de modulació (frequency shifting) de la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ ens diu que:

$$\mathcal{F}\,[\text{x(t)}\,exp(j\omega_0 n)]=\text{X}(\,\omega - \omega_0\,)$$



Exercici 6: Un sistema LTI s'especifica per l'equació en diferències $y(n) = 0.8y(n-1) + x(n)$. Determineu $H(e^{j\omega})$. Calculeu i representeu la resposta estacionària $y_{ss}(n)$ per $x(n) = \cos(0.05\pi n)u(n)$.

Resposta: Reescribint l'equació en diferències a una forma més *familiar*, tenim:

$$y(n) - 0.8y(n-1) = x(n)$$

Recordem la forma general de les equacions en diferències per sistemes LTI:

$$\sum_{m=0}^{N} a[m]y[n-m] = \sum_{m=0}^{M} b[m]x[n-m]$$

Podem expressar la resposta freqüencial del sistema mitjançant aquest quocient:

$$H(e^{j\omega}) = H(\Omega) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b[m] \cdot exp(-jm\Omega)}{\sum_{m=0}^{N} a[m] \cdot exp(-jm\Omega)}$$

A partir de l'equació en diferències que se'ns dona, veiem que els coeficients són:

$$\begin{cases} a[0] = 1, & b[0] = 1 \\ a[1] = -0.8, & b[1] = 0 \end{cases}$$

De manera que la resposta en freqüència del sistema queda descrita per la següent equació:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.8 \cdot exp(-j\omega)}$$

En estat estacionari, l'entrada *x(n)* té una freqüència $\omega_0 = 0.05\pi$ i una fase $\phi_0 = 0$. Així, utilitzant la fòrmula per $H(e^{j\omega})$ calculada anteriorment, tenim que la resposta del sistema a la freqüència ω_0 serà:

$$H(e^{j0.05\pi}) = \frac{1}{1 - 0.8 \cdot exp(-j \cdot 0.05\pi)} = \frac{1}{1 - 0.8[\cos 0.05\pi - j \sin 0.05\pi]}$$

Calculant el mòdul i l'argument, obtenim:

$$|H(e^{j0.05\pi})| = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0.8\cos 0.05\pi)^2 + (0.8 \sin 0.05\pi)^2}} = 4.0928$$

$$\phi = arctg \frac{0.8 \sin 0.05\pi}{1 - 0.8 \cos 0.05\pi} = -0.5377$$

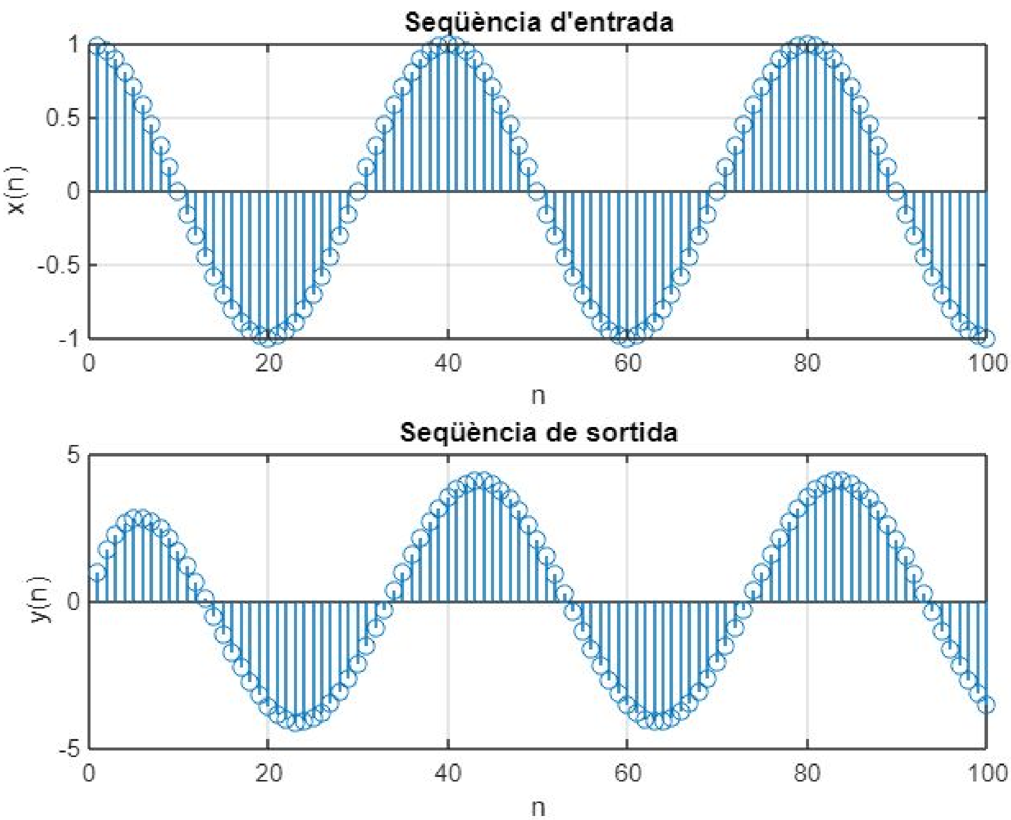
Per tant, tenim que, per $\omega_0 = 0.05\pi$:

$$H(e^{j\omega_0}) = 4.0928 \cdot e^{-j \cdot 0.5377}$$

Així, podem calcular la resposta estacionària $y_{ss}(n)$ de la següent manera:

$$y_{ss}(n) = 4.0928 \cdot \cos(0.05\pi n - 0.5377) = 4.0928 \cdot \cos[0.05\pi(n - 3.42)]$$

De forma que la sinusoide estarà escalada per un factor de 4.0928 i *shiftada* (retardada) 3.42 mostres. Això pot apreciar-se en la següent figura, on es mostra (amunt) la seqüència d'entrada (*x(n)*) i la seqüència de sortida (avall), on es veu clarament l'escalat i el *shiftat* que acabem de descriure.



Exercici 7: Un filtre de tercer ordre passa baixos es descriu mitjançant la seva equació en diferències:

$$y(n) = 0.0181x(n) + 0.0543x(n-1) + 0.0543x(n-2) + 0.0181x(n-3) + 1.76y(n-1) - 1.1829y(n-2) + 0.2781y(n-3)$$

Representeu la magnitud i la resposta de fase del filtre i verifiqueu que es tracta d'un filtre passa baixos.

Resposta: Seguint el procediment de l'exercici anterior, reescribim primer l'equació en diferències del filtre de la següent manera:

$$y(n) - 1.76y(n-1) + 1.1829y(n-2) - 0.2781y(n-3) = 0.0181x(n) + 0.0543x(n-1) + 0.0543x(n-2) + 0.0181x(n-3)$$

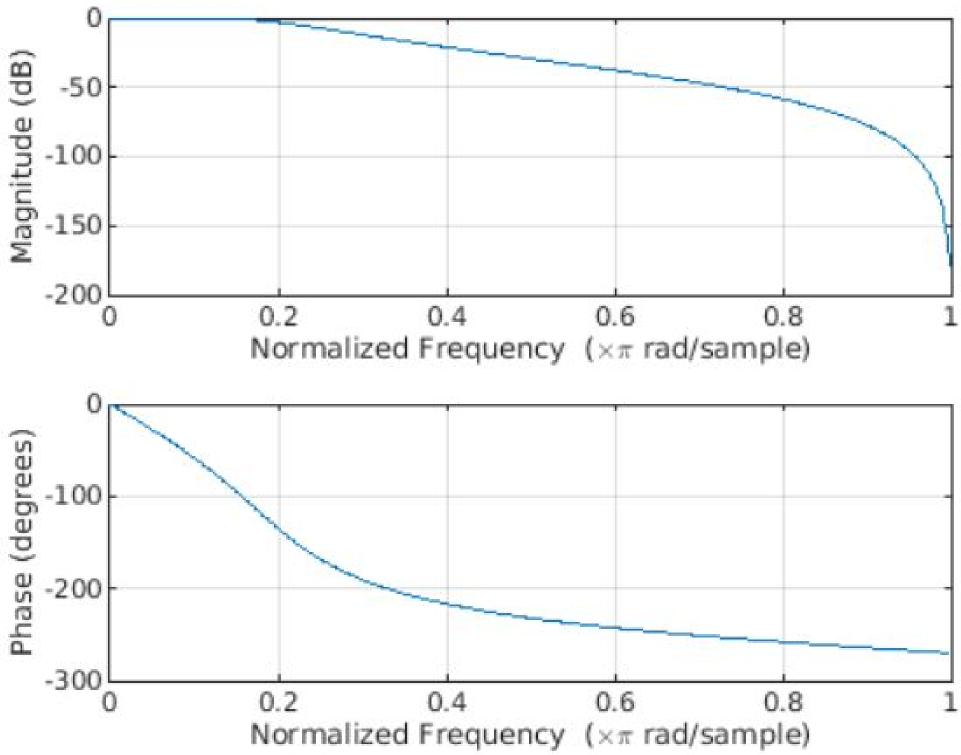
D'aquí tenim que $H(e^{j\omega})$ serà el següent quocient:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0.0181 + 0.0543e^{-j\omega} + 0.0181e^{-j\omega 2} + 0.0543e^{-j\omega 3}}{1 - 1.76e^{-j\omega} + 1.1829e^{-j\omega 2} - 0.2781e^{-j\omega 3}}$$

Passant la resposta en freqüència en funció de $z = e^{j\omega}$, tenim que:

$$H(z) = \frac{0.0181 + 0.0543z^{-1} + 0.0181z^{-2} + 0.0543z^{-3}}{1 - 1.76z^{-1} + 1.1829z^{-2} - 0.2781z^{-3}}$$

I ara ja podem construir els vectors *a* i *b* i invocar, per exemple, la funció *freqz* de MATLAB, que ens generarà un diagrama de Bode amb la magnitud i la fase de la resposta en freqüència del nostre filtre. El resultat obtingut és el que veiem a la següent figura. A partir del primer gràfic es pot apreciar que es tracta d'un filtre passa-baixos amb una freqüència de tall d'aproximadament 0.2π rad (freqüència normalitzada), que és la freqüència a la qual tenim que el guany cau per sota dels -3dB.



0
-50
-100
-150
-200
Magnitude (dB)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Normalized Frequency (×π rad/sample)
0
-100
-200
-300
Phase (degrees)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Normalized Frequency (×π rad/sample)