UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

PROCESSAMENT DIGITAL DEL SENYAL

GRAU EN ENGINYERIA INFORMÀTICA

PRÀCTICA 5

FILTRES FIR

Autor:

Daniel DONATE

Professor:

Antoni GRAU

Q1 Curs 2020-2021

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Exercici 1: Recordant el que s'ha vist a classe sobre els filtres FIR, dissenyeu una funció que tingui com a prototipus:

```
function hd = pb_ideal(wc,M)
% Calcul d'un filtre ideal
%----------------------------
% [hd] = pb_ideal(wc,M)
% hd = resposta impulsional ideal entre 0 i M-1
% wc = freqüència de tall en radians
% M = longitud del filtre ideal
```

Resposta: Recordem que la transformada inversa de Fourier d'un senyal en el domini de la freqüència, X(**Ω**), està donada per la següent fórmula:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)exp(j\Omega n)d\Omega$$

De manera que podem expressar la resposta impulsional h[n] d'aquesta forma:

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}H(\Omega)exp(j\Omega n)d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H(\Omega)exp(j\Omega n)d\Omega$$

Notem que la resposta freqüencial **ideal** per un filtre passa-baixos amb freqüència de tall $_{cf}$ és la que es mostra a continuació:

$$H(\Omega)=\begin{cases}1,\ si\ -\Omega_{cf}\leq\Omega\leq\Omega_{cf}\\0,\ altrament\end{cases}$$

La representació en el domini del temps de la funció anterior, h[n] és aquesta:

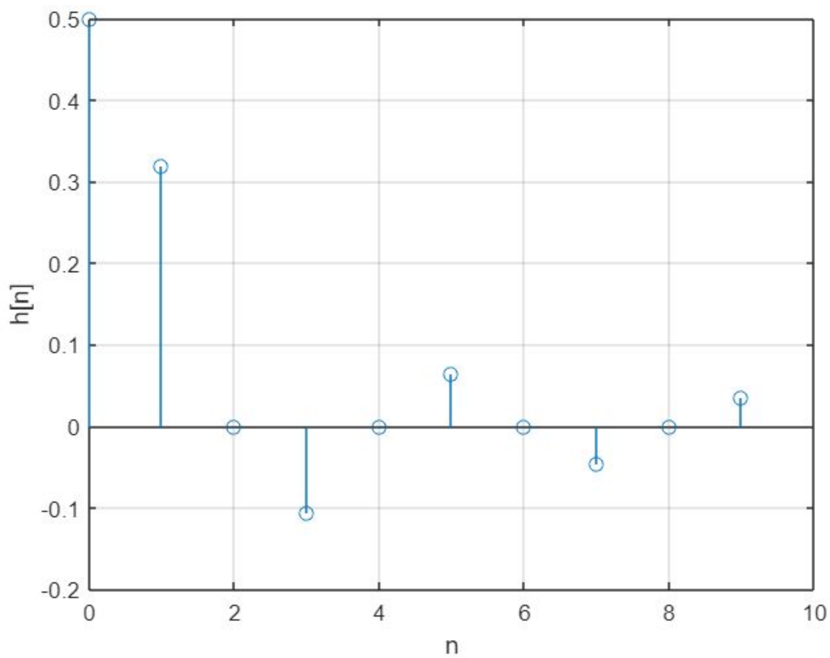
$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H(\Omega)exp(j\Omega n)d\Omega=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_{cf}}^{+\Omega_{cf}}1\cdot exp(j\Omega n)d\Omega\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{exp(j\Omega n)}{jn}\right]_{-\Omega_{cf}}^{+\Omega_{cf}}=\frac{1}{2\pi jn}(exp(j\Omega_{cf}n)-exp(-j\Omega_{cf}n))=$$

Simplificant l'expressió anterior, tenim que la resposta impulsional h[n] d'un filtre passa-baixos és donada per la següent funció:

$$h[n] = \frac{1}{\pi n}\sin(\Omega_{cf} n) = \frac{\Omega_{cf}}{\pi}\operatorname{sinc}(\Omega_{cf} n)$$

La funció que se'ns demana implementar, `pb_ideal`, simplement calcula la seqüència generada mitjançant la funció anterior per la freqüència de tall que es passa com a paràmetre (*`wc`*) entre 0 i `M`-1 (forma causal). La imatge següent mostra el resultat obtingut en cridar la funció amb *`wc=pi/2`* i `M=10`.



Exercici 2: Donada la funció `freqz_m`, corresponent a una versió modificada del `freqz`, dissenyeu un filtre FIR passa baixos amb les següents especificacions. Tingueu en compte la taula 1 per les característiques de la finestra que escolliu.

Freqüència de pas: wp = 0.17*pi;

Freqüència d'aturada: ws = 0.28*pi;

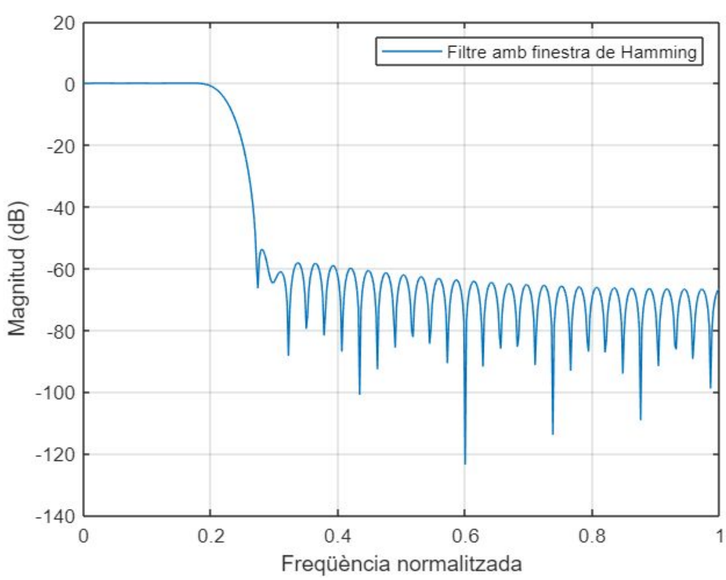
Arrissat de pas: Rp = 0.24dB

Atenuació d'aturada: As = 48dB

Resposta: Com sabem, un filtre passa-baixos ideal té una atenuació infinita en la banda d'aturada. Quan aproximem un filtre ideal mitjançant un filtre real utilitzant el mètode de finestres, hem d'acceptar un cert error d'aproximació. Com que necessitem un filtre amb una atenuació de 48dB (o superior) a la banda d'aturada, només podem fer servir una finestra Hamming o una finestra Blackman (d'entre les opcions de la taula).

Notem que la diferència entre la freqüència d'aturada i la freqüència de pas ens determina l'amplada de la banda de transició, la qual, alhora, ens permet fer una estimació aproximada de la longitud de la finestra, equiparant la banda de transició del filtre amb l'amplada del *lòbul principal* de la finestra. Observem que amb una finestra de Blackman, necessitem una longitud de finestra, M, més elevada que amb Hamming, de manera que optem per aquesta última per a dissenyar el filtre.

Així, per una finestra de Hamming requerim un $M = 8/(0.28 - 0.17) = 73$. També sabem que la freqüència de tall del filtre ideal és: $\omega_{cf} = (\omega_p + \omega_s)/2$, de manera que tenim $\omega_{cf} = 0.225\pi$ rad. La magnitud (en dB) respecte la freqüència normalitzada obtinguda amb la funció *freqz_m* per un passa-baixos amb les característiques que hem descrit s'observa en la següent figura.



Exercici 3: Donada la funció `freqz_m`, dissenyeu un filtre FIR passa banda amb les següents especificacions. Tingueu en compte la taula 1 per les característiques de la finestra que escolliu.

Banda d'aturada baix: w1s = 0.2*pi; As= 60dB
Passa banda baix: w1p = 0.35*pi; Rp = 1dB
Passa banda alt: w2p = 0.65*pi; Rp = 1dB
Banda d'aturada alt: w2s = 0.8*pi; As = 60dB

Resposta: Seguint l'esquema de l'exercici anterior, ens fixem primer en l'atenuació desitjada en la banda d'aturada. Ens fixem que de les finestres de la llista, només la de Blackman ens ofereix una atenuació per sobre dels 60dB.

Notem que en aquest tipus de filtres, tenim dues freqüències de tall, ω_{cf1} i ω_{cf2}, per la banda *baixa* i la banda *alta*, respectivament. Així, podem calcular la freqüència de tall de cada banda de la següent manera:

$$\omega_{cf1} = (\omega_{1p} + \omega_{1s})/2 = 0.275\pi \text{ rad}, \quad \omega_{cf2} = (\omega_{2p} + \omega_{2s})/2 = 0.725\pi \text{ rad}$$

Podem calcular també la freqüència central, ω_{center} que serà simplement:

$$\omega_{center} = (\omega_{cf1} + \omega_{cf2})/2 = 0.5\pi \text{ rad}$$

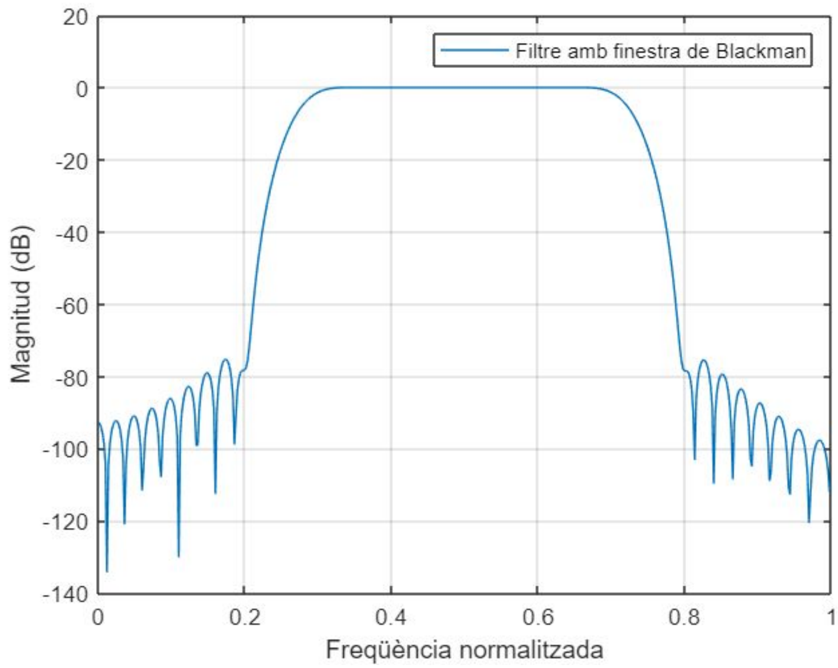
Igual que abans, podem calcular a partir de l'amplada de la banda de transició (0.15π rad) la longitud M de la finestra, que serà, per una finestra de Blackman:

$$M = 12/0.15 = 80$$

Recordem que la resposta impulsional del filtre passa-banda és com la del filtre passa-baixos, però amb un desplaçament respecte la freqüència central. Si calculem una resposta impulsional h_{LP} per un passa-baixos amb una freqüència de tall $\omega_c = (\omega_{cf2} - \omega_{cf1})/2$, aleshores, per la propietat de *shifting* de la Transformada de Fourier, tenim que la resposta impulsional del passa-banda h_{PB} és, simplement:

$$h_{PB}[n] = h_{LP}[n]\cdot\{2cos(n\omega_{center})\}$$

La magnitud (en dB) respecte la freqüència normalitzada obtinguda amb la funció *freqz_m* per un passa-banda amb les característiques que hem descrit s'observa en la següent figura.



Exercici 4: La resposta en freqüència d'un filtre para-banda ideal ve donada per:

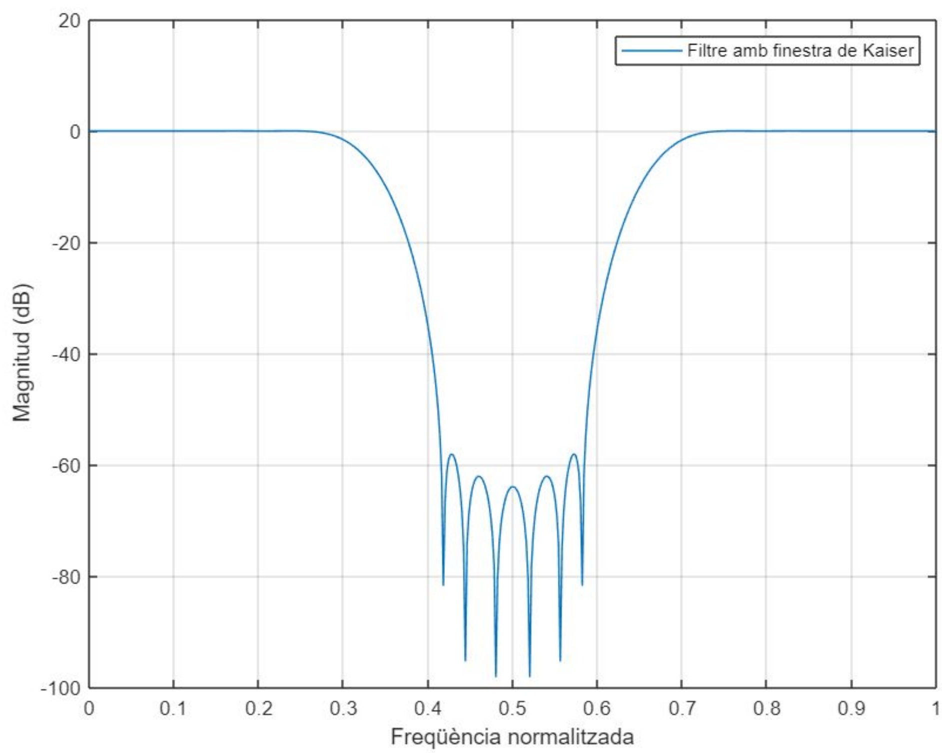
$$H_e(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 < |\omega| \leq \pi/3 \\ 0, & \pi/3 < |\omega| \leq 2\pi/3 \\ 1, & 2\pi/3 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Dissenyeu un filtre para-banda de longitud 45 amb una atenuació de 60dB en la banda d'aturada; amb finestra de Kaiser sabent que la β=0.1102x(As-8.7).

Resposta: A partir de l'anterior equació, tenim que ω_{cf1} = /3 rad i ω_{cf2} = 2/3 rad. La resposta impulsional del filtre para-banda és la següent:

$$h(n) = \begin{cases} 1 + (\omega_{cf1} - \omega_{cf2}), & per\ n = 0 \\ \frac{1}{\pi n}(\sin(\omega_{cf1}) - \sin(\omega_{cf2})), & altrament \end{cases}$$

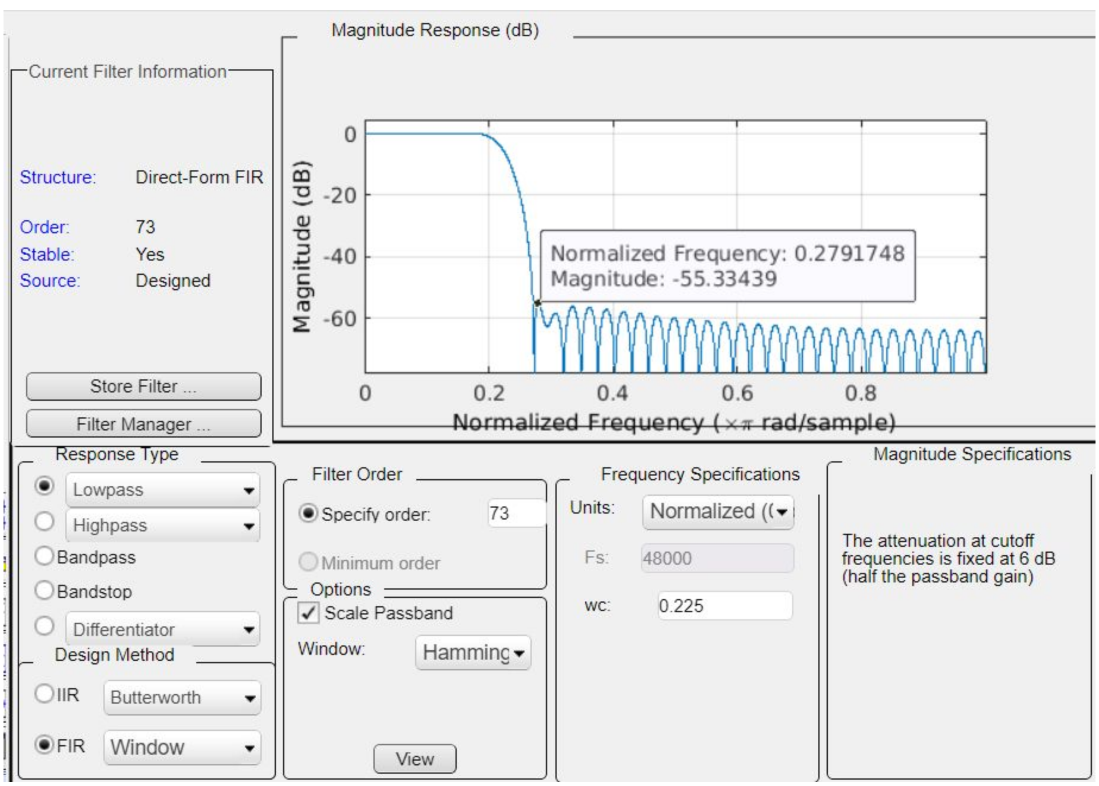
La següent figura mostra la magnitud de la resposta en freqüència d'un filtre para-banda amb les freqüències de tall que hem esmentat, utilitzant una finestra de Kaiser de longitud 45 i β=0.1102x(60-8.7).



Exercici 5: Usant l'aplicació `fdatool` del Matlab, comproveu tots els filtres dels exercicis anteriors.

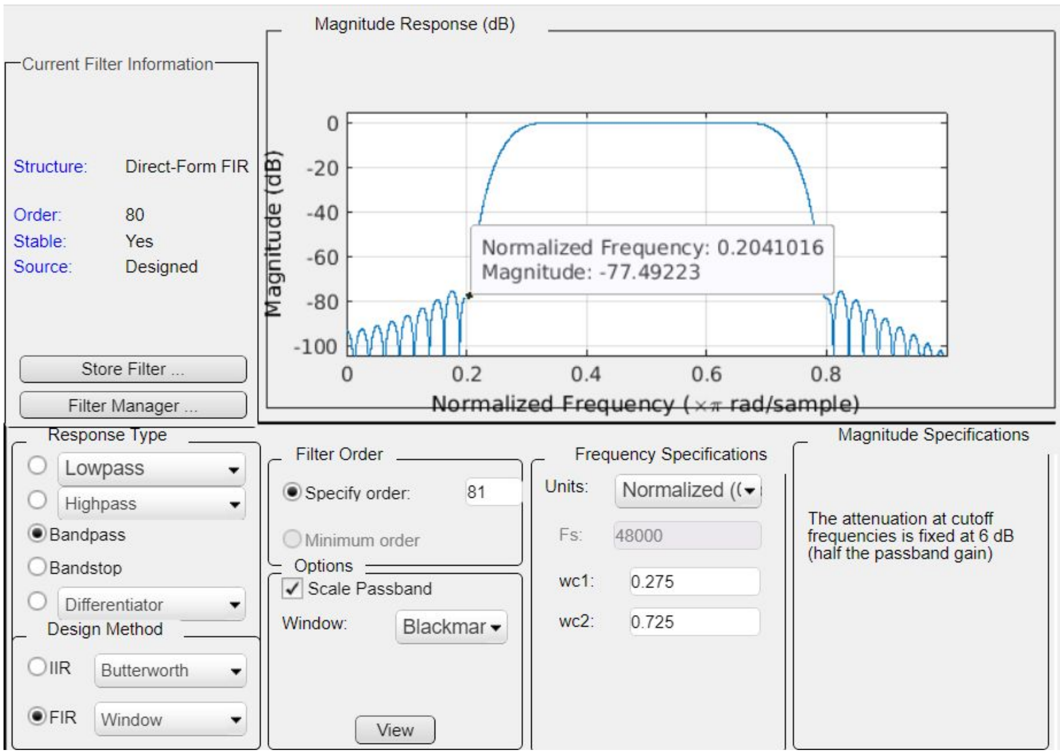
Resposta: Per comprovar si hem dissenyat els filtres correctament, generarem els diferents filtres amb les característiques que hem calculat (freqüències de tall, ordre i elecció de finestres, en els dos primers casos) i veurem, primer, si l'aspecte de la resposta en freqüència coincideix amb la que nosaltres hem obtingut i, després, si els llindars que se'ns exigien (les bandes de pas i d'aturada) obtinguts són els adients.

La resposta en freqüència del filtre passa-baixos amb finestra de Hamming de longitud 73 i amb freqüència de tall de 0.225 rad es mostra a continuació.

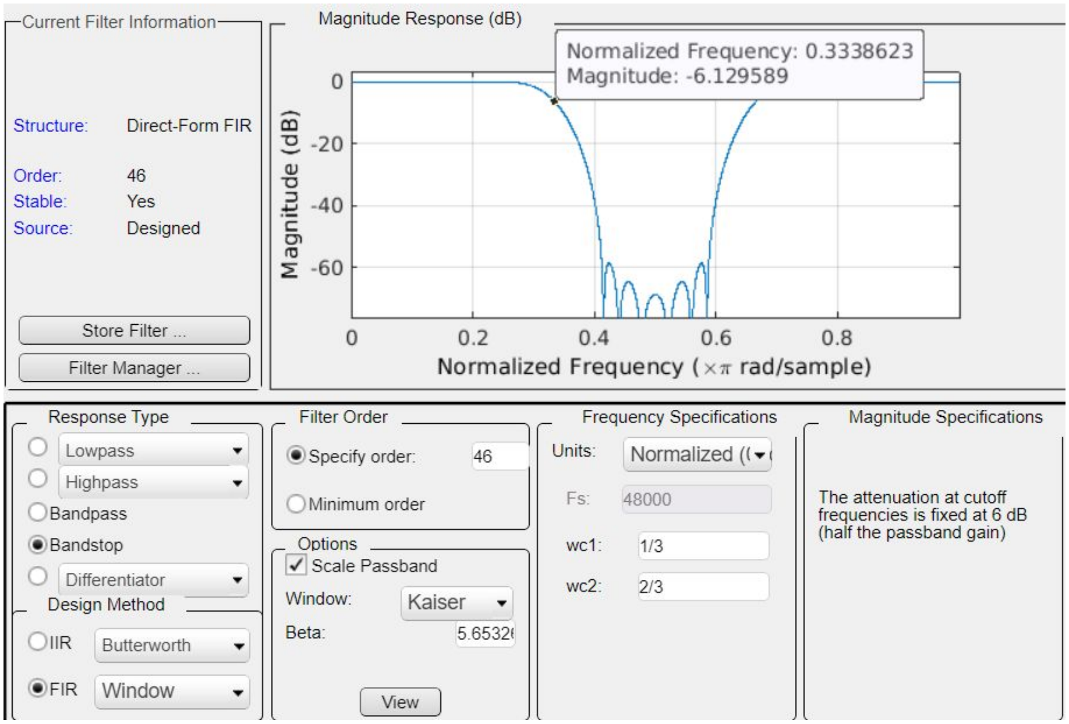


Com veiem, la corva obtinguda és molt similar a la que hem generat manualment. I, com veiem, aconseguim una atenuació per sobre dels 48 dB a partir de la freqüència 0.28 rad, de manera que donem per bo el disseny inicial.

A continuació es mostra la magnitud de la resposta en freqüència del filtre passa-banda amb una finestra de Blackman de longitud 81, amb unes freqüències de tall 0.275 rad i 0.725 rad, respectivament. Veiem que aconseguim una atenuació superior als 60 dB per sota dels 0.2 rad de freqüència i per sobre dels 0.8 rad de freqüència.



Per últim, tenim un filtre para-banda amb finestra de Kaiser de longitud 45 i amb β=5.65326. Novament, veiem que el resultat és molt similar a l'obtingut i les bandes són aproximadament, les desitjades .


Current Filter Information
Structure: Direct-Form FIR
Order: 46
Stable: Yes
Source: Designed
Store Filter ...
Filter Manager ...
Magnitude Response (dB)
Normalized Frequency: 0.3338623
Magnitude: -6.129589
Magnitude (dB)
0
-20
-40
-60
0
0.2
0.4
0.6
0.8
Normalized Frequency (×π rad/sample)
Response Type
Lowpass
Highpass
Bandpass
Bandstop
Differentiator
Design Method
IIR
Butterworth
FIR
Window
Filter Order
Specify order: 46
Minimum order
Options
Scale Passband
Window: Kaiser
Beta: 5.6532
View
Frequency Specifications
Units: Normalized
Fs: 48000
wc1: 1/3
wc2: 2/3
Magnitude Specifications
The attenuation at cutoff frequencies is fixed at 6 dB (half the passband gain)