Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm. | Nombre total de fulls | Qualificació: 1

CAP 3. ANALISI FREQÜENCIAL

Cognoms | Nom | Assignatura | DNI | Curs | Grup | Data

1) Donat un sistema LTI de resposta impulsional $h(n)$, determineu la sortida del sistema quan:

a) l'entrada val $x(n) = A \cdot e^{jw_0 n}$ per $-\infty < n < \infty$

Solució. La sortida del sistema ve definida per:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k) \quad \Big\} \text{ Teorema de convolució!!}$$

per la qual cosa:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot A \cdot e^{jw_0(n-k)} = A \cdot e^{jw_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-jw_0 k}$$

Anomenant $H(e^{jw_0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-jw_0 k}$, i recordant que la transformada de Fourier és $X(\Omega) = \mathcal{F}(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$

tenim que:

$$\underline{y(n) = A e^{jw_0 n} \cdot H(e^{jw_0}) \equiv x(n) \cdot H(e^{jw_0})}$$

on $H(e^{jw_0})$ és la resposta freqüencial del sistema per $W = w_0$

b) l'entrada és $x(n) = A e^{j\omega_0 n} \cdot u(n)$

<u>solució</u>

$$y(n) = \begin{cases} \emptyset & n<0 \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k) & \text{en un altre cas } (n \geq 0) \end{cases}$$

Resolent el cas d'interés $(n \geq 0)$ tenim que:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot A \cdot e^{j\omega_0 (n-k)} \cdot u(n-k)$$

recordant que el glaó u és $u(n-k) = \begin{cases} 0 & n-k<0 \\ 1 & n-k \geq 0 \rightarrow n \geq k \end{cases}$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} h(k) A e^{j\omega_0 (n-k)} = A \cdot e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{n} h(k) e^{-j\omega_0 k}$$

si relacionem aquesta sortida amb l'apartat a), arribem operant a:

$$y(n) = A e^{j\omega_0 n} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega_0 k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} h(k) \cdot e^{-j\omega_0 k} \right]$$

i per tant:

$$y(n) = A e^{j\omega_0 n} \cdot H(e^{j\omega_0}) - A e^{j\omega_0 n} \sum_{k=n+1}^{\infty} h(k) \cdot e^{-j\omega_0 k}$$

Tenim, com a sortida, dos termes: el primer és el mateix que s'ha obtingut en l'apartat a), i es coneix com el <u>terme estacionari</u>. El segon terme es coneix com la <u>resposta transitòria</u>. Aquest darrer terme apareix a causa de la transició abrupta que es produeix a l'entrada per <u>$n = \emptyset$</u>. Això succeirà en tots els sistemes reals perquè sempre hi ha un punt d'inici del senyal d'entrada.

ANÀLISI FREQÜENCIAL

Cognoms Nom
Assignatura
DNI Curs Grup Data

2) La transforma discreta de Fourier d'una resposta impulsional és la resposta freqüencial d'un sistema LTI i és:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

a) determineu la resposta en freqüència $H(e^{j\omega})$ d'un sistema caracteritzat per: $h(n) = (0,9)^n \cdot u(n)$

solució: $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0,9)^n \cdot e^{-j\omega n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (0,9 \cdot e^{-j\omega})^n \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{això és una suma d'una sèrie} \\ \text{de raó } 0,9\,e^{-j\omega} \text{ i apliquem fórmula} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{1-0,9\,e^{-j\omega}} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{el denominador és un complexe i} \\ \text{llavors } \mathrm{Re} = 1-0,9\cos\omega \\ \qquad\quad \mathrm{Im} = +0,9\sin\omega \end{array} \right.$$

Calculant el mòdul:

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{1}{(1-0,9\cos\omega)^2 + (0,9\sin\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1,81-1,8\cos\omega}}$$

i l'angle és:

$$\angle H(e^{j\omega}) = \mathrm{arctg}\left[\frac{0,9\sin\omega}{1-0,9\cos\omega}\right]$$

b) Suposem que una entrada al sistema anterior és $x(n) = 0,1\, u(n)$
Quina és la resposta estacionària $y_{ss}(n)$?

solució. Donat que l'entrada no és absolutament sumable, la DFT no és útil per calcular la resposta completa, però sí l'estacionària on $n \to \infty$ i llavors l'entrada és una seqüència constant, o una sinusoide amb $\omega = \emptyset$ o $\theta_0 = \emptyset$.
Per tant la sortida és:

$$y_{ss}(n) = 0,1 \times H(e^{j\omega}) = 0,1 \times \left| H(e^{j\omega}) \right|_{\omega = \emptyset} =$$

$$= 0,1 \times \frac{1}{\sqrt{1,81 - 1,8 \cos \emptyset}} = 0,1 \times \frac{1}{\sqrt{1,81 - 1,8}} =$$

$$= 0,1 \times \frac{1}{\sqrt{0,01}} = 0,1 \times \frac{1}{0,1} = 1$$

Per tant, quan $x(n) = 0,1 \cdot u(n) \Rightarrow y_{ss}(n) = 1$

Això és el guany del sistema en DC, o sigui, a freqüència zero.

Matlab → Ex2_freq

(3) Quan un sistema LTI es representa com una equació en diferències tal com:

$$y(n) + \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell \cdot y(n-\ell) = \sum_{m=0}^{M} b_m \cdot x(n-m) \,,$$

per tal d'avaluar la seva resposta freqüencial necessitariem la seva resposta impulsional $h(n)$.

No obstant, és fàcil obtenir $H(e^{jw})$

$$H(e^{jw}) \triangleq \sum_{-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot e^{-jwn}$$ ← però no usarem la transformada

si $x(n) = e^{jw_0 n}$, per trobar la sortida podem fer:

$y(n) = H(e^{jw}) \times x(n)$; o sigui

$y(n) = H(e^{jw_0}) * e^{jw_0 n}$

Llavors, si substituim $y(n), x(n)$ a l'equació en diferències queda:

$$H(e^{jw_0}) \cdot e^{jw_0 n} + \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell \cdot H(e^{jw_0}) \cdot e^{jw_0(n-\ell)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{M} b_m \cdot e^{jw_0(n-m)}$$; llavors treient fora dels Σ

$$H(e^{jw_0}) \cdot e^{jw_0 n} + H(e^{jw_0}) \cdot \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell \cdot e^{jw_0 n} e^{-jw_0 \ell} =$$

$$= \sum_{m=0}^{M} b_m \, e^{jw_0 n} \cdot e^{-jw_0 m}$$; treient fora dels Σ

Generalitzant per ω:

$$H(e^{j\omega})\cancel{e^{j\omega_0 n}} + H(e^{j\omega})\cancel{e^{j\omega_0 n}}\sum_{\ell=1}^{N} a_\ell e^{-j\omega\ell} =$$

$$\cancel{e^{j\omega_0 n}}\cdot\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j\omega m}$$, i s'elimina $e^{j\omega_0 n}$ i queda

$$H(e^{j\omega})\left[1+\sum_{\ell=1}^{N} a_\ell e^{-j\omega\ell}\right] = \sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j\omega m}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j\omega m}}{1+\sum_{\ell=1}^{N} a_\ell e^{-j\omega\ell}}$$

Per tant, podem trobar la resposta freqüencial d'un sistema simplement amb els coeficients a_ℓ i b_m de l'equació en diferències.

4) Un sistema LTI s'especifica per l'equació en diferències:

$$y(n) = 0{,}8 \cdot y(n-1) + x(n)$$

a) Trobar la resposta freqüencial d'aquest sistema

Solució: reescrivim l'equació

$$y(n) - 0{,}8\, y(n-1) = x(n)$$

recordant que:

$$\sum_{m=0}^{N} a[m]\, y[n-m] = \sum_{m=0}^{M} b[m]\, x[n-m]$$ llavors la seva resposta freqüencial és:

$$H(e^{j\omega}) = H(\Omega) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b[m] \cdot e^{-jm\Omega}}{\sum_{m=0}^{N} a[m] \cdot e^{-jm\Omega}}$$

aquí tenim:

$$\begin{cases} a[0] = 1 & b[0] = 1 \\ a[1] = -0{,}8 & b[1] = 0 \ldots \\ N = 1 & M = 0 \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b[0] \cdot e^{-j\omega 0}}{a[0]\, e^{-jm\cdot 0} + a[1]\, e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - 0{,}8\, e^{-j\omega}}$$

b) Calculeu la resposta estacionària (permanent) $y_{ss}(n)$ a la sortida del sistema si l'entrada és

$$x(n) = \cos(0{,}05\pi n) \cdot u(n)$$

Solució:

En estat estacionari, l'entrada $x(n) = \cos(0{,}05\pi n)$ té una freqüència $\omega_0 = 0{,}05\pi$ i fase $\theta_0 = 0°$.

La resposta del sistema a la freqüència ω_0 serà:

$$H(e^{j0{,}05\pi}) = \frac{1}{1 - 0{,}8\, e^{-j\cdot 0{,}05\pi}}$$

$$H(e^{j\,0{,}05\pi}) = \frac{1}{1-0{,}8\,e^{-j\,0{,}05\pi}} = \frac{1}{1-0{,}8\left[\cos 0{,}05\pi - j\sin 0{,}05\pi\right]} =$$

$$= \frac{1}{1-0{,}8\cos 0{,}05\pi + j\,0{,}8\sin 0{,}05\pi}$$ $\left\{\begin{array}{l}\text{cal calcular el mòdul i}\\ \text{l'argument}\end{array}\right.$

$$|H(e^{j\,0{,}05\pi})| = \frac{1}{\sqrt{(1-0{,}8\cos 0{,}05\pi)^2 + (0{,}8\cdot\sin 0{,}05\pi)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-1{,}6\cos 0{,}05\pi + \underbrace{0{,}64\cos^2 0{,}05\pi + 0{,}64\sin^2 0{,}05\pi}_{0{,}64}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1{,}64-1{,}6\cos 0{,}05\pi}} = \underline{4{,}0928}$$

$$\Phi = \operatorname{arctg}\frac{0{,}8\sin 0{,}05\pi}{1-0{,}8\cos 0{,}05\pi} = -0{,}5377 \text{ rad}$$

Per tant: $\boxed{H(e^{j\omega_0}) = 4{,}0928\,e^{-j\,0{,}5377}}$

Llavors, per calcular la sortida $y_{ss}(n)$ serà

$$y_{ss}(n) = x(n)\cdot |H(e^{j\omega_0 n})|_{\angle\Phi} = \cos(0{,}05\pi n)\cdot|4{,}09288|_{\angle -0{,}5377}$$

$$y_{ss}(n) = 4.0928\cdot\cos(0{,}05\pi n - 0{,}5377)$$ $\left\{\begin{array}{l}\text{mòdul = producte}\\ \text{fase = suma}\end{array}\right.$

arreglant-ho $\Rightarrow$ $y_{ss}(n) = 4{,}0928\cdot\cos\left[0{,}05\pi n - 0{,}05\pi\cdot\frac{0{,}5377}{0{,}05\pi}\right] =$

$$= 4{,}0928\cdot\cos\left[0{,}05\pi(n-3{,}42)\right]$$

Això significa que a la sortida, la sinusoidal està escalada 4,0928 i desplaçada (retardada) 3,42 mostres.

MATLAB $\Rightarrow$ EX4_freq.m

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm. | Nombre total de fulls | Qualificació: 5

Cognoms | Nom
Assignatura: ANÀLISI FREQÜENCIAL
DNI | Curs | Grup | Data

5) Determinar la DFT amb entrada periòdica d'ordre N de la seqüència $x(n) = e^{j\omega n}$ amb $n = 0, \dots, N-1$ i $\omega \neq \frac{2\pi k}{N}$ $\forall k = 0, \dots, N-1$

Solució. Aplicant la definició s'arriba a:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi k n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega n} e^{-j\frac{2\pi k n}{N}} =$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)n} \underset{\text{sumatori d'una sèrie afitada}}{=} \frac{1 - e^{j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)N}}{1 - e^{j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)}} = \left\{\begin{array}{l} \text{al numerador} \\ \left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \cdot N = \\ \omega N - 2\pi k \\ \text{i } e^{-2\pi k} = 1 \end{array}\right.$$

$$= \frac{1 - e^{j\omega N}}{1 - e^{j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)}} = \frac{e^{j\omega N/2}}{e^{j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^{-j\omega N/2} - e^{j\omega N/2}}{e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)\frac{1}{2}} - e^{j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)\frac{1}{2}}} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} e^{-j\omega N/2} - e^{j\omega N/2} = \cos(-x) - j\sin x - \cos x - j\sin x = 2j\sin \omega N/2 \quad \text{i també} \\ \omega N/2 - \frac{\omega}{2} + \frac{2\pi k}{N}\frac{1}{2} = \frac{\omega(N-1)}{2} + \frac{\pi k}{N} \end{array}\right\}$$

$$= e^{j\left(\frac{\omega(N-1)}{2} + \frac{\pi k}{N}\right)} \cdot \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)\frac{1}{2}\right]}$$

A tot senyal periòdic amb freqüència múltiple de la fonamental, els coeficients són zero excepte a $a[k]$ que li toca

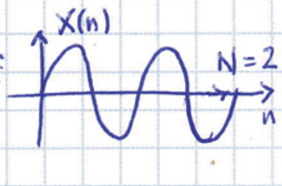
si $\omega = \frac{2\pi\alpha}{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, llavors $\underbrace{X(k) = \emptyset}_{\text{tots els coef. a zero}}$, $\forall k \neq \alpha$ i $\underbrace{X(\alpha) = N}_{\text{excepte el que li toca}}$

Comprovació: $\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) = \sin \frac{2\pi\alpha}{N}\frac{N}{2} = \sin \pi\alpha = \emptyset$ amb $\alpha \in \mathbb{Z}$

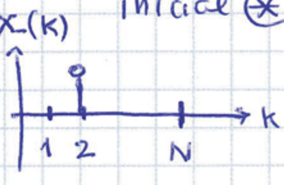
però si $k = \alpha$ queda una indeterminació $\frac{\emptyset}{\emptyset}$! llavors cal anar al sumatori inicial (*)

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)n} \underset{\omega = \frac{2\pi\alpha}{N}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\cdot\emptyset\cdot N} = \underline{\underline{N}}$$

ex:



$\Rightarrow$



Continuació:

Quan es calcula una DFT, se suposa que al calcular la inversa el senyal serà periòdic. Això ho comprovem:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi k n}{N}} \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

Si substituïm $n = n_0 + N$, s'arriba a

$$\underline{\underline{x(n_0+N)}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi k}{N}(n_0+N)} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi k}{N}\cdot n_0}\, \underbrace{e^{j2\pi k}}_{=1} =$$

$$= \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi k n_0}{N}} = \underline{\underline{x(n_0)}}$$

Per tant, el senyal s'hauria de repetir cada N mostres, i així passa amb les funcions la freqüència de la qual es correspon amb múltiples de la fonamental.

Això no passa amb el senyal que es vol descomposar $x(n) = e^{j\omega n}$, i tot i ser periòdica, apareix com no-periòdica, amb un salt entre el primer període d'$x(n)$ i el següent. Aquest salt entre períodes consecutius provoca que els coeficients de la DFT siguin diferents de zero. Aquest efecte es coneix com "spectral leakage".

{ NVNLAB Ex5_freq in }

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

(6)

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura CAPITOL 3.

Cognoms

Nom

Pàgina ____ de ____

(6) DNI

ANALISI FREQ

Exercici: Donada una seqüència discreta real $x(n)$ amb periode N sent $X(k)$ la seva DFT d'ordre N, comproveu que:

a) $\text{Real}\{X(k)\} = \text{Real}\{X(N-k)\}$

b) $\text{Im}\{X(k)\} = -\text{Im}\{X(N-k)\}$

Solució: A partir de les dues igualtats proposades s'haurà de complir que:

$X(k) = X^*(N-k)$, Aplicant la definició de DFT tindrem:

$$X(N-k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi n}{N}(N-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x(n)\, e^{j\frac{2\pi nk}{N}}\, \overbrace{e^{-j2\pi n}}^{=1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$$ ⟹ la part imaginària ha canviat de signe, la real no!

Aplicant que $x(n)$ és real, vol dir que es compleix $x(n) = x^*(n)$, s'obté

$$X(N-k) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}\right)^* = \left(X(k)\right)^* = X^*(k)$$

Ex 7:

Exercici 6 Determinar el senyal temporal que dóna lloc a la següent DFT:

$$X(k) = \{ 1, j, -1, -j \}$$

Solució: Apliquem l'expressió general per a la IDFT a l'expressió donada:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi k n}{N}}$$

i substituint valors $(N=4)$, s'arriba a:

$$x(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} X(k) e^{j\frac{\pi k n}{2}}$$

Els valors de la seqüència recuperada són:

$$x(0) = \frac{1}{4}\left[X(0) + X(1) + X(2) + X(3)\right] = \frac{1}{4}\left[1+j-1-j\right] = 0$$

$$x(1) = \frac{1}{4}\left[X(0) + X(1) e^{j\frac{\pi}{2}} + X(2) e^{j\pi} + X(3) e^{j\frac{3\pi}{2}}\right] = \frac{1}{4}\left[1-1+1-1\right] = 0$$

$$x(2) = \frac{1}{4}\left[X(0) + X(1) e^{j\pi} + X(2) e^{2j\pi} + X(3) e^{3j\pi}\right] = \frac{1}{4}\left[1-j-1+j\right] = 0$$

$$x(3) = \frac{1}{4}\left[X(0) + X(1) e^{j\frac{3\pi}{2}} + X(2) e^{3j\pi} + X(3) e^{j\frac{9\pi}{2}}\right] = \frac{1}{4}\left[1+1+1+1\right] = 1$$

MATLAB.

MATLAB: Ex7_freq.m

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm. | Nombre total de fulls | Qualificació: 7

Cognoms: CAPÍTOL 3

Nom:

Assignatura: ANALISI FREQÜENCIAL

DNI | Curs | Grup | Data

(8) Un filtre promig és $y(n) = \frac{1}{3}\left[x(n) + x(n-1) + x(n-2)\right]$

Trobar la resposta freqüencial.

Solució

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j\omega m}}{1 + \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell e^{-j\omega \ell}} \qquad \begin{cases} b[0]=b[1]=b[2]=\frac{1}{3} \\ a[0]=1 \\ M=2;\ N=0 \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{2} e^{-j\omega m} = \frac{1}{3}\left[e^{-j\omega 0} + e^{-j\omega} + e^{-j\omega\cdot 2}\right] =$$

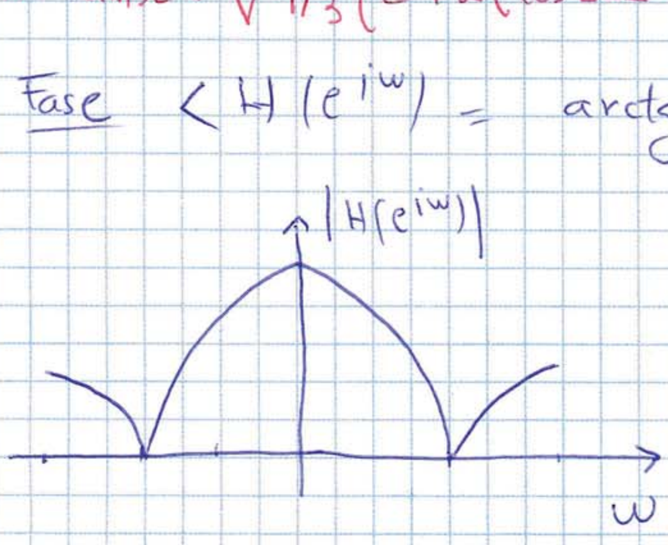
$$= \frac{1}{3}\left[1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}\right]$$

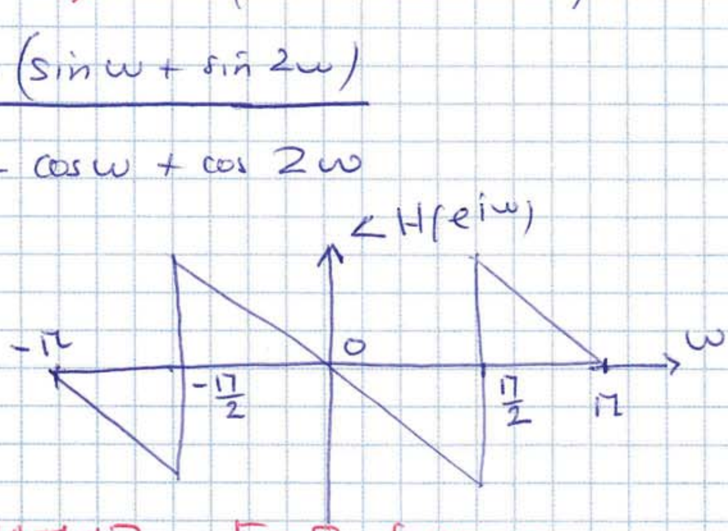
$$= \frac{1}{3}\left[1 + \cos\omega + \cos 2\omega - j\left[\sin\omega + \sin 2\omega\right]\right]$$

Magnitud $\mathrm{Mag}|H(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{1}{3}\left(1+\cos\omega + \cos 2\omega\right)^2}$

o també: $\sqrt{1/3\left(3+2\left(\cos 2\Omega + 2\cos\Omega\right)\right)} \quad + \left(\sin\omega + \sin 2\omega\right)^2$

Fase $\angle H(e^{j\omega}) = \arctg \frac{-(\sin\omega + \sin 2\omega)}{1+\cos\omega + \cos 2\omega}$





MATLAB. Ex8_freq.m

Escola Tècnica Superior
d'Enginyeria Industrial de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm. | Nombre total de fulls | Qualificació: 8

Cognoms: CAPÍTOL 3 | Nom:

Assignatura: ANÀLISI FREQÜENCIAL

DNI | Curs | Grup | Data

(9) Transformada de la funció impulsional $\delta(n)$

Apliquem la Transformada en sèries de Fourier, com sèrie periòdica

$$a[k] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \delta(n)\, e^{-j\frac{2\pi n k}{N}} \qquad \left\{ \delta(n) \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n\neq 0 \end{cases} \right.$$

$$\underline{a[k]} = \frac{1}{N}\, \delta(0)\, e^{-j\frac{2\pi 0 k}{N}} = \frac{1}{N}\cdot 1 \cdot e^{0} = \underline{\frac{1}{N}}$$

$$\text{Mag}\,(a[k]) = \frac{1}{N} \quad \forall n \in [0,, N-1]$$

$$\text{Fase}\,(a[k]) = 0° \quad \forall n \in [0 .. N-1]$$

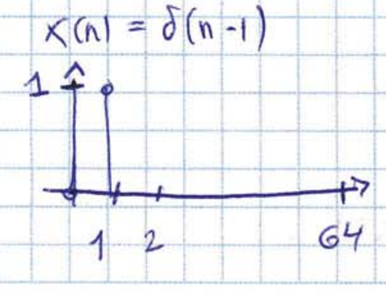
Si desplacem la funció δ una unitat, $\delta(n-1)$, llavors per la propietat del time-shifting, queda la transformada:

$$\text{time-shifting} \equiv x(n-n_0) \Longleftrightarrow a[k]\, e^{-j\frac{2\pi k n_0}{N}}$$

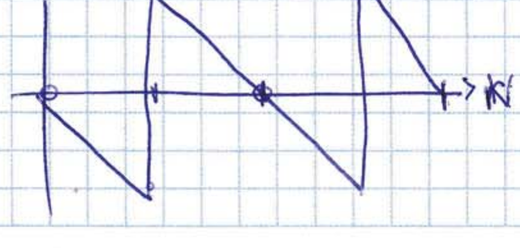
$$x(n-1) = \delta(n-1) \Longleftrightarrow a[k]\, e^{-\frac{j2\pi k}{N}}$$

$$\text{Mag}\,(a[k]) = \frac{1}{N} \quad \text{igual que en } \delta(n)$$

$$\text{Fase}\,(a[k]) = \frac{-2\pi k}{N}$$, depèn de cada posició k del coeficient $w = -\frac{2\pi k}{64}$



⟹

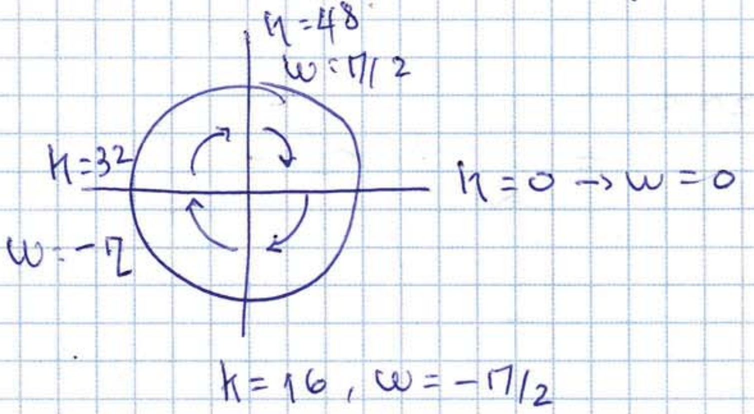


$$\bar{\Phi}(a(k)) = \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{-2\pi k}{N}}{\cos \frac{-2\pi k}{N}}$$

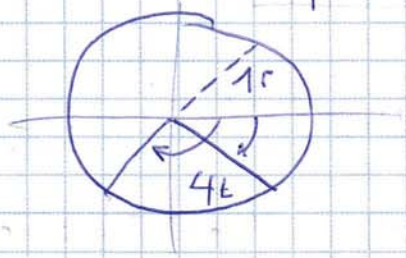
$\underline{\text{Si}}$ $N = 64$

Llavors $k = 16$ $\quad \omega = -\frac{2\pi \cdot 16}{64} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{ \frac{\sin \pi/2}{\cos \pi/2} = \infty \right.$

$k = 32$ $\quad \omega = -\frac{2\pi\, 32}{64} = -\pi \quad \left\{ \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = 0 \right.$

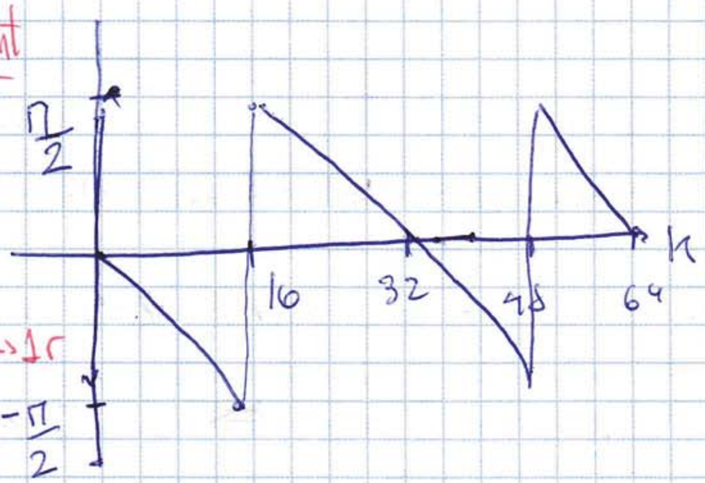


$\Rightarrow$ Treballem només en el 4r i el 1r quadrants



4| Long

		Quadrant
① $k = 0..16$	$\sin -$, $\cos +$	4t
$k = 16..32$	$\sin -$, $\cos -$	3r → 1r
$k = 32..48$	$\sin +$, $\cos -$	2n → 4t
$k = 48..64$	$\sin +$, $\cos +$	1r → 1E



MATLAB $\begin{cases} \text{Ex9\_freq} \\ \text{Ex9\_freq\_V2} \end{cases}$

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm. | Nombre total de fulls | Qualificació: 9

Cognoms: CAPÍTOL 3 | Nóm

Assignatura

DNI | Curs | Grup: ANALISI FREQÜENCIAL | Data

(10) Determinar la transformada discreta de Fourier del senyal $x(n) = 0,5^n u(n)$.

Solució: Com que el senyal és absolutament sumable, llavors la DFT existeix i és:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 0,5^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0,5 e^{-j\omega})^n =$$

suma de sèries

$$= \frac{1}{1-0,5 e^{-j\omega}}$$

o bé: $X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-0,5\cos\omega + 0,5j\sin\omega}$ i per tant el mòdul i la fase són:

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1-0,5\cos\omega)^2 + (0,5\sin\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1,25-\cos\omega}}$$

$$\Phi(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{0,5\sin\omega}{1-0,5\cos\omega}$$

Propietats:

1. Periodicitat

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j[\omega+2\pi]})$$ per $\omega = [0, 2\pi]$ o $\omega : [-\pi, \pi]$

Només cal calcular-la dins 1 periode.

2. Simetria

Si $x(n)$ és real, llavors $X(e^{j\omega})$ és simètrica conjugada

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

o: $\mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})] = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$ simetria parella

$\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})] = -\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$ simetria senar

$|X(e^{-j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$ simetria parella

$\Phi(e^{-j\omega}) = -\Phi(e^{j\omega})$ simetria senar