

# Transició de fase i components connexes en grafs aleatoris\*

GRAU A TARDOR CURS 2019-2020

Departament de Ciències de la Computació

alg@cs.upc.edu

## Resum

*Aquesta pràctica té com a objectiu portar a terme un estudi experimental de les transicions de fase, en propietats i mesures relatives a les components connexes, quan el graf que tractem es crea d'acord amb un model paramètric de grafs aleatoris.*

*El projecte es farà en grups de 3-4 persones. La **composició dels grups** s'haurà de comunicar a alg@cs.upc.edu abans del **20 de Setembre de 2019**.*

*El lliurament de la pràctica es farà en línia via Racó en dos fases. Per a la entrega inicial teniu temps fins fins les 10:00 hores del dia **30 de Setembre de 2019**. Per a la entrega final teniu temps fins fins les 10:00 hores del dia **21 de Octubre de 2019**.*

*Alguns grups podeu rebre preguntes per e-mail o ser convocats a una entrevista durant el mes de Novembre. Una planificació de dates es publicarà al racó entre el 7 i el 10 de Novembre.*

## I. OBJECTIUS

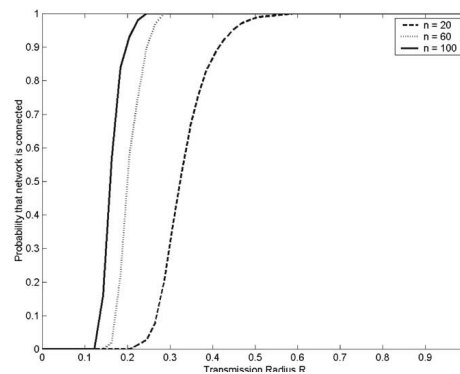
L'objectiu d'aquest projecte és portar a terme un estudi experimental de la transició (o transicions) de fase per diferents propietats i/o mesuraments sobre les components connexes en diferents models parametritzats de grafs aleatoris. D'altra banda, aquesta pràctica ha de servir també per aprendre diferents models de grafs aleatoris d'ús habitual en els estudis experimentals d'algorismes per a problemes sobre grafs, així com per a aprendre i fer ús de les metodologies habituals que permetin garantir la validesa de les mesures i dels comportaments obtinguts experimentalment.

En el cas de models parametritzats de grafs aleatoris la transició de fase estudia la variabilitat d'una propietat (o una mesura) en relació al valor (o valors) dels paràmetres que defineixen el graf. Com a exemple, considereu la propietat de la connectivitat de grafs (és a dir, que un graf sigui o no connex) aplicada a grafs

---

\*La versió més actualitzada d'aquest document, així com qualsevol material addicional relacionat es publicarà al Racó.

aleatoris. Considereu que disposem d'una funció  $\text{Graf}(n, p)$  que permet generar un graf aleatori de  $n$  vèrtexos segons un determinat model parametritzat per la  $p$ . Per a cada valor d'aquest paràmetre del model, i fent un nombre raonable de crides, podem estimar la probabilitat que un graf amb  $n$  vèrtexs del model sigui connex. La transició de fase, si n'hi ha, ens mostraria un valor del paràmetre  $p$  on la probabilitat de ser connex, per valors  $p' < p$ , és radicalment diferent a la de valors  $p' > p$ . Com podeu pensar, la transició de fase no sempre es dona per valors de  $n$  petits i per això cal fer experiments que facin créixer el valor de  $n$  fins a tenir una certa evidència de l'existència de la transició de fase o la constatació que no apareix. A la figura de sota en teniu una imatge que mostraria una transició de fase.



Us demanem que analitzeu experimentalment l'existència o no de transició de fase, per diferents mesures relacionades amb les components connexes de grafs aleatoris definits segons models que depenen només d'un paràmetre. Concretament, us demanem que implementeu i feu servir els algorismes necessaris per portar a terme els següents punts:

- Donat un graf  $G$ , obtenir les seves components connexes. Aquest programa l'haureu d'adaptar o modificar per tal d'obtenir mesuraments addicionals o altres propietats de les components connexes.
- Generar grafs aleatoris en els models Binomial random graphs ( $G(n, p)$ ) i Random geometric graphs per punts en un espai amb dues dimensions ( $G(n, r)$ ) que, fixada la mida del graf, només depenen d'un paràmetre.
- Estudiar la transició de fase de la probabilitat de ser connex en els models  $G(n, p)$  i  $G(n, r)$ .
- Estudiar la transició de fase de la mida esperada de la component connexa més gran al graf (component connexa gegant).

- (e) Estudiar la transició de fase d'altres propietats o de les mateixes en altres models de grafs aleatoris

Com hem esmentat abans, l'objectiu d'aquest projecte és, per una part, que veieu experimentalment l'existència o no de transició de fase per a diferents propietats i amb diferents tipus de grafs aleatoris grans. Dins d'aquest objectiu s'encabeix el de conèixer diferents models de grafs aleatoris i ser capaços de fer-los servir en un estudi experimental. També ens interessa que documenteu el temps de còmput de les implementacions dels algorismes que permeten comprovar les propietats sota estudi en funció dels diferents valors dels paràmetres dels models de grafs i del hardware que feu servir.

Tingueu en compte que haureu d'executar els vostres algorismes amb molts grafs de mides grans i que l'eficiència de les vostres implementacions pot ser rellevant.

## II. ENTREGA

El nivell de sofisticació i esforç dedicat al projecte és opcional i, naturalment, es tindrà en compte a l'hora d'avaluar-la. En la versió més senzilla (suficient per aprovar el projecte si està acompanyada d'un bon nombre d'experiments que validen les vostres hipòtesis i una documentació aclaridora) caldria que implementéssiu programes en C++ per als problemes i estudis proposats als apartats (a)–(d). Per tal d'optar a una nota millor caldria, a més a més, fer l'apartat (e): l'anàlisi de la transició de fase d'una altra propietat en els models del apartat (b) o bé de les propietats dels apartats (c) i (d) en un altre model de grafs aleatoris.

## III. ALGUNS PUNTERS

Aquest document és intencionadament vague. Per tant, a més d'analitzar i experimentar amb diferents famílies de grafs aleatoris i propietats, haureu de documentar les fonts d'informació, les decisions preses i el disseny d'experiments que els hi donen suport. Per qualsevol font que feu servir cal que proporcioneu una referència adient, o l'adreça web (si cal), les modificacions i/o simplificacions fetes en les vostres implementacions i/o la selecció de models de grafs aleatoris.

Per tal de cobrir l'apartat (e) podeu seleccionar els models de grafs i les propietats que us agradin més. Una possibilitat per triar propietats és lligar-les a algun concepte d'interès, per exemple:

- lligades a *connectivitat* (p.ex., ser connex, o  $k$ -connex), o
- lligades a *recorreguts* (p.ex., tenir un camí hamiltonià), o bé
- lligades a *propietats topològiques* del graf (p.ex., tenir diàmetre constant o petit, la mida del  $k$ -core, etc.).

Així com qualsevol altra propietat que us sembli interessant de la teoria de grafs.

Pel que fa als models de grafs aleatoris, podeu trobar alguns models per triar seguint els enllaços a [https://en.wikipedia.org/wiki/Random\\_graph](https://en.wikipedia.org/wiki/Random_graph) o les implementacions de generadors a NetworkX. També podeu trobar definicions d'alguns models de grafs aleatoris als capítols 12–15 del llibre [2].

## IV. QUÈ CAL LLIURAR

**Entrega Inicial (30/09/2019):** Una carpeta comprimida (.zip|.tgz|.tar.gz) que contingui:

- Un document PDF que contingui gràfics mostrant el nombre esperat de components connexes en els models  $G(n, p)$  i  $G(n, r)$  en funció dels valors de  $p$  o  $r$ , per a diferents valors de  $n$  i, a més, informació descrivint els experiments que heu realitzat per a obtenir-los.
- Una carpeta amb tots els codis font necessaris per reproduir els vostres experiments. S'han d'incloure les instruccions per a la compilació i execució, així com una petita descripció d'ús per cada programa.

**Entrega Final (21/10/2019):** Una carpeta comprimida (.zip|.tgz|.tar.gz) que contingui:

- Una documentació adequada del algorismes i mètodes que heu implementat, les proves que heu fet i la comparació dels resultats que heu obtingut. També és interessant que indiqueu altres idees que hagueu provat, encara que no hagin donat bons resultats, o d'altres que no heu explorat. El document ha de ser en format PDF i ha d'incloure les referències bibliogràfiques adients.

La documentació ha de recollir i presentar la feina feta, les fonts que s'han consultat, el que heu après i els resultats de l'experimentació. En particular, i sobretot, és molt important que reflecteixi de forma succinta i clara el que heu après.

- Una carpeta amb tots els codis font necessaris per reproduir els vostres experiments. S'han d'incloure les instruccions per a la compilació i execució, així com una petita descripció per cada programa.
- Tingueu en compte que la documentació entregada ens ha de permetre valorar el nivell d'assoliment de la competència transversal que hem d'avaluar: **Capacitat d'autoaprenentatge**. En el context del projecte hi ha uns quants aspectes rellevants relacionats amb aquesta competència: models de grafs aleatoris, propietats de grafs, disseny dels experiments. La qualificació final del projecte reflectirà la qualitat del vostre aprenentatge, de l'experimentació feta i de la documentació on es reflectirà tot. La qualitat del codi entregat (programes) es pressuposa i representarà una part petita de la qualificació final.

## REFERÈNCIES

- [1] R. Sedgewick and K. Wayne. *Algorithms*. Addison-Wesley, 4th edition, 2011. <https://algs4.cs.princeton.edu/>
- [2] M.E.J. Newman. *Networks. An Introduction*. Oxford University Press, 2010.

