UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Jaka Basej

VPLIV STRATEGIJ NA ODSTOTEK VRAČANJA PRI IGRAH NA SREČO

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman

Ljubljana, 2024

Kazalo

Vpliv strategij na odstotek vračanja pri igrah na srečo

Povzetek

V tej nalogi raziskujemo vpliv različnih strategij na donos pri igranju video pokra. Uporabili smo metode matematične analize, simulacije in metodo Monte Carlo za oceno učinkovitosti različnih strategij. Rezultati so pokazali, da izbira strategije močno vpliva na donosnost igre.

Impact of strategies on return percentage in games of chance

Abstract

In this thesis, we investigate the impact of different strategies on the return in video poker. We used methods of mathematical analysis, simulation, and the Monte Carlo method to assess the effectiveness of various strategies. The results showed that the choice of strategy significantly affects the profitability of the game.

Math. Subj. Class. (2024): 05C05
Ključne besede: relativna spretnost, moč naključja
Keywords: relative skill, power of chance

1 Opis igre za analizo – Video Poker

Obveščeni igralci so tisti, ki poznajo optimalno strategijo. Igre so za obveščene precej drugačna kot za neobveščene. To dejstvo je v mnogih situacijah resnično, še posebej v igralnicah. Igralnice od neobveščenih pridobijo milijarde evrov na leto, medtem ko majhnemu številu obveščenih igralcev uspe imeti nepozabne dogodivščine ter pri tem še zaslužiti.

Video poker je ena redkih iger v igralnici, ki vsako leto privleče na tisoče igralcev. In nekaj deset tisoč igralcev ve dovolj, da uživajo v kazino počitnicah, ki jih stanejo veliko manj kot v maloprodaji.

Video poker je odlična igra. Je vznemirljiva, zanimiva in inteligenten igralec, če je motiviran in pripravljen študirati, se lahko nauči igrati dovolj dobro, da zmaga ali vsaj ne izgubi. Pri video pokru je več zmagovalcev kot v vseh drugih igralniških igrah skupaj. In če vključite igralce, ki prejmejo nagrade ne le v denarju, ki so skupaj vredne več od tistega, kar izgubijo, je zmagovalcev več tisoč.

Kako je to mogoče? Igralnice niso dobrodelne ustanove. Imajo dobiček od iger video pokra. Če igralnice ne bi zmagovale, iger ne bi bilo. Kako lahko igralci in igralnice zaslužijo hkrati? Preprosta razlaga je, da je več poražencev v video pokru kot zmagovalcev. Veliko več. In velikost izgub presega velikost čistih dobičkov. Številne knjige o igrah na srečo obljubljajo, da bo vsak, ki poskuša zmagati, uspešen. To preprosto ni res. Video poker je v osnovi uporabna matematika. Če želite razumeti koncepte, morate biti podučeni v matematičnih osnovah verjetnosti in kombinatorike. Ni treba biti na ravni Einsteina, vendar so skoraj vsi uspešni igralci nadpovprečno inteligentni.

Igralni klub je, članski klub v kazinojih, člani imajo člansko kartico na kateri nabirajo pike in te zamenjajo za denar ali druge določene materialne dobrine.

Recimo, da ima ena igralnica igro 9/6 Jacks or Better (ki ima odstotek vračanja 99.54%) + 0.33% denarni igralni klub in mesečne kupone v vrednosti + 0.25%. Druga igralnica ima NSU Deuces Wild (99.73%) z + 0.17% denarnim igralnim klubom in mesečnimi kuponi v vrednosti + 0.125%. Katera ponudba je boljša? Seštejemo 99.54% + 0.33% + 0.25% in v prvem primeru dobimo 100.12%, v drugem pa 99.73% + 0.17% + 0.125% in dobimo 100.025%, zaradi česar je prva igra boljša. Kljub temu enostavnemu postopku veliko igralcev ne more narediti tega izračuna. Mnogi od teh igralcev zato izberejo napačno igro.

V tej seminarski nalogi bom napisal, kako različne strategije vplivajo na donos posameznih iger in kakšen vpliv ima naša strategija na donos ter kako se razlikujejo zaradi predpostavljenih pravil (Tabela 2).

Obstaja na desetine različnih video poker iger in če upoštevate plačilne tabele znotraj posameznih iger, obstaja na stotine različic. Nihče ne more igrati vseh perfektno.

V tej seminarski nalogi predstavljam strategije za najlažje razumljivo igro Jacks or Better, ki je pogostokrat najboljša igra v igralnicah, kjer igrate ali pa tudi ne.

2 Kaj je video poker?

Video poker je v izvirniku zelo preprosta igra. Stavite eno enoto. Razdeljenih vam je pet kart. Izberete, katero od teh kart, če sploh katero, želite imeti. Dodatne karte se dodelijo do skupaj petih za dokončanje vaše kombinacije petih kart. Plačilo dobite, če ste dobili kakšno plačilno kombinacijo. Konec igre. Za drugo stavo lahko začnete novo igro, ni vam pa treba.

V tej preprostosti pa se skriva več zapletenih dejavnikov. Za začetek je to sama podlaga igre. Ena velika igralnica ima lahko več kot 100 različnih vrst iger video pokra. Te se lahko razlikujejo glede na denominacijo (1¢, 2¢, 5¢, 10¢, 25¢, 50¢, 1€, 2€, 5€ in več) ali glede na vrsto igre (Jacks or Better, Double Double Bonus Poker, Deuces Wild itd.). Znotraj vsake vrste igre obstaja vrsta različnih plačnih kombinacij.

Za lažjo beljivost bom uporabil kratice barv kart: H za srce, C za križ, D za karo in S za pik.

Razumeli boste, katere igre z njeno plačilno kobinacijeo so boljše od drugih in katerim se je treba izogibati. Za igro z 52 kartami je mogoče deliti natanko 2.598.960 različnih kombinacij petih kart, v splošnem dvojniki (recimo par 4 src in 4 križ ali 4 src 4 kara) naredijo to številko precej manjšo. Na primer, kombinacija 5h 5s 5d 3h 3s je drugačna kombinacija kot 5h 5s 5d 3h 3d, vendar jih igramo enako, razlika je le v barvi 3 src in 3 kara, ki nima vpliva na vračilo igre.

Za večino rok obstaja enolično izračunana najboljša izbira kart. Za nekaj rok imata dve različni kombinaciji izbora iz v naprej določenih petih kart isti donos v povprečju. Na primer, če v igri Double Double Bonus dobite 2h 4s 5d 6c 8h, je vrednost v povprečju enaka, če držite 2 4 5 6 kot 4 5 6 8 in obe igri sta precej boljši od menjave vseh 5 kart.

Za kombinacijo, kot je 2s 4s 5s Ah Qh, je samo en prijem pravilen, čeprav ni očiten (ali držite pike ali srčke, je odvisno od igre, ki jo igrate). Če želite igrati katero koli igro video pokra, se morate naučiti pravilno igrati vsako igro. Naučiti pravilno odigrati vsako od 2.598.960 različnih rok se morda sliši kot strašno težka naloga, vendar ni.

Upoštevajte, da ima video poker samo en stavni interval – stavite enkrat in ste v igri do konca. S tem se igra bistveno razlikuje od pokra v živo ali blackjacka. Video poker deli karte pošteno, vsaj če igrate v Sloveniji, Mississippiju, New Jerseyju in drugih EU državah, kjer so igre na srečo zakonsko urejene. To med drugim morda ne drži v igralnicah v New Yorku, Floridi in Washingtonu. Naprava, ki določa katere karte se delijo, se imenuje generator naključnih števil ali RNG. To je računalniški algoritem, ne "naprava".

Mnoge igralce skrbi natančnost delovanja RNG algoritma. Zame je to izguba časa. Namen RNG je simulirati pošteno delitev iz dobro premešanega kompleta 52 kart. Noben računalniški program ne more biti povsem naključen, lahko pa je dovolj blizu. Obstajajo statistični ukrepi, ki zagotavljajo zadostno naključnost RNG metode.

3 Kaj naredi igro video poker posebno?

Strategija za 9/6 Jacks or Better je bila izdelana za vsako možno kombinacijo roke in je relativno lahka. Vlečeš 5 kart, odločiš se katere obdržiš in nato izvečeš toliko novih da jih imaš spet pet. Igraš proti računalniku, in je končno mnogo odločitev, zato lahko izračunamo najbolšo izbiro pri vsaki kombinaciji. Zaradi tega se zelo razlikuje od pokra ali športnih stav. Pri teh dejavnostih tekmujete z drugimi igralci v igri. Če se sposobnosti drugih igralcev izboljšajo, se morate vi prilagoditi. Svojo raven spretnosti v video pokru je enostavno izmeriti in za to so na voljo računalniške programske opreme.

Čeprav se pravila igre ne spreminjajo, se spreminja okolje. Igralnice redno menjajo pike, igralne klube, kartice in promocije. Pogosto se boste znašli v okolju nepopolnih informacij. To je tisto, kar ohranja igro zanimivo. Med igranjem je razmeroma malo človeške interakcije. Ali je to plus ali minus, je odvisno od posameznikove osebnosti.

Video poker bo zelo verjetno na voljo v igralnicah še več let. To pomeni, da če si vzamete čas za učenje in postanete dobri, boste še dolgo uživali. Toda vsi, ki vas zanima ta igra, se vsaj potrudite, da postanete kompetentni pri reševanju tipičnih matematičnih problemov video pokra.

Čeprav je treba razlikovati med igrami video pokra, ni enotnega ali edinstvenega načina za to. Razlikujejo se po "volatilnosti". Jacks or Better ima eno najnižjih z najlažjo strategijo.

Volatilnost obravnavamo kot merilo, kako veliki so lahko vzponi in padci v količini denarnega zneska v določenem obdobju v igri. Čeprav vse igre na srečo vsebujejo volatilnost, je to, koliko jo lahko igralec prenese, odvisno od osebnosti, bogastva, starosti in številnih drugih dejavnikov. Večina igralcev se že hitro nauči, na kateri stopnji volatilnosti ali "tveganja"je njihova zgornja meja.

Vem, da bom igral dovolj dolgo, da bom izkusil vse vzpone in padce, zato je zame "povprečna donosnost"najpomembnejše merilo. Za mojega najboljšega prijatelja so nizi resnih izgub izjemno zastrašujoči, zato je stopnja volatilnosti zanj pomembna.

Tabela 1 plačilnih donosov vsebuje tri vrstice na dnu. Prvi Teoretični donos je merilo povprečnega donosa, ki je zame najbolj pomemben. Naslednji dve, Varianca in Standardni odklon, sta merili volatilnosti, višji kot so, večji bodo vzponi in padci vašega denarnega stanja med igro.

4 Jacks or Better

Jacks or Better je predhodnica vseh iger video pokra. Včasih se imenuje "Draw Poker", na napravah Triple Play, Five Play in Ten Play pa se igra imenuje "Triple Play", "Five Play"in "Ten Play". Na napravah Fifty Play in Hundred Play se igra imenuje "Jacks or Better". Zakaj? To igro opredeljujejo tri ključne značilnosti:

- Stavo prejmete vrnjeno za par določenih kart; to so pari JJ, QQ, KK in AA.
- Za dva para dobite dvojno izplačilo.
- Petindvajset kratni znesek prejmete za vse 4 enake karte (poker). Ta znesek je običajno 25-za-1 (a ne vedno).

Uprabil sem kratice kart: T za deset, J za poba, Q za damo, K za kralja in A za as.

Kako ločite med dobrimi varijacijami Jacks or Better in slabimi varijacijami Jacks or Better? Ogledate si znesek, ki ga dobite pri Polni hiši(par in 3 enake) in Barvi (pet kart enakih barv).

	9/6	8/6	9/5	8/5
Kraljeva lestvica	800	800	800	800
Barvna lestvica	50	50	50	50
4 enake	25	25	25	25
Polna hiša	9	8	9	8
Barva	6	6	5	5
Lestvica	4	4	4	4
3 enake	3	3	3	3
Dva para	2	2	2	2
Fantje ali boljše	1	1	1	1
Teoretični donos	99.54%	98.39%	98.45%	97.30%
Varianca	19.51	19.34	19.50	19.32
Standardni odklon	4.42	4.40	4.42	4.40

Tabela 1: Plačilne tabele za Jacks or Better z wizardofodds.com in poterjena z programsko simulacijo.

Opazite, da se izplačilo za Polno hišo in Barvo uporablja kot ime igre? To pomeni, da pri 9/6 Jacks or Better prejmete 9 za Polno hišo in 6 za Barvo. Ti plačilni razporedi so navedeni na igralnem avtomatu. Včasih so vidni na sprednjem steklu, včasih pa morate pritisniti gumb See Pays (v slovenščini to pomeni, poglej plačilno tabelo). Informacije so vedno na voljo. Plačilni razpored je najpomembnejša lastnost pri izbiri dobrega stroja. Nič ni pomembnejšega od plačilne tabele.

Donos na flush je najpomembnejši element plačilne tabele, ki vpliva na strategijo. To pomeni, da imata igri 9/6 in 8/6 zelo podobne strategije. Obstajajo nižji plačilni razporedi od zgoraj navedenih. Prepoznate jih lahko po nižjem donosu. Izogibajte se tem igram.

5 Prva ideja reševanja problema strategij

Kako igre zakonito opredeliti kot igre spretnosti ali igre na srečo? S tem sta se Borm in Dreef ukvarjala že od leta 1997. Na podlagi treh lokalno ekstremnih vrst igralnih sistemov definiramo koncept relativne spretnosti (RS), ki vrača vrednost za igre ruleta, blackjack, poker itd. Igre, ki omogočajo spretno igranje, prejmejo višjo oceno RS kot igre, v katerih naključje prevladuje nad rezultatom.

RS se meri s primerjavo pričakovanih donosov v igri začetnika, optimalne igre in fiktivne igre. Fiktivna igra oz. fiktivni donos, je povprečni donos optimalne igre pri pogoju, da poznamo izzid nakjučnih dogodkov.

$$RS = \frac{\text{donos optimalne igre} - \text{donos začetnika}}{\text{donos fiktivne igre} - \text{donos začetnika}}$$

Obstaja več načinov modeliranja igre začetnika. Opredelimo tri načine:

- Strategija naključne izbire
- Imitacija igralnega sloga začetnikov
- Vnaprej določena strategija, ki v splošnem ni optimalna

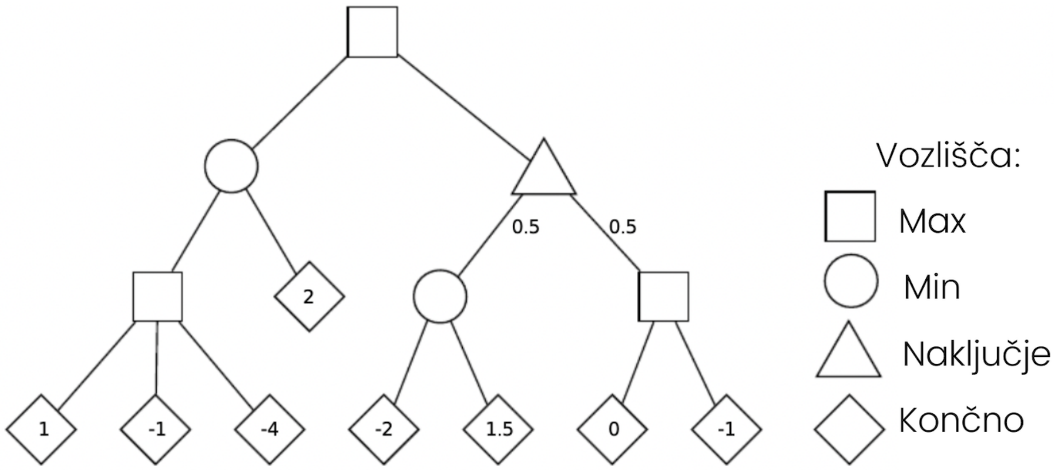
Pristop z uporabo RS enačbe nam ne prinese željenih rezultatov. Modeliranje začetnika je odvisno od subjektivnih presoj raziskovalca. V našem primeru bi primerjali dva različna algoritma med seboj ali uporabili strategijo naključne izbire za donos začetnika. Tudi če predpostavimo, da optimalno vedenje lahko izračunamo z računalniškimi algoritmi v končnem času, pojem "fiktivne igreža izračun ocene RS je v nasprotju z zdravim razumom in izračun je časovno potraten. Moja želja je računsko dokazati, da je donos optimalne strategije večji od začetnišče ali strategije nakjučne izbire, in relativno spretnost, koliko moč izbire vpliva na donos izida, zato bomo uvedli nov pojem igralno drevo.

6 Igralno drevo

Terminska igra (extensive form game) je vrsta igre v teoriji iger, ki je predstavljena z drevesom odločitev. Uporablja se za opisovanje situacij, kjer igralci sprejemajo odločitve na različnih točkah v času (sekvenčno) namesto hkrati. Ponuja podrobnejši opis igre, vključno z vrstnim redom potez, igralci, ki sprejemajo odločitve, njihovimi izbirami in dobitki za vse možne izide igre.

V tem razdelku uvedem potrebne izraze in koncepte za našo razpravo o naključju in donosu. Izhodišče je osrednja terminska igra. Želimo razpravljati o nedeterminističnih igrah z ničelno vsoto dveh igralcev (v našem primeru je drugi igralec računalnik), popolnih informacijah in zaporednih potezah (v našem primeru le ena).

Igra G je predstavljena s končnim drevesom, kot je prikazano na sliki 1. Vozlišča drevesa ustrezajo stanjem igre. Listi drevesa predstavljajo končna stanja igre in so označena z determinističnim rezultatom igre. Rezultat igre je donos igralca Maximum (njegov cilj je maksimirati r). Ker



Slika 1: Primer drevesa z vozlišči

je G igra z ničelno vsoto, drugi igralec Minimum prejme nagrado $-r$. Notranja vozlišča predstavljajo osrednja stanja, ki zahtevajo premikanje. Če stanje igre zahteva "naključno potezo", kot je metanje kocke ali vlečenje kart iz naključnega kompleta, je vozlišče označeno kot "vozlišče naključja". Povezave v drevesu ustrezajo razpoložljivim potezam igralcev ("igralec na potezi") ali naključju ("naključne poteze"). Naključne poteze imajo svojo verjetnost. Za vsako vozlišče priložnosti definiramo $C(s)_i$ kot verjetnost, da se bo naključje premaknilo na i-ega otroka igre.

V našem primeru Video pokra je igra G je podana z nizom $g = (X, Y, (s_0, s_1, \ldots, s_k))$. Igralec X smo mi, ki ga simuliramo z algoritmom Max, kar pomeni optimalna strategija ali algoritmom naključne izbire. Igralec Y je računalnik (kazino), ki ima vlogo igralca Min, prejme nagrago $-r$ in v Video pokru vsebuje le nakjučno potezo, izbiro kart. $(s_0, s_1, \ldots, s_k)$ je pot vozlišč (stanj igre) skozi drevo od korena do listnega (končnega) vozlišča. Igralno drevo, ki simulira video poker vsebuje Max vozlišče, kjer igralec X odvrže nezažaljene karte. Vozlišče naključja, kjer igralec Y z nakjučno potezo izvleče nove karte. Ter končno vozlišče, z končno vrednostjo kart iz plačilne tabele.

Ker nas v tem predelu zanima računalniško izumljanje iger, poimenujmo računalniški algoritm Agent. Uporaba "agenta"poudarja algoritem, ki se uporablja za izpolnjevanje strategije igralca X.

Zadostuje, da so agenti sposobni izbrati svojo potezo iz končnega nabora razpoložljivih potez. Za vsako igro G naj S_G označi množico vseh možnih stanj G. Naj $S_G^{\max} \subseteq S_G$ označi množico vseh stanj, v katerih se giblje igralec Max. Za vsako stanje igre $s \in S_G$ naj $\text{Otroci}(s) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ označuje nabor stanj, ki jih je mogoče doseči z eno zakonito potezo. Agent X, ki lahko igra G kot Max, je funkcija, ki vsakemu stanju $s \in S_G^{\max}$ dodeli diskretno verjetnostno porazdelitev $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ nad otroki.

$$Xs = (p_1, \ldots, p_n), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad |Otroci(s)| = n$$

Naj bo $X(s)i = p_i$ verjetnost, da se bo X premaknil v vozlišče c_i v stanju s. Prav tako agenti, ki lahko igrajo igro G kot Min, zagotavljajo porazdelitve verjetnosti za vsako stanje $\in S_G^{\min}$.

Z uporabo zgoraj definiranih izrazov lahko opišem širok izbor družabnih iger, kot so šah, backgammon, video poker in pachisi (zmanjšano na dva igralca). Če gledamo kot igro za dva igralca med igralcem in banko, je mogoče celo ruleto modelirati v tej terminologiji.

7 Koncept izbire

Ko opisujemo igro G kot igro na srečo ali igro spretnosti, ljudje v svojih strategijah občasno naredijo čustvene odločitve, ki jih je treba upoštevati v metodi ali pa jo uporabimo kot moč zunanjega vpliva pri izbiri igralca. Da se šteje za igro na srečo, mora igra G vključevati nekakšno naključno operacijo, moč izbire ali vozel naključja, in ta operacija mora vplivati na rezultat igre.

Da si igra zasluži oznako "igra spretnosti", mora igralec biti zmožen sprejemati odločitve za dobre ali slabe poteze. Z drugimi besedami, igralci morajo biti sposobni vplivati na rezultate igre s spretnimi odločitvami. Če je rezultat igre pod vplivom naključja in spretnosti, lahko poskusimo primerjati relativno pomembnost. Za znanstveno primerjavo moramo razviti strogo definicijo vpliva.

Kaj pravzaprav je vpliv?

Ko govorimo o vplivu potez (premikov igralca ali naključnih potez), govorimo o njihovem vplivu na rezultat igre. Ena poteza le redko odloča o igri. Namesto tega poteze vodijo do igralnih stanj, v katerih je igralec izboljšal ali zmanjšal povprečni donos igre ali verjetnosti za zmago. Z vidika igralca Maksimum ima pozitiven vpliv, če izboljša njegov položaj in s tem poveča njegovo pričakovano nagrado iz igre.

8 Ocenjevanje pričakovane vrednosti

8.1 Minimax in expectimax

Algoritma minimax in expectimax sta postopka za izračun pričakovane vrednosti vsakega vozlišča.

Za igre z ničelno vsoto za dva igralca, kot je šah, nam minimaks algoritem omogoča izračun teoretične vrednosti vsake pozicije z indukcijo nazaj. Za igre z naključnimi vozlišči algoritem expectimax izračuna pričakovane vrednosti za agente.

$V(c_i)$	Vrednost vozlišča c_i otroka s
$r(s)$	Vrednost končnega vozlišča igre v stanju s
$\max_i V(c_i)$	Maksimalna vrednost izbire vozlišč igre v stanju s
$\min_i V(c_i)$	Minimalna vrednost izbire vozlišč igre v stanju s
$\sum_i C(s)_i V(c_i)$	Vrednost vozlišča naključja

Pričakovana vrednost minimax $V'(s)$ položaja s je podana z rekurzivno formulo:

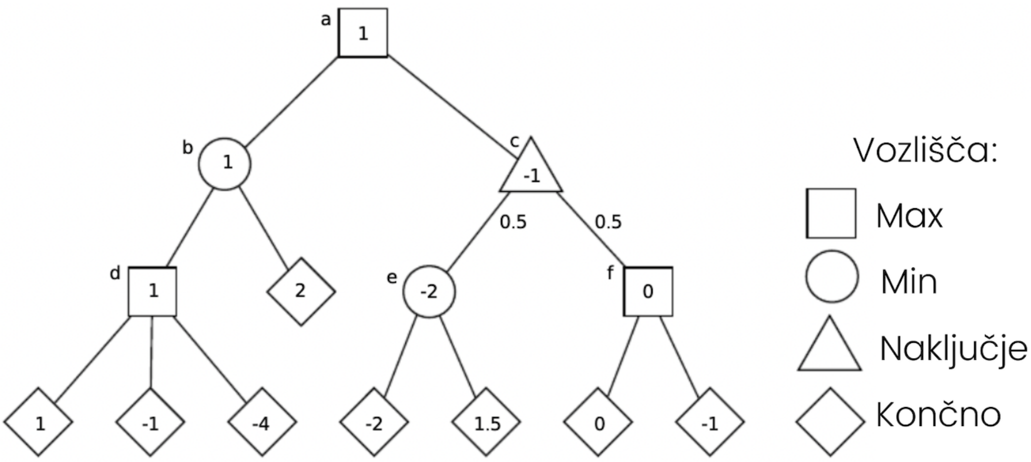
$$V'(s) = \begin{cases} r(s) & \text{če je } s \text{ končni vozel} \\ \max_i V'(c_i) & \text{če je Max na potezi v } s \\ \min_i V'(c_i) & \text{če je Min na potezi v } s \end{cases}$$

Pričakovana vrednost expextimax $V(s)$ položaja s je podana z rekurzivno formulo:

$$V(s) = \begin{cases} r(s) & \text{če je } s \text{ končni vozel} \\ \max_i V(c_i) & \text{če je Max na potezi v } s \\ \min_i V(c_i) & \text{če je Min na potezi v } s \\ \sum_i C(s)_i V(c_i) & \text{če velja moč izbire} \end{cases}$$

kjer je $r(s)$ rezultat igre za končni položaj s, $Children(s) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ in $C(s)_i$ je verjetnost, da naključje izbere c_i. Pri poteku poti iz listov (oz. končnih vozlišč) nazaj proti izhodišču se lahko vrednost expectimax izračuna za vsako vozlišče.

Slika 2 prikazuje vrednosti expectimax za vsa stanja primera igre iz slike 1.



Slika 2: Drevo z vozišči + Expectimax

8.2 Težave ocenjevanja pričakovane vrednost

Minimax in expectimax se pogosto uporabljata za analizo iger. Prav tako sta osnova za številne agente, ki se uporabljajo. Vendar pa imajo v luči naših ciljev pozicijske vrednosti, ki jih izračunajo ti algoritmi, dve pomembni pomanjkljivosti, ki jih pri video pokru ne bomo upoštevali zaradi nizke globine drevesa in igre igralca Y.

- **Težava interpretacije donosa** se pojavi, ko uporabimo vrednosti expectimax pri nepopolnih agentih. Razmislimo o drevesu igre na sliki 2. V korenskem položaju a optimalni agent, ki igra kot Max, premakne na pozicijo b in ima donos $r = 1$. Za tega agenta bi bil prehod v stanje c šlaba"poteza, ker bi njegov pričakovani donos padel z 1 na -1. Če pa je kot Max igral nepopoln agent, se lahko ta ocena spremeni. Razmislite o nepopolnem agentu X, ki ne igra optimalno na položaju d. To bi lahko modelirali kot $X(d) = (0.25, 0.25, 0.5)$. Tako bi imel agent X na položaju d pričakovano nagrado -2. Če nadalje predpostavimo, da X igra optimalno v položaju b in Y igra tudi optimalno, moramo sklepati, da je prehod na b slab za agenta X, medtem ko je prehod na c dober. Predstavljajte si šahovskega mojstra, ki daje nasvete novincu. Strategija queen's gambit, ki bi jo igral šahovski mojster, ni priporočljiva za začetnika, ki ne more izkoristiti situacije. Tako bi bil gambit dobra poteza za mojstra, a slaba poteza za novinca.

- **Praktična uporaba vrednosti expectimax** je dodatno omejena z globino drevesa. Ker expectimax algoritem zahteva oceno skoraj celotnega drevesa, je te vrednosti nemogoče izračunati za kompleksne igre. V praksi se vrednosti expectimax približamo z uporabo hevristike. Hevristične metode so pristopi, ki ponujajo hitre in praktične rešitve za ocenjevanje stanj igre na podlagi prejšnjih izkušenj in splošnih pravil. Namesto iskanja popolne rešitve hevristike uporabijo prejšnje izkušnje in splošna pravila za učinkovito odločanje. Hevristične metode v teoriji iger so lahko zelo učinkovite, vendar jih je treba pogosto prilagoditi za vsako novo igro. Splošni algoritmi igranja iger se izogibajo tej nastavitvi, vendar ne dajejo nikakršnih zagotovil glede točnosti svojih približkov.

9 Relativne pozicijske vrednosti

Definiramo relativno pozicijsko vrednost $\tilde{V}(s, X, Y)$ za stanje igre in agenta X in Y. Izraz relativno poudarja, da je pozicijska vrednost odvisna od agentov.

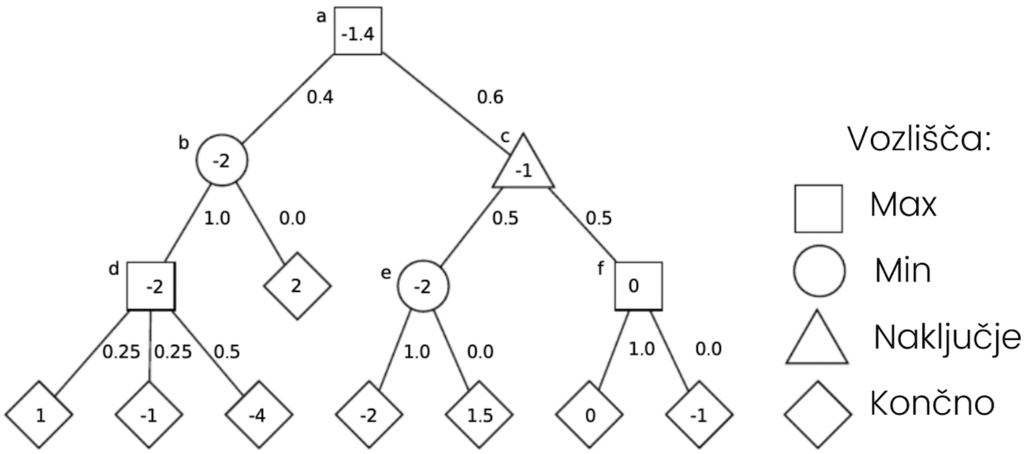
Rezultat ujemanja, ki se začne v stanju s in ga odigrata agenta X (kot Max) in Y (kot Min oz. Naključni izbor pri Video pokru), lahko vidimo kot realizacijo naključne spremenljivke R. Ko je s končno stanje, je realizacija R konstanta. V nasprotnem primeru je vrednost R odvisna od obnašanja igralca X, Y in od naključja. Relativno pozicijsko vrednost definiramo kot pričakovano vrednost R.

$$\tilde{V}(s, X, Y) \equiv \mathbb{E}(R)$$

Slika 3 prikazuje drevo igre z opombami, ki izražajo verjetnosti premikov X in Y in so podane za vsako vozlišče v drevesu. Relativne pozicijske vrednosti za vsako vozlišče v drevesu so bile izračunane z rekurzivno formulo, ki je videti podobna formuli 3, vendar nadomesti minimalna in maksimalna izraza s pričakovanimi izrazi.

$r(s)$	rezultat igre za končno pozicijo s
$X(s)_i$	je verjetnost, da X izbere c_i
$Y(s)_i$	je verjetnost, da Y izbere c_i
$C(s)_i$	je verjetnost nakjučnega izbora c_i
$Children(s)$	$= (c_1, c_2, \ldots, c_n)$
$\tilde{V}(c_i, X, Y)$	Relativno pozicijsko vrednost $\tilde{V}$ v c_i

$$\tilde{V}(s,X,Y) = \begin{cases} r(s) & \text{če je } s \text{ končni vozel} \\ \sum_i X(s)_i \cdot \tilde{V}(c_i,X,Y) & \text{če je } X \text{ (Max) na potezi v } s \\ \sum_i Y(s)_i \cdot \tilde{V}(c_i,X,Y) & \text{če je } Y \text{ (Min) na potezi v } s \\ \sum_i C(s)_i \cdot \tilde{V}(c_i,X,Y) & \text{če velja moč izbire} \end{cases}$$



Slika 3: Vrednosti expectimax za vsa stanja primera igre iz slike 2 in v naprej določenimi verjetnostmi izborov igralcev X in Y.

Natančen izračun vrednosti relativnega položaja je prav tako drag kot izračun pričakovanih vrednosti max.

Vendar pa se je mogoče z Monte-Carlo metodami približati vrednosti relativnega položaja in tako prihraniti računski čas. Naj bo R naključna spremenljivka, ki daje rezultat ujemanja med X in Y v stanju s. Vsaka simulacija takšnega ujemanja prinese realizacijo R_i od R.

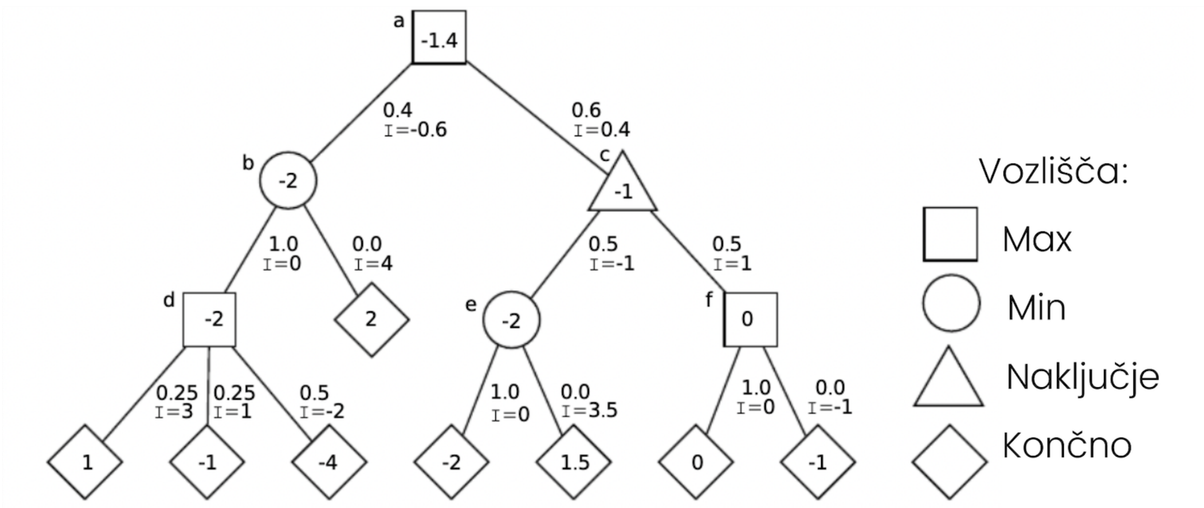
$$\hat{V}(s,X,Y) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i$$

Ker nameravamo uporabiti računalniške algoritme, lahko tako simulacijske igre poljubnokrat ponavljamo (ob zadostni računski zmogljivosti).

Naš koncept relativnih pozicijskih vrednosti nam omogoča, da definiramo vpliv premikov. Naj bo $m = (s, s')$ poteza, ki spremeni položaj s v s_0. Vpliv te poteze v igri med agentoma X in Y definiramo na naslednji način:

$$I(m,X,Y) := \hat{V}(s',X,Y) - \hat{V}(s,X,Y)$$

Ta definicija ne razlikuje med "premiki igralca"in "naključnimi potezami". Slika 4 temelji na istem drevesu igre in agentih kot na sliki 3. Poleg tega prikazuje vpliv vseh potez.



Slika 4: Drevo igre z verjetnostmi premikov, relativnimi pozicijskimi vrednostmi in vplivom I pri vsaki potezi.

9.1 Lema 1: "Deterministične poteze"nimajo vpliva.

Premik $m = (s, s_0)$ imenujemo "deterministični premikža stanje agenta X vedno s, ki mu vedno sledijo specifični premiki. Z drugimi besedami $X(s) = (0 \dots 0, 1, 0 \dots 0)$: premik s_0 sledi z verjetnostjo 1. Kot primer si oglejte potezo (b, d) na sliki 3. Tukaj se agent Y, ki igra kot Min, premakne iz b v d z verjetnostjo 1.

10 Širitev igre drevesa

Razširitev problema G lahko zajema več podproblemov za analizo podatkov in izvajanje strategij v končnem številu vozlišč. Najprej opazimo, da mora biti širitev v dveh različnih pogledih: statični in dinamični. Statična širitev je izračunana vnaprej in neodvisna od podatkov. Dinamična širitev je izračunana med igro in je odvisna od strategij in podatkov.

10.1 Statična širitev igre drevesa

Statična širitev je vnaprej določena in jo je mogoče izračunati.

Na primeru Video poker je Statistična širitev določena enolično do izbora Agenta X, postavimo drevo z vsemi možnimi kombinacijami kart, verjetnost le njih ter verjetnost izbora Agenta X. $\hat{V}(0, X, Y)$ je pričakovan donos igre Video Poker, v splošnem njene različice.

Statistično širitev se uporablja se za ustvarjanje osnovne strukture igra drevesa in določanje vseh možnih potez v igri. Statična širitev se pogosto uporablja pri igrah z veliko možnostmi potez, kot so šah, go in damke. Vendar pa je uporaba statične širitve pri video pokru omejena zaradi velikega števila možnih kombinacij kart.

10.2 Dinamična širitev igre drevesa

Dinamična širitev je prilagodljiva in se izvaja med igro. Odvisna je od trenutnega stanja igre in potez igralcev. Dinamična širitev omogoča prilagoditev strategij glede na realno stanje igre in je bolj učinkovita pri obravnavi kompleksnih iger, kot so poker, blackjack in druge igre s kartami. Uporaba dinamične širitve pri video pokru omogoča bolj natančno analizo in prilagoditev strategij glede na trenutni izbor kart in ne na celotno igro drevesa.

10.3 Strategije za video poker

Strategije za video poker temeljijo na matematičnih izračunih in verjetnostih. Obstaja več različnih strategij, ki jih lahko igralci uporabljajo, da povečajo svoje možnosti za zmago. Nekatere od teh strategij vključujejo:

- **Optimalna strategija**: Igralci uporabljajo matematične izračune in tabele verjetnosti, da sprejemajo najboljše možne odločitve za vsako kombinacijo kart.
- **Strategija izogibanja izgubam**: Igralci se izogibajo tveganim potezam in sprejemajo odločitve, ki zmanjšujejo verjetnost izgub.
- **Agresivna strategija**: Igralci tvegajo in sprejemajo poteze z višjo stopnjo tveganja, da bi povečali svoje potencialne dobitke.
- **Adaptivna strategija**: Igralci prilagajajo svoje poteze glede na nasprotnike in trenutne razmere v igri.

11 Relativni vpliv naključnosti

V prejšnjem razdelku smo definirali vpliv $I(m, X, Y)$ poteze m v igri med agentoma X in Y. S to definicijo lahko primerjamo vpliv naključnih potez z vplivom premikov igralca na rezultat igre G.

Naj bo $g = (X, Y, (s_0, s_1, \ldots, s_n))$ ujemanje igre G med X in Y (kjer X igra kot Max in Y kot Min). Označimo premik (s_i, s_{i+1}). Rezultat g je relativna vrednost njegovega končnega položaja $\tilde{V}(s_n, X, Y)$. Ker vrednost terminalskega stanja igre ni več odvisna od agentov, sta relativna pozicijska vrednost in pričakovana vrednost max enaka, zato je $\tilde{V}(s_n, X, Y) = V(s_n)$. Z našo definicijo vpliva lahko izrazimo rezultat g kot vpliv gibov s_i.

Lema 2:

$$V(s_n) = \tilde{V}(s_n, X, Y) = \tilde{V}(s_0, X, Y) + \sum_{i=0}^{n-1} I(m_i, X, Y)$$

Lema 2 pojasni, kako skupni vpliv vseh potez vodi do rezultata tekme g. Izraz $\tilde{V}(s_0, X, Y)$ je poseben, ker ne gre za vpliv giba, temveč za pričakovano vrednost začetnega položaja. $V(s_n)$ odraža pravičnost igre G v kombinaciji z razliko v spretnostih agentov X in Y. $\tilde{V}(s_0, X, Y)$ imenujemo pričakovano ujemanje oz. ME. Vse poteze, ki so bile narejene v g, lahko združimo. To omogoča uporabo niza igralčevih potez M_P in niza naključnih potez M_C.

$$M_P = \{(s_i, s_{i+1}) \mid \text{Max ali Min za premikanje v } s_i\}$$
$$M_C = \{(s_i, s_{i+1}) \mid \text{verjetnost premika v } s_i\}$$

Nabori M_P in M_C nam omogočajo, da seštejemo kombinirane vplive potez igralca in naključnih potez v I_P in IC:

$$I_P = \sum_{m \in M_P} I(m, X, Y)$$
$$I_C = \sum_{m \in M_C} I(m, X, Y)$$

Ujemanje g pomeni izbor vozlišč na našem igralnem drevesu. Nabori množic M_P, M_C in vrednosti ME, I_P, I_C so vse odvisne od konkretnega ujemanja g.

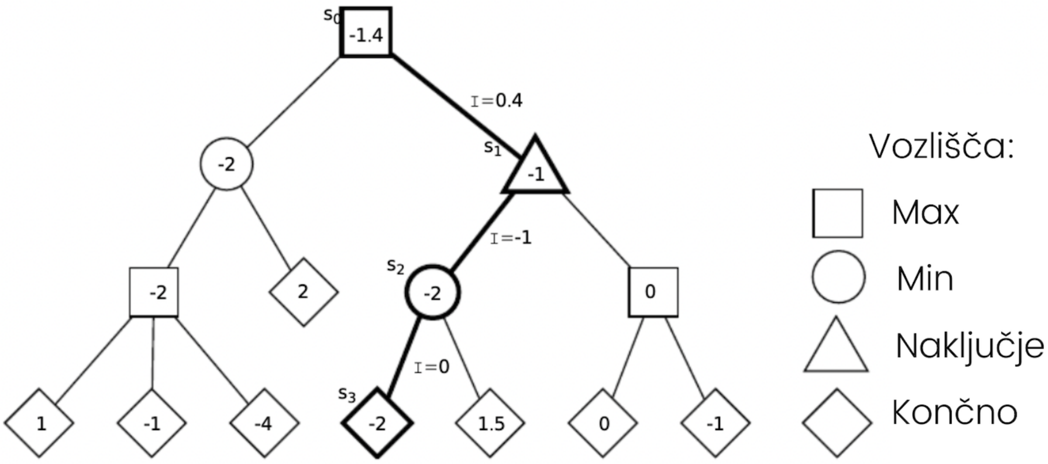
Lemo 2 lahko zdaj preformuliramo kot:

$$V(s_n) = ME + I_P + I_C$$

Na podlagi teh izrazov definiramo $c(g)$, relativni vpliv naključja na rezultat tekme g.

Definicija:

$$c(g) := \frac{I_C}{|ME| + |I_P| + |I_C|}, \quad \text{če } |ME| + |I_P| + |I_C| \neq 0$$



Slika 5: Drevo igre in ujemanje (pot) v drevesu z vplivom naključja za agenta X in Y

Slika 5 prikazuje zgledno ujemanje $g = (X, Y, (s_0, \ldots, s_3))$. Opažamo, da velja lema 2:

$$V(s_3) = -2 \quad ME = -1.4 \quad I_P = 0.4 \quad I_C = -1$$
$$-2 = -1.4 - 1 + 0.4$$

Izračunamo relativni vpliv naključja za g:

$$c(g) = \frac{I_C}{|ME| + |I_P| + |I_C|} = \frac{-1}{1.4 + 1 + 0.4} \approx 0.36$$

Lastnosti $c(g)$: Za ujemanje $g = (X, Y, (s_0, \ldots, s_n))$ je relativni vpliv naključja $c(g)$ realno število iz intervala $[0, 1]$. Analiziramo lahko, kako na komponente definicije $c(g)$ vplivajo lastnosti ujemanja in kako vplivajo na vrednost $c(g)$.

- I_C: Če igra ne dopušča naključnih potez, bo vpliv naključja I_C enak nič za katero koli igro ujemanja in $c(g)$ bo posledično tudi nič. Za igro, ki dopušča naključne poteze, se bo I_C na splošno razlikoval od tekme do tekme. Pri nekaterih tekmah je lahko še vedno nič (ali blizu nič), če se vpliv naključnih potez izniči.

- $\boldsymbol{I_P}$: Izraz I_P količinsko opredeljuje skupni vpliv igralcev za tekmo g. Medtem ko so igre brez naključnih potez pogoste, so igre brez potez igralca redke in v večini sploh niso prepoznane kot "igre". V splošnem obstajajo tudi poteze igralcev, ki ne vplivajo na rezultat igre.

- $\boldsymbol{ME}$: Pričakovano ujemanje ME je opredeljeno kot pričakovani rezultat ujemanja (začetek v korenski poziciji) med določenimi agenti. Njena vrednost ni odvisna od potez tekme, ker imajo vse tekme v igri isti korenski položaj.

Kot izjemna posledica združevanja razlike v spretnostih in asimetrije igre v izrazu ME je vrstni red igralcev relevanten za vrednost $c(g)$. V splošnem je $|ME(G, X, Y)| \neq |ME(G, Y, X)|$. Da bi to razumeli, si moramo predstavljati asimetrično igro G (favoriziranje igralca Max) izkušenega agenta X in manj usposobljenega agenta Y. Če X igra kot Max, bo ME visok, ker močnejši agent igra v ugodnem položaju. Če bo X igral kot Min, bo ME bližje nič, ker se razlika med spretnostmi in asimetrija igre medsebojno izničita.

12 Moč naključja

V prejšnjem razdelku smo definirali relativni vpliv naključja za analizo določene tekme igre G. Analiza več tekem se lahko združi, da prikažemo lastnosti celotne igre G. Preden agenta X in Y odigrata serijo tekem igre G, so poteze, ki bodo izvedene, in rezultat tekme na splošno neznani. Ker so premiki in rezultat odvisni od stohastičnih procesov, opredelimo ME, I_P, I_C in prav tako relativni vpliv naključja $c(g)$ kot naključne spremenljivke. Morda se zdi intuitivno opredeliti naključje kot pričakovano vrednost $c(g)$, vendar to vodi do kontraintuitivnih rezultatov za nekatere igre. Predstavljajte si igro G z naslednjo strukturo:

$$c(g) = \frac{\epsilon}{\epsilon + \epsilon \cdot 10^{-10}} \approx 1 \quad \text{za 90 \% ujemanj}$$
$$c(g) = \frac{\epsilon}{\epsilon + \epsilon \cdot 10^{10}} \approx 0 \quad \text{za 10 \% ujemanj}$$

Primer ujemanja pri razporeditvi kart A kara K kara Q kara P kara 10 pik je v 99% primerih bolje držati vseh 5 kart a v 1% in povprečju ravilno, da odvržeš T pik v upanju za Kraljevo Lestvico.

Večina ljudi bi intuitivno pričakovala, da bi naša naivna definicija naključnosti tej situaciji dodelila vrednost ≈ 0.9. To je nezaželeno, ker je dolgoročni rezultat serije tekem precej neodvisen od naključja ujemanj.

Da bi se izognili tej težavi, definiramo naključje C kot igro, ki jo igrata X in Y kot tehtano pričakovanje relativnega vpliva naključja.

$$C(G,X,Y) = \mathbb{E}\left(\frac{|I_C|}{|ME| + \mathbb{E}(|I_P|) + \mathbb{E}(I_C)}\right)$$

Vsaka tekma poveča naše znanje o igri G. Pridobitev znanja se razlikuje glede na imenovalec $ME + |I_P| + |I_C|$. Če je imenovalec enak nič, ne pridobimo nobenega znanja o G (in tako je $c(g)$ nedefiniran). Zato svoje vrednosti $c(g)$ tehtamo s tem imenovalcem, preden jih združimo v definiciji moči naključja.

$$w(g) := |ME| + |I_P| + |I_C|$$

$$C(G,X,Y) := \frac{\mathbb{E}(c(g) \cdot w(g))}{\mathbb{E}(w(g))} = \frac{\mathbb{E}(|I_C|)}{|ME| + \mathbb{E}(|I_P|) + \mathbb{E}(I_C)}$$

Posamezne tekme, pri katerih relativni vpliv naključja $c(g)$ ni definiran, ker je $w(g)$ enak nič, ne predstavljajo težav s to definicijo naključnosti. Teoretično bi lahko bil imenovalec moči naključja tudi nič. Po našem mnenju tudi to ni problem, saj so igre, kjer so ME, $\mathbb{E}(|I_P|)$ in $\mathbb{E}(I_C)$ vse enake nič, precej nezanimive. $\mathbb{E}(|I_C|) = 0$ pomeni, da je I_C vedno enak nič, to pomeni, da je donos izida igre neodvisen od Vezlišč naključja. Izizidi Vezlišč naključja so nesmiselna za izid igre. Podobno $\mathbb{E}(I_P) = 0$ pomeni, da je I_P vedno enak nič in je zato vsaka poteza igralca bodisi deterministična ali nesmiselna za izid igre.

Naša moč naključja $C(G,X,Y)$, opredeljena zgoraj, meri nagnjenost ujemanj k (relativno) naključnemu vplivu. Priložnost za določeno igro in določene agente je mogoče natančno izračunati z izračunom vpliva in verjetnosti vsake možne poteze v G. Za igro in agente iz diagrama 4 dobimo naključje ≈ 0.197.

Iz očitnih razlogov ta izčrpna metoda izračunavanja hitro postane neizvedljiva, če upoštevamo drevesa večjih stopenj. Pomagamo si s uporabo vzorčenja Monte-Carlo. Odigranih je število tekem g_i in tehtano vzorčno povprečje $c(g_i)$ se vzame kot približek naključnosti.

$$C(G,X,Y) \approx \frac{\sum_i c(g_i) \cdot w(g_i)}{\sum_i w(g_i)}$$

13 Video Poker strategija

Za začetek bomo uporabili strategijo, ki jo semi-profesionalci, vključno z mano, uporabljajo za igranje video pokra. Imamo strategijo za igro 9/6 Jacks or Better. Začnimo z nekaj posebnostmi te igre, ki jih pri večini drugih ne najdemo.

Za lažjo beljivost bom uporabil kratice barv kart: h za srce, c za križ, d za karo in s za pik in kratice vrednosti kart: T za deset, J za poba, Q za damo, K za kralja in A za as.

- Ko imate tri visoke karte Kh Qh Jd, je prva stvar, ki jo iščete, ali so v dveh ali večih barvah. Če je res, držite visoke karte v barvi Kh Qh. Če ne, je edina kombinacija vseh treh, ki jih imate, Kd Qh Js;.
- Nikoli ne držite 'A T'. Vse druge Kraljeve Lestvice iz dveh kart so primerni za izbor, a ker ne morete dobiti (nekraljevskih) lestvic iz 'A T' in je edina lestvica, ki jo lahko dobite, A K Q J T, te kombinacije nikoli ne obdržite. Držite 'A H' (H kot high oz. visok) (kar pomeni 'AK', 'AQ' in 'AJ'). Razlika med 'AK' in 'AT' je v tem, da ti pari imajo pozitiven donos, par T T pa ne.
- Kadar koli kombinacija vsebuje barvno lestvico z tremi kartami (ne glede na to, koliko visokih kart je v kombinaciji ali lukenj v notranjosti), vedno držite četrto karto, če bo ustvarila barvno lestvico s 4 kartami ali 4-kartno barvo brez notranjosti.

Oglejmo si zaporedje možnih rok. V primeru, da imamo izbiro višjo v lestvici, da držimo karte višje številke, obdržimo njih.

14 Uporaba metode Monte Carlo

V tej nalogi bomo uporabili metodo Monte Carlo za simulacijo različnih strategij igranja video pokra. Metoda Monte Carlo je matematična tehnika, ki uporablja naključne vzorce za približevanje rešitvam kompleksnih problemov. Uporablja se na različnih področjih, kot so fizika, finance in igre na srečo.

Pri uporabi metode Monte Carlo za analizo video pokra bomo izvedli več tisoč simulacij iger, pri katerih bomo uporabili različne strategije. Vsaka simulacija bo vključevala naključno porazdelitev kart in izračunavanje donosov glede na uporabljeno strategijo.

Na podlagi rezultatov simulacij bomo analizirali vpliv različnih strategij na donos pri video pokru. Primerjali bomo skoraj optimalno strategijo

Strategija	Št. Pojavov	Povprečni Donos
KRALJEVA LESTVICA	4	4000.00000000
BARVNA LESTVICA	36	250.00000000
ŠTIRI ENAKE	624	125.00000000
4 od KRALJEVE LESTVICE	936	93.52109500
POLNA HIŠA	3744	45.00000000
BARVA	4952	30.00000000
TRI ENAKE	54912	21.51248800
LESTVICA	10128	20.00000000
4 od BARVNE LESTVICE	5088	13.12951600
DVA PARA	123552	12.97872300
VISOK PAR J-A	337464	7.68270100
3 od KRALJEVE LESTVICE	27492	6.99942200
4 od BARVE 2h; 1h; 0h	86376	6.08795000
4 od LESTVICE 3h KQJT	5964	4.36170200
NIZKI PAR 2-T	733140	4.11840900
4 od LESTVICE	13008	3.87944600
3 od BARVNE LESTVICE	2304	3.64636300

Tabela 2: 9/6 Strategija Jacks or Better iz wizardofodds.com, potrjena z simulacijo

z drugimi strategijami, kot so strategija izogibanja izgubam, začetniška strategija in naključna strategija.

14.1 Postopek simulacije

1. Definiramo skoraj optimalno strategijo in jo potrdimo z simulacijo.

2. Definiramo začetne pogoje za simulacijo.

3. Uporabimo generator naključnih števil za simulacijo porazdelitve kart pri vsaki igri.

4. Izračunamo donos za vsako igro glede na uporabljeno strategijo.

5. Ponavljamo korake 2 in 3 za več tisoč iger.

6. Analiziramo rezultate simulacij. Primerjamo Donosnost in Moč naključja različnih strategij.

7. Primerjamo analizo z konceptom relativne spretnosti.

14.2 Rezultati simulacije

Rezultati simulacij so predstavljeni v obliki tabel in grafov. Očitno je dobra strategina boljša od naključne ali začetniške strategije in slabša od fiktivne strategije.

- Fiktivna strategija je optimalna strategija pod pogojem, da poznamo zaporedje naključno porazdeljenih prihodov kart.
- Dobra strategija je strategija, ki upošteva izbor iz tabele 2.
- Naključna strategija naključno izbere izbor kart.
- Amaterska strategija je strategija ki obdrži pare kart ali karte višje od 10.
- Osnovna strategija obdrži karte višje od 10.
- Slaba strategija odvže kar Dobra strategija obdrži.

Rezultati simulacij jasno kažejo, da je moč naključja pri različnih strategijah igranja različna. Spodaj so prikazane vrednosti moči naključja, s povprečnimi donosi in relativno spretnostjo.

Strategija	Povprečni Donos	Moč Naključja	RS
Fiktivna	13.0091	0.0252	1
Dobra	0.8815	0.2782	0.0428
Amaterska	0.8465	0.2847	0.0401
Osnovna	0.8387	0.2863	0.0395
Naključna	0.3380	0.4988	0
Slaba	0.2196	0.6029	-0.0093

Tabela 3: Moč Naključja, Povprečni Donosi in Relativna Spretnost

Analiza moči naključja med temi strategijami razkriva pomembne ugotovitve:

- Vidimo, da je spretnost v igri pomembna, ker spretnost vpliva na povprečni donos.
- Moč naključja in relativna spretnost je odvisna on povprečne donosnosti strategij.
- Video poker je igra pri kateri vpliva spretnost, oziroma moč izbire, ker se moč nakjučja razlikuje od 0.5 in relativna spretnost od 0.

15 Zaključek

V tej nalogi smo raziskali vpliv različnih strategij na donos pri igranju video pokra. Uporabili smo metode matematične analize, simulacije in metodo Monte Carlo za oceno učinkovitosti različnih strategij. Naša analiza je pokazala, da lahko izbira strategije močno vpliva na donosnost igre.

Dobra strategija, ki temelji na matematičnih izračunih in verjetnostih, se je izkazala za najboljšo v smislu dolgoročne donosnosti.

Simulacije so pokazale, da je uporaba metode Monte Carlo koristna pri analizi iger na srečo, saj omogoča natančno oceno donosnosti različnih strategij.

Prihodnje raziskave bi lahko vključevale analizo drugih vrst iger na srečo in uporabo naprednih algoritmov strojnega učenja za implementacijo na področjih iger z neskončnim številom potez, kot je na primer delniški trg. Prav tako bi bilo koristno raziskati vpliv psiholoških dejavnikov na izbiro strategij in uspešnost igralcev.

Na koncu lahko rečemo, da je izbira prave strategije ključna za uspeh pri video pokru ali drugih iger na srečo. Uporaba matematičnih metod in simulacij lahko igralcem pomaga pri sprejemanju boljših odločitev in poveča možnosti za zmago.

Zame to ni le teorija, to igro sem igral in se dobro imel. Zdaj sem opustil Video poker, ker mi kupovanje in prodaja delnic predstavlja nov izziv. Na naslednji strani priladam sliko popisa moje igre.

Dne 10.10.2020 sem prigral 3600 evrov, kar je 300 evrov več kot izračunan povprečni donos in to je zadnji dan, ko kazino ponudil ogromno promocijo 1000 evrov za 1300 evrov v enem kuponu.

Kazinoji imajo promocije, ena izmed njih je, zamanjaj 100$ za kupon v vrednosti 140$, katerega je potrebno vsaj enkrat preigrat preden je izplačjiv. Spodaj je prikazana tabela moje igre v letu 2020.

Dan/Nakup	Kazino, kraj	Plačal za kupon	Vrednost Kupon	Prejel izplačano
17.8.20	Lev	240.0€	310.0€	293.5€
17.8.20	Lev	100.0€	130.0€	127.5€
17.8.20	Lev	105.0€	130.0€	131.5€
26.8.20	Lev	340.0€	440.0€	421.5€
27.8.20	Kongo	100.0€	135.0€	172.0€
28.8.20	Kongo	40.0€	55.0€	39.1€
29.8.20	Carneval	40.0€	50.0€	67.5€
30.8.20	Carneval	40.0€	55.0€	55.0€
31.8.20	Carneval	40.0€	50.0€	43.0€
31.8.20	Lev	100.0€	130.0€	118.0€
6.9.20	Lev	120.0€	160.0€	181.5€
9.9.20	Kozina	100.0€	120.0€	148.0€
10.9.20	Kozina	300.0€	335.0€	302.0€
14.9.20	Lev	100.0€	130.0€	121.5€
21.9.20	Lev	60.0€	80.0€	65.5€
24.9.20	Lev	300.0€	330.0€	328.5€
29.9.20	Lev	60.0€	80.0€	75.5€
5.10.20	Kongo	400.0€	520.0€	520.0€
6.10.20	Lev	1,400.0€	1,820.0€	1,626.0€
8.10.20	Lev	1,000.0€	1,200.0€	1,108.5€
8.10.20	Lev	2,000.0€	2,400.0€	2,341.0€
9.10.20	Kongo	2,000.0€	2,400.0€	3,629.5€
10.10.20	Lev	1,000.0€	1,300.0€	1,270.0€
9.10.20	Rio	200.0€	280.0€	317.5€
10.10.20	Lev	6,000.0€	7,800.0€	7,810.0€
10.10.20	Lev	5,000.0€	6,500.0€	6,305.0€
12.10.20	Lev	300.0€	360.0€	360.0€
12.10.20	Rio	100.0€	140.0€	161.0€
16.10.20	Rio	200.0€	280.0€	235.0€

Slika 6: Prikaz uporabe strategije na Promocijah

Literatura

[1] Jakob Erdmann. *Towards a Characterization of Chance in Games*. ICGA Journal, 32, 187-205, 2009. https://doi.org/10.3233/ICG-2009-32402.

[2] Ervin Melkó and Benedek Nagy. *Optimal strategy in games with chance nodes*. Acta Cybern., 18, 171-192, 2007.

[3] Zachariah Miller. *Can you beat Video Poker?*. Retrieved from http://zwmiller.com/projects/notebooks/video_poker.html, 2018.

[4] Zachariah Miller. *Monte Carlo Part 3*. Retrieved from http://zwmiller.com/projects/monte_carlo_part3.html, 2018.

[5] BradAJ. *Video Poker Analyzer*. Retrieved from https://github.com/BradAJ/video_poker_analyzer.

[6] BlackPhoenixSlo. *Koda za izračun Moči verjetnosti*. Retrieved from https://github.com/BlackPhoenixSlo/diplomaka_video_poker/tree/main.

[7] Udemy. *Video predstavitev in dnevnik moje igre v letu 2020*. Retrieved from https://www.udemy.com/course/beat-the-casino.

[8] Wizard of Odds. *Video Poker Strategy Tables*. Retrieved from https://wizardofodds.com/games/video-poker/strategy/tables/.