北京理工大学 2007-2008 学年第二学期

2006 级概率论与数理统计试题（A 卷）

（本试卷共 8 页，七个大题，满分 100 分；）

附表：φ（1.96）=0.975，φ（1.79）=0.9633, $t_{0.025}$（9）=2.2622, $t_{0.05}$（9）=1.833,

$X^2_{0.05}$（9）=16.919, $X^2_{0.95}$（9）=3.325

一、（12 分）有三个口袋，在家袋中装有 2 只白球和 3 只红球；乙袋中装有 4 只白球和 1 只红球；丙袋中装有 3 只白球和 4 只红球。随机地选取一个口袋并从中随机地区出一只球。

（1）求取出的糗事白球的概率；

（2）若已知取出的球是白球，求它是来自甲袋的概率。

二、（14 分）设随机变量 X 服从数学期望为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布。

（1）写出 X 的概率密度；

（2）求 P(X>1|X<3);

（3）令 Y=1-e^{-2x}，求 Y 的概率密度。

三、（18 分）设二维随机变量（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

（1）确定常数 A;

（2）求 X,Y 的边缘概率密度 f_x（x）， f_Y（y）;

（3）判断 X 与 Y 是否相互独立，说明理由；

（4）求随机变量 Z=X+Y 的概率密度函数。

四、(18 分)设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{4}y, & 0<y<x<2;\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(1)求 E(X),E(Y);

(2)求协方差 cov(X,Y);

(3)求相关系数 ρ_{xy}。

五、(8 分)设独立同分布,有共同的概率分布列

x	0	1	2	3
y				

计算概率 1 以下的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X^2{}_i$。

六、(18 分)设 $X_1,\ldots,X_n$ 是取自正态分布总体 N(μ,1)的一个样本,其中-∞<μ<+∞为未知参数

(1)求参数μ 的矩估计;

(2)求参数μ 和θ =E(X^2)的最大似然估计;

(3)若样本容量 n=4,测得样本均值为 $\overline{X}_n$=15,求μ 的置信水平为 95%的置信区间。

七、(12 分)某厂用包装机包装食盐，假设每袋净重 X~N（μ，σ^2）。在正常情况下，每袋净重为 1000 克，标准差不能超过 15 克。某天为检查机器工作是否正常，随机抽取 10 袋得其净重的均值 $\overline{X}$ =998，$s^2=30.23^2$ 。问该天包装机方差是否正常？（α =0.05）

07-08-2-（A 卷）参考答案：

一、解：A_1={选取的口袋是甲袋}；A_2={选取的口袋是乙袋}；A_3={选取的口袋是丙袋}；

B={取出的球是白球}。

（1） 根据全概率公式可得所求的概率为

$$P（B）=\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i)$$

由题意知

$$P（A_1）=P（A_2）=P（A_3）=\frac{1}{3} \qquad P（B|A_2）=\frac{4}{5} \qquad P（B|A_3）=\frac{3}{7}$$

将这些代入上面的全概率公式和所求的概率为

$$P（B）=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{19}{35}=0.5429.$$

（2） 根据 Bayes 公式可得所求的概率为

$$P（A_1|B）=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}}=\frac{14}{57}=0.2456.$$

二、解：（1）X 的概率密度

$$f_x（X）=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

（2） P(X>1|X<3)=, $\frac{P(1<X<3)}{P(X<3)}=\frac{\int_1^3 2e^{-2x}dx}{\int_0^3 2e^{-2x}dx}=\frac{\int_1^3 2e^{-2x}dx}{\int_0^3 2e^{-2x}dx}=\frac{e^{-6}-e^{-2}}{e^{-6}-1}$

（3） 由 Y=1-e^{-2x}，且 y' =2e^{-2x}>0 可知，y 是单调增函数，其反函数为

x=-$\frac{1}{2}\ln(1-y)$，$x'=\frac{1}{2(1-y)}$，故 Y 的概率密度

$$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2[-\frac{1}{2}\ln(1-y)]}\left|\frac{1}{2(1-y)}\right|, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2(1-y)\frac{1}{2(1-y)}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

三、解：

（1）$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$

$$1=\iint\limits_{0<x<y} Ae^{-y}dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{y} Ae^{-y}dxdy = A\int_0^{\infty} ye^{-y}dy = A$$

或$= A\int_0^{\infty}\int_x^{\infty} e^{-y}dydx = A\int_0^{\infty} e^{-x}dx = A$

所以 A=1

（2）$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

当 x>0 时，$f_x(x) = \int_x^{\infty} e^{-y}dy = e^{-x}$

当 x≤0 时，$f_x(x) = 0$

$$f_x(x)=\begin{cases} e^{-s}, x<0 \\ 0，\quad 其他 \end{cases}$$

或　$f_x(x)=\bar{e}^{x}$ ，x

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

当 y>0 时，$f_Y(y) = \int_0^{y} e^{-y}dx = ye^{-y}$

当 y ≤0 时，$f_Y(y) = 0$

$$f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, y>0 \\ 0 \quad，其他 \end{cases}$$

或　$f_Y(y) = ye^{-y}, y>0$

（4）　X 与 Y 不相互独立

因为 $f(x,y) \neq f_x(x)f_y(y), (x,y)\in D,$

其中 D={（x，y）|0<x<y}

- - 5 - -四、解：（1）$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy = \int_0^2 dx\int_0^x x\frac{3}{4}ydy = \int_0^2 \frac{3}{8}x^3dx = \frac{3}{2}$；

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy = \int_0^2 dx\int_0^x y\frac{3}{4}ydy = \int_0^2 \frac{1}{4}x^3dx = 1；$$

（2）$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^2 dx\int_0^x xy\frac{3}{4}ydy = \int_0^2 \frac{1}{4}x^4dx = \frac{8}{5}$；

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{5}{8}-\frac{3}{2}=\frac{1}{10}。$$

（3）

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^x x^2\frac{3}{4}ydy=\int_0^2\frac{3}{8}x^4dx=\frac{12}{5};$$

$$E(y^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^2 f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^x y^2\frac{3}{4}ydy=\int_0^2\frac{3}{16}x^4dx=\frac{6}{5};$$

所以 $Var(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{12}{5}-(\frac{3}{2})^2=\frac{3}{20}$,

$$Var(Y)=E(Y^2)-(EY)^2=\frac{6}{5}-(1)^2=\frac{1}{5}$$

故 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\sqrt{\frac{3}{20}\times\frac{1}{5}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

五、解：由大数律有：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i=EX^2,wpl$，

又由 EX^2=3，

可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i=3$

六、解：（1）由于 $\mu=EX$ ，以 $\bar{X}_n$ 代替 μ 得 μ 的矩估计为 $\hat{\mu}=\bar{X}_n$

（2）X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\}$$

似然函数为

$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2\}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\mu)=-n\ln(\sqrt{2\pi})-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

对 μ 求导并令其为零，既得

$$\frac{d\ln L}{d\mu}=\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu=0$$

解得 μ 的最大似然估计为 $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}_n$

由于 $\theta=E(X^2)=Vat(X)+(EX)^2=1-\mu^2$，

因此 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}$=1+ $\bar{X}_n{}^2$

（3）由于 μ 的置信水平 1-α 的置信区间为[$\bar{X}_n-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}_n+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha-2}$],这里

1-α =0.95，因此 $\frac{\alpha}{2}$ =0.025， $z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}$ =1.96，又 n=4， $\bar{X}_n$ =15，

代入得到 μ 的置信水平为 95%的置信区间为

$$[15-\frac{1}{\sqrt{4}}1.96,15+\frac{1}{\sqrt{4}}1.96]=[15-0.98,15+0.98]=[14.02,15.98]$$

七、解：

设 $H_0:\sigma^2\le 225;H_1:\sigma^2>225$

取统计量 $x^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim x^2(n-1)$

拒绝域 $\chi^2\ge\chi^2_{0.05}(9)=16.919$

$$\chi_0^2=\frac{9\times(30.23)^2}{15^2}=36.55>16.919$$

落在拒绝域内，故拒绝 H_0

改天包装机方差不正常