Прежде, чем пояснять лабораторную работу, придется «вспомнить» много разных вещей..))

1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

(вспомните, кстати, что такое ВЕЛИЧИНА и что такое ЗНАЧЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ)

Определение 1. Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.
Определение 2. Случайная величина – переменная, значения которой представляют собой численные исходы некоторого случайного феномена или эксперимента. Другими словами, это численное выражение результата случайного события.
Сравните эти определения. Оба они правильные, но первое более конкретное, математическое, я бы сказал. Второе – более общее, общенаучное, что ли.

Случайные величины, как правило, обозначают через X, Y, ..., а их значения – соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например, x_1, x_2....
Вероятность того, что случайная величина X примет значение x_1 обозначают:
$P(X=x_1)=p_1$.
Случайные величины (СВ) задают законами распределения.
Закон распределения СВ – это соответствие, установленное между возможными значениями СВ и вероятностями их появления.

Случайные величины целесообразно разделить на 2 большие группы:
1) Дискретная (прерывная) случайная величина – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений конечно либо бесконечно, но счётно (то есть их можно нумеровать натуральными числами).
2) Непрерывная случайная величина – принимает **все** числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Понятно, что **всех** значений бесконечно много.
Закон распределения дискретной случайной величины – это соответствие между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей:

X	x_1	x_2	……..	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	……..	p_n

Зная закон распределения, мы можем всегда найти вероятность любого события, которое есть в нашем списке.
А теперь очень важный момент: поскольку случайная величина обязательно примет одно из значений, то соответствующие события образуют полную группу и сумма вероятностей их наступления равна единице: $p_1+p_2+...+p_n=1$.

Замечание: под обозначениями x_1, x_2,..., x_n можно подразумевать и такие **события**, как, например, попадание значения переменной x в определённый интервал $a \leq x < b$ – это вполне себе событие. Нам это уточнение еще пригодится!

2. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Аналитику часто необходимо знать, насколько вероятны те или иные события, – например, процент изменения банковской ставки, понижение или повышение спроса и т.п. Если события несовместны (не могут происходить одновременно), то можно каждому событию приписать (на основании прошлого опыта, хотя бы) вероятность его появления. Рассмотрим функцию $F(x)$, определенную на всей числовой оси следующим образом: для каждого x значение $F(x)$ равно вероятности того, что случайная величина γ примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x)=p(\gamma<x) \qquad (1)$$

Эта функция называется **функцией распределения вероятностей**, или кратко, функцией распределения (ФР).

ФР однозначно задает распределение вероятностей случайной величины. Фактически, она является универсальным и наиболее наглядным способом описания этого распределения.

ФР показывает, что вероятность того, что случайная величина примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем переменная (которая «пробегает» все значения от «минус» до «плюс» бесконечности). Из определения функции распределения вытекает, что вероятность попадания случайной величины **в интервал**, замкнутый слева и открытый справа, равна:

$$\mathbf{P\ (a\leq x<b)= F(b)-F(a)} \qquad (2)$$

Рассмотрим «гладкую» ФР –, то есть такую, у которой нет скачков.

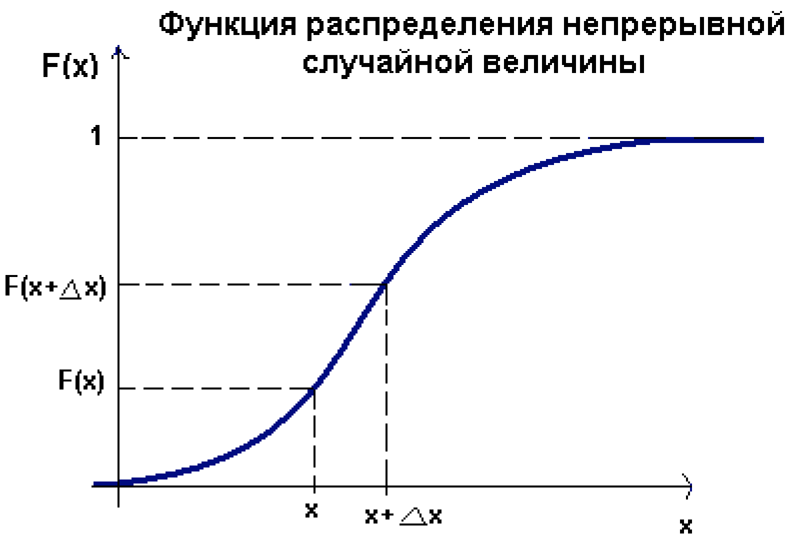


Рис. 1.

Рисунок 1 хорошо иллюстрирует смысл формул (1) и (2).

Заметим, что:

1. ФР учитывает **все** значения, которые В ПРИНЦИПЕ может принять произвольная случайная величина.
2. С увеличением значения аргумента ФР «накапливает» (суммирует) вероятности, а значит, является неубывающей и изменяется в пределах от 0 до 1. По этой причине её иногда называют **интегральной функцией распределения**.
3. Вероятность появления любого возможного значения для непрерывной величины **равна нулю (подумайте, почему так)**. Выражение $P\{X=x\}=0$ следует понимать как предел вероятности попадания непрерывной случайной величины в бесконечно ма-

лую окрестность точки *x*.

Теперь приведу пример ФР, которая представлена ступеньками:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le -2\\ 0{,}4, & \text{если} \quad -2<x\le 0\\ 0{,}5, & \text{если} \quad 0<x\le 3\\ 0{,}8, & \text{если} \quad 3<x\le 7\\ 1, & \text{если} \quad x>7\end{cases}$$

// ФР **всегда непрерывна**, именно поэтому в каждом неравенстве с одной стороны интервал открыт (знак «строго меньше» //

А вот её график, с которым нам нужно поработать

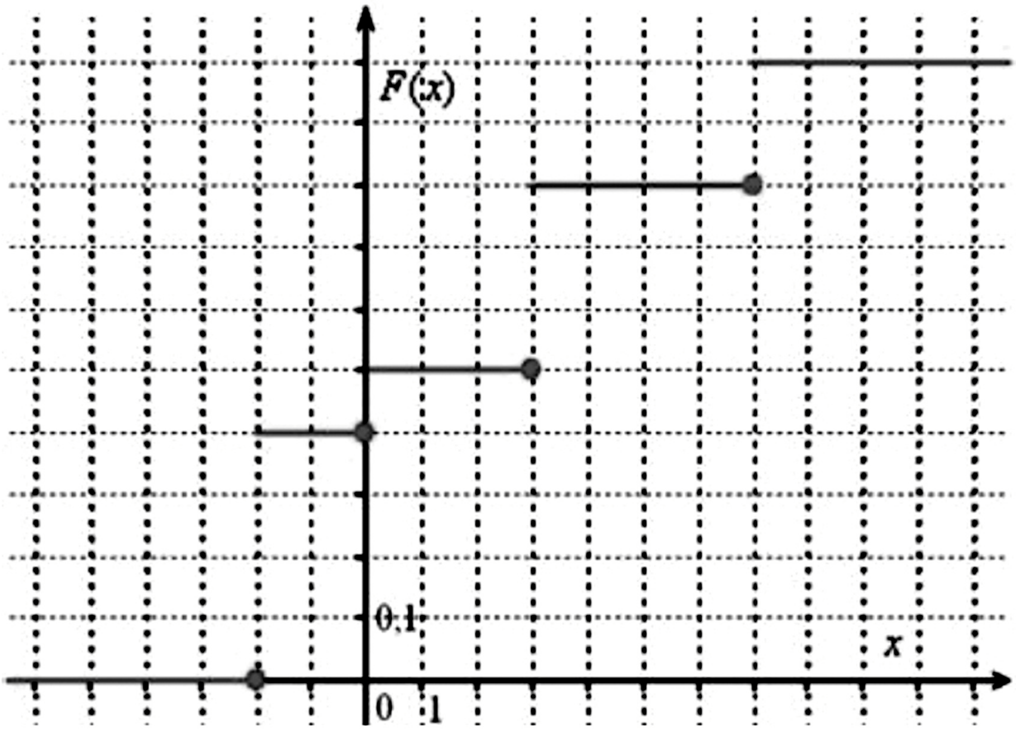


Рис. 2.

Обратите внимание, что ступеньки начинаются с тех значений, которые определяют замкнутую, левую границу неравенств.

Глядя на рисунок 2, видим, что:

1. Если $F(x)$ имеет разрыв (скачок) в точке x, то вероятность $P(X=x)$ будет равна скачку функции в этой точке.
2. Чтобы выполнить условие непрерывности ФР, необходимо строго учитывать тип неравенства в формуле $P(A \le X<B)=F(B)-F(A)$, иначе отдельные значения ФР могут «выпасть».

Законы распределения вероятности (частоты встречаемости значений) случайных величин служат математическими моделями для реальных объектов и явлений, что позволяет применять их для расчетов и анализа ситуации.

Но на практике чаще используют производную от функции распределения – **функцию плотности вероятности**.

3. ФУНКЦИЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Функция плотности распределения вероятностей (англ. Probability density function) – f(x) – это первая производная функции распределения. Для примера приведу рисунок 3, на котором есть график ФР и график ФПР. Вот и видно, что производная.

Рис. 3.

Вероятность на графике этой функции показана как площадь под отрезком кривой (рис. 4).

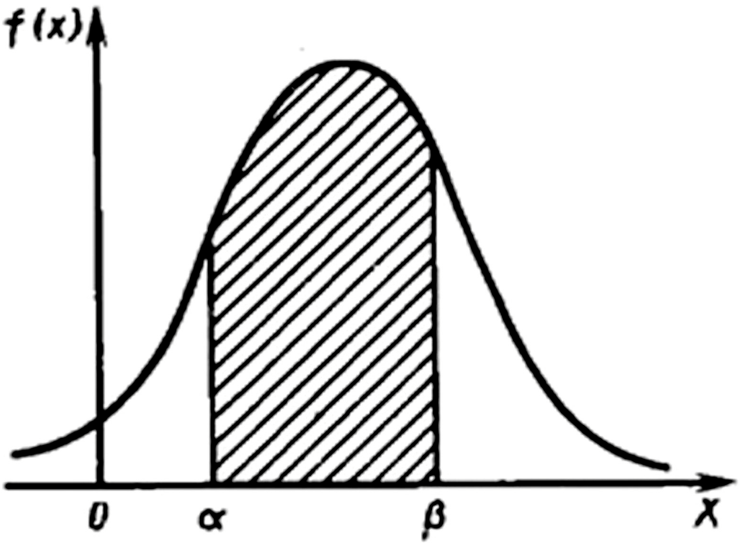
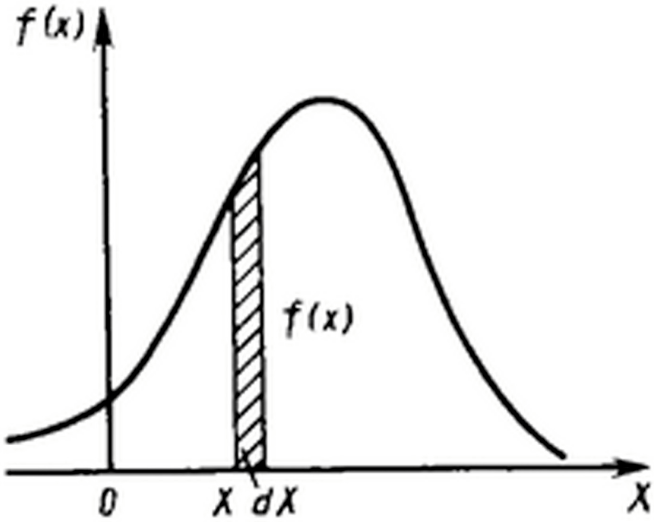


Рис. 4.

На рисунке 5 видно, что интервал на оси *x* можно сделать бесконечно малым и все-таки увидеть вероятность попадания значения *x* в этот малюсенький интервал!



Вероятность попадания случайной величины X в интервал dx (площадь заштрихованной области)

Рис. 5.

Рассмотрим некоторые виды функции плотности распределения. Для краткости говорят просто РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. Замечу, что эта функция, в отличие от ФР, может принимать значения больше 1.

Равномерное распределение

Равномерное распределение полезно при описании переменных, у которых каждое значение равновероятно, иными словами, значения переменной равномерно распределены в некоторой области. Именно так работает функция RND.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha}, x\in[\alpha,\beta]\\ 0, x\notin[\alpha,\beta]\end{cases} \tag{3}$$

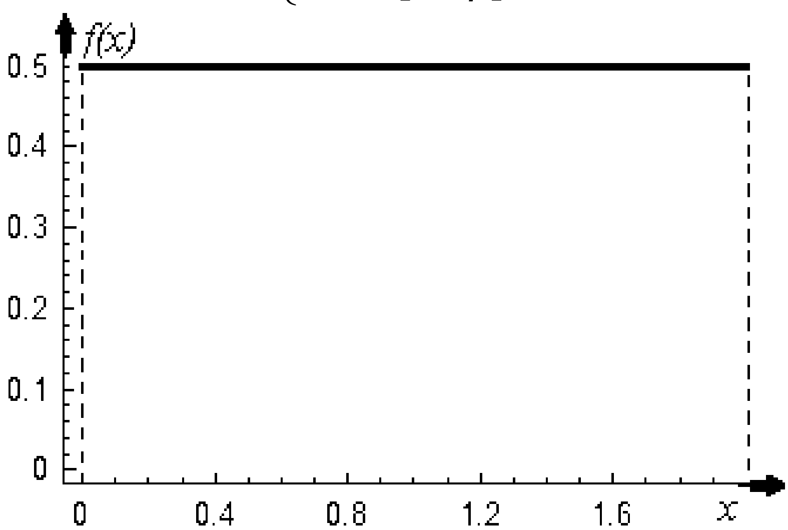


Рис. 6.

Экспоненциальное распределение. Экспоненциальное распределение часто используется для описания интервалов времени между последовательными случайными событиями, например интервалов между заходами на непопулярный сайт, так как эти посещения являются редкими событиями. События происходят в среднем с **интенсивностью** λ **(интенсивность – число событий в единицу времени).** Видно (рис. 7), что большая частота событий маловероятна. Проверьте, как будет меняться график при изменении значения λ.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0 \tag{4}$$

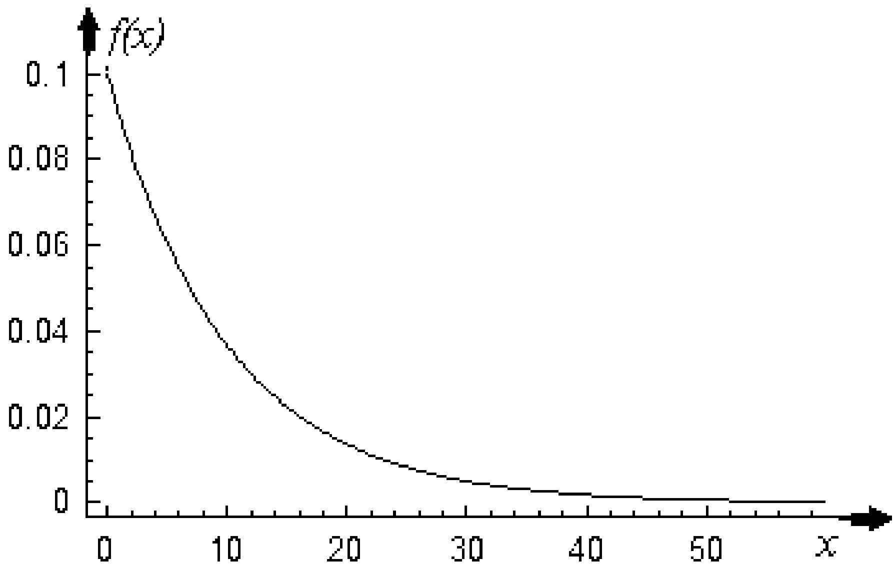


Рис. 7.

Распределение Пуассона (рис. 8) иногда называют распределением редких событий. Примерами переменных, распределенных по закону Пуассона, могут служить: число несчастных случаев, число дефектов в производственном процессе и т д.

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \tag{5}$$

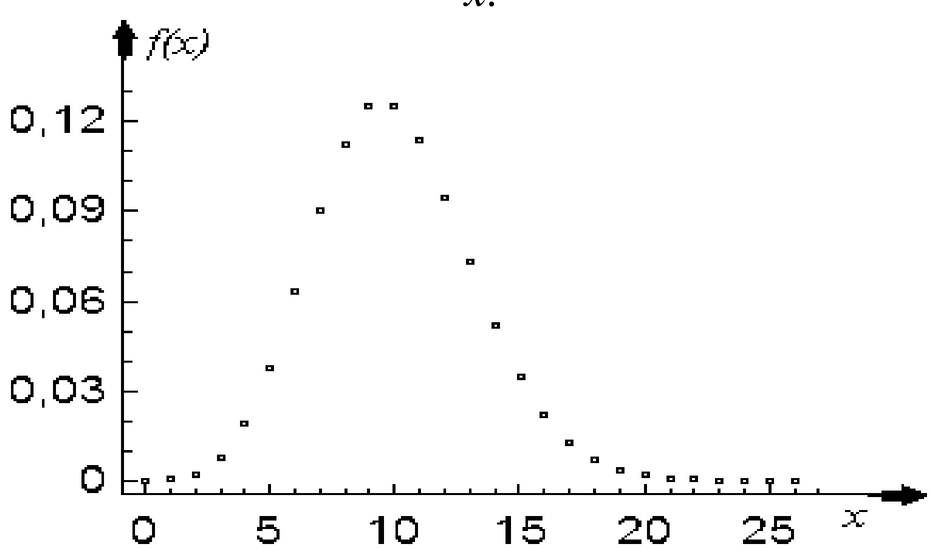


Рис. 8.

4. ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПОТОКОВ СОБЫТИЙ

Ну вот, наконец, я добрался до сюжета лабораторной работы)))
Это я к тому, что знания про случайные величины, которые вы благополучно забыли или вообще пропустили, вот сейчас и пригодились бы. Пришлось делать рефреш..
Важным аспектом использования законов распределения вероятностей является генерация массива случайных величин или по другому – потока событий. Бывают ситуации, когда необходимо получить последовательность событий, чтобы имитировать работу участка, или узла связи, или другого обслуживающего устройста. Это, делается по некоторому закону распределения вероятностей.

Дальше фрагмент из методички с моими комментариями.

Припустимо, що необхідно побудувати процедуру імітації дискретної випадкової величини *X* із заданим законом розподілення (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Розподіл дискретної випадкової величини

X	x_1	x_2	……..	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	……..	p_n

Випадкова величина приймає n значень $x_1 < x_2 < ... < x_n$ з ймовірностями

$$p_i,\ i=\overline{1,n} \tag{3.1}$$

Теперь понятно??))

Тоді функцію розподілення можна визначити наступним чином:

$$F(x) = 0,\ x \le x_1$$
$$F(x) = p_1,\ x_1 \le x \le x_2$$
$$F(x) = p_2,\ x_2 \le x \le x_3 \tag{3.2}$$
…………..
$$F(x) = 1,\ x > x_n$$

Для розв’язання поставленого завдання можна застосувати метод оберненої функції, тобто знайти випадкову величину *x* за допомогою перетворення $X = F^{-1}(Y)$, де $Y \in [0,1]$, а F^{-1} – функція, обернена до F(x).
Перевожу на русский язык:
В таблице 3.1 «зашита» ФР. С помощью функции random генерим случайное число от 0 до 1. Где это число внутри ФР? Смотрим для разъяснения ситуации на рис. 2. Наше случайное число обнаружено на вертикальной оси, где-то между 0 и 1. Теперь нужно увидеть, чему оно соответствует на оси *X*.
Читаем методичку дальше:
Простіший алгоритм обчислення дискретної випадкової величини *X*, який заданий таблицею розподілення:

якщо $Y \le P_1$, то $X = x_1$ інакше:

якщо $Y \le P_1 + P_2$, то $X = x_2$ інакше:

якщо $Y \le \sum_{i=1}^{n-1} P_i$, то $X = x_{n-1}$ інакше $X = x_n$.

Это оно и есть! Тут величина *Y* и есть сгенерённое вами исходное случайное число.

Геометрична інтерпретація алгоритму зведена до наступного: одиничний відрізок ділиться на n ділянок довжиною $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Якщо випадкове число *Y* (**то есть вероятность**) припало, наприклад, на ділянку p_3, то це означає, що як значення випадкової величини *X* потрібно вибрати x_3.

Моделювання випадкової величини з експоненціальним законом розподілення

Для моделювання випадкової величини з експоненціальним законом розподілення з параметром λ можна також використовувати обернену функцію. Експоненціальна щільність розподілення випадкової величини має вигляд:

$$Y(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (x > 0) \qquad (3.3)$$

оберненою функцією буде функція

$$X = \frac{ln(1-Y)}{\lambda}, \qquad (3.4)$$

де Y – набір псевдовипадкових чисел, які отримані, наприклад, за допомогою функції random. То есть, то же самое, но вместо таблицы используем формулу (3.4) и генерим массив случайных чисел, которые соответствуют экспоненциальному закону распределения.

Моделювання потоків подій

Поток событий происходит во времени. Например, поток покупателей, поток посетителей сайта. Между отдельными заходами на сайт проходит некоторый отрезок времени. Именно эти отрезки вы уже генерили при помощи формулы (3.4). Нужно просто эти отрезки выстроить один за другим на воображаемой оси времени.

Читаем:

Для моделювання потоку подій, у якому інтервали часу між подіями розподілені за довільним законом, можна скористатися наступним алгоритмом:

1. За допомогою генератора псевдовипадкових чисел і оберненої функції отримати ряд значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
2. Нанести їх на вісь часу наступним чином:

– перша подія настає після x_1 одиниць часу після початку моделювання;

– друга подія настає після $x_1 + x_2$ одиниць часу після початку моделювання й так далі.

Тут, мне кажется, комментировать уже не нужно... нужно делать работу...