Подготовили: Курдюкова Н., Спиридонов Д., Безносиков А.Н.

Теория вероятностей «Задачи. 1 задание»

Формула включений-исключений

Теорема 1. Формула включений-исключений. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}$ — конечный набор событий. Пусть $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, и для произвольного подмножества индексов $J \subseteq [n]$ определим событие $B_J = \bigcap\limits_{i \in J} A_i$. Тогда справедлива следующая формула, называемая формулой включений-исключений:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i\right\} &= \sum_{J \subseteq [n]} (-1)^{|J|+1} \mathbb{P}\left\{B_J\right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{A_i\} - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}\{A_i \cap A_j\} + \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\}.\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем формулу включений-исключений индукцией по n.
База индукции: $n = 2$. Для случая $n = 2$ определим события $C_1 = A_1 \setminus A_2, C_2 = A_1 \cap A_2, C_3 = A_2 \setminus A_1$, обладающими следуюшими свойствами:

1) $C_i \cap C_j = \varnothing$ для $i \neq j$;

2) $A_1 \cup A_2 = C_1 \cup C_2 \cup C_3, A_1 = C_1 \cup C_2, A_2 = C_2 \cup C_3$.

Отсюда и из счётной аддитивности вероятностной меры получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{A_1 \cup A_2\} &= \mathbb{P}\{C_1 \cup C_2 \cup C_3\} = \mathbb{P}\{C_1\} + \mathbb{P}\{C_2\} + \mathbb{P}\{C_3\} \\ &= (\mathbb{P}\{C_1\} + \mathbb{P}\{C_2\}) + (\mathbb{P}\{C_3\} + \mathbb{P}\{C_2\}) - \mathbb{P}\{C_2\} \\ &= \mathbb{P}\{\underbrace{C_1 \cup C_2}_{A_1}\} + \mathbb{P}\{\underbrace{C_2 \cup C_3}_{A_2}\} - \mathbb{P}\{\underbrace{C_2}_{A_1 \cap A_2}\} = \mathbb{P}\{A_1\} + \mathbb{P}\{A_2\} - \mathbb{P}\{A_1 \cap A_2\}.\end{aligned}$$

База индукции доказана.
Шаг индукции. Предположим, что формула включений-исключений верна для произвольных наборов из не более чем $n-1$ событий, и докажем, что она верна для произвольного набора $\{A_i\}_{i=1}^n$ из n событий. Рассматривая формулу включений-исклчений для событий $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$ и A_n, которую мы уже доказали, получим

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right\} + \mathbb{P}\{A_n\} - \mathbb{P}\left\{\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right\} + \mathbb{P}\{A_n\} - \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right\}.$$

Применяя предположение индукции для наборов множеств $\{A_i\}_{i=1}^{n-1}$ и $\{A_i \cap A_n\}_{i=1}^n$, получим

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i\right\} = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{A_i\} - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}\{A_i \cap A_j\} + \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\}.$$

□

Упражнение 1. В гардеробе случайным образом перепуталось N шляп посетителей. Какова вероятность того, что ни один посетитель не получит свою шляпу при $N = 4$, $N = 10000$?

Решение. Элементарными событиями в этой задаче будем считать все возможные перестановки n шляп. Всего таких перестановок $n!$. Считаем, что все перестановки равновероятны. Пусть событие A_k соответствует тому, что k-й человек получил свою шляпу. Тогда $\mathbb{P}\{A_k\} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$, так как перестановок, при которых k-й человек взял свою шляпу, всего $(n-1)!$. Заметим, что событие $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}$ соответствует тому, что i_1-й, i_2-й, $\ldots$, i_r-й люди получили свои шляпы, а вероятность этого события $\mathbb{P}\{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}\} = \frac{(n-r)!}{n!}$. Отсюда получаем, что

$$\sum_{J \subseteq [n]:|J|=r} \mathbb{P}\{B_J\} = \frac{(n-r)!}{n!}\binom{n}{r} = \frac{1}{r!},$$

где $B_J = \bigcap\limits_{i \in J} A_i$. Пусть событие C, соответствует тому, что ни один из посетителей не взял свою шляпу. Тогда $C = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ и

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{C\} &= \mathbb{P}\{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\} = 1 - \mathbb{P}\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\} \\
&\overset{\text{ф-ла вкл.-искл.}}{=} 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{A_i\} - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}\{A_i \cap A_j\} + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\{A_1 \cap \ldots \cap A_n\}\right) \\
&= 1 - \left(1 - \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots + \tfrac{(-1)^{n+1}}{n!}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - \tfrac{1}{e}.
\end{aligned}$$

□

Разные задачи

Упражнение 2. (Задача №7) Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, извлекается наугад один шар и откладывается в сторону. Какова вероятность того, что извлеченный наугад второй шар окажется белым, если:

а)первый извлеченный шар белый;

б)цвет первого извлеченного шара остается неизвестным?

Решение. Ведем события:

2Б —"2-ой шар белый";

1Б —"1-ый шар белый".

а) первый извлеченный шар белый.

В данном случае можно не пользоваться формулой полной вероятности, а рассуждать так: т.к. первый шар белый, то в урне осталось $a - 1$ белый шар, а значит вероятность есть:

$$\mathbb{P}\{2Б|1Б\} = \frac{a-1}{a+b-1}.$$

б)цвет первого извлеченного шара остается неизвестным.

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\mathbb{P}\{2\text{Б}\} = \mathbb{P}\{2\text{Б}|1\text{Б}\}\mathbb{P}\{1\text{Б}\} + \mathbb{P}\{2\text{Б}|\overline{1\text{Б}}\}\mathbb{P}\{\overline{1\text{Б}}\} = \frac{a-1}{a+b-1}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b-1}\cdot\frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b}.$$

Мораль: если Вы тянете билет 15-ым и не знаете, что вытянули коллеги перед Вами, шансы на халявный билет такие же, как и до того, как все начали тянуть билеты.

□

Упражнение 3. (Задача №47) Известно, что 96% выпускаемой продукции соответствует стандарту. Упрощенная схема контроля признает годным с вероятностью 0.98 каждый стандартный экземпляр аппаратуры и с вероятностью 0.05 каждый нестандартный экземпляр аппаратуры. Найдите вероятность того, что изделие, прошедшее контроль, соответствует стандарту.

Решение. Ведем события:

К —"изделие прошло контроль";

С —"изделие стандартное".

Нам нужно найти $\mathbb{P}\{\text{С}|\text{К}\}$. Воспользуемся формулой Байеса:

$$\mathbb{P}\{\text{С}|\text{К}\} = \frac{\mathbb{P}\{\text{К}|\text{С}\}\cdot\mathbb{P}\{\text{С}\}}{\mathbb{P}\{\text{К}|\text{С}\}\cdot\mathbb{P}\{\text{С}\} + \mathbb{P}\{\text{К}|\overline{\text{С}}\}\cdot\mathbb{P}\{\overline{\text{С}}\}} = \frac{0.98\cdot 0.96}{0.98\cdot 0.96 + 0.04\cdot 0.05} \approx 0.998.$$

□

Упражнение 4. (Задача №54) Пусть $X \in \text{Poisson}\{\lambda\}$ и $Y \in \text{Poisson}\{\beta\}$ - независимые случайные величины, имеющие распределение Пуассона. Доказать, что случайная величина $Z = X + Y$ имеет распределение Пуассона $\text{Poisson}\{\lambda+\beta\}$.

Решение. Покажем, что случайная величина $Z = X + Y$ имеет распределение Пуассона. Действительно,

$$\mathbb{P}\{z = k\} = \sum_{t=0}^{k}\mathbb{P}\{X = t\}\mathbb{P}\{Y = k-t\} = \sum_{t=0}^{k}\frac{\lambda^t}{t!}\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\beta^{k-t}}{(k-t)!}\cdot e^{-\beta} =$$

$$= e^{-(\lambda+\beta)}\cdot\sum_{t=0}^{k}\frac{\lambda^t\cdot\beta^{k-t}}{t!\cdot(k-t)!} = \frac{e^{-(\lambda+\beta)}\cdot(\lambda+\beta)^k}{k!}$$

□

Упражнение 5. (Задача №80) Покажите, что если независимые с. в. $X_1, ..., X_n$ имеют показательное(экспоненциальное) распределение, т.е.

$$f_{X_i}(t) = \begin{cases}\lambda_i \text{Exp}(-\lambda_i t), & t \geqslant 0,\\ 0, & t < 0.\end{cases}$$

(часто пишут $X_i \in \text{Exp}(\lambda_i)$), то

$$\min\{X_1, ..., X_n\} \in \text{Exp}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i).$$

Решение. Обозначим $Y = \min(X_1, ..., X_n)$, тогда:

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}\{Y < t\} = 1 - \mathbb{P}\{Y \geqslant t\} = \\ &= 1 - \mathbb{P}\{X_1 \geqslant t, X_2 \geqslant t, ..., X_n \geqslant t\} = \\ &= 1 - \mathbb{P}\{X_1 \geqslant t\} \cdot \mathbb{P}\{X_2 \geqslant t\} \cdot ... \cdot \mathbb{P}\{X_n \geqslant t\} = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}\{X_i < t\}) = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = 1 - \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k t\right). \end{aligned}$$

То есть $Y \in \text{Exp}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)$. □

Упражнение 6. (Задача №82) Допустим, что вероятность столкновения молекулы с другими молекулами в промежутке времени $[t, t + \Delta t)$ равна $p = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$ и не зависит от времени, прошедшего после предыдущего столкновения ($\lambda = \text{const}$). Найдите распределение времени свободного пробега молекулы и вероятность того, что это время превысит заданную величину t^*.

Решение. Разобьем интервал $[t, t + \Delta t)$ на n отрезков равной длины $[t_i, t_i + \Delta t_i)$.
Пусть $A_i -$ событие, означающее, что на i-м временном отрезке молекула претерпит столкновение с другими молекулами. Вероятность A_i равна $p_i = \lambda \Delta t_i + o(\Delta t_i) = \lambda \frac{\Delta t}{n} + o\left(\frac{\Delta t}{n}\right)$. Свободный пробег означает отсутствие ударов на всех $A_1, \ldots, A_n$, то есть должны произойти события $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$. Вероятность $\overline{A_i}$ равна $\overline{p_i} = 1 - p_i$. В силу независимотсти столкновений можно представить вероятность свободного пробега в виде произведения вероятностей событий $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$, то есть

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \lambda \frac{\Delta t}{n} + o\left(\frac{\Delta t}{n}\right)\right) = \left(1 - \lambda \frac{\Delta t}{n} + o\left(\frac{\Delta t}{n}\right)\right)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) = e^{-\lambda \Delta t}$$

Получаем

$$\mathbb{P}\{t_{\text{пробега}} \geq \Delta t\} = e^{-\lambda \Delta t}$$

$$\mathbb{P}\{t_{\text{пробега}} < \Delta t\} = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$$

$$\mathbb{P}\{t_{\text{пробега}} \geq \Delta t^*\} = e^{-\lambda \Delta t^*}$$

□

Упражнение 7. Равнобедренный треугольник образован единичным вектором в направлении оси абсцисс и единичным вектором в случайном направлении. Найдите функцию распределения длины третьей стороны:

1) в $\mathbb{R}^2$;

2) в $\mathbb{R}^3$.

Решение. Формализуем понятие случайного направления. Будем рассматривать в качестве случайной величины угол Φ между заданными единичными векторами. Считаем, что $\Phi \in [0, \pi]$, в противном случае второй произвольный единичный вектор можно симметрично отобразить относительно оси абсцисс. Третья сторона равна $X = 2sin\frac{\Phi}{2}$. Найдем функцию распределения $F_X(x)$, где X также является случайной величиной, поскольку зависит от угла.

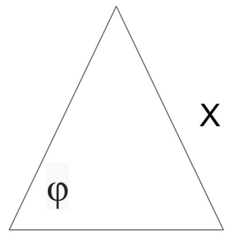

Рис. 1: Третья сторона треугольника

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{X < x\} = \mathbb{P}\{2\sin\frac{\Phi}{2} < x\} = \mathbb{P}\{\Phi < 2\arcsin\frac{x}{2}\} = F_\Phi(2\arcsin\frac{x}{2}).$$

1) В данном случае все просто $\Phi \sim U[0;\pi]$. Тогда $F_\Phi(\phi) = \frac{\phi}{\pi}, \phi \in [0,\pi]$.

$$F_X(x) = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{x}{2}$$

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$$

2) В случае $\mathbb{R}^3$ точка на сфере параметризуется углами $\Phi \in [0;\pi]$ и $\varphi \in [0;2\pi]$. Найдем плотность распределения Φ: для любого множества Ω вероятность

$$\mathbb{P}\{\phi \in \Omega\} = \int\limits_{\Omega\times[0;2\pi]} \frac{1}{4\pi}\sin\phi\, d\phi\, d\varphi = \int\limits_{\Omega} \frac{\sin\phi}{2}\, d\phi = \int\limits_{\Omega} f_\Phi(\phi)\, d\phi$$

Для уточнения почему в первом интеграле возникает $\sin\phi$ будем рассуждать так: зафиксируем угол ϕ (между первой и второй треугольника), начнем вращать полученный "уголок" вокруг оси абсцисс (т.к. первая сторона всегда лежит на ней) на угол $\varphi \in [0;2\pi]$, получим окружность радиуса $R = \sin\phi$. Как раз на этой окружности и лежат все точки, для которых угол между первой и второй стороной равен данном ϕ.

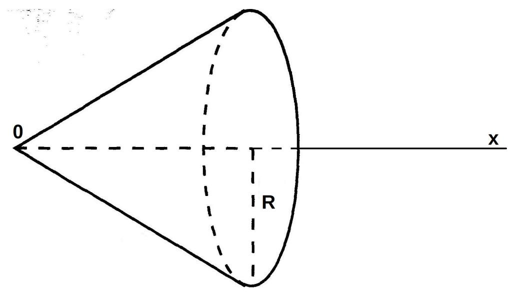

Рис. 2: Фиксированный ϕ

$$f_\Phi(\phi) = \frac{\sin\phi}{2},\ F_\Phi(\phi) = \frac{1-\cos\phi}{2} = \sin^2\frac{\phi}{2}.$$

$$F_X(x) = \frac{x^2}{4},\ f_X(x) = \frac{x}{2}.$$

□

Упражнение 8. В $m+1$ урне находится по m шаров. В n-ой урне n белых и $m-n$ черных, n лежит от 0 до m. Мы выбираем случайную урну и вытаскиваем k шаров, каждый раз возвращая шар обратно. Найти вероятность того, что следующий шар будет белым, если:

1) все предыдущие k шаров белые;

2) все предыдущие k шаров белые при $m \longrightarrow \infty$.

Решение. Введем следующие события:

A_i —"выбираем i-ую урну";

B —"первые k шаров белые";

C — "следующий $k+1$ шар белый".

Нам нужно найти условную вероятность $\mathbb{P}\{C|B\}$.

$$\mathbb{P}\{C|B\} = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}\{C|B\cap A_i\}\cdot\mathbb{P}\{A_i|B\}.$$

По определению условной вероятности:

$$\mathbb{P}\{C|B\} = \frac{\mathbb{P}\{C\cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}},\ \mathbb{P}\{C|B\cap A_i\} = \frac{\mathbb{P}\{C\cap B\cap A_i\}}{\mathbb{P}\{B\cap A_i\}},\ \mathbb{P}\{A_i|B\} = \frac{\mathbb{P}\{A_i\cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}}.$$

$$\mathbb{P}\{C|B\cap A_i\} = \mathbb{P}\{C|A_i\} = \frac{i}{m}(\text{шары достают с возвращением в урну}).$$

По формуле Байеса:

$$\mathbb{P}\{A_i|B\} = \frac{\mathbb{P}\{B|A_i\}\mathbb{P}\{A_i\}}{\sum\limits_{j=0}^{m}\mathbb{P}\{B|A_j\}\mathbb{P}\{A_j\}} = \frac{(\frac{i}{m})^k}{\sum\limits_{j=0}^{m}(\frac{j}{m})^k}.$$

Подставляем полученные значения в исходную формулу:

$$\mathbb{P}\{C|B\} = \sum_{i=0}^{m}\frac{i}{m}\frac{(\frac{i}{m})^k}{\sum\limits_{j=0}^{m}(\frac{j}{m})^k} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m}(\frac{i}{m})^{k+1}}{\sum\limits_{j=0}^{m}(\frac{j}{m})^k}\cdot\frac{\frac{1}{m+1}}{\frac{1}{m+1}} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{\int\limits_0^1 x^{k+1}\,dx}{\int\limits_0^1 x^k\,dx} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Где предельный переход выполнен, так как несложно видеть, числитель и знаменатель являются суммами Римана для интегралов.

□

Упражнение 9. (Случайные блуждания). Рассмотрим сюжет случайных блужданий. На краю утеса в точке $x = 1$ стоит пьяница. С вероятностью p он шагает в сторону от утеса и с вероятностью $1 - p$ в сторону пропасти. Проанализируйте движение человечка.

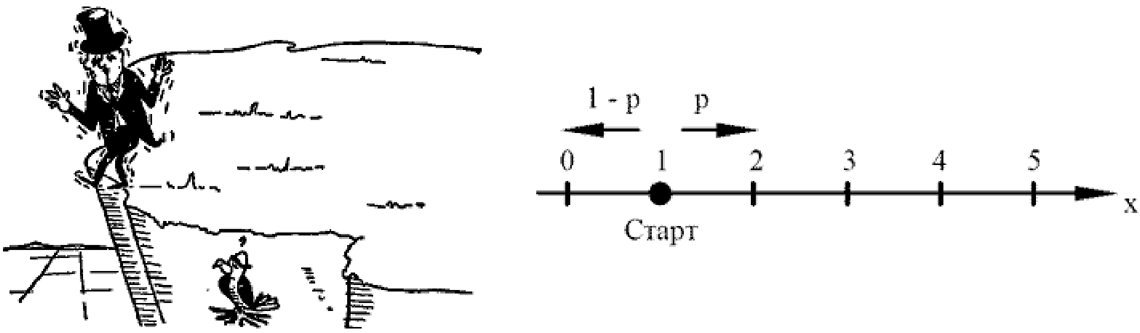

Рис. 3: Случайные блуждания пьяницы

Решение. Пусть $P_1 -$ вероятность того, что человечек упадет из точки $x = 1$.
$P_2 -$ вероятность того, что человечек упадет из точки $x = 2$.
Тогда

$$P_1 = \underbrace{1-p}_{\text{упадет}} + \underbrace{p\cdot P_2}_{\text{уйдет в точку x = 2 и упадет}}$$

Разберемся с P_2.
P_2 есть P_1 да ещё P_1, т.е. человек, стартуя из P_2 упадет в P_1,а потом уже оттуда упадет в пропасть, поэтому $P_2 = P_1^2$. В итоге имеем

$$P_1 = 1 - p + p\cdot P_1^2$$

Решениями квадратного уравнения выше являются $P_1 = 1$ и $P_1 = \frac{1-p}{p}$.
Рассмотрим случаи:

1	$p = 1/2$	$P_1 = 1/2$
2	$p < 1/2$	$P_1 = 1$
3	$p > 1/2$	$P_1 = (1-p)/p$
4	$p = 1$	$P_1 = 0$

Получаем зависимость $P_1(p)$.

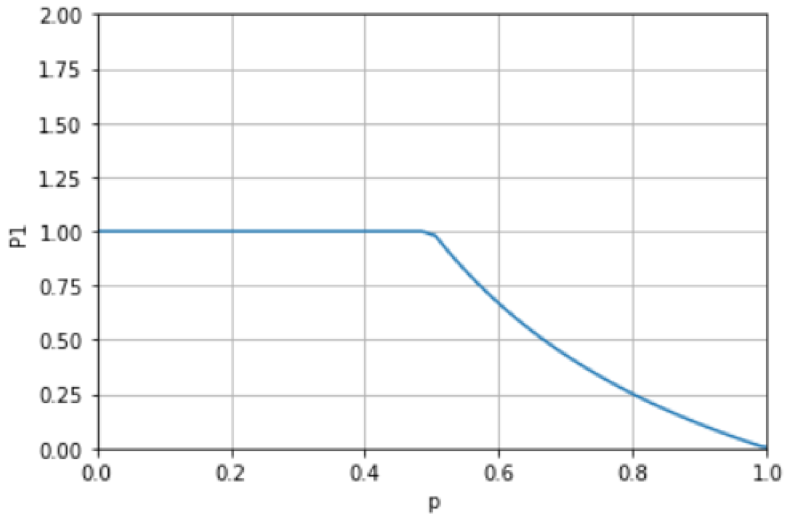

Рис. 4: Зависимость вероятности падения от p

Вероятность упасть из точки $x = n$ равна $P_n = (P_1)^n$.

□

На самом деле у случайных блуждания возникают не только при анализе движении пьяницы, но вот например и при анализе:

Упражнение 10. (Казино) Пусть у игрока A есть a условных денежных единиц. А у игрока B имеется b условных денежных единиц. Они начинают играть партии некоторой игры, после каждой партии проигравший отдает победителю одну денежную единицу. Проанализируйте их игру, если игрок A выигрывает с p, а B выигрывает $1 - p$.

Решение. Рассмотрим игру этих игроков как случайные блуждания только теперь есть два конца: 0 - поражение игрока A и $a + b$ - поражение игрока B, т.е. мы следим за состоянием счета A.

Пусть $P_n -$ вероятность победы игрока A, если у него сейчас n денег.

$$P_n = p \cdot P_{n+1} + (1-p) \cdot P_{n-1}$$

Введем граничные условия: ясно, что в точке $a + b$ игрок A уже выиграл, а в точке 0 уже проиграл.

$$P_{a+b} = 1, \; P_0 = 0$$

Рассмотрим случай, когда $p = 1/2$, т.е. игра нечестная. Решаем рекурренту:

$$\lambda = \lambda^2 \cdot p + (1-p) \longrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1-p}{p}$$

$$P_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1 + C_2\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$$

Вспоминаем про граничные условия:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b} \\ 0 = C_1 + C_2\left(\frac{1-p}{p}\right)^{0} \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{1}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}} \qquad C_2 = \frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b} - 1}$$

$$P_n = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}$$

В нашем случае:

$$P_a = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}$$

□

В двух предыдущих упражнениях мы посмотрели на классические задачи с сюжетом случайного блуждания. О том можно ли выиграть казино, как случайно блуждают на плоскости, о среднем числе шагов и о многих других сюжетах, связанных со случайными блужданиями можно почитать в классических учебниках по теории вероятностей.