Подготовил: Безносиков А.Н.
Шестаков А.А.

Теория вероятностей
«Классическое, геометрическое и аксиоматическое определения»

Задача для разминки:

Упражнение 1. Каждый вечер Иван Таранов приходит в случайное время на автобусную остановку. На этой остановке останавливаются два маршрута - на одном из них Иван может ехать к себе домой, а на другом - в гости к другу Козявкину. Иван ждет первого автобуса и в зависимости от того, какой автобус подошел, он едет либо домой, либо к другу. Через некоторое время Иван заметил, что в гостях у Козявкина он оказывается при этом примерно в два раза чаще, чем дома. На основе этого Иван делает вывод, что один из автобусов ходит в два раза чаще другого. Прав ли он? Могут ли при выполнении условия задачи автобусы ходить с одинаковой частотой? (Предполагается, что автобусы ходят не случайным образом, а по некоторому расписанию.)

Решение. Фишка кроется в том, что если автобус в одну сторону приезжает сразу же за автобусом в другую, то на него почти никак не попасть.

Рассмотрим следующий пример. Пусть маршрут A, который везет Ивана домой, приходит каждый час в 00 минут (т.е. в 00:00, 01:00, 02:00, ...,23:00), а маршрут B, который везет к другу, приходит каждый час через 40 минут после автобуса маршрута A (т.е. в 00:40, 01:40, ..., 23:40). Таким образом, если Ваня подходит к остановке в первые 40 минут каждого часа, то он оказывается у друга, а если в последние 20 минут каждого часа (это происходит в два раза реже), то у себя дома.

□

Теория вероятностей, подобно другим математическим наукам, развилась из потребностей практики.

В начале XVII века знаменитый физик Галилей уже пытался подвергнуть научному исследованию ошибки физических измерений, рассматривая их как случайные и оценивая их вероятности. К этому же времени относятся первые попытки создания общей теории страхования, основанной на анализе закономерностей в таких массовых случайных явлениях, как заболеваемость, смертность, статистика несчастных случаев и т.д. Необходимость создания математического аппарата, специально приспособленного для анализа случайных явлений, вытекала и из потребностей обработки и обобщения обширного статистического материала во всех областях науки.

Однако теория вероятностей как математическая наука сформировалась, в основном, не на материале указанных выше практических задач: эти задачи слишком сложны; в них законы, управляющие случайными явлениями, проступают недостаточно отчетливо и затушеваны многими осложняющими факторами. Необходимо было сначала изучить закономерности случайных явлений на более простом материале. Таким материалом исторически оказались так называемые "азартные игры".

Общая "фишка" азартных игры с точки зрения теории вероятностей состоит в том, что мы имеем конечное кол-во вариантов развития игры и конечное кол-во исходов этой игры. Будь то карты, рулетка или кубики. Возможно, этих вариантов очень много (например, различных вариантов развития партии в дурака), но конечно. Отсюда:

Классическое определение

Рассмотрим конечное кол-во n взаимоисключающих (т.е. если в результате эксперимента происходит ровно один исход) исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Множество Ω называют **пространством исходов** (или **пространством элементарных событий**). В результате эксперимента можно наблюдать (или не наблюдать) событие A, отождествляемое с некоторым подмножеством множества Ω.

Важно в каждой задаче нужно обязательно понять с каким пространством элементарных исходов мы работаем. Часто это пространство можно задать не единственным образом и от этого будет зависеть решение задачи.

Пример 1. Рассмотрим пример игрального кубика. В этом случае очевидно $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Пусть событие A заключается в том, что выпавшее число – степень двойки с целым показателем. Это событие наблюдается тогда и только тогда когда выпавшее число принадлежит множеству $\{1, 2, 4\}$, а значит, A можно отождествить с этим множеством.

Пример 2. Рассмотрим теперь урну с шарами внутри. Если их достают из урны, то в качестве пространства элементарных событий можно взять последовательности из этих шаров.

Определение 1. **Суммой** двух событий A и B называется событие $A \cup B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих хотя бы одному из событий A или B. **Произведением** событий A и B называется событие $A \cap B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих и A, и B. **Разность** событий A и B соответствует множеству $A \setminus B$, состоящему из элементов A, не принадлежащим B. Событие состоящие из всего Ω называется **достоверным** событием. Пустое множество $\varnothing$ называется **невозможным** событием. Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называется **дополнительным** событием к событию A.

Определим понятие **классическое определение вероятности**: вероятность события A равна доле подмножества A, т.е.

$$\mathbb{P}\{A\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

В этом случае подсчёт вероятностей сводится к чисто комбинаторным задачам, поэтому данное определение также называют **комбинаторным определением вероятности**. Нужно просто посчитать кол-во всех вариантов (мощность Ω) и кол-во "хороших" вариантов.

При таком определении вероятность имеет ряд свойств:

1. $0 \leqslant \mathbb{P}\{A\} \leqslant 1$.

2. Для несовместных событий A и B (т.е. $A \cap B = \varnothing$): $\mathbb{P}\{A \cup B\} = \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B\}$.

3. Обобщение предыдущей формулы: $\mathbb{P}\{A \cup B\} = \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}$. Поскольку мы работаем сейчас с классическим определением вероятности, то выписанная формула эквивалентна формуле включений-исключений для мощности объединения множеств, которая хорошо известна вам из курса комбинаторики. Конечно же, можно обобщить ее для 3,4 и т.д событий.

4. $\mathbb{P}\{\Omega\} = 1$, т.е. достоверное событие обладает единичной вероятностью. Это всегда так для классического определения вероятности, однако скоро мы дойдём до аксиоматического определения вероятности, при котором единичной вероятностью может обладать не только достоверное событие.

5. $\mathbb{P}\{\varnothing\} = 0$, т.е. невозможное событие обладает нулевой вероятностью. При использовании аксиоматического определения вероятности в более сложных случаях нулевой вероятностью может обладать не только невозможное событие.

6. $\mathbb{P}\{\overline{A}\} = 1 - \mathbb{P}\{A\}$, как следствие свойства 2. Полезное свойство, потому что иногда легче посчитать вероятность события $\bar{A}$.

Упражнение 2. В урне находится **N** шаров пронумерованных от 1 до **N**. Из неё достают **M** шаров. Найти вероятность того, что последним достанут шар с номером 1.

Решение. В качестве пространства элементарных событий рассмотрим множество всех последовательностей из **N** шаров. Тогда множество "хороших"событий заключается в тех последовательностях, на **M** месте которых находится шар с цифрой 1. Поймем сколько таких последовательностей существует - $(N-1)!$. Тогда вероятность искомого события - $\frac{1}{N}$ □

Упражнение 3. Урна содержит **M** белых и **N** − **M** черых шаров. Наудачу вынимаются (без возвращения) **n** шаров. Чему равна вероятность, что среди них **m** белых?

Решение. По классическому определению вероятности

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где A - искомые события, а Ω - элементарные. Тогда определим вероятностное пространство - следующим образом: Ω - перестановки π на **N** шарах, из которых **M** белых, а остальные чёрные. Тогда общее количество событий - это количество способов расположить белые шары в перестановке, то есть, $\binom{N}{M}$. Первые **n** элементов π - это и есть взятые шары. Тогда искомые события однозначно определяются положением белых шаров в первых **n** и последующих. Соответственно, это $\binom{n}{m} \cdot \binom{N-n}{M-m}$. Мы получаем следующий ответ:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(N-n)!}{(M-m)!(N-M-n+m)!} \cdot \frac{M!(N-M)!}{N!}$$

□

Упражнение 4. (Задача №2)[1] Ребёнок играет с десятью буквами азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «МАТЕМАТИКА»?

Решение. Тут решение будет зависеть от того, как мы введем Ω.

Первый способ: под Ω мы понимаем различные слова, которые получаются из этих букв, при этом одинаковые буквы считаются одинаковыми. Тогда нам удовлетворяет один вариант. Вся задача сводится к подсчету мощности Ω. Тут это считается с помощью формулы перестановок с повторениями[2] Тогда получаем, что их

$$P(3,2,2,1,1,1) = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}$$

Значит искомая вероятность есть:

$$\frac{1}{\left(\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}\right)} = \frac{24}{10!}$$

Второй способ: Всего есть 10 букв. Для удобства мысленно пометим каждую из букв числом от 1 до 10(теперь уже одинаковые буквы различны). Элементарными исходами будут служить перестановки помеченных букв. Их всего 10!. Заметим, что "хороших" слово «МАТЕМАТИКА» будет $2!\cdot 3!\cdot 2! = 24$ последовательностям помеченных букв, так как можно переставить буквы М, А и Т местами, не изменив при этом слово. Значит, вероятность того, что получится слово «МАТЕМАТИКА» равна

$$\frac{24}{10!}$$

Как видим ответы совпали. □

Упражнение 5. Ставим две задачи про дни рождения:

1)С какой вероятностью среди n человек найдется пара с совпадающим днем рождения?

2)С какой вероятностью среди n опрошенных человек, найдется человек с совпадающим с Вами днем рождения?

Сразу оговоримся, что в году всегда 365 дней.

Решение. 1) Введем Ω. Пусть Ω есть множество различных наборов дней рождений n людей. Тогда $|\Omega| = 365^n$.

Тут как раз легче посчитать обратное событие: у всех людей дни рождения в разные дни. Т.е. у первого может быть день рождения в любой из 365 дней, у второго в любой из 364 дней (чтобы не совпасть с первым), у третьего в любой из 363 дней и т.д.:

$$|\bar{A}| = 365\cdot 364\cdot 363\ldots(365-n+1)$$

[1]Если в скобках указывается номер задачи, то это задача из книги
[2]Если Вы не знаете, что это можете прочитать про полиномиальный коэффициент

Тогда

$$\mathbb{P}\{A\} = 1 - \mathbb{P}\{\bar{A}\} = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \ldots (365 - n + 1)}{365^n}$$

Это и есть ответ задачи. Можно только отметить, что при $n = 23$ вероятность становится больше $0,5$, а при $n = 40$ вероятность почти достигает $0,9$.

2) Важно понимать, что это задача отличается от предыдущего пункта. Теперь нужно найти определенный день среди n, а не просто любую совпадающую пару.

Введем Ω. Пусть Ω есть множество различных наборов дней рождений n людей. Тогда $|\Omega| = 365^n$.

Тут тоже легче посчитать обратное событие: у всех людей дни рождения не совпадают с Вашим. Т.е. у первого может быть день рождения в любой из 364 дней (чтобы не совпасть с Вашим), у второго в любой из 364 дней , у третьего в любой из 364 дней и т.д.:

$$|\bar{A}| = 364^n$$

Тогда

$$\mathbb{P}\{A\} = 1 - \mathbb{P}\{\bar{A}\} = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{364^n}{365^n} \approx 1 - e^{-\frac{n}{365}}$$

Это и есть ответ задачи. Можно только отметить, что только при $n = 253$ вероятность становится больше $0,5$. Результат значительно отличается от пункта 1.

$\square$

Но возникает вопрос, а что делать с бесконечными множествами? Частично этот вопрос покрывает:

Геометрическое определение

Рассмотрим следующий эксперимент: точка случайно бросается в квадрат со стороной 2 с центром в точке X. Какова вероятность того, что случайно кинутая точка попадёт в круг радиуса 1 с центром в точке X. Как решать такую задачу? Классический подход не подходит, потому что существует бесконечное число благоприятных и неблагоприятных исходов. Интуиция говорит, что вероятность попадания точки указанный круг должна быть пропорциональна площади этого круга, а именно, она должна быть равна $\frac{\pi \cdot 1^2}{\pi \cdot 2^2} = \frac{\pi}{4}$.

В более общем случае **геометрическую вероятность** можно определить следующим образом. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана некоторое измеримое множество Ω и в нём содержится другое измеримое множество A. Пусть на обеих областях определена одна и та же мера μ (в случае, когда рассматривается "бросание точки наудачу", рассматривается мера Лебега), причём пусть $\mu\Omega \neq 0$. Тогда в случае "бросания точки наудачу" во множество Ω определим вероятность попасть во множество A следующим образом:

$$\mathbb{P}\{A\} = \frac{\mu A}{\mu\Omega},$$

что соответствует нашей интуиции.

В случае примера про квадрат и круг в качестве меры выступает просто площадь. Так вероятность попасть в определенную точку равна 0, хотя если мы ткнем в какую-то область мы попадем в какую-то точку (своего рода парадокс).

Мы рассмотрели задачу, которая имеет чисто геометрическую постановку. Однако геометрический подход к подсчёту вероятностей оказывается успешным и при решении задач, которые, на первый взгляд, не имеют ничего общего с геометрией. Продемонстрируем это на следующем примере.

Упражнение 6. (Задача о встрече) Саша и Паша договорились встретиться в 420 ГК между 17:00 и 18:00, но так и не договорились о конкретном времени. Человек, который приходит первым, ждёт другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи двух друзей, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу, и моменты прихода независимы?

Решение. Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи. Пусть t_1 — время, прошедшее после 17:00 до прихода Саши (в часах), а t_2 — время, прошедшее после 17:00 до прихода Паши (в часах). Тогда время прихода обоих друзей можно задать точкой в квадрате $[0,1] \times [0,1]$: первая координата будет задавать t_1, а вторая — t_2. Заметим, что друзья встретятся тогда и только тогда, когда $|t_1 - t_2| < \frac{1}{3}$ (отметим, что всё измеряется в часах, поэтому в правой части не 20, а $\frac{1}{3}$). Данное неравенство задаёт "полоску" на плоскости, которая пересекает наш квадрат $[0,1]^2$ по зелёной области (см. Рис. 3). Площадь данной фигуры равна $1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$,

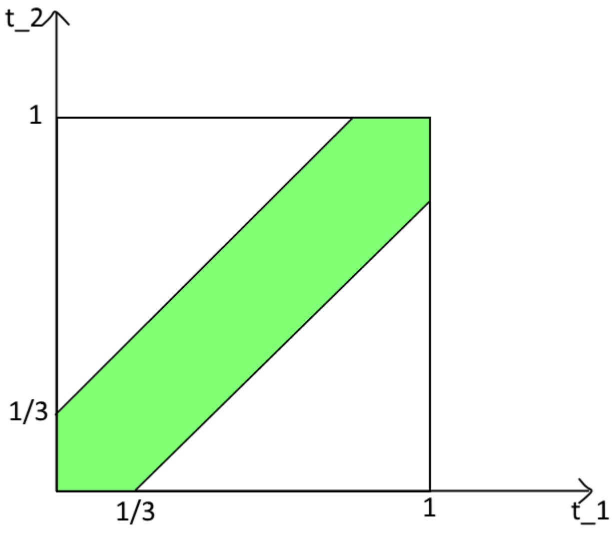

Рис. 1: Задача о встрече.

а значит, вероятность друзьям встретиться равна

$$\mathbb{P}\{\text{вероятность встречи}\} = \frac{5/9}{1} = \frac{5}{9}$$

$\square$

Упражнение 7. Стержень длины 1 ломают в 2 местах. Какова вероятность, что из частей стержня можно составить треугольник? А прямоугольный?

Доказательство. В качестве пространства элементарных событий возьмем $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < y < l\}$. Тогда из новых частей можно составить треугольник, если будет выполнена система неравенств:

$$\begin{cases} x < l - x \\ l - y < y \\ y - x < x + l - y. \end{cases}$$

Они соответственно задают следующее множество:

$$\begin{cases} x < \frac{l}{2} \\ y > \frac{l}{2} \\ y - x < \frac{l}{2}. \end{cases}$$

Тогда вероятность будет равна $\frac{1}{4}$.

Для того, чтобы треугольник был прямоугольным, нужно, чтобы было выполнено хотя бы одно равенство из следующих:

$$x^2 = (y - x)^2 + (l - y)^2$$
$$(y - x)^2 = x^2 + (l - y)^2$$
$$(l - y)^2 = x^2 + (y - x)^2$$

Так как это равенства, мера каждого из этих событий - это 0. Тогда и вероятность получить прямоугольный треугольника равна 0. □

Далее обсудим пару классических сюжетов.

Мы с Вами обсуждали, что вероятность попасть круг в квадрате равна $\frac{\pi}{4}$. На этом факте можно как-то построить метод экспериментального определения числа π. Но, возможно, на практике его не так просто реализовать, поэтому в истории закрепился такой:

Упражнение 8. (Игла Бюффона) На плоскость нанесены параллельные прямые на расстоянии $2a$ друг от друга. Игла длины $2l$ ($l < a$) брошена на плоскость. С какой вероятностью она пересечет какую-то прямую?

Решение. На рисунке показаны различные расположения иглы в том числе и то, где она касается одной из линий. Из соображений симметрии понятно, что достаточно рассмотреть промежуток между какими-то двумя прямыми.

Положение иглы вдоль вертикали не играет роли, т.к сдвиг вверх или вниз не повлияет на пересечение прямой. Положение иглы определяется двумя факторами углом θ и расстоянием от центра иглы до ближайшей прямой x (см. рисунок).

Положение центра иглы P равномерно распределено. При фиксированном угле θ игла пересечет линию с вероятностью:

$$2x/2a = l \cos\theta / a$$

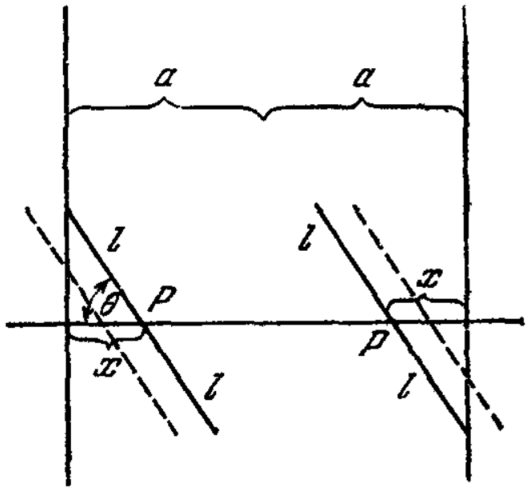

Рис. 2: Игла Бюффона.

Угол θ равномерно распределен от 0 до $\pi/2$ (углы от $\pi/2$ до 2π можно не учитывать в силу симметричности иглы). Теперь нужно найти просто среднее для величины $l\cos\theta/a$:

$$\frac{l}{a}\cdot\frac{\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta\ d\theta}{\pi/2}=\frac{2l}{\pi a}$$

$\square$

Это самый простой варианта задачи про иглу Бюффона. Есть варианты с клетчатым листом, с иглой произвольного размера, даже с изогнутой в уголок иглой (Задача №63).

Этот сюжет о том, что если делаешь это "на удачу", то нужно подходить к этому "с умом".

Упражнение 9. (Парадокс Бертрана, Задача №62) Рассмотрим окружность, описанную вокруг равностороннего треугольника. Какова вероятность, что случайным образом проведенная хорда будет иметь длину большую,чем сторона этого треугольника?

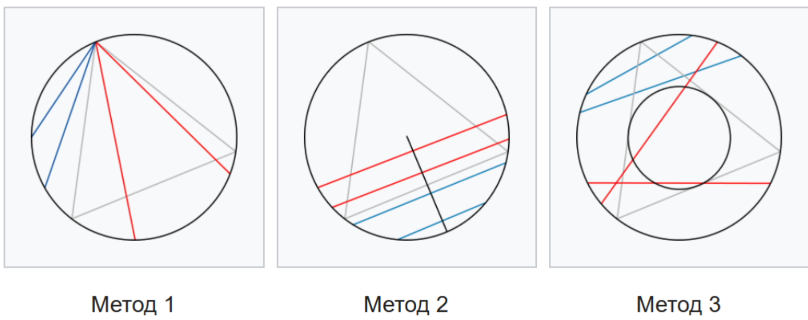

Рис. 3: Парадокс Бертрана.

Решение. Бертран предложил три решения, очевидно верных, но дающих различный результат.

Метод 1 «случайных концов»: наудачу выберем две точки на окружности и проведём через них хорду. Чтобы посчитать искомую вероятность, представим, что треугольник повёрнут так, что одна из его вершин совпадает с концом хорды. Заметим, что если другой конец хорды лежит на дуге между двумя другими вершинами треугольника, то длина хорды больше стороны треугольника. Длина рассмотренной дуги равна трети длины окружности, следуя классическому определению, искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

Метод 2 «случайного радиуса»: зафиксируем радиус окружности, наудачу выберем точку на радиусе. Построим хорду, перпендикулярную зафиксированному радиусу, проходящую через выбранную точку. Для нахождения искомой вероятности представим, что треугольник повёрнут так, что одна из его сторон перпендикулярна зафиксированному радиусу. Хорда длиннее стороны треугольника, если её центр ближе к центру, чем точка пересечения треугольника с зафиксированным радиусом. Сторона треугольника делит пополам радиус, следовательно вероятность выбрать хорду длиннее стороны треугольника $\frac{1}{2}$.

Метод 3 «случайного центра»: выберем наудачу произвольную точку внутри круга и построим хорду с центром в выбранной точке. Хорда длиннее стороны равностороннего треугольника, если выбранная точка находится внутри круга, вписанного в треугольник. Площадь вписанного круга есть $1/4$ от площади большего, значит, исходная вероятность равна $\frac{1}{4}$.

□

Любая уважающая себя математическая наука должна иметь под собой аксиоматику. Это своего рода ограничения на объекты, которые может описывать и изучать эта наука. Тем более, что до появления теории вероятностей математики изучали два основных класса объектов — числа и геометрические фигуры. Для теории вероятностей потребовалось добавить в этот список совершенно особый объект: случайное событие. Поэтому теории вероятностей нужна была своя аксиоматика, но к началу 20го века ученые все еще пользовались наивным и интуитивным аппаратом, заложенным еще Бернулли и Лапласа, который давно и безнадежно устарел.

Создание мировой, общепризнанной аксиоматики теории вероятностей принадлежит Андрею Николаевичу Колмогорову:

Аксиоматическое определение

Определение 2. Пространство элементарных событий Ω — множество базовых взаимоисключающих исходов эксперимента. Элементы множества Ω также называют **элементарными исходами**.

Ω является совершенно произвольным множеством.

Определение 3. Совокупность $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω называется **алгеброй**, если выполняются следующие три условия:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$;
2) из $C \in \mathcal{A}$ вытекает, что $\overline{C} \in \mathcal{A}$;
3) из $C_1, C_2 \in \mathcal{A}$ вытекает, что $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{A}$.

Пример 3. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим некоторые примеры алгебр на множестве Ω.

1. $\mathcal{A} = \{\Omega, \varnothing\} = \{\{1, 2, 3\}, \varnothing\}$ — тривиальная алгебра.
2. $\mathcal{A} = \{\Omega, \varnothing, \{1\}, \Omega \setminus \{1\}\} = \{\{1, 2, 3\}, \varnothing, \{1\}, \{2, 3\}\}$ — алгебра.
3. $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ — множество всех подмножеств множества Ω — алгебра.

Нетрудно проверить, что для произвольной алгебры $\mathcal{A}$ выполняются следующие свойства.

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$.
2. Из $C_1, C_2 \in \mathcal{A}$ следует, что $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{A}$.
3. Из $C_1, C_2 \in \mathcal{A}$ следует, что $C_1 \setminus C_2 \in \mathcal{A}$.

Для наших целей (построение аксиоматики теории вероятностей) требуется расширить понятие алгебры множеств.

Определение 4. Совокупность $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω называется **σ-алгеброй**, если выполняются следующие три условия:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
2) из $C \in \mathcal{F}$ вытекает, что $\overline{C} \in \mathcal{F}$;
3) из $C_i \in \mathcal{F}, i \geqslant 1$ вытекает, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F}$ (счетно объединение).

Аналогично справдливы следующие свойства произвольной σ-алгебры $\mathcal{F}$:

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$;

2. из $C_i \in \mathcal{F}, i \geqslant 1$ следует, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F}$.

Заметим, что любая σ-алгебра является алгеброй, но не наоборот.

Определение 5. Событие $A \in \mathcal{F}$ — некоторое подмножества множества элементарных исходов.

Определение 6. Говорят, что **событие** A **произошло**, если произошёл один из элементарных исходов, составляющих событие.

Определение 7. Измеримым пространством называется пара $(\Omega, \mathcal{F})$, где Ω — пространство элементарных исходов, а $\mathcal{F}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств Ω.

Определение 8. Отображение $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0;1]$ будем называть **вероятностной мерой** или **распределением вероятностей**, если

1) $\mathbb{P}\{\Omega\} = 1$;

2) для любых множеств $C_i \in \mathcal{F}, i \geqslant 1$, таких что $C_i \cap C_j = \varnothing$ при $i \neq j$, выполняется свойство *счётной аддитивности*:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(C_i\right).$$

Отличие вероятностной меры от меры Лебега состоит в том, что она 1) конечна и ограничена и 2) не факт, что полна.

Определение 9. Вероятностным пространством называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство и $\mathbb{P}$ — вероятностная мера на этом измеримом пространстве. Если $C \in \mathcal{F}$, то число $\mathbb{P}\{C\}$ называется **вероятностью** события C.

Когда мы работали с классическое определение, то мы брали $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, т.е. σ-алгебру, состоящую из всех подмножеств (дискретную). А мера выдавала "нормированное" значение мощности.

Отметим некоторые важные свойства вероятностной меры.

1. $\mathbb{P}\{\varnothing\} = 0$
2. $\mathbb{P}\{\overline{A}\} = 1 - \mathbb{P}\{A\}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{F} \hookrightarrow \mathbb{P}\{A \cup B\} = \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}$.
4. $\forall A \in \mathcal{F} \hookrightarrow 0 \leqslant \mathbb{P}\{A\} \leqslant 1$.
5. Если $A, B \in \mathcal{F}$ и $A \subseteq B$, то $\mathbb{P}\{A\} \leqslant \mathbb{P}\{B\}$.
6. **Теорема непрерывности вероятности.** Если $A_i, B_i \in \mathcal{F}$ и $A_i \subseteq A_{i+1}, B_i \supseteq B_{i+1}$ для $i \geqslant 1$, то

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{A_n\} \text{ и } \mathbb{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{B_n\}.$$

Заметим, что для непрерывность меры (в случае пересечения множеств) равносильна σ-аддитивности. А если мера конечна, то и для объединения множеств.

Упражнение 10. Неравенства Бонферрони. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Доказать следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1} A_i\right\} &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{A_i\}, \\ \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1} A_i\right\} &\geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{A_i\} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}\{A_i \cap A_j\}. \end{aligned}$$

Доказательство. (a) Докажем первое неравенство. Рассмотрим множества $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i\right)$, обладающими следующими свойствами:

1) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$;
2) $B_i \cap B_j = \varnothing$ для $i \neq j$;
3) $\mathbb{P}\{B_i\} \leqslant \mathbb{P}\{A_i\}$.

Отсюда и из счётной аддитивности вероятностной меры следует, что

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{B_i\} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{A_i\}.$$

(b) Заметим, что $\mathbb{P}\{B_1\} = \mathbb{P}\{A_1\}$ и для $2 \leqslant k \leqslant n$ выполняется неравенство:

$$\mathbb{P}\{A_k\} = \mathbb{P}\left\{B_k \cup \left(A_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)\right)\right\} = \mathbb{P}\{B_k\} + \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{k-1}(A_k \cap A_i)\right\} \leqslant \mathbb{P}\{B_k\} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\{A_k \cap A_i\},$$

где последний переход справедлив по первой формуле Бонферрони. Складывая полученные неравенства для $k = 1, 2, \ldots, n$ и учитывая, что $\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{B_i\}$, получаем

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1} A_i\right\} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{A_i\} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}\{A_i \cap A_j\}.$$

□

Упражнение 11. Опыт состоит в подбрасывании монеты до тех пор, пока два раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Считается, что монетка «правильная», то есть орёл выпадает с вероятностью $\frac{1}{2}$. Задать вероятностное пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

1. событие A — опыт закончится до шестого бросания;

2. событие B — опыт закончится спустя чётное число подбрасываний монеты;

3. событие C — опыт закончится спустя нечётное число подбрасываний монеты;

4. событие D — опыт никогда не закончится.

Решение. Вариант 1: Пространством элементарных исходов Ω в данной задаче будут все варианты кол-во подбрасываний, т.е. $\Omega = \{2,3,4,5 \ldots\} = \mathbb{N}\backslash\{1\} = \{\omega_1, \omega_2 \ldots\}$ (это обозначение для всех элементарных исходов, тут сдвиг: $\omega_1 = 2$ и т.д.). В качестве σ-алгебры возьмём 2^Ω. Для любого $n > 1$ имеется ровно две последовательности длины n, у которых в каждой позиции буквы (о или р) отличны между собой, а две последние совпадают. Тогда

$$\mathbb{P}\{\omega_n\} = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{w_n}}$$

Итак, мы задали некоторую функцию $\mathbb{P}$ на элементарных исходах **дискретного пространства элементарных исходов** (дискретное пространство — не более чем счётное пространство) $\Omega = \{\omega_n | n \geqslant 2\}$.

Заметим, что $\mathbb{P}\{\omega\} \geqslant 0$ для всех $\omega \in \Omega$ и $\mathbb{P}\{\Omega\} = \sum\limits_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}\{\omega\} = 1$. Нетрудно показать, что числовая функция, заданная на элементарных исходах дискретного пространства Ω и удовлетворяющая двум указанным свойствам (первое свойство мы уже показали, осталась счетная аддитивность), порождает вероятностную меру на 2^Ω, а именно, для любого события $A \in 2^\Omega$ его вероятность задаётся формулой

$$\mathbb{P}\{A\} = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}\{\omega\}.$$

Вероятностное пространство построено.

Рассмотрим событие A_i — опыт завершился на i-м шаге, $i \geqslant 2$. Тогда $A_i = \{\omega_i\}$ при $i > 1$. Отсюда $\mathbb{P}\{A_i\} = \frac{1}{2^{i-1}}$ при $i > 1$.

1. $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup\limits_{i=2}^{5} A_i\right\} = \sum\limits_{i=2}^{5} \mathbb{P}\{A_i\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

2. $\mathbb{P}\{B\} = \left\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_{2i}\}\right\} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_{2i}\} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i-1}} = 2\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{2}{3}$.

3. $\mathbb{P}\{C\} = 1 - \mathbb{P}\{B\} = \frac{1}{3}$.

4. $\mathbb{P}\{D\} = 1 - \mathbb{P}\{\text{опыт закончится}\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\bigcup\limits_{i=2}^{\infty} A_i\right\} = 1 - \sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 0$.

Другой вариант: Пространством элементарных исходов Ω в данной задаче будут все конечные последовательности из чередующихся нулей и единиц, последние 2 цифры которых равны между собой (нулями будем обозначать выпадения орла, а единицами — выпадение решки); в качестве σ-алгебры возьмём 2^Ω. Для любого $n > 1$ имеется ровно два таких элементарных события ω_n^1 и ω_n^2, которые соответствуют двум реализациям последовательности длины, у которых в каждой позиции цифры отличны между собой. Их вероятности равны

$$\mathbb{P}\{\omega_n^1\} = \mathbb{P}\{\omega_n^2\} = \frac{1}{2^n}.$$

Итак, мы задали некоторую функцию $\mathbb{P}$ на элементарных исходах **дискретного пространства элементарных исходов** (дискретное пространство — не более чем счётное пространство) $\Omega = \{\omega_n^1, \omega_n^2 | n \geqslant 2\}$. Заметим, что $\mathbb{P}\{\omega\} \geqslant 0$ для всех $\omega \in \Omega$ и $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\{\omega\} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Нетрудно показать, что числовая функция, заданная на элементарных исходах дискретного пространства Ω и удовлетворяющая двум указанным свойствам, порождает вероятностную меру на 2^{Ω}, а именно, для любого события $A \in 2^{\Omega}$ его вероятность задаётся формулой

$$\mathbb{P}\{A\} = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}\{\omega\}.$$

Вероятностное пространство построено.

Рассмотрим событие A_i — опыт завершился на i-м шаге, $i \geqslant 2$. Тогда $A_i = \{\omega_i^1, \omega_i^2\}$ при $i > 1$. Отсюда $\mathbb{P}\{A_i\} = \frac{2}{2^i} = \frac{1}{2^{i-1}}$ при $i > 1$.

1. $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup\limits_{i=2}^{5} \mathbb{P}\{A_i\}\right\} = \sum\limits_{i=2}^{5} \mathbb{P}\{A_i\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.
2. $\mathbb{P}\{B\} = \left\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_{2i}\}\right\} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_{2i}\} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i-1}} = 2 \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{2}{3}$.
3. $\mathbb{P}\{C\} = 1 - \mathbb{P}\{B\} = \frac{1}{3}$.
4. $\mathbb{P}\{D\} = 1 - \mathbb{P}\{\text{опыт закончится}\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\bigcup\limits_{i=2}^{\infty} A_i\right\} = 1 - \sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 0$.

$\square$