Подготовили: Безносиков А.Н.
Шестаков А.А.

Теория вероятностей
«Случайный вектор»

Случайный вектор

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Определение 1. Отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется **случайным вектором**, если ξ — измеримое отображение, действующее из $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$.

Из определения следует, что каждая компонента ξ_i случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ является случайной величиной. Кроме того, верно и обратное утверждение: если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, то $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ является случайным вектором.

Для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ определена функция $\mathbb{P}_\xi\{B\} = \mathbb{P}\{\xi \in B\} = \mathbb{P}\{\omega \mid \xi(\omega) \in B\}$.

Определение 2. Функция $\mathbb{P}_\xi$ называется **распределением случайного вектора** ξ.

Распределение случайного вектора полностью задаётся с помощью **многомерной функции распределения**.

Определение 3. Функцией распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ называется функция $F_\xi \overset{\text{def}}{=} F_{\xi_1,\ldots,\xi_n} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, задаваемая формулой

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\}.$$

Свойства многомерной функции распределения:

1) $F_\xi(x_1, \ldots, x_n)$ — неубывающая по каждой компоненте функция;

2) $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ для всех $i, 1 \leqslant i \leqslant n$;

3) $\lim\limits_{x_i \to \infty} F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi^{(-i)}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, где $\xi^{(-i)} = (\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n)^\top$ для всех $i, 1 \leqslant i \leqslant n$ (свойства 2) и 3) называются *свойствами согласованности*);

4) $F_\xi(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна слева по каждой из компонент;

5) $\lim\limits_{x_1,\ldots,x_n \to \infty} F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

6) Определим $\Delta h_i F_\xi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = F_\xi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - F_\xi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

   Тогда для любого $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и для любых $h_1 > 0, \ldots, h_n > 0$, должно выполняться $\Delta h_1 \ldots \Delta h_n F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}\{x_1 \leq \xi_1 < x_1 + h_1, \ldots, x_n \leq \xi_n < x_n + h_n\} \geq 0$.

Важным отличием от одномерного случая является тот факт, что не любая функция, удовлетворяющая условиям 1)-5) является функцией распределения некоторого случайного вектора. Разберемся, что представляет из себя 6 свойство и зачем оно нужно.

Пример 1. Выразим вероятностную меру $\mathbb{P}\{\xi \in \Delta\}$, где $\Delta = [a_1^{(0)}, a_1^{(1)}) \times [a_2^{(0)}, a_2^{(1)}) \times \ldots \times [a_n^{(0)}, a_n^{(1)})$, через значения функции распределения в вершинах данного параллелепипеда. Перед тем, как записать общую формулу, рассмотрим случай $n = 2$. Проделав несложные пре-

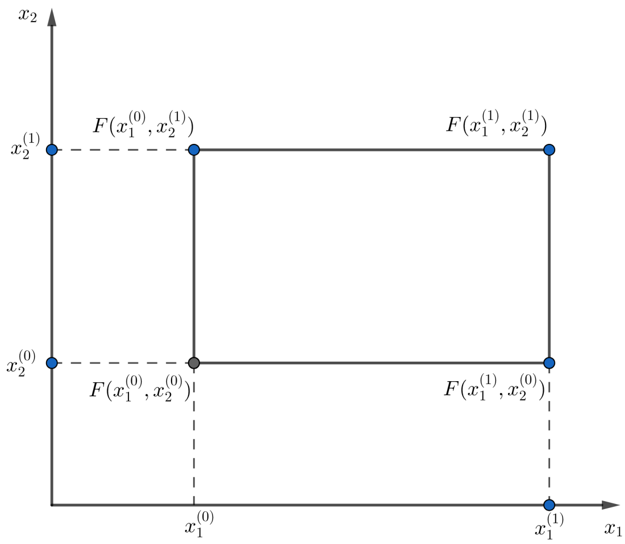

Рис. 1: Вероятностная мера клетки в случае $n = 2$.

образования, которые поясняются Рисунком 1, получим

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\xi \in \Delta\} &= \mathbb{P}\{x_1^{(0)} \leqslant \xi_1 < x_1^{(1)}, x_2^{(0)} \leqslant \xi_2 < x_2^{(1)}\} \\
&= \mathbb{P}\{x_1^{(0)} \leqslant \xi_1 < x_1^{(1)}, \xi_2 < x_2^{(1)}\} - \mathbb{P}\{x_1^{(0)} \leqslant \xi_1 < x_1^{(1)}, \xi_2 < x_2^{(0)}\} \\
&= \mathbb{P}\{\xi_1 < x_1^{(1)}, \xi_2 < x_2^{(1)}\} - \mathbb{P}\{\xi_1 < x_1^{(0)}, \xi_2 < x_2^{(1)}\} - \mathbb{P}\{\xi_1 < x_1^{(1)}, \xi_2 < x_2^{(0)}\} + \mathbb{P}\{\xi_1 < x_1^{(0)}, \xi_2 < \\
&= F_\xi(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) - F_\xi(x_1^{(0)}, x_2^{(1)}) - F_\xi(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}) + F_\xi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\
&= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2)} (-1)^{\sum_i \alpha_i} F_\xi(x_1^{(\alpha_1)}, x_2^{(\alpha_2)}),
\end{aligned}
$$

где суммирование ведётся по всем наборам (α_1, α_2) из нулей и единиц.

В случае $n > 2$ подобными выкладками можно получить общую формулу:

$$
\mathbb{P}\{\xi \in \Delta\} = \begin{cases} \sum\limits_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{\sum_i \alpha_i} F_\xi(x_1^{(\alpha_1)}, \ldots, x_n^{(\alpha_n)}), & \text{если } n \text{ чётно,} \\ \sum\limits_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{\sum_i \alpha_i - 1} F_\xi(x_1^{(\alpha_1)}, \ldots, x_n^{(\alpha_n)}), & \text{иначе.} \end{cases}
$$

Рассмотрим функцию:

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 > 1 \text{(все три условия одновременно)} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Можно заметить, что для такой F выполняются все свойства 1-5 выполняются, но возьмем например множество $\Delta = [\frac{1}{2}; 1) \times [\frac{1}{2}; 1)$.

$$\mathbb{P}\{\xi \in \Delta\} = F_\xi(1, 1) - F_\xi(1/2, 1) - F_\xi(1, 1/2) + F_\xi(1/2, 1/2) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1$$

Получаем отрицательную вероятность. Отсюда следует, что свойство 6 играет важную роль.

Справедлива теорема:

Теорема 1. Для того, чтобы функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ являлась функцией распределения некоторого случайного вектора необходимо и достаточно, чтобы были выполнены свойства 1-6.

Определение 4. Распределение случайного вектора ξ называется **дискретным**, если ξ может принимать конечное или счётное число значений $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$p_k = \mathbb{P}\{\xi = x_k\} > 0, \quad \sum_k p_k = 1.$$

Определение 5. Распределение $\mathbb{P}$ случайного вектора ξ называется **абсолютно непрерывным**, если существует такая неотрицательная функция $f(x)$, что для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{P}\{\xi \in B\} = \int\limits_B f(x)dx \text{ (интеграл Лебега).}$$

Функция $f(x)$ называется **плотностью распределения**.

Если задана функция распределения абсолютно непрерывного случайного вектора $F(x_1, \ldots, x_n)$, то

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} du_1 \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \ldots, u_n)du_n,$$

а плотность распределения выражается формулой

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}.$$

Для случайного вектора можно определеить понятие **математического ожидания**.

Определение 6. Математическим ожиданием случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ называется вектор, составленный из математических ожиданий соответствующих компонент:

$$\mathbb{E}\xi \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{E}\xi_1, \ldots, \mathbb{E}\xi_n)^\top$$

Определение 7. Матрицей ковариации случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ называется матрица $\mathbb{D}\xi = \Sigma$, у которой элементы — это ковариации соответствующих компонент вектора: $\Sigma_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \mathbb{E}\left[(\xi_i - \mathbb{E}\xi_i)(\xi_j - \mathbb{E}\xi_j)\right]$.

Заметим, что на диагонали матрицы ковариации стоят дисперсии компонент: $\Sigma_{ii} = \mathbb{D}\xi_i$. Более того, матрица ковариации существует тогда и только тогда, когда все дисперсии $\mathbb{D}\xi_i$ конечны. Удобно записывать матрицу ковариации в матричном виде:

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\left[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^\top\right],$$

где мат. ожидание матрицы — это матрица из мат. ожиданий соответствующих элементов исходной матрицы.

Матрица ковариации обладает следующими свойствами:

1) симметричность: $\Sigma^\top = \Sigma$ (в силу коммутативности ковариации);

2) неотрицательная полуопределённость: $\forall a \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow a^\top \Sigma a \geqslant 0$ (докажем потом).

Для произвольной борелевской функции $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ математическое ожидание случайной величины $g(\xi) = g(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ равно

$$\mathbb{E}[g(\xi)] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \ldots, x_n) d\mathbb{P}_\xi(x_1, \ldots, x_n).$$

В случае дискретного распределения формула принимает вид:

$$\mathbb{E}[g(\xi)] = \sum_{x_1, \ldots, x_n} g(x_1, \ldots, x_n) \mathbb{P}\{\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n\},$$

а в случае абсолютно непрерывного распределения:

$$\mathbb{E}[g(\xi)] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \ldots, x_n) f_\xi(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Пример 2. Рассмотрим некоторые примеры распределений.

1) полиномиальное распределение $\text{Poly}(k, p_1, \ldots, p_n)$:

$$\mathbb{P}\left(\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_n = k_n\right) = \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $p_i \geq 0$ для всех i, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$;

2) многомерное нормальное распределение (с невырожденной ковариационной матрицей) $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)},$$

где $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Sigma = \Sigma^T \succ 0$.

Упражнение 1. (Задача №24) В n ячейках случайно и независимо друг от друга размещаются k частиц так, что каждая из них попадает в i-ю ячейку с вероятностью p_i $(i = 1, \ldots, n, \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1)$. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ — случайный вектор, i-я компонента которого равна числу частиц в i-й ячейке. Покажите, что $\xi \sim \mathrm{Poly}(k, p_1, \ldots, p_n)$.

Решение. Число способов выбрать частицы так, что число частиц в ячейках принимает значения $k_1, \ldots, k_n$, равно $\frac{k!}{k_1! \ldots k_n!}$. Для каждого разбиения, вероятность того, что разбиение реализовалось, равна $p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n}$. □

Перепишем утверждение теоремы 2 из Семинара 3-4, используя функцию распределения случайного вектора. Теорема утверждает, что случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда

$$F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \ldots F_{\xi_n}(x_n).$$

Если независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ абсолютно непрерывны, то плотность их совместного распределения равна

$$f_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \ldots f_{\xi_n}(x_n).$$

Это важное утверждение, применимое не только к случайному вектору, но и к любому произведению независимых случайных величин.

Преобразования случайных векторов

В данном разделе нас будет интересовать то, как преобразуется распределение случайного вектора при различных преобразованиях, а также как преобразуются математическое ожидание и матрица ковариации.

Начнём с линейных преобразований. Пусть $\eta = A\xi + b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\mathbb{E}\eta = A\mathbb{E}\xi + b,$$

и ковариационная матрица

$$\mathbb{D}\eta = \mathbb{E}\left[(A\xi - A\mathbb{E}\xi)(A\xi - A\mathbb{E}\xi)^\top\right] = A\mathbb{E}\left[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^\top\right] A^\top = A\mathbb{D}[\xi]A^\top.$$

Используя это свойство, можно доказать неотрицательную полуопределённость матрицы $\mathbb{D}\xi$: для любого вектора $a \in \mathbb{R}^n$ дисперсия скалярной случайной величины $a^\top \xi$ равна $0 \leqslant \mathbb{D}[a^\top \xi] = a^\top \mathbb{D}[\xi] a$.

Если $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невырожденная матрица и ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, то η также имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$f_\eta(x) = \frac{f_\xi\left(A^{-1}(x - b)\right)}{|\det A|},$$

что следует из формулы замены переменных в интеграле.

Пример 3. Рассмотрим n независимых стандартных нормальных случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ и составленный из них вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$. Легко видеть, что $\mathbb{E}\xi = 0, \mathbb{D}\xi = I$ и $f_\xi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{x^\top x}{2}\right\}$, то есть ξ — стандартный нормальный случайный вектор.

Пусть $\eta = A\xi + m$, где $A^{n\times n}$ — невырожденная матрица. Тогда $\mathbb{E}\eta = m, \Sigma \overset{\text{def}}{=} \mathbb{D}\eta = AA^\top \succ 0$, а плотность распределения случайного вектора η равна

$$f_\eta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\det A|} \exp\left\{-\frac{(x-m)^\top (A^{-1})^\top A^{-1}(x-m)}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^\top \Sigma^{-1}(x-m)}{2}\right\},$$

то есть η имеет невырожденное нормальное распределение с мат. ожиданием m и матрицей ковариации Σ: $\eta \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$. В силу того, что для любой положительно определённой матрицы $\Sigma \succ 0$ существует разложение $\Sigma = A^\top A$, то любое невырожденное многомерное нормальное распределение можно получить линейным преобразованием из стандартного распределения. Существует и обратное преобразование: $\xi = A^{-1}\eta - A^{-1}m$.

Отсюда следует, что из одного невырожденного нормального случайного вектора можно получить любой другой невырожденные нормальный случайный вектор при помощи линейного преобразования, т.е. пусть дан вектор $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, преобразуем его так $\eta = A\xi + b$, то

$$\eta \sim \mathcal{N}(A\mu + b; A\Sigma A^T)$$

Заметим, что из *некореллированности* компонент многомерного нормального случайного вектора, т. е. из диагональности матрицы $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2)$, следует также их *независимость*:

$$\begin{aligned}
f_\eta(x) &= \tfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} \exp\left\{-\tfrac{(x-m)^\top \Sigma^{-1}(x-m)}{2}\right\} \\
&= \tfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\sigma_1^2 \ldots \sigma_n^2}} \exp\left\{-\frac{\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \ldots + \frac{(x_n-m_n)^2}{\sigma_n^2}}{2}\right\} \\
&= \prod_{i=1}^n \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left\{-\tfrac{(x_i-m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\} \\
&= \prod_{i=1}^n f_{\eta_i}(x_i),
\end{aligned}$$

причём $\eta_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$.

Теперь рассмотрим произвольное гладкое преобразование случайного вектора: $\eta = \varphi(\xi)$. Если ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью f_ξ, а отображение φ — гладкое и биективное, то

$$f_\eta(x) = \frac{f_\xi\left(\varphi^{-1}(x)\right)}{|J(x)|},$$

где $J(x) \overset{\text{def}}{=} \det \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)$ — якобиан преобразования в точке x.

Маргинальные и условные распределения

Определение 8. Распределение некоторого подвектора ξ' случайного вектора ξ называется **маргинальным**.

Заметим, что если случайный вектор ξ' соответствует компонентам $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}$, то если в $F_\xi(x_1, \dots, x_n)$ устремить переменные $\{x_i\}_{i=1}^n \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ к бесконечности, то мы получим функцию распределения $F_{\xi'}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ вектора ξ'.

В случае, когда ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, то плотность распределения подвектора $\xi' = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k})^\top$ определяется через плотность распределения ξ по формуле:

$$f_{\xi'}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_{j_1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_{j_2} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{j_{n-k}},$$

$$\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}.$$

Другими словами, чтобы получить плотность распределения подвектора ξ' случайного вектора ξ, нужно проинтегрировать плотность распределения случайного вектора ξ по всем переменным, кроме тех, которые соответствуют подвектору ξ', то есть по всем переменным, кроме $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$.

Упражнение 2. Спортсмен стреляет по мишени. Центр мишени - начало координат. Вертикальная и горизонтальная точки попадания пули - независимые случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0;1)$. Покажите, что расстояние от точки попадания до центра имеет плотность распределения $r \exp -r^2/2$ при $r \geq 0$. Найти медиану этого распределения.

Решение. Т.к. X, Y (с.в. соответствующие координатам) - независимые случайные величины, то:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-x^2/2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-y^2/2\right) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-(x^2+y^2)/2\right)$$

Теперь пересядем в полярную систему координат $(r;\varphi)$. Найдем в ней $f_{R\Phi}(r;\varphi)$. Воспользуемся формулой:

$$|J(x,y)| = \frac{1}{|J(r,\varphi)|} = \frac{1}{r}$$

$$f_{R\Phi}(r;\varphi) = \frac{\frac{1}{2\pi}\exp\left(-(r^2)/2\right)}{\frac{1}{r}} = \frac{1}{2\pi} r \exp\left(-(r^2)/2\right)$$

Нам нужно маргинальное распределение $f_R(r)$:

$$f_R(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{R\Phi}(r;\varphi) d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} r \exp\left(-(r^2)/2\right) d\varphi = r \exp\left(-(r^2)/2\right)$$

Осталось посчитать медиану, для непрерывного распределения медиана есть решение уравнения $F(x) = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^R r\exp\left(-(r^2)/2\right)dr = \frac{1}{2}$$

$$R = \sqrt{\ln 4}$$

$\square$

Пример 4. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top \sim \mathrm{Poly}(k, p_1, \ldots, p_n)$. Покажите, что $\xi_i \sim \mathrm{Binom}(k, p_i), 1 \leqslant i \leqslant n$.

Решение. Действительно, для произвольного $0 \leqslant k_i \leqslant k$ имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\xi = k_i\} &= \sum_{k_1+\ldots+k_{i-1}+k_{i+1}+\ldots+k_n=k-k_i} \tfrac{k!}{k_1!\ldots k_n!} p_1^{k_1}\ldots p_n^{k_n} \\
&= \tfrac{k!}{k_i!(k-k_i)!} p_i^{k_i} \sum_{k_1+\ldots+k_{i-1}+k_{i+1}+\ldots+k_n=k-k_i} \tfrac{(k-k_i)!}{k_1!\ldots k_{i-1}!k_{i+1}!\ldots k_n!} p_1^{k_1}\ldots p_{i-1}^{k_{i-1}} p_{i+1}^{k_{i+1}}\ldots p_n^{k_n} \\
&= \tbinom{k}{k_i} p_i^{k_i}\left(p_1+\ldots+p_{i-1}+p_{i+1}+\ldots+p_n\right)^{k-k_i} \\
&= \tbinom{k}{k_i} p_i^{k_i}(1-p_i)^{k-k_i}.
\end{aligned}$$

$\square$

Определение 9. Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $B \in \mathcal{F}$ — событие ненулевой вероятностной меры. **Условной функцией распределения случайной величины** ξ относительно события B называется

$$F_\xi(x|B) = \mathbb{P}\{\xi < x|B\}.$$

Если случайные величины ξ и η имеют совместную функцию распределения $F_{\xi,\eta}(x, y)$, а η имеет маргинальную функцию распределения $F_\eta(y)$, то

$$F_\xi(x|\eta < y) = \frac{F_{\xi,\eta}(x, y)}{F_\eta(y)}.$$

До сих пор условная вероятность была определена только при условии события ненулевой вероятностной меры. Рассмотрим следующий пример.

Пример 5. Пусть $\xi \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Если $\xi = x$, то n раз независимо подбрасывается монета, у которой вероятность выпадения «орла» равна x. Пусть η – число появлений «орла» при n независимых подбрасываниях такой монеты. Чему равна условная вероятность $\mathbb{P}\{\eta = k|\xi = x\}$?

Решение. $\mathbb{P}\{\eta = k|\xi = x\} = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$. $\square$

Определение 10. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, η — случайная величина, $A \in \mathcal{F}$. **Условной вероятностью** $\mathbb{P}(A|\eta = y)$ назовем функцию $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ такую, что для любого борелевского множества B выполнено

$$\mathbb{P}\left\{A \cap \{\omega : \eta \in B\}\right\} = \int_B m(y)d\mathbb{P}_\eta(y)$$

Если ξ и η – абсолютно непрерывные случайные величины, то условная функция распределения равна

$$F_\xi(x|\eta = y) = \mathbb{P}\{\xi < x|\eta = y\} = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f_{\xi,\eta}(u,y)}{f_\eta(y)} du,$$

а условная плотность вычисляется по формуле

$$f_\xi(x|\eta = y) = \frac{dF_\xi(x|\eta = y)}{dx} = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)}.$$

Пример 6. Пусть (ξ, η) — абсолютно непрерывный случайный вектор с плотностью $f_{\xi,\eta}$. Покажите, что плотность распределения суммы компонент $\zeta = \xi + \eta$ равна

$$f_\zeta(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, u-x)dx \qquad \textit{(формула свертки).}$$

Решение 1. Во-первых,

$$\begin{aligned} F_\zeta(z) &= \mathbb{P}\{\xi + \eta < z\} \\ &= \int\limits_{x+y<z} f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy \\ &\overset{x=x, u=x+y}{=} \int\limits_{u<z} f_{\xi,\eta}(x,u-x)dxdu \\ &= \int\limits_{-\infty}^{z} du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,u-x)dx. \end{aligned}$$

Во-вторых,

$$F_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} f_\zeta(u)du,$$

откуда следует, что

$$f_\zeta(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,u-x)dx.$$

□

Решение 2. Рассмотрим линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \zeta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f_{\zeta,\theta}(x,z) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,z-x)}{|\det A|} = f_{\xi,\eta}(x,z-x)$, а плотность маргинального распределения ζ равна $f_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,z-x)dx$. □

Упражнение 3. Пусть $(\xi, \eta)^\top \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$, где $m = (m_\xi, m_\eta)^\top$ и

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите условное распределение ξ при $\eta = y$.

Решение. Найдём такое линейное преобразование $\xi' = a\xi + b\eta$, чтобы ξ' и η были независимы, что эквивалентно $\mathrm{cov}(\xi', \eta) = 0$ (как мы уже доказали, некореллированность нормальных случайных величин эквивалентна их независимости). Тогда $\mathrm{cov}(\xi', \eta) = a\mathrm{cov}(\xi, \eta) + b\mathbb{D}\eta = a\rho + b = 0$, откуда $b = -a\rho$. Выберем $a = 1$. Тогда $\xi' = \xi - \rho\eta, \mathbb{E}\xi' = \mathbb{E}\xi - \rho\mathbb{E}\eta = m_\xi - \rho m_\eta, \mathbb{D}\xi' = \mathbb{D}\xi - 2\rho\mathrm{cov}(\xi, \eta) + \rho^2\mathbb{D}\eta = 1 - \rho^2$. Кроме того, ξ' имеет нормальное распределение как сумма нормальных случайных величин. В силу независимости ξ' и η получаем

$$\mathbb{P}_{\xi|\eta=y} = \mathbb{P}_{\xi'+\rho\eta|\eta=y} = \mathbb{P}_{\xi'+\rho y} = \mathcal{N}(m_\xi + \rho y - \rho m_\eta, 1 - \rho^2).$$

□

Упражнение 4. Пусть $\xi, \eta \sim \mathrm{Exp}(1)$ — независимые случайные величины. Найдите распределение случайной величины $\zeta = \frac{\xi}{\xi+\eta}$.

Решение. Рассмотрим преобразование случайного вектора $(\xi, \eta) \to (\zeta, \theta)$, где $\zeta = \frac{\xi}{\xi+\eta}, \theta = \xi+\eta$. Обратное преобразование задаётся формулами

$$\xi = \theta\zeta, \quad \eta = \theta - \theta\zeta.$$

Якобиан обратного преобразования:

$$J(z, u) = \det\begin{pmatrix} u & z \\ -u & 1-z \end{pmatrix} = u.$$

Тогда совместная плотность ζ, θ равна

$$f_{\zeta,\theta}(z, u) = f_{\xi,\eta}(uz, u - uz)|J(z, u)| = ue^{-u}, u \geqslant 0, 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

Как мы видим, плотность не зависит от z при $z \in [0, 1]$, а значит, маргинальное распределение ζ — равномерное на $[0, 1]$. □

Упражнение 5. Пусть независимые случайные величины $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{Poisson}(\beta)$. Найдите $\mathbb{P}\{X = k|X + Y = n\}$.

Решение.

$$\mathbb{P}\{X = k|X+Y = n\} = \frac{\mathbb{P}\{X = k, X + Y = n\}}{\mathbb{P}\{X + Y = n\}} = \frac{\mathbb{P}\{X = k, Y = n - k\}}{\mathbb{P}\{X + Y = n\}} = \frac{\mathbb{P}\{X = k\}\mathbb{P}\{Y = n - k\}}{\mathbb{P}\{X + Y = n\}} =$$

$$= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}/k! \cdot \beta^{n-k}e^{-\beta}/(n-k)!}{(\lambda+\beta)^n e^{-(\lambda+\beta)}/n!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k\beta^{n-k}}{(\lambda+\beta)^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\right)^k\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\beta}\right)^{n-k}$$

Получили биномиальное распределение. □