Подготовил: Безносиков А.Н.

Теория вероятностей «Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Центральная предельная теорема»

Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

Рассмотрим для начала последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих распределение Бернулли.

Теорема 1. (Локальная теорема Муавра-Лапласа). Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ с распределением $\mathrm{Be}(p)$. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

Пусть последовательность целых чисел $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что существуют числа $a < b$, для которых выполняется неравенство

$$a \leqslant \frac{c_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\frac{\mathbb{P}\{S_n = c_n\}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(c_n-np)^2}{2np(1-p)}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Доказательство. Пусть $t_n = \frac{c_n - np}{n}$. Тогда

$$\frac{a\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant t_n \leqslant \frac{b\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}},$$

а значит, $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $t_n = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), n \to \infty$. Как мы знаем, $S_n \sim \mathrm{Binom}(n, p)$. Кроме того, по формуле Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Используя формулу Стирлинга, равенство $c_n = np + t_n n$ и $t_n = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), n \to \infty$, получим

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{S_n = c_n\} &= \binom{n}{c_n} p^{c_n}(1-p)^{n-c_n} \\
&\sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{2\pi\sqrt{c_n(n-c_n)}\left(\frac{c_n}{e}\right)^{c_n}\left(\frac{n-c_n}{e}\right)^{n-c_n}} p^{c_n}(1-p)^{n-c_n} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{2\pi n\sqrt{(p+t_n)(1-p-t_n)}(n(p+t_n))^{n(p+t_n)}(n(1-p-t_n))^{n(1-p-t_n)}} p^{n(p+t_n)}(1-p)^{n(1-p-t_n)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi n(p+t_n)(1-p-t_n)}}\left(\frac{p}{p+t_n}\right)^{n(p+t_n)}\left(\frac{1-p}{1-p-t_n}\right)^{n(1-p-t_n)} \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\left(1+\frac{t_n}{p}\right)^{-n(p+t_n)}\left(1-\frac{t_n}{1-p}\right)^{-n(1-p-t_n)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\exp\left(-n(p+t_n)\ln\left(1+\frac{t_n}{p}\right) - n(1-p-t_n)\ln\left(1-\frac{t_n}{1-p}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\exp\left(-nt_n - \frac{nt_n^2}{p} + \frac{nt_n^2}{2p} + nt_n - \frac{nt_n^2}{1-p} + \frac{nt_n^2}{2(1-p)} + \underbrace{o\left(nt_n^2\right)}_{o(1)}\right) \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\exp\left(-\frac{nt_n^2}{2p(1-p)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\exp\left(-\frac{(c_n-np)^2}{2np(1-p)}\right).
\end{aligned}$$

□

Замечание 1. Отметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}e^{-\frac{(c_n-np)^2}{2np(1-p)}} = f\left(c_n\right),$$

где $f(\cdot)$ — плотность распределения $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

А результат локальной теоремы при больших n можно воспринимать так:

$$\mathbb{P}\{S_n = c_n\} \approx f(c_n)$$

Упражнение 1. Игральную кость подбрасывают 500 раз. Какова вероятность того, что цифра 1 при этом выпадет 50 раз?

Решение. Введем случайную величину ξ: $\mathbb{P}\{\xi = 1\} = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = \frac{5}{6}$ (успех - выпала "1"). Мы попали в пределы локальной теоремы с $n = 500$, $c_n = 50$ и $p = \frac{1}{6}$. Откуда:

$$\mathbb{P}\{S_n = c_n =\} \approx f(c_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}e^{-\frac{(c_n-np)^2}{2np(1-p)}} = f\left(c_n\right) \approx 0$$

□

Сходимость в доказанной локальной теореме равномерная, поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. (Интегральная теорема Муавра-Лапласа). Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ с распределением $\mathrm{Be}(p)$. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k.$$

Тогда
$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1).$$
В частности, для любых $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ выполнено
$$\mathbb{P}\left\{a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(b) - \Phi(a),$$
где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Доказательство. Докажем это утверждения, используя метод характеристических функций. Пусть $\eta_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Так как $S_n \sim \mathrm{Binom}(n,p)$, то, как мы знаем, её характеристическая функция задаётся формулой:
$$\varphi_{S_n}(t) = \left(1 + p(e^{it} - 1)\right)^n.$$
Используя это и свойства характеристических функций (а именно, из формулы $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$), получаем
$$\begin{aligned}
\varphi_{\eta_n}(t) &= e^{-\frac{itnp}{\sqrt{np(1-p)}}} \cdot \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&= e^{-\frac{itnp}{\sqrt{np(1-p)}}} \cdot \left(1 + p\left(e^{\frac{it}{\sqrt{np(1-p)}}} - 1\right)\right)^n \\
&= \left(e^{-\frac{itp}{\sqrt{np(1-p)}}}(1-p) + pe^{\frac{it(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)^n = \left(e^{-\frac{it\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}}}(1-p) + pe^{\frac{it\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}}\right)^n \\
&= \left((1-p) - (1-p)\frac{it\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} - (1-p)\frac{t^2 p}{2n(1-p)} + p + p\frac{it\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} - p\frac{t^2(1-p)}{2np} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_\eta(t),
\end{aligned}$$
где $\varphi(t) \sim \mathcal{N}(0,1)$. Следовательно, по теореме Леви о непрерывности $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1)$. ☐

Упражнение 2. Монета подбрасывается 100, 900 и 10000 раз. Оценим в каждом из случаев вероятность того, что частота выпадения герба отличается от половины на одну сотую или более

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой, а именно для любых $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ выполнено
$$\mathbb{P}\left\{a \leqslant S \leqslant b\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Получаем:

$$\mathbb{P}\left\{0,49 \cdot n \leqslant S \leqslant 0,51 \cdot n\right\} \approx \Phi\left(\frac{0,51 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{0,49 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

В данном случае $p = \frac{1}{2}$, $n = 100, 900, 10000$.

$$\mathbb{P}\left\{49 \leqslant S_{100} \leqslant 51\right\} \approx 0,159 \to \mathbb{P}\left\{|S_{100} - 50| \geqslant 1\right\} \approx 0,841$$

$$\mathbb{P}\left\{441 \leqslant S_{900} \leqslant 459\right\} \approx 0,451 \to \mathbb{P}\left\{|S_{900} - 450| \geqslant 9\right\} \approx 0,549$$

$$\mathbb{P}\left\{4900 \leqslant S_{10000} \leqslant 5100\right\} \approx 0,954 \to \mathbb{P}\left\{|S_{10000} - 5000| \geqslant 100\right\} \approx 0,046$$

□

Упражнение 3. В тесто для выпечки булок с изюмом замешано N изюмин. Всего из данного теста выпечено K булок. Оцените вероятность того, что в случайно выбранной булке число изюмин находится в пределах от a до b.

Решение. Будем считать, что N достаточно большое число, чтобы можно было воспользоваться интегральной теоремой Муавра-Лапласа. Но где же здесь она возникает? Будем считать, что «изюмины независимы», то есть все события $A_{ij} = \{i\text{-я изюмина попала в } j\text{-ю булку}\}$ независимы в совокупности. Рассмотрим случайные величины

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & k\text{-я изюмина попала в случайно выбранную нами булку,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\xi_k = 1\right\} &= \sum_{i=1}^{K} \mathbb{P}\{\xi_k = 1 | \text{ была выбрана } i\text{-я булка}\}\mathbb{P}\{\text{была выбрана } i\text{-я булка}\} \\ &= \sum_{i=1}^{K} \mathbb{P}\{k\text{-я изюмина попала в } i\text{-ю булку}\}\tfrac{1}{K} \\ &= K \cdot \tfrac{1}{K^2} = \tfrac{1}{K}, \end{aligned}$$

т. е. ξ_k — бернуллиевская случайная величина с параметром $p = \frac{1}{K}$. Тогда число изюмин в случайно выбранной нами булке есть случайная величина

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \xi_k.$$

Тогда по интегральной теореме Муавра-Лапласа

$$\mathbb{P}\left\{A \leqslant \frac{S_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leqslant B\right\} \approx \Phi(B) - \Phi(A), \quad A < B,$$

откуда

$$\mathbb{P}\left\{Np + A\sqrt{Np(1-p)} \leqslant S_N \leqslant Np + B\sqrt{Np(1-p)}\right\} \approx \Phi(B) - \Phi(A).$$

Отсюда следует, что вероятность, что в случайно выбранной булке число изюмин будет находиться в отрезке $[a, b]$, примерно равна

$$\mathbb{P}\{a \leqslant S_N \leqslant b\} \approx \Phi\left(\frac{b - \frac{N}{K}}{\sqrt{\frac{N(K-1)}{K^2}}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{N}{K}}{\sqrt{\frac{N(K-1)}{K^2}}}\right) = \Phi\left(\frac{bK - N}{\sqrt{N(K-1)}}\right) - \Phi\left(\frac{aK - N}{\sqrt{N(K-1)}}\right).$$

□

Центральная предельная теорема

Получим результаты, имеющие похожий на интегральную теорему Муавра-Лапласа вид, но для более широкого класса последовательностей случайных величин.

Теорема 3. (Классическая ЦПТ). Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с $\mathbb{E}\xi_n = m$ и $\mathbb{D}\xi_n = \sigma^2$. Пусть $\eta_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - \mathbb{E}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\right]}{\sqrt{\mathbb{D}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\right]}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k - m)}{\sigma\sqrt{n}}$. Тогда

$$\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Доказательство. Докажем методом характеристических функций. Пользуемся $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_{\xi}(at)$ и независимостью случайных величин:

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \varphi_{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k) - \frac{m\sqrt{n}}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma}}\left(\varphi_{\xi_n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n =$$

Разложим φ_{ξ_n} в ряд в окрестности 0 до $o\left(\frac{1}{n}\right)$, учитывая: $\varphi'_{\xi}(0) = i\mathbb{E}\xi = -im$ и $\varphi''_{\xi}(0) = -\mathbb{E}\left[\xi^2\right] = -\left(\mathbb{E}[\xi]\right)^2 - \mathbb{D}\xi = -m^2 - \sigma^2$:

$$\varphi_{\xi_n}(t) = 1 + \frac{imt}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{(m^2+\sigma^2)t^2}{2\sigma^2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Подставляем в выражение для φ_{η_n} и раскладываем логарифм до $o\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$\begin{aligned}\varphi_{\eta_n}(t) &= \exp\left(-\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma} + n\ln\left(1 + \frac{imt}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{(m^2+\sigma^2)t^2}{\sigma^2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{itm\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{(m^2+\sigma^2)t^2}{2\sigma^2} + \frac{m^2t^2}{2\sigma^2} + o(1)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_{\eta}(t),\end{aligned}$$

где $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$. Отсюда и из теоремы Леви о непрерывности получаем, что $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1)$.

□

Заметим, что из доказанной теоремы следует, что

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Данное утверждение можно обобщить на случай последовательностей случайных векторов (причём доказательство будет не сильно отличаться, от доказательства в одномерном случае).

Теорема 4. (Классическая ЦПТ для случайных векторов). Пусть $\{\vec{\xi_i}\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что $\mathbb{E}[\vec{\xi_n}] = \vec{m}$ и $\mathbb{E}\left[(\vec{\xi_n} - \vec{m})(\vec{\xi_n} - \vec{m})^\top\right] = \Sigma$, $\det \Sigma \neq 0$. Тогда

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \vec{\xi_k} - n\vec{m}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

Вообще говоря, сходимость к нормальному распределению для величин типа η_n из условия классической ЦПТ можно гарантировать и в более общем случае.

Теорема 5. (ЦПТ в форме Линдеберга). Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями. Обозначим

$$B_n^2 = \mathbb{D}\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k, \quad \eta_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1} \left(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k\right),$$

и для каждого $\tau > 0$ рассмотрим события

$$A_{n,k,\tau} = \left\{|\xi_k - \mathbb{E}\xi_k| > \tau B_n\right\}.$$

Пусть для всех $\tau > 0$ выполнено **условие Линдеберга**:

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k)^2 \, \mathbb{I}_{A_{n,k,\tau}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-\mathbb{E}\xi_k| > \tau B_n} (x - \mathbb{E}\xi_k)^2 \, dF_{\xi_k}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тогда равномерно по $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k) < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

В частности,

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Упражнение 4. Величина S – сумма 100 чисел, каждое из которых сгенерировано датчиком случайных чисел. Датчики вырабатывают случайные числа, равномерно распределённые в интервале $[0;1]$. Найти пределы, в которые с вероятностью, не меньшей $0,9$, попадёт S.

Решение. Рассмотрим ξ_i случайную величину - значение i генератора. Тогда $\mathbb{E}\xi_i = \frac{1}{2}$, $\mathbb{D}\xi_i = \frac{1}{12}$. $S = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$.

Воспользуемся классической ЦПТ:

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0;1)$$

Будем искать отрезок симметричный относительно мат.ожидания:

$$\Phi(t) - \Phi(-t) = 0,9 \quad \Phi(t) = 0,95$$

Откуда $t = 1,64$.

Т.е.

$$\mathbb{P}\{-t \le \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \le t\} = \mathbb{P}\{-t\sigma\sqrt{n} + nm \le S_n \le t\sigma\sqrt{n} + nm\} = \mathbb{P}\{45,27 \le S_n \le 54,73\} = 0,9$$

□

Упражнение 5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная перестановка на n элементах (X_i — номер позиции, в которую переходит i-й элемент; все перестановки равновероятны). Будем говорить, что X_k образует инверсию с X_j, если $j > k$ и $X_k > X_j$. Тогда случайная величина

$$\xi_k = \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{I}_{X_k > X_j}$$

равна числу инверсий X_k с $X_{k+1}, \ldots, X_n$, а случайная величина

$$T = \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k$$

равна общему числу инверсий в перестановке. Найдите $\mathbb{E}T$ и $\mathbb{D}T$. Что можно сказать о предельном распределении величины $\frac{T - \mathbb{E}T}{\sqrt{\mathbb{D}T}}$?

Решение. Для начала найдём вероятности $\mathbb{P}\{\xi_k = r\}$ для $0 \leqslant r \leqslant n-k$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi_k = r\} &= \mathbb{P}\left\{\text{среди } X_{k+1}, \ldots, X_n \text{ ровно } r \text{ чисел} < X_k\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\text{среди } X_k, \ldots, X_n \text{ число } X_k \text{ является } (r+1)\text{-м по возрастанию}\right\} \\ &= \tfrac{(n-k)!}{(n-k+1)!} = \tfrac{1}{n-k+1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbb{E}\xi_k = \frac{1}{n-k+1} \sum_{r=0}^{n-k} r = \frac{n-k}{2},$$

и

$$\mathbb{E}T = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\xi_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

Заметим, что случайная величина ξ_k не зависит от того, как переставлены числа до X_k (имеется в виду, что числа $X_1, \dots, X_{k-1}$ можно переставить между собой как угодно, не поменяв при этом значение ξ_k) и как переставлены числа после X_k (числа $X_{k+1}, \dots, X_n$ можно переставить между собой как угодно, не поменяв при этом значение ξ_k). Кроме того, ξ_k зависит только порядка X_k по возрастанию среди чисел $X_k, \dots, X_n$, но не зависит от порядка $X_{k+1}, \dots, X_n$. Следовательно, ξ_k не зависит от значений $\xi_{k+1}, \dots, \xi_{n-1}$, т. е. для любого набора $r_k, \dots, r_n$

$$\mathbb{P}\{\xi_k = r_k | \xi_{k+1} = r_{k+1}, \dots, \xi_{n-1} = r_{n-1}\} = \mathbb{P}\{\xi_k = r_k\},$$

в частности, для любого набора индексов $k+1 \leqslant d_1 < d_2 < \dots < d_m \leqslant n-1$

$$\mathbb{P}\{\xi_k = r_k | \xi_{d_1} = r_{d_1}, \dots, \xi_{d_m} = r_{d_m}\} = \mathbb{P}\{\xi_k = r_k\}.$$

Отсюда следует, что для любого набора индексов $1 \leqslant d_1 < \dots < d_m \leqslant n-1$ и любого набора $r_1, \dots, r_m$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\xi_{d_1} = r_1, \dots, \xi_{d_m} = r_n\} &= \mathbb{P}\{\xi_{d_1} = r_1, \dots, \xi_{d_{m-1}} = r_{m-1} | \xi_{d_m} = r_m\} \mathbb{P}\{\xi_{d_n} = r_n\} \\ &= \mathbb{P}\{\xi_{d_1} = r_1, \dots, \xi_{d_{m-1}} = r_{m-1}\} \mathbb{P}\{\xi_{d_m} = r_m\} = \dots = \prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}\{\xi_{d_k} = r_k\}.\end{aligned}$$

В частности, отсюда следует, что ξ_k попарно независимы, откуда получаем, что

$$\mathbb{D}T = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{D}\xi_k.$$

Вычислим $\mathbb{D}\xi_k$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_k^2\right] &= \tfrac{1}{n-k+1} \sum_{r=0}^{n-k} r^2 = \tfrac{1}{n-k+1} \cdot \tfrac{(n-k)(n-k+1)(2n-2k+1)}{6} = \tfrac{(n-k)(2n-2k+1)}{6}, \\ \mathbb{D}\xi_k &= \mathbb{E}\left[\xi_k^2\right] - \left(\mathbb{E}\xi_k\right)^2 = \tfrac{(n-k)(2n-2k+1)}{6} - \tfrac{(n-k)^2}{4} = (n-k) \cdot \tfrac{4n-4k+2-3n+3k}{12} = \tfrac{(n-k)(n-k+2)}{12} \\ &= \tfrac{n^2-2nk+k^2+2n-2k}{12} = \tfrac{n^2+2n}{12} - \tfrac{(n+1)k}{6} + \tfrac{k^2}{12}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}\mathbb{D}T &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\tfrac{n^2+2n}{12} - \tfrac{(n+1)k}{6} + \tfrac{k^2}{12} \right) \\ &= \tfrac{n(n-1)(n+2)}{12} - \tfrac{n+1}{6} \cdot \tfrac{n(n-1)}{2} + \tfrac{(n-1)n(2n-1)}{72} = \tfrac{n(n-1)}{12} + \tfrac{n(n-1)(2n-1)}{72} \\ &= \tfrac{n(n-1)(2n+5)}{72} \sim \tfrac{n^3}{36}, n \to \infty.\end{aligned}$$

Теперь заметим, что для любого $\tau > 0$ существует такое число n_0, что для любого $n > n_0$

$$\mathbb{I}_{A_{n,\tau}} = 0,$$

где $A_{n,\tau} = \{|\xi_k - \mathbb{E}\xi_k| > \tau\sqrt{\mathbb{D}T}\}$, т. к. $|\xi_k - \mathbb{E}\xi_k| \lesssim n$, а $\sqrt{\mathbb{D}T} \sim \frac{n^{\frac{3}{2}}}{6}$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что для достаточно больших n выполнено условие Линдеберга:

$$\frac{1}{\mathbb{D}T} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k - \mathbb{E}\xi_k|^2 \mathbb{I}_{A_{n,\tau}}\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следовательно,

$$\frac{T - \mathbb{E}T}{\sqrt{\mathbb{D}T}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(0,1),$$

а значит,

$$\frac{T - \frac{n(n-1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n-1)(2n+5)}{72}}} \sim \frac{T - \frac{n^2}{4}}{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{6}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(0,1),$$

т. е. при больших n распределение T можно приблизить распределением $\mathcal{N}\left(\frac{n^2}{4}, \frac{n^3}{36}\right)$. Например, это может удобно для подсчёта вероятностей вида $\mathbb{P}\{a \leqslant T \leqslant b\}$. $\square$

Условие Линдеберга требует знания хвостов распределения ξ_k. Однако его можно упростить и перейти к ограничению моментов.

Теорема 6. (ЦПТ в форме Ляпунова). Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями. Обозначим

$$B_n^2 = \mathbb{D}\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k, \quad \eta_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1} (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k).$$

Пусть для некоторого $\delta > 0$ выполнено **условие Ляпунова**:

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k - \mathbb{E}\xi_k|^{2+\delta}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тогда равномерно по $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k) < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

В частности,

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Доказательство. Достаточно показать, что из условия Ляпунова следует условие Линдеберга. Действительно, для любого $\tau > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-\mathbb{E}\xi_k|>\tau B_n} (x - \mathbb{E}\xi_k)^2 \, dF_{\xi_k}(x) &= \frac{1}{B_n^2 \tau^\delta B_n^\delta} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-\mathbb{E}\xi_k|>\tau B_n} (\tau B_n)^\delta (x - \mathbb{E}\xi_k)^2 \, dF_{\xi_k}(x) \\
&\leqslant \frac{1}{\tau^\delta B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-\mathbb{E}\xi_k|>\tau B_n} |x - \mathbb{E}\xi_k|^{2+\delta} \, dF_{\xi_k}(x) \\
&\leqslant \frac{1}{\tau^\delta} \cdot \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k - \mathbb{E}\xi_k|^{2+\delta}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Замечание 2. Существуют результаты о сходимости и к другим распределениям. Например, мы уже доказали предельную теорему Пуассона, которая утверждает, что если $\xi_n \sim \mathrm{Binom}(n, p_n)$ и $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$, то $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{Poisson}(\lambda)$.

Замечание 3. Отметим, что ЦПТ в форме Линдеберга и Ляпунова дают равномерную сходимость $\mathbb{P}\left\{\frac{1}{B_n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k) < x\right\}$ по $x \in \mathbb{R}$ к $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, что сильнее поточечной сходимости функций распределения к функции распределения нормальной случайной величины (что по сути и есть сходимость по распределению), т. е. эти результаты достаточно сильные. Однако эти теоремы не устанавливают скорости сходимости к нормальному распределению.

Оценивание скорости сходимости в центральной предельной теореме

Рассмотрим без доказательства следующий факт.

Теорема 7. (Теорема Берри-Эссеена). Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. Обозначим

$$\eta_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}{\sigma\sqrt{n}}$$

Пусть $\mathbb{E}\left[|\xi_1|^3\right] \leqslant \rho$. Тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}\{\eta_n < x\} - \mathbb{P}\{\zeta < x\}| \leqslant \frac{c\rho}{\sigma^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}}, \quad \zeta \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Замечание 4. Известно, что $0.4 \leqslant c < 0.8$. Если есть интерес разобраться с результатами в этой области, то стоит посмотреть ссылки в статье в Википедии.