Подготовил: Безносиков А.Н.

Теория вероятностей «Неравенства. Сходимость последовательностей случайных величин»

Неравенства Маркова, Чебышёва, Чернова

Теорема 1. (Неравенство Маркова). Пусть ξ — неотрицательная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Тогда для любого $t > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}(\xi \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi}{t}.$$

Доказательство.

$$\mathbb{P}(\xi \geq t) = \int\limits_{x \geqslant t} dF_\xi(x) \leqslant \int\limits_{x \geqslant t} \frac{x}{t} dF_\xi(x) \leqslant \int\limits_{x \geqslant 0} \frac{x}{t} dF_\xi(x) = \frac{\mathbb{E}\xi}{t}.$$

□

Приведем несколько следствий из неравенства Маркова.

Следствие 1. (Обобщенное неравенство Маркова). Пусть неотрицательная функция $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (нестрого) монотонно возрастает на положительной полуоси, а неотрицательная случайная величина ξ такова, что $\mathbb{E}[g(\xi)] < \infty$. Тогда для любого $t > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}\{\xi \geqslant t\} \leqslant \frac{\mathbb{E}[g(\xi)]}{g(t)}.$$

Доказательство.

$$\mathbb{P}\{\xi \geqslant t\} \leqslant \mathbb{P}\left\{g(\xi) \geqslant g(t)\right\} \leqslant \frac{\mathbb{E}[g(\xi)]}{g(t)}.$$

□

Следствие 2. (Неравенство Чебышёва). Пусть ξ — случайная величина с конечной дисперсией. Тогда для любого $t > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}\left\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant t\right\} \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}.$$

Доказательство. Применим неравенство Маркова к случайной величине $(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$:

$$\mathbb{P}\left\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant t\right\} = \mathbb{P}\left\{|\xi - \mathbb{E}\xi|^2 \geqslant t^2\right\} \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[(\xi - \mathbb{E}\xi)^2\right]}{t^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}.$$

□

Упражнение 1. Докажите экспоненциальное неравенство Чебышёва:

$$\mathbb{P}\{X \geq a\} \leq \frac{\mathbb{E}e^{tX}}{e^{ta}}, t > 0, a \in \mathbb{R}$$

Решение. Воспользуемся неравенством Маркова:

$$\mathbb{P}\{\xi \geqslant t\} = \mathbb{P}\{\lambda\xi \geqslant \lambda t\} = \mathbb{P}\{e^{\lambda\xi} \geqslant e^{\lambda t}\} \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda\xi}\right]}{e^{\lambda t}}.$$

□

Следствие 3. (Неравенство Чернова) Пусть ξ — случайная величина с конечными экспоненциальными моментами $\mathbb{E}e^{\lambda\xi}$ для всех $\lambda > 0$. Тогда для любого $t > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}\left\{\xi \geqslant t\right\} \leqslant \inf_{\lambda>0} \frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda\xi}\right]}{e^{\lambda t}}.$$

Доказательство. Так как экспоненциальное неравенство Чебышёва выполнено для любого $\lambda > 0$, то, беря $\inf\limits_{\lambda>0}$ от левой и правой частей, получим

$$\mathbb{P}\left\{\xi \geqslant t\right\} \leqslant \inf_{\lambda>0} \frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda\xi}\right]}{e^{\lambda t}}.$$

□

Упражнение 2. Пусть студенты никогда не приходят вовремя, они всегда опаздывают. В среднем они опаздывают на 3 минуты. Какова вероятность того, что студент опоздает на 15 минут и более? Дать грубую оценку сверху.

Решение. Воспользуемся неравенством Маркова:

$$\mathbb{P}\{|\xi| \geq 15\} \leq \frac{3}{15} = 0,2$$

□

Упражнение 3. Докажите "правило 3х сигм", а именно, что вероятность случайной величины отличаться от своего математического ожидания более чем на три корня из дисперсии мала:

$$\text{Если } \mathbb{E}\xi^2 < 1, \text{ то } \mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \leqslant 3\sqrt{\mathbb{D}\xi}) \geqslant \frac{8}{9}$$

Решение. Если в доказательстве неравенства Чебышева вместо $\geqslant$ поставить $>$ рассуждения не изменятся, так как для $x > 0$ неравенство $|\xi - \mathbb{E}\xi| > x$ равносильно неравенству $(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 > x^2$, поэтому:

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| > 3\sqrt{\mathbb{D}\xi}) \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{(3\sqrt{\mathbb{D}\xi})^2} = \frac{1}{9}$$

□

Замечание 1. Неравенство Чернова часто используется для анализа сумм независимых случайных величин.

Замечание 2. Заметим, что само неравенство Маркова дает достаточно плохую оценку на хвосты распределения. В частности, для любой неотрицательной с.в. X с конечным мат. ожиданием a справедливо $\mathbb{P}\{X \geq a\} \leq \int_a^\infty x dF_X(x) \to 0$ при $a \to \infty$, а неравенство Маркова дает только оценку сверху константой. Тем не менее, используя обобщенное неравенство и какую-то информацию о моментах (или экспоненциальных моментах) распределения, можно получить множество достаточно хороших оценок на концентрацию (именно так в большинстве случаев они и делаются).

Упражнение 4. Средняя температура воздуха в июле в данной местности $20°C$. Оценить вероятность того, что в июле следующего года средняя температура воздуха будет: а) менее $15°C$; б) не менее $20°C$.

Решение. Введем случайную величину ξ - температура в июле. По условию $\mathbb{E}\xi = 20$.

а) Неравенство Маркова

$$\mathbb{P}(\xi < t) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{E}\xi}{t}.$$

Тогда

$$\mathbb{P}(\xi < 15) \geqslant 1 - \frac{20}{15} = -\frac{1}{3}.$$

б) Неравенство Маркова

$$\mathbb{P}(\xi \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi}{t}.$$

Тогда

$$\mathbb{P}(\xi \geqslant 20) \leqslant \frac{20}{20} = 1.$$

В обоих случаях оценка не показательна.

□

Сходимость последовательностей случайных величин

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, заданных на этом вероятностном пространстве. В математическом анализе вы сталкивались с разными видами сходимости функций. Случайные величины — функции, поэтому существуют разные способы определить сходимость последовательности случайных величин.

Определение 1. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится по вероятности** к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$), если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Определение 2. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится почти наверное (с вероятностью 1)** к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$), если

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega)\right\} = 1.$$

Замечание 3. Эти понятия вам уже хорошо известны из курса функционального анализа: певрое соответствует сходимости по мере, а второе — сходимости почти всюду. В курсе функционального анализа доказывался следующий факт: из каждой последовательности, сходящейся по мере, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду. Если перевести этот факт на язык теории вероятностей, то получим, что из любой последовательности случайных величин, сходящейся по вероятности, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти наверное.

Определение 3. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится в среднем p-го порядка** к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi$), если

$$\mathbb{E}\left[|\xi_n - \xi|^p\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Замечание 4. В случае, когда $p = 1$, данную сходимость называют **сходимостью в среднем**, а когда $p = 2$, — **сходимостью в среднеквадратичном** ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{с.к.}} \xi$).

Теорема 2. (Признак сходимости Коши). $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$ в каком-нибудь смысле (по вероятности, п.н., в среднем порядка p) тогда и только тогда, когда ξ_n фундаментальна в соответствующем смысле.

Определение 4. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится по распределению** к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$), если для любой ограниченной непрерывной функции ψ

$$\mathbb{E}\left[\psi(\xi_n)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[\psi(\xi)\right].$$

Замечание 5. Заметим, что последний тип сходимости зависит только от распределений случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ξ и описывает на самом деле близость распределений. Пусть F_n — функции распределения соответствующих ξ_n, F — функция распределения ξ. Говорят, что F_n **слабо сходится** к F ($F_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} F$), если для любой ограниченной непрерывной функции ψ

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(x)dF_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(x)dF(x),$$

то есть $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi \Longleftrightarrow F_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} F$.

Следующая теорема устанавливает связь между слабой сходимостью и поточечной сходимостью в точках непрерывности предельной функции распределения.

Теорема 3. $F_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} F$ тогда и только тогда, когда $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ в каждой точке x, в которой функция F непрерывна.

Следующая лемма оказывается часто полезной при доказательстве предельных теорем.

Лемма 1. (Лемма Бореля-Кантелли). Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность событий. Пусть событие $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, которое по определению содержит те и только те элементарные исходы, которые принадлежат бесконечному числу событий (поэтому часто говорят, что событие A означает, что бесконечно много событий из $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ наступили). Тогда

1) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_n\} < \infty$, то $\mathbb{P}\{A\} = 0$;

2) если события $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ независимы в совокупности и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_n\} = \infty$, то $\mathbb{P}\{A\} = 1$.

Доказательство. 1) Пусть $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Применяя теорему непрерывности вероятности, получим

$$\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{B_n\} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\{A_k\} = 0.$$

2) Нужно показать, что $\mathbb{P}\{A\} = 1$. Это равносильно тому, что $\mathbb{P}\{\overline{A}\} = 0$. Пусть $C_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}$. Тогда $\overline{A} = \overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. Пользуясь теоремой непрерывности вероятности и независимостью $\overline{A_k}$, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\overline{A}\} &= \mathbb{P}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{C_n\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right\} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\{\overline{A_k}\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \mathbb{P}\{A_k\}) \leqslant \lim_{n\to\infty} \underbrace{\exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\{A_k\}\right)}_{0} = 0.
\end{aligned}$$

□

Упражнение 5. Докажите, что если для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right\} < \infty,$$

то $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$.

Доказательство. Из леммы Бореля-Кантелли следует, что $\mathbb{P}\{A_\varepsilon\} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$, где $A_\varepsilon = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}$. Рассмотрим множество $B = \{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega), n \to \infty\}$. Если $\omega \in B$, то существует $\varepsilon_\omega > 0$ такое, что для бесконечного числа индексов k выполнено $|\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon_\omega$, а значит, $\omega \in A_{\varepsilon_\omega}$. Заметим, что в качестве ε_ω всегда можно взять число вида $\frac{1}{m(\omega)}$, где $m(\omega) \in \mathbb{N}$ (если ε_ω не представимо в таком виде, то выберем достаточно большое $m(\omega)$, чтобы $\frac{1}{m(\omega)} < \varepsilon_\omega$, и положим $\varepsilon_\omega = \frac{1}{m(\omega)}$). Обозначим через $B_n = A_{1/n}$. Тогда

$$B \subseteq \underbrace{\bigcup_{\omega\in B} B_{m(\omega)}}_{\text{несчётное объединение}} \subseteq \underbrace{\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m}_{\text{счётное объединение}},$$

откуда

$$\mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m\right\} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}\{B_m\} = \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}\{A_{1/m}\} = 0.$$

□

Упражнение 6. Докажите, что из $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} c$, где $c \in \mathbb{R}$ — константа, следует, что $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} c$.

Доказательство. Функция распределения константы c

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant c, \\ 1, & x > c \end{cases}$$

непрерывна во всех точках, кроме $x = c$. Тогда из $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} c$ получаем, что для всех $x \neq c$ имеет место сходимость $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|\xi_n - c| > \varepsilon\} &= \mathbb{P}\{\xi_n > c + \varepsilon\} + \mathbb{P}\{\xi_n < c - \varepsilon\} \leqslant \mathbb{P}\{\xi_n \geqslant c + \varepsilon\} + \mathbb{P}\{\xi_n < c - \varepsilon\} \\ &= 1 - F_{\xi_n}(c+\varepsilon) + F_{\xi_n}(c-\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 1 + 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Упражнение 7. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины и $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$. Покажите, что существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\xi = c$ с вероятностью 1.

Доказательство. Предположим противное: пусть ξ не является константой с вероятностью 1. Тогда существуют два вещественных числа $x_1 < x_2$ такие, что $\mathbb{P}\{\xi < x_1\} = p > 0$ и $\mathbb{P}\{\xi \geqslant x_2\} = q > 0$. Рассмотрим произвольные числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Тогда по признаку сходимости Коши существует такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m > N$ выполнено $\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} < \delta, \mathbb{P}\{|\xi_m - \xi| > \varepsilon\} < \delta$ и $\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon\} < \delta$. Подберём ε так, чтобы $3\varepsilon < x_2 - x_1$. Оценим $\mathbb{P}\{\xi_n < x_1 + \varepsilon, \xi_m \geqslant x_1 + 2\varepsilon\}$ сверху и снизу. Оценка сверху:

$$\mathbb{P}\{\xi_n < x_1 + \varepsilon, \xi_m \geqslant x_1 + 2\varepsilon\} \leqslant \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon\} < \delta,$$

так как из $\xi_n < x_1 + \varepsilon, \xi_m \geqslant x_1 + 2\varepsilon$ следует $|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon$. Чтобы воспользоваться оценкой снизу, воспользуемся независимостью ξ_n и ξ_m:

$$\mathbb{P}\{\xi_n < x_1 + \varepsilon, \xi_m \geqslant x_1 + 2\varepsilon\} = \mathbb{P}\{\xi_n < x_1 + \varepsilon\}\mathbb{P}\{\xi_m \geqslant x_1 + 2\varepsilon\}.$$

Первый множитель оценивается снизу следующим образом (считаем, что $\delta < p$):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi_n < x_1 + \varepsilon\} &\geqslant \mathbb{P}\{\xi < x_1, |\xi_n - \xi| \leqslant \varepsilon\} = \\ \mathbb{P}\{\xi < x_1\} + \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| \leqslant \varepsilon\} - \mathbb{P}\left\{\{\xi < x_1\} \cup \{|\xi_n - \xi| \leqslant \varepsilon\}\right\} &\geqslant p + 1 - \delta - 1 = p - \delta, \end{aligned}$$

где первое неравенство справедливо, так как из $\xi < x_1, |\xi_n - \xi| \leqslant \varepsilon$ следует $\xi_n < x_1 + \varepsilon$. Аналогичным образом оценивается и второй множитель (считаем, что $\delta < q$):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi_m \geqslant x_1 + 2\varepsilon\} &\geqslant \mathbb{P}\{\xi \geqslant x_2, |\xi_m - \xi| \leqslant \varepsilon\} = \\ \mathbb{P}\{\xi \geqslant x_2\} + \mathbb{P}\{|\xi_m - \xi| \leqslant \varepsilon\} - \mathbb{P}\left\{\{\xi \geqslant x_2\} \cup \{|\xi_m - \xi| \leqslant \varepsilon\}\right\} &\geqslant q + 1 - \delta - 1 = q - \delta, \end{aligned}$$

где первое неравенство справедливо, так как из $\xi \geqslant x_2, |\xi_m - \xi| \leqslant \varepsilon$ следует $\xi \geqslant x_1 + 3\varepsilon, |\xi_m - \xi| \leqslant \varepsilon$, откуда следует $\xi_m \geqslant x_1 + 2\varepsilon$. В итоге получаем, что если взять $\delta < \min\{p, q\}$, то

$$\mathbb{P}\{\xi_n < x_1 + \varepsilon, \xi_m \geqslant x_1 + 2\varepsilon\} \geqslant (p - \delta)(q - \delta),$$

откуда и из верхней оценки данной вероятности следует, что

$$(p - \delta)(q - \delta) \leqslant \delta.$$

Если взять δ достаточно маленьким, что $(p - \delta)(q - \delta) \geqslant \frac{pq}{2}$ и $\delta < \frac{pq}{2}$, то получим противоречивое неравенство $\delta < \delta$. Значит, наше предположение неверно, т. е. существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\xi = c$ с вероятностью 1. □

Следующая теорема замечательным образом связывает сходимость по распределению со сходимостью характеристических функций.

Теорема 4. (Теорема Леви о непрерывности). Пусть последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено: $\varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t)$. Пусть $\varphi(t)$ *непрерывна в нуле*. Тогда существует такая случайная величина ξ, что $\varphi = \varphi_\xi$ и $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$. Обратно, если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$, то $\varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_\xi(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Упражнение 8. (Предельная теорема Пуассона). Пусть $\xi_n \sim \mathrm{Binom}(n, p_n)$ и $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$. Покажите, что $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$.

Доказательство. Характеристическая функция задаётся формулой

$$\varphi_{\xi_n}(t) = \left(1 + p_n\left(e^{it} - 1\right)\right)^n.$$

Так как $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$, то $np_n = \lambda + o(1), n \to \infty$, а значит, $p_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty$. Отсюда следует, что для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{\xi_n}(t) = \left(1 + \left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(e^{it} - 1\right)\right)^n = \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\lambda}{n}\left(e^{it} - 1\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right).$$

□

Теперь займёмся вопросом о связи различных типов сходимости. Схематически эти связи обозначены на Рисунке 1.

$$\begin{tikzcd}
\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi \arrow[dr] & & \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi \arrow[dl] \\
& \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi \arrow[d] & \\
& \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi &
\end{tikzcd}$$

Рис. 1: Связь разных типов сходимости случайных величин.

Перечислим важные свойства типов сходимости случайных величин.

1. Из $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$ следует $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$. Чтобы это показать, докажем сначала **критерий сходимости с вероятностью 1**: $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\mathbb{P}\left\{\sup\limits_{k\geqslant n}|\xi_k - \xi| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Если это доказать, то цепочка рассуждений

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left\{\sup_{k\geqslant n}|\xi_k - \xi| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \varepsilon > 0 \Longrightarrow \mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \varepsilon > 0 \Longleftrightarrow \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$$

докажет то, что мы хотим. Рассмотрим события $A_n^\varepsilon = \left\{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\right\}, A^\varepsilon = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k^\varepsilon$. Тогда

$$\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega), n \to \infty\} = \bigcup_{\varepsilon>0} A^\varepsilon = \bigcup_{m=1}^{\infty} A^{1/m}.$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned}\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi \quad &\Longleftrightarrow 0 = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega), n \to \infty\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{m=1}^{\infty} A^{1/m}\right\} \\ &\Longleftrightarrow \mathbb{P}\left\{A^{1/m}\right\} = 0, m \geqslant 1 \\ &\Longleftrightarrow \mathbb{P}\left\{A^{\varepsilon}\right\} = 0, \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

В силу теоремы непрерывности вероятности получаем, что

$$\mathbb{P}\left\{A^{\varepsilon}\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^{\varepsilon}\right\},$$

а значит,

$$\mathbb{P}\left\{A^{\varepsilon}\right\} = 0, \varepsilon > 0 \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^{\varepsilon}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \varepsilon > 0 \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left\{\sup_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \varepsilon > 0.$$

2. Из $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi$ следует $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$. Действительно, применяя неравенство Маркова к случайной величине $|\xi_n - \xi|^p$, получим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right\} = \mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi|^p > \varepsilon^p\right\} \leqslant \mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi|^p \geqslant \varepsilon^p\right\} \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[|\xi_n - \xi|^p\right]}{\varepsilon^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

3. Из $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$ следует $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$. Пусть $\psi(x)$ — произвольная ограниченная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция. Тогда существует такая константа $c > 0$, что для всех $x \in \mathbb{R} \hookrightarrow |\psi(x)| < x$. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$ и подберём натуральное число N так, чтобы $\mathbb{P}\{|\xi| > N\} \leqslant \frac{\varepsilon}{4c}$. Так как функция ψ непрерывна на $\mathbb{R}$ и $[-N, N]$ — компакт, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на $[-N, N]$. Тогда подберём такое число δ, что для всех таких $x \in [-N, N]$ и $y \in \mathbb{R}$, что $|x - y| < \delta$, выполняется $|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим разбиение $\Omega = A \cup B \cup C$, где $A = \{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leqslant \delta, |\xi(\omega)| \leqslant N\}, B = \{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leqslant \delta, |\xi(\omega)| > N\}, C = \{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta\}$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|\psi(\xi_n) - \psi(\xi)|\right] \quad &= \int\limits_{\Omega} |\psi(\xi_n) - \psi(\xi)| d\mathbb{P} \\ &= \int\limits_{A} |\psi(\xi_n) - \psi(\xi)| d\mathbb{P} + \int\limits_{B} |\psi(\xi_n) - \psi(\xi)| d\mathbb{P} + \int\limits_{C} |\psi(\xi_n) - \psi(\xi)| d\mathbb{P} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2c \cdot \frac{\varepsilon}{4c} + 2c\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \delta\} \\ &= \varepsilon + 2c\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \delta\}.\end{aligned}$$

Но $\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \delta\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а значит, для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\mathbb{E}\left[|\psi(\xi_n) - \psi(\xi)|\right] \leqslant 2\varepsilon$, откуда следует, что

$$|\mathbb{E}\left[\psi(\xi_n) - \psi(\xi)\right]| \leqslant \mathbb{E}\left[|\psi(\xi_n) - \psi(\xi)|\right] \leqslant 2\varepsilon$$

для всех достаточно больших n. В силу произвольности выбора ε получаем, что $\mathbb{E}\left[\psi(\xi_n)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[\psi(\xi)\right]$, а в силу произвольности выбора ограниченной непрерывной функции ψ имеем: $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$.

4. Если последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает почти наверное, т. е. с вероятностью 1 выполнено $\xi_n \leqslant \xi_{n+1}$, то из $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$ следует $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi$. Во-первых, заметим, что с вероятностью 1 $\xi \geqslant \xi_n$ для всех n. Действительно, если найдётся такое k, что $\mathbb{P}\{\xi < \xi_k\} = p > 0$, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что $\mathbb{P}\{\xi < \xi_k - \varepsilon\} = \frac{p}{2} > 0$. Но тогда для всех $n > k$ будет выполнено $\mathbb{P}\{\xi < \xi_n - \varepsilon\} \geqslant \frac{p}{2}$ в силу монотонности с вероятностью 1. Это противоречит тому, что $\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Отсюда следует, что последовательность $\{|\xi_n - \xi|^p\}_{n=1}^{\infty}$ убывает почти наверное. Кроме того, $\{|\xi_n - \xi|^p\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по вероятности к нулю: для любого $\varepsilon > 0$
$$\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi|^p - 0 > \varepsilon\} = \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon^{1/p}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
Тогда из неё можно выделить подпоследовательность $\{|\xi_{n_k} - \xi|^p\}_{k=1}^{\infty}$, которая сходится почти наверное, причём к нулю. Итак, имеем убывающую почти наверное и сходящуюся к нулю с вероятностью 1 последовательность $\{|\xi_{n_k} - \xi|^p\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда по теореме о монотонной сходимости из курса функционального анализа получаем, что
$$\mathbb{E}\left[|\xi_{n_k} - \xi|^p\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbb{E}[0] = 0.$$
В силу монотонности последовательности $\{\mathbb{E}\left[|\xi_n - \xi|^p\right]\}_{n=1}^{\infty}$ получаем, что она тоже сходится к нулю, а значит, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi$.

5. Если последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена, т. е. существует такое число $a > 0$, что $|\xi_n| < a$ для всех n, то из $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$ следует $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi$. Выберем некоторые $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Тогда из сходимости по вероятности следует фундаментальность последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ по вероятности, т. е. найдётся номер N такой, что для всех $n, m > N$ выполняется неравенство
$$\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon\} \leqslant \delta.$$
Рассмотрим разбиение $\Omega = A \cup B$, где $A = \{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| > \varepsilon\}, B = \{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| \leqslant \varepsilon\}$. Тогда для всех $n, m > N$ выполнено (считаем, что $\varepsilon < 1$, откуда $\varepsilon^p < \varepsilon$)
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|\xi_n - \xi_m|^p\right] &= \int\limits_{\Omega} |\xi_n - \xi_m|^p d\mathbb{P} \\ &= \int\limits_{A} |\xi_n - \xi_m|^p d\mathbb{P} + \int\limits_{B} |\xi_n - \xi_m|^p d\mathbb{P} \\ &\leqslant 2a^p\delta + \varepsilon.\end{aligned}$$
Подбирая δ достаточно маленьким, можно добиться выполнения $\mathbb{E}\left[|\xi_n - \xi_m|^p\right] \leqslant 2\varepsilon$ для всех достаточно больших номеров n и m. В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем, что $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в среднем порядка p, а значит, по признаку сходимости Коши в среднем порядка p получаем $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi$.

Пример 1. Придумайте последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится по распределению к ξ, но не сходится по вероятности к ξ.

Решение. Рассмотрим случайную величину $\eta \sim \mathrm{Be}\left(\frac{1}{2}\right)$. Пусть $\xi_n = \eta$ для всех n и пусть $\xi = 1 - \eta$. Тогда $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \eta$ и $\xi \sim \mathrm{Be}\left(\frac{1}{2}\right)$, а значит, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$. Но так как $|\xi_n - \xi| = 1$ для всех n с вероятностью 1, то $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится по вероятности к ξ. $\square$

Пример 2. Придумайте последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится по вероятности к ξ, но не сходится почти наверное к ξ.

Решение. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\xi_n \sim \mathrm{Be}(p_n)$. Заметим, что из леммы Бореля-Кантелли следует, что

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty,$$

достаточно взять $A_n = \{\xi_n = 1\}$, ведь в таком случае событие A из формулировки леммы будет состоять из тех и только элементарных исходов, которые принадлежат бесконечному числу событий из набора $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, а значит, $\overline{A}$ состоит из тех и только тех элементарных исходов для которых $\xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Аналогично

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p_n) < \infty.$$

Возьмём $p_n = \frac{1}{n}$. Тогда получим, что ξ_n не может стремиться ни к 1, ни к 0 с вероятностью 1. Так как 0 и 1 — единственные возможные значения для членов $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, то данная последовательность не сходится с вероятностью 1. Но она сходится по вероятности к нулю: для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}\{|\xi_n - 0| > \varepsilon\} = \mathbb{P}\{\xi_n = 1\} = p_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\square$

Пример 3. Придумайте последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится по вероятности к ξ, но не сходится в среднем порядка p к ξ ни для какого $p > 0$.

Решение. Рассмотрим последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\mathbb{P}\left\{\xi_n = e^n\right\} = \frac{1}{n} = 1 - \mathbb{P}\{\xi_n = 0\}.$$

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ (не умаляя общности, считаем, что $\varepsilon < 1$)

$$\mathbb{P}\{|\xi_n| \leqslant \varepsilon\} = \mathbb{P}\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

т. е. $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$. С другой стороны, для любого $p > 0$

$$\mathbb{E}\left[|\xi_n - 0|^p\right] = \frac{e^{np}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

т. е. ξ_n не сходится в среднем порядка p к нулю ни для какого $p > 0$. $\square$

Пример 4. Придумайте последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится почти наверное к ξ, но не сходится в среднем порядка p к ξ ни для какого $p > 0$.

Решение. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\mathbb{P}\left\{\xi_n = e^n\right\} = \frac{1}{n^2}, \quad \mathbb{P}\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Из леммы Бореля-Кантелли получаем

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} 0 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi_n = e^n\} < \infty.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi_n = e^n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty,$$

а значит, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} 0$, что следует из леммы Бореля-Кантелли (по аналогии с примером 2). Однако при каждом $p > 0$

$$\mathbb{E}\left[|\xi_n - 0|^p\right] = \frac{e^{pn}}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

т. е. ξ_n не сходится в среднем порядка p к нулю ни для какого $p > 0$. □

Пример 5. Придумайте последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится в среднем порядка p к ξ, но не сходится почти наверное к ξ.

Решение. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\mathbb{P}\left\{\xi_n = 0\right\} = 1 - \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}\{\xi_n = 1\} = \mathbb{P}\{\xi_n = -1\} = \frac{1}{2n}.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\left[|\xi_n - 0|^p\right] = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1^p \cdot \frac{1}{2n} + 1^p \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Из леммы Бореля-Кантелли получаем

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} 0 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi_n \neq 0\} < \infty.$$

Но

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi_n \neq 0\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

а значит, ξ_n не сходится к нулю почти наверное. □