Подготовили: Безносиков А.Н.
Шестаков А.А.

Теория вероятностей «Независимость событий. Условная вероятность. Формула Байеса»

Условная вероятность

соответственно:

Определение 1. Условной вероятностью события A при условии события B, имеющего ненулевую вероятность ($\mathbb{P}\{B\} > 0$), называется число

$$\mathbb{P}\{A|B\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}}.$$

Упражнение 1. Пусть известно, что при бросании двух костей в сумме выпало больше 6 (событие B). Какова вероятность, что на первой кости выпало не больше 2 (событие A)?

Решение. $\mathbb{P}\{A|B\} = \dfrac{|A \cap B|}{|B|} = \dfrac{1+2}{6+5+4+3+2+1} = \dfrac{3}{21} = \dfrac{1}{7}.$ □

На условную вероятность можно смотреть с следующего ракурса. Пусть у нас в качестве нового пространства элементарных исходов множество B. Как несложно видеть, семейство $\mathcal{F}_B = \{A \cap B | A \in \mathcal{F}\}$ является σ-алгеброй для этого пространства, а условная вероятность $\mathbb{P}_B\{A\} = \mathbb{P}\{A|B\}$ действительно оказывается вероятностной мерой. $(B, \mathcal{F}_B, \mathbb{P}_B)$ называется **условным вероятностным пространством**.

Важно понимать, что $(B, \mathcal{F}_B, \mathbb{P}_B)$ и исходное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – это разные пространства и в каком из них работать решать только вам: остаться в исходном пространстве и иметь дело с все теми же $A \in \mathcal{F}$ и условной вероятностью или пересесть в условное вероятностное пространство, где уже нет $A \in \mathcal{F}$, но зато могут появиться свои "фичи".

Упражнение 2. Есть три коробки: первая содержит две золотых монеты, вторая содержит две серебряные монеты, третья содержит одну золотую и одну серебряную монету. Мы на удачу выбираем одну из коробок и случайно достаем оттуда монету. Какова вероятность того, что вторая монета в выбранной коробке также золотая?

Решение. Может показаться, что такая вероятность равна $1/2$, потому что мы выбрали первую или вторую коробку и тогда сейчас в выбранной коробке лежит или серебряная или золотая монета. Но этот ответ неверен. Воспользуемся для решения формулой полной вероятности.

Событие A - "вторая монета золотая", B - "первая монета золотая":

$$\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}}$$

Событие $A \cap B$ - "обе монеты оказались золотыми", что тождественно событию "мы выбрали первый ящик". Вероятность такого события $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \frac{1}{3}$. $\mathbb{P}\{B\} = \frac{1}{2}$.

Получаем ответ:

$$\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

□

Упражнение 3. Известно, что во время бросания n игральных кубиков шестерка выпала хотя бы 1 раз. Найти вероятность, что шестерка выпала больше 1 раза.

Решение. Событие A - "шестерка выпала больше 1 раза B - "хотя бы 1 раз". Тогда:

$$\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{AB\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\{A\}}{\mathbb{P}\{B\}}$$

. $\mathbb{P}\{B\} = 1 - \mathbb{P}(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. $\mathbb{P}\{A\}$ аналогично равняется $1 - \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

□

Условная вероятность зависит и от A, и от B, но зависит по-разному. Как функция от A условная вероятность обладает обычными свойствами вероятности:

1) $\mathbb{P}\{A|B\} \geqslant 0$;

2) $\mathbb{P}\{\Omega|B\} = \frac{\mathbb{P}\{\Omega \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\{B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = 1$;

3) для конечной или бесконечной последовательности попарно непересекающихся событий A_i и для $A = \bigcup\limits_i A_i$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\left\{\left(\bigcup\limits_i A_i\right) \cap B\right\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\left\{\bigcup\limits_i (A_i \cap B)\right\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \sum_i \frac{\mathbb{P}\{A_i \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \sum_i \mathbb{P}\{A_i|B\}.$$

Кроме того, отметим также и другие интересные свойства условной вероятности:

4) если $A \subseteq B$, то $\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{A\}}{\mathbb{P}\{B\}} \geqslant \mathbb{P}\{A\}$;

5) если $B \subseteq A$, то $\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = 1$;

6) для любого набора событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такого, что $\mathbb{P}\{A_2 \cap \ldots \cap A_n\} > 0$, выполняется

$$\mathbb{P}\left\{\bigcap_{i=1}^n A_i\right\} = \mathbb{P}\left\{A_1|\bigcap_{i=2}^n A_i\right\}\mathbb{P}\left\{\bigcap_{i=2}^n A_i\right\} = \ldots = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left\{A_k|\bigcap_{i=k+1}^n A_i\right\}\right)\mathbb{P}\{A_n\};$$

7) если события A и B независимы (определение независимости смотри ниже), то

$$\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \mathbb{P}\{A\};$$

8) если $0 < \mathbb{P}\{B\} < 1$ и $\mathbb{P}\{A|B\} = \mathbb{P}\{A|\overline{B}\}$, то A и B независимы: действительно, из равенства указанных условных вероятностей следует

$$\frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap \overline{B}\}}{\mathbb{P}\{\overline{B}\}} = \frac{\mathbb{P}\{A\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}}{1 - \mathbb{P}\{B\}},$$
$$\mathbb{P}\{A \cap B\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}\mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}\mathbb{P}\{B\},$$
$$\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\};$$

Как функция от B условная вероятность удовлетворяет так называемой **формуле полной вероятности**. Пусть $\{B_1, B_2, \ldots\}$ — конечное или счётное разбиение пространства Ω, т. е. $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigcup\limits_i B_i = \Omega$. Не умаляя общности, предположим, что $\mathbb{P}\{B_i\} > 0$ при всех i. Тогда для любого события $A \in \mathcal{F}$ выполняется соотношение

$$\mathbb{P}\{A\} = \sum_i \mathbb{P}\{A \cap B_i\} = \sum_i \mathbb{P}\{A|B_i\}\mathbb{P}\{B_i\},$$

которое и называется **формулой полной вероятности**.

В математической статистике события B_i часто называют гипотезами, а вероятности $\mathbb{P}\{B_i\}$ — *априорными вероятностями* (т.е. заданными до опыта). Предположим, что в результате эксперимента осуществилось событие A, и мы хотим на основании этого решить, какая из гипотез B_i наиболее правдоподобна. Оценка делается путём вычисления *апостериорных вероятностей* $\mathbb{P}\{B_k|A\}$ (полученных в результате опыта):

$$\mathbb{P}\{B_k|A\} = \frac{\mathbb{P}\{B_k \cap A\}}{\mathbb{P}\{A\}} = \frac{\mathbb{P}\{A|B_k\}\mathbb{P}\{B_k\}}{\sum\limits_i \mathbb{P}\{B_i\}\mathbb{P}\{A|B_i\}}.$$

Это равенство называется **формулой Байеса**.

Упражнение 4. (Задача №50, про мужика) Пусть некоторый мужик говорит правду с вероятностью 75% и лжёт с вероятностью 25%. Он подбрасывает симметричную кость и говорит, что «выпала 6». С какой вероятностью выпала 6?

Решение. Зададим следующие события: $A = \{$выпала 6$\}$, $B = \{$мужик сказал, что «выпала 6»$\}$. Тогда в задаче нас просят найти $\mathbb{P}\{A|B\}$. Кроме того, из условия задачи мы знаем, что $\mathbb{P}\{B|A\} = \frac{3}{4}$ и $\mathbb{P}\{B|\overline{A}\} = \frac{1}{4}$. Воспользуемся формулой Байеса для события B относительно разбиения $A, \overline{A}$:

$$\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{B|A\} \cdot \mathbb{P}\{A\}}{\mathbb{P}\{B|A\}\mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B|\overline{A}\}\mathbb{P}\{\overline{A}\}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{3}{8}.$$

□

Упражнение 5. (Задача №47, парадокс Монти Холла[1]) Представьте, что вы стали участником игры, в которой находитесь перед тремя дверями. Ведущий поместил за одной из трех пронумерованных дверей автомобиль, а за двумя другими дверями — по козе (козы тоже пронумерованы) случайным образом — это значит, что все $3! = 6$ вариантов (или 3, если считать коз одинаковыми) расположения автомобиля и коз за пронумерованными дверями равновероятны. У вас нет никакой информации о том, что за какой дверью находится. Ведущий говорит: "Сначала вы должны выбрать одну из дверей. После этого я открою одну из оставшихся дверей (при этом если вы выберете дверь, за которой находится автомобиль, то я с вероятностью $1/2$ выберу дверь, за которой находится коза номер 1, и с вероятностью $1 - 1/2 = 1/2$ дверь, за которой находится коза номер 2). Затем я предложу вам изменить свой первоначальный выбор и выбрать оставшуюся закрытую дверь вместо той, которую вы выбрали сначала. Вы можете последовать моему совету и выбрать другую дверь либо подтвердить свой первоначальный выбор. После этого я открою дверь, которую вы выбрали, и вы выиграете то, что находится за этой дверью." Вы выбираете дверь номер 3. Ведущий открывает дверь номер 1 и показывает, что за ней находится коза. Затем ведущий предлагает вам выбрать дверь номер 2. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы последуете его совету?

Решение. Казалось бы, какая разница, какую дверь выбирать в таком случае: дверей 2 и за одной из них автомобиль, значит, автомобиль за дверью 3 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Оказывается, что выгоднее последовать совету ведущего, что для многих людей контринтуитивно. Изначально для нас автомобиль находится за каждой дверью равновероятно. Но когда ведущий показывает, что за одной из невыбранных дверей находится коза, ситуация меняется. Действительно, если мы не поменяем выбор, то вероятность того, что автомобиль находится за дверью номер 3, будет равняться $\frac{1}{3}$, так как это эквивалентно ситуации, когда нам сразу открыли нашу дверь. Ключевая идея: *ведущий всегда открывает дверь с козой.* Вероятность того, что автомобиль находится за дверью 1 или 2 равна $\frac{2}{3}$. Но когда нам показали, что за второй дверью находится коза, эта вероятность не изменилась и все еще равняется $\frac{2}{3}$.

Более формально, через формулу Байеса (здесь введены события ПЗ, ПО, ПВ – приз в закрытой, в открытой и в выбранной, и О - ведущий открыл выбранную им(!) дверь):

$$\mathbb{P}\{\text{ПЗ}|\text{О}\} = \frac{\mathbb{P}\{\text{О}|\text{ПЗ}\}\mathbb{P}\{\text{ПЗ}\}}{\mathbb{P}\{\text{О}|\text{ПО}\}\mathbb{P}\{\text{ПО}\} + \mathbb{P}\{\text{О}|\text{ПВ}\}\mathbb{P}\{\text{ПВ}\} + \mathbb{P}\{\text{О}|\text{ПЗ}\}\mathbb{P}\{\text{ПЗ}\}} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

□

Упражнение 6. (парадокс трех заключенных)

Трое заключённых, A, B и C, заключены в одиночные камеры и приговорены к смертной казни. Губернатор случайным образом выбирает одного из них и милует его. Стражник, охраняющий заключённых, знает, кто помилован, но не имеет права сказать этого. Заключённый A просит стражника сказать ему имя того (другого) заключённого, кто точно будет казнён: «Если B помилован, скажи мне, что казнён будет C. Если помилован C, скажи мне, что казнён будет B. Если они оба будут казнены, а помилован я, подбрось монету, и скажи имя B или C».

Стражник говорит заключённому A, что заключённый B будет казнён. Заключённый A рад это слышать, поскольку он считает, что теперь вероятность его выживания стала $1/2$, а не $1/3$, как была до этого. Прав ли он?

[1] Есть сцена из фильма "21" про этот парадокс: видео

Решение. Правильный ответ заключается в том, что заключённый А не получил информацию о своей собственной судьбе. По условиям задачи стражник сообщил заключенному А, что казнят или В или С, но это достоверное событие, которое должно произойти.

Через формула Байеса к этому можно прийти так: A, B и C как события, означающие, что соответствующий заключённый будет помилован, и b событие, означающее, что охранник назовёт имя B. Тогда, используя теорему Байеса вероятность помилования заключённого A:

$$\mathbb{P}\{A|b\} = \frac{\mathbb{P}\{b|A\}\mathbb{P}\{A\}}{\mathbb{P}\{b|A\}\mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{b|B\}\mathbb{P}\{B\} + \mathbb{P}\{b|C\}\mathbb{P}\{C\}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

При этом, если посчитать вероятность при условии, что казнят B (событие $\bar{B}$), то мы имеем

$$\mathbb{P}\{A|\bar{B}\} = \frac{\mathbb{P}\{\bar{B}|A\}\mathbb{P}\{A\}}{\mathbb{P}\{b|A\}\mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{\bar{B}|B\}\mathbb{P}\{B\} + \mathbb{P}\{\bar{B}|C\}\mathbb{P}\{C\}} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Т.е. рассуждения заключенного А были бы верны, если бы он получил точную информацию о том, что В казнен. □

Независимость событий

Везде далее рассматривается некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Определение 2. События A и B называются **независимыми**, если $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{B\}$.

Упражнение 7. Пусть (A, B) — пара независимых событий. Покажите, что $(\overline{A}, B), (A, \overline{B}), (\overline{A}, \overline{B})$ — также пары независимых событий.

Решение. Если независимы A и B, то

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\overline{A} \cap B\} &= \mathbb{P}\{B \setminus A\} = \mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{A \cap B\} \\ &= \mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{B\}(1 - \mathbb{P}\{A\}) = \mathbb{P}\{\overline{A}\} \cdot \mathbb{P}\{B\}, \end{aligned}$$

т.е. $\overline{A}$ и B независимы. Поменяв местами A и B в предыдущей выкладке, мы получим независимость A и $\overline{B}$, а заменив B на $\overline{B}$ и воспользовавшись предыдущей выкладкой и независимостью A и $\overline{B}$, мы получим независимость $\overline{A}$ и $\overline{B}$. □

Заметим, что если $A = \varnothing$ или $A = \Omega$, то оно независимо от любого события B. На самом деле, верен даже чуть более общий результат:

Упражнение 8. Если $\mathbb{P}\{A\} = 0$ или $\mathbb{P}\{A\} = 1$, от оно независимо от любого события B.

Решение. Без ограничение общности (почему?) покажем только для $\mathbb{P}\{A\} = 1$. Тогда $\mathbb{P}\{AB\} = \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{A \cup B\} = \mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{B\} \cdot 1 = \mathbb{P}\{B\} \cdot \mathbb{P}\{A\}$. □

Если между событиями есть причинно-следственная связь, например, $A \subset B$ и $0 < \mathbb{P}\{A\} \leqslant \mathbb{P}\{B\} < 1$, то они являются зависимыми и в вероятностном смысле: $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\} \neq \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{B\}$. Обратное, вообще говоря, неверно: из вероятностной зависимости может не следовать причинно-следственная зависимость.

Определение 3. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого $k, 2 \leqslant k \leqslant n$ и любых индексов $i_1, \ldots, i_k$ таких, что $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, выполняется равенство

$$\mathbb{P}\left\{\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right\} = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}\{A_{i_j}\}.$$

Из независимости в совокупности легко следует попарная независимость событий. Обратно, вообще говоря, неверно при $n \geqslant 3$.

Упражнение 9. (Задача №37) Приведите пример вероятностного пространства и трёх событий на этом пространстве, которые попарно независимы, но зависимы в совокупности.

Решение. Тетраэдр Бернштейна. Пусть у нас есть правильный тетраэдр, одна грань которого покрашена в красный цвет, вторая - в синий, третья - в зеленый, а четвертая - в три цвета сразу.

Ω - это просто множество граней. Пусть событие A - "выпала грань, где есть красный цвет"(1 и 4 грани), событие B - "выпала грань, где есть синий цвет"(2 и 4 грани), событие - "выпала грань, где есть зеленый цвет"(3 и 4 грани).

$$\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{C\} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{4 \text{ грань}\} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}$$

$$\mathbb{P}\{B \cap C\} = \mathbb{P}\{4 \text{ грань}\} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}\{B\}\mathbb{P}\{C\}$$

$$\mathbb{P}\{A \cap C\} = \mathbb{P}\{4 \text{ грань}\} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{C\}$$

т.е. событие действительно попарно независимы, но

$$\mathbb{P}\{A \cap B \cap C\} = \mathbb{P}\{4 \text{ грань}\} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}\mathbb{P}\{C\}$$

$\square$

Упражнение 10. Привести пример n событий, из которых любые k < n являются независимыми в совокупности, но вместе они не независимы.

Решение. Бросаем n кубиков. Пусть A_k — событие, состоящее в том, что на k и $(k+1)$ кубике выпало одинаковое число очков (событие A_n - совпали на n и 1 кубиках). Тогда

$$\mathbb{P}\{A_k\} = 1/6$$

При любом $m < n$:

$$\mathbb{P}\{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}\} = (1/6)^m$$

Но

$$\mathbb{P}\{A_1 \cap \ldots \cap A_n\} = (1/6)^{n-1}$$

$\square$

Упражнение 11. 1. Пусть $\mathbb{P}\{A\} > 0$, и события $B, C \subseteq A$ независимы в условном вероятностном пространстве относительно A. Являются ли они независимыми в исходном пространстве?

2. Пусть A, B, C попарно независимы. Являются ли события $A \cap B$, $A \cap C$ независимыми в условном вероятностном пространстве, порожденном A?

Решение. 1. Известно, что $\mathbb{P}_A\{B \cap C\} = \mathbb{P}_A\{B\}\mathbb{P}_A\{C\}$

$$\frac{\mathbb{P}\{B \cap C\}}{\mathbb{P}\{A\}} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap B \cap C\}}{\mathbb{P}\{A\}} = \mathbb{P}_A\{B \cap C\} = \mathbb{P}_A\{B\}\mathbb{P}_A\{C\} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{A\}}\frac{\mathbb{P}\{A \cap C\}}{\mathbb{P}\{A\}} = \frac{\mathbb{P}\{B\}\mathbb{P}\{C\}}{\mathbb{P}^2\{A\}}$$

Получаем, что $\mathbb{P}\{B \cap C\} = \mathbb{P}\{B\}\mathbb{P}\{C\}/\mathbb{P}\{A\}$. Если $\mathbb{P}\{A\} < 1$ и $\mathbb{P}\{B\}, \mathbb{P}\{C\} > 0$, то равенства нет. Таким образом, B, C могут не быть независимыми.

2. $\mathbb{P}_A\{A \cap B \cap C\} = \mathbb{P}\{A \cap B \cap C\}/\mathbb{P}\{A\}$. $\mathbb{P}_A\{A \cap B\}\mathbb{P}_A\{A \cap C\} = \mathbb{P}\{B|A\}\mathbb{P}\{C|A\} = \mathbb{P}\{B\}\mathbb{P}\{C\}$. Значит, для независимости в условном вероятностном пространстве необходимо, чтобы $\mathbb{P}\{A \cap B \cap C\} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}\mathbb{P}\{C\}$, что, учитывая попарную независимость, эквивалентно независимости событий A, B, C в совокупности. Следовательно, в общем случае $A \cap B$, $A \cap C$ могут не быть независимыми в условном вер. пространстве. $\square$