第45卷 第3期　　气 象 学 报　　Vol. 45. No. 3
1987年8月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　Aug.,1987

三参数 Weibull 分布的参数估计*

曲延禄　张程道　阎书源

（总参谋部气象研究所）

Weibull 分布对不同形状的频率分布有很强的适应性，且三参数模式较之二参数模式有显著改善[1]。作者最近的工作表明，某些气候要素极值，例如气温极值和风速极值等的渐近分布能以很高的拟合精度遵循三参数 Weibull 分布[2]。使用三参数 Weibull 模式的困难，是如何对参数给出优良估计[1,3,4]。Essenwanger 曾用矩法提出一个计算三参数估计值的方法[3]。但这种方法需反求 Γ 函数，或者使用专门的查算表，而且不能给出最有效的估计[1]。本文借助最大似然法，提出了确定三参数的一种新方法。它不仅可给出有效性高的参数估计，而且具有简便、收敛域大、收敛速度快和能在电子计算机上进行数值求解等优点。

1. 三参数最大似然估计量方程组

Weibull 分布的分布函数和概率密度[3]分别为

$$F(x)=1-\exp\left[-\frac{(x-\lambda_3)^{\lambda_2}}{\lambda_1}\right] \tag{1}$$

和

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}(x-\lambda_3)^{\lambda_2-1}\exp\left[-\dfrac{(x-\lambda_3)^{\lambda_2}}{\lambda_1}\right], & x>\lambda_3\\ 0, & x\leqslant\lambda_3\end{cases} \tag{2}$$

式中，$\lambda_1(>0)$为尺度参数，$\lambda_2(>0)$为形状参数，λ_3为位置参数。

建立似然函数

$$l=\sum_{j=1}^{N}\ln f(x_j;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)=\sum_{j=1}^{N}\left[\ln\lambda_2-\ln\lambda_1+(\lambda_2-1)\ln(x_j-\lambda_3)-\frac{(x_j-\lambda_3)^{\lambda_2}}{\lambda_1}\right]$$

并令

$$\left(\frac{\partial l}{\partial\lambda_i}\right)=0,\ i=1,\ 2,\ 3$$

便得到λ_1，λ_2，λ_3的最大似然估计量方程组：

$$\begin{cases}\varphi_1(x_j;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)=-\dfrac{N}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_1^2}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}(x_j-\lambda_3)^{\lambda_2}=0\\ \varphi_2(x_j;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)=\dfrac{N}{\lambda_2}+\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\ln(x_j-\lambda_3)\\ \qquad\qquad -\dfrac{1}{\lambda_1}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}(x_j-x_3)^{\lambda_2}\ln(x_j-\lambda_3)=0\\ \varphi_3(x_j;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_2)=\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\dfrac{1-\lambda_2}{x_j-\lambda_3}+\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}(x_j-\lambda_3)^{\lambda_2-1}=0\end{cases} \tag{3}$$

* 本文于1985年7月16日收到，1987年4月29日收到修改稿。

这是一个非线性方程组(其中的N为样本容量)。我们采用 Newton 迭代求解。若$\lambda_{1,k}$,$\lambda_{2,k}$和$\lambda_{3,k}$是方程组(3) 的解的一组近似值，则将非线性函数φ_1，φ_2和φ_3在点($\lambda_{1,k}$，$\lambda_{2,k}$，$\lambda_{3,k}$)的邻近作 Taylor展开，略去二次及其以上的各项后，便可将(3) 线性化为

$$\boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_k)+\boldsymbol{\Phi}_k=0 \tag{4}$$

这就是我们用来确定λ_1，λ_2，λ_3最大似然估计量的线性方程组。其中

$$\boldsymbol{A}_k=\left(\begin{array}{ccc}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda_2} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda_3}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\lambda_2}\\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\lambda_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\lambda_3}\end{array}\right)\begin{array}{l}\lambda_1=\lambda_{1,k}\\ \lambda_2=\lambda_{2,k}\\ \lambda_2=\lambda_{3,k}\end{array} \tag{5}$$

是$\boldsymbol{\Phi}=(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$在($\lambda_{1,k}$，$\lambda_{2,k}$，$\lambda_{3,k}$)点处的 Jacobi 矩阵；

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{\lambda}_k=\begin{pmatrix}\lambda_{1,k}\\ \lambda_{2,k}\\ \lambda_{3,k}\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{\Phi}_k=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}\begin{array}{l}\lambda_1=\lambda_{1,k}\\ \lambda_2=\lambda_{2,k}\\ \lambda_3=\lambda_{3,k}\end{array} \tag{6}$$

$\boldsymbol{A}_k$为对称矩阵，其中的各元素为

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda_1}=\frac{N}{\lambda_1^2}-\frac{2}{\lambda_1^3}\sum_{j=1}^{N}(x_j-\lambda_3)^{\lambda_2}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda_2}=\frac{1}{\lambda_1^2}\sum_{j=1}^{N}(x_j-\lambda_3)^{\lambda_2}\ln(x_j-\lambda_3)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda_3}=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}\sum_{j=1}^{N}(x_j-\lambda_3)^{\lambda_2-1}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda_1}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda_2}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda_2}=-\frac{N}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1}\sum_{j=1}^{N}(x_j-\lambda_3)^{\lambda_2}\ln^2(x_j-\lambda_3) \tag{7}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda_3}=-\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{x_j-\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_1}\sum_{j=1}^{N}(x_j-\lambda_3)^{\lambda_2-1}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sum_{j=1}^{N}(x_j-\lambda_3)^{\lambda_2-1}\ln(x_j-\lambda_3)$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial\lambda_1}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda_3}$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial\lambda_2}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda_3}$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial\lambda_3}=(\lambda_2-1)\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{(x_j-\lambda_3)^2}-\frac{\lambda_2(\lambda_2-1)}{\lambda_1}\sum_{j=1}^{N}(x_j-\lambda_3)^{\lambda_2-2}$$

如果$\boldsymbol{A}_k$非奇异，并令$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_{k+1}$，便可得到第$k+1$次的迭代解

$$_{k+1}=\boldsymbol{\lambda}_k-\boldsymbol{A}^{-1}{}_k\boldsymbol{\Phi}_k \tag{8}$$

整个迭代求解一直进行到

$$|\lambda_{i,k+1}-\lambda_{i,k}|<\varepsilon_i\quad i=1,\ 2,\ 3$$

时为止。$\varepsilon_i(i=1,\ 2,\ 3)$是预先给定的$\lambda_i(i=1,\ 2,\ 3)$估计值的允许误差。

对方程组(4) 按 Newton 迭代程序(8) 进行的试算表明，在一般情况下很难得到收敛解。原因是它的收敛域很小，通常要求给定的初值要十分接近真解。自然，在实际计算中这是很难做到的。

2. 最大似然估计量方程组求解

Essenwanger 曾指出，求解最大似然估计量方程组之所以困难，是因为位置参人 λ_3 不能容易地从方程组中消去[3]。从(7) 式可以看出，必须有(否则，将出现零或负数取对数的谬误)

$$x_j-\lambda_3>0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N。$$

为保证对所有的 x_j，上式均成立，自然应有

$$\lambda_3<x_{min}$$

x_{min} 为统计序列 $\{x_j\}$ 中之最小者。这表明 λ_3 是有上界的。我们用 Newton 迭代程序求解时，如果事先设定 λ_3 值，这实质上就相当于在方程组(4) 中消去了位置参数 λ_3。此时，三参数最大似然估计量方程组可用只含有参数 λ_1 和 λ_2 的二元方程组来代替。这时，方程组(4) 中的矩阵和列向量降阶成

$$A'_k=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda_2}\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda_2}\end{pmatrix}_{\substack{\lambda_1=\lambda_{1,k}\\ \lambda_2=\lambda_{2,k}}} \tag{9}$$

$$\lambda'=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix},\quad \lambda'_k=\begin{pmatrix}\lambda_{1,k}\\ \lambda_{2,k}\end{pmatrix},\quad \Phi'_k=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}_{\substack{\lambda_1=\lambda_{1,k}\\ \lambda_2=\lambda_{2,k}}}$$

具体求解时，首先设定

$$\lambda_3^0=x_{min}-\varepsilon_3 \tag{11}$$

然后给出 λ_1 和 λ_2 的初始近似 $\lambda_{1,0}$ 和 $\lambda_{2,0}$。将 $\lambda_3^{(0)}$ 和 $\lambda_{1,0}$，$\lambda_{2,0}$ 代入(9)和 (10)，按 Newton 迭代程序求解，并一直进行到

$$|\lambda_{1,k+1}-\lambda_{1,k}|<\varepsilon_1,\ |\lambda_{2,k+1}-\lambda_{2,k}|<\varepsilon_2$$

时为止。$\lambda_{1,k+1}$ 和 $\lambda_{2,k+1}$ 即为设定 $\lambda_3=\lambda_3^{(0)}$ 条件下求得的 λ_1 和 λ_2 的估计值，并分别记为 $\lambda_1^{(0)}$ 和 $\lambda_2^{(0)}$。然后再设定 $\lambda_3^{(1)}=\lambda_3^{(0)}-\varepsilon_3$ 重复上述运算，又可得到 λ_1 和 λ_2 的一组估计值 $\lambda_1^{(1)}$ 和 $\lambda_2^{(1)}$。如此继续下去，便依次得到 $\lambda_1^{(2)}$ 和 $\lambda_2^{(2)}$，$\cdots$，$\lambda_1^{(m)}$ 和 $\lambda_2^{(m)}$ 等等。

显然，上面求得的各组解均为随机变量，而且并不都是最佳。为了从中找出有效性最高的估计值，我们借助最优化的思想，构造一个目标函数

$$y=\sigma(x;\ \lambda_1^{(m)},\ \lambda_2^{(m)},\ \lambda_3^{(m)})$$

式中

$$\sigma(x;\ \lambda_1^{(m)},\ \lambda_2^{(m)},\ \lambda_3^{(m)})=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}(x_j-x_{Tj})^2}{N-1}} \tag{13}$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots,\ n$$

是以 $\lambda_1^{(m)}$，$\lambda_2^{(m)}$ 和 $\lambda_3^{(m)}$ 作为 λ_1，λ_2 和 λ_3 的估计值时，观测值 x 与拟合值 x_T 间的标准差。拟合值 x_T 按下式计算

$$x_{Tj}=(\lambda_1\ln T(x_j))^{\frac{1}{\lambda_2}}+\lambda_3$$

这里，$T(x_j)$ 为随机变量 x_j 的再现期。当观测序列从大到小排列($j=1$ 对应最大值)时，

$$T(x_j)=\frac{1}{1-F(x_j)}=\frac{N+1}{j} \tag{15}$$

$F(x_j)$ 为随机变量 X 的分布函数：

$$F(x_j)=P\{X<x_j\}$$

如果有一组估计值($\lambda_1^{*(m)}$，$\lambda_2^{*(m)}$，λ_3^{*})，使

$$\min\sigma(x;\ \lambda_1^{(m)},\ \lambda_2^{(m)},\ \lambda_3^{(m)})=\sigma(x;\ \lambda_1^{*(m)},\ \lambda_2^{*(m)},\ \lambda_3^{*(m)}) \tag{16}$$

成立，则 $\lambda_1^{*(m)}$，$\lambda_2^{*(m)}$，$\lambda_3^{*(m)}$ 便为最后求得的一组有效性最高(最佳)的参数估计值。

为了提高参数估计精度，可用求出的 $\lambda_1^{(m)}$，$\lambda_2^{(m)}$ 和 $\lambda_3^{(m)}$ 作为粗略估计值，按与(11) 式相反的方向，进一步设定

$$\lambda_{3,1}=\lambda_3^{(m)}+0.1\,\varepsilon_3$$

重复上述计算，直至求出有效性更为满意的参数估值为止。

3. 试算结果

按前述方法，利用北京等 30 个测站的 1951—1982 期间的地面日最高气温和日最大风速极值资料，对 Weibull 模式的三参数作了估计。结果表明，以所得的估计值为参数的 Weibull 分布对实测资料具有高于矩法的很高的拟合精度。对于日最高气温年极值，最大似然法的平均拟合标准差和平均相对偏差分别为 0.208%和 0.59%；矩法的对应偏差分别为 0.224%和 0.63%。对于日最大风速年极值，最大似然法分别为 0.704%和 4.36%；矩法分别为 0.756%和 4.71%。这说明用最大似然法得到的 Weibull 模式的三参数估计值比按矩法得到的参数估计值具有更高的有效性。

4. 结　　论

(1) 通过设定位置参数 λ_3 值，以只含有其余两个参数（λ_1，λ_2）的最大似然方程组代替三参数最大似然方程组，可扩拓 Newton 迭代程序的收敛域，提高收敛速度，得到有效性高的参数估计值，从而为实际业务中利用最大似然法估计三参数 Weibull 分布的参数值，提供了一种简便、有效的方法。

(2) 参数估计值的有效性与位置参数 λ_3 迭代允许误差 ε_3 有关。减小 ε_3 可使参数估计值的有效性得到改善。

(3) 用最大似然法估计的 Weibull 模式的三参数比之矩法具有更高的有效性，而且便于在电子计算机上进行数值求解。

附　　录

正文中介绍的 Weibull 分布函数表达式及估计其参数的方程组适用于极大值分布，研究极小值分布时，Weibull 分布函数和概率密度应分别为

$$F(x)=e^{-\frac{(-x+\lambda_3)^{\lambda_2}}{\lambda_1}}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}(-x+\lambda_3)^{\lambda_2-1}\exp\left[-\dfrac{(-x+\lambda_3)^{\lambda_2}}{\lambda_1}\right], & x<\lambda_3\\ 0, & x\geqslant\lambda_3\end{cases}$$

λ_3 的设定值取作

$$\lambda_3^{(0)}=x_{\max}+\varepsilon_3$$

$x_{\max}$ 为序列$\{x_i\}$中之最大者。

参 考 文 献

[1] Stewart, D. A., and O. M. Essenwanwanger, Frequency distribution of wind speed near the surface, *J. Appl. Meteor.*, 17, 1633—1642, 1978.
[2] 曲延禄、阎书源、张程道，我国地面气温极值和地面最大风速极值的渐近分布，气象学报待发表。
[3] Essfnwanger, O. M., Applied statistics in atmospheric science, Payt A, frequencies and curve fitting, Elsevier, 1976.
[4] 么枕生，气候学统计基础(气候统计学理论 I)，科学出版社，568—569，1981。

ESTIMATING THE PARAMETERS FOR THE THREE-PARAMETER WEIBULL DISTRIBUTION

Qu Yanlu Zhang Chengdao Yan Shuyuan

(Meteorological Research Institute of the Headquarters of the General Staff)

Abstract

In this paper, the method of estimating parameters for three-parameter Weibull distribution by the maximum likelihood method is provided. By postulating a value of the location reference λ_3, we substitude the maximumlikelihood duality equations contained only two parameters except for λ_3 in three-parameter Weibull model instead of maximum likelihood equations for three-parameter, the convergence field of Newton iterative procedure can be expanded, its convergence velocity can be quickened and the efficiency of parameter estimators is higher than the parameter estimators by the method of moment.