MÓDULO 5

Modelización con funciones lineales

1 Funciones de proporcionalidad directa

En este apartado vamos a estudiar a la proporcionalidad directa desde un punto de vista funcional, completando el estudio que iniciamos con las proporciones numéricas. Para introducir el tema usaremos la situación descripta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Estudiar las distintas posiciones por las que pasa un auto a medida que transcurre el tiempo, sabiendo que marcha a una velocidad constante de 80km/h por un camino recto.

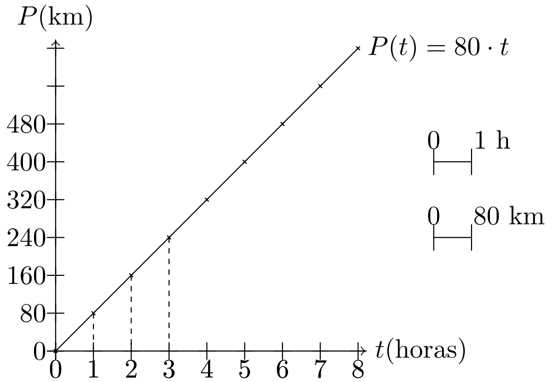
Las magnitudes involucradas en esta situación son: la posición del auto respecto a un punto de referencia fijo y el tiempo. Si se sabe que el auto tiene una velocidad constante de 80km/h podemos afirmar que por cada hora que pase el auto va a aumentar su posición en 80km respecto a la posición inicial (km 0), es decir:

$$\begin{array}{llll}
\text{a} & t = 0 \text{ h} & \text{le corresponde} & P = 0 \\
\text{a} & t = 0,5 \text{ h} & \text{le corresponde} & P = 80 \cdot 0,5 = 40 \\
\text{a} & t = 1 \text{ h} & \text{le corresponde} & P = 80 \\
\text{a} & t = 2 \text{ h} & \text{le corresponde} & P = 80 \cdot 2 = 160 \\
\text{a} & t = 3 \text{ h} & \text{le corresponde} & P = 80 \cdot 3 = 240 \\
 & \vdots & & \vdots \\
\text{a} & \text{t genérico} & \text{le corresponde} & P = 80 \cdot t
\end{array}$$

De esta forma, la relación que describe la posición del automóvil es $P = 80.t$, o bien, $P(t) = 80.t$ (con ambas variables expresadas en las unidades correspondientes). La función que queda definida por esa expresión algebraica es

$$P : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad P(t) = 80.t.$$

Su gráfica resulta ser **una semirrecta que contiene al origen de coordenadas.**



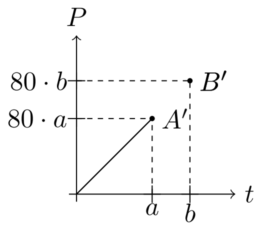
Observemos en la figura que quedan formados triángulos semejantes que verifican:

$$80 = \frac{80}{1} = \frac{160}{2} = \frac{240}{3} = \cdots$$

¿Por qué los puntos que responden a la fórmula $P(t) = 80.t$ están alineados?

Tenemos que $O = (0, 0)$ satisface la ecuación y consideramos otro par ordenado que la satisfaga: $A' = (a, P(a))$, es decir, $(a, 80.a)$. Esos dos puntos, O y A' determinan una recta, que llamaremos r. La idea ahora es tomar un punto cualquiera que satisfaga la ecuación $P(t) = 80.t$ y probar que ese punto debe pertenecer a r. Llamemos B' a ese punto. Entonces: $B' = (b, 80.b)$. Para probar que B' pertenece a la recta r, consideramos los puntos del plano $A = (a, 0)$ y $B = (b, 0)$.

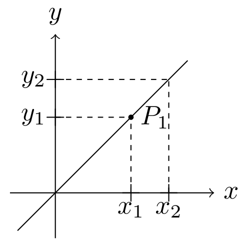
Tenemos así cinco puntos: O, A, B, A' y B'. Si pudiéramos asegurar que los triángulos rectángulos OAA' y OBB' tienen los ángulos agudos iguales, resultaría suficiente para que B' pertenezca a r (es decir que O, A' y B' están alineados). Veamos la relación entre los catetos



$$\frac{B'B}{A'A} = \frac{80 \cdot b}{80 \cdot a} = \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}\ .$$

Hemos obtenido que $\frac{B'B}{A'A} = \frac{OB}{OA}$, es decir, los catetos de ambos triángulos son proporcionales. Usando el criterio que dice que "si dos triángulos rectángulos tienen sus catetos proporcionales entonces tienen sus ángulos agudos respectivamente iguales" (en otras palabras, los triángulos son semejantes), podemos afirmar que el ángulo determinado por A', O, A será el mismo que el determinado por B', O, B y, como dijimos, eso garantiza que B' pertenece a r. De esta manera, todos los puntos que cumplen que $P(t) = 80 \cdot t$ resultan alineados. Notemos que con lo anterior hemos probado que si una función tiene expresión que $P(t) = 80 \cdot t$, entonces todos los pares $(x; y)$ que cumplen esta relación, determinan puntos alineados. Sin embargo, esto tiene alcance general, esto es, que se cumple en todas las funciones de proporcionalidad. Dejamos como ejercicio su realización que es análoga a la exhibida.

Nos preguntamos ahora por la situación recíproca de la anterior: ¿Por qué si tenemos la gráfica de una recta (no vertical) que contiene al origen de coordenadas, todos sus puntos verifican una fórmula del tipo de la proporcionalidad directa? En primer lugar, es claro que las rectas no verticales corresponden a funciones, porque para cualquier valor real es posible asignar un único correspondiente (eso se ve gráficamente trazando paralelas al eje de las ordenadas y viendo que intersecan a la gráfica en un solo punto).



Por otro lado, si tomamos dos puntos cualesquiera de la recta que no sean el origen de coordenadas, podemos formar triángulos como se indica en la figura de arriba. Los triángulos son semejantes y por lo tanto:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Si a uno de los puntos de la recta lo dejamos fijo, por ejemplo P_1, y consideramos "móvil" al otro punto de la recta, obtendríamos siempre triángulos semejantes que cumplen la condición de proporcionalidad de arriba y que puede escribirse de forma equivalente como:

$$y_2 = \frac{y_1}{x_1} x_2$$

Si llamamos $m = \frac{y_1}{x_1}$ y al "punto móvil" lo indicamos genéricamente $(x; y)$ entonces,

$$y = m \cdot x$$

Concluimos entonces que una función proporcional tiene por gráfica una recta que contiene al origen y viceversa, es decir una recta que contiene al origen corresponde a la gráfica de una funci'on proporcional. Dependiendo de las condiciones del problema, que pueden implicar una restricción en el dominio, el gráfico de una función proporcional puede ser una recta, una semirrecta, un segmento o puntos aislados alineados.

Supongamos ahora que estudiamos la misma situación para un auto se desplaza al doble de velocidad, esto es, 160 km/h. La fórmula que nos permite conocer la posición P luego de trancurrido un tiempo t es entonces:

$$P = 160 \cdot t$$

En estas condiciones, el gráfico también corresponde a una semirrecta que contiene al origen, pero la relación entre los incrementos resulta el doble que en el caso anterior. Esto quiere decir que cuando el tiempo se incremente en una hora ($\Delta t = 1$) la posición se incrementará en 160 kilómetros ($\Delta P = 160$); para un incremento de tiempo $\Delta t = 2$

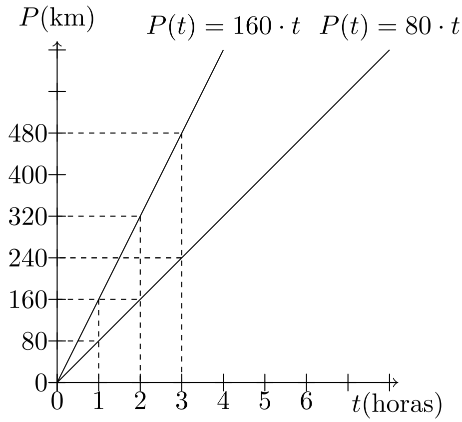
le corresponderá un incremento en la posición de $\Delta P = 320$, y cualquiera sea el incremento de tiempo que se considere siempre se va a cumplir:

$$\text{velocidad}=\tfrac{\Delta P}{\Delta t} = \tfrac{160}{1} = \tfrac{320}{2} = \tfrac{480}{3} = \cdots = 160$$

Incrementos no enteros. En todos los ejemplos exhibidos los incrementos son números enteros ($\Delta t = 1,\ 2, \dots$), pero podrían tomar cualquier valor real. Por ejemplo, si el auto anduviera durante media hora ($\Delta t = \frac{1}{2} = 0,5$) avanzaría 80 km, si el auto anduviera durante o una hora y cuarto ($\Delta t = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$) avanzaría $160 + 40 = 200$ km. En todos los casos obtendríamos la misma velocidad

$$\text{velocidad} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{80}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 80 = 160 \qquad \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{200}{\frac{5}{4}} = \frac{200 \cdot 4}{5} = 160$$

Si graficamos ambas funciones en un mismo gráfico, restringiendo el dominio a los valores no negativos de t, podemos ver que la semirrecta que corresponde al móvil con velocidad de 160 km/h posee una inclinación más pronunciada que la del móvil con velocidad de 80 km/h. En ambos ejemplos, si consideramos el conjunto de los reales mayores o iguales que 0 como dominio, los gráficos obtenidos son *rectas que contienen al origen* y la velocidad de los móviles está relacionada con la inclinación de la misma respecto al semieje positivo de las abscisas.



Estas fórmulas corresponden a un tipo especial de funciones caracterizadas por la proporcionalidad que existe entre las variables que intervienen.

Funciones de proporcionalidad directa. Se llaman *funciones de proporcionalidad directa* a las funciones de la forma

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = m.x$$

donde m es un número real cualquiera al que se llama *pendiente*. En estas funciones, las variables independiente y dependiente son directamente proporcionales, aunque es común que se diga que son proporcionales (a secas).

En los ejemplos anteriores, m vale 80 y 160 respectivamente, y en el contexto del problema hemos trabajado con la función de proporcionalidad restringiendo su dominio al intervalo $[0, +\infty)$. Siguiendo el mismo razonamiento que el llevado a cabo en el caso particular, resulta que la gráfica de este tipo de funciones de proporcionalidad es una recta que contiene al origen. Observamos además que:

- cuando $x = 0$ se cumple que $f(0) = 0$.
- por cada unidad que se incremente el valor de x la función se incrementará constantemente la misma cantidad m (en los ejemplos 80 ó 160), esto es fácil de ver

$$\begin{aligned}
&\text{para } x = 0,\ f(0) = 0\\
&\text{para } x = 1,\ f(1) = m \cdot 1 = m\\
&\text{para } x = 2,\ f(2) = m \cdot 2 = 2 \cdot m\\
&\text{para } x = 3,\ f(3) = m \cdot 3 = 3 \cdot m\\
&\text{para } x = 4,\ f(4) = m \cdot 4 = 4 \cdot m
\end{aligned}$$

y la variación del crecimiento (o decrecimiento si m es negativo) se mantiene constante. Justamente esta propiedad es distintiva de las rectas.

Hemos analizado que el número m, que multiplica a la variable independiente x , nos da idea de la inclinación de la recta: cuanto mayor es m (positivo) más empinada resulta y la variación del crecimiento de la función es mayor. Por eso a este número m se lo denomina pendiente de la recta y su valor determina cuánto aumenta (o disminuye, si m es negativo) la variable dependiente cuando la variable independiente aumenta en una unidad.

En los ejemplos de los automóviles, la velocidad es el cociente entre incrementos $v = \frac{\Delta P}{\Delta t}$.

Cálculo de la pendiente. La pendiente m nos indica la relación entre el incremento de la variable dependiente Δy y el de la variable independiente Δx de la siguiente forma

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}\ . \tag{1.1}$$

En el caso de las funcioens g y h definidas de $[0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$ y dadas por $g(x) = 80 \cdot x$ y $h(x) = 160 \cdot x$ podemos hacer algo similar. Entonces para g es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{80}{1} = \frac{160}{2} = \frac{240}{3} = \cdots = 80$$

y para h es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{160}{1} = \frac{320}{2} = \frac{480}{3} = \cdots = 160$$

Para reafirmar estos conceptos veamos diferentes funciones de proporcionalidad.

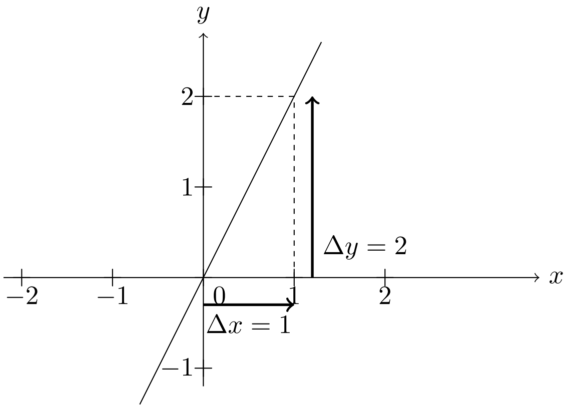
Ejemplo 2.

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \cdot x$. La expresión de laf unción responde al formato $f(x) = m \cdot x$, ya podemos afirmar que:
   - es una función de proporcionalidad, lo que significa que su gráfica es una recta que contiene al origen.

- su pendiente es 2, o sea que si x se incrementa en una unidad ($\Delta x = 1$) entonces y se incrementa en 2 unidades ($\Delta y = 2$) o, si x se incrementa en dos unidades ($\Delta x = 2$) entonces y se incrementa en 4 unidades ($\Delta y = 4$) y así sucesivamente, es decir:

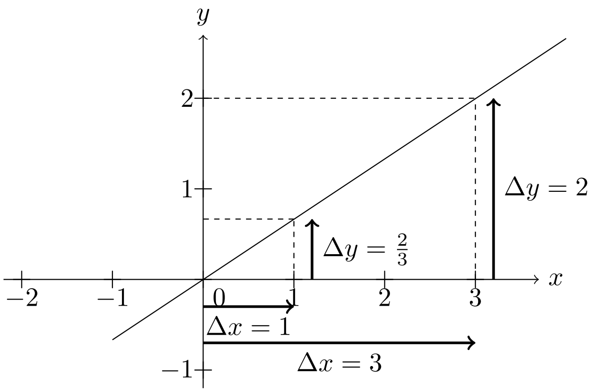
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{3} = \cdots 2$$

Volcando esta información sobre el gráfico obtenemos:



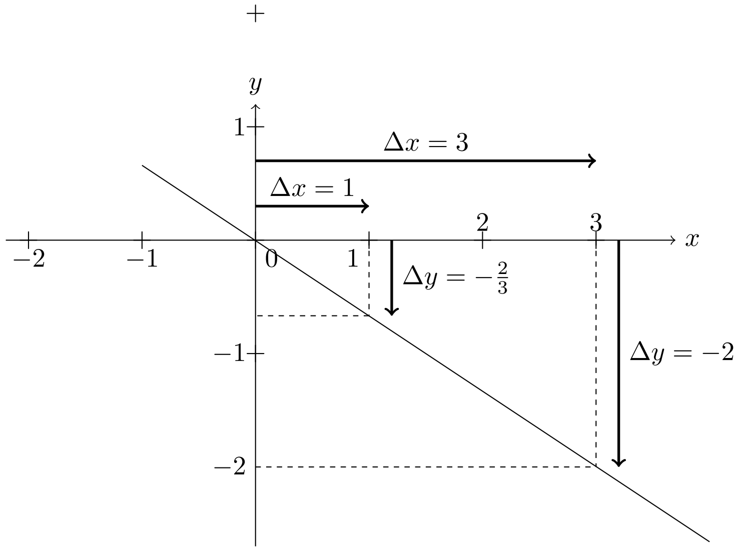
En la figura se indica que, partiendo del punto $(0;0)$, si nos desplazamos una unidad hacia la derecha en el eje horizontal y luego nos desplazamos 2 unidades verticalmente obtenemos un punto del gráfico.

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x$, la pendiente es $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}$. Este caso es análogo al anterior. Su gráfico resulta:



En el gráfico se muestra que si desde el punto $(0;0)$ nos desplazamos una unidad en el eje horizontal y luego $2/3$ verticalmente se determina la misma recta que si nos desplazamos desde el origen de coordenadas 3 unidades horizontalmente y 2 verticalmente. Esta última elección tiene la ventaja de trabajar con valores enteros.

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{2}{3} \cdot x$, la pendiente es $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2/3}{1} = -\frac{2}{3}$. Este caso es análogo al anterior. Su gráfico resulta:



En el gráfico se muestra que si desde el punto $(0; 0)$ nos desplazamos una unidad en el eje horizontal y luego $-2/3$ verticalmente se determina la misma recta que si nos desplazamos desde el origen de coordenadas 3 unidades horizontalmente y -2 verticalmente. Esta última elección tiene la ventaja de permitirnos trabajar con valores enteros.

Hay muchos fenómenos que corresponden a (o que se pueden aproximar por) un modelo proporcional directo. He aquí algunos ejemplos:

Ejemplo 3.

- Supongamos que un resorte está colgado de uno de sus extremos. Su alargamiento (incremento de su longitud respecto de la longitud inicial) resulta proporcional al peso que colgamos de él (esta aproximación es muy buena siempre y cuando el peso no sea demasiado grande como para que el resorte comience a deformarse y pierda elasticidad):

$$A(p) = k \cdot p$$

  donde $A(p)$ representa el alargamiento del resorte respecto de su longitud inicial, p representa el peso colgado y k representa la constante de elasticidad del resorte (que va a depender del material).

- El dinero que gana un inversor, en concepto de intereses, es directamente proporcional al capital que deposita:

$$I(c) = k \cdot c$$

donde el factor k de proporcionalidad guarda relación con la tasa de ínteres ue paga el banco y el tiempo que dura la inversión.

- La dosis de un medicamento es proporcionalidad al peso del enfermo. En este caso la relación proporcional es aproximada.

Las funciones de proporcionalidad directa y la regla de tres simple directa

En el estudio de la proporcionalidad numérica, hemos visto que cuando dos magnitudes son directamente proporcionales (y solo en ese caso), vale la regla de tres simple directa. Asociado a la regla de tres simple directa suele utilizarse la expresión "a más, más y a menos, menos", en alusión a cómo varían las magnitudes que son proporcionales. Si bien esto se cumple en todas las situaciones de proporcionalidad directa, otras relaciones también la verifican sin ser directamente proporcionales. Por ejemplo, consideremos dos magnitudes A y B que varían como se muestra en la siguiente tabla:

A	1	2	3	4	5
B	2	3	4	5	6

En este caso, se cumple que "a más, más y a menos, menos" ya que a medida que aumenta (o disminuye) A también aumenta (o disminuye) B. Sin embargo, A y B no son magnitudes directamente proporcionales ya que, por ejemplo, $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$ (esto significa que no hay una constante de proporcionalidad). Si bien es necesario que para que dos magnitudes sean directamente proporcionales se cumpla que "a más, más y a menos, menos", esto no es suficiente: ambas deben aumentar en la misma proporción; Esto último se asocia a otras expresiones usuales, en este caso correctas, como "al doble de una, el doble de la otra", "al triple de una, el triple de la otra", etc.

Trabajo práctico 24

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Qué formato tienen las funciones de proporcionalidad directa?

(b) Explicar porqué todas las funciones de proporcionalidad directa tienen como gráfico una recta.

(c) Explicar qué son los incrementos Δx y Δy y su relación con la pendiente.

Ejercicio 2. Considerar el problema de la dosis de medicamentos del cuadernillo 2 sección 1: un medicamento tiene una concentración de 750 miligramos de amoxicilina cada 5 mililitros de jarabe (750mg/5mℓ).

(a) Completar la siguiente tabla, si v indica el volumen de jarabe y A la cantidad de amoxicilina

a	$v = 1$ mℓ	le corresponde	$A =$	$A/v =$
a	$v = 3$ mℓ	le corresponde	$A =$	$A/v =$
a	$v = 10$ mℓ	le corresponde	$A =$	$A/v =$
a	$v = 20$ mℓ	le corresponde	$A =$	$A/v =$
a	$v = 50$ mℓ	le corresponde	$A =$	$A/v =$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a	v genérico	le corresponde	$A =$	$A/v =$

(b) Determinar el incremento ΔA para $\Delta v = 1$ y para $\Delta v = 3,5$.

(c) Definir la función que vincula las variables v y A y anticipar qué gráfico tendrá.

(d) Representar gráficamente la función definida en el inciso c).

(e) ¿A qué tipo de funciones pertenece la función definida? ¿Cuál es la pendiente?

(f) Un conocido jarabe para aliviar el dolor y bajar la fiebre usa como componente activo el ibuprofeno. En la presentación infantil, 100 mℓ contienen 200 mg de componente activo. ¿Cómo varía la cantidad de componente activo en relación al volumen de jarabe? ¿Puede anticipar que el gráfico que representa la situación es una recta? ¿Por qué?

Ejercicio 3. Un biólogo estudia el comportamiento de las lombrices en relación a la luz, para ello consigue un tubo de ensayo graduado con el cero ubicado en el centro del mismo. Pone a la lombriz en el punto marcado como cero y una luz fuerte en el extremo derecho del tubo. La lombriz comienza a desplazarse hacia la izquierda a una velocidad constante de 1cm cada treinta segundos.

(a) Representar en un diagrama el experimento del biólogo.

(b) Indicar la posición de la lombriz al segundo, a los 15 segundos y a los 45 segundos de comenzado su movimiento.

(c) Indicar la velocidad de la lombriz en m/seg.

(d) Modelizar el desplazamiento de la lombriz en función del tiempo definiendo una función adecuada.

(e) ¿Puede garantizar que dicha función tiene como gráfico una recta?¿Por qué? Si la respuesta es afirmativa, calcular la pendiente. Representar gráficamente.

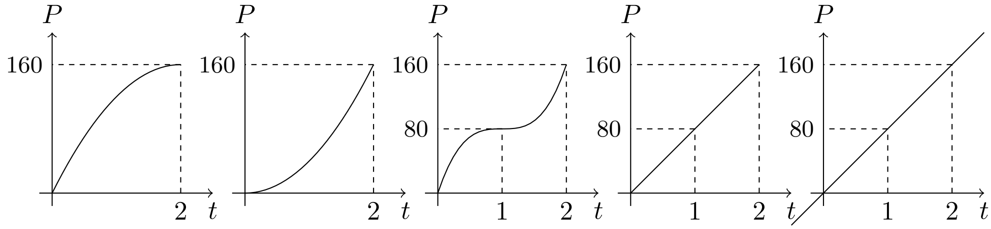
Ejercicio 4. Se obtuvo cierta información de la posición P y el instante t en que un automóvil atraviesa diferentes mojones en la ruta 2. Los datos relevados se muestran en la tabla:

t **(tiempo)**	P **(posición)**
0 hs	0 km
30 min	40 km
1 h	80 km
2 hs	160 km

(a) Estimar la posición a la que se encontraría el auto a las 3 hs, a las 5 hs y a las 6 horas y media.

(b) ¿Por qué en el ítem a) se pide "estimar" y no "calcular exactamente"? ¿Se puede responder de manera exacta? ¿Qué supuesto adicional en el contexto del problema se está considerando al responder?

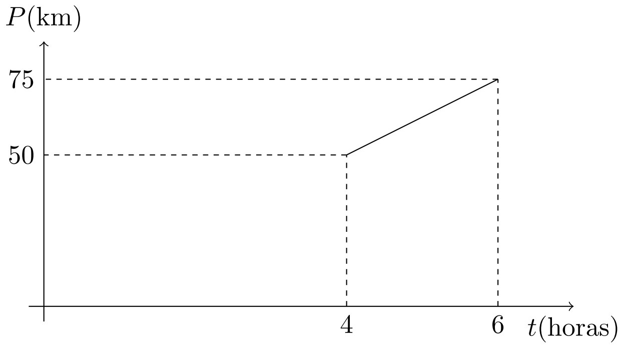
(c) Decidir si cada uno de los gráficos que siguen podría corresponder a la situación planteada y si responden o no al supuesto considerado en a). En cada caso, justificar tanto la elección como el descarte.



(d) Proponer la fórmula que permita estimar la posición P del auto (en km) en función el tiempo t (en horas). ¿Responde esta fórmula al supuesto plateado?

(e) ¿A qué hora se estima que llegaría a Mar del Plata (400km)?

Ejercicio 5. Se tomaron registros de la distancia a San Miguel en función del tiempo para un móvil que partió desde San Miguel a la hora 0 a velocidad constante. Esa información se volcó en el siguiente gráfico:



(a) ¿Cuál es la velocidad del móvil? Pensando en la función lineal cuyo gráfico es la recta dada ¿con qué parámetro de la fórmula se corresponde la respuesta?

(b) Realizar el cálculo de la velocidad como cociente entre distancia recorrida y tiempo empleado, utilizando un lapso distinto del que se muestra en el gráfico. Verificar que se obtiene el mismo resultado que en a).

Ejercicio 6. Elegir cuál o cuáles de las siguientes opciones son las correctas. La longitud de una circunferencia y la medida de su radio son magnitudes directamente proporcionales porque:

- si el radio aumenta la longitud de la circunferencia aumenta.
- si el radio se incrementa en 2 unidades la longitud de la circunferencia se incrementa en 2 unidades.
- la razón entre la longitud de la circunferencia y el radio de la misma, cuando éste es no nulo, es constante.
- si se multiplica al radio por una constante positiva cualquiera, la longitud de la circunferencia aumenta.
- si se multiplica al radio por una constante positiva cualquiera, la longitud de la circunferencia correspondiente a ese nuevo radio resulta de multiplicar la longitud de la circunferencia inicial por la misma constante.

2 Funciones lineales

2.1 Definición y gráfico

Ejemplo 4. Volvamos a la situación anterior en la que estudiamos el movimiento del automóvil cuya velocidad constante era de 80 km/h, pero supongamos ahora que en el instante inicial el auto no está en el km 0 sino que se encuentra en el km 100. Por esta razón, la función P propuesta debe cumplir que $P(0) = 100$. Luego, como sabemos que su velocidad se mantiene constante en 80 km/h, podemos afirmar que por cada hora que pase el auto va a aumentar su posición en 80 km respecto al inicial (km 100). Lo señalado puede verse en la tabla que sigue:

a	$t = 0$ h	le corresponde	$P = 100$
a	$t = 1$ h	le corresponde	$P = 100 + 80 = 180$
a	$t = 2$ h	le corresponde	$P = 100 + 80 \cdot 2 = 260$
a	$t = 3$ h	le corresponde	$P = 100 + 80 \cdot 3 = 340$
	$\vdots$		$\vdots$
a	t genérico	le corresponde	$P = 100 + 80 \cdot t$

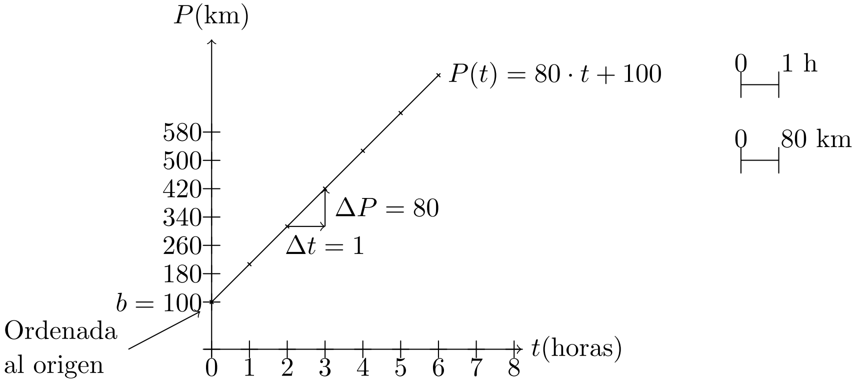
La función que describe este comportamiento es $P : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $P(t) = 100 + 80 \cdot t$. Notar que se cumple la condición $P(0) = 100$. El gráfico de esta función no contiene al origen pues para $t = 0$ la posición no es 0 km. Se trata de una semirrecta que contiene al punto $(0, 100)$ y de pendiente 80. Estas fórmulas corresponden a un tipo especial de funciones cuyo estudio desarrollamos ahora.

Funciones lineales. Se llaman así a las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son números reales cualesquiera. El gráfico de la función lineal $f(x) = mx + b$ es la recta de ecuación $y = mx + b$. El caso en que $b = 0$, se obtiene una función de proporcionalidad directa como las ya estudiadas en la sección 1, de modo que estas funciones son más generales que las anteriores pues las incluyen como un caso particular.

Podemos pensar que el gráfico de una función lineal de expresión $f(x) = mx + b$ resulta ser una traslación vertical del gráfico de la función de proporcionalidad directa $g(x) = mx$ en b unidades (hacia arriba si $b > 0$ o hacia abajo si $b < 0$). En efecto, si el punto $(x; m \cdot x)$ pertenece al gráfico de la función g, el punto $(x; mx + b)$, ubicado b unidades hacia arriba o hacia abajo de acuerdo al signo de b, pertenece al gráfico de la función f.

Luego, el gráfico de las funciones lineales también es una recta.

En particular, en la situación que estamos estudiando, $b = 100$ es la posición inicial en el instante $t = 0$. El número $b = 100$ produce un corrimiento de la recta correspondiente a la función proporcional, desplazándola de tal forma que interseca al eje y en la posición $y = 100$. Por eso, al número b se lo denomina *ordenada al origen*. Gráficamente:

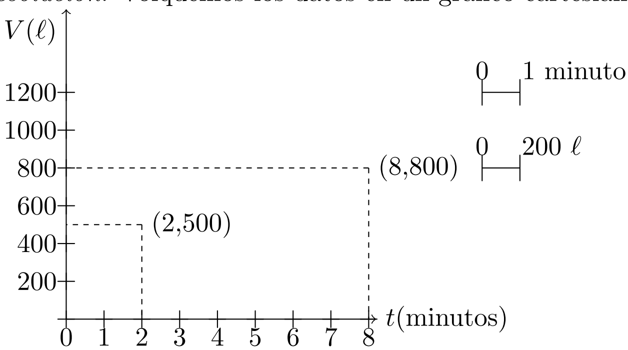


2.2 Obtención de la fórmula de una función lineal conociendo dos puntos de su gráfico

La representación gráfica de una función lineal es una recta y para trazarla sólo hace falta conocer dos de sus puntos. Teniendo como datos dos puntos del plano (dos pares ordenados), ¿será posible calcular de forma sistemática la fórmula de la función lineal cuyo gráfico sea la recta que pasa por los dos puntos dados? Veámoslo con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5. Supongamos que un piletón que tiene una cierta cantidad de agua, se llena usando una canilla de forma tal que el volumen de agua aumenta linealmente con el tiempo. Se observa que a los dos minutos hay 500 litros y que a los 8 minutos hay 800 litros. ¿Cuál es el volumen de agua en el piletón en cada instante t (en minutos)?

Resolución. Volquemos los datos en un gráfico cartesiano:



Los datos corresponden a los puntos $(2, 500)$ y $(8, 800)$ los cuales que determinan unívocamente a una recta.

Aclaramos que el problema presenta restricciones en el dominio de la función (solo tienen sentido valores positivos de t hasta el tiempo que tarda en llenarse la pileta, que no es informado en el problema), pero solo nos interesa aquí ocuparnos de la obtención de la fórmula de la función lineal.

Sabemos que la fórmula de la función lineal buscada es del tipo $V(t) = m \cdot t + b$ y una vez determinados los valores de la pendiente m y de la ordenada al origen b, nos permitirá calcular el volumen V de agua después de t minutos de funcionamiento de la canilla.

Cálculo de la pendiente. La pendiente nos dice cuánto varía el volumen V (ΔV) ante un incremento del tiempo t de una unidad ($\Delta t = 1$ minuto), o también es igual a la relación entre estos incrementos, es decir

$$m = \frac{\Delta V}{\Delta t} \ . \tag{2.2}$$

En nuestro caso, lo que sabemos es que cuando el tiempo pasa de 2 a 8 minutos, o sea un incremento de tiempo de $\Delta t = 8 - 2 = 6$ minutos, el volumen se incrementa de 500 litros a 800 litros, esto es, un incremento de $\Delta V = 800 - 500 = 300$. Por ende la relación de los incrementos es:

$$m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{80 - 500}{8 - 2} = \frac{300}{6} = 50$$

Entonces $m = 50$ indica que por cada minuto que pasa, el aumento de volumen es de 50 litros. Ya encontramos uno de los parámetros de la expresión de la función lineal, $m = 50$, de modo que la fórmula es de la forma

$$V(t) = 50 \cdot t + b \ .$$

Queda todavía averiguar la ordenada al origen b. La función que estamos buscando nos va a servir para calcular el volumen V de agua en el piletón después de t minutos de haber empezado a funcionar la canilla, por lo que debe servir para calcular los casos particulares que conocemos. Por ejemplo,

Volumen de agua a los 2 minutos es de 500 litros

Volumen de agua a los 8 minutos es de 800 litros

y cuya traducción matemática es:

Volumen de agua a los 2 minutos es de 500 litros	$500 = V(2) = 50 \cdot 2 + b$
Volumen de agua a los 8 minutos es de 800 litros	$800 = V(8) = 50 \cdot 8 + b$

De cualquiera de esas dos ecuaciones podremos despejar el valor de b. Si por ejemplo tomamos la primera:

$$50 \cdot 2 + b = 500 \ \Rightarrow \ 100 + b = 500 \ \Rightarrow \ b = 500 - 100 = 400$$

Entonces, el volumen de agua que había en el piletón al comenzar a funcionar la canilla era de 400 litros. Si hubiéramos despejado de la segunda ecuación por supuesto habríamos obtenido el mismo valor (comprobarlo). Ya hemos determinado los dos valores que necesitamos, $m = 50$ y $b = 400$, por lo que la expresión de la función lineal es:

$$V(t) = 50 \cdot t + 400 \ .$$

Tenemos una forma de verificar que lo obtenido es correcto, es decir, comprobar que la expresión hallada da lo que tiene que dar en los dos casos que conocemos:

$$V(2) = 50 \cdot 2 + 400 = 500, \ V(8) = 50 \cdot 8 + 400 = 800.$$

¿Por qué enfatizamos lo de verificar en los dos casos? Porque la única forma de saber que hemos hallado la fórmula de la recta que contiene a los puntos $(2, 500)$ y $(8, 800)$ es probar que ambos puntos satisfacen la relación funcional V.

Respuesta: El volumen de agua a cada instante t viene dado por la fórmula $V(t) = 50 \cdot t + 400$ y tiene sentido para valores de t mayores o iguales a 0 (no se informa la capacidad de la pileta).

Otra forma de pensar el cálculo de la pendiente es a partir de la regla de tres simple: los incrementos de volumen son proporcionales a los correspondientes intervalos de tiempo. Plantemos la regla de tres simple para los incrementos:

Si en 6 minutos, el volumen se incrementa en 300 litros	$6 \longrightarrow 300$
entonces en solo un minuto se incrementa x	$1 \longrightarrow x$

De donde resulta $x = \frac{300}{6} = 50$. Llegamos por supuesto, al mismo resultado que antes: $m = 50$.

La regla de tres y las funciones lineales no proporcionales.

Vale destacar que en una función lineal no proporcional, esto es con ordenada al origen distinta de 0, la regla de tres puede aplicarse solo a los incrementos de las variables. Veamos, con un ejemplo, que aplicada a las variables, los resultados obtenidos son incorrectos. Sabemos que a los 2 minutos, el volumen de agua es 500. Calculemos mediante regla de tres, el volumen a los 8 minutos.

$$\begin{array}{lcl} 2 \longrightarrow & 500 & \\ 8 \longrightarrow & x & = \frac{500 \cdot 8}{2} = 2000 \end{array}$$

El valor obtenido, 2000 litros, es incorrecto ya que sabemos que a los 8 minutos hay 800 litros. En síntesis, **en una función lineal no proporcional, la regla de tres no es aplicable a las variables sino a los incrementos de las variables.**

2.3 Ecuación de la recta. Recta que pasa por dos puntos

Ejemplo 6. Obtener la fórmula de la función lineal cuyo gráfico contiene a los puntos $(5; -4)$ y $(-3; 2)$.

Resolución: Calculamos la pendiente:

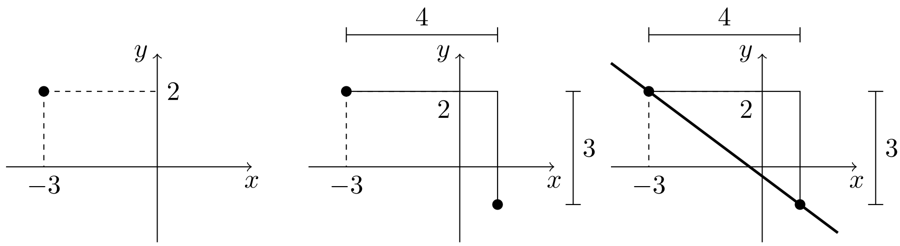
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(-1)}{-3-5} = \frac{2+1}{-3-5} = \frac{-3}{8}$$

La fórmula es del tipo : $f(x) = \frac{-3}{4} \cdot x + b$ Para averiguar la ordenada al origen, podemos sustituir las variables x y $f(x)$ por cualquiera de los dos puntos dados. Tomando el segundo sabemos que

$$f(-3) = 2 \Leftrightarrow 2 = -\frac{3}{4} \cdot (-3) + b \Leftrightarrow 2 = \frac{9}{4} + b \Leftrightarrow 2 - \frac{9}{4} = b \Leftrightarrow -\frac{1}{4} = b$$

Respuesta: La fórmula de la función lineal es $f(x) = -\frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{4}$

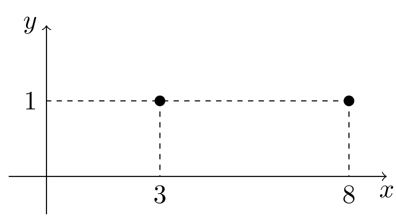
Realicemos el gráfico de la recta. Si bien disponemos de dos puntos, vamos a graficarla usando el valor de la pendiente para mostrar cómo trabajar con una pendiente negativa. Tomamos un punto de la recta, por ejemplo, $(-3; 2)$. La pendiente es $-\frac{3}{4}$, que podemos pensarla como $\frac{-3}{4}$. Así, a partir del punto $(-3; 2)$, por cada 4 unidades que aumenta la abscisa, la ordenada disminuye 3. Con esto determinamos un segundo punto de la recta y la trazamos. Los gráficos siguientes muestran el procedimiento explicado.



Rectas horizontales y verticales

Ejemplo 7. ¿Cuál es la fórmula de la función lineal cuyo gráfico contiene a los puntos $(3; 1)$ y $(8; 1)$.

Resolución: Al represeentar gráficamente a los puntos $(3; 1)$ y $(8; 1)$ se observa que la recta que los contiene es horizontal. Al calcular la pendiente obtenemos:



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-1}{8-3} = 0 \ .$$

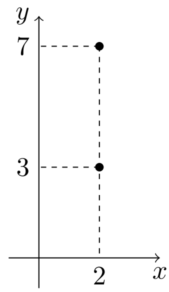
Además, la ordenada al origen es 1 (sin necesidad de realizar cálculos). De lo anterior se deduce la siguiente respuesta.

Respuesta: La fórmula de la función lineal es $f(x) = 0 \cdot x + 1$ o, directamente, $f(x) = 1$.

Observemos que esta particularidad de obtener el valor 0 para la pendiente ocurre en cualquier recta horizontal ya que los puntos de una recta así tienen todos el mismo valor de ordenada y, así,$\Delta y = 0$, mientras que Δx no. En general, la fórmula de una función lineal cuyo gráfico es una recta horizontal es de la forma $f(x) = b$.

Ejemplo 8. ¿Cuál es la ecuación de la recta que contiene a los puntos $(2; 3)$ y $(2; 7)$?

Resolución: La recta que contiene a los puntos dados es vertical y "no tiene pendiente" ya que $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-3}{2-2}$ y resulta una división con divisor cero. Esto ocurre en todas las rectas verticales ya que todos sus puntos tienen el mismo valor de abscisa y así $\Delta x = 0$ y no podemos realizar la división. Sin embargo, la recta tiene una ecuación ya que sus puntos sí cumplen una propiedad: en este caso, $x = 2$. Todo punto que tenga abscisa 2 pertenece a la recta y todo punto que está en la recta tiene abscisa 2.



Respuesta: La ecuación de la recta es $x = 2$.

En general, las rectas verticales tienen ecuación $x = k$ (k es un real cualquiera). Es importante observar que estas rectas no corresponden a funciones ya que para hay un valor de x que tiene infinitas imágenes. Por no ser funciones, no responden al formato $f(x) = m.x + b$.

Trabajo práctico 25

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Cuál es la diferencia entre una función de proporcionalidad directa y una función lineal cualquiera?

(b) Explicar qué indican la pendiente y la ordenada al origen de una recta.

(c) Si se sabe que dos magnitudes están relacionadas por una función lineal, ¿es posible usar la regla de tres para calcular valores de la variable dependiente? Si la respuesta es afirmativa, explicar cómo. Si la respuesta es negativa, decir si en algún caso es posible usarla.

Ejercicio 2. Se obtuvo cierta información de la posición P y el instante t en que un automóvil atraviesa diferentes mojones en la ruta 2. Los datos relevados se muestran en la tabla:

t **(tiempo)**	P **(posición)**
0 hs	40 km
30 min	80 km
1 h	120 km
2 hs	200 km

(a) ¿Qué supuesto adicional en el contexto del problema se podría hacer para poder estimar la posición a la que se encontraría el auto a las 3 hs, a las 5 hs y a las 6 horas y media? Calcular la posición en esos instantes, usando el supuesto.

(b) Bajo el supuesto planteado en (a),

   (i) proponer un gráfico que describa la situación planteada,

   (ii) ¿cuál es la posición P del auto (en km) en cada instante t (en horas)?

   (iii) ¿Cuánto varía la posición del auto por cada hora de viaje?

   (iv) Si nos ubicamos en un lugar cualquiera de la ruta y vemos pasar el auto, en tres horas más de viaje, ¿cuántos kilómetros avanzará? Suponer que el viaje continúa todo lo que sea necesario.

   (v) ¿Qué relación tienen las dos preguntas anteriores con la pendiente de la recta?

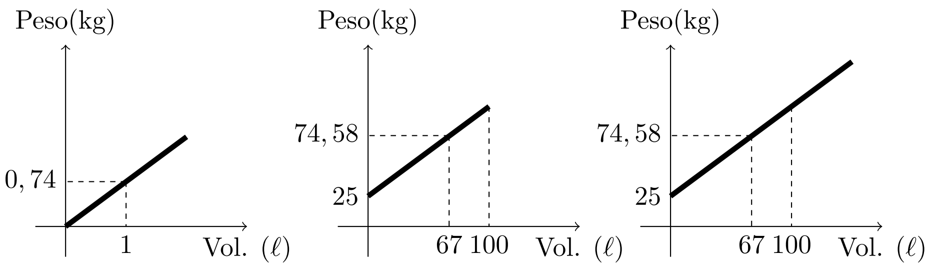
Ejercicio 3. Se tiene un barril de madera que tiene capacidad para 100 litros y sabemos que vacío pesa 25 kg. Si un litro de aceite pesa $0,74$ kg responder:

(a) ¿Puede ser que el barril contenga 20 litros de aceite y que al apoyarlo en una balanza ésta marque $39,8$ kg? ¿Puede ser que contenga 43 litros y la balanza marque $55,8$ kg?

(b) ¿Cuál es el peso máximo que se puede obtener apoyando el barril sobre la balanza?, ¿qué cantidad de litros tendría el barril en ese caso?

(c) ¿Cuántos litros habría que poner en el barril para que éste pese $106,4$ kg?

(d) ¿Cuál o cuáles de los siguientes gráficos puede corresponder a la situación anterior? Justificar la elección.



(e) Indicar cómo se usaría la regla de tres para calcular cuánto pesa el barril si el mismo contiene 22 litros de aceite.

(f) El barril contiene una cierta cantidad de aceite y pesa $33,28$ kg. Calcular el peso del barril cuando se le agregan 15 litros de aceite más.

(g) Definir una función mediante una fórmula que exprese el el peso del barril en términos de la cantidad de aceite que éste contiene.

Ejercicio 4. En una quinta tenemos una pileta de natación que se vacía mediante el uso de una bomba. Ésta extrae 250 litros de agua por hora a velocidad constante. Sabiendo que originalmente la pileta tenía 8000 litros de agua.

(a) ¿Cuánto tiempo deberá pasar para que en la pileta queden 6300 litros?

(b) Después de un cierto tiempo se sabe que en la pileta hay 6000 litros ¿cuánto tiempo deberá pasar para que queden 4300 litros?

(c) ¿En qué momento se vacía la pileta?

(d) Definir una función mediante una fórmula que exprese el volumen de agua que queda en la pileta para cada instante t.

(e) Hacer un gráfico cartesiano que describa la situación.

Ejercicio 5. Para la función lineal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4.x + 2$, se pide:

(a) Indicar dos puntos del gráfico.

(b) Indicar dos puntos que no pertenezcan a su gráfico.

(c) Hallar los puntos deonde la gráfica corta a cada uno de los ejes coordenados.

Ejercicio 6. Hallar la expresión de la función lineal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que la recta correspondiente cumpla con lo indicado en cada inciso y representarla gráficamente.

(a) su pendiente es 3 y contiene al punto $(-1; 2)$

(b) su pendiente es $\frac{1}{2}$ y contiene al punto $(-1; \frac{2}{5})$,

(c) su pendiente es $-2/3$ y contiene al punto $(4; -1)$,

(d) su pendiente es $-5/3$ y contiene al punto $(-2; 0)$,

(e) su pendiente es 0 y contiene al punto $(1; -1)$,

(f) su pendiente es 0 y contiene al punto $(2; 0)$,

Ejercicio 7. Dar la ecuación de la recta que cumple lo indicado en cada inciso y representarla gráficamente.

(a) es una recta vertical y contiene al punto $(1; -1)$,

(b) es una recta vertical y contiene al punto $(-1; 4)$,

(c) es una recta vertical y contiene al punto $(-2, 0)$.

Ejercicio 8. Hallar, si es posible, la expresión de la función lineal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que la recta correspondiente contenga a los puntos indicados en cada inciso. Representar gráficamente.

(a) $(3; 2)$ y $(-2; 4)$, (b) $(-4; -\frac{2}{3})$ y $(-\frac{5}{6}; -1)$ (c) $(3; -1)$ y $(-2; -1)$,

(d) $(3; 2)$ y $(-2; 2)$, (e) $(2; 1)$ y $(2; 5)$ (f) $(-3; 1)$ y $(-3; -5)$,

(g) $(-4; 0)$ y $(5; -1)$, (h) $(0; 1)$ y $(\frac{1}{4}; 0)$, (i) $(\frac{1}{3}; \frac{7}{8})$ y $(2; 0)$.

Ejercicio 9. Estamos de vacaciones en EEUU y nos encontramos que la temperatura se mide en grados Fahrenheit (F). Lo único que sabemos es que 50 F equivalen a 10 Cy que $140F$ equivalen a 60 C.

(a) Hallar una fórmula que nos permita traducir de grados Fahrenheit a centígrados.

(b) Ya de vuelta de las vacaciones y otra vez en Buenos Aires, nos encontramos con un turista estadounidense que está de visita en la ciudad. El tiene un problema análogo al nuestro: necesita interpretar los grados centígrados en grados Fahrenheit. Usando nuestra experiencia del viaje por EEUU, ¿cómo podríamos ayudarlo?

3 Sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones lineales.

3.1 Intersección de rectas. Sistemas de ecuaciones lineales.

Nos ocupamos ahora de encontrar la intersección entre dos rectas. Lo estudiaremos a partir de la siguiente situación:

Ejemplo 9. Se observó que durante dos días consecutivos, las temperaturas de dos ciudades variaron en forma lineal según el tiempo. Considerando a las 0 horas del segundo día como el 0 del eje de las abscisas y llamando y a la temperatura (en grados centígrados) y x al tiempo (en horas), la variación está dada por las fórmulas $f(x) = 2x - 3$ para la ciudad A y $g(x) = -2x + 2$ para la ciudad B. ¿A qué hora se registró la misma temperatura en ambas ciudades?

Resolución: El planteo que responde al problema es la búsqueda del punto de intersección entre las rectas correspondientes a las funciones lineales f y g, ambas con dominio $[-24, 24]$, debido a que el 0 está ubicado al comienzo del segundo día, y cuyas expresiones son $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = -2x + 2$. Para ello, debemos trabajar analíticamente porque, salvo algún caso particular, la lectura gráfica no nos da precisión acerca de la intersección. Los puntos comunes a ambas rectas, si existen, son pares $(x; y)$ que pertenecen tanto a una como a otra recta, es decir, que verifican ambas ecuaciones. Así, en el (o los) punto(s) de intersección, el valor de y obtenido en f debe ser el mismo que el valor de y obtenido en g. De este modo, para hallar los puntos de intersección, nos proponemos, en primer lugar, hallar x tal que $f(x) = g(x)$.

Como $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = -2x + 2$ queda planteada la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x - 3 = -2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2x = 2 + 3 \\ &\Leftrightarrow \quad 4x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{4}\ . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Luego, cuando $x = \frac{5}{4}$, las expresiones

$$2x - 3 \quad \text{y} \quad -2x + 2$$

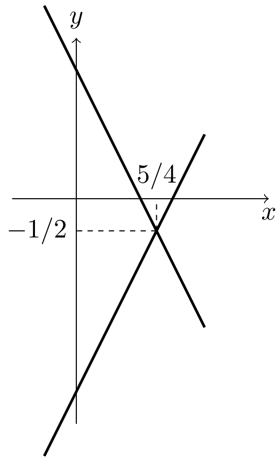
producen el mismo valor. Ese valor es

$$y = 2.\frac{5}{4} - 3 = -\frac{1}{2}\ .$$

Como el valor de x es único, y por lo tanto también el de y, las rectas se intersecan en un único punto:$(\frac{5}{4}; -\frac{1}{2})$. Esto nos permite deducir la siguiente respuesta.

Respuesta: Ambas ciudades tienen el mismo registro térmico a las $1:15$h del segundo día (considerar que $\frac{5}{4}$ de hora son una hora y quince minutos) y que la temperatura de ambas ciudades en ese momento fue de $-0,5°$. Cabe resaltar que el tiempo obtenido ($1:15$h del segundo día) es un valor que está dentro del dominio de ambas funciones.

La interpretaci ón gráfica es la siguiente: (por razones de escala, omitimos destacar que el dominio es $[-24, 24]$).



Algunas consideraciones sobre intersección de rectas

Al buscar la intersección de dos rectas tratamos a las fórmulas de las funciones lineales correspondientes en forma simultánea. En términos algebraicos, hablamos de un sistema de ecuaciones. En este caso, son dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Los sistemas de ecuaciones se presentan con una notación particular. Para el caso que resolvimos se escribe así:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

Entonces, resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es hallar la intersección de las dos rectas correspondientes a cada una de esas ecuaciones. En el caso que resolvimos, las rectas se intersecan en un único punto. Dos rectas así se llaman transversales. Un sistema de ecuaciones formado por dos rectas transversales se dice que es compatible determinado (compatible, porque tiene solución; determinado, porque tiene una sola). El método que usamos para resolver el sistema anterior se llama método de igualación ya que se basa en igualar las expresiones correspondientes a una misma variable. Al analizar la intersección de dos rectas, podemos encontrarnos con distintos casos:

(a) que se intersequen en un único punto (el caso ya estudiado);

(b) que no tengan puntos comunes. Este es el caso de dos rectas que son paralelas y que no son coincidentes.

(c) que tengan todos sus puntos comunes. Esto se da cuando las dos rectas son coincidentes (son la misma recta)

Si bien no estudiaremos en detalle los casos b) y c), podemos decir que cuando dos rectas tienen la misma pendiente, resultan paralelas. Si, además, las ordenadas al origen son distintas, las rectas no tienen puntos comunes (paralelas no coincidentes, caso b), mientras que si tienen la misma ordenada al origen, las dos rectas son la misma (paralelas coincidentes, caso c).

Un ejemplo del caso b) es el sistema

$$\begin{cases} y = 5x - 3 \\ y = 5x + 2 \end{cases} .$$

Las rectas que corresponden a las ecuaciones tienen igual pendiente y distinta ordenada al origen, es decir, son rectas paralelas no coincidentes.

Un ejemplo del caso c) es el sistema

$$\begin{cases} y = -9x - 3 \\ y = -9x - 3 \end{cases} .$$

Las rectas que corresponden a las ecuaciones tienen igual pendiente e igual ordenada al origen, es decir, son rectas paralelas coincidentes.

3.2 Inecuaciones en general

Como se explicó en los capítulos correspondientes a Algebra y Modelización, la frase "resolver una ecuación" significa encontrar los valores de x para los cuales se cumple una igualdad del tipo "$f(x) =$ número" donde $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es una función de variable x en un dominio A. Cuando en lugar del símbolo "=" se encuentran uno de los símbolos "$>$, $\geq$, $<$, $\leq$" y se buscan los valores de x para los cuales se cumple una desigualdad, se dice que se está resolviendo una inecuación. Veamos algunos ejemplos de inecuaciones.

Ejemplo 10.

(a) $3x - 4 \leq 7$,

(b) $x^2 - 4 > 3x - 1$,

(c) $f(x) \geq 7$ donde $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$,

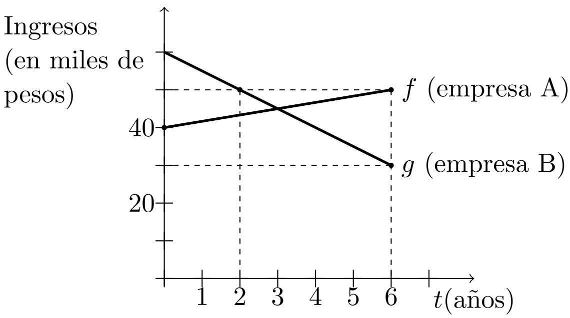
(d) $f(x) \geq 7$ donde $f : [1; 4,5] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$.

Se dice que un número es solución de una inecuación si al reemplazar la variable x por dicho número se cumple la desigualdad planteada. Por ejemplo, $x = 2$ es solución de la inecuación a) pero no lo es de la b). La ecuación c) tiene como una de sus soluciones al número $-3,5$, pero este número no es solución de la inecuación d) pues $-3,5$ no es un elemento del intervalo $[1; 4,5]$. En general las inecuaciones tienen infinitas soluciones que se suelen describir usando la notación de intervalos.

3.3 Inecuaciones lineales

En esta sección se explica, mediante un ejemplo, como resolver inecuaciones lineales con ayuda de un gráfico. Una inecuación lineal es una inecuación en el sentido que se explicó arriba en la cual solo intervienen funciones lineales.

Ejemplo 11. El gráfico describe los ingresos por ventas de dos empresas A y B (expresados en miles de pesos) a lo largo de un lapso de 6 años. Determinar en qué períodos la empresa A supera en ingresos a la empresa B.



Resolución: Conocer cuándo los ingresos de A superan a los de B, es saber cuándo la función f toma valores mayores que los de g, lo que se expresa simbólicamente en saber cuáles son los valores de x que verifican la inecuación $f(x) > g(x)$.

Los ingresos de ambas empresas varían linealmente en un intervalo. Para poder saber con precisión cuándo la empresa A supera en ingresos a la empresa B, tenemos que conocer primero el momento en que ambas empresas tienen la misma ganancia, es decir que tenemos que conocer el punto de intersección de las rectas que corresponden a la evolución de los ingresos de ambas empresas. Para esto, deberemos resolver el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas. Conocido esto, la lectura gráfica nos permitirá saber en qué período ocurre lo que el problema pregunta. Obtengamos entonces, las ecuaciones de las dos rectas.

Empresa A: El ingreso inicial de \$40(mil) nos da la ordenada al origen y el incremento de \$10 (mil) cada 6 años se expresa en que la pendiente de la recta es $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. Luego, la ecuación de la recta es $y = \frac{5}{3}.x + 40$. Como el estudio abarca 6 años, la función lineal que representa la evolución de los ingresos de la empresa A es $f : [0, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5}{3}.x + 40$ (un segmento de recta).

Empresa B: Tenemos como dato los puntos $(2; 50)$ y $(6; 30)$.
Así, $m = \frac{30-50}{6-2} = -\frac{20}{4} = -5$.

Para obtener la ordenada al origen (que no es dato), utilizamos uno de los puntos de la recta que es conocido como, por ejemplo, el punto $(2; 50)$. De este modo nos queda

$$50 = -5.2 + b \Rightarrow 50 = -10 + b \Rightarrow b = 60 \ .$$

La ecuación de la recta es $y = -5x + 60$. Considerando las restricciones del problema, la función lineal que da los ingresos de la empresa B es $g : [0, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -5.x + 60$ (otro segmento de recta).

Conocidas las ecuaciones de las rectas (en realidad, de los segmentos que representan la evolución de los ingresos), planteamos y resolvemos el sistema de ecuaciones que nos permite encontrar el punto de intersección, esto es, el momento en el que ambas empresas obtienen los mismos ingresos.

$$\begin{cases} y = \frac{5}{3}x + 40 \\ y = -5x + 60 \end{cases} .$$

Para resolver el sistema de ecuaciones, igualamos y se obtiene

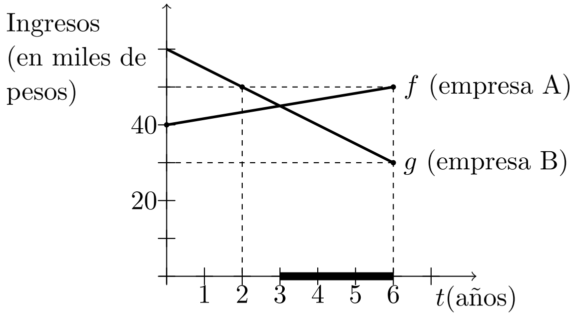
$$\frac{5}{3}x + 40 = -5x + 60 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x + 5x = 60 - 40 \Leftrightarrow \frac{20}{3}x = 20 \Leftrightarrow x = 3,$$

reemplazando en la segunda encuación del sistema $y = -5x + 60$, se deduce que $y = -5.3 + 60 = 45$.

Las rectas se intersecan en el punto $(3; 45)$. Como además 3 es un valor perteneciente al intervalo $[0, 6]$, es decir, un valor factible para las condiciones del problema, podemos afirmar que ambas empresas igualan sus ingresos a los 3 años (además, podemos decir que se igualan en \$45000).

Nuestro interés estaba en saber cuándo la empresa A supera en ingresos a la empresa B. Sabiendo ya con certeza que se igualan a los 3 años, la lectura gráfica nos permite decir, sin imprecisiones, que los ingresos de A son mayores que los de B entre los 3 y los 6 años.

En el gráfico de abajo se muestra que, por ejemplo, para a los 5 años, los ingresos de la empresa A son mayores que los de la empresa B. Sin necesidad de conocer con exactitud cuáles son los ingresos de ambas en ese momento, vemos que el valor de y es mayor en la función f que en la función g. Además, esto sucede para todos los valores de x del intervalo $(3; 6]$, marcado en el gráfico. Por lo visto anteriormente, el conjunto solución de la inecuación es $S = (3; 6]$.



Respuesta: La empresa A supera los ingresos de la empresa B entre los tres y seis años.

Trabajo práctico 26

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) Dadas dos funciones f y g mediante sus fórmulas explicar cómo se decide para qué valores de x se cumple que $f(x) > g(x)$.

(b) De dos funciones f y g se sabe que f es creciente, que g es decreciente y que sus gráficos se intersecan en el punto $(3; 1)$. ¿Cuáles son todos los valores de x para los cuales $f(x) < g(x)$.

Ejercicio 2. Laura trabaja como vendedora en una empresa de telefonía celular "XX" y cobra un sueldo básico de \$2000 más un 20% de comisión por ventas realizadas en el mes. Una amiga le consigue un trabajo similar en otra empresa de telefonía celular "YY" en la que ella trabaja, pero allí cobran un sueldo básico de \$1800 más una comisión de del 22% por ventas realizadas. Laura quiere saber cuánto debe vender mensualmente para cobrar lo mismo en ambas empresas. Para ello se pide:

(a) Definir dos funciones f y g que indiquen el sueldo de Laura en cada una de las empresas.

(b) Representar gráficamente ambas funciones. ¿Alcanza la representación gráfica para dar la respuesta exacta?

(c) Hallar la respuesta exacta trabajando analíticamente. ¿Qué método utilizó para resolver la ecuación?

Ejercicio 3. Decidir, en cada caso, si los pares de rectas correspondientes a las siguientes funciones lineales, son transversales o paralelas. En caso de ser transversales, hallar las coordenadas del punto de intersección. Interpretar la solución hallada en un gráfico.

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = -3x + 4$

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \frac{-x+7}{2}$

(c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = 3x - 1$

(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \frac{-x+3}{3}$

(e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \frac{-x+7}{2}$

Ejercicio 4. En una empresa de productos químicos se trasvasa líquido de un tanque a otro a razón de 3 litros por hora. Cuando comienza la operacin el tanque 1 que tiene una capacidad de 1000 litros está lleno y el tanque 2 está vacío. Se quiere saber a partir de qué momento el tanque 2 tiene más líquido que el tanque 1. Para ello se pide,

(a) Definir dos funciones f y g que indiquen la cantidad de líquido en cada uno de los tanques en función del tiempo transcurrido.

(b) Representar gráficamente ambas funciones. ¿Alcanza la representación gráfica para dar la respuesta exacta?

(c) ¿En qué momento los tanques tienen la misma cantidad de líquido?

Ejercicio 5. En cada uno de los casos del ejercicio 3, indicar cuáles son todos los valores de x para los cuales $f(x) \leq g(x)$.

Ejercicio 6. Una compañía de luz eléctrica cobra a sus clientes un monto fijo de $\$11,25$ y el costo por kwh consumido es de $\$0,52$. La compañía de la competencia cobra $\$15$ de monto fijo y $\$0,40$ por kwh consumido. ¿Para qué consumos la primera compañía es más conveniente que su competidora?

Ejercicio 7. Dos automóviles A y B parten de San Miguel (km 0) con destino a Mar del Plata (km 400) en diferentes horas a velocidad constante. El móvil A es visto pasar por Chascomús (km 100) a las 12 hs y llega a Mar del Plata a las 18 hs. El móvil B parte de San Miguel a las 13 hs con el doble de velocidad que el A.

(a) ¿A qué hora salió de San Miguel el móvil A?

(b) ¿A qué velocidad va el móvil B?

(c) Graficar en un mismo gráfico la posición de cada uno de los móviles en función del tiempo.

(d) ¿Se encuentran en la ruta? ¿En qué kilómetro y a qué hora?

Ejercicio 8. Un empresario adquiere un equipo multimedia por \$36.500 para hacer trabajos de publicidad. La máquina gasta en promedio \$7,25 en mantenimiento y energía por hora. El técnico especializado en manejarla cobra \$9,80 por hora. A los clientes se les cobra a razón de \$30 la hora de uso del equipo. ¿Recuperará en algún momento la inversión de la compra? Interpretarlo con un gráfico cartesiano.

Ejercicio 9. Un empleado de una refinería tenía catalogados tres barriles de aceites con la siguiente categoría: barril A el que contenía el aceite de mayor peso específico, barril B el de peso específico medio, y barril C al de menor peso específico. Se produjo un accidente y se borraron las etiquetas de los barriles, sólo quedaron registrados los siguientes datos:

Barril ...	Barril:.....	Barril:.....
Paso vacío: 27 kg	Peso con 10 litros: 38 kg	Peso con 1 litros: $25,85$ kg
Peso con 5 litros: $31,5$ kg	Peso con 5 litros: 35 kg	Peso de 1 litro de aceite: $0,85$ kg

(a) volver a clasificar los barriles con A, B, C. Recordar que el peso específico se calcula como peso/volumen, por lo que si para un mismo volumen (sin contar el peso del barril) un tipo de aceite pesa más que el otro, éste tendrá mayor peso específico.

(b) Se puede encontrar un valor en litros de aceite para el cual el barril A pesa lo mismo que el barril C. Si existe, ¿cuál es el valor?

(c) ¿Para qué cantidades de aceite vertidas en el barril A se logra superar los 50 kg de peso?

Ejercicio 10. Teniendo en cuenta el ejercicio de las etiquetas del barril, decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y justificar:

(a) Si aumenta la cantidad de aceite aumenta la cantidad de kilos del barril.

(b) Si la cantidad de aceite aumenta el doble, el peso del barril aumenta al doble.

(c) Si la cantidad de aceite disminuye a la cuarta parte, el peso del barril disminuye en la misma proporción.

(d) Si la cantidad de aceite disminuye a la cuarta parte, el peso del líquido vertido disminuye en la misma proporción.

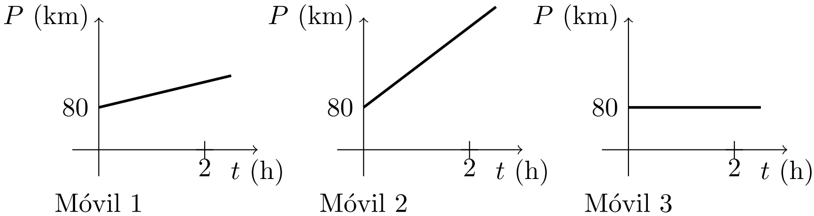
(e) El volumen de aceite vertido y el peso del barril son magnitudes directamente proporcionales.

Ejercicio 11. Los siguientes gráficos representan la posición de móviles, que se desplazan con movimiento rectilíneo uniforme, en función del tiempo. Determinar:

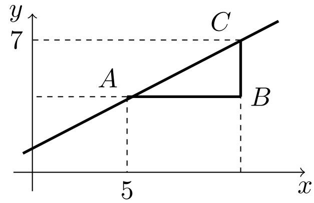
(a) ¿Cuál es el más veloz?

(b) ¿Qué puede decirse del movimiento del móvil 3?

(c) Para los casos en que sea posible, definir una función mediante una fórmula que indique la posición del móvil para cada instante t.



Ejercicio 12. Hallar el área del triángulo rectángulo ABC de la figura, sabiendo que la ecuación de la recta AC es $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.



Ejercicio 13. El precio sugerido del kilo de café es \$11. Los dueños del almacén A deciden aplicarle un descuento del 20%.

(a) Si el café promocionado se vendiera suelto, averiguar cuánto se pagaría por un octavo, un cuarto y tres octavos.

(b) Si se pagó una suma de \$10 ¿cuántos kilos de café se compraron?

(c) Hacer un gráfico cartesiano en el que se describa el precio pagado en función de la cantidad de café comprada.

(d) El almacén B decide aplicarle un descuento al café vendiendo paquetes con un 20% más de café gratuito. ¿En cuál de los dos almacenes el kilo de café es más barato?

Ejercicio 14.

(a) Trazar la mediatriz del segmento PQ siendo $P = (2; -3)$ y $Q = (6; 4)$ y dar su ecuación. (Recordar que la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo que contiene a su punto medio)

(b) Dado $D = (2; 1)$ dibujar el triángulo PDQ. Determinar las ecuaciones de las rectas que contienen sus lados.

(c) Para cada uno de los lados del triángulo determinar las ecuaciones de las mediatrices.