MÓDULO 4

Modelización

1 Comenzando a conocer las funciones.

1.1 Breve explicación sobre modelización matemática.

Conocer la realidad circundante al hombre es una de los propósitos de la Ciencia y por lo tanto también de la Matemática. Conocer puede ser entendido como dar cuenta, explicar, desentrañar razones, relaciones y evoluciones de los fenómenos y situaciones de la realidad.

Una de las características del saber científico es que éste proviene de un modo sistemático, metódico y gracias al uso de herramientas y teorías que han demostrado ser necesarias, y útiles, para diversas acciones como: resolver, explicar, fundamentar o predecir. Muchos de los fenómenos y situaciones que a la ciencia le interesa estudiar son los hechos y manifestaciones, sociales, tecnológicos y naturales. Para abordar alguno de ellos disponemos de saber matemático que permite su estudio, para otros todavía no. Nuestro propósito en este capítulo es introducir elementos que sirven para estudiar algunos fenómenos simples.

El proceso completo que nos permite estudiar matemáticamente algunos fenómenos es el que llamamos modelización. Para simplificar la explicación sobre en qué consiste la modelización, dividiremos el proceso en tres partes que pueden darse en distintos momentos y una retroalimentarse de la otra.

- Parte inicial de la modelización, *abordaje de la situación problemática o del fenómeno*: en esta parte hacemos un reconocimiento del fenómeno y de la situación, la recortamos y la aislamos de la complejidad en la que aparece incluida, intelectualmente o experimentalmente. Identificamos las variables y constantes que intervienen en el fenómeno, reconocemos que se relacionan y luego mediante experimentación, observación o supuestos que acuerden con el funcionamiento del fenómeno, decimos cómo se relacionan.

- Parte central de la modelización, *construcción del modelo matemático*: La construcción consiste en encontrar la teoría y las herramientas matemáticas, que en su totalidad llamamos modelo matemático, que describen la relación entre las variables y permiten representarla. Esto es difícil en general. Nosotros veremos algunos casos donde la construcción del modelo consiste en definir una "función matemática".

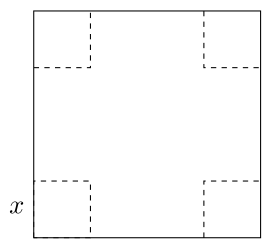
- Parte final de la modelización, *explicación del fenómeno y de su evolución*: el modelo matemático nos permitirá comprender mejor el fenómeno en su globalidad, además la manipulación de los objetos matemáticos definidos nos permitirá anticipar posibles alteraciones en el fenómeno y predecir su evolución bajo las condiciones creadas para el modelo.

Ejemplos de fenómenos modelizables:

- El crecimiento o decrecimiento de una población de bacterias,
- Concentración de sustancias sujetas a condiciones físico químicas controlables,
- Movimientos planetarios,
- Reacciones de mercado,
- Resistencia de materiales,

1.2 Relación entre variables.

Para entender qué son las variables y cómo se relacionan retomamos una de las situaciones del capítulo de Álgebra.
Se propone construir una caja de cartón recortando cuatro cuadraditos iguales en las esquinas de una plancha cuadrada siguiendo la línea punteada que se muestra en la figura. Una vez recortados los cuadrados se pegan los bordes para armar la caja. Pensemos en una fabricación industrial de cajas mediante una máquina que realiza el proceso descripto arriba y que admite planchas de cartón de 10 cm de longitud. La medida de los lados de los cuadrados de las esquinas es regulable y se elige según las dimensiones deseadas para el producto final. Es conveniente por este proceso de fabricación a granel, para eventuales cálculos de costos por ejemplo, saber cómo varían las cantidades para diferentes cajas y lograr un una descripción matemática general.



De acuerdo a las posibilidades de fabricación, el fabricante observa que,

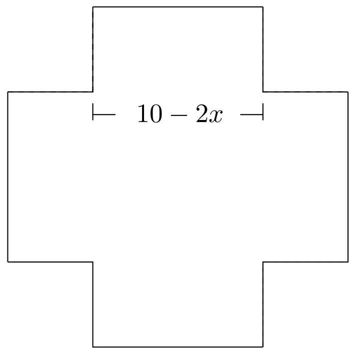
- a una longitud de 2 cm le corresponde una superficie de la base de la caja de $36\,\mathrm{cm}^2$

- a una longitud de $2,5\,\text{cm}$ le corresponde una superficie de la base de la caja de $25\,\text{cm}^2$
- a una longitud de $4,8\,\text{cm}$ le corresponde una superficie de la base de la caja de $0,16\,\text{cm}^2$.

Y que podría seguir haciendo más cálculos ya que para cada valor de "la longitud de los lados de los cuadrados", al que denotamos con la letra x, es posible calcular "la superficie de la base de la caja" a la que denotamos y. Notar que ambas cantidades cambian para distintas cajas. En resumen,

a $x\,\text{cm}$ de longitud de lado de cuadrado le corresponde $y\,\text{cm}^2$ de superficie de la base.

El fabricante busca un procedimiento que le sirva para distintas cajas. Observa que una vez cortados los cuadraditos de las esquinas le queda un cuadrado central de lado igual a la longitud del lado de la plancha de cartón, 10 cm, menos dos veces la longitud del lado del cuadradito. Si en lugar de las cantidades se usan las letras que representan a dichas cantidades, lo que mide el lado del cuadrado central se representa por: $10 - 2x$. Para calcular la superficie hay que elevar esta última expresión al cuadrado. Por lo tanto, para cada longitud x la superficie y se calcula con la expresión



$$y = (10 - 2x)^2 \ .$$

El ejemplo visto muestra un procedimiento matemático usado en varios casos cuando hay cantidades variables, una dependiendo de la otra. En este ejemplo, esa dependencia se expresa mediante una fórmula en la cual es posible reemplazar cada uno de los valores numéricos que toma la variable independiente, realizar con él los cálculos indicados y obtener otro resultado numérico de la variable dependiente. Por ejemplo,

- a $x = 2$ le corresponde una superficie de la base de la caja de
$$y = (10 - 2 \cdot 2)^2 = 36,$$
- a $x = 2,5$ le corresponde una superficie de la base de la caja de
$$y = (10 - 2 \cdot 2,5)^2 = 25,$$
- a $x = 4,8$ le corresponde una superficie de la base de la caja de
$$y = (10 - 2 \cdot 4,8)^2 = 0,16.$$

Observar que como resultado de los cálculos realizados con un valor numérico se obtiene otro valor numérico y solamente uno.

Hasta aquí el fabricante contaría con un procedimiento aplicable a distintas medidas. Nos interesa ahora relacionar esto con nociones y notaciones matemáticos que nos permitan comprender lo que hicimos como un caso particular de modelización.

Vimos que hay dos cantidades en juego "la longitud de los lados de los cuadrados" y "la superficie de la base de la caja". La longitud de los lados de los cuadraditos se elige para ajustar la matriz de fabricación, la superficie de la base de la caja se calcula a partir de esta primera cantidad. Por eso a la primera la llamamos *variable independiente* y es usual denotarla con la letra x, y a la segunda la llamamos *variable dependiente* y es usual denotarla con la letra y.

Para denotar que a cada valor de la variable independiente, x, le corresponde un valor de la variable dependiente, y, se introduce una nueva letra que representa la *regla de correspondencia o regla de asignación*, que es el modo en que se describe cómo se relacionan las variables. Comúnmente, se usa la letra f para denotar dicha regla y entonces, la notación que indica la dependencia entre las variables es

$$y = f(x) \ .$$

En nuestro ejemplo,

- a $x = 2$ le corresponde $y = 36$, se denota $36 = f(2)$,
- a $x = 2,5$ le corresponde $y = 25$, se denota $25 = f(2,5)$,
- a $x = 4,8$ le corresponde $y = 0,16$, se denota $0,16 = f(4,8)$.

En la situación que estamos desarrollando, la regla de correspondencia está dada por una fórmula, esto se expresa:

$$y = f(x) = (10 - 2x)^2$$

o simplemente, $f(x) = (10 - 2x)^2$.

Observermos que la forma en que se construyen las cajas restringen los valores posibles para la longitud de los lados de los cuadrados. De hecho, para que se pueda armar una caja de esta forma la longitud de los lados de los cuadrados no puede ser mayor a 5cm. En esta situación tiene sentido tomar valores entre 0 y 5 cm. Para valores como el 0 y el 5, no podemos efectivamente armar con nuestras manos una caja, sin embargo hacemos una extensión de los valores evaluables en la fórmula y consideramos el intervalo de números reales $[0, 5]$, es decir, que la variable x toma valores del intervalo $[0, 5]$. Para cada uno de ellos su correspondiente es un número real, es decir que la variable y toma valores del conjunto de números reales $\mathbb{R}$. Expresamos esto del siguiente modo: $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$.

Entonces el modelo matemático planteado es:

$$f : [0, 5] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = (10 - 2x)^2.$$

Uso del modelo planteado.

1. Indicar si para los siguientes valores es posible construir cajas según el proceso de fabricación considerado

$$\text{a) } -1 \quad \text{b) } 1,5 \quad \text{c) } 5,01 \ .$$

2. Calcular si es posible armar una caja recortando cuadraditos con un valor para la superficie de la base de $81\,\mathrm{cm}^2$.

(a) No es posible construir una caja para el valor -1 ya que es un valor que no corresponde a ninguna medida por ser negativo, luego con el modelo matemático planteado no es posible calcular la superficie correspondiente a este valor. Esto no entra en contradicción con el hecho que el valor sí se puede reemplazar en la fórmula y si es posible hacer las operaciones aritméticas: $(10-2(-1))^2$; pero el modelo es más que una fórmula, también involucra las restricciones del fenómeno o del proceso, en este caso, de la caja que se construye a partir de una plancha. Esa restricción está expresada a través del intervalo $[0,5]$.

(b) Si la superficie de la base se desea de $81\,\mathrm{cm}^2$, deberíamos pensar en el planteo matemático que nos permite corroborar si se encuentra contemplado por el modelo dado. El valor 81 es el resultado de calcular una superficie, ¿con qué longitud de lado?, eso no se sabe de entrada sino que debemos averiguarlo. El planteo matemático es una ecuación del tipo:

$$(10-2x)^2 = 81.$$

cuya resolución es:

$$\begin{aligned}
10-2x &= \sqrt{81}, \ \text{con } 10-2x \geq 0, \text{por ser long. de lado de la base} \\
2x &= 10-9 \\
x &= \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Es posible construir una caja quitando un cuadradito de $\frac{1}{2}$ cm de lado, además $\frac{1}{2} \in [0,5]$.

1.3 Funciones para modelizar.

En la sección anterior nos referimos a un modelo en una situación de construcción de cajas. De modo informal, la descripción del mismo es que está conformado por una relación entre variables, expresada mediante una fórmula, con la característica de que una de esas variables tiene una restricción, impuesta por el hecho que trabajamos con medidas. En esta sección vamos a estudiar este tipo de modelos en forma descontextualizada. La herramienta que desarrollaremos para modelizar es una función numérica. La noción de *función* está generalmente asociada a la idea de *dependencia* y de *variación*. En un fenómeno hay "componentes" que van cambiando. Nos interesan aquellas componentes que pueden medirse cuantitativamente, es decir que se contabilizan o comparan con un patrón fijo de comparación. Como resultado del conteo o de la comparación debe obtenerse un número. Aquello que es susceptible de ser medido de la forma que se explicó antes se llama *magnitud*. En un fenómeno hay magnitudes que quedan fijas y otras que cambian. Una magnitud que cambia es una *variable*. Dada una magnitud variable, se designa con una misma letra a cualquiera de valores que resultan de la medición. Generalmente se usan las últimas del alfabeto: x, y, z, por eso es que hablamos de la *variable* x o *variable* y, etc.

Como ya dijimos, mediante una función se relacionan variables; el modo de hacerlo es asignando a cada valor de medida de una de ellas, un valor de medida de la otra, y sólo uno. Debemos entonces saber cuál es la variable de la cual partimos y cuál es la asignada. A la variable de la que partimos en la asignación, la llamamos *variable independiente* y los valores asignados corresponden a la *variable dependiente*. Muchas veces el mismo fenómeno nos indica cómo debemos escogerlas.

Los criterios para decidir cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente no son uniformes, dependen del fenómeno o del problema planteado. Algunos de esos criterios pueden ser:

- se determina como variable independiente aquella variable cuyo cambio no podemos alterar ni manipular, por ejemplo el “tiempo”,
- se determina como variable independiente aquella que resulta más fácil de medir o que es dato en el problema,
- dadas dos variables, si una de ellas se obtiene por una regla de asignación más simple respecto a otra, entonces se la elige como dependiente.

Definición de función que vamos a utilizar. Dados dos conjuntos A y B, que consideraremos no vacíos, una *función* de A en B, que notamos $f : A \mapsto B$, es una correspondencia que a cada elemento de A le hace corresponder **uno y sólo un** elemento de B.

Según esta definición, para determinar una función es necesario indicar los conjuntos entre los cuales establecemos la correspondencia.

Dominio de una función. El conjunto formado por los elementos que tienen correspondiente, se llama *dominio* de la función, lo notamos $\mathrm{Dom}\, f$.

Codominio de una función. El conjunto B que contiene a los correspondientes, se llama *codominio*, lo notamos $\mathrm{Codom}\, f$.

Quiere decir que para una función necesitamos tres componentes:

- El dominio, $\mathrm{Dom}\, f$,
- El codominio o conjunto de llegada, $\mathrm{Codom}\, f$
- La correspondencia o regla de asignación que a cada elemento del dominio le asigna un único elemento del conjunto de llegada.

El elemento correspondiente de un valor x de A lo llamamos *imagen de* x, lo notamos $f(x)$ y pertenece a $\operatorname{Codom} f$. Si un valor $y \in \operatorname{Codom} f$ es imagen de algunos valores de variable independiente entonces a cada uno de los valores de $x \in \operatorname{Dom} f$ tales que $y = f(x)$ se lo llama *preimagen* de y. Es decir, x es preimagen de y si y sólo si $y = f(x)$.

El conjunto formado por todos los valores y del codominio que tienen preimagen se llama *imagen* de f y se anota $\operatorname{Im} f$.

Dada una función, puede plantearse que tengamos que:

- Calcular la imagen de un cierto valor dado a. En ese caso, debemos comprobar que dicho valor sea un valor posible de la variable independiente, es decir que pertenezca al dominio y luego aplicar la regla de asignación. Si dicha regla está dada por una fórmula, ésto consistiría en evaluar la misma, o sea reemplazar el valor y realizar los cálculos consignados. Esto correspondería entonces a hallar $y = f(a)$. Para cada valor de a hay un solo valor de y posible.

- Calcular la preimagen de un valor b, en ese caso si la regla de asignación está dada por una fórmula se plantea una ecuación: $b = f(x)$. Cuando existen soluciones de esa ecuación y las mismas pertenecen al $\operatorname{Dom} f$ dichas soluciones serán las preimágenes. En general, para un valor b perteneciente al codominio pueden obtenerse una, ninguna o varias preimágenes.

- Calcular la imagen f, en ese caso deberíamos ser capaces de decidir para cuáles b la ecuación $b = f(x)$ tiene solución.

Ejemplo 1. En el proceso de construcción de cajas descripto en la sección 1.2 se estudia la relación entre la longitud de los lados de los cuadraditos recortados y la superficie de la base de la caja. Se pide:

(a) Indicar variable independiente, dependiente, dominio, codominio y la regla de correspondencia de la función que modeliza la situación,

(b) calcular la imagen de $1,5$,

(c) calcular la preimagen de 81,

(d) decidir si 81 pertenece a la $\operatorname{Im} f$.

Resolución. (a) Para definir una función que modelice la situación hay que determinar las variables, el dominio, el codominio y la correspondencia o regla de asignación.

- *Variables.* De lo discutido anteriormente, ya sabemos que las variables son
variable independiente: $x =$ longitud de los lados del cuadrado (en cm)
variable dependiente: $y =$ superficie de la caja (en cm^2).

- *Dominio.* De acuerdo a lo discutido cuando se resolvió el problema de la caja, los valores de la variable independiente que tienen sentido en esta situación son los números reales entre 0 y 5. Luego, el dominio A de f es el conjunto de los números reales x tales que $0 \leq x \leq 5$. Esto se puede escribirse en símbolos como
$$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R};\ 0 \leq x \leq 5\} = [0,5]\ .$$

- *Codominio.* La variable dependiente y es siempre un número real, es decir, a cada x del dominio le corresponde un número real y, por lo que podemos tomar como codominio B de f al conjunto de los números reales, es decir,
$$B = \mathbb{R}\ .$$

- *Regla de asignación.* A cada longitud del lado del cuadrado x le corresponde una superficie de la base de la caja $y = (10 - 2 \cdot x)^2$. Esta asignación se puede expresar como sigue
$$y = f(x) = (10 - 2 \cdot x)^2.$$

(b) La imagen de $1,5$ se calcula reemplazando x por $1,5$ en la regla de asignación que en este ejemplo está dada por una fórmula
$$f(1,5) = (10 - 2 \cdot 1,5)^2 = 7 \cdot 7 = 49\ .$$

(c) Calcular la preimagen de 81 significa encontrar el valor de la abscisa x para el cual $f(x)$ es igual a 81, es decir, resolver la ecuación
$$81 = f(x) = (10 - 2x)^2\ .$$

Esto ya lo hicimos cuando usamos el modelo en el parágrafo anterior. De todas formas, lo repetimos aquí
$$\begin{aligned} 10 - 2x &= \sqrt{81},\ \text{con } 10 - 2x \geq 0, \text{porque } x \in \operatorname{Dom} f = [0,5] \\ 2x &= 10 - 9 \\ x &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2} \in \operatorname{Dom} f$, la preimagen de 81 es $\frac{1}{2}$. Para corroborarlo, calculamos $f(\frac{1}{2})$ y vemos que nos da efectivamente 81.

(d) Como la ecuación $81 = f(x)$ tiene solución, entonces 81 es un elemento de la imagen de f.

Ejemplo 2. Dosis de medicamentos. Retomamos el ejemplo sobre las dosis de medicamentos visto en el Capítulo Proporcionalidad y Geometría. En dicho ejemplo se estudia una presentación de un remedio que tiene una concentración de 750 miligramos de amoxicilina cada 5 mililitros de jarabe (750mg/5ml). Nos planteamos la cuestión de cuánto componente activo (amoxicilina) hay de acuerdo al volumen de jarabe. Es decir, podemos relacionar la magnitud "volumen de jarabe" y "peso del componente activo" puesto que sabemos que como consecuencia de la variación del volumen de jarabe se tiene una variación el peso del componente activo. En este ejemplo, podemos calcular como están vinculadas las variaciones y, de hecho, ya lo hicimos para algunos casos particulares. Procediendo como en la sección de proporcionalidad podemos calcular lo siguiente

- a 5 ml de jarabe le corresponden 750 mg de componente activo,
- a 1 ml de jarabe le corresponden 150 mg de componente activo,
- a 7 ml de jarabe le corresponden 1050 mg de componente activo.

Si con x denotamos la "cantidad de mililitros de jarabe", que es la variable independiente y con y denotamos la "cantidad de miligramos de amoxicilina", que es la variable dependiente, tenemos que

- a $x = 5$ le corresponde $y = 750$,
- a $x = 1$ le corresponde $y = 150$,
- a $x = 7$ le corresponde $y = 1050$.

Queremos saber cuál es el procedimiento general por el cual dado un valor x se obtiene su correspondiente valor y. Para ello, recordemos que estas cantidades varían proporcionalemente, y entonces,

$$\frac{y}{x} = \frac{750}{5} = \frac{150}{1} = \frac{1050}{7} = 150 \qquad \text{por lo que resulta,} \qquad y = 150 \cdot x \ .$$

Luego en esta situación, la regla de correspondencia está dada por la fórmula:

$$y = f(x) = 150 \cdot x.$$

y las variables son cantidades de las magnitudes *capacidad* y *peso* respectivamente, que no son negativas, es decir que pertenecen al conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}_{\geq 0}$ que también se puede escribir en notación de intervalo como $[0, \infty)$. Entonces el modelo matemático planteado es:

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad f(x) = 150 \cdot x.$$

Nota: En la definición de una función f hay que tener cuidado que el conjunto dominio $\operatorname{Dom} f$ contenga todos los valores de la variable independiente que se necesitan para describir el fenómeno y que además a cada uno de ellos se le pueda aplicar la regla de asignación definida. En cuanto al conjunto codominio $\operatorname{Codom} f$, éste debe contener las imágenes resultantes de la aplicación de dicha regla. Puede ser entonces que no haya una único codominio posible para la definición del modelo. En el caso anterior podríamos haberlo definido así

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 150 \cdot x$$

y también hubiese sido correcto.

Trabajo Práctico 21

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Cuáles son las ideas que están asociadas a la noción de función?

(b) ¿A qué se llama variable?

(c) ¿Qué hay que tener en cuenta para determinar una función?

(d) Proponer fenómenos que puedan ser modelizables. Explicar.

(e) En los siguientes fenómenos o situaciones, identificar variables y decidir cuál es independiente y cuál dependiente. Explicar.

- Movimiento de un auto que va por ruta 2 a Mar del Plata.
- Costo de servicio eléctrico.

Ejercicio 2. Acerca de la lectura.

(a) Explicar las definiciones de "dominio", "codominio", "imagen" y "preimagen".

(b) Explicar el procedimiento que se usa para calcular la imagen de un elemento del dominio cuando la función está determinada por una fórmula.

(c) Explicar el procedimiento que se usa para calcular la preimagen de un elemento del codominio cuando la función está determinada por una fórmula

Ejercicio 3. Se desean fabricar cajas de cartón de base rectangular recortando cuatro cuadrados iguales en las esquinas de una plancha rectangular de lados 20 cm y 15 cm. Una vez recortados los cuadrados se pegan los bordes.

(a) En cada caso calcular, cuando sea posible, el valor de la superficie de la caja que se arma al recortar cuadrados de

i) $1,5$ cm   ii) 5 cm   iii) $7,4$ cm   iv) $7,5$ cm   v) 0 cm   vi) 10 cm

(b) Explicar para cuáles longitudes de los lados de los cuadrados que se recortan es posible el armado propuesto.

(c) Proponer un procedimiento matemático que le permita calcular el valor de la superficie de la caja para cualquier posible valor de lado del cuadrado recortado.

(d) Si se solicitan cajas que tengan los siguientes valores de superficie:

i) 300cm^2 ii) 14cm^2 iii) 50cm^2 iv)350cm^2.

¿Para qué casos es posible satisfacer el pedido según las condiciones de fabricación? Justificar.

(e) Defina el modelo que describe la situación planteada.

(f) Considerando la función definida en el ítem (e), ¿cuáles de los siguientes valores tienen imagen? Calcularla cuando corresponda.

i) $0,5$ cm ii) 4 cm iii) $7,2$ cm iv) $7,5$ cm v) 0 cm vi) 9 cm

(g) ¿Cuáles de los siguientes valores tienen preimagen? Calcularla cuando corresponda.

i) 300cm^2 ii) 14cm^2 iii) 50cm^2 iv)350cm^2.

Ejercicio 4. En cada fila de la siguiente tabla se presenta una situación. Para cada una de ellas se pide:

(a) Identificar las variables.

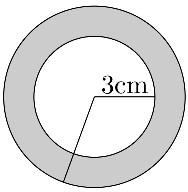
(b) Decir si hay una función que relaciona dichas variables. Indicar dominio y codominio para esa función de acuerdo a la situación planteada.

(c) Elegir alguna (o algunas) fórmula entre las dadas que sirva para representar cada situación. Explicar por qué la elige.

$f(x) = 4,5x + 5$ $f(x) = \pi(x^2 - 3^2)$ $f(x) = 90 - 4,5x$ $f(x) = \pi\, r^2 - 3^2$

$f(x) = 90 - 4,5x^2$ $f(x) = \frac{150}{x}$ $f(x) = 90 - 9x$ $f(x) = 5 + \frac{9}{2}x$

(d) Si encuentra una fórmula como regla de asignación, dar algunos valores numéricos de la variable independiente y hallar sus respectivos correspondientes.

SITUACIÓN	VARIABLES	DOMINIO	CODOMINIO	FÓRMULA
Una camioneta llega a una estación de servicio para llenar el tanque cuya capacidad es 50 litros. Al llegar a la estación tenía 5 litros y el surtidor tarda 10 min. en completar el tanque. Calcular cuántos litros hay en el tanque según el tiempo transcurrido				
Calcular el área de la región sombreada para diferentes radios de la circunferencia mayor.  				
Para realizar una construcción, 10 albañiles tardan 15 días. Calcular el tiempo que se tarda de acuerdo a la cantidad de albañiles que se disponga.				
Una pileta de 90 litros se vacía por un grifo a razón de 4,5 litros por minuto. Hallar la cantidad de líquido en la pileta a medida que transcurre el tiempo.				

Ejercicio 5. Se quiere recubrir con cinta el contorno de una figura compuesta por un triángulo rectángulo y un semicírculo cuyo diámetro es la hipotenusa del triángulo. Se sabe que uno de los lados difiere del otro en 10 cm. ¿Cuánta cinta se necesitará? ¿De qué depende? Definir la función que modelice la situación.

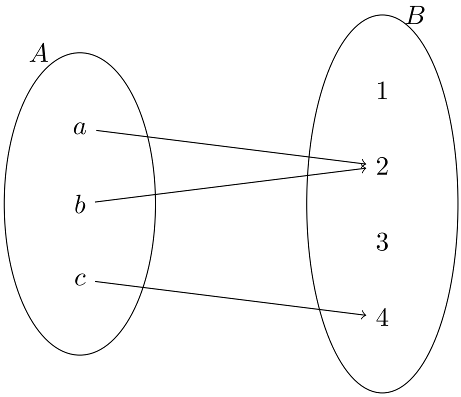
2 Distintas formas de representar una función

La presentación de la correspondencia o de la regla de asignación entre elementos puede aparecer en diferentes formas. Hasta ahora analizamos la correspondencia dada a través de fórmulas (sección 1.2). Sin embargo, hay otras formas de determinar una función y muchas veces suele ser útil contar con distintas determinaciones o representaciones de una misma función. Las representaciones más comunes son las siguientes: fórmula, diagramas de Venn, asignación coloquial, tabla de valores y gráfico cartesiano.

En las siguientes subsecciones se explican en qué consiste cada una de ellas.

2.1 Utilizando diagramas de Venn

Esta presentación es útil cuando el conjunto de partida A es finito. Por ejemplo:



Como vemos esta correspondencia indicada por las flechas es función pues cada elemento del conjunto A tiene un único correspondiente en el conjunto B. Además vemos que 2 es *la imagen de* a, 2 *es la imagen* de b y 4 *es la imagen de* c. Es decir que dos elementos pueden compartir la misma imagen.

2.2 Asignación coloquial

Hay situaciones en que coloquialmente establecemos una correspondencia que luego podemos representar mediante operaciones numéricas. Tal es el caso de la construcción de cajas del ejemplo introductorio 1.2. Otras veces se establece una relación entre elementos de conjuntos que no es posibles de describir mediante operaciones matemáticas. Por ejemplo: Si A es el conjunto de personas con nacimiento registrado en Argentina y $\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales, podemos establecer entre los elementos de ambos conjuntos una relación que sea: ".....tiene por Documento de Identidad el número ....". Cada persona tiene un único número de documento asignado y todos las personas cuyo nacimiento haya sido registrado en Argentina tienen uno. Por eso se trata de una función aun cuando no haya fórmula matemática para determinar los correspondientes.

2.3 Tabla de valores

Ejemplo 3. En la sección 1.2 vimos que usar la fórmula para calcular la superficie de la base de la caja en función de la medida del lado del cuadradito que se recorta es bastante práctico. Sin embargo, el fabricante de cajas observa que ciertas medidas de cajas se venden seguido y que le resulta poco eficiente calcular las superficies de las bases de las cajas cada vez que las necesita. Por esta razón, desea que esta información se encuentre disponible de forma accesible y expeditiva. En este caso, una posible solución es la *tabla de valores.*

Para confeccionar una tabla de valores se seleccionan algunos valores del dominio de la función o rango de variabilidad de la variable independiente y se colocan al mismo nivel sus correspondientes. La tabla puede estar dispuesta de forma vertical u horizontal.

En el ejemplo de la caja, recordemos que las variables independiente y dependiente son

$$x : \text{medida del lado del cuadradito} \qquad y : \text{superficie de la base de la caja} \,.$$

y que están relacionadas por una función f dada por la fórmula $y = f(x) = (10-2x)^2$. La variable independiente varía entre 0 y 5, es decir Dom $f = [0; 5]$. Se pueden tomar valores equiespaciados en el intervalo $[0; 5]$, por ejemplo, uno cada $0,5$.

x	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4	$4,5$	5
$y = f(x) = (10-2x)^2$	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0

Con una calculadora o computadora a disposición se podrían tomar muchos valores, por ejemplo uno cada $0,01$.

Uso de la tabla de valores Se pueden mencionar las siguientes ventajas de tener los datos dispuestos en una tabla:

1. Para los valores de x que se consignan en la tabla, no es necesario realizar cálculos para saber el valor de $f(x)$.

2. Si nos dan un valor de x que no está en la tabla podemos estimar el correspondiente porque sabemos que si la longitud de lado del cuadradito recortado se achica, entonces la superficie de la base de la caja se agranda. Por ejemplo, si $x = 2,8$, podemos tomar un valor de y intermedio entre los valores de y correspondientes a $2,5$ y 3. De esta forma, podemos estimar que $f(2,8) \approx 30$.

3. Como a medida que x es más grande, la superficie de la caja es más chica. Por lo tanto, es fácil darse cuenta que el valor más grande que toma y es 100 y el más chico es 0.

Es claro que si solamente contamos con la tabla, no es posible saber con exactitud los valores de la variable dependiente que no están volcados en ella. Sin embargo contar con varios valores, en ocasiones, nos permite conocer una tendencia de cómo es la correspondencia.

Ejercicio resuelto 1. Una función f está determinada por la siguiente tabla. Dar el Dom$f$. Determinar la imagen de $-2,5$. ¿Es posible determinar la imagen de $1,2$? El valor $15,62$, ¿de quién es imagen?

x	$-1,5$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$0,75$	1	$1,5$	$2,7$
$f(x)$	$0,125$	0	$0,025$	$0,125$	1	$1,10$	$1,14$	$1,20$	8	$15,62$	$50,65$

Resolución. Los valores de x están volcados en la primera fila y los de $f(x)$ en la segunda. Luego,

$$\text{Dom}f = \{-1,5; -1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 0,75; 1; 1,5; 2,7\}.$$

Determinar la imagen de $-1,5$ significa encontrar qué valor está asignado a $-1,5$, es decir, se quiere saber $f(-1,5)$. Para ello se busca en la primera fila $-1,5$ y como el valor que está consignado abajo es $0,125$ entonces

$$f(-1,5) = 0,125\ .$$

El valor $1,2$ no está volcado en la primera fila de la tabla, por lo que no es posible saber el valor de $f(1,2)$.

Por último, si se pregunta de quién es imagen el valor $15,62$, es porque hay que situarse en la segunda fila, donde figuran las imágenes $f(x)$, vemos que este número está en la anteúltima columna y es el correspondiente de $x = 1,5$, o sea que $1,5$ es la preimagen de $15,62$

Respuesta. La imagen de $-1,5$ por f es $0,125$. No es posible determinar $f(1,2)$. $1,5$ es preimagen de $15,62$

Ejercicio resuelto 2. De una función f se conoce la siguiente tabla. ¿Qué puede decir del Dom$f$?. Determinar la imagen de $-2,5$. ¿Es posible determinar la imagen de $1,2$? ¿Y estimarla?

x	$-1,5$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$0,75$	1	$1,5$	$2,7$
$f(x)$	$0,125$	0	$0,025$	$0,125$	1	$1,10$	$1,14$	$1,20$	8	$15,62$	$50,65$

Resolución. Seguramente el lector se extrañará al encontrar la misma tabla que en el ejemplo anterior. Desconcertado, se preguntará si nos habremos confundido y copiado el mismo ejercicio... Aunque los datos sean los mismos la actividad es distinta, a partir del enunciado debemos interpretar que en este caso la tabla muestra solo algunos valores y para dar respuesta a lo pedido debemos hacer estimaciones de acuerdo al contexto que pueden no resultar exactas. Sucede esto en general cuando se toman mediciones de fenómenos como: desplazamiento de un resorte colgado sometido a una de empuje inicial, crecimiento de bacterias a lo largo del tiempo, fluctuación mensual del dólar, etc. Por ejemplo cuando nos preguntan sobre el dominio de la función no contamos con suficiente información, no lo conocemos con certeza, sin embargo podramos hacer una propuesta con alguna justificación. Podríamos proponer que el dominio sea el conjunto $\mathrm{Dom}f = [-3, 3]$ basándonos, por ejemplo, en que los valores de la tabla son racionales, que son mayores que -3 y menores que 3.

Nuevamente la imagen de $-1,5$ se determina sin ambigüedades y es $0,125$ entonces $f(-1,5) = 0,125$. En cuanto a la imagen de $1,2$ tampoco la podemos conocer con certeza pero tal vez sí estimarla. Para ello debemos "imponer" alguna condición o realizar una suposición. Por ejemplo, a partir de observar las imágenes correspondientes a los valores positivos podemos suponer que las mismas crecen a medida que crece x. Con lo cual estimamos que la imagen de $1,2$, que está entre 1 y $1,5$, estaría entre 8 y $15,62$.

Ejercicio resuelto 3. De una función f se conoce la siguiente tabla. ¿Qué puede decir de f? ¿Qué puede decir del $\mathrm{Dom}f$?. Determinar la imagen de $-2,5$. ¿Es posible determinar la imagen de $1,2$? ¿Es posible determinar la preimagen de $1,2$?

x	$-2,5$	$-1,5$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$f(x)$	$-1,25$	$-0,75$	$-0,5$	$-0,354$	$-0,25$	0
x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$0,75$	1	$1,5$	$2,7$
$f(x)$	$0,167$	$0,25$	$0,375$	$0,5$	$0,75$	$1,35$

Observando los valores y sus correspondientes podemos decir que f sería una función creciente, ya que a medida que aumentan los valores en el renglón de x, también aumentan los valores de los correspondientes en el renglón de $f(x)$. Observando más precisamente la tabla, notaríamos que:

A $-2,5$	le corresponde su mitad	$-1,25$,
A $-1,5$	le corresponde su mitad	$-0,75$,
A -1	le corresponde su mitad	$-0,5$,
A $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	le corresponde aproximadamente su mitad	$-0,354$,
...	y así siguiendo	...

Por esto podrámos decir además que las imágenes podrían calcularse por la fórmula $y = \frac{1}{2}\,x$ y que en caso de que el número sea irracional o periódico la aproximamos con tres cifras. Al igual que en el ejemplo 2 no sabemos con precisión cuál es su dominio pero proponemos nuevamente que sea $\mathrm{Dom}f = [-3, 3]$. En cuanto a la imagen de $1,2$ tampoco la conocemos con exactitud pero si aceptamos la "tendencia" de los correspondientes, podemos decidir que sea $f(1,2) = \frac{1,2}{2} = 0,6$. Por último, tampoco conocemos la preimagen de $1,2$ pero si aceptamos la regla de asignación propuesta, deberíamos plantear $1,2 = \frac{x}{2}$ y entonces $x = 2,4$. En definitiva podríamos proponer que la tabla responde a la siguiente función : $f : [-3, 3] \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}$, con aproximaciones hasta el milésimo.

Utilidad de la tabla de valores. En los ejemplos resueltos 1, 2 y 3 vimos distintas resoluciones usando tablas de datos. Revisemos las particularidades de cada caso:

- En 1 la función está determinada por la tabla y sólo nos debemos restringir a esos datos.
- En 2 la tabla solo muestra algunos valores correspondientes por una función y mediante ellos debemos tratar de describir algunas particularidades de la misma.
- En 3, al igual que en el caso anterior, la tabla solo muestra algunos valores correspondientes de una función, pero podemos notar que hay alguna regularidad entre dichos correspondientes, "un patrón" que se puede describir mediante una fórmula. Esto nos permite describir mejor algunas particularidades de la misma.

Aclaramos que en los dos últimos casos hemos tomado decisiones y anticipado cosas basadas en suposiciones, lo cual da resultados que son inciertos...pero útiles...

En resumen, la tabla de valores es útil para:

- Percibir por datos numéricos cómo es la relación entre las variables. Si el dominio es un conjunto finito, es posible que con presentar una tabla ya mostremos todas las imágenes de los elementos del dominio. Si el conjunto es infinito en la tabla se colocan algunos valores variados (por ejemplo si la función está definida sobre los números reales tomamos números negativos, positivos, racionales, irracionales) y sus correspondientes para notar cuál es la relación numérica entre ellos.
- Graficar en un sistema de ejes cartesianos los pares ordenados obtenidos a partir de las variables.
- Cuando se realiza un experimento. Por ejemplo, si la situación es: "estudiar el estiramiento de un resorte sostenido por un extremo cuando se cuelgan pesas en el extremo inferior del mismo". El experimento consiste en colgar distintas pesas en el extremo libre de un resorte fijado por el otro extremo. Pueden registrarse en una tabla los valores de peso y su correspondiente valor de estiramiento. De ese modo, al observar los datos numéricos, es posible inferir cómo dependen dichas variables y tratar de explicar qué características del fenómeno influyen para que dependan de esa manera.
- Registrar valores numéricos, compararlos y tratar de obtener una conclusin sobre su variabilidad para tratar de sacar una conclusión global, aunque ésta sea muy provisoria.

2.4 Representación gráfica

El gráfico cartesiano de una función permite ver cómo varían dos variables relacionadas entre sí a través de un dibujo que tiene ciertas reglas de confección. Para mostrar cómo se construye retomaremos el ejemplo de la caja.

Ejemplo 4. Retomemos el ejemplo de la subsección 1.2 donde se analiza la construcción de una caja. El procedimiento para construir la caja es recortar cuadraditos de las esquinas y pegar los bordes. Las variables que se relacionan son "la longitud de los lados de los cuadraditos" y "la superficie de la base de la caja".

En esa misma subsección se definió, mediante una fórmula, una función que modeliza la situación:

$$f : [0,5] \mapsto \mathbb{R}, \quad y = f(x) = (10 - 2x)^2$$

donde la variable independiente x es la longitud del lado recortado medido en cm y la dependiente y es la superficie de la base de la caja en cm^2.

Esto le permitiría al fabricante contar con una forma práctica de calcular la superficie de la base para cada valor de la longitud de los lados de los cuadraditos. Sin embargo, tiene que repetir el procedimiento y realizar cálculos cada vez que necesita el dato de la superficie. La tabla resuelve esta objeción para algunos valores. Para tener una idea bastante aproximada, en forma global, del comportamiento de la relación entre las variables sin tener que hacer cálculos cada vez, es conveniente recurrir a una representación gráfica de la función.

En este caso iniciamos el esquema gráfico a partir de algunos valores. Para eso repetimos la tabla que habíamos confeccionado:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$y = f(x) = (10-2x)^2$	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0

Cada valor y su correspondiente conforman un *par ordenado*: primero el valor de la variable independiente después el de su correspondiente; se escriben estos valores entre paréntesis separados por una coma o por un punto y coma. Por ejemplo:

$(0, 100)$ indica que 0 es el valor de variable independiente y 100 el valor de variable dependiente que le corresponde, o sea $f(0) = 100$,

$(0,5; 81)$ indica que $0,5$ es el valor de variable independiente y 81 el valor de variable dependiente que le corresponde,

$(1, 64)$ indica que 1 es el valor de variable independiente y 81 el valor de variable dependiente que le corresponde,

$(2,5; 25)$ indica que $2,5$ es el valor de variable independiente y 25 el valor de variable dependiente que le corresponde,

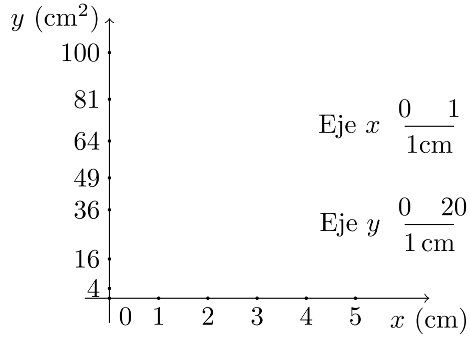
$\ldots$ y así siguiendo.

Los pares ordenados tienen una representación en la hoja imaginando que es el plano. En él consideramos dos rectas: una horizontal y una vertical que la interseca, que también se llaman *ejes cartesianos*. Sobre cada eje representamos números por lo que necesitamos un origen 0 y un segmento unidad. Para ambas rectas el origen será el mismo: el punto de interesección de las rectas. La unidad, dada por un segmento arbitrario, puede ser distinta en cada eje, la decisión sobre cuál es el segmento unidad a tomar depende de los valores que se representan. Recordemos que en la recta horizontal se conviene en representar los números positivos hacia la derecha y los negativos en la semirrecta opuesta. En la vertical se conviene en representar los números positivos hacia arriba y los negativos en la semirrecta opuesta. Convencionalmente, sobre la recta horizontal se representan las primeras componentes de los pares, es decir los valores de la variable independiente; sobre la vertical se representan las segundas componentes de los pares, es decir los respectivos correspondientes.

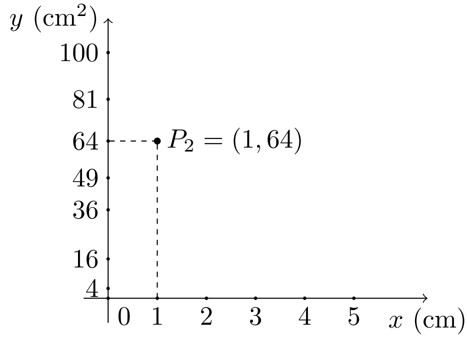
En nuestro caso, teniendo en cuenta que el dominio es $[0,5]$, sobre el eje horizontal, marcaremos un segmento unidad de 1cm con origen en O, punto de intersección de los ejes, y ubicaremos el número 1 en el otro extremo. Esta relación entre la longitud del segmento sobre la recta y el valor que el mismo representa se llama *escala*, esta escala es: 1 : 1cm y se lee "uno en un centímetro". En el eje vertical, teniendo en cuenta que hay valores numéricos grandes (100, 81, etc.) nos conviene elegir otra escala, por ejemplo tomar un segmento de 1cm con origen en O y en el extremo ubicar el número 20, esta escala es: 20 : 1cm (veinte en un centímetro). El valor 100 en este eje se ubica entonces en el extremo del segmento vertical hacia arriba que mide 5 cm.

Para ubicar el par $(0,100)$ se traza una recta vertical por el punto de la horizontal donde se ubica el 0 y una recta horizontal por el punto donde se ubica el 100. Ambas rectas se intersecan en un punto P_1 que es el que representa el par $(0,100)$. Notar que en este caso el punto P_1 coincide con el punto de la vertical donde está ubicado el 100.

Para ubicar el par $(1;64)$ se traza una recta vertical por el punto de la horizontal donde se ubica el 1 y una recta horizontal por el punto donde se ubica el 64, cada uno con sus escalas respectivas. Ambas rectas se intersecan en un punto P_2 que es el que representa el par $(1,64)$.

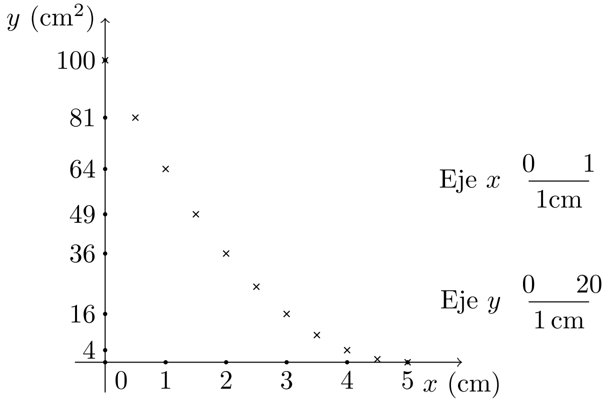


Ejes cartesianos



Representación del punto $(1,64)$

De este modo podemos ubicar todos los pares que surgen de la tabla obteniendo el siguiente gráfico:



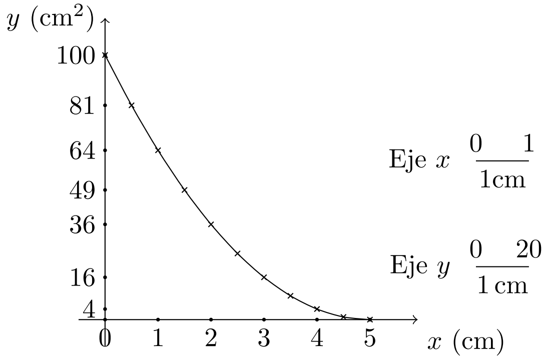
En el gráfico que represente la función deberían estar representados todos los pares ordenados cuyas primeras coordenadas son puntos del dominio y la segunda sus respectivas imágenes, en este caso, dado que en el dominio $[0, 5]$ hay infinitos valores, el conjunto de pares ordenados excede cualquier tabla que podamos confeccionar. Sin embargo se puede obtener gráficamente una impresión global de la función y tratar de completar la información de la tabla para representar al conjunto completo de pares ordenados. Para ello deberíamos poder anticipar algunas de las características de la función pensando en el contexto. Se puede inferir que:

- La mayor área de la base se obtiene en el caso extremo en que no cortemos ningún cuadradito (¡no se arma caja alguna, es todo base!). Esto se traduce en que el par $(0, 100)$ pertenece al gráfico y que 100 es el mayor valor de las imágenes.

- El caso extremo en que doblo el cuadrado en cuatro, por sus bases medias, hace que no podamos armar una caja y nos hace pensar que el punto $(5, 0)$ también pertenece al gráfico y que 0 es el menor valor posible de las imágenes.

- A medida que se aumenta la longitud de los cuadraditos recortados, las dimensiones de la base disminuyen y por lo tanto también disminuye su superficie. De modo que la curva que represente la gráfica irá "bajando", cuando la recorro de izquierda a derecha, en el sentido que los valores de abscisa aumentan.

Con estos datos podemos hacer un gráfico que contemple las características anteriores (aunque no sea el exacto), uniendo los puntos con una línea sin ondulaciones.



2.5 Reconocimiento de imágenes y preimágenes en un gráfico

En el contexto en el que estamos trabajando, las preguntas sobre las imágenes y preimágenes de una función se plantearían del siguiente modo:

El fabricante de cajas desea determinar aproximadamente,

(a) la superficie de la caja que corresponde a un cuadradito recortado cuyos lados miden $2,8\,\mathrm{cm}$,

(b) la medida de los lados de los cuadraditos que hay que recortar para obtener una caja cuya superficie de la base es $56\,\mathrm{cm}^2$,

(c) si es posible fabricar cajas de $120\,\mathrm{cm}^2$,

(d) ¿cuál es el conjunto que contiene todos los valores posibles de superficies de las cajas?

Como no tiene a mano una calculadora, quiere hacerlo a partir de la información volcada en la representación gráfica de la función que modela la situación.

En términos matemáticos las preguntas del fabricante se pueden traducir como sigue:

(a) Calcular la imagen de $2,8$, es decir, calcular $f(2,8)$

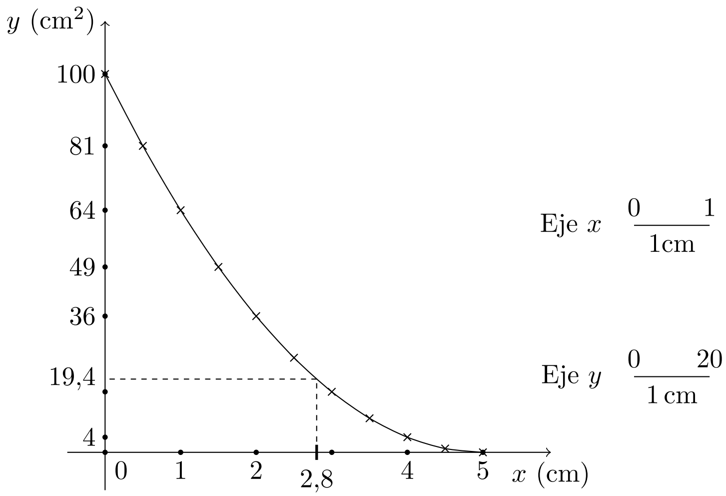
(b) Decidir si $56 \in \mathrm{Im} f$, estimar su preimagen.

(c) Decidir si 120 pertenece a la $\mathrm{Im}\, f$.

(d) Calcular la $\mathrm{Im} f$.

(a) Estimar una imagen. Nos piden estimar $f(2,8)$ a partir del gráfico. Como $2,8$ es un elemento del dominio, es posible calcular su imagen. Para ello, ubicamos a $2,8$ en el eje de las abscisas y trazamos una recta vertical que pase por $2,8$. Esta recta cruza a la gráfica de la función en un único punto cuyas primera y segunda coordenadas son $2,8$ y $f(2,8)$ respectivamente. Trazamos una recta horizontal que pase por el punto de intersección entre la recta vertical y la gráfica de la función y medimos que la recta horizontal cruza al eje de ordenadas aproximadamente a una distancia de $0,97\,\text{cm}$ del cero. Teniendo en cuenta que la escala para el eje de ordenadas es de 20 a 1, se obtiene que $f(2,8) \approx 19,4$.

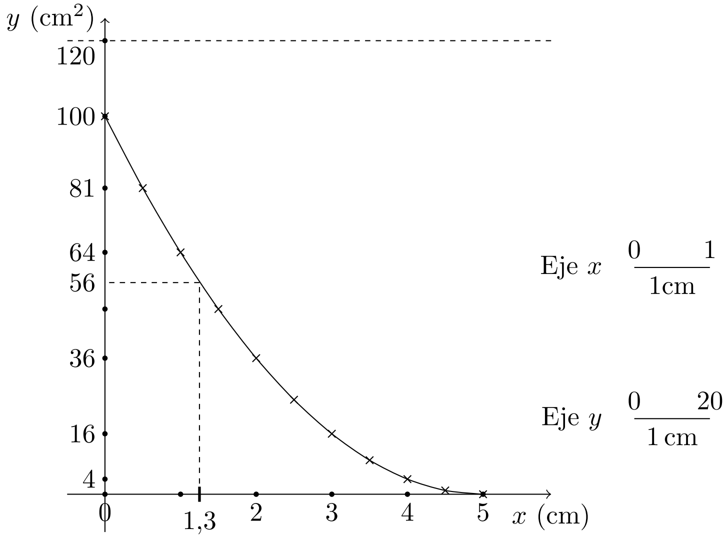
En términos del problema, esto significa que si los lados de los cuadraditos recortados miden $2,8\,\text{cm}$ la superficie de la caja será de $19,4\,\text{cm}^2$ aproximadamente.



(b) y (c) Reconocer una imagen. Si el valor 56 es imagen de algún valor del dominio, al trazar una recta horizontal que pase por $y = 56$ esta cruzará la gráfica de la función. Por ello, se comienza trazando una recta horizontal por $y = 56$ que corresponde a una altura de $2,8\,\text{cm}$ en el eje de ordenadas y corroboramos que esa recta corta a la gráfica en un punto. Trazando una recta vertical por ese punto de intersección, hasta que corte al eje x, podemos ver o estimar la abscisa. En este caso vemos que la abscisa que corresponde a 56 es aproximadamente igual a 1,3 (teniendo en cuenta la escala de 1 a 1). Luego decimos que $56 \in \operatorname{Im} f$ con $f(1,3) \approx 56$.

Del mismo modo, para $y = 120$ se traza una recta horizontal. Se observa que dicha recta no interseca a la curva de la gráfica por lo que $120 \notin \operatorname{Im} f$.

En términos del problema, esto significa que una caja cuya superficie es de $56\,\text{cm}^2$ aproximadamente fue construida a partir de cuadraditos de, $1,3\,\text{cm}$ de lado aproximadamente y que no es posible obtener cajas de $120\,\text{cm}^2$ de superficie.



(d) Reconocer el conjunto imagen de una función (Im f). Si imaginamos repetir el procedimiento realizado para $y = 56$ e $y = 120$ para todos los valores del eje y, nos damos cuenta que para todos los números en el intervalo $[0; 100]$ al trazar la recta horizontal cruzaríamos la curva. En cambio, para los valores fuera de dicho intervalo la recta horizontal correspondiente no cruzaría la curva. Esto significa que $\mathrm{Im} f = [0; 100]$.

En términos del problema de la construcción de cajas, esto significa que es posible construir cajas con una base cuya superficie varía entre 0 y $100\,\mathrm{cm}^2$.

2.6 Generalidades de la representación gráfica de funciones.

Veamos las principales características de un gráfico cartesiano.

Gráfico cartesiano: Usamos esta forma de presentación especialmente en los casos en donde las variables pueden ser medidas y toman valores numéricos. En el gráfico cartesiano se representan puntos. Cada punto está dado por un par ordenado de números reales $P = (x_0, y_0)$, donde x_0 se llama *abscisa* de P e y_0 *ordenada* de P, ambas se llaman *coordenadas del punto* P. El gráfico cartesiano consiste de:

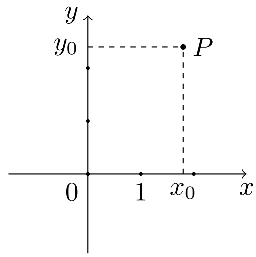
- dos rectas que se cruzan perpendicularmente, una donde se representan las abscisas, que en general se traza como recta horizontal y otra en donde se representan las ordenadas, que en general se traza como recta vertical. Ambos se llaman *ejes cartesianos.*

- Para poder representar la recta numérica en cada eje sabemos que hay que elegir un origen y una unidad. El origen en ambos ejes es el punto de intersección de las rectas. La unidad puede elegirse por eje.

- La primera componente del par ordenado, la abscisa x_0 , se representa sobre el eje horizontal

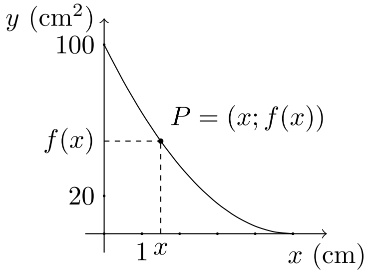
- La segunda componente del par ordenado, la ordenada y_0 , se representa sobre el eje vertical.

- Para determinar el punto P, se traza una paralela al eje de ordenadas que pase por el punto de abscisa x_0 representado en el ítem anterior y una paralela al eje de abscisas que pase por el punto de ordenada representado en el ítem anterior. El punto P es el de intersección de estas rectas trazadas.



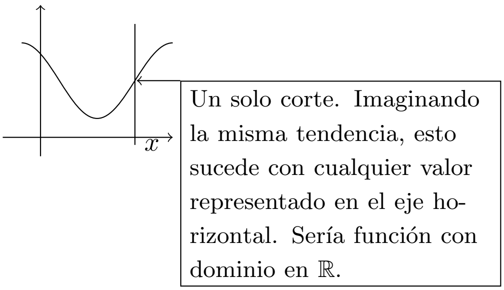
Coordenadas de los puntos de los ejes. Notar que los puntos del plano que están sobre el eje de las abscisas (horizontal) tienen coordenadas $P = (x, 0)$ mientras que los que están sobre el eje de las ordenadas (vertical) son del tipo $P = (0, y)$.

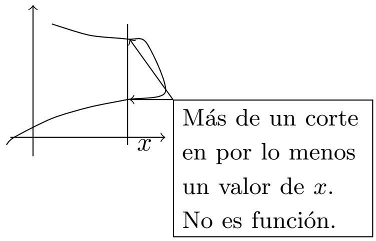
Representación de una función Cuando se presenta un gráfico que representa una función, sobre el eje horizontal están representados los valores que toma la variable en el dominio y sobre el eje vertical sus imágenes por la correspondencia. Los puntos del plano representados tienen coordenadas $(x, f(x))$. Por eso es que también se escribe $y = f(x)$ para decir que la ordenada del punto es la imagen de la abscisa según la correspondencia dada.



El conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$ con $x \in \operatorname{Dom} f$ se llama *gráfico de la función f* y son los puntos que se representan en un gráfico cartesiano.

No cualquier gráfico representa una función. Para decidir cuando un gráfico representa una función debemos recordar que la imagen de cada valor del dominio es única de modo que al trazar rectas verticales que pasen por las abscisas que representan valores del dominio las mismas intersecan al gráfico del conjunto de puntos representado sólo una vez. En los siguientes ejemplos los conjuntos de puntos representados son curvas, veamos cómo reconocer si se trata del gráfico de una función o no.





Utilidad de la representación gráfica de una función. Este párrafo resume algunas de las características que desarrollamos en las secciones anteriores:

- Para valores del dominio representados en el gráfico, es posible estimar su imagen y preimágenes sin necesidad de conocer la expresión analítica que vincula las variables.
- El gráfico permite visualizar casi completamente el conjunto de pares de correspondientes por una función, lo cual ayuda para identificar características de la misma tales como: crecimiento, valores máximos y mínimos, comportamiento de la función para abscisas de 'valor absoluto grande", dónde las imágnes son positivas o son negativas, etc.
- Permite visualizar varias funciones a la vez.

Cabe aclarar que si bien es sencillo trabajar con gráficos, se pierde precisión en la obtención de algunos resultados numéricos.

2.7 Reconocimiento de imágenes y preimágenes en un gráfico

En este parágrafo explicamos de forma general el procedimiento para reconocer imágenes y preimágenes en un gráfico.

Hallar una imagen. Para hallar la imagen $f(a)$ de un valor numérico a del dominio de la función, se ubica dicho valor en el eje de abscisas, se traza una recta vertical que pase por a. Esta recta cruzará a la gráfica de la función en un único punto $(a, f(a))$. Se traza una recta horizontal por dicho punto. La ordenada donde esta recta horizontal corta al eje vertical es justamente $f(a)$.

Identificar una imagen. Si nos dan un valor numérico a y nos piden reconocer si es imagen de algún valor del dominio, tenemos que pensar que si así fuera, ese valor estaría representado en el eje vertical, es decir debemos ubicarlo en el eje de ordenadas $y = a$. Trazamos luego una recta horizontal, paralela al eje x. Si la recta corta a la gráfica de la función en *algún* punto (*uno o más* puntos) entonces a será imagen de algún valor del dominio.

Identificar el conjunto imagen de una función. Imaginando que podemos repetir el procedimiento realizado en el inciso anterior para todos los valores que están representados en el eje y, es decir, todos los números reales, podremos diferenciar cuáles valores tienen preimagen y cuáles no. La imagen de la función es, entonces, el conjunto de todos los valores reales para los cuales al trazar una recta horizontal que corta al eje y en dichos valores, esta recta cruza la gráfica de la función.

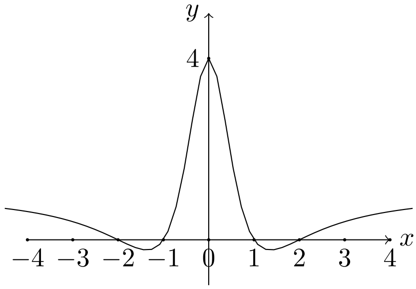
Ejercicio resuelto 4. Una de las funciones propuestas tiene por gráfico el representado en la figura. ¿Cuál de ellas es?

$f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \qquad f_a(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

$f_b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \qquad f_b(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 2$

$f_c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \qquad f_c(x) = \frac{x^4-5x^2+4}{x^4+2x^2+1}$

$f_d : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \qquad f_d(x) = x^2 - 5x + 4$



Resolución.

<table>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Podemos determinar el valor de 5 imágenes exactamente: la imagen de 0 debe ser 4 y las imágenes de -2, -1, 1, y 2 debe ser 0 ¿por qué? Al evaluar las cuatro funciones en los valores que corresponden de las abcisas mencionadas podemos empezar a descartar.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>Como $f_b(0) = 2$ y $f_d(2) = -2$, se descartan estas dos funciones</td><td>Cálculos auxiliares
$f_a(-2) = f_a(-1) = f_a(1) = f_a(2) = 0$, $f_a(0) = 4$
$f_d(-2) = f_d(-1) = f_d(1) = f_d(2) = 0$, $f_d(0) = 4$</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Ahora hay que mirar otras características del gráfico para poder definir entre las dos funciones que quedan. Para ello evaluamos en las abscisas 3, 4, -3 y -4.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>Nos damos cuenta que $f_a(4) = 180$ y que $f_d(4) = 0,62$</td><td></td></tr>
<tr><td>Conclusión y explicitación de la respuesta</td><td colspan="2">Respuesta: Según el gráfico la imagen de 4 debe ser menor que 4, se descarta entonces a f_a por lo calculado arriba y, como por el enunciado, sabemos que una de las cuatro es correcta, la respuesta es que la función buscada es f_d.</td></tr>
</table>

Trabajo Práctico 22

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) De acuerdo a este texto, ¿cuáles son las distintas formas para representar una función?

(b) Dar, mediante diagramas de Venn, ejemplos de asignaciones que sean funciones y otras que no lo sean.

(c) ¿Cómo se representa un punto en el plano?

(d) ¿Qué relación hay entre la imagen de un valor x del dominio y $f(x)$?

(e) Explicar coloquialmente cómo se construye un gráfico a partir de una tabla de valores.

(f) Explicar coloquialmente cómo se puede representar gráficamente una función dada por una fórmula.

(g) Si conocemos una tabla de cierta función, los valores de la variable independiente consignados en ella, ¿son necesariamente todos los valores del dominio de la función?

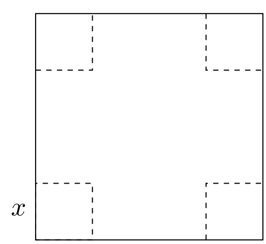
Ejercicio 2. Acerca de la lectura. En el texto se afirma lo siguiente:

"Si un valor es imagen de algún valor del dominio, al trazar una recta horizontal que pase por la ordenada que representa dicho valor, esta cruzará a la gráfica de la función."

Ubicar esta afirmación en el texto y explicar por qué es verdadera.

Ejercicio 3. Representar en el plano los siguientes pares ordenados: $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(-2,5;0)$, $(0;-1/2)$, $(1,5;3)$, $(\frac{1}{4};-\frac{7}{2})$, $(-1;-2)$, $(-1;2)$.

Ejercicio 4. Se propone construir una caja de cartón recortando cuatro cuadraditos iguales en las esquinas de una plancha cuadrada siguiendo la línea que se muestra en la figura. Una vez recortados los cuadrados se pegan los bordes para armar la caja. Pensemos en una fabricación industrial de cajas mediante una máquina que realiza el proceso descripto arriba y que admite planchas de cartón de 20 cm de longitud. La medida de los lados de los cuadrados de las esquinas es regulable y se elige según las dimensiones deseadas para el producto final. El fabricante desea estudiar cómo varía la superficie de la base de la caja de acuerdo a la longitud del lado del cuadradito recortado y, además, disponer de manera inmediata de información acerca de la relación entre ambas variables.



(a) Indicar las longitudes de lados de cuadraditos para los cuales tiene sentido el armado propuesto. ¿Cuáles son los casos extremos? ¿Qué puede decir de la superficie de la base de la caja estos casos extremos?

(b) Dar un procedimiento que permita al fabricante calcular la superficie de la base de la caja en función de la longitud lado del cuadradito recortado.

(c) Definir una función que modelice la situación planteada.

(d) Si el fabricante recibe muchos pedidos que corresponden a lados de cuadraditos de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm,...,9 cm ¿cuál sería una forma práctica de disponer de datos sobre las correspondientes superficies de las bases?

(e) Indicar si la superficie de la base aumenta o disminuye la medida que aumenta la longitud del lado recortado.

(f) Realice una representación gráfica aproximada de la función definida en (c).

(g) Mejore la representación anterior utilizando una tabla de valores con más datos

(h) Explique cómo debería proceder el fabricante para resolver las siguientes cuestiones utilizando la representación gráfica de la función:

  (i) Un obrero le pregunta qué superficie ocupará la caja al apoyarla sobre la mesa si está recortando cuadraditos de lados que miden $7,3$ cm.

  (ii) Un cliente llama pidiendo cajas cuyas bases ocupen una superficie de $120\,\mathrm{cm}^2$ y quiere saber cuál es la altura de la caja (notar que la altura de la caja coincide con la longitud del lado del cuadradito recortado).

  (iii) Un cliente pregunta si el fabricante puede armar cajas cuya superficie de la base sea de $230\,\mathrm{cm}^2$ y de altura igual a 5 cm.

  (iv) Un cliente pide cajas que tengan una superficie de la base de $510\,\mathrm{cm}^2$.

Ejercicio 5. Para la misma situación del ejercicio anterior, el fabricante se propone estudiar cómo varía el *volumen* de la caja de acuerdo a la longitud del lado del cuadradito recortado y además disponer expeditivamente de información acerca de la relación entre ambas variables.

(a) Indicar las longitudes de lados de cuadraditos para los cuales tiene sentido el armado propuesto. ¿Cuáles son los casos extremos?¿Qué puede decir del volumen de la caja para estos casos extremos?

(b) Dar un procedimiento que permita al fabricante calcular el volumen de la caja en función de la longitud lado del cuadradito recortado.

(c) Definir una función que modelice la situación planteada.

(d) Si el fabricante recibe muchos pedidos que corresponden a lados de cuadraditos de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm,...,9 cm ¿cuál sería una forma práctica de disponer de datos sobre los correspondientes volúmenes?

(e) Indicar si el volumen aumenta o disminuye a medida que aumenta la longitud del lado recortado.

(f) Realice una representación gráfica aproximada de la función.

(g) Mejore la representación anterior utilizando una tabla de valores con más datos.

(h) Explique cómo debería proceder el fabricante para resolver las siguientes cuestiones utilizando la representación gráfica de la función:

  (i) Un obrero le pregunta qué volumen tendrá la caja que está construyendo si los cuadraditos que está recortando tienen lados de $7,3$ cm.
  (ii) Un cliente llama pidiendo cajas que tengan un volumen de $510\,\mathrm{cm}^3$ y quiere saber cuál es la altura de la caja (notar que la altura de la caja coincide con la longitud del lado del cuadradito recortado).
  (iii) Un cliente pregunta si el fabricante puede armar cajas cuyo volumen sea de $400\,\mathrm{cm}^3$ y de altura igual a 3 cm.
  (iv) Un cliente pide cajas que tengan un volumen de $650\,\mathrm{cm}^3$.

(i) El cliente que llamó antes pidiendo cajas que tengan un volumen de $510\,\mathrm{cm}^3$, quiere saber cuál es la altura de la caja con una precisión de 5 cifras decimales (notar que la altura de la caja coincide con la longitud del lado del cuadradito recortado).

(j) El fabricante quiere saber cuál es el volumen máximo que tienen las cajas que fabrica.

Ejercicio 6. Analizar las ventajas y desventajas de disponer de la fórmula, de una tabla o del gráfico de una cierta función.

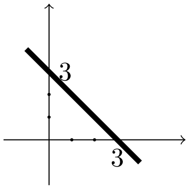
Ejercicio 7. Para cada uno de los siguientes incisos, decir cuáles de los siguientes gráficos cumplen las condiciones dadas (imaginar que la curva sigue con la tendencia indicada)

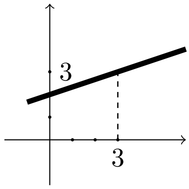
(a) El punto $P = (3; 3)$ pertenece al gráfico de la función representada.

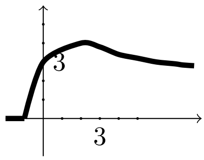
(b) Existe algún valor de x al cual le corresponde el valor $y = 0$.

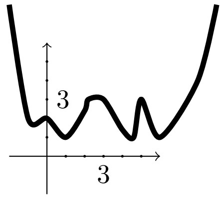
(c) La imagen de 5 es mayor que 3.

(d) Si f es la función representada entonces $f(0) = 3$.









Relación entre tabla y gráfico

Ejercicio 8. Un economista decide realizar un estudio de la variación de la cotización del dólar estadounidense en pesos argentinos a lo largo del año 2010. Para ello consigna en una tabla la cotización del primer día hábil de cada mes de 2010 y además elige la cotización usada para la venta:

Día	04-01	01-02	01-03	05-04	03-05	01-06
Cotización	3,82	3,86	3,88	3,89	3,90	3,95

Día	01-07	02-08	1-09	01-10	01-11	01-12
Cotización	3,95	3,96	3,97	3,98	3,98	4,01

Cotización del dólar (venta) durante el año 2010.

A partir del análisis de la información de la tabla se pide:

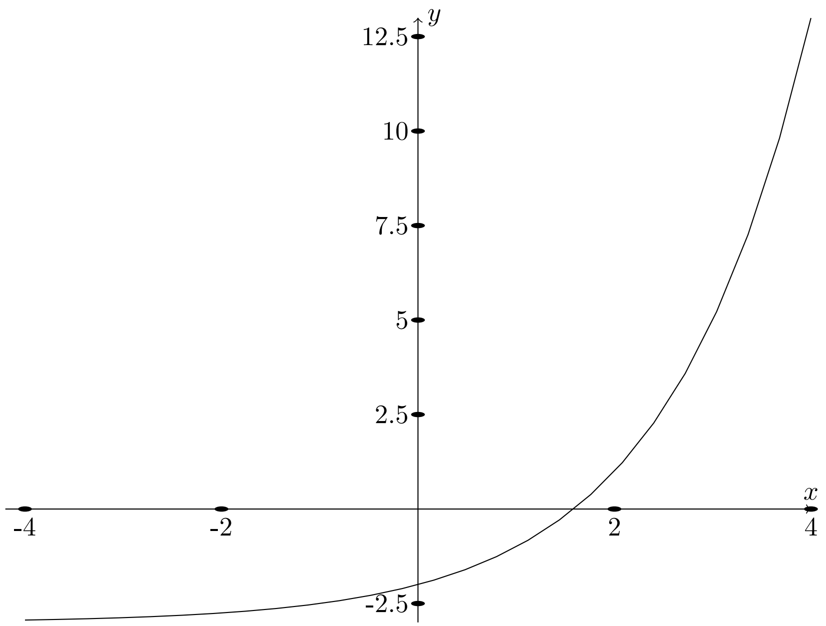
(a) Determinar las variables que se relacionan indicando cuál es la dependiente y la independiente.

(b) Definir la función que se está estudiando (dominio, codominio y regla de asignación).

(c) Realizar un gráfico de la función utilizando los datos dados en la tabla.

(d) Estimar el valor del dólar para el 15 de mayo de 2010. Explicar el criterio utilizado para realizar la estimación.

Ejercicio 9. Se tiene una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la cual se conoce su gráfico y una tabla de valores de la misma (con valores decimales aproximados):



x	-4	-2,5	-1	-1/2	0
$f(x)$	-2,939	-2,826	-2,503	-2,295	-2

x	1/3	1	1,569	2,3	3	4
$f(x)$	-1,737	-0,986	0	2,003	5,166	13,445

Las siguientes tablas corresponden a funciones relacionadas con f. Se pide en cada caso:

(a) Intente encontrar alguna relación entre cada nueva función y f.

(b) De acuerdo a la relación encontrada trazar aproximadamente sobre el gráfico cartesiano anterior,el gráfico de cada nueva función.

x	-4	-2,5	-1	-1/2	0
$g(x)$	-1,939	-1,826	-1,503	-1,295	-1

x	1/3	1	1,569	2,3	3	4
$g(x)$	-0,737	-0,014	1	3,003	6,166	14,445

x	-4	-2,5	-1	-1/2	0
$h(x)$	1,469	1,413	1,251	1,147	1

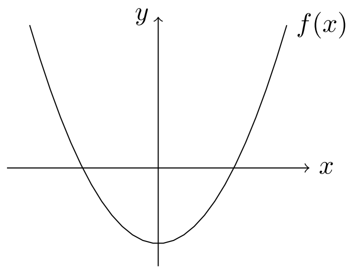
x	1/3	1	1,569	2,3	3	4
$h(x)$	0,868	0,493	0	1,001	2,583	6,723

(c) Teniendo en cuenta la función inicial f, observe la siguiente tabla. Indique una posible relación entre las funciones k y f. Grafique k y f en un mismo gráfico cartesiano utilizando la misma escala sobre los ejes. ¿Qué relación hay entre sus gráficos?

x	-2,939	-2,826	-2,503	-2,295	-2	
$k(x)$	-4	-2,5	-1	-1/2	0	
x	-1,737	-0,986	0	2,003	5,166	13,445
$k(x)$	1/3	1	1,569	2,3	3	4

Relación entre fórmula y gráfico

Ejercicio 10. ¿Cuál de las siguientes funciones es la representada en el gráfico? Justificar tanto la elección como el descarte.



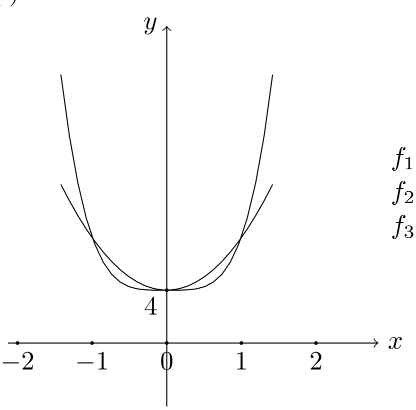
a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$,
b) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$,
c) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

Ejercicio 11. Para cada inciso se pide:

(a) Asociar cada curva con sólo una de las funciones presentadas.

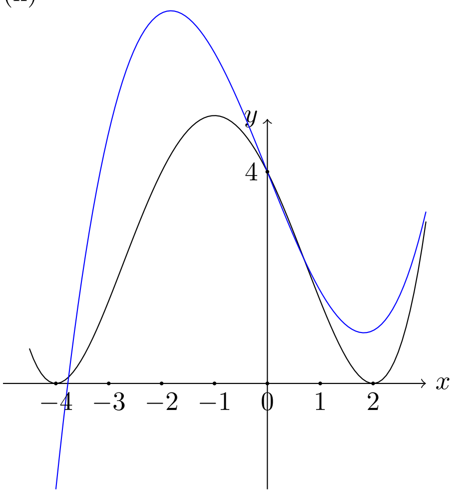
(b) En cada caso, completar el dibujo y explicar qué sucede con la curva para abscisas de valor absoluto grande,

(i)



$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2 + 4,$
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^4 + 4,$
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \frac{1}{64}(x + 4)^4$

(ii)



$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{1}{16}(x+4)^2(x-2)^2$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2 - 4x + 4,$

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{2}x + 4$

Ejercicios integradores

Ejercicio 12.

(a) Una fábrica produce un cierto tipo de tornillos para una silla especial que necesita 4 tornillos de ese tipo. El fabricante de tornillos envía al fabricante de sillas un excedente de 8 tornillos por cada pedido para cubrir fallas.

(b) ¿Cuántos tornillos se envían si se hizo un pedido para construir 50 sillas? ¿y para construir 120? ¿y para construir 134?

(c) Para un mismo pedido el fabricante de sillas insistió con tres llamados, uno a la mañana, otro al medioda y otro a la tarde. El empleado de la mañana anotó que se tenían que mandar 519 tornillos, el del mediodía que se tenían que mandar 516 tornillos y el de la tarde anotó 518. ¿Cuántos tornillos decide enviar el fabricante? Explicar cómo tomaría la decisión si ud. fuera el fabricante.

(d) Indicar cuáles son las variables que se relacionan y si la forma en que se relacionan es por una función. En caso afirmativo definir la función de acuerdo al problema (dar dominio, codominio y la regla de correspondencia).

(e) Indicar cuáles de los siguientes pares pertenecen al gráfico cartesiano de la función planteada: $(0, 8)$; $(10, 40)$; $(23, 100)$, $(237, 955)$.

(f) Realizar un gráfico aproximado de la función.

Ejercicio 13. De un vaso de leche de 200 ml se podría extraer 6 g de materia grasa para manteca.

(a) ¿Cuántos vasos serían necesarios para obtener 240 g de materia grasa?

(b) Modelizar con una función la relación entre la cantidad de materia grasa y el volumen de leche disponible, indicando dominio, codominio, fórmula y variables. Representar gráficamente.

3 Análisis de funciones

Cuando analizamos una función intentamos dar la mayor información posible sobre la misma que a su vez nos pueda ser útil para describir el fenómeno que ella modeliza y hacer predicciones estimativas sobre dicho fenómeno. Según cómo sea presentada esa función, aprenderemos algunos procedimientos para poder obtener información sobre la misma.

3.1 Lectura y análisis de gráficos

Cuando analizamos una función intentamos dar la mayor información posible sobre la misma que a su vez nos pueda ser útil para describir el fenómeno que ella modeliza y hacer predicciones estimativas sobre dicho fenómeno. Según cómo sea presentada esa función, aprenderemos algunos procedimientos para poder obtener información sobre la misma.

En esta sección vamos a realizar el análisis de una función que está presentada a través de un gráfico cartesiano. Esta representación es muy usada en las ciencias como Química, Biología, Geología, Economía, Geografía, etc. Muchos de estos gráficos se presentan con trazo continuo aunque hayan surgido a partir de una cantidad finita de datos. Esto es porque se supone que las variables con las que se trabaja toman todos los valores reales en el dominio considerado. A partir de un gráfico cartesiano aprenderemos a obtener información sobre la misma.

Pretendemos brindar una forma de análisis que sirva en general, aunque lo vamos a situar en el contexto particular de un fenómeno de Hidrología, que es la rama de la Metereología que se encarga del estudio de los cauces de agua (ríos, lagos, canales, represas, etc.)

Clima y Pronóstico en Hidrometría

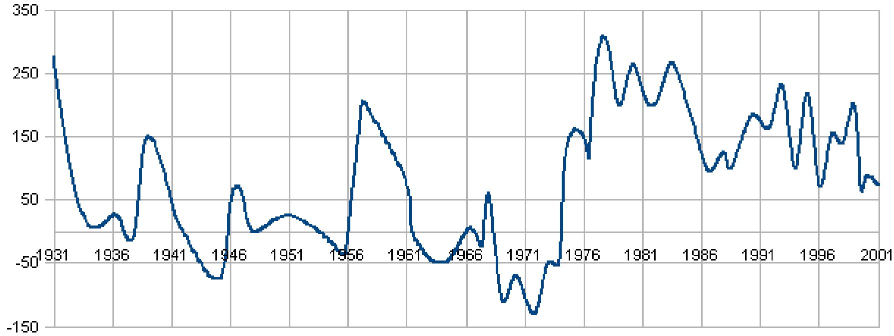
Para estudiar las variaciones en los ríos y relacionarlos con los fenómenos climáticos, se toman mediciones. Una de esas mediciones es el de la altura que alcanza el agua del río en diferentes épocas del año; el análisis de la variación de altura respecto del tiempo constituye el análisis hidrométrico del río.

El instrumento de medición que se utiliza es una barra de metal que se ubican verticalmente en puntos geográficos prefijados que se llaman estaciones hidrométricas.

Contrariamente a lo que se podría suponer, el origen de la regla graduada de la barra, el **0**, no coincide con el terraplén de la orilla del lecho del río sino que se ubica según una convención internacional. La graduación de la barra es cada 10 cm, con subdivisiones de 2 cm. Una vez determinado el origen donde se ubica el número 0, hay valores sobre ese origen, que se consideran positivos, y otros por debajo del mismo que consideran negativos. Es decir que, para esta medición en particular, la altura del río puede tomar tanto valores positivos ¡como negativos!.

Para hacer sus prospecciones de hidrología, los expertos analizan gráficos y tablas de funciones. Vamos a trabajar con la función f que a cada año considerado le asigna el mínimo valor de altura del río registrado en ese año, variable a la que llamamos directamente *altura del río*.

Nos proponemos analizar ciertas características de la función correspondiente a la cuenca del Río Paraguay, uno de los más importantes afluentes del Río Paraná, con mediciones tomadas en la estación hidrométrica de Bahía Negra, en la República del Paraguay *



Río Paraguay en Bahía Negra. Valores Mínimos - Período 1931-2001

En primer lugar el reconocimiento gráfico de que una correspondencia es función es trazando una recta "móvil", paralela al eje de las ordenadas (vertical), por cada abscisa del dominio y comprobar que dicha recta interseca al gráfico sólo una vez.

Haremos un análisis básico del gráfico orientado por las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las variables? ¿En cuáles ejes se representan? ¿Con qué escalas?
- ¿Qué datos de puntos podemos conocer directamente del gráfico y cuáles podemos estimar?
- ¿Qué eventos particulares se observan, tales como: máximos, mínimos, imágenes de abscisas predeterminadas, o preimágenes de ordenadas predeterminadas, etc.?
- ¿Qué información podemos obtener sobre intervalos, tal como: dónde la función supera, o es inferior, a algún valor prefijado o intervalos de crecimiento y de decrecimiento?
- ¿Qué información a largo plazo se observa para conocer la tendencia "a futuro" o suponer cómo ha sido en el "pasado"?

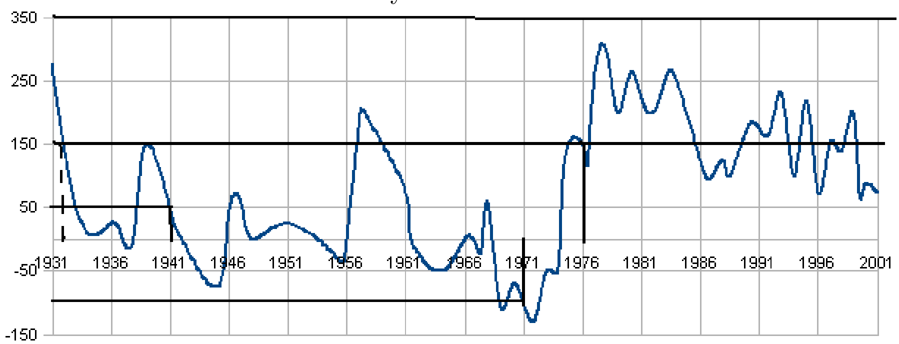
*Inspirado en la presentación de la Dra. Godniazki: "Clima y Pronóstico Hidrológico en Grandes Ríos"-2006

Estas preguntas pueden aplicarse para analizar cualquier gráfico de función. Veamos cómo hacerlo en este caso:

Variables y su representación en los ejes. Vemos que en el eje horizontal, de abscisas, donde convencionalmente se representa la variable independiente, los valores corresponden a la magnitud *tiempo*, medido en años. En el eje vertical, de ordenadas, donde convencionalmente se representa la variable dependiente, los valores corresponden a la magnitud *altura del río* (recordar que se trata de la altura mínima del río) medida en centímetros. Los valores representados en el eje horizontal empiezan en el año 1931 y finalizan en 2001, en el eje vertical se representan desde el -150 al 350.

Con respecto a las escalas, en el eje horizontal la escala es 5 años en un segmento de 1 cm, es decir 5 : 1. En el eje vertical la escala es 100 cm en un segmento de 1 cm, es decir 100 : 1. Se ha marcado una grilla o cuadriculado según dicha escala. Como vemos las cantidades representadas en 1 cm en cada uno de los ejes es distinta. La elección de escala se realiza de acuerdo a la conveniencia de la representación de las variables.

Datos puntuales.
Cuando hablamos de datos puntuales nos referimos a: conocida la abscisa, ver si a través del gráfico podemos conocer su imagen o bien conocida la imagen, ver si a través del gráfico podemos conocer su preimagen. A veces el gráfico nos permite conocer estos valores exactamente y otros es necesario estimarlos.



Observando el gráfico de nuestro ejemplo:

- ¿Cuál fue la altura del río en 1941? Podemos saber que para 1941 la imagen es 50 cuando es parte del dato del gráfico que la recta vertical en el punto del eje de 1941 y la horizontal en el punto del eje de 50 se intersecan sobre el trazo que representa la gráfica de la función. El punto $P_1 = (1941, 50)$ pertenece a la gráfica de la función. En el contexto dado, significa que en el año 1941 la altura fue de 50 cm.

- Si quisiéramos conocer la altura alcanzada en el año 1971, es decir su imagen, al trazar la vertical por ese valor (o mejor dicho por el punto correspondiente a ese valor) e intersecarla con el trazo de la función, vemos que no hay recta horizontal que pase por un valor de ordenada de la grilla que se encuentre en ese punto de intersección, por lo que no hay un dato preciso de su correspondiente sobre el eje de ordenadas. Podemos estimarlo, como un valor intermedio entre -150 y -50. Para estimarlo con más precisión dividimos el intervalo en cuartos, por cada cuarto se agregan o se extraen 25 cm. La ordenada buscada está en el segundo subintervalor, cercana al valor -100. Decimos entonces que estimamos que para el año 1971 la altura fue de 100 cm por debajo del nivel 0.

- Para responder la pregunta: ¿En qué años la altura del río fue de 150 cm? Deberíamos conocer las preimágenes de la ordenada 150. Al trazar una recta horizontal por el valor 150 vemos que la misma interseca al trazo de la función en varios puntos. Las abscisas de esos puntos son las preimágenes. Por los datos del gráfico, trazando la vertical por el valor 1976, vemos que las rectas horizontal por 150 y vertical por 1976 se intersecan en el trazo de la función. Luego una preimagen de 150 que podemos conocer con precisión es el 1976 y $P_2 = (1976, 150)$ es punto de la gráfica. Esto significa que uno de los años en que se alcanzó esa altura es el 1976.

  Podríamos estimar algún otro, por ejemplo entre los años 1931 y 1936 también se alcanzó esa altura, si quisiéramos una estimación más fina aún, trazando la vertical por el punto de intersección entre la horizontal por 150 y el gráfico de la función, vemos que la abscisa correspondiente está cerca del año 1931. Para estimar dicha abscisa mejor, dividimos el intervalo $[1931, 1936]$ en quintos, para que cada punto sea un año. Por la cercanía del punto sobre el eje de abscisas al número 1932, podemos decir entonces que uno de los años en los que se alcanzó la altura de 150 cm es estimativamente el 1932.

- Para responder la pregunta: ¿En qué años la altura del río fue de 350 cm? Deberíamos conocer las preimágenes del valor de ordenada 350. Al trazar la recta horizontal por el 350 vemos que la misma no interseca en ningún punto al gráfico de la función por lo que inferimos que ese valor no tiene preimagen.

Obtención de valores particulares: Máximo, mínimo, valores de intersección con los ejes.

El valor máximo de una función es un valor sobre el eje de las ordenadas que es imagen de algún valor del dominio y que supera o iguala a todas las demás imágenes. El resto de las imágenes se encuentran por debajo de él en el eje de las ordenadas.

En nuestro caso vemos que el valor máximo se encuentra entre los 250 y los 350 centímetros. Podríamos tratar de estimarlo con más precisión, trazando una recta horizontal por el punto más alto del gráfico vemos sobre el eje de las ordenadas que la misma interseca en un valor que consideraríamos equidistante entre 250 y 350, decimos entonces que el valor máximo es, aproximadamente, de 300 cm. También es importante señalar en qué año se alcanzó ese valor, es decir conocer su preimagen. Para ello procedemos como en el párrafo 3.1, ítem 3.1, para obtener aproximadamente la preimagen de 300 que se encuentra entre 1976 y 1981, dividiendo el intervalo en quintos, lo estimamos como el valor 1978. Luego decimos que estimativamente el máximo de altura del río se alcanzó en 1978 y fue de 300 cm.

El valor mínimo de una función es un valor sobre el eje de las ordenadas que es imagen de algún valor del dominio y que es inferior o iguala a todas las demás imágenes. El resto de las imágenes se encuentran por encima de él.

En nuestro caso vemos que el valor mínimo se encuentra entre los -150 y los -50 centímetros. Podríamos tratar de estimarlo con más precisión, trazando una recta horizontal por el punto más bajo del gráfico, vemos sobre el eje de las ordenadas que la misma interseca en un valor que consideraríamos cercano al -150, si dividimos el intervalo en cuartos podríamos decir que el valor mínimo es, aproximadamente, de -125. También es importante conocer su preimagen. Para ello procedemos como en el párrafo anterior y estimamos la preimagen de -125 que se encuentra entre 1971 y 1976, lo estimamos como el valor 1972. Luego decimos que estimativamente el mínimo de altura del río se alcanzó en 1978 y fue de 125 cm por debajo del nivel origen.

Los ceros de la función son aquellos valores de abscisa en los cuales el trazo de la gráfica interseca a este eje. Un cero o raíz de una función es un valor sobre el eje de las abscisas cuya imagen es el número 0.

Para identificarlos gráficamente se traza una recta horizontal por el 0 de las ordenadas y donde esa recta interseque al gráfico de la función entonces observamos o estimamos sus preimágenes. Un cero que podemos observar en el gráfico mediante los datos de la grilla es 1956. Los ceros restantes, los estimamos por el procedimiento anteriormente descrito en 3.1, ítem 3.1:

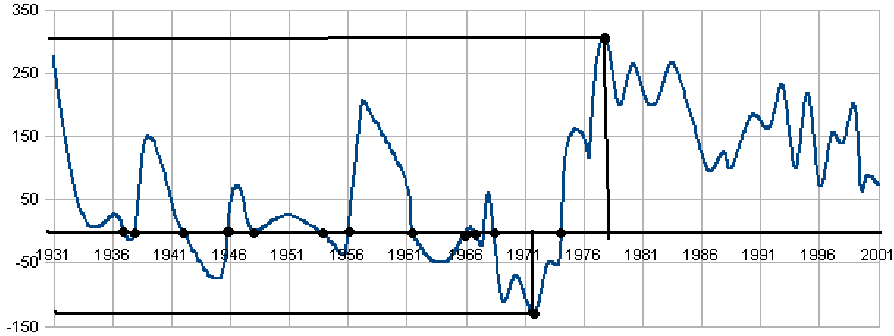
$$1937,\ 1938,\ 1942{,}1945{,}1948{,}1954{,}1962{,}1965{,}1967{,}1968{,}1969{,}1974.$$

Notemos que dada una función, puede haber un cero de la misma, más de un cero o ninguno si la horizontal no interseca al gráfico.

La ordenada al origen de una función es valor de las ordenadas que es imagen del 0.

En rigor nuestro caso como el 0 no pertenece al período de años estudiado no pertenece al dominio calculamos la ordenada al origen de esta función.

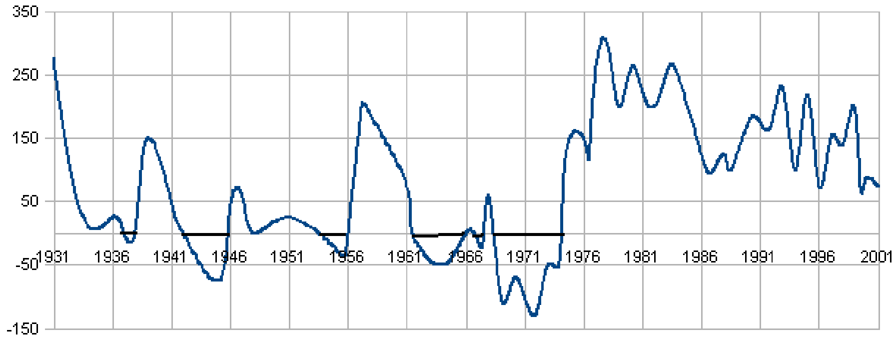
En los casos en que el cero sí pertence al dominio y está graficado, la ordenada al origen se ve como el punto de intersección entre le trazo de la función y el eje de las ordenadas.



Positividad, negatividad y crecimiento.

El conjunto de negatividad es aquel subconjunto de abscisas para el cual las imágenes de los valores de dicho conjunto son negativas (menores que 0). Lo notamos C^- y se representa gráficamente sobre el eje "x". Para el tipo de funciones que estudiamos en este libro, se expresa como unión de intervalos.

El conjunto de negatividad se observa del siguiente modo: se traza una recta horizontal por el valor de ordenada 0 y se identifican las abscisas cuyas imágenes están por debajo de esa recta. Se representa sobre el eje "x".



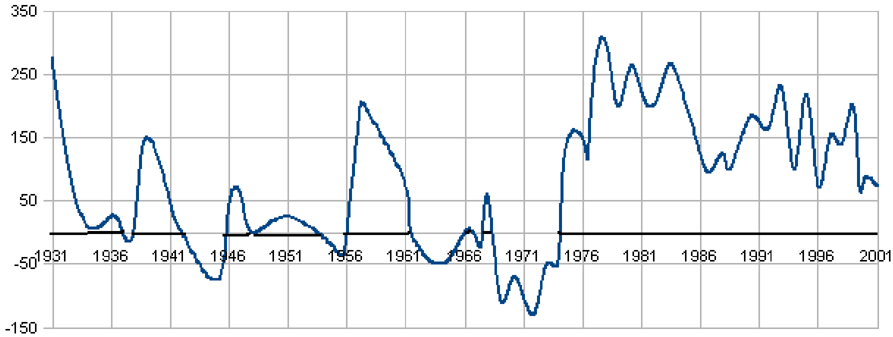
En nuestro ejemplo, trazamos la recta horizontal, estimamos los ceros de la función (las preimágenes del 0) y notamos que el conjunto de negatividad está formado por intervalos entre ceros. Estimamos dicho conjunto:

$$\begin{aligned} C^- \quad = \quad & (1937, 1938) \cup (1942, 1945) \cup (1954, 1956) \cup \\ & (1962, 1965) \cup (1967, 1968) \cup (1969, 1974). \end{aligned}$$

Nota importante: En rigor no deberíamos usar el símbolo "=" para determinar el conjunto porque los valores no son exactos sino estimados. Lo hacemos a los fines de que se entienda cómo se obtiene el conjunto C^- en los casos más "escolarizados"

El conjunto de positividad es aquel conjunto incluido en el eje de las abscisas para el cual las imágenes de los valores de dicho conjunto son positivas (mayores que 0). Lo notamos C^+ y, para el tipo de funciones que estudiamos en este libro, se expresa como unión de intervalos o de conjuntos que contienen puntos aislados.

El conjunto de positividad se observa del siguiente modo: se traza una recta horizontal por el valor de ordenada 0 y se identifican las abscisas cuyas imágenes están por encima de esa recta. También se representa sobre el eje "x".

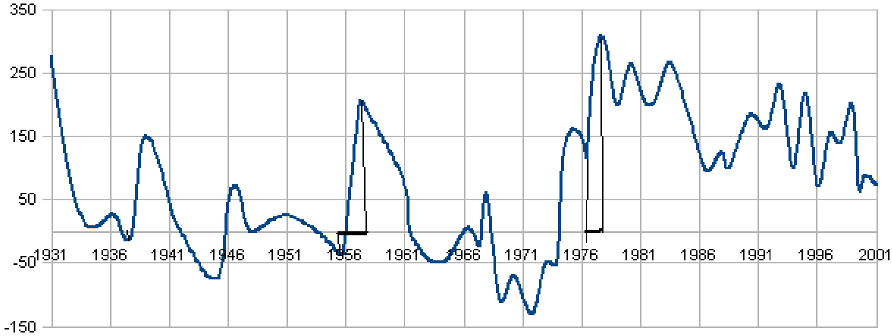


En nuestro ejemplo, trazamos la recta horizontal, estimamos los ceros de la función (las preimágenes del 0) y estimamos dicho conjunto:

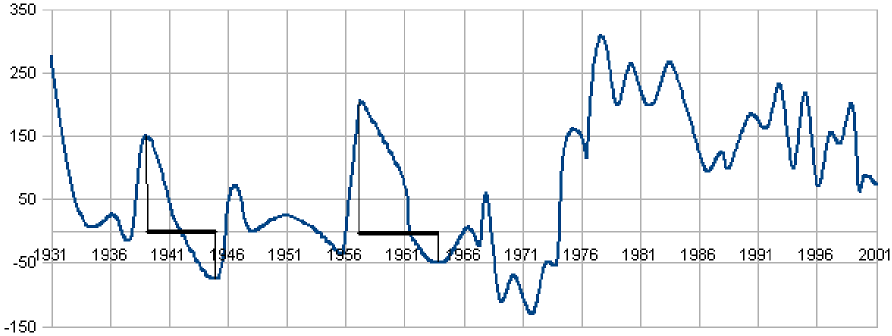
$$\begin{aligned} C^+ \quad &= \quad (1931, 1937) \cup [(1946, 1954) \setminus \{1948\}] \cup \\ & \quad\quad (1956, 1962) \setminus (1965, 1967) \cup (1967, 1968) \cup (1974, 1971). \end{aligned}$$

Nota importante: En rigor no deberíamos usar el símbolo "=" para determinar el conjunto porque los valores no son exactos sino estimados. Lo hacemos a los fines de que se entienda cómo se obtiene el conjunto C^+ en los casos más "escolarizados".

Crecimiento: Gráficamente en cada intervalo el crecimiento se observa del siguiente modo: mientras observamos las abscisas en aumento (de izquierda a derecha): $\rightarrow$, el trazo de la función va subiendo: $\nearrow$. En nuestro ejemplo, hay varios intervalos de crecimiento, estimamos sólo dos de ellos: $(1955, 1957)$ y $(1977, 1978)$.



Decrecimiento Gráficamente en cada intervalo el decrecimiento se observa del siguiente modo: mientras observamos las abscisas en aumento (de izquierda a derecha): $\rightarrow$, el trazo de la función va bajando: $\searrow$. En nuestro ejemplo, hay varios intervalos de decrecimiento, estimamos solamente dos de ellos: $(1939, 1944)$ y $(1957, 1964)$



Observemos que en esta función, cuando hay un cambio de creciente a decreciente, ($\nearrow \searrow$) la imagen de esa abscisa donde se realiza el cambio supera a las imágenes de las abscisas cercanas. Ese valor se llama *máximo relativo*. Por ejemplo en 1957 hay un cambio de creciente a decreciente entonces $f(1957)$ es un máximo relativo que estimamos en, aproximadamente, 200. Esto significa que para años cercanos al 1957, la altura del río no superó los 200 cm.
Anĺogamente, podemos obtener un mínimo relativo al pasar de un intervalo de decrecimiento a uno de crecimiento. Por ejemplo, estimamos que en 1964 hay un mínimo relativo que sería -50. En años cercanos a 1964 la altura estuvo por encima de los 50 cm debajo del origen.

3.2 Revisión más formalizada de lo visto.

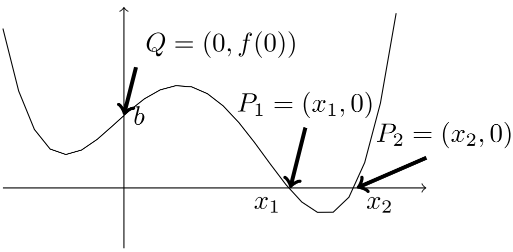
Reconocer una imagen. Si nos dan un valor numérico b y nos piden reconocer si es imagen de algún valor del dominio, tenemos que pensar que si así fuera, ese valor estaría representado en el eje vertical, es decir debemos ubicarlo en el eje de ordenadas $y = b$. Trazamos luego una recta horizontal, paralela al eje x. Si la recta corta a la gráfica de la función en *algún* punto (*uno o más* puntos) entonces b será imagen de algún valor del dominio.

En general, dado un número b, si $a \in \operatorname{Dom} f$ es tal que $f(a) = b$ entonces a se llama *preimagen de b*

Intersección de la gráfica con los ejes. Analicemos las dos posibilidades:

- **Con eje de abscisas** Si $P = (x, y)$ es el punto donde se cortan o intersecan la gráfica de una función f con el eje de abscisas. Luego, por un lado $y = f(x)$ por ser punto de la gráfica y por otro $y = 0$, por estar sobre el eje horizontal. Luego el punto de intersección de la gráfica de f con el eje de abscisas es el caso en que $f(x) = 0$. En este caso, x es un valor del dominio para el cual su imagen por la función f se anula y se lo llama *raíz o cero de la función.* Esto significa que buscar en un gráfico los ceros de una función significa buscar los puntos donde la gráfica corta al eje horizontal.

- **Con eje de ordenadas** Si $P = (x, y)$ es el punto donde se cortan la gráfica de una función f con el eje vertical entonces $x = 0$ por estar sobre el eje vertical e $y = f(0)$ por ser punto de la gráfica. El valor de y que cumple esta condición se lo llama *ordenada al origen de la función.*



En este gráfico $f(x_1) = 0$ y $f(x_2) = 0$, luego x_1 y x_2 son las raíces de f. El valor b es la ordenada al origen, la imagen de 0.

Subconjuntos del dominio cuyas imágenes son positivas o negativas. Dado que las imágenes se representan sobre el eje de ordenadas, para observar cuáles son las abscisas cuyas imágenes son positivas primero hay que observar qué parte de la gráfica de f está sobre el eje horizontal (por "arriba") luego ver sobre el eje horizontal qué valores de x son aquellos cuyas imágenes están en esa región. Ese conjunto se llama *conjunto de positividad* y se define:

$$C^+ = \{x \in \operatorname{Dom} f : f(x) > 0\}.$$

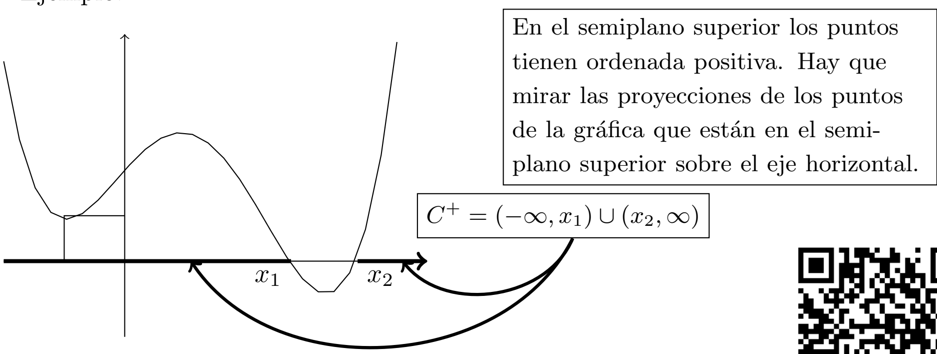
No hay que confundirse, el conjunto de positividad se representa sobre el eje de abscisas. Análogamente el *conjunto de negatividad* se define:

$$C^- = \{x \in \operatorname{Dom} f : f(x) < 0\}.$$

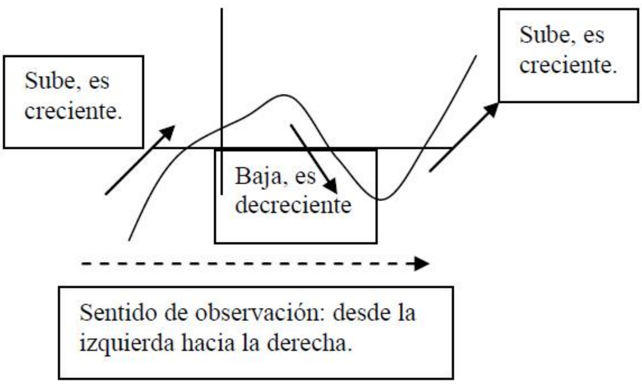
Por último recordemos la definición de "cero" de una función y entonces definimos el "Conjunto de ceros":

$$C_0 = \{x \in \operatorname{Dom} f : f(x) = 0\}.$$

Ejemplo:

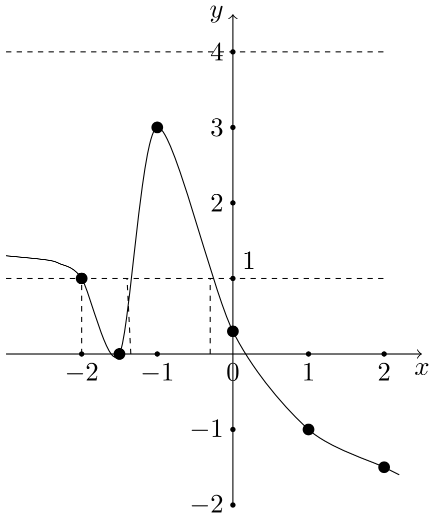


Crecimiento o decrecimiento. Una función es *creciente* en un subconjunto $S \subseteq \operatorname{Dom} f$ cuando para todo par de valores x_1 y x_2 en este conjunto, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$. Análogamente una función es *decreciente* en un subconjunto $S \subseteq \operatorname{Dom} f$ cuando para todo par de valores x_1 y x_2 en este conjunto, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$. El gráfico cartesiano permite observar crecimiento y decrecimiento fácilmente. Si la gráfica de la función, vista de izquierda a derecha, "sube" entonces la función es creciente y si "baja" es decreciente. Para estudiar el crecimiento (o decrecimiento) lo importante es indicar cuáles son los subconjuntos del dominio donde la función es creciente para lo cual hay que mirar las proyección de parte de la gráfica que sube sobre el eje x (o que baja si se quiere ver decrecimiento). En general los subconjuntos de crecimiento, o decrecimiento, de los casos que estudiaremos son intervalos en $\mathbb{R}$. Hay que mirar el crecimiento (o decrecimiento) de la función en cada uno de los intervalos por separado.



Valores de máximo o de mínimo de una función. Cuando una función de trazo continuo cambia su condición de creciente a decreciente a partir de un cierto valor de abscisa a, es porque su imagen, $f(a)$, es mayor que todas las imágenes de los valores cercanos a a. Decimos entonces que en a la función alcanza un valor *máximo relativo* (relativo a valores cercanos de a. Del mismo modo, cuando una función cambia su condición de decreciente a creciente a partir de un cierto valor de abscisa a, es porque su imagen, $f(a)$, es menor que todas las imágenes de los valores cercanos a a. Decimos entonces que *en a la función alcanza un valor mínimo relativo* (relativo a valores cercanos de a) y es $f(a)$.

Ejercicio resuelto 5. A continuación repasaremos lo visto mediante un ejemplo analizando el siguiente gráfico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hay que imaginar que la curva sigue con la tendencia indicada, es decir hacia la derecha, la curva "baja indefinidamente" y hacia la izquierda "sube sostenidamente" sin superar el valor $3,5$, por ejemplo.



Reconocer una imagen. A partir del gráfico, se desea saber si: a)$1 \in \operatorname{Im} f$, b) $4 \in \operatorname{Im} f$.

Se traza una recta horizontal por $y = 1$, vemos que esa recta corta a la curva en tres puntos. Trazando una recta vertical por cada uno de esos puntos de intersección, hasta que corten al eje x, podemos ver o estimar la abscisa de los mismos. En este caso vemos que la abscisa de uno de los puntos es $x_1 = -2$ y estimamos el resto abscisas como $x_2 = -1,4$, $x_3 = -0,3$. Luego decimos que $-1 \in \operatorname{Im} f$ con $f(-2) = 1$, por ser $(-2; 1)$ un punto marcado en el gráfico, y que $f(-1,4) \approx 1$ y $f(-0,3) \approx 1$.

Del mismo modo, para $y = 4$ se traza una recta horizontal. Se observa que dicha recta no interseca a la curva de la gráfica por lo que $4 \notin \operatorname{Im} f$.

Intersección de la gráfica con los ejes. A partir del mismo gráfico se desea estimar los ceros de la función y la ordenada al origen.

Para dar valores de los ceros, simplemente se observan las abscisas donde la curva corta al eje x que son dos: $x_1 = -1,5$, ya que sobre esta abscisa hay marcado un punto de la gráfica en el eje x y $x_2 \approx 0,3$ (este último está estimado luego de dividir al segmento $[0,1]$ en 10 partes iguales). Resulta $C_0 = \{x_1 = -1,5, x_2 \approx 0,3\}$ y los puntos del gráfico tienen por coordenadas: $P_1 = (-1,5;0)$ $P_2 = (0,3;0)$.

Para la intersección con el eje y, observamos dónde la gráfica corta a dicho eje para lo cual miramos el valor de y correspondiente a la abscisa $x = 0$. En este caso está dado como dato que la ordenada al origen es $y = 0,3$, luego el punto de intersección es: $P = (0;0,3)$.

Subconjuntos del dominio cuyas imágenes son positivas o negativas. En el gráfico dado, vemos los valores de imágenes positivas observando sobre qué parte de la recta, el gráfico se mantiene en el semiplano superior al eje x. Esto nos da:

$$C^+ = (-\infty, -1,5) \cup (-1,5, 0,3).$$

Observemos que las raices $x_1 = -0,5$, $x_2 = 0,3$ no están contenidas en el conjunto pues sus imágenes son 0.

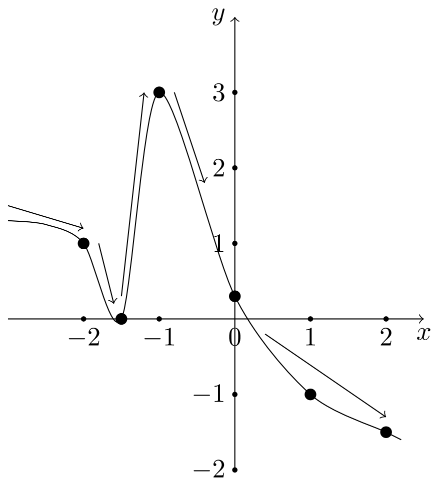
Análogamente, obtenemos el conjunto de valores cuyas imágenes son negativas.

$$C^- = (0,3, \infty).$$

Crecimiento o decrecimiento. Recordemos que para mirar crecimiento o decrecimiento en el gráfico, la lectura debe hacerse en forma conjunta sobre el eje x y sobre el trazo de la curva que representa la gráfica.

Sobre el eje x, se leen los valores en el sentido de crecimiento de los números, de izquierda a derecha: $\longrightarrow$.

Sobre el trazo de la curva debe verse si, en la dirección dada por la lectura de las abscisas, el trazo *sube* $\nearrow$, indicando crecimiento, o baja $\searrow$ indicando decrecimiento.



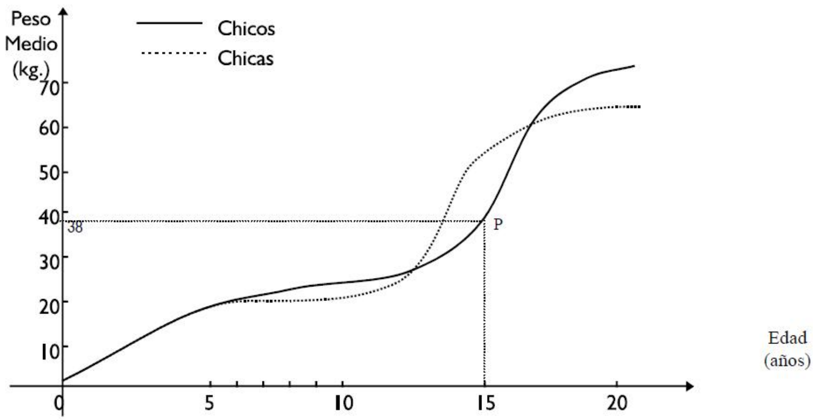
$$\text{Intervalo de crecimiento}: \; I_1 = [-1,5, -1].$$

$$\text{Intervalos de decrecimiento}: \; J_1 = (-\infty, -1,5]; J_2 = [-1, \infty].$$

Valores de máximo o de mínimo de una función. En este ejemplo, vemos que en el valor $x = -1,5$ la función pasa de ser decreciente a creciente. Allí se alcanza un mínimo relativo que es $y_1 = f(-1,5) = 0$. Del mismo modo, en el valor $x_2 = -1$ la función pasa de ser creciente a decreciente, por lo que en $x_2 = -1$ se alcanza un máximo relativo que es $y_2 = f(-1) = 3$

Trabajo Práctico 23

Ejercicio 1. Según surge de un estudio estadístico, el peso medio de los chicos desde que nacen hasta los 20 años viene dado por el siguiente gráfico:



Observando el mismo responder:

(a) Estime el peso medio de las mujeres al nacer. ¿Cuál es el peso medio de los varones de 9 años?

(b) ¿A qué edad tienen las mujeres un peso medio superior a los 40 kg.?

(c) ¿En qué período el peso medio de las mujeres supera al de los varones?

(d) ¿Cuándo ganan peso más rápidamente los chicos? ¿Y más lentamente?

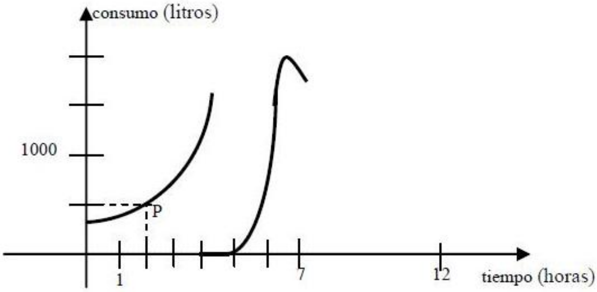
(e) ¿Qué coordenadas tiene el punto P indicado en la gráfica? ¿qué datos indican esas coordenadas?

(f) ¿Qué significan los puntos de intersección? ¿Cuáles son las coordenadas de esos puntos? (dar valores aproximados que surjan de la lectura del gráfico)

(g) Explicar por qué las curvas no cortan el eje de las abscisas.

(h) ¿Para qué edades están definidos los pesos en el gráfico?

Ejercicio 2. Se quiere confeccionar un gráfico que muestra el consumo de agua de una fábrica durante una jornada de trabajo desde las siete de la mañana hasta las cinco de la tarde. Se comenzó a confeccionarlo volcando los datos del período que va desde las siete de la mañana hasta las dos de la tarde.



(a) ¿Cuáles son las coordenadas de P? ¿Cómo se interpretan dichas coordenadas en relación a la situación planteada?

(b) ¿Podría estimar el consumo a las diez de la mañana? Explicar cómo se infiere este dato a partir de la lectura del gráfico.

(c) ¿ En un momento de la mañana hubo un incidente con el aprovisionamiento de agua. ¿Puede decir en qué momento? ¿cuánto duró el incidente?

(d) ¿Completar el gráfico sabiendo que:

- a las tres y media de la tarde el consumo es de mil quinientos litros.
- a las cinco de la tarde el consumo es la mitad del consumo al inicio de la jornada.
- Compare su gráfico con el de su compañero.

(e) Según su interpretación de la situación ¿en cuántos momentos del día el consumo es de 1000 litros?

(f) Según el gráfico que usted dibujó,

- ¿Cuándo es creciente el consumo? ¿Cuándo es decreciente?
- ¿En qué período el consumo fue inferior a 50 litros?

(g) Continuar el gráfico imaginando el consumo de la fábrica durante la noche de esa jornada y durante la jornada de trabajo siguiente (sin incidentes de aprovisionamiento). Para el gráfico completo, indicar el lapso de tiempo representado en el eje x.

Ejercicio 3. La siguiente tabla contiene las temperaturas en grados centígrados registradas durante un día de agosto en San Miguel:

Hora	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Temperatura	9^o	$8,5^o$	8^o	7^o	$5,5^o$	6^o	8^o	12^o	12^o	6^o	$4,5^o$	4^o

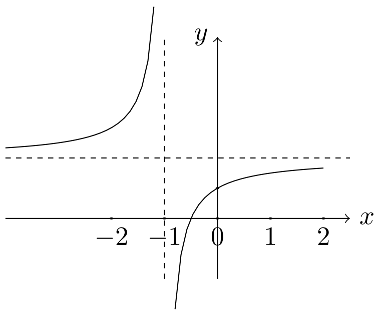
(a) Representar gráficamente en ejes cartesianos los datos.

(b) Estime qué temperatura había a las 12 hs. $30'$. ¿Cómo hizo esa estimación? ¿es la misma estimación que hizo su compañero?

(c) ¿En qué períodos la temperatura fue por lo menos de 8^o?

(d) ¿A qué hora penetró en San Miguel un frente frío ese día? ¿Puede conocer esa hora exactamente o el valor será estimativo?

Ejercicio 4. Observar el siguiente gráfico: ¿Representa una función creciente? Explicar.



Ejercicio 5. Para pensar...

(a) Enunciar alguna proposición (pensarla por cuenta propia) que involucre a la raíz o cero de una función y que sea verdadera.

(b) Leer las siguientes afirmaciones, decir cuál es verdadera o cuál es falsa y por qué:

Si un punto $P = (x, y)$ no pertenece a la gráfica de una función f, entonces $y \neq f(x)$.

Para que una asignación sea función es necesario que cada valor que es imágen sea correspondiente de un único valor del dominio.

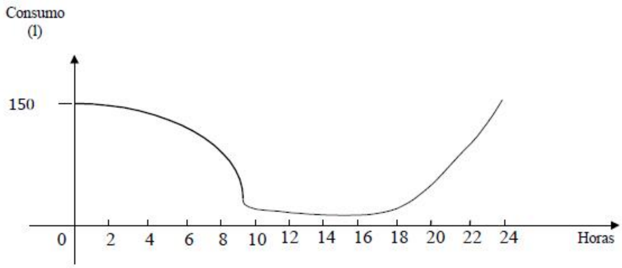
Ejercicio 6. En cada una de las situaciones planteadas en los ejercicios de arriba (Edades de Jóvenes, Temperaturas en San Miguel), indicar:

(a) Cuáles son las variables que se relacionan.

(b) Dominio y codominio de la función de acuerdo al contexto de la situación planteada,

(c) Intervalos de crecimiento, decrecimiento y conjunto de ceros de la función.

Ejercicio 7. El consumo de agua en un boliche viene dado por la gráfica:



(a) ¿Cuándo es nulo el consumo de agua?

(b) ¿Cuándo es creciente el consumo? cuándo decreciente? durante qué horas se alcanzan los valores máximos y mínimos de consumo de agua?

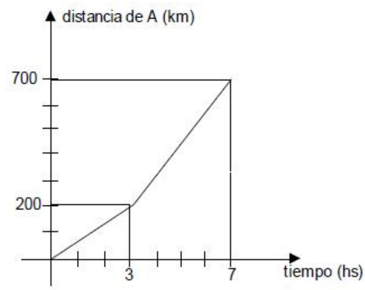
(c) ¿En qué período de tiempo el consumo fue superior a 50 litros?

(d) Escribir el par ordenado que informa sobre el consumo al inicio del registro.

(e) ¿Cuánto vale $f(24)$?

(f) Dibujar un gráfico similar para el consumo de agua de un club de fútbol en un día que hay partido.

Ejercicio 8. En el siguiente gráfico se representa la distancia a una ciudad A de un auto que sale de la ciudad A y se desplaza por una ruta rectilinea hacia la ciudad B. Entre A y B hay 700 km.



Realizar para el mismo viaje el gráfico que representa a lo largo del trayecto

(a) la distancia del auto a la ciudad B.

(b) la distancia del auto a una ciudad C que se encuentra a 200 km de A sobre la misma ruta, entre A y B.

(c) la distancia de un auto a una ciudad C que se encuentra a 200 km de A sobre la ruta que une A con B, pero en sentido contrario al del recorrido del auto.