MÓDULO 2

Proporcionalidad y Geometría

1 Proporcionalidad entre variables

En varias situaciones cotidianas se usan proporciones numéricas, por ejemplo en comparación de formas involucrando medidas, en concentraciones de sustancias, en dosis de medicamentos, en escalas, en porcentajes, etc. Para familiarizarnos con estas situaciones, en esta sección explicaremos los siguientes temas:

1. La definición de proporción.
2. Algunas propiedades de la proporción.
3. Su uso en la resolución de situaciones.
4. Algunas cuestiones relacionadas con proporcionalidad.

Comenzaremos mostrando algunas situaciones en las que se usan las proporciones y su resolución para entender luego la definición y sus posteriores usos.

1.1 Algunas situaciones en las que se usan proporciones.

Cantidad de materia grasa en leche

Ejemplo 1. (Cantidad de materia grasa en leche) Supongamos que de 200 ml se puede extraer 6 g de materia grasa para manteca. ¿Cuántos mililitros serán necesarios para obtener 240 g de materia grasa?

*R*esolución: La resolución más común, que posiblemente el lector intente, es mediante la “regla de tres simple directa”:

$$\begin{array}{ccccc} 6g & \longrightarrow & 200 \text{ ml} & & \\ 240g & \longrightarrow & x & \Longrightarrow & x = \frac{240 \text{ g} \times 200 \text{ ml}}{6 \text{ g}} = 8000 \text{ ml} \end{array}$$

Respuesta: Serán necesarios 8000 ml de leche.

Veamos cuáles son las condiciones del problema que permiten hallar de este modo la solución. Supongamos que siempre que tomemos una muestra de 200 ml de leche la cantidad de grasa es siempre la misma pues se trata de la misma partida del producto (leche), no se alteran las condiciones físico - químicas, la cantidad de grasa no depende del lugar de donde se tome la muestra (si arriba del recipiente o abajo) y es constante por por unidad de medida (1 ml).

Esta relación constante entre la cantidad de grasa y la cantidad de leche prefijada es lo que llamamos "concentración de grasa en leche" y se calcula: $\frac{6}{200}$g/ml.
La concentración entre sustancias aparece como información en varias situaciones de nuestra vida cotidiana. Para hablar de concentración de una sustancia, llamémosla A, es necesario contar con otra sustancia, llamémosla B, que contiene la sustancia A en su composición.

Concentración: la concentración de la sustancia A en B es la cantidad de sustancia A que se encuentra siempre que se tome una cantidad prefijada de sustancia B. En nuestros ejemplos, consideraremos que la concentración es constante.

En este ejemplo, la sustancia A es la grasa y la sustancia B es la leche.

Hay otras maneras de pensar la respuesta a la pregunta formulada en el ejemplo 1:

- En forma multiplicativa, pensando en cuántas veces habría que multiplicar los 6 g para obtener el pan de manteca y ese mismo número multiplicarlo por la cantidad de mililitros. En este caso el número a multiplicar es 40 ya que $40 \times 6g = 240g$, luego se necesitarían 40 medidas de 200 ml y la cantidad de leche es 8000 ml o sea 8 litros.

- En cómo se obtiene la concentración, pensando que el valor de dicha concentración, con las unidades de medida correspondientes, se obtiene dividiendo $\frac{6}{200}$. Si las cantidades consideradas son el peso de la grasa del pan de manteca y la medida del volumen de leche necesaria para obtener el pan, el cociente debe dar el mismo resultado pues suponemos que la concentración se mantiene constante.

$$\text{Concentración de grasa en leche} = \frac{6}{200} = \frac{240}{\text{cantidad de leche para 240 g de grasa}}$$

Puede leerse, *seis es a doscientos como doscientos cuarenta es a la cantidad de leche necesaria para obtener doscientos cuarenta gramos de grasa.* Para no escribir tantas palabras, solemos reemplazar la cantidad que queremos averiguar y que satisface la igualdad planteada con una letra, luego denotamos

$$x = \text{cantidad de leche para 240 g de grasa} .$$

de la cual se sabe de antemano que no es 0. La igualdad de arriba se escribe entonces

$$\frac{6}{200} = \frac{240}{x}$$

Multiplicando miembro a miembro por el valor x se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{6}{200} \cdot x &= \frac{240}{x} \cdot x \\
\frac{6}{200} \cdot x &= 240 \\
x &= 240 \cdot \frac{200}{6} \\
x &= 8000
\end{aligned}$$

Respuesta: La cantidad de leche para 240 g de grasa es de 8000ml. Lo que equivale a 8 litros.

- En la reducción a la unidad, esto es pensar cuántos mililitros se necesitan para obtener un gramo de materia grasa y luego multiplicar por la cantidad de gramos que se desean obtener.

  Luego, por gramo se necesitan $\frac{200}{6}$ ml, la cantidad de gramos deseada es 240 entonces, la cantidad de mililitros se calcula: $\frac{200}{6} \cdot 240 = 8000$.

Dosis de medicamento.

En este ejemplo usaremos nuevamente el dato de la concentración de una sustancia en otra.

Ejemplo 2. Un medicamento pediátrico en jarabe tiene diferentes presentaciones. Un médico prescribe a un bebé una presentación tal que la concentración de su componente activo (amoxicilina) es de setecientos cincuenta miligramos por cada cinco mililitros (en la caja aparece 750 mg/5 ml) y le indica tomar 3 ml cada doce horas. La mamá del bebé le dice al médico que en la casa tienen ese mismo medicamento en otra presentación con concentración de 500 mg por cada 5 ml. ¿Cuál debería ser la dosis considerada en este caso? Dar la respuesta teniendo en cuenta que el dosificador está dividido en ml.

Resolución:

Resolveremos esta situación en forma de tabla, mostrando una forma de pensar el problema (¡no es la única!) cuál es el planteo que responde a lo que se piensa y cómo se resuelven las cuentas de lo planteado.

Explicación	El cociente, o razón, $\frac{750\text{mg}}{5\text{ml}}$ es la concentración del componente activo en jarabe. En este caso, la sustancia A es la amoxicilina y la B el jarabe. El médico le prescribió 3 ml porque pretende que el bebé consuma una cierta cantidad de activo (amoxicilina) en cada toma. Obtenemos esta cantidad teniendo presente que la concentración es constante y que es el cociente entre la cantidad de amoxicilina y la cantidad de jarabe que la contiene, o sea:	
Planteo	$\frac{750}{5} = \frac{\text{cant. amox. en 3 ml}}{3}$	Multiplico ambos miembros por 3, $\text{Cant. amox. en 3 ml} = \frac{750}{5} \times 3 = 150 \times 3 = 450.$
	Debería entonces consumir 450 mg del componente activo en cada toma.	
Explicación	En la segunda presentación, la concentración es $\frac{500\text{ mg}}{5\text{ ml}}$. La cantidad de amoxicilina que el bebé debe consumir es la misma que con la concentración anterior: 450 mg. Para no usar tantas palabras denotamos la *cantidad de jarabe correspondiente a* 450 *mg en la nueva concentración* con la letra x (¡por supuesto podría haber elegido cualquier letra o símbolo!, lo importante es no confundir los significados de los mismos). Dado que la concentración es constante igualamos los respectivos cocientes por los cuales obtenemos la misma.	
Planteo	$\frac{500}{5} = \frac{450}{x}$	despejamos: $\frac{500}{5} \times x = 450$ $x = 450 \times \frac{5}{500}$ $x = 4,5$
Respuesta al problema	*Respuesta:* La cantidad de jarabe en cada toma que se le debe administrar al bebé con la nueva concentración es $4,5$ ml.	

1.2 Definiciones y algunas propiedades

Como vimos, en todas estas situaciones aparecen relacionadas dos cantidades que van variando y que corresponden a medidas de magnitudes prefijadas cuyo cociente se mantiene constante. El siguiente cuadro resume esto.

"Concentración de grasa"		"Dosis de medicamentos"	
Cantidad de leche (ml)	Cantidad de grasa (g)	Cantidad de jarabe (ml)	Cant. de amoxicilina (mg)
200	6	5	750
8000	240	3	450
$\frac{6}{200} = \frac{240}{8000}$		$\frac{750}{5} = \frac{450}{3}$	

Cantidades en cada situación planteada y relación entre ellas.

En cada situación resumida en el cuadro anterior, se observa que los cocientes de las cantidades puestas en fila dan el mismo resultado. Esto está expresado en las igualdades de la última fila.

Escribimos simbólicamente,

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}, \quad \text{con} \quad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0. \tag{1.1}$$

Esta igualdad puede leerse y_1 *es a* x_1 *como* y_2 *es a* x_2. Tradicionalmente los valores y_1 y x_2 son llamados *extremos* y los valores x_1 y y_2 son llamados *medios*.

Proporciones. Una proporción es la igualdad de dos cocientes, o razones, entre cantidades numéricas variables. La expresión simbólica escrita en (1.1), es la forma en que escribimos una *proporción*.

Nota: Observemos (¡Pongamos atención!) que,

- Las variables que intervienen en una proporción son números reales cualesquiera con la condición que los denominadores sean no nulos.
- En la situación de la concentración de grasa, designamos
  - y_1 = cantidad grasa en 200 ml de leche,
  - y_2 = cantidad de grasa en 8000 ml,
  - x_1 =200 ml,
  - x_2 = 8000 ml.

Es decir que con la letra "x" designamos cualquiera de las medidas del volumen de la leche (en ml) y con la letra "y" cualquiera de las medidas del peso de grasa (en gramos); estas letras designan cualquiera de las *cantidades variables* o simplemente *variables.*

- En la situación de la dosis de medicamento, la letra "x" designa cualquiera de las medidas del volumen de jarabe (en ml) y la "y" el peso del componente activo (en mg) correspondiente a esa dosis de jarabe.

- En las situaciones del cuadro anterior tenemos ejemplos de que el cociente $\frac{y}{x}$ es constante.

En las situaciones vistas, los valores numéricos variables corresponden a medidas de magnitudes que resultan *directamente proporcionales*, ellas son:

Magnitud 1	Magnitud 2
Volumen de leche	Peso de grasa
Volumen de jarabe	Peso de componente activo de antibiótico

Magnitudes directamente proporcionales en las situaciones planteadas.

Propiedades

A partir de la definición de proporción simbolizada por

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}, \quad \text{con} \quad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0,$$

se obtienen las siguientes igualdades:

- $y_1 \cdot x_2 = y_2 \cdot x_1$.

  A esta igualdad se llega multiplicando miembro a miembro por $x_1 \cdot x_2$. Esta igualdad suele recitarse *El producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

- $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$, si $y_2 \neq 0$.

  A esta igualdad se llega por la expresión obtenida en el item anterior multiplicándola miembro a miembro por $\frac{1}{x_2 y_2}$.

- $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$, si $y_2 \neq 0$, $y_1 \neq 0$.

  Dado que las razones en la proporción (1.1) son no nulas, se usa el hecho que si dos números son iguales, sus inversos multiplicativos también lo son. También se llega multiplicando miembro a miembro la expresión $y_1 \cdot x_2 = y_2 \cdot x_1$ por $\frac{1}{y_1 y_2}$.

- Para todo r número real $r \neq 0$ se cumple $\frac{y_1}{x_1} = \frac{r \cdot y_1}{r \cdot x_1}$.

  Basta observar que la constante r puede ser simplificada.

1.3 Cuestiones importantes en relación con la proporcionalidad directa.

La constante o razón de proporcionalidad.

Como vimos, para armar una proporción usamos cuatro datos numéricos. Cumplen que el cociente entre pares de esos valores es constante. El valor o resultado del cociente se llama *constante o razón de proporcionalidad.* Denotaremos dicha constante con la letra m. Veamos esto en algunos de los casos vistos:

Situación	Constante de proporcionalidad	Significado en contexto.
"Grasa en leche"	$m = \frac{6}{200} = 0,03$	Se tiene 0,03 gramos de grasa por cada mililitro de leche.
"Dosis de medicamento"		
Presentación 1	$m = \frac{750}{5} = 150$	Se tiene 150 miligramos de amoxicilina por cada mililitro de jarabe.
Presentación 2	$m = \frac{500}{5} = 100$	Se tiene 100 miligramos de amoxicilina por cada mililitro de jarabe.

Constante de proporcionalidad en situaciones planteadas.

Como vemos, en cada caso la constante de proporcionalidad significa "cuánto de la variable del numerador se tiene por unidad de medida de la variable del denominador".

Si se tiene como dato la constante m, se aligera el cálculo de cada cantidad variable que se quiere averiguar, por ejemplo:

¿Cuánta grasa se obtiene de 8000 ml de leche?	Cant. de grasa (en g) $= 0,03 \times 8000 = 240$.
¿Cuánta amoxicilina consume un bebé que toma 7 ml del jarabe de la presentación 1?	Cant. de amoxicilina (en mg) $= 150 \times 7 = 1050$.

Cálculo del valor de una variable conociendo la constante de proporcionalidad

Ejemplo 3. Para una circunferencia cualquiera, su longitud es $L = \pi\, d$, donde d es la longitud del diámetro de la misma. Vemos entonces que

$$\frac{\text{Longitud de circunferencia}}{\text{Longitud de diámetro de circunferencia}} = \frac{L}{d} = \pi.$$

Este valor es constante para todas las circunferencias, lo que muestra que las variables: "longitud de la circunferencia" y "longitud del diámetro de la misma" son directamente proporcionales. La constante de proporcionalidad entre las variables consideradas es $m = \pi$.

Ejemplo 4. En una casa de cambio por $375,80$ pesos (moneda argentina) me dieron 86 dólares estadounidenses. ¿Cuál es la tasa de conversión de una moneda a la otra?.

Una vez fijada la cotización, ésta se mantiene constante (al menos por un rato...)

es decir que siempre que se compre una cierta cantidad de dólares para averiguar cuántos pesos tengo que dar a cambio, necesito multiplicar esa cantidad por un valor fijo (tasa de conversión) que es la constante de proporcionalidad la cual es la cantidad de pesos que se paga por un dólar. Entonces la tasa de conversión es:

$$\text{tasa de conversión} = \frac{375,80}{86} \approx 4,37.$$

Notar que:

- Si se tienen cantidades variables $x \neq 0$ e y proporcionales, existe una constante de proporcionalidad m que se obtiene $m = \frac{y}{x}$ y entonces $y = m \cdot x$.

- Recíprocamente, si una variable se obtiene multiplicando otra por una constante $m \neq 0$, ambas variables son proporcionales, es decir:

$$\text{Si} \quad y_1 = m \cdot x_1 \text{ y } y_2 = m \cdot x_2 \ \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = m \text{ (constante)}.$$

Consideraciones erradas sobre la proporcionalidad directa

- Muchas veces, se dice que las variables son directamente proporcionales: "porque si una aumenta la otra también" o bien "porque si una disminuye la otra también". En general estas **no** son razones correctas para asegurar que las variables son directamente proporcionales. Puede ser que las cantidades que se relacionen aumenten (o disminuyan) ambas y sin embargo las magnitudes no son directamente proporcionales. Por ejemplo, si consideramos el área del cuadrado y la longitud de su lado, vemos que si aumenta el lado aumenta el área, sin embargo estas magnitudes no son proporcionales, basta ver algunos ejemplos en donde no se cumple la proporcionalidad:

Lado del cuadrado	Área del cuadrado
5	25
10	100

  En este caso se da la situación de que cuando aumenta el lado del cuadrado aumenta su área. Sin embargo, $\frac{5}{25} \neq \frac{10}{100}$, es decir que las variables no son directamente proporcionales.

- También es común pensar que si las variables no aumentan ambas o no disminuyen ambas no pueden ser proporcionales. Esto no es cierto cuando trabajamos con números reales en general, ya que si las variables no son todas positivas, las cantidades pueden ser directamente proporcionales y no verificarse que ambas aumentan o disminuyen a la par. Por ejemplo, las siguientes cantidades

Variable_1	Variable_2
10	-5
-20	10

  son directamente proporcionales ya que $\frac{-5}{10} = \frac{10}{-20}$. Sin embargo en la fila 1, $10 > -5$ y en la fila 2, $-20 < 10$.

Proporcionalidad directa y regla de tres.

La regla de tres directa es simplemente una manera útil de disponer los datos de un problema para realizar la cuenta que nos conducirá al resultado buscado *siempre y cuando sepamos que las variables del problema son directamente proporcionales.*

En la situación de la dosis de medicamento, en la presentación 1, las variables x, medida de volumen de jarabe, e y, medida de peso de amoxicilina, son directamente proporcionales. Dados los datos (sin unidades de medida) $x_1 = 5$, $y_1 = 750$, $x_2 = 3$

se desea obtener la cantidad y_2. Usando la primera de las propiedades enunciadas podemos calcularla:

$$\frac{750}{5} = \frac{y_2}{3} \Rightarrow 750 \cdot 3 = y_2 \cdot 5 \Longrightarrow y_2 = \frac{750 \cdot 3}{5}.$$

La disposición en la regla de tres resulta:

$$\begin{array}{ccccc} 5 & \longrightarrow & 750 & & \\ 3 & \longrightarrow & y_2 & \Longrightarrow & y_2 = \frac{750\cdot 3}{5} \end{array}$$

Nota: Insistimos en que para que sea válido el uso de la regla de tres simple directa, antes de utilizarla es necesario comprobar, o asegurarse mediante lo expuesto en la situacin del problema, que las variables son directamente proporcionales.

La razón como un modo de comparación.

Cuando se plantea el cociente o razón entre dos cantidades, por ejemplo entre las cantidades $25,6$ y $9,3$, la razón es $\frac{25,6}{9,3} \approx 2,75$. Podemos interpretar este resultado notando que $25,6$ es mayor que el doble de $9,3$ y esto es una forma de establecer un modo de comparación entre esas dos cantidades. Nos preguntamos ahora si las cantidades $27,8$ y $8,5$ son proporcionales a las anteriores. Una manera rápida de decidir, mentalmente casi sin hacer cuentas, es viendo que $27,8$ es más que el triple de $8,5$ y por lo tanto los cocientes entre los pares propuestos de cantidades no son iguales, más precisamente:

$$\frac{25,6}{9,3} \approx 2,75; \quad \frac{27,8}{8,5} \approx 3,27 \Longrightarrow \frac{25,6}{9,3} \neq \frac{25,6}{9,3}.$$

y entonces no son proporcionales.

Cuando hablamos de los aumentos de precios y queremos saber sobre nuestro poder adquisitivo en relación con algunos productos, también hacemos este tipo de comparaciones. Por ejemplo, en el 2009 una persona inició la construcción de su casa y el valor de una bolsa de cemento era de 17 pesos; en el 2011 valía 34, es decir que aumentó *al doble*. Sin embargo, el sueldo de la persona desde el 2009 al 2011 no aumentó *al doble*, por lo que su poder adquisitivo para la construcción de su vivienda disminuyó. En este caso las variables son el precio de la bolsa de cemento y el sueldo; vemos que la razón entre los precios del cemento es mayor que la razón entre los sueldos por lo que concluimos que poder adquisitivo disminuyó.

1.4 Porcentaje y proporcionalidad

Vimos en la sección 1.3 del capítulo **??**, que el porcentaje puede representarse como una fracción y viceversa. Por ejemplo el 20% de una cantidad es $\frac{1}{5}$ de esa cantidad ya que $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. La equivalencia de números racionales puede ser vista también como una proporción. En el caso del porcentaje las cantidades intervinientes las consideramos positivas.

Ejemplo 5.

- 3 es el 25% de 12 ya que $\frac{3}{12} = \frac{25}{100}$. Aquí la razón inicial es $\frac{3}{12}$ y como vemos el numerador de la razón de denominador 100 con la cual forma la proporción es 25.
- El $12,5\%$ de 72 es 9 ya que $\frac{12,5}{100} = \frac{9}{72}$. Como vemos, en las razones que forman la proporción no sólo intervienen números enteros.

Porcentaje como razón. Dada una razón o cociente de cantidades positivas, el porcentaje es el numerador de aquella razón cuyo denominador es 100 que resulta proporcional a la razón dada.
El porcentaje responde a la siguiente proporción:

$$\frac{\text{porcentaje}}{100} = \frac{\text{parte de la cantidad total}}{\text{cantidad total}}.$$

Profundicemos la relación entre porcentaje y proporciones mediante los siguientes problemas.

Ejemplo 6. Ignacio y Clara juntaron \$255 para hacer un regalo a su amigo Claudio. Si Clara aportó \$150, ¿qué porcentaje del monto total aportó? ¿qué porcentaje aportó Ignacio?

Resolución: La parte aportada por Clara puede ser expresada mediante la razón: $\frac{150}{255}$. Al expresarlo en porcentaje (en tanto por ciento) buscamos la razón, con denominador 100, que también represente esa parte, planteamos entonces la siguiente proporción:

$$\frac{x}{100} = \frac{150}{255},$$

obteniendo, $x = \frac{150}{255} \times 100 \approx 58,82$. Este valor de x está aproximado con dos decimales. Clara aportó el $58,82\%$. Ignacio aportó la parte restante, es decir si consideramos el total representado en la cantidad 100, lo restante será $100 - 58,82 = 41,18$. También puede obtenerse pensando que Ignacio aportó $255 - 150 = 105$ y entonces el valor del porcentaje se calcula planteadno la siguiente proporción: $\frac{x}{100} = \frac{105}{255} \approx 41,17$. En rigor los dos procedimientos deberían conducirnos al mismo resultado, la diferencia en los centésimos es por la aproximación realizada.

Respuesta: Aproximadamente, Clara aportó el $58,82\%$ e Ignacio aportó el $41,17\%$.

Ejemplo 7. (Distinguir la conveniencia de la oferta.) Antes de programar sus respectivos aumentos, el almacén “Don Cholo” y el almacén “Carlitos”, que venden mercadería al peso, vendían sus productos al mismo precio. Luego el almacén “Don Cholo” decidió vender el kilogramo un 15% más caro, mientras que en “Carlitos”, decidieron vender un 15% menos del producto al mismo precio que vendían el kilo. ¿Dónde compraría un cliente ahorrativo?

Resolución: Resolveremos este problema distinguiendo los pasos.

Como vemos, no sabemos el precio inicial de cada producto. Lo usual es pensar en un producto en particular, por ejemplo las lentejas, y se piensa un precio inicial, por ejemplo, 4 pesos.

Explicación	Si “Don Cholo decide vender un 15% más caro, al precio del kilogramo de lentejas, que es \$4, hay que sumarle el 15% de ese precio.	
Planteo	$4 + \frac{15}{100} \cdot 4$	$4 + 0,6 = 4,6$
Explicación	En el caso de “Carlitos”, el precio \$4 es para un 15% menos de un kilo, el cual debe averiguarse.	
Planteo	$1 - \frac{15}{100} \cdot 1$	$1 - \frac{15}{100} \cdot 1 = \frac{85}{100}$, lo que equivale a 850 gramos.
Explicación	Entonces \$4 es el precio de 850 gramos. Para poder comparar los precios entre sí debemos referirlos a un mismo peso, por ejemplo ambos a un kilogramo. Luego hay que calcular el precio de un kilo del almacén “Carlitos al que denotamos con la letra x. Para ello hay que tener en cuenta que una vez fijado el aumento, las variables: “peso de las lentejas” y “precio de lo pesado” son proporcionales y entonces podemos obtener el precio por kilo usando proporciones o regla de tres simple directa	
Planteo	$\frac{4}{0,85} = \frac{x}{1}$	Luego $x = \frac{4}{0,85} \approx 4,70$. Esta aproximación es realizada por truncamiento, entonces $4,70 \leq \frac{4}{0,85}$.
Explicación	Ahora hay que comparar los dos valores. El más conveniente es el menor. Por las cálculos realizados, $4,6 < 4,7 < \frac{4}{0,85}$.	
Respuesta parcial	Queda claro que en el caso de las lentejas conviene comprar en el almacén “Don Cholo”.	

Explicación	¿Qué sucede con el resto de los productos? Deberíamos repetir lo pensado y planteado pero ahora refieriéndonos a un precio p, que es variable según el producto que se venda.	
Planteo	$$p + \frac{15}{100} \cdot p$$	Al desconocer p, no tendremos un resultado numérico, por factor común: $(1 + \frac{15}{100}) \cdot p = (\frac{115}{100}) \cdot p = 1,15 \cdot p$. El resultado depende de p.
Explicación	En el caso de "Carlitos", el precio p es para un 15% menos de un kilo, el cual se averigua del mismo modo que antes resultando entonces $0,85$kg. Entonces, para el almacén "Carlitos" p es el precio de 850 gramos. Para poder comparar los precios entre sí debemos referirlos a un mismo peso, por ejemplo ambos a un kilogramo. Luego hay que calcular el precio de un kilo del almacén "Carlitos", al que llamamos p'. Dado que las variables: "peso de las lentejas y "precio de lo pesado son proporcionales, podemos obtener el precio por kilo usando proporciones o regla de tres simple directa.	
Planteo	$$\frac{p}{0,85} = \frac{p'}{1}$$	Luego $p' = \frac{p}{0,85}$.
Explicación	Ahora hay que comparar los dos valores, que dependen de p para saber cuál es el mayor. ¿$1,15 \cdot p$ es mayor que $\frac{p}{0,85}$?. Notar que $\frac{p}{0,85} = \frac{1}{0,85} \cdot p$. Como p es un número positivo, ya que representa el precio inicial del kilo de lentejas, podríamos sólo comparar los números multiplicados por p. *	
Planteo	¿$1,15$ es mayor que $\frac{1}{0,85}$?	Realizando la cuenta en la calculadora, vemos que $\frac{1}{0,85} \approx 1,1764$, luego comparando los números decimales $$1,15 < 1,1764 < \frac{1}{0,85}.$$
Respuesta del problema	*Respuesta:* Conviene comprarle a "Don Cholo" que aumenta el precio un 15%.	

Ejemplo 8. (Cómo discriminar el IVA) El IVA es el Impuesto al Valor Agregado. Es un impuesto que paga el consumidor final de un artículo, que se compra en un comercio o supermercado, y el monto resultante de aplicar ese impuesto es rendido al

Estado por los comerciantes que participan en la cadena de comercialización de dicho artículo.

El precio a consumidor final de un artículo, es decir lo que se paga cuando se compra el mismo, resulta del valor que el comerciante final determina más el IVA, que en nuestro país es del 21%. Si un comerciante cobra 100 pesos por la venta de un producto, el precio a consumidor final de ese producto debe ser de 121 pesos pues 21 pesos serán retenidos por el Estado en concepto de IVA. Es por eso que muchos comerciantes tienen una doble lista de precios, el precio al cual cobran el producto, el que muchos llaman *precio de lista o precio neto al público*, y el monto que resulta de sumar a dicho precio el IVA, el *precio a consumidor final.* De acuerdo a lo descripto tenemos las siguientes cuestiones a resolver.

(a) ¿Cuál es el precio a consumidor final que debería estipular un comerciante que tiene un precio de lista de 210 pesos?

(b) ¿Cuál es el precio a consumidor final que debería estipular un comerciante si quiere obtener una ganancia del 20% sobre el precio de un producto por el cuál pagó $14,50$?

(c) Calcular el precio de lista, determinado por un comerciante, por la venta de un artículo cuyo precio a consumidor final es de \$150.

(d) Si el precio a consumidor final de un par de zapatos es 350, ¿cuál es el monto por el cuál el comerciante pagará un cierto impuesto al Estado en concepto de IVA por ese par de zapatos? (Esto se llama discriminar el IVA).

Resolución:

(a) Para resolver el primer item, basta obtener el porcentaje por IVA y sumarlo al precio dado, es decir:

$$21\% \text{ de } 210 \text{ es } \frac{21}{100} \cdot 210 = 44,10 \Longrightarrow \text{Precio final} = \$210 + \$44,10 = \$254,10.$$

(b) Para resolver este item podríamos obtener primero el valor de precio de lista. Este precio es lo que el comerciante quiere cobrar por el artículo. Si quiere ganar un 20% sobre el valor $14,50$ el precio de lista es: $14,50 + 20\% de 14,50$, es decir: $14,50 + \frac{20}{100}14,50$ sacando factor común $14,50$ esta cuenta se escribe también $1,20 \cdot 14,50 = 17,40$. A este precio de lista hay que agregarle el IVA, resultando entonces: $17,40 + \frac{21}{100}17,40 = 1,21 \cdot 17,40 = 21,054$.

Nota: Repitiendo el último procedimiento, podemos ver para un caso general, si p_ℓ es el precio de lista, el precio a consumidor final es $p_\ell + \frac{21}{100}p_\ell = (1 + \frac{21}{100})p_\ell = 1,21 \cdot p_\ell$. Luego, el precio a consumidor final se obtiene en forma abreviada por el siguiente cálculo:

$$\text{Precio consumidor final} = 1,21 \cdot \text{Precio de lista}$$

(c) En este item, se quiere ir "al revés" pues se tiene el precio al consumidor final el cual, según lo dicho anteriormente, se obtuvo a partir de un precio de lista p_ℓ por el siguiente cáculo $1,21 \cdot p_\ell = 150$. Luego el precio de lista es $p_\ell = \frac{150}{1{,}21} \approx 123,96$.

(d) Por último, para discriminar el monto del IVA, primero habría que calcular el precio de lista y de eso obtener el 21%. Al igual que en item anterior, obtenemos el precio de lista que es $p_\ell = \frac{350}{1{,}21} \approx 289,26$ y el monto que debe discriminarse para el impuesto al Estado es 21% de $289,26 \approx 60,75$.

Trabajo práctico 13

Ejercicio 1. Una de las presentaciones de la droga fluticasona es en forma de spray acuoso nasal. Según la información presentada en el frasco, la concentración es 6 ml/6,18 g, el frasco contiene 60 dosis y cada dosis de suspensión contiene 0,050 mg del producto. Indicar la cantidad de ml de suspensión que contiene el frasco.

Ejercicio 2. En el supermercado La Esquina, el sachet de 900 g de yogur bebible cuesta \$7 y el sachet de 1, 3 kg cuesta \$9. ¿Puede decirse que las variables "cantidad de yogur" y "precio del yogur" son proporcionales?

Ejercicio 3. Tres profesores, Marcela, Cristina y Manuel han dictado conjuntamente un curso de ingreso intensivo de seis semanas por lo que han percibido 2000 pesos. Marcela y Cristina dictaron el curso durante 1 semana cada una, mientras que Manuel lo dictó durante 4 semanas. ¿Cuánto dinero corresponde a cada uno?

Ejercicio 4. Un vendedor ambulante dice que tiene una ganancia de 15% de la venta. Cada producto lo vende a \$5. ¿Cuántos productos debe vender para tener una ganancia neta de por lo menos \$80?

Ejercicio 5. Según la información nutricional indicada en el envase de flan en polvo de una cierta marca, 7,5 g del producto contienen 51 mg de sodio y estos aportan el 2% del valor diario recomendado para la dieta de un adulto. ¿Cuánto sodio contienen 60 g del polvo? ¿Qué porcentaje del valor diario recomendado representa?¿Cuál es la constante de proporcionalidad que relaciona las variables cantidad de sodio y cantidad de polvo para preparar flan?

Ejercicio 6. Planeamos hacer un viaje desde Argentina a Brasil. No sabemos si llevar dólares y cambiar allá o llevar directamente reales. La cotización del dólar en Brasil es tal que por 1 dólar se paga 1, 7121 reales. En Argentina la cotización del dólar es la dada en el ejemplo de la sección 1.3 (donde se habla sobre la constante de proporcionalidad) y 80 reales valen 211, 20 pesos. ¿Con qué moneda conviene viajar?

Ejercicio 7. Un medicamento pediátrico en jarabe tiene una concentración de 15 mg/5ml de componente activo. La dosificación recomendada está en el rango de

$$1,2 \text{ a } 1,6\text{mg/kg/día},$$

(1,2 a 1,6 mg de componente activo por cada kilogramo del niño, en el día). Un médico determina una dosis de $2,5$ ml de jarabe tres veces al día para un niño de 25 kg. ¿Es una prescripción adecuada?. ¿Cuál sería la prescripción adecuada para un niño de 35 kg si el jarabe tiene el doble de concentración?.

Ejercicio 8. Uno de los países de mayor porcentaje de IVA del mundo es Suecia, con 25% (aunque hay algunos productos con procentaje reducido). Un consumidor final paga por un lavarropas $3892,80$ coronas suecas (alrededor de 569 dólares).

(a) ¿Cuál es el monto que hay que discriminar por IVA?

(b) Alicia dice que el monto discriminado es el 25% del precio pagado por el consumidor final y Hugo dice que cree que no es así pero no lo puede explicar. ¿Podrías dar un argumento que avale la posición correcta?

Ejercicio 9. Uno de los elementos del control de la rendición de IVA que tienen en Argentina los "sabuesos" (inspectores de la DGI) es la facturación por tickets fiscales que realiza un comercio. En esos tickets figura sólo el precio a consumidor final. Dar un procedimiento, corto y eficiente, para calcular qué porcentaje del precio a consumidor final representa el monto discriminado por IVA.

Ejercicio 10.

(a) Mostrar, mediante un ejemplo distinto al dado en la explicación, variables relacionadas que aumenten ambas pero no sean directamente proporcionales.

(b) Averiguar en otras disciplinas (Economía, Física, etc.) cuáles magnitudes son directamente proporcionales y mostrar por qué lo son. Si es posible dar una intepretación de la constante de proporcionalidad según el contexto.

(c) Si dos variables son directamente proporcionales y una de ellas se duplica, ¿qué sucede con la otra? Justifique su respuesta.

(d) En el ejemplo de la sección 1.4, donde se estudia la conveniencia de la compra en almacenes, si en lugar de considerar la cantidad 15% en ambos almacenes, se considerara cualquier otro porcentaje. ¿Cambiaría la conveniencia? Justifique su respuesta.

Ejercicio 11. Responder y explicar. Responder y justificar la respuesta: Si te informan que dos variables con valores no negativos dependen entre sí de modo tal que si una aumenta la otra también, puedes afirmar que ambas son directamente proporcionales?

2 Proporciones en triángulos rectángulos.

La altura de la torre eléctrica.

Ejemplo 9. Andando por las rutas argentinas habrán visto las torres gigantes que sostienen los cables de alta tensión que trasladan la energía eléctrica a nuestros hogares. Esas moles metálicas se ven tan tan altas...¿cuánto medirán?...A continuación mostraremos un método que nos permite estimar su altura.

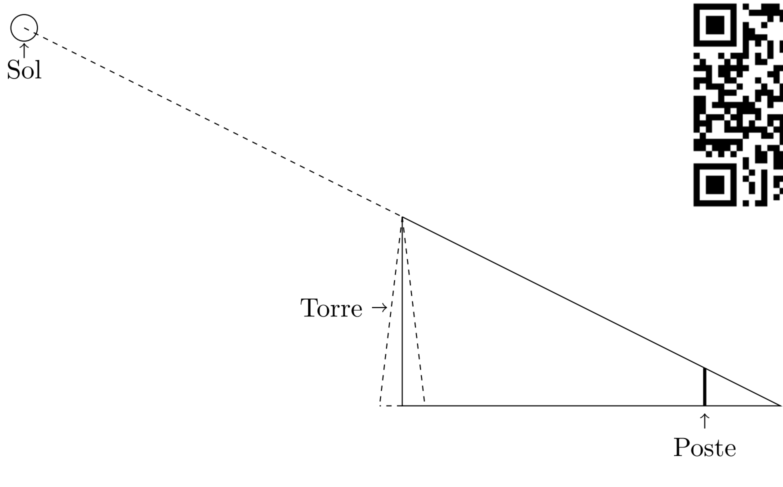
En un día soleado, en un momento determinado del día, es fácil ver la sombra de una torre sobre el terreno. Ésta se forma por un rayo de sol que incide en forma oblicua desde la punta de la torre hasta el terreno (hacer un dibujo de lo descripto). Pensemos la sombra de la torre como si fuera un segmento con origen en el punto A, en la base de la torre, y extremo B, en el final del rayo. Tomamos un poste cuya altura conocemos y lo ubicamos verticalmente en algún punto del segmento $\overline{AB}$ de modo que la nueva sombra del poste tenga el mismo extremo B.

El método para calcular la altura de la torre se basa en que dicha medida y la longitud de su sombra son valores *proporcionales* a la altura del poste y la longitud de su correspondiente sombra

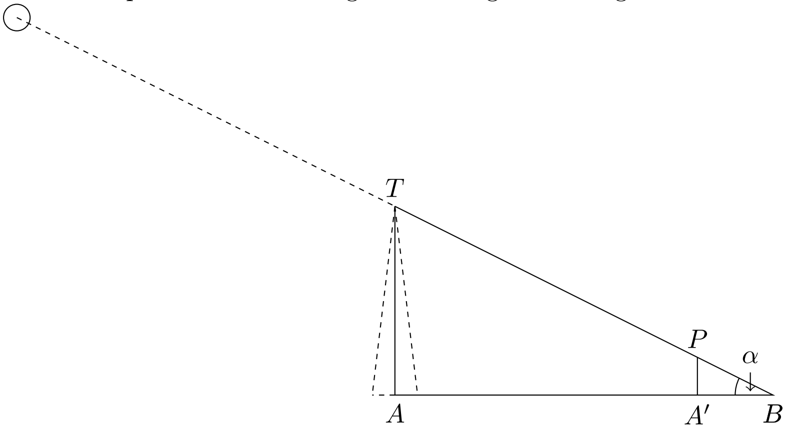
$$\frac{\text{Altura de torre}}{\text{long. de sombra de torre}} = \frac{\text{Altura de poste}}{\text{long. de sombra de poste}}.$$

Las sombras, de la torre y del poste, imaginándolas como segmentos, y la altura del poste son relativamente fáciles de medir. A partir de la proporción de arriba se puede calcular la altura de la torre.

¿Qué condiciones son necesarias para poder aplicar este método? Para responder esta pregunta pensemos en qué se mantiene fijo y qué puede variar. (Mirar el dibujo y pensar antes de seguir leyendo...)



Fijado un cierto momento del día, la sombra de la torre y el ángulo de incidencia del rayo del sol en el punto B también están fijos. Llamamos α al ángulo. La altura del poste puede variar (dado que al poste lo elegimos nosotros) y al pedir que la sombra del poste termine en B estamos imponiendo la condición que el ángulo de incidencia del rayo solar que pasa por la cima del poste también sea α. Planteando la situación geométrica quedarían dos triángulos rectángulos del siguiente modo:



Notar que:

- Los triángulos rectángulos determinados, TAB y $PA'B$, tienen sus ángulos agudos iguales. Basta recordar que por propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, el ángulo agudo restante se calcula:

$$180^o - (90^o + \alpha) = 90^o - \alpha.$$

  El ángulo restante es el complemento de α. Esto puede ser generalizado para cualquier par de triángulos rectángulos, basta con que tengan un ángulo agudo igual para que los restantes sean iguales entre sí .

- Tomando como referencia el ángulo α en ambos triángulos, en el triángulo TAB el lado TA es opuesto α; en el triángulo $PA'B$ el lado PA' es el opuesto. Los lados AB y $A'B$ son lados adyacentes a α respectivamente y TB y PB son las hipotenusas de los respectivos triángulos considerados.

En los triàngulos rectángulos TAB y $PA'B$ estamos en condiciones de usar la siguiente propiedad que relaciona los lados de triángulos rectángulos.

Proporcionalidad entre lados de triángulos rectángulos: Si dos triángulos rectángulos cualesquiera tienen un ángulo agudo igual (miden lo mismo) entonces los pares de lados de ambos triángulos que guardan la misma posición respecto a dicho ángulo, son proporcionales.

Importante: La propiedad enunciada es la que corresponde a triángulos rectángulos *semejantes*. Esta propiedad vale en general para cualquier par de triángulos, sean o no rectángulos, cuando los mismos tienen sus ángulos respectivamente iguales. En este caso los llamamos triángulos semejantes. Podemos ver que éstos conservan la misma forma. Vale en general que en triángulos semejantes cualesquiera, los lados que guardan la misma posición respecto a ángulos iguales, son proporcionales.

La propiedad enunciada, aplicada a los triángulos considerados, nos permite armar la siguiente proporción:

$$\frac{TA}{AB} = \frac{PA'}{A'B} \tag{2.2}$$

de la cual podemos obtener la altura de la torre: $TA = \frac{PA'}{A'B} \cdot AB$ a partir de longitudes que podemos efectivamente medir.

La constante de proporcionalidad que resulta de lo planteado en (2.2) depende del ángulo de incidencia de los rayos solares, es decir de α. En otro momento del día podremos armar la proporción con las medidas de los segmentos determinados y el planteo de la proporción es análogo, pero la constante de proporcionalidad tendrá otro valor.

Ejemplo 10. Si el método anterior se aplica con un poste de 2m de alto el cual proyecta una sombra de $2,86$m y sabiendo que la sombra de la torre es de $78,54$m entonces:

$$\frac{\text{altura de torre}}{78,54} = \frac{2}{2,86} \Longrightarrow \text{altura de torre} = \frac{2}{2,86} \cdot 78,54. \Longrightarrow a_t = 54,92 \approx 55$$

En este ejemplo, la constante de proporcionalidad se obtiene del siguiente modo

$$\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{2}{2,86} \approx 0,699.$$

2.1 Las relaciones trigonométricas.

Resolvimos la situación anterior gracias a la *proporcionalidad de lados de triángulos semejantes*. Esto nos permite obtener además otras constantes de proporcionalidad haciendo intervenir los distintos lados. Determinamos tres constantes de proporcionalidad entre lados de triángulos rectángulos semejantes. Éstas son tres de las principales *relaciones trigonométricas correspondientes a un ángulo agudo α de un triángulo rectángulo*. Ellas son:

$$\text{coseno de } \alpha: \quad \cos\alpha = \frac{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha}{\text{longitud de hipotenusa } \alpha}.$$

$$\text{seno de } \alpha: \quad \sin\alpha = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de hipotenusa } \alpha}.$$

$$\text{tangente de } \alpha: \quad \tan\alpha = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha}.$$

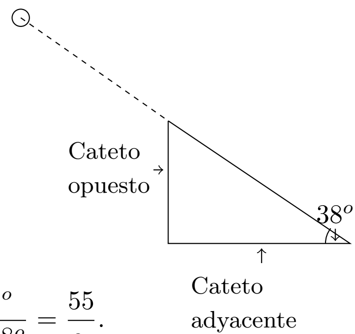
Estos valores están tabulados para distintos ángulos agudos y pueden calcularse por calculadora.

Cabe aclarar que los valores resultantes de los cocientes planteados no tienen unidades de medidas (se dice que son *adimensionales*) pues las medidas que se consideran en dichas razones se obtienen cuando las cantidades están expresadas en la misma unidad de medición.

Ejemplo 11. (Cálculo de uno de los lados conociendo el ángulo o el valor de alguna relación trigonométrica):

- Si el ángulo de incidencia del rayo solar es de 38^o. ¿Cuál es la sombra que proyecta la torre de 55 m de alto?

  Hagamos un esquema de un triángulo rectángulo, observemos los datos y lo que queremos calcular.
  Vemos que los lados involucrados son el cateto opuesto (la altura de la torre) y el cateto adyacente (la longitud de la sombra), la relación que se usa es la tangente del ángulo. El planteo es:

  $$\tan 38^o = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } 38^o}{\text{longitud de cateto adyacente a } 38^o} = \frac{55}{s_t}.$$

  Para obtener el valor de $\tan 38^o$, usamos la calculadora científica. En primer lugar verificamos que el modo de la calculadora sea DEG, que corresponde a los grados sexagesimales con los que mediremos los ángulos. Al apretar la tecla de tangente (dependiendo de la calculadora puede ser tg o tan) y luego ingresar el número "38" se obtiene un número que aproximamos con cuatro cifras decimales:

  $$\tan 38^o \approx 0,7812.$$

  Se calcula sombra de torre $= \frac{55}{\tan 38^o}$. Este cociente se realiza en la calculadora ingresando el "55" dividido por "tan" "38"y vale sombra de torre $\approx 70,396$.

- ¿Cuál será la longitud del rayo incidente desde la cima de la torre anterior al suelo correspondiente a la inclinación 38^o?

  En este caso, la relación que debemos usar es seno ya que conviene siempre usar los datos iniciales.

  $$\sin 38^o = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } 38^o}{\text{longitud de hipotenusa}} = \frac{55}{\text{hip}} \Longrightarrow \text{hip} = \frac{55}{\sin 38^o}$$

  Luego, la longitud del rayo incidente es hipotenusa $\approx 89,33$.

Ejemplo 12. (Cálculo del ángulo conociendo el valor de alguna de las relaciones trigonométricas) ¿Cuál es el ángulo de incidencia del rayo solar si para la torre de 55m se ha medido una sombra de 75m.?

En este caso conocemos las longitudes de los catetos con los que puede obtenerse la tangente del ángulo. Llamamos α al ángulo de incidencia, desconocido en este caso.

$$\tan\alpha = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha} = \frac{\text{altura de torre}}{\text{sombra de torre}} = \frac{55}{75}.$$

En este caso, para averiguar el ángulo agudo, usamos la calculadora: activamos la tecla de "inversa",luego la tecla "tan" de la tangente e ingresamos entre paréntesis el valor ($\frac{55}{75}$), (¡ojo!, dependiendo de la calculadora, los pasos pueden estar dados en otro orden) obteniendo el valor aproximado $36,25$. Este valor es la medida, en grados sexagesimales, del ángulo cuya tangente ingresamos. Para verlo en "grados, minutos y segundos sexagesimales", apretamos la tecla de conversión (explorar en la calculadora personal) que nos dará el siguente resultado: $\alpha \approx 36^o 15'$

Relación entre la tangente de un ángulo, el seno y el coseno.

Las definiciones introducidas en 2.1 y la simplificación de razones, nos permiten deducir que:

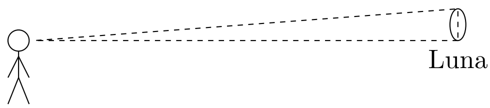
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de hipotenusa}}}{\frac{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha}{\text{longitud de hipotenusa}}} = \frac{\text{longitud de cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de cateto adyacente a } \alpha} = \tan\alpha$$

Quiere decir que el valor de la tangente de un ángulo está relacionado con el del seno y el coseno del mismo.

2.2 Problemas resueltos y orientados.

Ejercicio resuelto 1. (Distancia de la Tierra a la Luna) El radio de la Luna es de 1738 km y si observamos la Luna desde la Tierra contemplamos su radio bajo un ángulo de elevación de $0,25^o$. ¿Cuál es la distancia entre la Luna y la Tierra?

Resolución:
Cuando observamos su radio bajo un ángulo de elevación, imaginamos que podemos ubicar el centro del círculo visible de la luna y que el segmento que une el observador con dicho centro, forma con el radio de dicha esfera un ángulo recto.



Queda así determinado un triángulo rectángulo con los dos segmentos que forman el ángulo de elevación y el radio. Calculemos la longitud del segmento que une el ojo del observador con el centro, que es cateto adyacente al ángulo dado

$$\tan 0,25^o = \frac{r}{\text{cateto adyacente}}$$

entonces,

$$\text{cateto adyacente} = \frac{1738 \text{ km}}{\tan 0,25^o} \approx \frac{1738 \text{ km}}{0,00436} \approx 398623\text{km}.$$

Como imaginamos la Luna esférica, deberíamos restarle la longitud del radio para obtener una aproximación de la distancia de la Tierra a la superficie lunar:

Respuesta: La distancia de la Tierra a la superficie de la Luna es, aproximadamente, de 396885 km.

En la actualidad se sabe, por medición de la velocidad de ida y retorno de un rayo laser, que el valor que mejor aproxima la distancia de la Tierra a la superficie de la Luna es de 384403 km.

Ejercicio resuelto 2. Dado un triángulo, se sabe que la medida de un lado es $10cm$, de otro lado es $6cm$ y el ángulo agudo,γ, comprendido por ellos, tiene tangente $\tan\gamma = \frac{4}{3}$. ¿Puede calcular las medidas de todos los ángulos del triángulo y del lado restante?

Para resolver este ejercicio conviene hacer una construcción auxiliar de un triángulo rectángulo que comparta un lado y el ángulo dato con el triángulo cuyos datos conocemos. Esta construcción del triángulo rectángulo la hacemos porque sobre este tipo de triángulos sabemos calcular ángulos y lados y queremos saber si estos cálculos pueden ayudarnos (a esta altura de la resolución no sabemos cuánto nos ayudarán).

Recomendamos que el lector haga su propia figura a partir de la siguiente explicación.

Denotando al triángulo por sus vértices, ABC, consideremos que $AB = 10$ cm, $AC = 6$ cm y del ángulo $\widehat{BAC} = \gamma$ conocemos su tangente. Una posible construcción sería trazar una perpendicular al lado $\overline{AC}$ por el vértice C. Esa perpendicular cortará a la semirrecta que contiene al lado AB en un punto B'.
Por construcción, el triángulo rectángulo $B'CA$ (auxiliar) comparte con BCA el ángulo agudo γ y el lado $AC = 6cm$. Con los datos dados podemos calcular el cateto opuesto a γ, que es el lado $B'C$.

$$\tan\gamma = \frac{B'C}{AC} \Longrightarrow B'C = \tan\gamma \cdot AC \Longrightarrow B'C = \frac{4}{3} \cdot 6\text{cm} = 8\text{cm}.$$

Luego, aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $B'CA$, tenemos que

$$AB' = \sqrt{B'C^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

Es decir que ambos segmentos, AB y AB' miden 10 cm. Además estos segmentos tienen a A extremo común y, por cómo fue construido el triángulo auxiliar $B'CA$, el punto B' pertenece a la semirrecta $\overrightarrow{AB}$. Luego ¡son el mismo segmento!. Los triángulos ABC y $CB'A$ comparten el ángulo γ, con vértice en A, el lado $\overline{AC}$ y el lado $\overline{AB}$. Cuando dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido que miden lo mismo, el resto de los lados y ángulos miden los mismo (por el primer criterio de congruencia de triángulos).

Entonces el triángulo ABC es rectángulo y podemos, con los datos dados, calcular lo pedido.

$$AB = 10 \text{ cm} \ ; \quad BC = 8 \text{ cm} \ : \quad AC = 6 \text{ cm} \ .$$

Para calcular los ángulos, usamos la inversa de la relación tangente

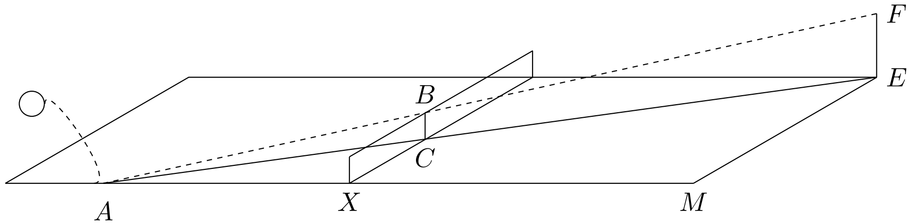
$$\widehat{BAC} \approx 53^o 7' 48''.$$

El ángulo $\widehat{BCA} = 90^o$ y el $\widehat{CBA} \approx 90^o - 53^o 7' 48'' \approx 36^o 52' 12''$.

Ejercicio resuelto 3. (Saque del tenista) Un tenista realiza un saque golpeando la pelota con su raqueta a una cierta altura. La bola se sirve desde una esquina de la cancha, pasa justo sobre la red y pica, en diagonal, sobre el borde interno a una distancia de $5,94$m de la red. ¿A qué altura el tenista hizo el saque?

Resolución:

En primer lugar, un esquema nos ayuda a comprender la situación.



Es útil conocer las dimensiones de una cancha de tenis. Largo: 23,77 m, Ancho interno: 8,23 m. Altura de la red, 1 m (promedio) (estas medidas corresponden a la conversión en metros ya que en realidad las dimensiones de la cancha se miden en "pies").

Antes de resolver el problema, pensamos en una estrategia de resolución:

Aprendiendo una estrategia de resolución: "Enlace"

1. Según el esquema se quiere calcular la longitud de un segmento. Pensamos en qué figura o figuras incluimos el segmento, para relacionarlo con medidas de otros segmentos de la figura.

2. Vemos qué datos tenemos de la/s figura/s identificada/s y cuáles necesitaríamos.

3. Identificamos qué resultados teóricos (por ejemplo: propiedades, definiciones y teoremas) necesitamos para relacionar los datos, o los posibles datos, con aquello que quiere obtenerse. Debemos comprobar si se cumplen las condiciones que se necesitan para utilizar dichos resultados teóricos.

4. Si los datos directos no son suficientes para aplicar el esquema analizado en los ítems anteriores. Probablemente necesitemos una figura auxiliar que nos permita obtener otros datos u otras relaciones.

5. En la figura auxiliar volvemos a revisar los pasos explicados en los ítems anteriores (1), (2), (3), (4) para obtener datos o relaciones intermedios.

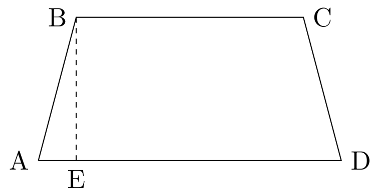
6. Obtenidos los elementos intermedios que servirán de nexo o enlace entre los datos, se empiezan a calcular lo necesario para aplicar los resultados teóricos y obtener lo pedido.

Resolvemos el problema en tabla.

Explicación	En el esquema, vemos que se pide obtener el segmento EF. El segmento es cateto del triángulo rectángulo AEF. En dicho triángulo, para usar el Teorema de Pitágoras necesitaríamos las medidas de AF y AE que no tenemos. Si en cambio queremos usar proporcionalidad entre segmentos, podríamos considerar el triángulo ACB el cual comparte con AEF el ángulo con vértice en A y además de él poseemos el dato de longitud de CB, alto de la red. CB y EF son lados opuestos respecto del ángulo en común de ambos triángulos. Necesitaríamos otro par de lados, uno en cada triángulo, que compartan una posición respecto del ángulo en A. Evidentemente necesitamos tener en cuenta otra figura que nos permita obtener más datos. Consideramos entonces el triángulo AME del suelo de la cancha, que también es rectángulo. De él conocemos ME, ancho de la cancha, y podemos calcular fácilmente $AM = AX + XM$, pues $XM = 11,885$ ya que la red está en la mitad de la cancha. Volviendo a lo dicho sobre proporcionalidad entre lados de los triángulos AEF y ACB, notamos que los lados AC y AE, son adyacentes al ángulo $B\hat{A}C$. Luego es posible determinar la proporción:
Planteo y Cálculos	$$\frac{EF}{AE} = \frac{CB}{AC}$$ Usando propiedad de las proporciones (ver sección de proporcionalidad), podemos variar la proporción y obtener una nueva: $$\frac{EF}{AE} = \frac{CB}{AC} \Longrightarrow EF \cdot AC = CB \cdot AE \Longrightarrow \frac{EF}{CB} = \frac{AE}{AC} \qquad (2.3)$$

Explicación	Los triángulos rectángulos AXC y AME comparten el ángulo $C\hat{A}X$. Podemos entonces plantear proporcionalidad entre sus lados de modo tal que en dicha proporción intervengan los lados AE y AC, que en este caso son hipotenusas. Esta proporción será el nexo con la proporción planteada arriba.
Planteo y Cálculos	$$\frac{AM}{AE} = \frac{AX}{AC}$$ Por propiedad de proporciones, aplicada de modo análogo al paso de arriba, podemos obtener una nueva proporción: $$\frac{AM}{AX} = \frac{AE}{AC} \qquad (2.4)$$
Explicación	Como vemos, la razón $\frac{AE}{AC}$ se repite en las proporciones (2.3) y (2.4). Es el nexo que nos permite igualar los primeros miembros. Resulta:
Planteo y Cálculos	$$\frac{AM}{AX} = \frac{EF}{CB},$$ Dado que $AM = 5,94 + 11,885 = 17,825$, entonces $$\frac{17,825}{5,94} = \frac{EF}{1} \Longrightarrow EF \approx 3,0008 \approx 3$$
Respuesta	El saque fue realizado aproximadamente desde los $3m$ de altura.

Ejercicio resuelto 4. Un cantero de un parque tiene forma de trapecio isósceles de 110 m de perímetro. Las bases del trapecio miden $40m$ y $30m$ respectivamente. ¿Cuál es su área?



Guía para la resolución:

1. ¡Trate de hacerlo sin usar esta guía! Si acaso necesita ayuda, tal vez las indicaciones siguientes le sirvan, trate de usar la menor cantidad de ellas sin saltearlas

y utilice un dibujo de la figura.

2. Realice un dibujo de la figura y coloque las medidas de todos los lados de la misma. Mostrar cuáles son datos directos, cuáles infirió y cómo lo hizo.

3. Pensar cómo se calcula el área de esa figura. Puede tratar de descomponerla en figuras menores cuyas áreas sepa calcular fácilmente. Piense en sumar áreas. Describir el tipo de figuras y mostrar cómo calcularía sus áreas.

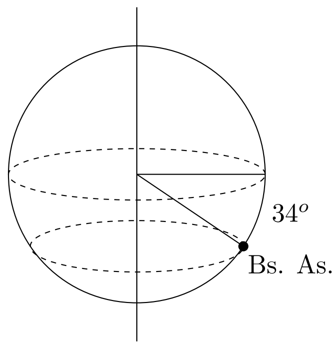
4. ¿Necesita la altura del trapecio? ¿Cómo puede calcularla? ¿Qué datos necesita para ello?

5. Una forma de calcular la altura: Use el valor que se obtiene de hacer la diferencia entre la base mayor y la base menor y la medida de alguno de los lados no paralelos.

6. Los valores del item anterior le sirven para calcular la altura utilizando el Teorema de Pitágoras o también Trigonometría. ¿Cuál es el triángulo sobre el que hay que trabajar? ¿Con cuáles medidas de ese triángulo cuenta? ¿Utiliza Teorema de Pitágoras o Trigonometría?

7. Ojalá estos pasos le hayan servido para obtener la respuesta.

Ejercicio resuelto 5. Sabemos que la Tierra tiene un diámetro de 13.000 km considerándola esférica y además conocemos que Buenos Aires está a 34 grados de latitud sur (se mide desde el Ecuador). Debido al giro sobre el eje, nos movemos describiendo una circunferencia en torno a éste como lo indica la línea punteada. ¿Cuál es el perímetro de dicha circunferencia?



Resolución:

Para visualizar el ángulo de latitud de 34^o, hay que imaginar un plano γ perpendicular al plano del ecuador y que contiene al meridiano que pasa por la ciudad de Buenos Aires. Dicho meridiano con el ecuador determina un punto P de intersección. Si O es el centro de la Tierra, consideramos el radio de la esfera OP. Si B es el punto de la Tierra donde se sitúa Buenos Aires, consideramos el radio de la esfera OB.

Ambos radios OP y OB son segmentos en el plano auxiliar trazado y dichos segmentos determinan el ángulo de latitud $\alpha = 34^o$.

Averiguar el radio de la circunferencia descripta por la rotación alrededor del eje de Buenos Aires, nos serviría para calcular su perímetro. Para ello, observemos que si llamamos A al punto de intersección del eje de la Tierra con el plano perpendicular a él que pasa por la ciudad, entonces OAB es un triángulo rectángulo del cual conocemos:

- Su hipotenusa, OB que es el radio de la esfera y mide $\frac{13000}{2} = 6500km$.

- El ángulo agudo $\widehat{AOB}$ que es el complementario del ángulo de latitud. Su medida es $\widehat{AOB} = 90^o - 34^o = 56^o$.

El radio que hay que averiguar es el segmento AB que es opuesto al ángulo $\widehat{AOB}$, en este caso conviene usar la relación trigonométrica seno.

$$\sin\widehat{AOB} = \frac{AB}{OB} \Longrightarrow AB = \sin 56^o \cdot 6500 \approx 0.829 \cdot 6500 \approx 5388,5.$$

Luego, la longitud de la circunferencia resultante de la trayectoria de Buenos Aires por la rotación es

$$\text{long. de circ. de Bs. As.} \approx 2 \cdot \pi \cdot 5388,5 \approx 33839,78$$

Trabajo Práctico 14

Ejercicio 1 Acerca de la lectura. Las siguientes preguntas invitan a revisar y reflexionar sobre lo leído para ayudar a estudiar.

(a) Describir el método usado para medir la torre.

(b) ¿Cuáles son los datos y qu es lo que se quiere averiguar?

(c) ¿Cuáles son las magnitudes proporcionales en este problema?

(d) En este método, ¿ Qué se mantiene fijo y qué puede variar?

(e) Dados dos triángulos rectángulos que tienen un ángulo agudo que mide lo mismo ¿qué se puede decir del otro ángulo? Por qué?

(f) ¿A qué se llama cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa? Estas definiciones ¿tienen sentido en un triángulo no rectángulo?

(g) Dado un ángulo agudo, ¿El valor de cada relación trigonométrica depende del triángulo rectángulo que lo tenga por ángulo interior?

Problemas y ejercicios.

Ejercicio 2. El triángulo rectángulo ABC es tal que α es ángulo opuesto a AB y β es ángulo opuesto a CB. Hacer una figura y calcular lo pedido en cada caso de acuerdo a los datos:

(a) Calcular AB, sabiendo que $\alpha = 70^o$ y $AC = 5$.

(b) Calcular AC, sabiendo que $\alpha = 30^o$ y $BC = 2$.

(c) Calcular AC, sabiendo que $\beta = 75^o$ y $AB = 3,5$.

(d) Calcular AB, sabiendo que $\beta = 40^o25'$ y $BC = 6$.

(e) Calcular α y β, sabiendo que $AC = 8$ y $BC = 4$.

(f) Calcular α y β, sabiendo que $AB = 5$ y $BC = 3$.

(g) Calcular AC, sabiendo que $AB = \sqrt{5}$ y $BC = \frac{1}{2}$.

(h) Calcular AB, sabiendo que $AC = 8$ y $BC = 6$.

Ejercicio 3. Si se dan como dato $\sin\alpha$ y $\cos\alpha$, siendo α un ángulo agudo, explicar y escribir cómo encontrar las tres relaciones trigonométricas de β, el ángulo complementario de α, sin usar la calculadora.

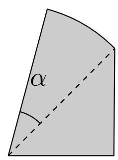
Ejercicio 4. Determine las otras constantes de proporcionalidad entre lados de triángulos y averig'ue cómo se las denominan.

Ejercicio 5. Leer atentamente la propiedad de proporcionalidad entre lados de triángulos rectángulos, enunciada en (2).

(a) Enunciar la propiedad recíproca.

(b) Para el lector interesado: Piense si la recíproca es válida o no y por qué.

Ejercicio 6. Calcular de forma exacta y aproximada el área y el perímetro de la siguiente figura sabiendo que la misma está formada por un triángulo rectángulo isósceles y un sector circular de amplitud α. Además se sabe que un cateto mide $\sqrt{8}$cm y que el seno de α es $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Recordar que las líneas interiores no forman parte del perímetro.



Ejercicio 7. Para el siguiente problema tener en cuenta el problema resuelto sobre la distancia de la Tierra a la superficie lunar.

(a) Aristarco (s. III a. J.), astrónomo de Alejandría, observó que cuando la Luna estaba en cuarto creciente, las líneas Tierra-Luna y Luna-Sol formaban un ángulo de 90^o. Aristarco midió en ese momento el ángulo que formaba la línea que une la Tierra con la Luna y la línea que formaba la Tierra con el Sol, estimando su valor en 87^o ¿Cuál es la distancia entre el Sol y la Tierra estimada por Aristarco?

(b) Actualmente se sabe que Aristarco cometió un error de $2^o50'$ por defecto. ¿'Se traduce esto en una diferencia considerable en la distancia de la Tierra al Sol?

Ejercicio 8. La orientación hacia la que parece caerse la Torre de Pisa, en Italia, es sur. La medida del largo del lado sur de la torre es aproximadamente de 53m. El ángulo de inclinación es de 13^o respecto de la vertical. ¿Cual es el deslizamiento horizontal de la torre?

Ejercicio 9. Se sabe que la medida de un lado de un triángulo es 5 cm, la mitad de otro lado mide 3 cm y el ángulo,α, comprendido por ellos, tiene coseno $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. ¿El triángulo es isósceles? Explique su razonamiento y justifique su respuesta.

Ejercicio 10. Para el problema del tenista, averiguar cómo se realizó el saque cuyo pique, del lado contrario, es a 4 m de la red. Tener en cuenta las mismas condiciones del problema 3.

Ejercicio 11. La Tierra tiene un diámetro de 13.000 km considerándola esférica y además conocemos que Nueva York está a 40 grados de latitud norte (se mide desde el Ecuador). Debido al giro sobre el eje, nos movemos describiendo una circunferencia en torno a éste. ¿Cuál es el perímetro de dicha circunferencia?

Ejercicio 12. (Relación entre la proporcionalidad entre lados y el Teorema de Pitágoras. Usando proporcionalidad vamos a mostrar por qué vale el famoso Teorema de Pitágoras que es válido para todo triángulo rectángulo. Recordemos el enunciado.

Teorema de Pitágoras: *En todo triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.*

En la columna izquierda del siguiente cuadro se explica la validez de este resultado y en la derecha guiamos al lector para que complete la justificación. Toda la información necesaria para hacerlo se encuentra en esta sección.

Explicación	Completamiento de la justificación
Dibujamos un triángulo rectángulo cualquiera ABC, con ángulo recto en el vértice B. Trazamos la altura del triángulo correspondiente a la hipotenusa AC *. Llamemos BM a dicha altura. Esta construcción auxiliar nos permite armar proporciones en donde intervienen la hipotenusa y los catetos del triángulo ABC los cuales son también lados de los triángulos rectángulos que se forman pero tienen otra posición respecto de los ángulos que son iguales.	Dibujar la figura descripta y nombrar a todos los triángulos rectángulos de la figura
Miramos el triángulo inicial ABC y el auxiliar AMB y observamos que tienen ángulos agudos iguales	Mostrar los ángulos agudos iguales y explicar por qué lo son.

Usando el Resultado importante puede determinarse la siguiente proporción: $$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AM}$$ Por lo tanto, usando propiedades de las proporciones, $$AB^2 = AC \cdot AM \qquad (2.5)$$	Indicar cuáles son los ángulos iguales considerados para el armado de la proporción y la posición de los lados con respecto a los mismos.
Análogamente, considerando los triángulos ABC y BMC se puede determinar la siguiente proporción: $$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{MC},$$ Luego, $$BC^2 = AC \cdot MC. \qquad (2.6)$$	Mostrar cuáles son los ángulos iguales y la posición de los lados que intervienen en la proporción, respecto a ellos.
Por las expresiones de (2.5) y 2.6, obtenemos $$AB^2 + BC^2 = AC \cdot (AM + MC).$$	Explicar qué operaciones se realizaron para obtener esta expresión. ¿A qué es igual $AM + MC$ en el triángulo ABC?
Finalmente, obtenemos que $$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$	Verificar que la expresión simbólica de la izquierda concuerda con el enunciado del Teorema de Pitágoras.