MÓDULO 6

Modelización con funciones cuadráticas

A lo largo de este capítulo trabajaremos con las funciones cuadráticas a partir del desarrollo de algunos problemas y ejemplos que involucran la modelización de distintas situaciones mediante este tipo de funciones.

1 Una introducción al tema a partir de problemas

1.1 El problema del disparo

El problema que desarrollamos en este apartado, que llamamos *El problema del disparo,* nos permite hacer una introducción a las funciones cuadráticas a partir de una situación modelizada mediante una función de este tipo.

Ejemplo 1. Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba. Su altura h sobre el suelo (expresada en metros), t segundos después del disparo, puede ser aproximada por la función $h : A \to B$ definida mediante la expresión $h(t) = -5.(t-12)^2 + 720$.

(a) ¿Desde qué altura fue lanzado el proyectil? ¿A qué altura se encuentra a los 7 segundos de haber sido disparado? ¿Alcanza esta misma altura en algún otro instante a lo largo de su trayectoria?

(b) ¿Existe algún instante en el que la altura del proyectil sea de 675 metros? En caso afirmativo, decir cuál o cuáles. En caso negativo, explicar por qué. ¿Qué podría decirse si la altura es de 720 metros?

(c) ¿Para qué valores de t el proyectil asciende? ¿Para cuáles desciende? Hallar el tiempo que demora el proyectil en llegar al suelo.

(d) ¿Existe algún instante en el que la altura del proyectil sea de 1300 metros? En caso afirmativo, decir cuál o cuáles. En caso negativo, explicar por qué.

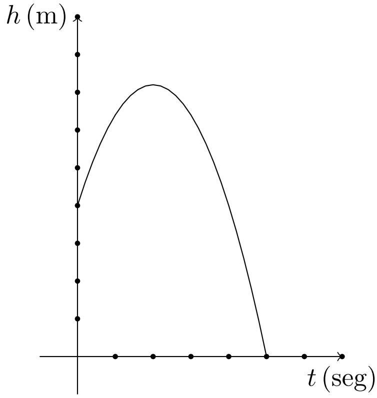
(e) Determinar el dominio y codominio de la función (conjuntos A y B respectivamente) y hacer un gráfico aproximado de la misma. Indicar su conjunto imagen.

Resolución. Antes de comenzar con la resolución del problema, parece interesante proponer algún gráfico que describa aproximadamente la situación planteada, aunque no sea exactamente el gráfico de la función h que se propone en el enunciado. Este gráfico servirá para orientarnos en las respuestas y, luego de analizar el problema, podría modificarse de acuerdo a los resultados que se vayan obteniendo.

En principio, y de manera intuitiva, podríamos pensar que un gráfico que represente la altura del proyectil en distintos instantes de su trayectoria, debería presentar un primer tramo creciente, que se corresponde con el intervalo de tiempo en el que el proyectil está subiendo (recordemos que se lo lanzó *verticalmente hacia arriba*), hasta lo que sería la altura máxima que alcanza el proyectil, y desde allí, un segundo tramo decreciente, que se relaciona con el período en el que el proyectil "cae" hasta llegar al suelo.

Puede pensarse también que esta descripción intuitiva genera un gráfico en el que se observa alguna simetría entre los tramos crecientes y decrecientes, a partir de suponer que tarda el mismo tiempo en subir que en bajar.

A partir de estas interpretaciones, podemos proponer el siguiente gráfico aproximado:



La función que modeliza la situación planteada en el problema es una función cuadrática definida por la expresión: $h(t) = -5(t-12)^2 + 720$, presentada en lo que se conoce como la "*forma canónica*". Si desarrollamos esta expresión, resolviendo el cuadrado del binomio y realizando las operaciones que sean necesarias, la fórmula queda escrita como: $h(t) = -5t^2 + 120t$, conocida como la "*forma polinómica*" de la función.

Antes de comenzar concretamente con la resolución de esta actividad, observemos que, como se señala en el enunciado, la función definida por la expresión

$$h(t) = -5(t-12)^2 + 720$$

indica, para *cada instante* t (medido en segundos), la *altura* (medida en metros) a la que se encuentra el proyectil en ese instante. De este modo, por ejemplo, el resultado obtenido al calcular $h(5)$ indica la altura del proyectil a los 5 segundos de su lanzamiento, y $h(15)$ la altura alcanzada a los 15 segundos.

En el ítem *a*) se nos pregunta por la altura desde la cual fue lanzado el proyectil y la altura alcanzada por éste a los 7 segundos de haber sido lanzado.

El momento en que se lanza el proyectil corresponde al instante inicial del proceso que modeliza la función h, y eso es el instante $t = 0$. De este modo, la altura desde la que se ha lanzado el proyectil se obtiene calculando el valor $h(0)$:

$$h(0) = -5(0-12)^2 + 720 = -5.144 + 720 = 0$$

Este resultado, $h(0) = 0$, indica que la altura desde la que se lanzó el proyectil es de 0 metros, es decir que el proyectil fue lanzado desde el suelo.

Para saber a qué altura está el proyectil a los 7 segundos de su lanzamiento, debemos calcular $h(7)$, es decir:

$$h(7) = -5(7-12)^2 + 720 = -5.25 + 720 = 595.$$

Es decir $h(7) = 595$, lo que indica que el proyectil se encuentra a 595 metros del suelo a los 7 segundos de haber sido lanzado.

Se plantea también averiguar si *alcanza esta misma altura en algún otro instante a lo largo de su trayectoria.* Antes de plantear algún cálculo, pensemos si esta pregunta tiene o no sentido... En principio, salvo que 595 metros sea la máxima altura que alcanza el proyectil, habrá dos momentos en los que se encuentre a esa altura: uno durante el ascenso y otro durante el descenso. Como no sabemos cuál es la altura máxima que puede alcanzarse ni el tiempo total en que se completó la trayectoria, no podemos aún afirmar si se alcanza o no esa altura en más de un instante. Para saberlo debemos operar con la expresión de la función h para dar la respuesta que se espera, teniendo en cuenta que lo que necesitamos saber es en qué instante (o instantes) la altura del proyectil es de 595 metros. En defintiva, debemos conocer el o los valores de t en los cuales se verifica que $h(t) = 595$, lo que nos obliga a resolver la ecuación:

$$-5(t-12)^2 + 720 = 595 \ . \tag{1.1}$$

Antes de comenzar con la resolución de la ecuación (1.1), reflexionemos sobre algunas características de su conjunto solución, en términos de cuestiones ya estudiadas en el apartado *Álgebra*. En primer lugar, obervemos que *ya sabemos* que la ecuación tiene por lo menos una solución (es decir, el conjunto solución *no es vacío*) la cual es $t = 7$, porque, a partir de los cálculos hechos anteriormente, sabemos que a los 7 segundos el proyectil alcanza una altura de 595 metros. Para decidir si ésta es o no la única solución de la ecuación debemos resolverla:

$$-5(t-12)^2 + 720 = 595$$

o, lo que es equivalente, (haciendo "pasaje de términos") resolver:

$$5(t-12)^2 = 720 - 595,$$

es decir,

$$(t-12)^2 = 125$$

de donde,

$$(t-12)^2 = \frac{125}{5} = 25\ .$$

Como sabemos, hay dos soluciones de la ecuación

$$(t-12)^2 = 25$$

y ellas son las que se obtienen haciendo:

$$t-12 = -\sqrt{25} \ \text{ o } \ t-12 = \sqrt{25}$$

$$t-12 = -5 \ \text{ o } \ t-12 = 5$$

Es decir:

$$t = 7 \ \text{ o } \ t = 17$$

con lo que podemos decir que el proyectil se encuentra a 595 metros de altura sobre el suelo, en dos instantes: a los 7 segundos y a los 17 segundos de lanzado. Por las características del problema, el menor de los valores se da durante el ascenso, y el segundo durante el descenso.

En cuanto a lo que se propone en el ítem b), observemos que el trabajo que hemos hecho, es también el que debemos realizar para saber en qué instantes el proyectil está a 675 y a 720 metros de altura, pues lo que estamos buscando es para qué valores de t se verifica que $h(t) = 675$ en un caso, o $h(t) = 720$ en el otro.

Comencemos con el cálculo correspondiente a 675 metros. Como en el caso anterior, debemos resolver la ecuación

$$-5(t-12)^2 + 720 = 675$$

es decir:

$$5(t-12)^2 = 45$$

$$(t-12)^2 = 9$$

$$t-12 = -\sqrt{9} \ \text{ o } \ t-12 = \sqrt{9}$$

$$t-12 = -3 \ \text{ o } \ t-12 = 3$$

con lo que

$$t = 9 \ \text{ o } \ t = 15$$

es decir que el proyectil alcanza una altura de 675 metros, a los 9 y a los 15 segundos de haber sido lanzado.

Para averiguar en qué instante (o instantes) la altura es de 720 metros, la ecuación que debemos resolver es:

$$-5(t-12)^2 + 720 = 720$$

es decir:

$$5(t-12)^2 = 0$$

$$(t-12)^2 = 0$$

condición que se cumple únicamente cuando

$$t - 12 = 0$$

es decir, cuando

$$t = 12$$

De este modo, vemos que el único instante en que el proyectil está a 720 metros sobre el suelo es a los 12 segundos de su lanzamiento.

Como esa altura es alcanzada en un único instante, de acuerdo con lo comentado anteriormente, podría afirmarse que 720 metros es la altura máxima que el proyectil puede alcanzar y ello ocurre a los 12 segundos del lanzamiento.

En el ítem c) se pide determinar los instantes en que el proyectil asciende y desciende. A partir de los resultados obtenidos, y sabiendo que el proyectil asciende desde su lanzamiento hasta el momento de alcanzar la máxima altura, podemos decir que el período de ascenso es desde el instante $t = 0$ hasta $t = 12$, es decir que el ascenso se produce para $t \in [0, 12]$.

El período de descenso será el que se inicie en $t = 12$ (que es el instante en que el proyectil comienza a caer) y finalice en el instante en que el proyectil se encuentre nuevamente en el suelo. Para determinar este momento, debemos hallar el valor de t para el cual la altura del proyectil sea 0, es decir, debemos resolver la ecuación $h(t) = 0$ (ya sabemos que $t = 0$ es una solución de esta ecuación, que corresponde al instante inicial).

Resolvemos entonces la ecuación $h(t) = 0$, es decir

$$-5(t-12)^2 + 720 = 0$$

Para resolverla, observemos que la ecuación planteada es equivalente a:

$$5(t-12)^2 = 720$$

es decir:

$$(t-12)^2 = \frac{720}{5} = 144$$

de donde resulta que

$$t - 12 = 12 \quad \text{ó} \quad t - 12 = -12$$

es decir:

$$t = 24 \quad \text{ó} \quad t = 0\ .$$

De este modo, las soluciones de la ecuación $h(t) = 0$ son $t = 0$ y $t = 24$, de donde podemos afirmar que el proyectil desciende desde el instante $t = 12$ hasta $t = 24$, es decir, para $t \in [12, 24]$.

Notar que estos cálculos nos permiten saber también que el tiempo que demora el proyectil en llegar al suelo es de 24 segundos desde el momento en que fue lanzado.

Para responder al ítem d), donde nos preguntan por la posibilidad de alcanzar una altura de 1300 metros, tenemos dos alternativas para dar la respuesta. Una es a partir de todo el análisis que ya tenemos hecho hasta ahora. En efecto, los cálculos hechos para resolver el ítem b) de este problema, nos informan que la altura máxima alcanzada por el proyectil es de 720 metros sobre el suelo. Este dato, en particular, dice que es imposible que el proyectil alcance alturas superiores a los 720 metros, por lo que como respuesta al ítem d) diremos que *no existe ningún instante en que la altura alcanzada sea de 1300 metros sobre el suelo.*

La otra alternativa que disponemos es la de realizar los cálculos, tal como ya lo hemos hecho anteriormente. En este caso, lo que se propone es que hallemos el o los instantes t en que la altura $h(t)$ sea de 1300 metros. De esta manera, debemos hallar los valores de t para los cuales se verifique que

$$h(t) = 1300$$

con lo que la ecuación que debemos resolver es:

$$-5(t-12)^2 + 720 = 1300$$

lo que nos lleva a tener que resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} 5(t-12)^2 &= 720 - 1300 \\ 5(t-12)^2 &= -580 \\ (t-12)^2 &= \tfrac{-580}{5} \\ (t-12)^2 &= -116\ . \end{aligned}$$

Con lo hecho hasta aquí, observamos que no será posible hallar valores de t que verifiquen la ecuación $-5(t-12)^2+720 = 1300$, pues ésta nos conduce a buscar valores de t que hagan que un "cuadrado" (como es $(t-12)^2$) dé por resultado un número negativo, lo cual sabemos que es un absurdo en el contexto de los números reales. De este modo, dado que la ecuación que debíamos resolver no tiene solución, la respuesta al ítem d) es que *no existe ningún instante en que la la altura del proyectil sea de 1300 metros sobre el suelo*, tal como habíamos concluido en la anterior alternativa de resolución.

Como observación, nos parece importante notar las ventajas de la primera forma de resolución: no sólo es más breve y simple, sino que además surge de una reflexión sobre el problema a partir de toda la información recogida previamente.

En el ítem e) se pide determinar el dominio, codominio e imagen de la función h y, además, hacer un gráfico aproximado de la misma.

Como sabemos, el *dominio* de una función representa el conjunto de todos los valores sobre los cuales puede definirse la misma. En los casos en que la función está definida por una situación planteada en un problema, ésta, y no solo la fórmula o expresión de la función, es la que determina su dominio. En nuestro caso, se trata de un elemento lanzado verticalmente hacia arriba, por lo que interesa saber el lapso (intervalo) durante el cual “está en movimiento” el objeto, es decir, el período de tiempo que transcurre desde el momento en que se dispara el objeto hasta que éste caiga al suelo. A partir de esta interpretación, es claro que el tiempo que debemos considerar para la determinación del dominio es el que transcurre entre “los dos momentos en que el objeto está a nivel del suelo”: el momento en que es disparado y el momento en el cuál retorna luego de haber descripto toda su trayectoria.

Si tenemos en cuenta que la expresión $h(t) = -5(t-12)^2 + 720$ define la altura sobre el suelo en cada instante t a lo *largo de toda la trayectoria*, el lapso que define al dominio de la función tendrá que ser el comprendido *entre los dos valores* de t en los cuales el proyectil está a altura cero incluyendo ambos. Estos valores ya han sido hallados para el ítem c), y son $t = 0$ y $t = 24$. De este modo, resulta que el dominio de la función está determinado por el intervalo $[0; 24]$, es decir, $A = Dom(h) = [0; 24]$.

Con respecto al *codominio*, sabemos que representa “el conjunto de llegada” de la función, por lo que la condición que debe cumplir es que sea “un conjunto lo suficientemente grande” como para contener a **todos** los resultados de la función, es decir, debe contener al conjunto imagen de la función. En este sentido, no es único el conjunto que podría proponerse como el codominio de la función. En el contexto de funciones a valores reales (como es el caso de la función que modeliza este problema) siempre puede considerarse a todo el conjunto $\mathbb{R}$ como codominio. Dependiendo del contexto del problema que se considere, el codominio puede restringirse a conjuntos más acotados, como por ejemplo, en nuestro caso, el de los números reales mayores o iguales que 0, $[0, +\infty)$ o, en general, el conjunto imagen de la función. De esta manera podemos considerar para nuestro problema que el codominio es el conjunto $B = \mathbb{R}$.

Con las definiciones de conjuntos dominio y codominio que hemos adoptado, la función que modeliza este problema es:

$$h : [0, 24] \to \mathbb{R} \text{ y está dada por la expresión } h(t) = -5(t-12)^2 + 720 \ .$$

Para determinar el conjunto imagen de la función, debemos tener en cuenta que el mismo es el conjunto de todos los valores de la ordenada “y” que están afectados por la función. En este caso, éstos representan todos los valores de altura alcanzados por el proyectil que, como hemos visto, son todos los valores que van desde $y = 0$, que es la altura inicial, hasta el valor $y = 720$ que corresponde a la máxima altura alcanzada. De este modo, se tiene que la imagen de la función es el conjunto $\mathrm{Im}(h) = [0, 720]$.

A partir de toda la información recogida en el análisis precedente, estamos en condiciones de “ajustar” o “corregir” el gráfico que habíamos propuesto anteriormente, sabiendo ahora que, entre otras cosas:

1. La altura máxima que alcanza el proyectil es de 720 metros, y lo hace a los 12 segundos de su lanzamiento. En el gráfico, esto se traduce en una curva que tiene un máximo en el punto $(12, 720)$,

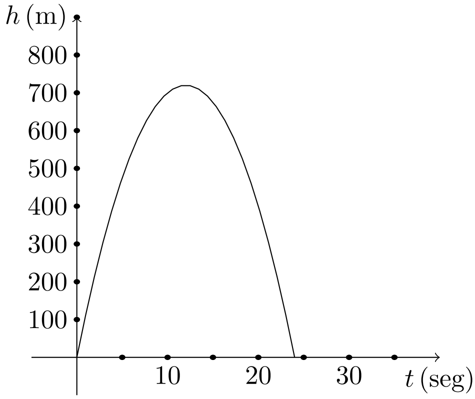
2. La altura en el instante incial es de 0 metros sobre el suelo (o sea que el lanzamiento se realiza *desde el suelo*), lo que indica que el gráfico "comienza" en el punto $(0, 0)$,

3. El tiempo que estuvo el proyectil en el aire fue de 24 segundos, lo que indica que el gráfico "termina" en el punto $(24, 0)$

4. Durante los primeros 12 segundos el proyectil asciende, lo que hace que el gráfico sea *creciente* en el intervalo $[0, 12]$ y entre los 12 y los 24 segundos desde el lanzamiento, el proyectil desciende, por lo que el gráfico es *decreciente* en el intervalo $[12, 24]$,

5. Todas las alturas del proyectil, entre 0 (altura desde la que fue lanzado) y 720 metros (altura máxima) son alcanzadas, salvo esta última, en dos momentos diferentes: uno en el ascenso y otro durante el descenso. Algunos ejemplos de esta afirmación pueden observarse en las respuestas dadas en distintos ítemes del problema: el proyectil alcanzó los 595 metros a los 7 y a los 17 segundos del lanzamiento, alcanzó los 675 metros a los 9 y 15 segundos. Además, estuvo a nivel del suelo (0 metros) en dos momentos distintos: a los 0 y a los 24 segundos. Esta observación sugiere una *simetría* del gráfico entre los momentos correspondientes al ascenso y al descenso del proyectil. Efectivamente, podemos ver que 5 segundos antes y 5 segundos después de alcanzar la máxima altura (es decir a los 7 y a los 17 segundos) el proyectil alcanzó la altura de 595 metros. Del mismo modo, el proyectil está a 675 metros en dos momentos: a los 9 y a los 15 segundos, es decir, 3 segundos antes y 3 segundos después de alcanzar el máximo.

En conclusión el gráfico que describe la situación planteada en el problema sería, aproximadamente, el siguiente:

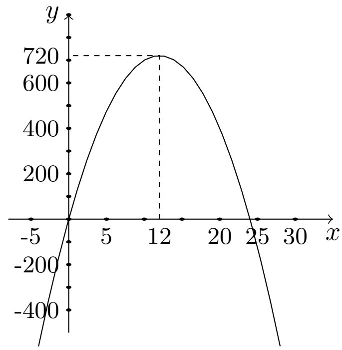


1.2 Algunas características de las funciones cuadráticas

La función que modelizó el problema anterior, $h : [0, 24] \to \mathbb{R}$, $h(t) = -5(t-12)^2+720$ puede verse como un "recorte" de la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = -5(x-12)^2 + 720$$

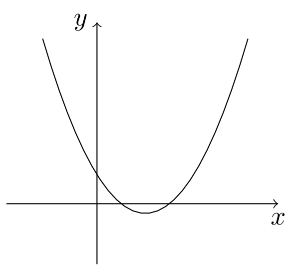
que, como ya hemos dicho anteriormente, es una *función cuadrática*, en este caso escrita en *forma canónica*, cuyo gráfico es una *parábola*, que tiene, aproximadamente, la siguiente forma:



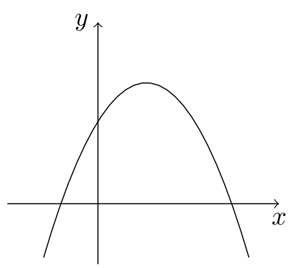
En general, una función cuadrática es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida, usualmente, por alguna de las siguientes expresiones:

1. $f(x) = a(x-h)^2 + k$, conocida como *forma canónica*, donde $a, h, k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,
2. $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, conocida como *forma factorizada*, donde $a, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,
3. $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, llamada *forma polinómica*, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

El gráfico de una función cuadrática es la *parábola*, que puede ser de alguna de las dos siguientes formas:



Forma 1



Forma 2

Las "ramas" de las parábolas van "hacia arriba" (como en Forma 1) si $a > 0$, y van "hacia abajo" (como en Forma 2) si $a < 0$, como ocurre en el caso de la función utilizada en el problema del disparo ($a = -5 < 0$).

Entre los elementos que caracterizan a las funciones cuadráticas están: el *vértice*, el *eje de simetría* y los *puntos simétricos.*

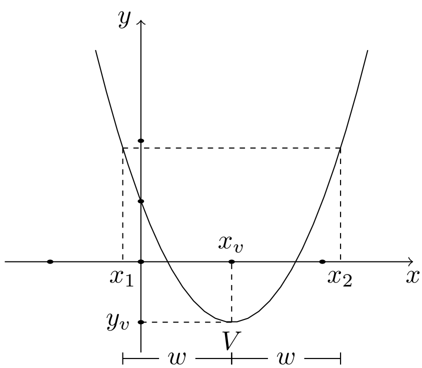
Sobre el vértice:

El *vértice* es el punto de la parábola en el cual la función alcanza el máximo o el mímimo, según sea como en las Formas 1 o 2, y suele ser notado como el punto $V = (x_v, y_v)$. En el caso del problema del disparo el vértice es $V = (12; 720)$, que representa el punto en donde se alcanza la máxima altura del proyectil.

Sobre el eje de simetría y los puntos simétricos

El *eje de simetría* de la parábola es la recta vertical de ecuación $x = x_v$ que tiene la particularidad de "dividir" al gráfico en dos "ramas" simétricas respecto de este eje, con lo que, conociendo sólo una de ellas, podemos determinar la otra. En otras palabras, decir que la función f es simétrica respecto de la recta $x = x_v$ es equivalente a decir que toma los mismos resultados en valores de la variable independiente que se encuentran a una misma distancia de x_v, ya sea a la derecha como a la izquierda. Esto se expresa diciendo que, cualquiera sea el valor que pueda tomar $w \in \mathbb{R}$ se verifica que $f(x_v - w) = f(x_v + w)$ y, en este caso, $x_v - w$ y $x_v + w$ son dos *valores simétricos* de la función. Concretamente, diremos que x_1 y x_2 son dos valores simétricos de una función cuadrática f si verifican $f(x_1) = f(x_2)$. Los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ se llaman puntos simétricos de la gráfica de la función f.

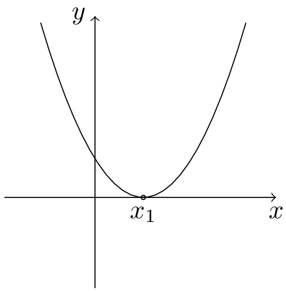
A modo de ejemplo, como ya lo señalamos, en el problema del disparo, dos valores simétricos de la función son, por ejemplo, los correspondientes a $x_1 = 7$ y $x_2 = 17$, pues $f(7) = f(17) = 595$. En este caso, el eje de simetría es $x = 12$, con lo que la simetría de los puntos recién mencionados queda verificada porque vale que $f(7) = f(12-5) = f(12+5) = f(17) = 595$. Otro par de valores simétricos de la función que modeliza el problema del disparo, es el formado por las raíces de la función: $x_1 = 0$ y $x_2 = 24$.

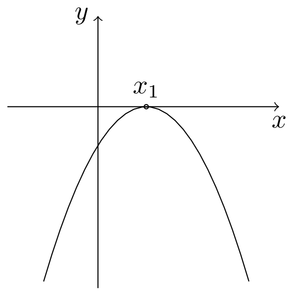


Otra particularidad de los puntos simétricos es que el promedio de sus abscisas es la **abscisa** del vértice. Por ejemplo, en lo que respecta al problema del disparo, el punto medio entre 7 y 17 es 12 , hecho que también puede observarse en cualquiera de los pares de puntos simétricos señalados anteriormente. Esto nos proporciona una forma práctica de hallar la coordenada x del vértice a partir de cualquier par de *puntos* *simétricos*. En efecto, si x_1 y x_2 son dos valores simétricos de una función cuadrática f, es decir, $f(x_1) = f(x_2)$, el valor x_v debe ser exactamente el *promedio* entre x_1 y x_2, es decir que podemos calcular x_v mediante la “fórmula”:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Como caso particular, cuando la función tiene dos raíces reales distintas, x_1 y x_2, éstas pueden ser utilizadas como valores simétricos para calcular la abscisa del vértice. En el caso en que la función tenga una única raíz real ésta será llamada *ríz doble* y resulta que $x_2 = x_1$. En este caso, éste será el valor de la coordenada x del vértice, pues $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_1 + x_1}{2} = \frac{2.x_1}{2} = x_1$, y es lo que se ilustra en los dos siguientes gráficos que representan tal situación:





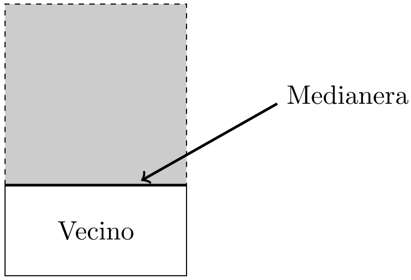
Forma aproximada del gráfico de una función cuadrática con raíz doble en $x = x_1$.

Recordar que las raíces de una función son los valores del dominio en los cuales la función toma el valor 0, es decir, las raíces son los elementos del conjunto $C_0 = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) = 0\}$, tal como ya fue defnido en el apartado correspondiente a modelización.

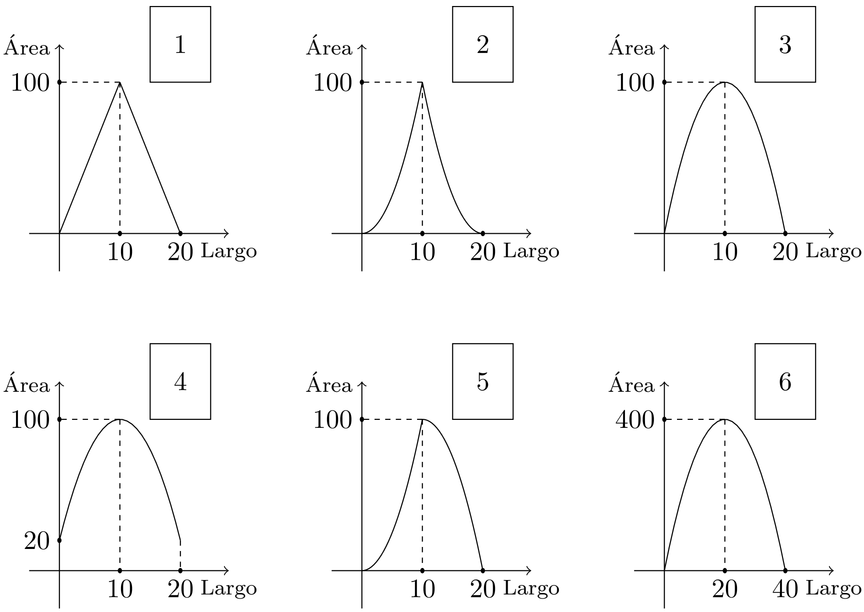
1.3 El problema del granjero

Ejemplo 2. En un terreno un granjero quiere delimitar una región rectangular con un alambre de 40 m para hacer una zona de cultivos. Este terreno limita con un único vecino que tiene construida su medianera de más de 40 m de largo (ver esquema). Sobre dicha medianera se quiere apoyar uno de los bordes que delimitan la zona de cultivos. Todo el recinto será bordeado por el alambre, incluso el lado que está contra la medianera.

(a) Como el dueño de la medianera es el vecino, el granjero deberá solicitarle autorización para hacer uso de la misma, indicándole qué parte de ella será ocupada. Indicar por lo menos cuatro posibles dimensiones de la zona de cultivo, explicitando para cada caso, qué longitud estaría apoyada sobre la medianera.



(b) ¿Cuál o cuáles de los siguientes gráficos podrían representar el área de la región en función del largo? ¿por qué?

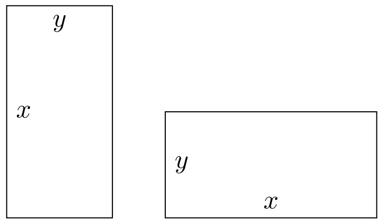


(c) ¿De qué dimensiones debería hacer el granjero la zona de cultivo si quiere maximizar su cosecha? En este caso, ¿qué le informaría a su vecino respecto de la longitud utilizada de su medianera? Justificar la respuesta.

Algunas observaciones:

1. Para comenzar con la resolución de este problema, tengamos en cuenta un dato importante que se plantea en su enunciado: el cerco de la región que será delimitada, se hará con un alambre de 40 metros de longitud. Esto quiere decir que esos 40 metros de alambre son los que "definen" el perímetro de la región. Obviamente, como las dimensiones del terreno son suficientes (la medianera mide más de 40 metros) el granjero querrá utilizar "todo el alambre" para cercar su zona de cultivos, para que ésta sea lo más amplia posible.

2. Como el recinto que el granjero quiere delimitar es rectangular, debemos tener en cuenta que, a partir de las medidas que puedan tener sus lados, hay eventualmente "dos esquemas" posibles para ubicar a los terrenos. Por ejemplo, los dos rectángulos que indicamos a continuación, cuyos lados tienen medidas x e y, tienen el mismo perímetro, por lo que si hubiera que decidirse por un recinto que tenga estas dimensiones, será el lado de menor longitud el que se ubique sobre la medianera, como para molestar menos al vecino.



3. Como última observación, tengamos presente que pueden darse las siguientes dos situaciones:

   (i) con un **mismo perímetro**, pueden construirse rectángulos de **distintas áreas** y

   (ii) con un **mismo valor para el área**, pueden construirse rectángulos de **distintos perímetros**.

   Como ejemplo de la situación (ii) pensemos, por ejemplo, en un rectángulo cuyos lados midan 2 y 12 metros respectivamente. Su área es $A = 2 \cdot 12 = 24\,\mathrm{m}^2$ y su perímetro es $P = 2.12 + 2.2 = 28\,\mathrm{m}$. El rectángulo con lados que miden 3 y 8 metros respectivamente también tiene un área $A = 3 \cdot 8 = 24\,\mathrm{m}^2$, pero su perímetro es $P = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 8 = 22\,\mathrm{m}$.

   Como veremos a continuación, la respuesta que daremos a la primera consigna del ejercicio sirve como ejemplo para la situación **i)**

Resolución:

En la consigna (a) del problema nos piden que demos cuatro posibles dimensiones para la zona de cultivo que se quiere delimitar, esto es, utilizando el mismo perímetro (determinado por los 40 metros de alambre) dar "cuatro pares" de medidas para los lados del rectángulo. Para ello podemos dar, entre otros, los rectángulos cuyos lados tienen medidas x (que diremos que es el "largo" del rectángulo) e y (que será el "ancho" del rectángulo") como indicamos en los siguientes ejemplos, donde cada valor está medido en **metros**:

Ejemplo 1: $y = 5$ y $x = 15$
Ejemplo 2: $y = 8$ y $x = 12$
Ejemplo 3: $y = 2$ y $x = 18$
Ejemplo 4: $y = 10$ y $x = 10$

En cada caso, observar que el perímetro, $P = 2.x + 2.y = 2.(x + y)$ es de 40 metros. La longitud que se ubicaría en la pared del vecino sería, en cada caso, la que tiene la menor medida, que en los ejemplos dados es la que hemos llamado y.

A partir de lo planteado en la respuesta que acabamos de dar, puede uno preguntarse: ¿cuál de los cuatro rectángulos planteados en los ejemplos le convendrá más al grangero (en cuanto a la superficie que cada uno proporciona para el cultivo)? ¿habrá alguno que no esté señalado en los ejemplos y que sea más conveniente que cualquiera de estos cuatro? Para responder a la primera de estas preguntas, debiéramos calcular el área de cada rectángulo, y así observar cuál de las áreas calculadas es la mayor, con lo que concluiríamos que la región que tenga esas medidas será la más conveniente de las cuatro propuestas.

Veamos esos cálculos...

Para eso, llamemos A_1, A_2, A_3 y A_4 a las áreas (medidas en metros cuadrados) de los rectángulos correspondientes a cada uno de los 4 ejemplos respectivamente. Resulta entonces que:

$$\begin{aligned}A_1 &= 5.15 = 75\\ A_2 &= 8.12 = 96\\ A_3 &= 2.18 = 36\\ A_4 &= 10.10 = 100\end{aligned}$$

De este modo, a partir de los cálculos realizados, surge que, de los cuatro ejemplos propuestos, el del **ejemplo 4** es el que corresponde al rectángulo "más conveniente", dado que $A_4 = 100$ resulta ser el mayor valor de las áreas calculadas. Con esto, no podemos asegurar que no haya otra forma de delimitar un terreno rectangular que sea más conveniente que la de considerar 10 metros por lado. La respuesta a esta inquietud surgirá como una consecuencia del desarrollo que presentaremos a continuación.

El ítem (b) nos propone que identifiquemos entre la serie de gráficos si alguno puede corresponder al área de la región en "función del largo", que hemos llamado x. Antes de comenzar con el estudio de los gráficos, hagamos un pequeño análisis de lo que puede observarse a partir de los cálculos hechos y de la forma rectangular del recinto. Para ello, destacaremos algunas cuestiones relevantes del problema:

Los valores que toman x e y pueden intercambiarse, es decir: puede considerarse el rectángulo en el que el largo x tome el valor 15 y el ancho y el valor 5, es decir: $x = 15$ e $y = 5$, como el caso planteado en el **ejemplo 1**, o también el rectángulo en el que los valores del largo y ancho están invertidos, es decir: $x = 5$ e $y = 15$. Lo que se observa es que ambos rectángulos tienen el mismo valor de área: $A = 5.15 = 15.5 = 75$ Lo mismo ocurre, por ejemplo, con los rectángulos de lados $x = 12$ e $y = 8$, como el del **ejemplo 2** y el de lados $x = 8$ e $y = 12$, entre otros. Esta situación nos sugiere una característica para la función que determina el área en términos del largo: dicha función tiene que tomar el mismo valor en $x = 5$ y en $x = 15$ y también el mismo valor en $x = 8$ y en $x = 12$. Podríamos preguntarnos también: ¿qué otros pares de "medidas del largo" tienen esta "simetría"? o dicho de otra forma ¿qué otros pares de valores de x tendrán el mismo resultado (o *la misma imagen*) por la función del área? Dicho en otros términos: Si llamamos $A(x)$ al "valor del área de la región rectangular de largo x" que el granjero desea cercar, sabemos que $A(5) = A(15)$, que $A(8) = A(12)$ y también, $A(9) = A(11)$ entre otros, y nos preguntamos ¿cuáles serán todos los pares de valores de x en los que esto ocurre?

El valor que puede tomar x no es arbitrario. En efecto, el valor del largo (y también el ancho) que tendrá el recinto está condicionado por la longitud del alambre disponible, que es de 40 metros. A partir de este hecho, los valores de x y de y están sujetos a la siguiente restricción: el perímetro del rectángulo de lados x e y es de 40 metros, es decir: $2 \cdot x + 2 \cdot y = 2 \cdot (x + y) = 40$, lo que implica que $x + y = 20$. A partir de esto, podemos observar que cualquiera de los pares de valores que hemos estado utilizando cumplen la condición de que ambos valores suman 20. Por otro lado, "puede observarse" que la simetría que hemos señalado está asociada a la conmutatividad de la suma (da lo mismo $x + y$ que $y + x$) y se plantea en torno al par $x = 10$ e $y = 10$.

¿Cuáles son, entonces, los valores que puede tomar x en nuestro problema? En primer lugar, como x representa una longitud (el largo del recinto cercado) debe ser un número **no negativo**, es decir, $x \geq 0$. Por otro lado, a partir de la condición que surge de la longitud del alambre ($x + y = 20$) se tiene también que x **no puede ser mayor que 20**, es decir, debe ser $x \leq 20$. De este modo, x debe satisfacer simultáneamente las condiciones $x \geq 0$ y $x \leq 20$, lo que puede expresarse como $0 \leq x \leq 20$ o lo que es igual, $x \in [0; 20]$. Naturalmente, los valores $x = 0$ y $x = 20$ son "valores extremos" con los que se obtendría un "rectángulo de área 0"

Por último, podemos ahora dar alguna respuesta a las preguntas sobre los pares de valores de x en los cuales se obtienen los mismos valores para el área. El único par de valores "que no se repite" es $x = 10$ e $y = 10$, es decir, el valor "simétrico" de $x = 10$ es también $x = 10$ (y el área que resulta en este caso es $A = 10.10 = 100$). Los otros valores del largo x que generan igual área son simétricos con respecto a $x = 10$ (como $x = 9$ y $x = 11$ o como $x = 5$ y $x = 15$ por ejemplo), es decir que los dos valores de x que estén a la misma distancia del 10 son "medidas del largo" que forman rectángulos de igual área. Una pregunta que puede hacerse es ¿cuál es la singularidad que tiene el valor $x = 10$ para que no tenga otro valor? En principio, es **el punto medio del intervalo** $[0; 20]$, donde $x = 0$ y $x = 20$ son los "valores extremos" de la variable, con los cuales el rectángulo tendría área 0.

Información sintetizada

Resumiendo la información que hemos obtenido en este análisis, previo a tomar alguna decisión sobre qué gráfico puede representar el área de la región en función del largo, tenemos:

- x toma valores en el intervalo $[0; 20]$

- con $x = 0$ y $x = 20$ se obtienen rectángulos de área 0

- el gráfico debe ser simétrico respecto de $x = 10$

- para $x = 10$ el área es $A = 100$

A partir de esta información que acabamos de resumir podemos descartar algunos de los gráficos propuestos en el ítem b) del ejercicio. Efectivamente:

- El gráfico 4 no puede ser porque para los valores $x = 0$ y $x = 20$ el resultado no da 0

- El gráfico 5 no puede ser porque no corresponde a una gráfica simétrica respecto de $x = 10$

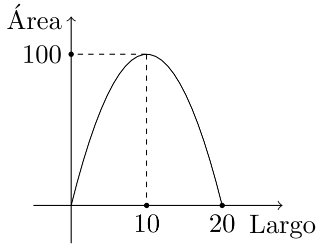
- El gráfico 6 no puede ser porque el dominio es el intervalo $[0; 40]$ en vez de ser $[0; 20]$ y además, porque el valor de área que le corresponde a $x = 10$ en este gráfico no es 100.

Queda entonces, decidir cuál de los tres primeros puede ser el que corresponda a la situación que estamos analizando:

- El gráfico 1, si bien es simétrico respecto de $x = 10$, está definido para $x \in [0; 20]$ y verifica $A(10) = 100$, está formado por dos tramos rectos. El primero, correspondiente a $x \in [0; 10]$, describe parte de una función de proporcionalidad (el gráfico es parte de una recta por el origen) y, por lo tanto, si fuese el gráfico que representa al área en función del largo, estaría indicando que $A(5) = 50$, pues como es parte de una función de proporcionalidad, verifica que al punto medio del intervalo $[0; 10]$ (para x) le corresponde el punto medio del intervalo $[0; 100]$ (para y), lo que sabemos que no es cierto porque, como vimos en el **ejemplo 1**, $A(5) = 75$. Por lo tanto, tampoco es el gráfico 1 el que corresponde a la función que estamos considerando.

- El gráfico 2, que también tiene las características de ser simétrico respecto de $x = 10$, estar definido para $x \in [0; 20]$ y verificar $A(10) = 100$, no puede ser el que represente el área de la región cercada en términos del largo pues, por ejemplo, el tramo correspondiente al intervalo $[0; 10]$ muestra una curva que no podría corresponderse (de acuerdo a la escala sugerida en cada eje) con el dato $A(5) = 75$.

  De este modo, queda que el gráfico (aproximado) que describe el **área** del recinto cercado en función del **largo** del mismo es el gráfico 3.



Otras características que pueden señalarse (a partir del gráfico) son las siguientes:

- En el intervalo $[0; 10]$ la función es creciente mientras que en el $[10; 20]$ es decreciente
- El máximo lo alcanza en $x = 10$ y toma el valor $A(10) = 100$

Esto último quiere decir que la máxima zona para el cultivo la obtiene cercando un cuadrado de 10 metros de lado, por lo que debería informarle a su vecino que serían 10 metros los que utilizaría de la medianera (y esto constituye la respuesta a la consigna c) de nuestro problema).

Características de la función. Una pregunta que parece interesante hacerse es si puede definirse, mediante alguna fórmula, una función que determine el valor del área de la región de cultivo en términos del "largo" del mismo".

Algunas características que presenta el gráfico que describe aproximadamente la situación como, por ejemplo, su simetría, que posee un máximo y que su formato se asemeja al de una parábola, permitirían suponer que la función que modelice esta situación sea una función cuadrática.

Para decidir sobre las suposiciones que acabamos de plantear, tengamos en cuenta cómo calculamos el área para cada valor del largo x. Sabemos que el área del rectángulo de largo x y ancho y es $A = x.y$, donde x e y están relacionadas por la condición $x + y = 20$. Lo que nos interesa es ver al área como función solo de x, pero al escribir $A = x.y$ se observa que A depende de ambas variables, x e y. La condición $x + y = 20$ implica que $y = 20 - x$, y a partir de esta relación, podemos escribir, entonces,

$$A = x.y = x.(20 - x)$$

con lo que A está expresada solo en función de x, por lo que podemos escribir

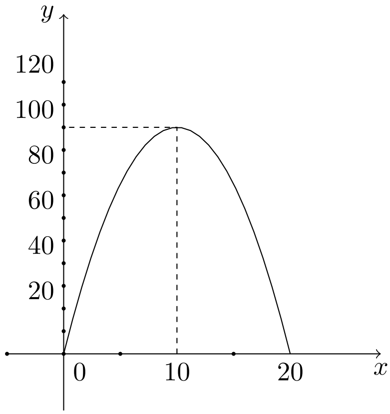
$$A(x) = x.(20 - x)$$

donde no hay que olvidar que $x \in [0; 20]$. De este modo, la función que "modeliza" a nuestro problema es la siguiente:

$$A : [0; 20] \to \mathbb{R} \text{ definida por la expresión } A(x) = x.(20 - x).$$

lo que resulta ser una función cuadrática que, escrita en forma polinómica, sería $A(x) = -x^2 + 20x$, por lo que resulta entonces que la suposición hecha al elegir el gráfico 3 como el apropiado para el problema resultó correcta.

Un gráfico más detallado de la función $A : [0; 20] \to \mathbb{R}$, $A(x) = x \cdot (20 - x)$ sería:



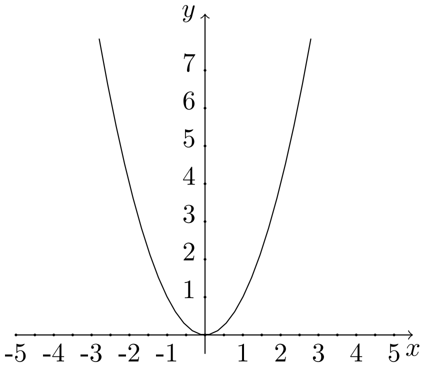
En esta función, el vértice es el punto $V = (10, 100)$, que representa el máximo de la función.y el eje de simetría está dado por la recta $x = 10$.

Ejercicio resuelto 1. Para la función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ graficar e identificar vértice, eje de simetría, raíces, un par de puntos simétricos, máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Resolución: Usamos una tabla de valores para obtener algunos puntos que pertenecen al gráfico de la función:

x	$y = x^2$	Puntos del gráfico
-3	$(-3)^2 = 9$	$(-3, 9)$
-2	$(-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$(-1)^2 = 1$	$(-1, 1)$
0	$0^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$1^2 = 1$	$(1, 1)$
2	$2^2 = 4$	$(2, 4)$
3	$3^2 = 9$	$(3, 9)$

Sabemos, a partir de lo trabajado anteriormente, que el gráfico será una parábola y esto es lo que nos permite trazarlo a partir de los pocos puntos proporcionados por la tabla de valores. De esta manera, ubicamos dichos puntos en un gráfico cartesiano y los unimos obteniendo la siguiente parábola:



Puntos simétricos

Para determinar pares de puntos simétricos debemos tener en cuenta que en una parábola dichos puntos son aquellos que tienen el mismo valor en la coordenada y. Si observamos la tabla de valores encontramos que en ella hay varios pares de puntos simétricos: $(-3, 9)$ y $(3, 9)$; $(-2, 4)$ y $(2, 4)$; $(-1, 1)$ y $(1, 1)$. Si quisiéramos hallar un par de puntos simétricos que no figure en la tabla podríamos hacerlo de la siguiente manera: elegimos un valor de y, por ejemplo $y = 36$, para determinar puntos simétricos que tengan como segunda coordenada al valor elegido debemos hallar los valores de x para los cuales $f(x) = 36$, resolviendo la ecuación

$$x^2 = 36 \ .$$

Las soluciones de dicha ecuación son $x = 6$ o $x = -6$. Esto quiere decir que

$$f(-6) = f(6) = 36.$$

Por lo tanto, los puntos simétricos son $(-6, 36)$ y $(6, 36)$.

Observemos que lo descripto arriba es un procedimiento general para obtener pares de puntos simétricos.

Eje de simetría y vértice.

Para determinar el eje de simetría de la parábola debemos recordar que dicho eje es la recta vertical de ecuación $x = x_v$, por lo que para hallarlo debemos calcular el valor promedio de las abscisas correspondientes a un par de puntos simétricos. Considerando alguno de los pares de puntos simétricos mencionados anteriormente, por ejemplo $(-2, 4)$ y $(2, 4)$, el eje de simetría es la recta $x = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0$ (Sugerencia para el lector: verificar que el resultado es el mismo cualquiera sea el par de puntos simétricos elegido).

El vértice de la parábola se encuentra en el eje de simetría, por lo tanto su abscisa es $x_v = 0$. Para hallar la ordenada del vértice debemos evaluar la función en el valor x_v y de esta manera $y_v = f(x_v)$. En este caso, $y_v = f(0) = 0^2 = 0$ y, por lo tanto, el vértice es el punto $(0, 0)$.

Raíces

Con respecto a las raíces, recordemos que éstas son los valores de x para los cuales la función se anula y, además, son los valores en los que el gráfico de la función interseca al eje de abscisas. Analizando el gráfico realizado, y verificando con la tabla de valores, podemos comprobar que la función tiene una única raíz: $x = 0$ puesto que es el único valor en el que se verifica que $f(x) = 0$.

Máximos y mínimos

Observar que la función $f(x) = x^2$ alcanza un valor mínimo en la coordenada x_v por ser una función cuadrática con coeficiente $a = 1 > 0$. Este valor mínimo es el correspondiente a la coordenada y_v.Es decir que para cualquier otro valor de x la imagen correspondiente es mayor que 0.

Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función

Intervalo de crecimiento: $(0; +\infty)$

Intervalo de decrecimiento: $(-\infty; 0)$

Observar que en $x = 0$ cambia el comportamiento de la función: decrece hasta $x = 0$ y luego comienza a crecer. Esto resulta coherente con el hecho de que en dicho valor se alcance el valor mínimo de la función.

Trabajo práctico 27

Ejercicio 1. (Acerca de la lectura)

(a) ¿Cuál sería la interpretación gráfica del procedimiento para determinar pares de puntos simétricos?

(b) ¿Es cierto que el vértice es el único punto de la parábola cuyo simétrico es igual a sí mismo? Justificar.

Ejercicio 2. Para la función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\,x^2$ dibujar su gráfico e identificar vértice, eje de simetría, raíces, un par de puntos simétricos, máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 3. Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba. El mismo tarda 12 segundos en subir y alcanzar la altura máxima, la cual es de 720 metros.

Aclaración: considerar que el proyectil parte desde el suelo, de manera que su altura inicial es de 0 metros.

(a) Suponiendo que no hay factores que alteren la trayectoria del proyectil, describir cualitativamente cómo varia su altura en función del tiempo transcurrido desde el momento del disparo.

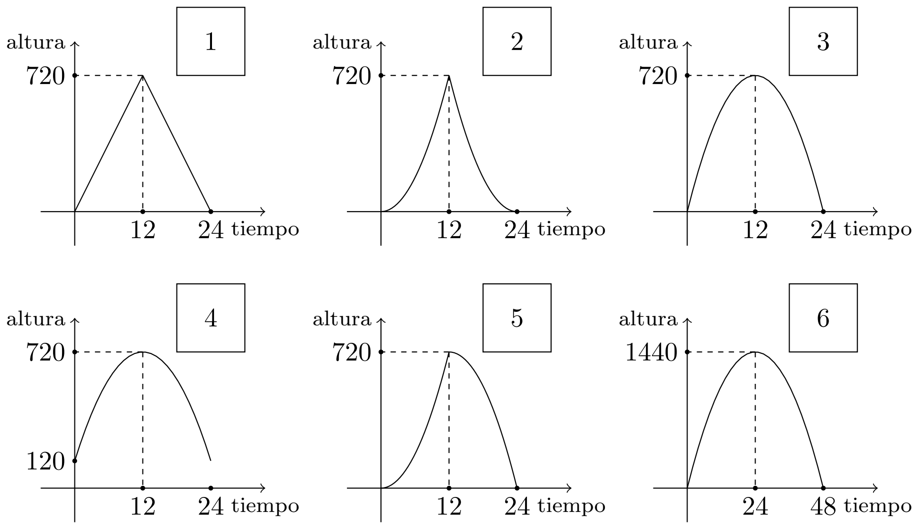
(b) Decidir cuál (o cuáles) de las siguientes expresiones podrían representar la situación descripta en el ítem anterior. Explicar tanto la elección como el descarte.

(i) $f(t) = -5.t^2 + 120t$ (ii) $f(t) = 5.(t-12)^2 + 1440$

(iii) $f(t) = -5(t-12)^2 + 720$ (iv) $f(t) = -5.(t-24).t$

(v) $f(t) = 5.(t-24)^2 + 720$

(c) ¿Alguno de los siguientes gráficos podría representar la altura del proyectil en función del tiempo transcurrido desde el momento del disparo? Explicar tanto la elección como el descarte



(d) ¿A qué altura se encuentra el proyectil a los 7 segundos de haber sido disparado? ¿Alcanza esta misma altura en algún otro instante a lo largo de su trayectoria?

(e) ¿Existe algún instante en el que la altura del proyectil sea de 675 metros? En caso afirmativo, decir cuál o cuáles. En caso negativo, explicar por qué

(f) Definir la función que modeliza la altura del proyectil en función del tiempo y determinar su conjunto imagen.

(g) Otro proyectil es disparado en iguales condiciones, pero desde una plataforma que se encuentra a 70 metros de altura. Determinar la expresión de una función que mida la altura del proyectil en cada instante t (en segundos) de su trayectoria desde el disparo hasta que toca el suelo. Determinar dominio e imagen de esta función y realizar un gráfico aproximado.

Ejercicio 4. Un granjero desea cercar un pequeño huerto donde se propone sembrar tomates. Para ello dispone de 100 metros de alambre tejido. Analizando el lugar disponible, decide cercar una superficie rectangular del terreno. ¿Qué longitud deberían tener los lados del rectángulo para maximizar la producción de tomates?

2 Presentaciones de una función cuadrática

En los problemas que hemos desarrollado anteriormente trabajamos con las funciones cuadráticas en distintas "presentaciones". En lo que sigue, trataremos de profundizar el estudio de cada una de ellas, señalando sus particularidades.

2.1 Forma canónica de una función cuadrática

Una función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está escrita en la forma canónica si su expresión responde al formato

$$f(x) = a.(x-h)^2 + k$$

donde a, h y k son números reales y $a \neq 0$. Notar que si $a = 0$, la función f no es cuadrática sino que es una función constante.

A continuación presentamos una breve explicación acerca de cómo obtener información sobre las características o elementos del gráfico de una función cuadrática cuando viene presentada en la forma canónica:

¿Cómo determinar el tipo de concavidad de la parábola?

El valor a, llamado *coeficiente principal*, informa sobre el tipo de concavidad del gráfico:

- si $a > 0$ la parábola tiene sus ramas hacia arriba,
- si $a < 0$ la parábola tiene sus ramas hacia abajo.

¿Cómo determinar la posición de las ramas respecto del eje de simetría?

El coeficiente principal indica, además del tipo de concavidad, cuán abiertas o cerradas están las ramas de la parábola respecto del eje de simetría. En el caso de $a > 0$, si $a > 1$ la parábola resulta "más cerrada" con respecto al eje de simetría que la correspondiente a $y = x^2$; si en cambio $a < 1$, las ramas resultan "más abiertas".

Si $a < 0$, se realiza el mismo análisis pero comparando con la parábola correspondiente a $y = -x^2$

¿Cómo determinar las coordendas del vértice?

Si $a > 0$, el vértice está dado por el punto donde la parábola alcanza el *mínimo* valor de ordenada. Como a es positivo, $a.(x-h)^2$ resulta siempre mayor o igual que 0 para cualquier valor de x, o sea $a.(x-h)^2 \geq 0$ cualquiera sea x en $\mathbb{R}$. De manera que el mínimo valor se alcanza cuando el cuadrado da 0, lo cual ocurre cuando $x = h$. De esta manera resulta que la abscisa del vértice es el valor $x_v = h$ y para determinar la ordenada del vértice, teniendo en cuenta $y_v = f(x_v)$, reemplazamos dicho valor:

$$y_v = a.(h-h)^2 + k = 0 + k = k\ .$$

Es decir que los parámetros h y k representan las coordenadas del vértice: $x_v = h$ e $y_v = k$.

Si $a < 0$, el vértice está dado por el punto donde la parábola alcanza el *máximo* valor de ordenada. Como a es negativo, $a.(x-h)^2$ resulta siempre menor o igual que 0 para cualquier valor de x, o sea $a.(x-h)^2 \leq 0$. Luego el máximo valor que puede tomar esta expresión es 0 y eso se logra cuando $x = h$. Realizando la misma cuenta que en el caso anterior, la ordenada del vértice será $y_v = k$. Es decir que los parámetros h y k representan las coordenadas del vértice: $x_v = h$ e $y_v = k$.

¿**Cómo determinar el eje de simetría**?

El eje de simetría es la recta de ecuación $x = x_v$ y, por lo tanto, en este caso resulta $x = h$.

¿**Cómo determinar las intersecciones del gráfico con los ejes coordenados**?

Para hallar las raíces o ceros, que corresponden a las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con el eje x, debe resolverse la ecuación

$$a.(x-h)^2 + k = 0$$

Recordando lo trabajado en la sección de Álgebra, las soluciones de esta ecuación se obtienen de la siguiente manera:

$$(x-h)^2 = -\frac{k}{a}$$

$$x_1 - h = \sqrt{-\tfrac{k}{a}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{-\tfrac{k}{a}} + h \quad \text{ó} \quad x_2 - h = -\sqrt{-\tfrac{k}{a}} \Rightarrow x_2 = -\sqrt{-\tfrac{k}{a}} + h$$

Notemos que la ecuación solo tiene solución en los casos en que $-\frac{k}{a} \geq 0$: tiene dos soluciones distintas cuando $-\frac{k}{a} > 0$ y sólo una si $-\frac{k}{a} = 0$.

Para calcular la ordenada al origen o intersección con eje y debe evaluarse la fórmula en el valor $x = 0$. De esta manera el gráfico interseca al eje de ordenadas en el valor $y = f(0) = a(0-h)^2 + k = ah^2 + k$.

2.2 Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 2. Para cada función determinar vértice, tipo de concavidad e intersecciones con los ejes coordenados y, con la información obtenida, realizar un gráfico aproximado:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}.(x + \frac{7}{2})^2 + 2$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-4)^2 + \frac{5}{3}$

Resolución del ítem 1. El valor del coeficiente principal de la función f es negativo ($a = -\frac{1}{2}$), esto nos informa que la parábola tiene sus ramas hacia abajo y que, por lo tanto, alcanza un máximo en la abscisa del vértice. Las coordenadas del vértice se determinan teniendo en cuenta que el valor x_v anula la parte cuadrática, en este caso, a la expresión $(x + \frac{7}{2})^2$. De esta manera tenemos que $x_v = -\frac{7}{2}$ puesto que es el valor que verifica

$$(x + \frac{7}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{7}{2} = 0\,.$$

El valor de la ordenada del vértice es $y_v = 2$ pues es el resultado de evaluar a la función en $x_v = -\frac{7}{2}$, es decir, $y_v = f(x_v) = f(-\frac{7}{2}) = 2$. Por lo tanto, el vértice es el punto $V = (-\frac{7}{2}, 2)$.

Con respecto a la intersección con los ejes coordenados, podemos asegurar que la función tiene raíces puesto que la parábola posee sus ramas hacia abajo y el valor de la ordenada del vértice es positiva. A partir de este análisis, anticipamos (antes de realizar el planteo analítico) que necesariamente el gráfico interseca al eje de abscisas en dos valores distintos. Para hallar dichos valores tenemos que resolver la ecuación $f(x) = 0$:

$$-\frac{1}{2}.(x + \frac{7}{2})^2 + 2 = 0$$

$$(x + \frac{7}{2})^2 = (-2).(-2)$$

$$(x + \frac{7}{2})^2 = 4$$

$$x + \frac{7}{2} = \sqrt{4} \quad \text{o} \quad x + \frac{7}{2} = -\sqrt{4}$$

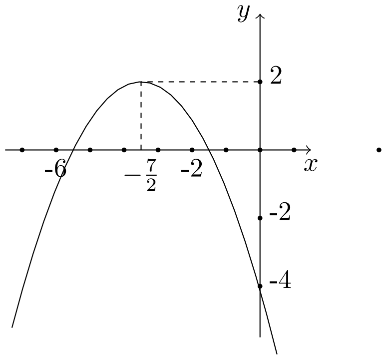
$$x = 2 - \frac{7}{2} \quad \text{o} \quad x = -2 - \frac{7}{2}$$

Por lo tanto, las raíces o ceros de la función son $x_1 = -\frac{3}{2}$ y $x_2 = -\frac{11}{2}$.

Para determinar la ordenada al origen o intersección con el eje y debemos evaluar la función en $x = 0$. Por lo tanto, la parábola interseca al eje de ordenadas en el valor $y = f(0)$ que se calcula a continuación

$$f(0) = -\frac{1}{2}.(0 + \frac{7}{2})^2 + 2 = -\frac{1}{2}.\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{2}.\frac{49}{4} + 2 = -\frac{33}{8}.$$

A partir de la información obtenida realizamos un gráfico aproximado de la función:



Resolución del ítem 2. En este caso, la función es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+4)^2 + \frac{5}{3}$. El valor del coeficiente principal es positivo ($a = 1$), esto nos permite afirmar que la parábola tiene sus ramas hacia arriba y que, por lo tanto, alcanza un mínimo en la abscisa del vértice. Las coordenadas del vértice son $x_v = 4$ e $y_v = \frac{5}{3}$.

Con respecto a las raíces podemos anticipar que la parábola no posee intersección con el eje x puesto que sus ramas apuntan hacia arriba y la ordenada del vértice es positiva. Para verificar analíticamente que la función no tiene raíces resolvemos la ecuación $f(x) = 0$:

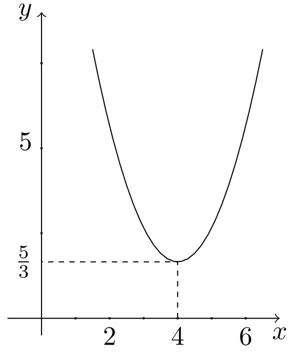
$$(x-4)^2 + \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = -\frac{5}{3}$$

En este paso de la resolución podemos observar que la ecuación no tiene solución dado que no existe ningún valor de x que verifique la igualdad planteada, pues cualquier número elevado al cuadrado da por resultado otro número mayor o igual a cero. Por lo tanto, $C_0(f) = \emptyset$. De esta manera hemos confirmado lo anticipado acerca de las raíces.

Para hallar la ordenada al origen evaluamos la función en $x = 0$:

$$f(0) = (0-4)^2 + \frac{5}{3} = 16 + \frac{5}{3} = \frac{53}{3}$$

Con la información obtenida realizamos un gráfico aproximado de la función:



2.3 Forma factorizada de una función cuadrática

Recordemos que la función cuadrática en *forma factorizada* se escribe como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = a.(x - r_1).(x - r_2)$$

donde a, r_1 y r_2 son números reales, y $a \neq 0$. En esta expresión puede observarse que $f(r_1) = 0$ y también $f(r_2) = 0$ de donde resulta que r_1 y r_2 son las *raíces* de la función. Al coeficiente a se le pide la condición de ser no nulo pues si fuese $a = 0$, f sería la función que constantemente toma el valor 0 (y no sería entonces una función cuadrática).

En el caso de la función que modeliza al problema del granjero, definida por la expresión $f(x) = x.(20 - x)$, se observa que está escrita en forma "casi" factorizada. Para llevarla a esa forma, debemos escribirla como

$$f(x) = (-1).x.(x - 20) = (-1).(x - 0).(x - 20)$$

y aquí se ve que las raíces son $r_1 = 0$ y $r_2 = 20$ tal como sabíamos, y además, que $a = -1$.

Como es natural pensar, dado que la expresión factorizada de una función cuadrática explicita las raíces de dicha función, si ésta no posee raíces **no podrá ser escrita en forma factorizada**.

En resumen, la *expresión factorizada* de una función cuadrática da lugar a las siguiente "forma de presentación" en términos de sus raíces reales r_1 y r_2:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = a.(x - r_1).(x - r_2)$ donde $a \neq 0$.

Si acaso $r_1 = r_2$, la expresión factorizada se reduce:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = a.(x - r_1)^2$ si $r_1 = r_2$.

Algunos ejemplos de funciones cuadráticas escritas en forma factorizada pueden ser:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ g(x) = 2.(x - 3).(x + 1)$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ h(x) = -3.(x - 5)^2$$

A continuación presentamos una breve explicación acerca de cómo obtener información sobre las características o elementos del gráfico de un función cuadrática cuando ésta viene presentada en la forma factorizada:

Para determinar el tipo de concavidad de la parábola y también la posición de sus ramas respecto del eje de simetría, se realiza el mismo análisis que hemos hecho para la forma canónica, pues dichas características dependen del coeficiente principal a.

¿Cómo determinar las coordendas del vértice? Las coordenadas del vértice son $x_v = \frac{r_1 + r_2}{2}$ e $y_v = f(x_v)$

¿Cómo determinar el eje de simetría? El eje de simetría equidista de cualquier par de valores simétricos de la parábola y, en particular, de las dos raíces $x = r_1$ y $x = r_2$. De esta forma, el eje de simetría es la recta vertical de ecuación $x = \frac{r_1+r_2}{2}$.

¿Cómo determinar las intersecciones del gráfico con los ejes coordenados? La intersección con el eje de las abscisas se da en los puntos $(r_1, 0)$ y $(r_2, 0)$, donde r_1 y r_2 son las raíces o ceros de la función.

La ordenada al origen o intersección con eje y se obtiene de reemplazar $x = 0$ en la fórmula. Por lo tanto, el gráfico interseca al eje de ordenadas en el valor $y = f(0)$, que en este caso particular sería: $y = a(0 - r_1)(0 - r_2) = ar_1r_2$.

Ejercicio resuelto 3. Dada la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2.(x - 3).(x + 1)$, determinar intersecciones con los ejes coordenados, vértice y determinar máximo o mínimo según corresponda. Indicar intervalos en donde la función es creciente y decreciente, y conjunto imagen. Determinar el punto del gráfico que es simétrico al punto de abscisa $x = -\frac{8}{3}$.

Resolución: La función cuadrática $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2.(x - 3).(x + 1)$ está escrita en forma factorizada, y sus raíces son $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$. De este modo tenemos determinadas las intersecciones con el eje de las abscisas: se da en los puntos $(3, 0)$ y $(-1, 0)$.

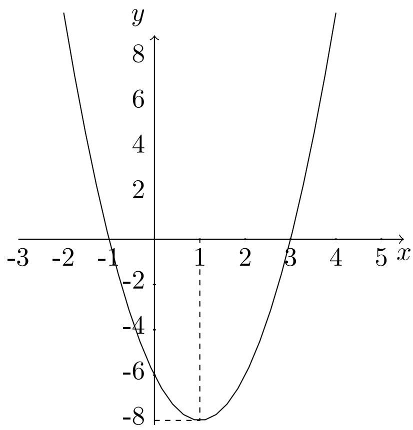
La intersección con el eje de ordenadas, se da en el punto $(0, y)$, donde $y = g(0)$. En este caso, $y = g(0) = 2.(-3).1 = -6$.

El vértice de esta función tiene coordenadas: $x_v = \frac{r_1+r_2}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = 1$ e $y_v = g(x_v) = g(1) = 2(1 - 3)(1 + 1) = -8$, es decir, $V = (1; -8)$.

Como el coeficiente principal de la función es $a = 2 > 0$, la parábola tiene las ramas hacia arriba y, por lo tanto, la función alcanza un mínimo en el vértice. Es decir, en $x = 1$ la función alcanza su valor mínimo, y éste es $g(1) = -8$. A partir de esta información, deducimos que el conjunto imagen de la función será $\mathrm{Im}(g) = [-8, +\infty)$. Como en el vértice alcanza un mínimo, la función es creciente en el intervalo $[1, +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1]$

El punto del gráfico que tiene abscisa $x = -\frac{8}{3}$ es $P = (-\frac{8}{3}, \frac{170}{9})$. Para determinar el punto simétrico a este, debemos observar a qué distancia se encuentra $-\frac{8}{3}$ de $x_v = 1$. Para ello, observemos que $-\frac{8}{3} < 1$, con lo que la distancia se calcula mediante la diferencia $1 - (-\frac{8}{3}) = \frac{11}{3}$. De este modo, sabemos que el punto simétrico a P tendrá abscisa mayor que 1, y ésta será $x = 1 + \frac{11}{3} = \frac{14}{3}$. Luego, el punto simétrico a P es $Q = (\frac{14}{3}, \frac{170}{9})$.

Observación: Como $g(-\frac{8}{3}) = \frac{170}{9}$, para calcular el punto simétrico a P podríamos tener en cuenta que la ordenada de dicho punto será $\frac{170}{9}$, y que la abscisa se obtendría al resolver la ecuación $g(x) = \frac{170}{9}$, una de cuyas soluciones será $-\frac{8}{3}$ y la otra será la abscisa buscada. Proponemos como ejercicio realizar estos cálculos y verificar lo dicho.



2.4 Forma polinómica de una función cuadrática

Una función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está en su forma polinómica cuando su expresión responde al formato

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$. Notar que si $a = 0$, la función no sería cuadrática sino una función lineal.

A continuación presentamos una breve explicación acerca de cómo obtener información sobre las características o elementos del gráfico de un función cuadrática cuando viene presentada en la forma polinómica:

El tipo de concavidad y la posición de las ramas de la parábola respecto del eje de simetría, dependen del "coeficiente principal" a como en los otros formatos.

¿Cómo determinar las coordenadas del vértice? La abscisa del vértice x_v, se obtiene como promedio de cualquier par de abscisas de puntos simétricos, o sea, si x_1 y x_2 son tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$x_v = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

Esto lo vimos cuando estudiamos la forma factorizada donde x_1 y x_2 son las raíces de la función. En caso de que la cuadrática no posea raíces ¿cómo encontramos dos puntos simétricos de la función? Es decir ¿cómo encontramos x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$? Como se trata de buscar cualquier par de puntos simétricos, vamos a buscar todos los valores de x que tengan ordenada $y = c$, o sea, las soluciones de la ecuación $f(x) = c$. En este caso, resulta

$$ax^2 + bx + c = c$$

es decir

$$ax^2 + bx = 0 \Longleftrightarrow x.(a.x + b) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad (a.x + b) = 0\ .$$

De esta manera concluimos que las soluciones son

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{b}{a}\ .$$

Resulta entonces que $x_v = \dfrac{0 - \frac{b}{a}}{2} = -\dfrac{b}{2a}$.

Una vez conocido el valor x_v, la coordenada y_v se obtiene evaluando la función en el valor x_v, o sea, $y_v = f(x_v)$.

¿**Cómo determinar el eje de simetría**? El eje de simetría es la recta vertical de ecuación $x = x_v$, que en este caso resulta $x = -\frac{b}{2a}$

¿**Cómo determinar las intersecciones del gráfico con los ejes coordenados**?

Los puntos de intersección con el eje x resultan de plantear $ax^2 + bx + c = 0$. Como ya sabemos (de la sección de Álgebra) las soluciones de esta ecuación se obtienen aplicando la fórmula resolvente:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{o} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se observa que si $b^2 - 4ac > 0$ la parábola tiene dos raíces reales distintas, si $b^2 - 4ac = 0$ tiene sólo una raíz real (raíz doble) que es $x = -\frac{b}{2a}$, que coincide con la abscisa del vértice, y por último, si $b^2 - 4ac < 0$ la parábola no tiene raíces reales, es decir, la gráfica no corta al eje de las abscisas.

La intersección con el eje y resulta de reemplazar $x = 0$ en la fórmula, de donde se obtiene que la ordenada al origen es el valor

$$y = f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c$$

2.5 Problema resuelto: El problema de las temperaturas

Ejercicio resuelto 4. Durante un día de junio se midió la temperatura ambiente en una localidad de Chubut. A partir de los datos registrados se propuso la siguiente función que describe la variación de la temperatura ambiente durante ese día,

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 7$$

donde A es el dominio de la función

(a) ¿Cuál fue la temperatura máxima alcanzada ese día? ¿y la mínima? Indicar en qué momentos se alcanzaron dichos valores.

(b) En una casa de dicha localidad las estufas se autorregulan en función de la temperatura externa de la siguiente manera: se encienden al máximo cuando la temperatura externa es inferior a los 3 grados bajo cero. ¿Estuvieron al máximo las estufas de la casa en ese día? En caso afirmativo, indicar en qué instantes del día las estufas estuvieron encendidas al máximo.

Resolución: Antes de comenzar a hacer cálculos, observemos algunas cuestiones que surgen del análisis de la función que describe la variación de la temperatura ambiente a lo largo de ese día de junio:

1. es una función cuadrática cuyo dominio es el intervalo $A = [0, 24]$, puesto que el mismo representa la duración de un día

2. su gráfico es una parábola cuyas ramas van "hacia abajo", dado que el coeficiente principal es negativo $(a = -\frac{1}{9})$. Además, el vértice es un punto máximo de la función.

Es importante notar que resultaría muy útil contar con el gráfico de la función pues éste nos permitiría conocer de manera global la evolución de la temperatura a lo largo de ese día.

Para realizar el gráfico necesitamos conocer, por lo menos, un par de puntos simétricos y las coordenadas del vértice de la parábola. Un par de puntos simétricos se puede encontrar, por ejemplo, a partir de la ordenada al origen, la cual calculamos evaluando la función en $x = 0$

$$f(0) = -\frac{1}{9}.0^2 + \frac{8}{3}.0 - 7 = -7$$

De esta manera tenemos un punto de la parábola, el $(0, -7)$, que representa la intersección con el eje de ordenadas. Para determinar (si es que existe) el simétrico de dicho punto necesitamos saber para qué otro valor de x también se verifica que $f(x) = -7$. Esto lo averiguamos resolviendo la ecuación

$$-\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 7 = -7$$

Observar que ya conocemos una de sus soluciones, $x = 0$; veamos si existe otra:

$$-\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 7 = -7 \iff -\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x = 0 \iff x.(-\frac{1}{9}x + \frac{8}{3}) = 0$$

esta última condición se cumple si y solo si

$$x = 0 \text{ ó } -\frac{1}{9}x + \frac{8}{3} = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = 24$$

Hemos encontrado dos soluciones distintas, $x_1 = 0$ y $x_2 = 24$, lo que nos indica que los puntos $(0, -7)$ y $(24, -7)$ son simétricos.

Sabemos, por lo trabajado anteriormente, que la abscisa del vértice se calcula realizando el promedio de dos valores simétricos, en este caso 0 y 24: $x_v = \frac{0+24}{2} = 12$.

Notemos que el procedimiento realizado para hallar la abscisa del vértice se puede repetir con cualquier función cuadrática, puesto que siempre es posible calcular su ordenada al origen y determinar su simétrico. Observar que si el simétrico coincide con el mismo punto, significaría que ese punto no es otro que el vértice.

De manera que el procedimiento desarrollado anteriormente se puede generalizar, tal como vimos en el apartado anterior, y es a partir de este procedimiento que se deduce la "famosa" fómula para la abscisa de vértice

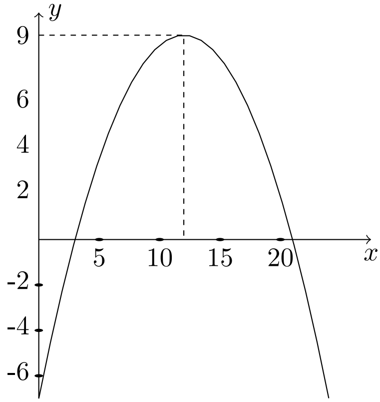
$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Una vez conocida la abscisa del vértice, la ordenada se calcula reemplazando dicho valor en la función

$$y_v = f(x_v)$$

en este caso, $y_v = f(12) = -\frac{1}{9}(12)^2 + \frac{8}{3}.12 - 7 = 9$.

De esta manera ya estamos en condiciones de realizar un gráfico aproximado de la función:



Observemos que a partir de la lectura del gráfico podemos realizar una descripción global de la variación de la temperatura ambiente durante el día en cuestión: la temperatura a la hora 0 fue de 7 grados bajo cero, luego comenzó a subir hasta llegar a 9 ^{o}C a las 12 del medio día, esta temperatura representó la máxima registrada ese día. A partir de ese momento la temperatura descendió hasta llegar nuevamente a los 7 grados bajo cero, temperatura que alcanzó a la medianoche.

Con esta información podemos responder al ítem a:

Respuesta: La temperatura máxima se alcanzó a las 12 horas y la misma fue de 9 ^{o}C. La temperatura mínima fue de 7 grados bajo cero y se alcanzó en dos momentos distintos: a las 0 y a las 24 horas.

Para responder al ítem b necesitamos, en primer lugar, saber cuándo la temperatura fue de -3 grados. Es decir, debemos calcular para qué valor o valores de x tales que $f(x) = -3$. Analizando el gráfico podemos anticipar que hubo dos momentos en los que la temperatura alzanzó dicho valor, uno en la primera parte del día, entre $x = 0$ y $x = 5$, y otro en la segunda parte, entre $x = 20$ y $x = 24$. Resolvamos la ecuación y encontremos los instantes exactos en los que se registró dicha temperatura:

$$-\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 7 = -3 \iff -\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 4 = 0$$

aplicando la fórmula resolvente encontramos que las soluciones son $x_1 = 12 + 6\sqrt{3} \cong 22,4$ y $x_2 = 12 - 6\sqrt{3} \cong 1,6$.

Para determinar si las estufas estuvieron encendidas al máximo necesitamos saber si la temperatura fue inferior a -3 en algún momento del día. Para ello debemos determinar si existen valores de x para los cuales $f(x) < -3$, es decir, si hay valores de x cuyas imágenes son valores inferiores a $y = -3$. Si recurrimos al gráfico y trazamos una recta horizontal en $y = -3$ encontramos que hay dos puntos de intersección entre la parábola y la recta: $(x_1, -3)$ y $(x_2, -3)$. Vemos, además, que por debajo de esa recta horizontal hay dos tramos de la parábola; uno de los tramos corresponde al intervalo $[0, x_1)$ y el otro al intervalo $(x_2, 24]$. Esto quiere decir que los valores de x que pertenecen a ambos intervalos verifican que sus imágenes, $f(x)$, son valores inferiores a $y = -3$.

Respuesta: la temperatura ambiente fue inferior a -3 ^{o}C y, por lo tanto, las estufas estuvieron encendidas al máximo, en dos intervalos de tiempo: en $[0, x_1)$ y en $(x_2, 24]$ con $x_1 = 12 + 6\sqrt{3}$ y $x_2 = 12 - 6\sqrt{3}$.

2.6 Problema resuelto: El problema de las ganancias

Ejercicio resuelto 5. Las ganancias G (en pesos) de un proveedor mayorista dependen del precio de venta p (también en pesos) del producto que comercializa y pueden ser modelizadas mediante una función cuadrática, que también llamaremos G, que verifica las siguientes condiciones:

(i) $G(3) = G(21) = 608$

(ii) La ganancia es de \$3200 cuando el precio es de \$12

(iii) El precio de venta no puede superar los \$25.

Sabiendo estas condiciones, se pide:

(a) Definir la función G (dominio, codominio y fórmula)

(b) Determinar qué precio debe fijar la empresa para que la ganancia sea de \$1362 considerando que el mismo debe ser inferior a los \$12.

Resolución:

Resolución del inciso (a): Para responder a esta consigna, debemos determinar el dominio y codominio de la función G que modeliza las ganancias del proveedor en términos del precio de venta p. En relación con el dominio, observemos que la variable independiente es el precio p, de manera que los valores de la misma deben ser mayores o iguales que cero, es decir $p \geq 0$. Por otro lado, la restricción planteada en iii) acerca del precio, establece que éste no puede superar los 25 pesos, lo cual nos permite afirmar que $p \leq 25$. De esta manera, tenemos que $\mathrm{Dom}(G) = [0, 25]$. Para el codominio podemos considerar el conjunto de todos los números reales: $\mathrm{Codom}(G) = \mathbb{R}$.

Para determinar la fórmula o expresión que define a la función, debemos decidir en cuál de los 3 formatos que conocemos de las funciones cuadráticas nos conviene presentar. Analicemos los datos que se dan e intentemos determinar qué elementos representan. En primer lugar, podemos ver que el dato $G(3) = G(21) = 608$ nos aporta la información de *dos puntos simétricos* del gráfico de G, que son el $(3, 608)$ y el $(21, 608)$. Sabemos que a partir de un par de puntos simétricos es posible obtener la abscisa del vértice como el promedio de las dos abscisas de los puntos dados. Calculémosla en nuestro caso: $p_v = \frac{p_1+p_2}{2} = \frac{3+21}{2} = 12$

Por otro lado, también tenemos como dato que el punto $(12, 3200)$ pertenece a la gráfica de la función y que, a partir del cálculo anterior, no es otro que el vértice de la parábola definida por la función G (pues hemos obtenido que $p_v = 12$). De este modo, tenemos que los datos que disponemos son el vértice $V = (12, 3200)$ y un par de puntos simétricos de la función.

Repasando los tres formatos de la función cuadrática que hemos analizado (polinómica, factorizada y canónica), podemos ver que lo que conviene es construir la expresión de G en forma canónica puesto que contamos con la información del vértice. El procedimiento que se sigue sería el siguiente:

El formato general de la forma canónica de una función cuadrática es

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \text{ donde } h = x_v \text{ y } k = y_v.$$

Para definir la función G en dicho formato necesitamos conocer los valores de a, h y k. Conocemos los valores de $h = 12$ y $k = 3200$, pero nos falta determinar cuál es el valor que le corresponde al coeficiente principal a.

Reemplazamos los valores que ya conocemos en el formato general, nombramos a las variables según el problema, a la variable independiente la denotamos p y a la dependiente G. De esta forma la fórmula de la función será: $G(p) = a(p-12)^2+3200$.

El valor de a lo calcularemos a partir de los datos dados; para ello deberíamos poder plantear una ecuación cuya incógnita sea a. Un dato que nos puede ser útil es que la función G debe verificar, por ejemplo, que $G(3) = 608$. Es decir que cuando reemplacemos $p = 3$ en la fórmula, ésta nos debe devolver 608 como resultado. Considerando este dato queda planteado:

$$G(3) = a(3 - 12)^2 + 3200 = 608,$$

es decir

$$a(-9)^2 + 3200 = 608$$

Observemos que hemos obtenido una ecuación cuya <u>única</u> incógnita es a, de manera que al resolverla encontraremos el valor que se ajusta a los datos dados. La resolución es:

$$\begin{gathered} a(-9)^2 + 3200 = 608 \\ 81.a + 3200 = 608 \\ 81.a = 608 - 3200 \\ 81.a = -2592 \end{gathered}$$

$$a = \frac{-2592}{81}$$

$$a = -32$$

La respuesta entonces sería:
La función G *puede definirse de la siguiente manera:*

$$G : [0, 25] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad G(p) = -32.(p - 12)^2 + 3200$$

Resolución del inciso (b): Para determinar qué precio debe fijar la empresa para obtener una ganancia de \$1632 podemos utilizar la expresión de la función G: debemos determinar para qué valores de p se verifica que $G(p) = 1632$. De esta manera planteamos y resolvemos la ecuación

$$-32.(p - 12)^2 + 3200 = 1632$$

que para resolverla comenzamos "despejando", por ejemplo, de la siguiente manera:

$$-32.(p - 12)^2 = 1632 - 3200$$

$$-32.(p - 12)^2 = -1568$$

de donde

$$(p - 12)^2 = \frac{-1568}{-32}$$

es decir

$$(p - 12)^2 = 49$$

con lo cual

$$p - 12 = \sqrt{49} \quad \text{ó} \quad p - 12 = -\sqrt{49}$$

$$p - 12 = 7 \quad \text{ó} \quad p - 12 = -7$$

es decir

$$p = 19 \quad \text{ó} \quad p = 5$$

Así, a partir de los cálculos realizados hallamos que, para obtener una ganancia de \$1632 el precio puede ser \$5 ó \$19. Sin embargo, para responder debemos tener en cuenta la restricción impuesta en el enunciado, que establece que el precio debe ser inferior a \$12. Con esto, obtenemos la siguiente respuesta:

Respuesta: para obtener una ganancia de \$1632 la empresa debe vender su producto a un precio de \$5 la unidad.

Trabajo práctico 28

Ejercicio 1. (Acerca de lectura)

(a) ¿En qué formato está escrita la fórmula de la función cuadrática

$$f(x) = a(x-h)^2 + k \quad (a \neq 0)?$$

Explique al menos dos formas distintas de resolver la ecuación $a(x-h)^2 + k = 0$.

(b) Explicar cómo puede predecirse el conjunto imagen de una función cuadrática a partir del análisis de los parámetros de su expresión en la forma canónica.

Ejercicio 2. Para cada función determinar vértice, tipo de concavidad, intersecciones con los ejes coordenados y el conjunto imagen. Con la información obtenida realizar un gráfico aproximado. En cada caso, determinar un par de puntos simétricos de abscisas diferentes a las raíces.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x + \frac{5}{4})^2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5}{3}(x-1)^2 - 5$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3(x+2)^2 - 1$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3(x - \frac{3}{4}).x$

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{3}(x+2)(x-3)$

Ejercicio 3. Los ingresos mensuales I de cierta compañía, están dados por la expresión $I(p) = 800p - 4p^2$, en donde p es el precio en pesos del producto que fabrica.

(a) Definir una función que modelice la situación de la compañía en relación a los ingresos por ventas cuya expresión sea la dada por $I(p)$.

(b) ¿A qué precio se obtendrían ingresos de \$30.000, si el mismo debe ser inferior a \$100 pesos?

(c) ¿En qué precio se da el mayor ingreso? ¿cuál es dicho ingreso?

Ejercicio 4. Una empresa comercializa un producto de limpieza cuyo precio varía en función de la cantidad de unidades vendidas del producto. Teniendo en cuenta que para una cantidad q de unidades vendidas el precio unitario del producto es $(80-q)/5$, analizar la evolución del ingreso de la empresa según la cantidad de unidades vendidas.

Ejercicio 5. Las ganancias g de una empresa (en pesos) a través del tiempo t (medido en meses) se pueden calcular mediante una función cuadrática que cumple $g(15) = g(55) = 2250$. Si además se sabe que a los 35 meses tuvo una ganancia de \$ 6250, se pide definir dicha función g (dominio, codominio y fórmula) y determinar el o los momentos en los que la empresa tuvo una ganancia de \$ 6000.

Ejercicio 6. Un proyectil se lanza desde una plataforma ubicada a 144 m del piso. Al principio, el proyectil comenzó a subir rápidamente, y después de un tiempo, comenzó a descender. Si se sabe que la altura del proyectil en función del tiempo responde a una función cuadrática, que la altura máxima alcanzada fue 722 m y que se alcanzó a los 17 segundos del lanzamiento:

a) Determinar en qué instantes el proyectil se encuentra a 624 m del piso.

b) ¿Durante cuánto tiempo estuvo el proyectil en el aire?

Ejercicio 7. Las ganacias (en pesos) de una empresa a través del tiempo t (medido en meses) están dadas por la función $g : A \to \mathbb{R}$, $g(t) = -10t^2 + 500t - 490$.

(a) Determinar el conjunto A y realizar un gráfico aproximado de la función.

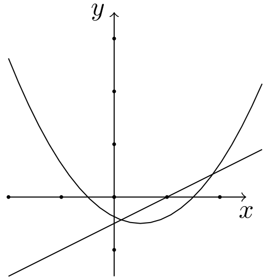
(b) Determinar el conjunto B que representa los meses en que la empresa no tuvo pérdidas. Representar dicho conjunto en el gráfico del ítem anterior.

(c) Determinar en qué momento se produjo la mayor ganacia y calcularla.

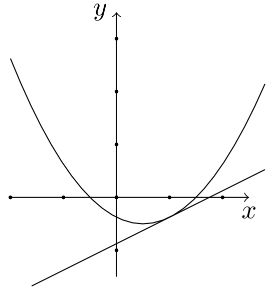
Ejercicio 8. Un productor de sidra que tiene una plantación de 40 manzanos desea aumentar su producción incrementando el número de manzanas cosechadas. Contrata a un ingeniero agrónomo para que lo asesore. El profesional realiza un estudio en el que concluye que con la cantidad de manzanos que posee actualmente, la producción de cada uno es de 500 manzanas al año, pero si agrega árboles a la plantación la producción de cada uno disminuirá. Sabiendo que por cada árbol que agregue la producción de los manzanos disminuye en 5 unidades, determinar qué cantidad de árboles le conviene tener en su plantación para obtener la mayor cantidad de manzanas cosechadas.

3 Intersecciones entre parábolas y rectas.

Hablar de las intersecciones entre parábolas y rectas, es hablar de las intersecciones entre los gráficos de una función cuadrática y una lineal, pero ¿qué representan o indican? y sobre todo ¿cómo se calculan? La primera pregunta tiene una respuesta sencilla, pues las intersecciones entre curvas (gráficos) en el plano, en general, indican los puntos en los cuales las curvas "se cruzan", incluyendo en esta expresión el caso en que las curvas "solo se toquen" y no se crucen. En definitiva, estamos hablando de situaciones como las que se presentan en las siguientes ilustraciones, en las que se involucran parábolas y rectas.

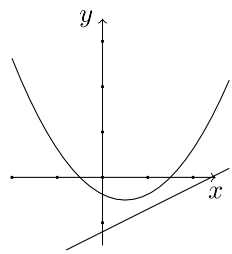


Curvas que “se cruzan”



Curvas que “se tocan” y no se “cruzan”

Las anteriores son dos de las tres posibilidades que se presentan al pensar en las intersecciones entre rectas y parábolas. La tercera posibilidad es aquella en la que ambas curvas no tienen intersección, es decir “ni se tocan ni se cruzan”. Un ejemplo es el que se observa en la siguiente ilustración



Curvas que no se “tocan” no se “cruzan”

La pregunta ¿cómo se calculan los puntos de intersección? merece un tratamiento más extenso.

Para determinar los puntos de intersección de los gráficos o las curvas definidas por las funciones f y g, cuadrática y lineal respectivamente, debemos plantear, como ya lo hemos visto en los anteriores capítulos, la ecuación $f(x) = g(x)$. De la resolución de esta ecuación obtenemos la o las abscisas de los puntos de intersección en caso de que éstas existan, y luego, reemplazando éstas en las expresiones de f o de g obtenemos las respectivas ordenadas de los puntos buscados. Esto lo veremos con todo detalle en el siguiente apartado.

3.1 Determinación de los puntos de intersección.

Para mostrar, concretamente, cómo calcular las coordenadas de los puntos de intersección, supongamos que f sea la función cuadrática definida, por ejemplo, como

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$$

y la función lineal g como:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ g(x) = mx + k$$

donde a, b, c, m y k son números reales fijos, con $a \neq 0$.

Los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones son puntos de la forma $P = (x_0, y_0)$, donde la abscisa x_0 del punto verifica que $f(x_0) = g(x_0)$, y la ordenada y_0 del punto se obtiene, entonces, como $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$.

Lo que se necesita, entonces, es determinar la abscisa x_0. Para ello, lo que debemos resolver es la ecuación

$$f(x) = g(x)$$

y sus soluciones serán las abscisas de todos los puntos de intersección que tengan la parábola y la recta determinadas por las funciones f y g.

En este caso, es interesante observar que esa ecuación, escrita en términos de las expresiones que definen a las funciones, adquiere la forma:

$$ax^2 + bx + c = mx + k$$

que resulta ser una ecuación de segundo grado. De allí, que sean tres las posibilidades que se presentan al pensar en las intersecciones de una parábola con una recta, tal como hemos señalado al comienzo de esta sección. Estas tres posibilidades obedecen a las tres diferentes situaciones que se presentan al resolver una ecuación cuadrática o de segundo grado:

- Que tenga dos soluciones reales y distintas, lo que hace referencia a la situación que ilustramos como *curvas que se cruzan*
- Que tenga una única solución real (que será una solución o raíz doble de la ecuación), que se refiere a las *curvas que se tocan y no se cruzan* y
- Que no tenga ninguna raíz real, lo cual hace referencia a las *curvas que no se cruzan* ni se tocan.

Como ya mencionamos anteriormente, una vez halladas las soluciones de esta ecuación (en el caso que las tenga), las segundas coordenadas de los puntos de intersección surgen de evaluar en alguna de las dos funciones cada una de dichas soluciones.

Todo lo mencionado en este apartado, posiblemente sea más comprensible a partir de ver el análisis de una situación concreta, como el que haremos en lo que sigue.

3.2 Problemas con intersecciones: un ejemplo resuelto

En este apartado resolveremos el siguiente ejemplo:

Ejercicio resuelto 6.

Determinar los puntos de intersección de las funciones f y g de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dadas por las siguientes expresiones:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 \text{ y } g(x) = -2x + 3.$$

Hacer un gráfico aproximado donde se observen las intersecciones halladas.

Resolución: Como mencionamos en el apartado anterior, para hallar las coordenadas de los puntos de intersección de las curvas definidas por ambas funciones debemos, en primer lugar, hallar las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$, que en nuestro caso se traduce en resolver la ecuación

$$-x^2 + 2x + 3 = -2x + 3$$

o, equivalentemente,

$$-x^2 + 2x + 3 + 2x - 3 = 0$$

es decir,

$$-x^2 + 4x = 0.$$

Pero

$$-x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 4$$

Luego, esta ecuación tiene dos soluciones reales distintas, que son: $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$. Así, habrá dos puntos de intersección entre las funciones, y serán los puntos $P_1 = (0, y_1)$ y $P_2 = (4, y_2)$, donde $y_1 = f(0) = g(0)$ e $y_2 = f(4) = g(4)$.

Como para los valores hallados, $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$ es indistinto el resultado que, en cada uno, arrojen las funciones f y g por ser los valores en los que ambas funciones coinciden, podemos elegir en qué función evaluar cada uno. Para ello, podemos tener en cuenta el tipo de dificultades que ofrecen ambas funciones, y elegir aquella en la cual haya "menos cálculos" por hacer. En este caso, parece que lo más "económico" en cuentas es evaluar en la función lineal g. De este modo, tenemos que:

$y_1 = g(0) = -2.0 + 3 = 3$, y también,

$y_2 = g(4) = -2.4 + 3 = -5.$

A partir de estos resultados, se tiene que los puntos de intersección de ambas funciones son: $P_1 = (0, 3)$ y $P_2 = (4, -5)$. El gráfico aproximado es: