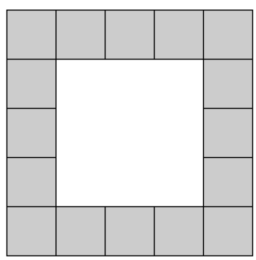
MÓDULO 3

Álgebra

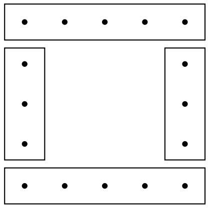
1 Expresiones algebraicas y ecuaciones

1.1 Producción de expresiones algebraicas

Ejemplo 1. Un hipermercado de artículos para el hogar ofrece un diseño de canteros con forma de cuadrado cuyo contorno está hecho con cerámicas. La figura de la derecha muestra el caso en que el diseño contiene 5 cerámicas por lado. La zona central está reservada para una planta o un árbol. ¿Cuántas cerámicas se necesitan para construir un cantero con el mismo diseño si en cada lado hay 24 cerámicas?

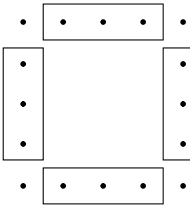


Una forma de encarar este problema es contar una por una las cerámicas a partir de una figura como la dada, aplicada al caso de 24 cerámicas. Pero es bastante evidente que este método no es práctico y que hay formas más económicas de contar las cerámicas. De hecho, ni siquiera para el caso del ejemplo dado en el enunciado contaríamos las cerámicas una por una sino que buscaríamos una forma mejor. ¿Cuáles pueden ser esas formas más económicas? Veamos unas cuantas, aplicadas al caso de cinco cerámicas por lado.



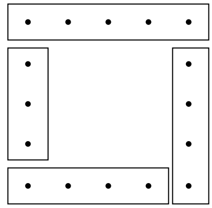
$5 + 5 + 3 + 3$ ó
$2.5 + 3 + 3$ ó
$2 \cdot 5 + 2 \cdot 3$

FIGURA 1



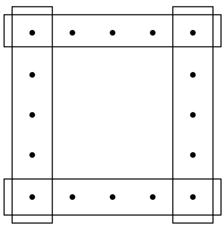
$3 + 3 + 3 + 3 + 4$ ó
$4 \cdot 3 + 4 \cdot 1$ ó
$2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 + 1 + 1 + 1$

FIGURA 2



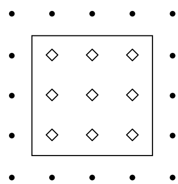
$5 + 4 + 4 + 3$ ó
$5 + 2 \cdot 4 + 3$

FIGURA 3



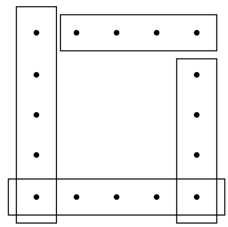
$5 + 5 + 5 + 5 - 1 - 1 - 1 - 1$
ó
$4 \cdot 5 - 4 \cdot 1$

FIGURA 4



$5.5 - (5 - 2).(5 - 2)$
ó
$5^2 - 3^2$

FIGURA 5



$5 + 5 - 1 + 4 + 4 - 1$
ó
$2 \cdot 5 - 1 + 2 \cdot 4 - 1$

FIGURA 6

Todas las formas de contar que hemos mostrado en las figuras de arriba son correctas y con cada una de ellas llegamos a la misma conclusión: se necesitan 16 cerámicas en total. Claro que quien solo pretende resolver el problema bien puede haber contado de una sola manera y esto es suficiente para responder a la pregunta.

En el problema original se pregunta por la cantidad total de cerámicas cuando la cantidad sobre cada lado es 24. Para resolver, podríamos realizar el dibujo, aunque empezaríamos a verle alguna debilidad al método, ya que dibujar será engorroso. Esto puede suplirse, quizás, imaginando la figura de referencia y pensando como cuando había cinco cerámicas por lado. En cualquier caso, ya sabemos cómo resolver el problema. Solo resta realizar el cálculo: contando con el criterio del primer gráfico hay $24 + 24 + 22 + 22$, es decir, 92 cerámicas.

Pese a que el problema está resuelto, la situación es propicia para desarrollar algunos aspectos típicos del trabajo matemático, como son la búsqueda de generalidades y la formulación de nuevas preguntas a partir de los problemas que se resuelven.

El tipo de razonamiento que hicimos para saber la cantidad total de cerámicas teniendo como dato la cantidad de cerámicas que uno desea ubicar en cada lado del cantero no depende de esta última cantidad. Esta observación es válida para cualquiera de las formas de contar que se mostraron más arriba. Esta particularidad es un indicador de que en la forma de conteo utilizada está presente una suerte de generalidad.

Ejemplo 2. ¿Cuántas cerámicas por lado hay que colocar para que el total sea de 240?

Lo que disponemos hasta ahora no parece muy útil. Deberíamos ir probando con distintas cantidades de cerámicas por lado, intentando llegar al valor dado.

En primer lugar, necesitamos establecer una forma general de contar la cantidad total de cerámicas. Según la primera forma de contar, el número total de cerámicas se obtiene sumando las cantidades de cerámicas de dos lados paralelos horizontales y agregándoles las cantidades que quedan en cada uno de los otros lados. En estos últimos, la cantidad que queda es 2 menos de los que hay en total en esos lados (descontamos los dos extremos de cada lado, que ya han sido contados):

la cantidad de cerámicas por lado (desconocida) más la (misma) cantidad de cerámicas por lado más la (misma) cantidad de cerámicas por lado menos 2 más la (misma) cantidad de cerámicas por lado menos 2.

¿Cómo podemos simbolizar esto? A esa cantidad desconocida de cerámicas que ubicamos por cada lado, podríamos asignarle un nombre, un símbolo, por ejemplo n ó x, o algún nombre cualquiera. De esta forma, logramos pensar en un número natural cualquiera y no en un número particular, como sí lo hicimos en cada uno de los ejemplos que señalamos antes. Para hacer nuestros cálculos, usemos la letra n para referirnos al número de cerámicas necesarias para cubrir un lado del terreno. Vamos a reproducir, entonces, los cálculos hechos anteriormente, refiriéndonos ahora a la cantidad n. Entonces, lo que estamos diciendo se expresa en el siguiente cálculo, que nos da la cantidad total de cerámicas para armar el diseño:

$$n + n + (n - 2) + (n - 2), \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad 2n + 2(n - 2),$$

en donde queda explicitada la forma en que hemos pensado el conteo. No obstante, la expresión puede darse en forma más simplificada, operando sobre ella:

$$2n + 2(n - 2) = 2n + 2n - 4 = 4n - 4$$

Es decir, si por cada lado usamos n cerámicas, para cercar todo el terreno tendremos un total de $4n - 4$ cerámicas.

Nota: se aplicó la propiedad distributiva trabajada en la sección sobre cálculos combinados.

Expresiones algebraicas. Llamamos así a expresiones que contienen variables y, eventualmente, números, combinados mediante operaciones matemáticas (suma, multiplicación, etc.). Por ejemplo, cualquiera de las expresiones obtenidas anteriormente, $2n+2(n-2)$, $2n+2n-4$ ó $4n-4$, son expresiones algebraicas con una sola variable, en este caso n, y las operaciones que combinan a los números y a las variables son sumas y productos entre números y la variable.

Veamos dos ventajas de introducir el uso de expresiones algebraicas en la resolución del problema. La primera es que siendo n la cantidad de cerámicas por lado, la cantidad total que emplearemos para el diseño es $4n - 4$ (tomamos la expresión más simplificada por economía en el trabajo). Podemos conocer cuántas cerámicas hay en total para cualquier cantidad de cerámicas por lado, con solo asignar a n ese valor y realizar el cálculo numérico sin volver a pensar en cómo contarlas. Comprobemos que los resultados obtenidos mediante la expresión algebraica $4n - 4$ coinciden con los que hemos hecho en los casos particulares anteriores:

- Con 5 cerámicas por lado ($n = 5$) necesitamos 16 cerámicas, lo que se corresponde con utilizar $n = 5$ en nuestro cálculo general, $4n - 4$, que en este caso da: $4 \cdot 5 - 4 = 20 - 4 = 16$.

- Con 24 cerámicas por lado ($n = 24$), habíamos obtenido 92 cerámicas. Ahora también:
$$4n - 4 = 4 \cdot 24 - 4 = 96 - 4 = 92.$$

La segunda ventaja de haber obtenido una expresión algebraica es que podemos responder con cierta facilidad a la pregunta que originó estos avances: ¿cuántas cerámicas por lado se necesitan para que el total sea de 240? Veremos cómo se resuelve en el siguiente apartado.

1.2 Ecuaciones

Retomando lo anterior, cuando nos informan que disponemos de 240 cerámicas en total, suponemos que habrá una cierta cantidad n por cada lado de manera que el total de cerámicas requeridas $4n - 4$ será 240. En estas condiciones desconocemos el valor de n y queda planteado encontrar un n tal que se verifique la igualdad

$$4n - 4 = 240.$$

Esto es lo que llamamos una ecuación cuya incógnita es n. Apelando a los conocimientos básicos de resolución de ecuaciones podemos resolverla:

$$4n - 4 = 240 \Leftrightarrow 4n = 244 \Leftrightarrow n = 61\ .$$

Esto quiere decir que hay que disponer 61 cerámicas por lado para cubrir el perímetro del cantero con 240 cerámicas. En términos algebraicos, hemos obtenido la solución de la ecuación $4n - 4 = 240$. Ahora: ¿qué es una solución de la ecuación $4n - 4 = 240$? Es un valor numérico de la variable n que hace que se verifique la igualdad planteada en esa ecuación.

Los pasos que hicimos para llegar de la primera expresión $4n - 4$ hasta la última $n = 61$ son pasos que nos van transformando la ecuación original en otras que tienen exactamente las mismas soluciones. Eso es lo que hacemos cada vez que resolvemos una ecuación. Entonces, los valores de n que son solución de la primera ecuación del proceso, son los mismos valores que son solución de la última ecuación y de todos los intermedios.

Solución de una ecuación. Se llama solución de la ecuación a cada uno de los valores numéricos de la variable que hacen que se verifique la igualdad planteada en esa ecuación.

Por ejemplo, $n = 58$ ¿es solución de esta ecuación? Para saberlo, deberíamos ver si cuando a n le asignamos el valor 58, se satisface la igualdad. Como $4 \cdot 58 - 4 = 232 - 4 = 228$ y $228 \neq 240$, concluimos que $n = 58$ no es una solución de la ecuación.
Sabemos que $n = 61$ es solución de la ecuación. ¿No hay otra forma de distribuir las 240 cerámicas (en cantidades iguales en cada lado del terreno) que no sea 61 por lado? Dicho en otros términos: ¿No habrá otro valor de n que sea solución de la ecuación $4n - 4 = 240$? Si al valor $n = 61$ hubiéramos llegado mediante una exploración numérica, es decir, probando con distintos valores hasta llegar a ese valor, no podríamos garantizar que no exista otro valor que lo cumpla. Es cierto que las características del problema nos convencen de que no habrá otro valor debido a que se aprecia que la cantidad total de cerámicas siempre aumenta a medida que aumenta la cantidad de cerámicas por lado. No obstante, no toda situación tiene esta particularidad y la incertidumbre acerca de la cantidad de soluciones de una ecuación, es legítima en general. La aplicación sucesiva de propiedades * en el proceso de resolución de la ecuación es una garantía de que lo hallado es la totalidad de los valores de la incógnita que la verifican.

Conjunto solución de una ecuación. Se llama de esta forma al conjunto que reúne todas las soluciones de una ecuación. “Resolver” una ecuación es un sinónimo de encontrar su conjunto solución.

En nuestro caso, sabemos no solo que $n = 61$ es una solución de la ecuación $4 \cdot n - 4$ sino que es la única, esto es, que el conjunto solución de la ecuación es $S = \{61\}$.

Ejemplo 3. Si se dispone de 347 cerámicas y se usar solamente cerámicas enteras , ¿cuántas debemos poner en cada lado?

Por lo discutido arriba, podemos calcular la cantidad de cerámicas por lado resolviendo la ecuación

$$4n - 4 = 347 \ .$$

Comenzamos resolviendo sin pensar en el contexto del problema,

$$4n - 4 = 347 \Leftrightarrow 4n = 351 \Leftrightarrow n = \frac{351}{4} \ .$$

Esta ecuación tiene como conjunto solución $S = \{\frac{351}{4}\}$.

*Propiedad uniforme de la suma y el producto.

Al volver al contexto del problema nos damos cuenta que $\frac{351}{4} = 87 + \frac{3}{4}$ no es un número entero. Por lo que, si bien la ecuación fuera de contexto tiene solución, la respuesta al problema es la siguiente:

Respuesta. No hay una cantidad entera de cerámicas por lado que permita usar las 347 cerámicas y a la vez conservar el diseño de cantero propuesto.

El contexto. Si estamos ante una situación contextualizada por un problema, consideramos que las variables que intervienen en las expresiones algebraicas toman todos los valores posibles que la situación permite. Por ejemplo, en este problema, n recorre todos los valores naturales. Las ecuaciones se pueden plantear fuera del contexto de un problema. En tal caso y en este curso, por convención se consideran como posibles valores para las variables o incógnitas todos los números reales para los cuales tiene sentido la formulación de la ecuación.

1.3 Expresiones algebraicas equivalentes

Volvamos a las distintas formas de conteo que hemos utilizado a lo largo del problema, en particular a la de la segunda figura. Lo que hicimos fue quitar, en cada lado, las cerámicas que ocupan las cuatro esquinas (los vértices del cuadrado) y quedarnos entonces con dos cerámicas menos por lado, sumar estas cuatro cantidades y luego agregarles los 4 cerámicas que corresponden a los vértices. De esta forma, si tenemos n cerámicas por lado, en total necesitaremos

$$(n-2)+(n-2)+(n-2)+(n-2)+4, \qquad \text{o también} \qquad 4\cdot(n-2)+4,$$

cuya expresión simplificada es

$$4(n-2)+4 = 4n - 4\cdot 2 + 4 = 4n - 8 + 4 = 4n - 4\ .$$

Contando de esta otra manera, también llegamos a la misma expresión algebraica simplificada. Cuando contamos de dos formas diferentes la cantidad total de cerámicas llegamos en un caso (el primero) a que la cantidad total de cerámicas necesarias era $2n + 2(n-2)$ y en el otro caso (el segundo) $4(n-2)+4$. Concretamente, lo que hemos hecho es agrupar las cerámicas de maneras diferentes, para llegar a determinar el número total de ellas. Son formas "equivalentes" de contar porque la cantidad a la que arribamos con un esquema o con otro es la misma. Por eso, a las expresiones que resultan de una u otra forma de contar, las llamamos expresiones algebraicas equivalentes. Es decir, la expresión algebraica $2n + 2(n-2)$ es equivalente a la expresión $4(n-2)+4$.

Expresiones algebraicas equivalentes (una manera de verlas). Dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando se puede pasar de una a la otra mediante transformaciones algebraicas (operatoria) o bien pueden llevarse ambas a una misma expresión algebraica.

Al operar sobre la expresión $2n + 2(n - 2)$ obtuvimos la expresión $4n - 4$ y, por lo tanto son equivalentes. Más aún, $2n+2(n-2)$ y $4(n-2)+4$ son equivalentes, porque hemos comprobado que, luego de desarrollar cierta operatoria algebraica, ambas se reducen a una misma expresión $4n - 4$.

Expresiones algebraicas equivalentes (otra manera de verlas). Dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando ambas dan el mismo resultado para cada uno de los valores posibles de las variables.

En nuestro caso, $2n + 2(n - 2)$ y $4(n - 2) + 4$ son equivalentes porque el resultado que obtenemos, para cada valor de n, con una expresión es igual al resultado que obtenemos, con el mismo valor de n, con la otra expresión. En otros términos, se verifica la igualdad

$$2n + 2(n - 2) = 4(n - 2) + 4$$

para cualquier valor de n.

Para ver en un ejemplo la utilidad de esta forma, supongamos que una persona realiza el conteo de las cerámicas y concluye que hay en total $2 \cdot (n - 1) + n + 3$. Si queremos determinar si esta propuesta es correcta, la comparamos con la expresión $4n - 4$ de la que ya sabemos que es una de las formas correctas de contar. Sabemos que cuando se colocan 5 cerámicas por lado se necesita un total de 16 cerámicas pues $4 \cdot 5 - 4$. Veamos qué se obtiene con la nueva expresión: si $n = 5$ se obtiene $2 \cdot (5 - 1) + 5 + 3 = 16$. Ambas expresiones generan el mismo valor, hecho que no es suficiente para decir que las expresiones son equivalentes ya que de esto no se infiere que las dos expresiones produzcan resultados iguales para todos los valores de n. Veamos algún valor más. Si $n = 61$, sabemos que el total de cerámicas es 240 (lo hemos obtenido antes usando la expresión $4n - 4$). En la nueva expresión, si $n = 61$ se obtiene $2 \cdot (n - 1) + n + 3 = 184$. Como para $n = 61$, las expresiones $4n - 4$ y $2\cdot(n-1)+n+3$ dan valores diferentes (240 y 184), estamos en condiciones de afirmar que la expresión propuesta no sirve para el conteo de las cerámicas del cantero, así como también que las dos expresiones no son equivalentes.

Expresiones algebraicas equivalentes (una tercera forma de verlas). Dos expresiones algebraicas son equivalentes, si al igualarlas se genera una ecuación que tiene como conjunto solución a todos los valores para los cuales tienen sentido las expresiones planteadas.

En el caso que estamos estudiando, sabíamos que las dos expresiones surgieron de contar lo mismo de dos modos distintos. Pero, ante un caso en que nos planteen dos expresiones para decidir si son o no equivalentes sin datos adicionales ¿cómo nos damos cuenta de que el conjunto solución es o no el de todos los valores de n?

Cada vez que necesitamos conocer el conjunto solución de una ecuación, lo que debemos hacer es resolverla. Veamos entonces cómo hacerlo:

$$
\begin{aligned}
&2n + 2(n-2) = 4(n-2) + 4 && \text{(aplicando propiedad distributiva)}\\
&2n + 2n - 4 = 4n - 8 + 4 && \text{(agrupando los términos que contienen } n\text{)}\\
&2n + 2n - 4n = -8 + 4 + 4 && \text{(operando)}\\
&0n = 0 &&\\
&0 = 0 &&
\end{aligned}
$$

¿Cómo encontramos el conjunto solución, si en el último paso no aparece la variable? Este es un caso muy particular, en el que el proceso de resolución nos llevó a una igualdad numérica como es

$$0 = 0,$$

que resulta independiente del valor de n, a diferencia de la ecuación anterior $4n - 4 = 240$ en la que nos quedó perfectamente determinado (unívocamente determinado, suele decirse en matemática) el valor de la incógnita $n = 61$.

Ante una igualdad numérica como la que obtuvimos "$0 = 0$", nos preguntamos qué valores de n la verifican. Para poder responder a esta pregunta retomamos "el despeje" en el tercer paso en donde calculamos $2 \cdot n + 2 \cdot n - 4 \cdot n$ quedando en el penúltimo paso la "ecuación"

$$0.n = 0\ .$$

¿Qué valores de n verifican esta última ecuación? Es claro que cualquiera, puesto que el resultado de multiplicar cualquier número n por 0 es 0, y por lo tanto, todo n satisface la ecuación $0 \cdot n = 0$. Como las soluciones de la última ecuación son las mismas que las de la primera, deducimos finalmente que cualquier valor de n también satisface la ecuación $2n + 2(n-2) = 4(n-2) + 4$.

De esta forma, concluimos que ambas expresiones algebraicas (las de cada miembro de la igualdad) son equivalentes, dado que el conjunto solución de esa ecuación es el conjunto de todos los valores posibles de n.

Cabe señalar que, en el proceso de resolución, no necesitamos en ningún momento suponer que n fuera un número natural. Los cálculos que hemos hecho se aplican a cualquier número real. Por lo tanto, a partir de pensar en un problema concreto, como es el de las cerámicas, hemos llegado a la conclusión de que la expresión $2n + 2(n-2)$ es equivalente a la expresión $4(n-2) + 4$ independientemente de que las consideremos planteadas en contexto de números naturales o de números reales.

En resumen, al analizar la equivalencia de dos expresiones a partir de plantear una ecuación, vimos un tipo de situación en que la conclusión es que todos los números (reales) son solución de la ecuación. A estas ecuaciones las llamamos identidades.

Identidad. Llamamos así a una ecuación que es verificada por todos los valores posibles de las variables que aparecen en ella.

En general, cuando el proceso de resolución de una ecuación nos conduce a una igualdad numérica (por ejemplo $0 = 0$; $7 = 7$; $15 = 15$, etc.) es porque la verifican todos los valores de la variable involucrada en la ecuación.

Ejercicio resuelto 1. Volver al problema inicial de conteo de cerámicas (Ejemplo 1).

1. Escribir las expresiones algebraicas que corresponden a las formas de contar que se representan en las figuras 3, 4, 5 y 6.

2. Demostrar que las expresiones algebraicas correspondientes a las figuras 3 y 4 son equivalentes mostrando que ambas pueden simplificarse a una expresión algebraica común.

3. Demostrar que las expresiones algebraicas correspondientes a las figuras 4 y 5 son equivalentes resolviendo la ecuación que corresponda.

Resolución:

1. En la figura 3 tenemos que para 5 cerámicas por lado, el total de cerámicas es $5 + 2 \cdot 4 + 3$. En general, para una cantidad cualquiera n de cerámicas por lado la cantidad de cerámicas necesarias para construir el cantero es

$$n + 2 \cdot (n - 1) + (n - 2) \ .$$

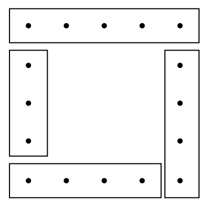


FIGURA 3

En el caso de la figura 4, el total de cerámicas se piensa como la suma de las cerámicas que van en cada lado, multiplicada por 4, menos las 4 cerámicas de las esquinas, ya que a éstas las estamos contando dos veces, de esta forma de contar se obtiene que el total de cerámicas es $4 \cdot n - 4$.

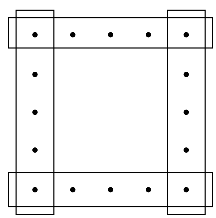


FIGURA 4

Para la figura 5, contamos todas las cerámicas que llenan el cuadrado (tanto el contorno como el interior) menos las que llenan el cuadrado interior. La cantidad de cerámicas que llena un cuadrado es la cantidad por lado multiplicada por sí misma (si son 5 por lado, el total es $5 \cdot 5 = 25$ cerámicas). Así, la cantidad que llena el cuadrado es $n \cdot n = n^2$ y la cantidad que llena el cuadrado interior $(n-2) \cdot (n-2) = (n - 2)^2$. La cantidad total de cerámicas es

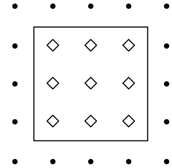


FIGURA 5

$$n^2 - (n - 2)^2 \ .$$

En el conteo de la figura 6 se consideraron dos lados completos y dos lados sin la cerámica de una de las esquinas; a esto hay que restarle la cerámica de dos de las esquinas que se está contando dos veces. En total hay que la cantidad total de cerámicas es $2n + 2 \cdot (n - 1) - 2$.

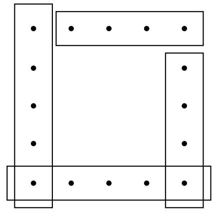


FIGURA 6

2. Tenemos que la cantidad total de cerámicas en la Figura 3 es $n+2\cdot(n-1)+(n-2)$ y en la Figura 4 es $4 \cdot n - 4$. Veamos que estas expresiones son equivalentes porque partiendo de una de ellas se puede obtener la otra mediante operatoria. Partiendo de la expresión de la Figura 3 y operando $n + 2 \cdot (n - 1) + (n - 2) = n + 2n - 2 + n - 2 = 4n - 4$. Luego de un par de pasos, hemos llegado a la expresión de la Figura 4. Luego, ambas son equivalentes.

3. La cantidad de cerámicas en la Figura 4 es $4n - 4$ y la cantidad de cerámicas en la Figura 5 es $n^2 - (n - 2)^2$. Veamos que estas expresiones son equivalentes porque la ecuación que resulta de igualarlas tiene por solución a todos los valores posibles de la variable (en este caso, todos los números naturales). La ecuación por resolver es $4n - 4 = n^2 - (n - 2)^2$. Operando:

$$4n - 4 = n^2 - (n - 2)^2$$

$$4n - 4 = n^2 - (n - 2).(n - 2) \qquad \text{(por el significado de elevar al cuadrado)}$$

$$4n - 4 = n^2 - (n^2 - 2n - 2n + 4) \qquad \text{(usando la propiedad distributiva)}$$

$$4n - 4 = n^2 - n^2 + 4n - 4 \qquad \text{(operando)}$$

$$4n - 4 = 4n - 4$$

$$0 = 0$$

Hemos llegado a una igualdad numérica, lo que indica que la ecuación inicial tiene por solución a todos los valores de la variable y por lo tanto las ecuaciones son equivalentes.

Trabajo práctico 15

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Qué es una expresión algebraica? Dar ejemplos de expresiones algebraicas que se encuentren en el texto incluyendo algunas de las secciones posteriores.

(b) Dar ejemplos de ecuaciones que se encuentren en el texto.

(c) ¿Cuándo un número es solución de una ecuación? Dar un ejemplo.

(d) Si se verifica que un número es solución de una ecuación, ¿se puede decir que encontré su conjunto solución?

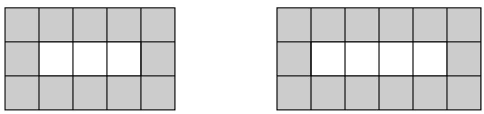
(e) ¿Qué significa "resolver una ecuación"?

(f) Dada la ecuación $5 - 2x = 4$, ¿es cierto que $x = 0$ es una solución? Justificar la respuesta de dos maneras diferentes.

(g) ¿Cuándo dos expresiones algebraicas son equivalentes? (ver las distintas formas).

(h) Con el mismo diseño de cantero propuesto en el problema planteado en el ejemplo 1, si disponemos de 1528 cerámicas, ¿cuántas debemos poner en cada lado? ¿Y si disponemos de 235?

Ejercicio 2. En la figura se muestra un cierto diseño de baldosas blancas y grises que se forma con una fila de una cierta cantidad de baldosas blancas rodeada de baldosas grises. En el ejemplo, se muestra el diseño para tres baldosas blancas rodeadas por baldosas grises y para cuatro baldosas blancas rodeadas por baldosas grises.



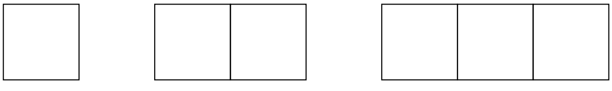
(a) ¿Cuántas baldosas grises se necesitan para el diseño cuando se colocan dos baldosas blancas? ¿Y cuando son 5 baldosas blancas? ¿Y cuando son 20 las baldosas blancas?¿Y cuando son 97 las baldosas blancas?

(b) ¿Es posible que la cantidad de baldosas grises sea 65? ¿Y 1400?

(c) Dar dos expresiones equivalentes para contar las baldosas grises necesarias cuando se coloca una cantidad arbitraria n de baldosas blancas.

(d) La expresión $5(n-1) - 3n + 11$, ¿sirve para contar la cantidad de baldosas grises si se colocaron n baldosas blancas? ¿Y la expresión $7n - (n-3)^2$?

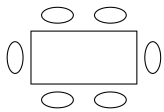
Ejercicio 3. Se construye con fósforos la siguiente sucesión de figuras:



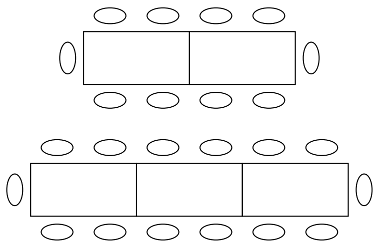
(a) Siguiendo la tendencia sugerida, ¿cuántos fósforos se requieren para armar la figura número 100?

(b) ¿Es posible que haya alguna figura que requiera de exactamente
i) 151 fósforos? ii) 222 fósforos?

Ejercicio 4. En un pueblo se realiza, cada año, una gran celebración a la que asisten todos los habitantes. Para la cena se disponen mesas en las que se puedan sentar 6 personas.



A medida que van llegando más personas se agregan mesas, una a continuación de la otra, disponiendo las sillas como se muestra a continuación.



(a) ¿Cuántas personas se pueden sentar si hay 5 mesas? ¿y si hay 20?

(b) ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten 102 personas?¿y para 300 personas? Indicar, en cada caso, si se utiliza la totalidad de sillas o si quedan lugares vacíos.

1.4 Cálculos con las expresiones algebraicas

Es habitual que haya que operar sobre una expresión algebraica dada para, por ejemplo, resolver una ecuación. Se entiende por operar o manipular una expresión algebraica el hecho de utilizar una propiedad o igualdad que vale para todos los valores de las variables involucradas para transformar dicha expresión en otra equivalente. Por ejemplo, al aplicar la propiedad distributiva se pudo pasar de la expresión $4 \cdot (n-2)+4$ a la expresión equivalente $4 \cdot n - 4$.

Las propiedades más habituales y las reglas para operar con ellas ya se discutieron en el capítulo **??**, en particular en la sección 4 sobre cálculos combinados. Para tenerlas más a mano, en la subsección que sigue haremos un listado de las mismas y un breve repaso de su uso, esta vez sobre la expresiones algebraicas en lugar de sobre expresiones numéricas. En la subsección 1.6 nos ocuparemos del cuadrado de un binomio.

1.5 Algunas operaciones usuales

Propiedades de las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias. Es usual tener que operar con expresiones fraccionarias del tipo $\frac{x}{y}$. Estas operaciones fueron introducidas en la sección 1 del capítulo **??** para el caso en que x e y son

números enteros, pero aquíla expresión $\frac{x}{y}$ no es una fracción en ese sentido pues x e y son variables y pueden tomar cualquier valor real con la salvedad de que $y \neq 0$.
La suma, la resta, el producto y el cociente de las expresiones $\frac{x}{y}$ e $\frac{z}{w}$ se definen a continuación. Aquí las letras representan variables que pueden tomar cualquier valor real con la salvedad $y \neq 0$ y $w \neq 0$.

Suma: $$\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{x \cdot w + z \cdot y}{y \cdot w}$$

Resta: $$\frac{x}{y} - \frac{z}{w} = \frac{x \cdot w - z \cdot y}{y \cdot w}$$

Producto: $$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{x \cdot z}{y \cdot w}$$

Cociente: $$\frac{x/y}{z/w} = \frac{x}{y} \cdot \frac{w}{z} = \frac{x \cdot w}{y \cdot z}$$

$y \neq 0$, $w \neq 0$ y $z \neq 0$

Otra operación con expresiones fraccionarias que suele ser muy útil es la "simplificación":

Simplificación de z: $$\frac{x \cdot z}{y \cdot z} = \frac{x}{y} \quad \text{pues} \quad x \cdot z \cdot y = x \cdot y \cdot z$$

para cualquier valor de $y \neq 0$ y $z \neq 0$.

Recordemos la propiedad distributiva discutida en la sección 4.

Propiedad distributiva: Para cualquier valor de x, y y z vale que

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \text{y} \quad \frac{x + y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \quad z \neq 0$$

Propiedades de la potenciación: Para a, b números positivos y m, n números cualesquiera valen las siguientes propiedades:

- Distributiva de la potencia respecto del producto y del cociente

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} .$$

- Inverso multiplicativo $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

- Producto y cociente de potencias de igual base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{y} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} .$$

- Potencia de potencia $\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Sobre la prioridad de las operaciones. Cuando se desean aplicar varias operaciones sobre una expresión algebraica, la prioridad o jerarquía de su aplicación es la misma que la trabajada en la sección 4 sobre cálculos combinados.

Ejercicios resueltos

Vamos a realizar algunos cálulos algebraicos. Para indicar la propiedad utilizada en cada paso, abajo de cada igualdad pondremos un número y luego listamos las propiedades usando como referencia dicha numeración.

Ejercicio resuelto 2. Realizar las operaciones indicadas y simplificar si es posible

(a) $\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x} =$ $\quad (x+1 \neq 0,\ x \neq 0)$ $\qquad$ (b) $\frac{x^2}{4} \cdot \frac{2}{x} =$ $\quad (x \neq 0)$

Resolución:

(a) $$\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x} \underbrace{=}_{(1)} \frac{x \cdot x + 2 \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot x} \underbrace{=}_{(2)} \frac{x^2+2x+2}{(x+1)\cdot x}\ .$$

(1) Fórmula para la suma de expresiones fraccionarias.

(2) Definición de potencia $x \cdot x = x^2$ y propiedad distributiva $2 \cdot (x+1) = 2x+2$.

(b) $$\frac{x^2}{4} \cdot \frac{2}{x} \underbrace{=}_{(1)} \frac{x^2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{x} \underbrace{=}_{(2)} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \underbrace{=}_{(3)} \frac{x}{2}$$

(1) y (2) Simplificación entre las cantidades 2 y 4.

(3) Cociente de potencias de igual base ($x^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x} = x^{2-1} = x$).

Ejercicio resuelto 3. Utilizar la propiedad distributiva para escribir en forma de suma y simplificar si es posible.

(a) $(-3x^2-3)(x+2) =$ $\qquad$ (b) $(x + \frac{1}{x}) \cdot x =$ $\quad x \neq 0$

Resolución:

(a) $$(-3x^2-3)(x+2) \underbrace{=}_{(1)} (-3x^2-3)\cdot x + (-3x^2-3)\cdot 2 \underbrace{=}_{(2)} -3x^2 \cdot x - 3x - 3x^2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \underbrace{=}_{(3)} -3x^3 - 6x^2 - 3x - 6$$

(1) Distributiva.

(2) Nuevamente uso de la propiedad distributiva en cada uno de los sumandos y uso regla de los signos.

(3) Potencias de igual base ($x^2 \cdot x = x^3$), multiplicaciones y reordenamiento en potencias decrecientes de x.

(b) $$(x + \tfrac{1}{x}) \cdot x \underbrace{=}_{(1)} x^2 + \tfrac{1}{x} \cdot x \underbrace{=}_{(2)} = x^2 + 1$$

(1) Distributiva.

(2) Simplificación de x

Ejercicio resuelto 4. Escribir la expresión $x^2 + 2x$ como un producto sacando factor común x.

Resolución: Como se enfatizó en la sección de cálculos combinados, la propiedad distributiva leída de derecha a izquierda se la suele llamar factor común, en este caso es obvio que
$x^2 + 2x = x(x + 2)$.

A veces no estamos seguros si dos expresiones algebraicas son equivalentes. Una estrategia muy eficaz para comprobar que no lo son es utilizar la "segunda manera de ver si dos expresiones son equivalentes" descripta anteriormente.

Ejercicio resuelto 5. Indicar si las expresiones $\frac{10+x}{5}$ y $2 + x$ son equivalentes.

Resolución: Si se aplica la propiedad distributiva a la primera expresión se obtiene que $\frac{10+x}{5} = 2 + \frac{x}{5}$ para todo valor de x. Esto nos hace sospechar que las expresiones dadas en el enunciado no son equivalentes.

Recordemos que dos expresiones algebraicas son equivalentes si ambas dan el mismo resultado para *todos* los valores posibles de las variables, entonces para probar que efectivamente las expresiones $\frac{10+x}{5}$ y $2 + x$ no son equivalentes alcanza con encontrar *un* valor que no cumpla la igualdad. Por ejemplo, si $x = 2$, resulta que evaluando en $\frac{10+x}{5}$ queda $\frac{10+2}{5} = \frac{12}{5}$; en cambio, evaluando en $x + 2$ queda $2 + 2 = 4$.
Respuesta: Al evaluar en $x = 2$ en ambas expresiones se obtienen valores distintos pues $\frac{12}{5} \neq 2$ entonces las expresiones no son equivalentes.

Observación: Es muy común "caer en la tentación" de simplificar y escribir

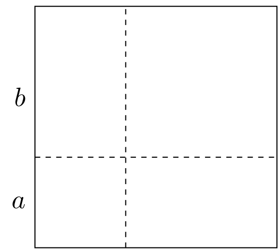
$$\frac{10+x}{5} \text{ “=” } \frac{\cancel{1}0+x}{\cancel{5}} \text{ “=” } 2 + x.$$

Sin embargo esta simplificación no es correcta; el denominador 5 afecta a toda la expresión $10+x$ no sólo al 10. De hecho, el ejercicio anterior muestra que las expresiones resultantes de esta simplificación errónea no son equivalentes.

1.6 Cuadrado de un binomio

En este apartado nos ocupamos de uno de los temas del álgebra escolar más conocido: el cuadrado de un binomio. Se designa así a las expresiones algebraicas que son el cuadrado de una suma de dos términos y que podemos simbolizar, en una forma general, como $(a + b)^2$. El objetivo de este parágrafo es dar argumentos que nos permitan concluir que las expresiones $(a + b)^2$ y $a^2 + 2ab + b^2$ son equivalentes.

Para comenzar analizaremos la figura de la derecha que es un cuadrado de lado $a + b$. Al trazar las líneas internas quedan determinados otros cuatro cuadriláteros: dos cuadrados (de lado a y de lado b) y dos rectángulos (ambos de lados a y b). Se quiere encontrar dos expresiones algebraicas equivalentes para calcular el área de la figura.



Para calcular el área del cuadrado de lado $a + b$ podemos proceder de dos maneras distintas:

1) Como una única figura. En este caso, como el área de un cuadrado se calcula como el cuadrado de su lado, $A = (a + b)^2$.

2) Como suma de áreas de figuras. Podemos pensar al área del cuadrado de lado $a+b$ como la suma de las áreas de cada de las cuatro figuras que quedaron determinadas al trazar las líneas internas. Resulta así: $A = a^2 + b^2 + a \cdot b + a \cdot b$ y simplificando la expresión obtenida

$$A = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \ .$$

Hemos calculado el área de una figura de dos formas distintas, por lo que los resultados obtenidos son iguales, se concluye que

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \ .$$

Es importante observar que lo realizado vale para cualquier figura de ese tipo, no para una en particular, debido a que usamos literales para designar a los lados de las figuras. Esta es una potencialidad del álgebra. La única limitación en los alcances de la igualdad obtenida es que a y b deben ser positivos ya que son lados de figuras. Esto no quiere decir que la igualdad no valga para negativos y el cero sino que la argumentación exhibida se limita a los números positivos.

Sobre la validez para los números negativos y el cero nada podemos decir con lo realizado. Para ver esto, debemos independizarnos de las figuras geométricas. Una forma es pensar la situación en un marco estrictamente algebraico. Sabemos que elevar al cuadrado un número es multiplicarlo por sí mismo. Luego, $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$. La expresión obtenida puede ser expandida utilizando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma

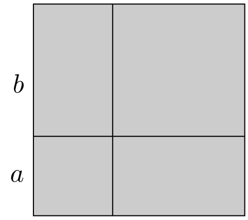
$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 \ .$$

Al simplificar se obtiene la conocida fórmula del binomio

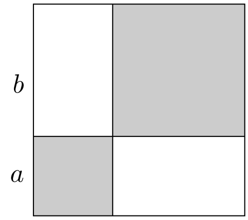
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \ .$$

Lo realizado tiene carácter general, porque los números fueron representados con literales. Además, como no ha aparecido ninguna restricción a lo largo del proceso, la igualdad vale cualesquiera sean los números reales a y b y, por lo tanto, concluimos que las expresiones $(a + b)^2$ y $a^2 + 2ab + b^2$ son equivalentes.

En ocasiones, pese a conocer la expresión que desarrolla el cuadrado de un binomio, se comete el error de distribuir el cuadrado respecto de la suma. Esto no es válido en general puesto que $(a+b)^2$ y a^2+b^2 no son expresiones equivalentes como lo demuestra la siguiente construcción geométrica. El área sombreada en el dibujo de la izquierda es $(a+b)^2$, mientras que el área sombreada en la figura de la derecha es a^2+b^2. Vemos que no son iguales y que la "diferencia" entre ambas es el área de los dos rectángulos de lados a y b, es decir, $2ab$. Justamente, la expresión $2ab$ debe ser 0 para que las expresiones $(a+b)^2$ y a^2+b^2 sean iguales.



Área pintada: $(a+b)^2$



Área pintada: a^2+b^2

Como vimos en el apartado anterior, otra forma de probar que las dos expresiones no son equivalentes es encontrar un par de valores a y b que produzcan valores distintos al ser reemplazados en cada expresión. Efectivamente, si por ejemplo $a=3$ y $b=2$ resulta $(a+b)^2=25$, mientras que $a^2+b^2=13$.

Trabajo Práctico 16

Ejercicio 1. En el siguiente cuadro se resumen las distintas formas de ver si dos expresiones algebraicas son equivalentes (de acuerdo con este texto). Clasificar los ejercicios y ejemplos que tienen como objeto decidir si dos expresiones algebraicas son equivalentes de acuerdo a la forma elegida para hacerlo.

Forma	Utilidad	Ejemplos o ejercicios
Dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando se puede pasar de una a la otra mediante transformaciones algebraicas (operatoria) o bien pueden llevarse ambas a una misma expresión algebraica.	Permite producir nuevas expresiones algebraicas más simples o que se adaptan mejor a la resolución de un problema	
	Permite decidir la equivalencia entre dos expresiones llevándolas mediante transformaciones a una tercera más simple.	

Ambas expresiones producen el mismo valor numérico para cada uno de los valores posibles de las variables	Permite probar que dos expresiones algebraicas NO son equivalentes. Para ello, hay que encontrar valores de las variables que al ser reemplazados en las expresiones algebraicas produzcan valores numéricos distintos	
La ecuación que se obtiene al igualar las dos expresiones tiene por solución a todos los valores posibles de las variables	Permite decidir si dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando se duda sobre su equivalencia o bien cuando no nos damos cuenta como transformar una en la otra.	

Ejercicio 2.

(a) Realizar las operaciones indicadas y reescribir simplificando si es posible.

(a) $\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x} =$ $\quad (x+1 \neq 0,\ x \neq 0)$ $\qquad$ (b) $\frac{x^3}{5} \cdot \frac{25}{x} =$ $\quad (x \neq 0)$

(c) $\frac{x/7}{-3/49} \cdot \frac{9}{x^2} =$ $\quad (x \neq 0)$ $\qquad$ (d) $\frac{x^2/3}{3/4} \cdot \frac{2}{x} =$ $\quad (x \neq 0)$

(b) Utilizar la propiedad distributiva para escribir en forma de suma y simplificar si es posible.

(a) $(x^3-2)(x+1) =$ $\qquad$ (b) $\frac{-2x-1}{-2} =$ $\qquad$ (c) $(x - \frac{1}{x}) \cdot (x^2-1) =$ $\quad (x \neq 0)$

(c) Escribir la expresión $x^3 - 2x^2$ como un producto sacando factor común x.

(d) Escribir las expresiones $(a^2)^{-1} \left(\frac{b}{a}\right)^3 a^5$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} (a^{-2})^{-1} b$ como producto de potencias de a y b. Considerar a y b no nulos.

(e) Decidir si las expresiones $\frac{x}{2} - \frac{-3}{x}$ y $\frac{x^2-6}{2x}$ son equivalentes. No considerar el valor $x = 0$.

Ejercicio 3. Entre el siguiente listado de ecuaciones, ¿hay identidades? Justificar e indicar su conjunto solución en el caso que lo sea. Sugerencia: analizar la relación entre expresiones algebraicas equivalentes e identidad.

(a) $1 - \frac{2x-4}{2} = 3 - x$ $\qquad$ (b) $p.(1-p) = -p^2 + p$ $\qquad$ (c) $t^2 - 1 = -t(1-t)$

(d) $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ $\qquad$ (e) $\frac{1}{x} = x^{-1}$

Ejercicio 4. Acerca de la lectura.

(a) ¿Cómo es la expresión algebraica que desarrolla al cuadrado de un binomio?

(b) Relacionar el desarrollo del cuadrado de un binomio con expresiones algebraicas equivalentes.

(c) Explicar (de diferentes modos) por qué la potenciación no es distributiva respecto de la suma.

Ejercicio 5. Justificar por qué no son equivalentes las expresiones algebraicas $(x - y)^2$ y $x^2 - y^2$.

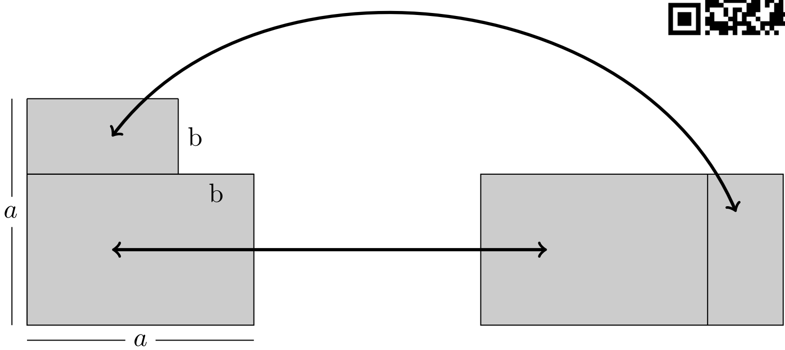
Ejercicio 6. Justificar por qué las expresiones algebraicas $(p - q)^2$ y $p^2 + q^2 - 2pq$ son equivalentes.

Ejercicio 7. Simplificar las siguientes expresiones:

(a) $(-a - b)^2 + (a - b)^2$

(b) $(2x - 3y)^2 + 12xy$

Ejercicio 8. Dadas las siguientes figuras:



(a) Calcular el área de la primera figura utilizando solamente cuadrados.

(b) Calcular el área de la segunda figura.

(c) ¿Cuáles son los valores de a y b para los cuales tienen sentido las expresiones algebraicas propuestas en a) y b)?

(d) Comparar el área de ambas figuras y dar una justificación de la conclusión.

(e) Pensar ahora en la igualdad planteada sin las restricciones del problema. ¿Es cierto que ambas expresiones son equivalentes en el conjunto de los números reales? Justificar.

(f) ¿Con qué nombre se conoce a esta identidad?

(g) Utilizar esta identidad para reescribir como un producto las expresiones i) $25-x^2$ ii) $4x^2-3$.

2 Resolución de ecuaciones

2.1 Ecuaciones lineales

El objetivo de esta sección es repasar las técnicas que permiten resolver ecuaciones donde las únicas operaciones que afectan a la variable o incógnita son el producto o el cociente por números y la suma o la resta. Este tipo de ecuaciones suele llamarse lineal y en lo que sigue, se muestra con varios ejemplos sencillos como funcionan las propiedades que permiten resolverlas.

Comencemos resolviendo la ecuación $x+2=5$. Es fácil darse cuenta que al restar 2 en ambos lados de la igualdad se deduce que $x=3$:

$$\begin{gathered} x+2=5 \\ x+2-2=5-2 \\ x=3 \end{gathered}$$

De manera coloquial se suele decir que "se ha pasado el 2 restando". Más rigurosamente, lo que se ha usado es la propiedad uniforme de la suma.

Ahora consideremos la ecuación $\frac{1}{3}\cdot x=4$. Al multiplicar por 3 en ambos miembros de la igualdad se deduce que $x=12$ puesto que

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{3}\cdot x=4 \\ 3\cdot\tfrac{1}{3}\cdot x=3\cdot 4 \\ x=12 \end{gathered}$$

De manera coloquial se suele decir que se ha "pasado el 3 multiplicando". Más rigurosamente, lo que se ha usado es la propiedad uniforme del producto.

Veamos como se usan estas propiedades de manera combinada para resolver ecuaciones.

Ejemplo 4. Resolver las ecuaciones
(a) $2x-3=5$ (b) $2(x-3)=5$

(a) Al resolver esta ecuación se nos plantea nuevamente la cuestión de la prioridad de las operaciones estudiadas en la sección 4 que trata sobre cálculos combinados.

El uso reflexivo de las propiedades de acabamos de explicar nos permite ver que si sumamos 3 a ambos lados de la ecuación se obtiene una ecuación más simple:

$$\begin{gathered} 2x-3=5 \\ 2x-3+3=5+3 \\ 2x=8 \end{gathered}$$

Ahora, ya sabemos que hay que hacer, se divide por 2 a ambos lados de la igualdad y se obtiene la solución $x = 4$:

$$\begin{aligned} 2x &= 8 \\ \tfrac{1}{2} \cdot 2x &= \tfrac{1}{2} \cdot 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Respuesta: El conjunto solución de la ecuación planteada en a) es $S = \{4\}$.

Comentario. Observar que si se intentara primero dividir por 2 en ambos miembros la ecuación $2x - 3 = 5$ se obtendría una nueva ecuación más complicada, a saber $\frac{2x-3}{2} = \frac{5}{2}$, aunque este procedimiento no sería erróneo.

(b) La diferencia entre esta ecuación y la ecuación a) es la presencia de los paréntesis que indica que el 2 multiplica a $(x-3)$ y no solo a x. En este caso conviene comenzar dividiendo por dos a ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned} 2(x-3) &= 5 \\ \tfrac{1}{2} \cdot 2(x-3) &= \tfrac{1}{2} \cdot 5 \\ x - 3 &= \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

Ahora sumamos 3 a ambos lados

$$\begin{aligned} x - 3 + 3 &= \tfrac{5}{2} + 3 \\ x &= \tfrac{11}{2} \end{aligned}$$

Respuesta: El conjunto solución de la ecuación planteada en b) es $S = \{\frac{11}{2}\}$.

Comentario. La ecuación $2(x-3) = 5$ también se puede resolver usando la propiedad distributiva.

Ejemplo 5. Resolver la ecuación $\frac{1}{3}(x-2) - \frac{2x-1}{4} = 2 - \frac{2}{3}x$.

Esta ecuación presenta nuevas dificultades pues la incógnita aparece en ambos lados de la igualdad y en términos diferentes. Hay muchas maneras de proceder, mostramos una y dejamos al lector la inquietud de pensar en otras posibilidades.

<table>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Usamos la propiedad distributiva para deshacernos de los paréntesis. Hay que tener en cuenta que la barra de fracción también funciona como un paréntesis y que en el término $-\frac{2x-1}{4}$ hay que distribuir el denominador 4 y el -1 que está multiplicando.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td colspan="2">$\frac{1}{3}(x-2)-\frac{2x-1}{4}=2-\frac{2}{3}x$
$\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\cdot 2-\frac{2x}{4}+\frac{1}{4}=2-\frac{2}{3}x$</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Sacamos factor común x y operamos con los términos donde no interviene la variable</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\cdot 2-\frac{2x}{4}+\frac{1}{4}=2-\frac{2}{3}x$
$-\frac{1}{6}x-\frac{5}{12}=2-\frac{2}{3}x$</td><td>Cálculos auxiliares
$\frac{1}{3}x-\frac{2x}{4}=\frac{1}{3}x-\frac{x}{2}=(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})x=-\frac{1}{6}x$
$-\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{4}=\frac{-8+3}{12}=\frac{-5}{12}$</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Ahora aplicamos las propiedades uniformes sumando y multiplicando a ambos lados de la igualdad las cantidades convenientes. En un primer paso se suma $\frac{5}{12}$ y $\frac{2}{3}x$ para tener la variable de un solo lado de la ecuación y se opera para simplificar las expresiones</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$-\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}x=2+\frac{5}{12}$
$\frac{1}{2}x=\frac{29}{12}$
$x=2\cdot\frac{29}{12}=\frac{29}{6}$</td><td>Cálculos auxiliares
$-\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}x=(-\frac{1}{6}+\frac{2}{3})x=\frac{3}{6}x=\frac{1}{2}x$
$2+\frac{5}{12}=\frac{29}{12}$</td></tr>
<tr><td>Explicitación de la respuesta</td><td colspan="2">Respuesta: el conjunto solución es $S=\{\frac{29}{6}\}$.</td></tr>
</table>

Comentario. Recordar que si, en la ecuación, reemplazamos la incógnita x por una solución se debe cumplir la igualdad, es decir ambos lados de la ecuación deben dar lo mismo. Una medida sensata de verificar que la respuesta es correcta. Para ello, se reemplaza x por la solución y se realizan los cálculos indicados. Si obtenemos una igualdad podemos sentirnos tranquilos que la solución propuesta es correcta.

Ejemplo 6. (A veces no hay solución) Consideremos la ecuación

$$0\cdot x=1\ .$$

Es evidente que esta ecuación no tiene solución dado que el resultado de multiplicar cualquier número por cero es siempre cero. Por lo que ningún número puede ser solución. Luego, la ecuación $0 \cdot x = 1$ tiene por conjunto solución el conjunto vacío lo que se expresa escribiendo $S = \emptyset$.

Ejemplo 7. Resolver la ecuación $-3x + 5 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}(2 - 3x)$.

En este ejemplo vamos a proceder como en el ejemplo anterior, pero realizando varias operaciones en un mismo paso.

$-3x + 5 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}(2 - 3x)$	aplicamos la propiedad distributiva,
$-3x + 5 = -\frac{3}{2}x + 1 - \frac{3}{2}x = -3x + 1$	sumamos $3x$ y restamos 5 a ambos lados de la igualdad,
$0 \cdot x = -4$	para ningún número x se satisface esta igualdad.

Respuesta: no es posible que la multiplicación entre algún número y 0 tenga como resultado -4, por lo que el conjunto solución es vacío, en símbolos, $S = \emptyset$.

En algunas situaciones concretas saber resolver ecuaciones nos puede ayudar a tomar una decisión.

Ejercicio resuelto 6. Laura trabaja como vendedora en una empresa de telefonía celular “XX” y cobra un sueldo básico de \$1000 más un 20 % de comisión por ventas realizadas en el mes. Una amiga le consigue un trabajo similar en otra empresa de telefonía celular “YY” en la que ella trabaja, pero allí cobran un sueldo básico de \$800 más una comisión de del 22 % por ventas realizadas.

(a) Comparar las ganancias de Laura en ambas empresas si las ventas realizadas en el mes fueran de \$4000.

(b) ¿Cuánto debe vender mensualmente Laura para cobrar lo mismo en ambas empresas?

Resolución.

1. En la empresa “XX”, Laura cobraría \$1.000 más un 20% de las ventas que en el ejemplo ascienden a \$4.000. En total, la ganancia de Laura sería de

$$\$1.000 + \frac{20}{100}\$4.000 = \$1.800 \ .$$

   En la empresa “YY”, Laura cobraría \$800 más un 22% de las ventas que en el ejemplo ascienden a \$4.000. En total, la ganancia de Laura sería de

$$\$800 + \frac{22}{100}\$4.000 = \$1.680 \ .$$

   Respuesta: Laura ganaría más en la empresa “XX” puesto que en dicha empresa sus ganancias serían de \$1.800, mientras que en la empresa “YY” serían de \$1.680 .

(a) Ahora el valor de las ventas es desconocido y, por lo tanto, juega el papel de incógnita y lo llamamos x, en resumen,

x representa el valor de las ventas mensuales.

Repasando lo que se hizo en el ítem anterior, vemos que las ganancias en la empresa "XX" se calculan según la siguiente fórmula

$$\text{Ganancias en "XX"} = 1000 + \tfrac{20}{100}x.$$

Análogamente, las ganancias en la empresa "YY" se calculan según la siguiente fórmula

$$\text{Ganancias en "YY"} = 800 + \tfrac{22}{100}x.$$

Como queremos averiguar el valor de x para que ambas ganancias coincidan planteamos la ecuación

$$1000 + \frac{20}{100}x = 800 + \frac{22}{100}x \ .$$

Ahora resolvemos esta ecuación como en los ejemplos anteriores y se obtiene

$$1000 - 800 = \frac{22}{100}x - \frac{20}{100}x \iff 200 = \frac{2}{100}x \iff x = 200 \cdot \frac{100}{2} = 10.000 \ .$$

Respuesta: Laura ganaría lo mismo en ambas empresas si sus ventas alcanzaran un valor de \$10.000 .

Ejercicio resuelto 7. Un mago propone el siguiente truco a su público. Piensen un número; súmenle 4; multipliquen al resultado por 3; réstenle el número elegido y recuerden ese resultado. Ahora multipliquen al número elegido por 2 y luego súmenle 8. Por último, resten este último valor al resultado que guardaron. El mago afirma que todos obtuvieron como resultado 4. ¿Es cierto lo que dice el mago para cualquiera sea el número elegido?

Resolución.

En primer lugar hay que establecer cuál es la incógnita o variable. Evidentemente, lo que no sabemos es el número que cada persona del público piensa. A esta variable la llamamos x. Ahora hay que traducir al lenguaje simbólico las instrucciones del mago:

Piensen un número	x
Suménle 4	$x+4$
Multipliquen el resultado por 3	$3(x+4)$
réstenle el número elegido y recuerden ese resultado.	$3(x+4)-x$
Ahora multipliquen al número elegido por 2 y luego súmenle 8	$2x+8$
resten este último valor al resultado que guardaron	$3(x+4)-x-(2x+8)$

En lenguaje simbólico, el mago pide que se calcule

$$3.(x+4)-x-(2x+8)$$

y afirma que, independientemente del número que se elija se cumple que

$$3.(x+4)-x-(2x+8)=4\ .$$

Para decidir si lo que dice el mago es cierto resolvemos la ecuación planteada:

$$3.(x+4)-x-(2x+8)=4 \iff 3x+12-x-2x-8=4 \iff 4=4\ .$$

Concluimos que el conjunto solución de la ecuación es el de los reales, en símbolos $S=\mathbb{R}$.

Respuesta: Cualquiera sea el número elegido (el valor de x) el cálculo propuesto da 4. Así, lo que dice el mago es cierto.

Trabajo práctico 17

Ejercicio 1.

(a) Verificar que $\frac{29}{6}$ es solución de la ecuación del ejemplo 5.

(b) Dar un ejemplo de una ecuación cuyo conjunto solución sea vacío.

(c) Las ecuaciones estudiadas en este apartado tienen diferentes tipos de conjuntos solución ¿Cuáles son? ¿Cómo se los identifica? Clasificar de acuerdo a su conjunto solución las ecuaciones que se trabajaron en el texto hasta ahora.

(d) Resolver las siguientes ecuaciones (esto incluye la indicación, en cada caso, del conjunto solución).

i) $3x-3\cdot(x+2)=1$ ii) $3x-3\cdot(x+2)=-6$ iii) $4x-3\cdot(x+2)=0$

Ejercicio 2. Resolver la ecuación $3(2x+1)=7$ usando la propiedad distributiva y sin usarla.

Ejercicio 3. Resolver las siguientes ecuaciones. Indicar, en cada caso, el conjunto solución:

(a) $x-\frac{1}{3}\cdot(2x-1)=3-\frac{1-x}{2}$

(b) $\frac{7x-2}{8}+x=4(\frac{1}{2}x-1)-\frac{x}{8}$

(c) $-3x-1-2x-1=-5(x-\frac{2}{5})$

(d) $-3x-1-2x-1=-5(x+\frac{2}{5})$

Ejercicio 4. Decidir si $x=\frac{1}{3}$ es solución de la ecuación $3x-1=\frac{x-\frac{1}{3}}{7}$ sin resolver.

Ejercicio 5. Un taxi cobra $\$2,8$ la bajada de bandera y $\$3,2$ por cada kilómetro recorrido. Determinar la distancia recorrida para un viaje que costó $\$71,60$.

Ejercicio 6. El precio de una remera con el 20% de descuento es de \$12. ¿Cuál es el precio de lista? (resolverlo mediante ecuaciones).

Ejercicio 7. Tres hermanos, Pedro, Luis y Pablo, reciben una herencia. En el testamento queda establecido que Pedro debe recibir un tercio del total, Luis un medio y Pablo un millón de pesos ¿Cuánto recibe cada uno?

Ejercicio 8. Una persona desea refaccionar su casa y decide solicitar a un crédito. El banco le ofrece una interesante oportunidad con el sistema alemán, según el cual la cuota disminuye a medida que pasa el tiempo pues con este sistema se paga una parte del monto otorgado por mes (en otros sistemas, con las primeras cuotas se paga solamente el interés). Para un crédito a dos años con un interés del 1%, la cuota mensual se calcula dividiendo el monto del crédito entre las 24 cuotas (cuota pura) más el 1% del capital solicitado -que le queda por saldar al momento del pago de la cuota. Se pide calcular lo siguiente:

(a) Si el crédito es de \$12.000 a pagar en 24 cuotas, ¿de cuánto será la primera cuota? ¿De cuánto será la segunda cuota? ¿y la quinta?¿y la décimoquinta? ¿y la última?

(b) Determinar una expresión algebraica que permita calcular lo que se deberá pagar en la cuota n.

(c) ¿En qué cuota pagará \$585?

2.2 Ecuaciones cuadráticas

En las expresiones algebraicas usadas para responder a los problemas planteados anteriormente nunca se tuvo que multiplicar a la variable por sí misma. En el caso de los problemas con baldosas esto obedece a que estuvimos calculando la cantidad de baldosas necesarias para cubrir el perímetro de una figura. Cuando se pasa al trabajo con áreas de figuras las variables suelen estar elevadas al cuadrado. Algo similar ocurre cuando se usa el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 8. Calcular, en los casos en que tenga sentido, el lado faltante de los siguientes triángulos rectángulos:

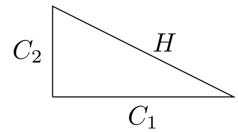
(a) uno de los catetos mide 4 y la hipotenusa mide 6,

(b) uno de los catetos y la hipotenusa miden lo mismo,

(c) un cateto mide 5 y la hipotenusa mide 4.

Resolución.

(a) Para calcular lo pedido en el inciso (a) se necesita recurrir al teorema de Pitágoras



$$H^2 = C_1^2 + C_2^2$$

donde H, C_1 y C_2 son las longitudes de la hipotenusa y los catetos respectivamente.
Llamamos x a la longitud del cateto que no conocemos.

$$x^2 + 4^2 = 6^2 \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad x^2 = 20 \ .$$

Por lo discutido en el capítulo sobre números $\sqrt{20}$ es el único número positivo cuyo cuadrado es 20. Pero, ¡cuidado! $-\sqrt{2}0$ también es solución de la ecuación $x^2 = 20$. De hecho, $-\sqrt{20}$ y $\sqrt{20}$ son las dos únicas posibilidades. Llegamos a la conclusión de que el conjunto solución de la ecuación $x^2 = 20$ es

$$S = \{-\sqrt{20}, \sqrt{20}\} \ .$$

Al retomar el contexto, se ve que x no puede ser negativo, y por lo tanto la respuesta a este inciso es la siguiente.

Respuesta: El cateto faltante mide $\sqrt{20}$.

(b) La respuesta en este caso es obvia, no se puede construir un triángulo rectángulo tal que su hipotenusa y uno de los catetos midan lo mismo. De todas formas, cabe la pregunta de que hubiéramos obtenido si se hubiera recurrido al teorema de Pitágoras. El teorema de Pitágoras nos lleva a la ecuación $x^2 + C^2 = H^2$ pero como $H = C$ resulta

$$x^2 = 0 \ .$$

El único número que elevado al cuadrado da 0 es el mismo 0, por lo que el conjunto solución de la ecuación es

$$S = \{0\} \ .$$

Como x representa la longitud de un lado de un triángulo el valor $x = 0$ no tiene sentido y la respuesta, teniendo en cuenta el contexto, es la que sigue:

Respuesta: No es posible construir un triángulo rectángulo tal que la longitud de su hipotenusa y la de uno de los catetos coincidan.

(c) Nuevamente en este caso se ve claramente que es imposible construir un triángulo rectángulo que cumpla con las condiciones dadas. Si se hubiera intentado usar el teorema de Pitágoras para encontrar el supuesto triángulo se llega a la ecuación

$$x^2 = 4^2 - 5^2 = -9 \ .$$

Esta ecuación no tiene solución pues el cuadrado de cualquier número es no negativo. Por lo tanto, el conjunto solución es

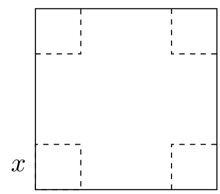
$$S = \emptyset \ .$$

La respuesta al problema es la siguiente:

Respuesta: No es posible construir un triángulo rectángulo que cumpla con las condiciones dadas.

Ejemplo 9.

Se construye una caja de cartón recortando cuatro cuadrados iguales en las esquinas de una plancha cuadrada siguiendo la línea punteada que se muestra en la figura. Una vez recortados los cuadrados se pegan los bordes. Si la plancha de cartón tiene lados de 10cm



(a) calcular la superficie de la base para las longitudes x de los lados de los cuadrados indicadas en cada uno de los siguientes casos:
i) 2cm, ii) 5cm.

(b) Determinar para cuáles longitudes de los lados de los cuadrados tiene sentido el armado propuesto.

(c) ¿Cúanto deben medir los lados de los cuadrados para que la superficie de la base sea de 9cm^2.

Resolución. Vamos a resolver el problema propuesto quitando las unidades para simplificar la notación.

(a) Si $x = 2$, cada lado de la base de la caja mide $10 - 2 \cdot 2 = 6$ y, en consecuencia, la superficie de la base es $s = 6 \cdot 6 = 36$.

Si $x = 5$, cada lado de la base de la caja mide $10 - 2 \cdot 5 = 0$ y, en consecuencia, la construcción propuesta no tiene sentido.

(b) Para resolver el problema ignoramos ciertas variables que intervienen en la situación desde un punto de vista práctico tales como el grosor del cartón, el filo de la tijera, etc. Con esta salvedad se puede armar la caja para cualquier valor x que cumpla $0 < x < 5$.

Respuesta: Tiene sentido armar la caja si la longitud de los lados de los cuadrados es mayor que 0 y menor que 5.

(c) Siguiendo las cuentas que hicimos en (a), los lados de la base de la caja deben medir $10 - 2x$ y por lo tanto, la superficie de la base mide $(10 - 2x)^2$. El ejercicio pide encontrar x para que la superficie de la base sea 9, por lo tanto se tiene que cumplir la igualdad

$$(10 - 2x)^2 = 9 \ .$$

Para trabajar la resolución de este tipo de ecuaciones, nos olvidaremos del contexto para buscar su conjunto solución y volveremos al problema para dar la respuesta.

Hay dos números cuyo cuadrado es 9, a saber 3 y -3. Por lo que, tenemos dos posibilidades

$$10 - 2x = 3 \quad \text{o} \quad 10 - 2x = -3 \ .$$

Despejando, se obtienen dos valores posibles para x,

$$x = \frac{3 - 10}{-2} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad \text{o} \quad x = \frac{-3 - 10}{-2} = \frac{13}{2} = 6,5 \ .$$

Luego, el conjunto solución de la ecuación es

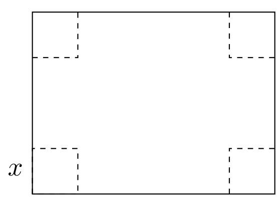
$$S = \{3,5;\ 6,5\} \ .$$

Al volver al contexto del problema y, en particular, lo discutido en el ítem 2, nos damos cuenta de que la solución $x = \frac{13}{2} = 6,5$ no es un valor aceptable para x.

Respuesta: El valor de x para que la superficie de la base de la caja sea de 9cm^2 es $x = 3,5\text{cm}$.

Ejemplo 10.

Se desean fabricar cajas de cartón de base rectangular con el mismo procedimiento del ejemplo anterior, pero esta vez la plancha tiene forma rectangular. Los lados del rectángulo de cartón miden 20cm y 15cm .



(a) Indicar para cuáles longitudes de los lados de los cuadrados que se recortan tiene sentido el armado propuesto.

(b) ¿Cúanto deben medir los lados de los cuadrados recortados para que la superficie de la base de la caja sea de 100cm^2.

Resolución:

(a) Razonando como en el ejercicio anterior nos damos cuenta que x, $15-2x$ y $20-2x$ deben ser positivos, luego $0 < x < 7{,}5$.

(b) Dejando de lado las unidades, la base de la caja (una vez armada) es un rectángulo de lados $20-2x$ y $15-2x$, por lo que su superficie es $(20-2x)(15-2x)$. Se desea que la superficie de la base de la caja sea de 100, entonces debemos resolver la ecuación

$$(20-2x)(15-2x) = 100 \ .$$

Para quitar los paréntesis usamos la propiedad distributiva y se obtiene

$$(20-2x)(15-2x) = 20 \cdot 15 + 20(-2x) - 2x \cdot 15 - 2x(-2x),$$

operando resulta

$$300 - 40x - 30x + 4x^2 = 300 - 70x + 4x^2 \ .$$

La ecuación original se transformó en

$$300 - 70x + 4x^2 = 100 \quad \text{o} \quad 200 - 70x + 4x^2 = 0 \ .$$

La ecuación de arriba es una ecuación cuadrática completa escrita en forma desarrollada, para resolver este tipo de ecuaciones disponemos de la siguiente fórmula.

Fórmula resolvente para ecuaciones cuadráticas. Una ecuación cuadrática es, en general, una ecuación del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a,\ b \text{ y } c \text{ números reales y } a \neq 0 \ .$$

Se pide que $a \neq 0$ para conservar el término cuadrático y que no se transforme en una ecuación lineal. Para encontrar las soluciones se dispone de la fórmula resolvente que dice que las soluciones tienen la forma

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{si } b^2 - 4ac \geq 0.$$

En nuestro ejemplo, $a = 4$, $b = -70$ y $c = 200$, al aplicar la fórmula se obtiene

$$x_{1,2} = \frac{70 \pm \sqrt{(-70)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 200}}{2 \cdot 4} = \frac{70 \pm \sqrt{1700}}{2 \cdot 4} = \frac{70 \pm 10\sqrt{17}}{2 \cdot 4} = \frac{35}{4} \pm \frac{5}{4}\sqrt{17}$$

y, aproximadamente, $x_1 = \frac{35}{4} + \frac{5}{4}\sqrt{17} \approx 13{,}90$ y $x_2 = \frac{35}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{17} \approx 3{,}59$.

De acuerdo a las restricciones planteadas por el problema y explicitadas en el ítem (a), solo x_2 tiene sentido.

Respuesta: El lado de los cuadrados debe medir $x_2 = \frac{35}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{17}\,\text{cm} \approx 3{,}59\,\text{cm}$.

Raíces de ecuaciones cuadráticas. En este apartado se estudia el conjunto solución de las ecuaciones cuadráticas. Para ello, se pide completar la siguiente tabla:

Ecuación	Conjunto solución	Cantidad de soluciones
$x^2 - 5x + 6 = 0$		
$2x^2 - 4x + 2 = 0$		
$-x^2 + 3x - 5 = 0$		

Revisando las ecuaciones resueltas, indicar qué condición debe darse para que una ecuación cuadrática tenga dos, una o ninguna solución ¿ Podría tener más de dos?

Determinación del conjunto solución según el discriminante. En resumen, la cantidad de soluciones reales que tiene una ecuación cuadrática depende del número $b^2 - 4ac$ que se llama discriminante y se lo denota con la letra griega mayúscula Δ (delta). Resumir las posibles situaciones completando el siguiente cuadro.

Ecuación	$\Delta = b^2 - 4ac$ **(discriminante)**	**Cantidad de soluciones**
$ax^2 + bx + c = 0$	positivo	
$a \neq 0$		una única solución real
		no hay soluciones reales

Trabajo práctico 18

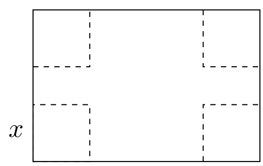
Ejercicio 1. Calcular, en el caso en que tenga sentido, el lado faltante de los siguientes triángulos rectángulos.

(a) Uno de los catetos mide 3 y la hipotenusa mide 5.

(b) Uno de los catetos y la hipotenusa miden lo mismo.

(c) Un cateto mide 6 y la hipotenusa mide 3.

Ejercicio 2. Se construye una caja de cartón recortando cuatro cuadrados iguales en las esquinas de una plancha rectangular siguiendo la línea punteada que se muestra en la figura. Una vez recortados los cuadrados se pegan los bordes. Si la plancha de cartón tiene lados de 20cm y 30cm se pide:



(a) calcular la superficie de la base para las longitudes x de los lados de los cuadrados indicadas en cada uno de los siguientes casos:
i) 2cm, ii) 5cm iii) $9,5$cm

(b) Determinar para cuáles longitudes de los lados de los cuadrados tiene sentido el armado propuesto.

(c) ¿Cúanto deben medir los lados de los cuadrados para que la superficie de la base sea de 90cm^2.

Ejercicio 3. Resolver las siguientes ecuaciones

(a) $5x^2 - 7 = 9$	(b) $(x+2)^2 = 9$	(c) $-3x^2 - 3x + 2 = 0$
(d) $x^2 - x - 1 = 0$	(e) $-2x^2 = x + 2$	(f) $x^2 = 2x - 1$
(g) $16 + x^2 = 8x$	(h) $1 - x = 2x^2$	(i) $x \cdot (x - 3) = 10$

Ejercicio 4. Decidir si los números $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$ y $-0,414213$ son soluciones de la ecuación $3x^2 - 6x - 3 = 0$. ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación?

Ejercicio 5. Dar ejemplos de ecuaciones cuadráticas que tengan 1 solución real.

2.3 Ejemplos de resolución de distintos tipos de ecuaciones

El objetivo de este apartado es trabajar sobre algunas cuestiones técnicas que suelen ser útiles para la resolución de problemas.

Ejemplo 11. Resolver la ecuación $2x^2 + 5x = 0$.

Resolución: Veamos dos formas de resolver esta ecuación.

Forma 1: Podemos empezar por lo siguiente: $2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -5x$ Ahora, deberíamos dividir miembro a miembro por x ("pasar" x dividiendo). Pero esta operación tiene un inconveniente: no puede realizarse si $x = 0$ y, en principio, x puede ser 0 ya que el dominio de definición de la ecuación dada es $\mathbb{R}$. Entonces, hagamos la consideración $x \neq 0$ y sigamos operando, teniendo en cuenta que todo lo que hagamos desde ahora vale con $x \neq 0$,

$$2x^2 + 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = -5x,$$

para $x \neq 0$,

$$\frac{2x^2}{x} = -\frac{5x}{x} \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -5/2.$$

Para completar la resolución tenemos que analizar el caso de $x = 0$, que ha sido separado debido a nuestra forma de resolver la ecuación y no a una restricción en el dominio. Si reemplazamos en la ecuación original $x = 0$ y realizamos las operaciones indicadas se obtiene $2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 = 0$. Es decir que $x = 0$ verifica la ecuación. Por lo tanto, debemos incorporar a $x = 0$ al conjunto de soluciones. Así, $S = \{-5/2, 0\}$.

Otra forma: observemos que a la expresión algebraica que compone la ecuación, podemos escribirla de modo equivalente, extrayendo factor común:

$$2x^2 + 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (2x + 5) = 0 \ .$$

Observemos la ventaja de tener escrita la ecuación en esta nueva forma. La expresión $x \cdot (2x+5)$ es el producto de dos números desconocidos. Es claro que si al multiplicar números (dos, tres o cualquier cantidad), el resultado es 0, eso equivale a decir que alguno de esos números es 0 (uno, varios o todos, pero seguro que por lo menos uno). Aplicando esto, caben dos alternativas: x es cero o $2x + 5$ es cero. Luego, decir que $x \cdot (2x + 5) = 0$ es equivalente a decir que $x = 0$ o que $2x + 5 = 0$. La primera alternativa ya nos da el valor de x ($x = 0$), mientras que despejando de la segunda obtenemos $x = -5/2$. Luego, $S = \{0, -5/2\}$.

Escribamos la propiedad sobre la que se basa la resolución:

Propiedad. si el producto de dos o más números es cero entonces alguno (por lo menos uno) de ellos es 0. En símbolos (para el caso de dos números): Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

Esto último requiere una aclaración. En Matemática usamos el "ó" en un sentido amplio. Esto significa que cuando decimos "$a = 0$ ó $b = 0$" no estamos diciendo que $a = 0$ y que $b \neq 0$ o que $b = 0$ y que $a \neq 0$, sino que contemplamos también la posibilidad de que ambos sean cero.

Nota: en la resolución de la ecuación hemos utilizado como recurso la extracción de un factor común. Realizamos a continuación una referencia importante a él.

El factor común y la propiedad distributiva: la extracción de un factor común no es otra cosa que la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Recordemos esta última:

Propiedad distributiva. Cualesquiera sean a, b y c reales vale que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Si partimos del primer miembro de la igualdad, tenemos una multiplicación $a \cdot (b+c)$. La aplicación de la distributiva "expande" la expresión y transforma esa multiplicación en una suma: $a \cdot b + a \cdot c$. Si partimos del segundo miembro, $a \cdot b + a \cdot c$ y extraemos factor común a, obtenemos $a \cdot (b + c)$. En este caso, decimos que hemos "extraído un factor común". Queda de manifiesto que tanto la propiedad distributiva (de la multiplicación respecto de la suma) y la extracción de factor común son la misma propiedad, solo diferenciadas por si el interés está en pasar del primer miembro al segundo o viceversa, esto es, si queremos transformar una multiplicación en suma o una suma en multiplicación.

Ejemplo 12. Resolver la ecuación $\frac{2x-3}{x+2} = 3$.

Resolución. Esta ecuación presenta la particularidad de que la variable aparece en el denominador. Para resolverla, la transformamos en otra ecuación equivalente en la que la variable aparezca solo en el numerador. Pero además, por aparecer como divisor, la variable presenta una restricción: en este caso, no puede valer -2 (ya que estaríamos dividiendo por 0). Cuando lleguemos al valor (o valores) de x, debemos comprobar que entre ellos no esté -2 (si fuera así, lo descartamos). Para lograr eso, deberemos "pasar" $x+2$ multiplicando al segundo miembro (sabemos que esta forma "coloquial" equivale a multiplicar a ambos miembros por $x+2$). Entonces

$$2x-3=3\cdot(x+2)\ .$$

La ecuación resultante es una ecuación lineal como las que ya sabemos resolver, luego

$$2x-3=3\cdot(x+2) \Longleftrightarrow 2x-3=3x+6 \Longleftrightarrow -3-6=3x-2x \Longleftrightarrow -9=x \Longleftrightarrow x=-9\ .$$

Como el valor hallado es un valor posible para la variable, esto es, no es igual a -2, el conjunto solución de la ecuación es $S=\{-9\}$.

Ejemplo 13. Resolver la ecuación $\sqrt{x+4}=1$

Resolución. Evidentemente el problema que propone la resolución de esta ecuación es deshacerse de la raíz cuadrada. Con este objeto, recurrimos a la siguiente propiedad de las raíces (estudiada en el capítulo de números)

$$(\sqrt{a})^2=a \quad \text{si} \quad a\geq 0\ .$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene que

$$(\sqrt{x+4})^2=1^2 \quad \text{si } x+4\geq 0\ ,$$

y la aplicación de la propiedad nos permite deducir que

$$x+4=1 \quad \text{equivalentemente} \quad x=-3,$$

como $-3+4>0$, efectivamente, -3 es la solución a la ecuación.

Respuesta: El conjunto solución de la ecuación es $S=\{-3\}$.

Trabajo práctico 19

Ejercicio 1. Resolver las siguientes ecuaciones aplicando las diversas técnicas discutidas a lo largo de esta sección. Intentar aplicar más de una para cada caso.

(a) $(x-5)\cdot(3x-1)=1$ (b) $x(5x-2)+x^3=0$ (c) $\frac{x-2}{3x-1}=1$

(d) $\sqrt{x}=\frac{4}{3}$ (e) $(x-5)\cdot x-(1-2x)(x-5)=0$ (f) $x^3=\frac{27}{4}$

(g) $x(x+1)=3(x+1)$ (h) $x+\frac{1}{x+3}=-1$ (i) $\frac{x-2}{x}=\frac{2x}{x-3}$

Ejercicio 2. ¿Qué números enteros cumplen que si se los multiplica por su consecutivo y luego se les resta 2 dan por resultado 0?

Ejercicio 3. Si al cuadrado del consecutivo de un número, lo multiplicamos por 3 se obtiene el mismo resultado que si al doble del cuadrado de ese número le sumamos ocho veces dicho número y al resultado lo incrementamos en seis. Hallar el único número natural que verifica la condición anterior.

Ejercicio 4. El precio de un producto aumentó durante dos meses seguidos en un mismo porcentaje. Calcular dicho porcentaje de aumento si se sabe que el aumento acumulado durante los dos meses fue del 5%.

Ejercicio 5. Para argumentar en Matemática.

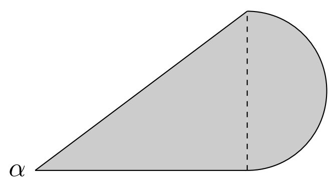
1. ¿Por qué la ecuación $(x-1)(x-2)=0$ tiene las mismas soluciones que la ecuación $x^2-3x-1=-3$?
2. Las ecuaciones $\frac{(x-1)^2}{x-1}=0$ y $x-1=0$ ¿tienen el mismo conjunto solución? ¿Por qué?
3. Si se sabe que el discriminante de una ecuación cuadrática es mayor o igual que cero, ¿qué puede decir de las soluciones de la ecuación?
4. Extraer una conclusión a partir de las siguientes condiciones y explicar cómo la obtuvo:
   (a) Cualquier ecuación cuadrática tiene a lo sumo dos soluciones reales.
   (b) Se da una determinada ecuación que no tiene dos raíces reales.

   ¿qué puede decir del discriminante de la ecuación en cada caso?
5. Decidir si son válidos o no los siguientes argumentos y explicar.
   (a) Dado que sólo existen raíces cuadradas de números positivos, entonces la ecuación $\sqrt{-x}=2$ no tiene solución en el conjunto $\mathbb{R}$.
   (b) Si el discriminante de una ecuación cuadrática es negativo entonces o no tiene solución o tiene una sola solución real.

2.4 ¿Es Geometría o es Algebra?

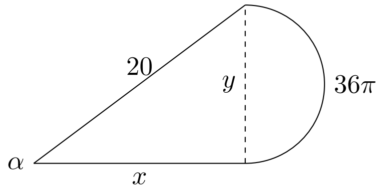
En esta sección se proponen ejercicios de índole geométrica que pueden abordarse con las diversas técnicas aprendidas en esta sección.

Ejercicio resuelto 8.
La figura de la derecha está compuesta por un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 20cm y un semicírculo de área $36\pi \text{cm}^2$. Hallar el área de la figura y la medida del ángulo α.



Resolución:

Para calcular el área de la figura es necesario conocer las longitudes de los catetos. Llamamos x e y a estas longitudes. Es conveniente consignar los datos y los nombres de las incógnitas en la figura.



El área de un círculo de radio r es igual a $\pi \cdot r^2$ y la de un semicírculo es $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$. En nuestro ejemplo, el radio del semicírculo es $\frac{y}{2}$ y su área es 36π, por lo que

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 = 36\pi \ .$$

A continuación se despeja y, es conveniente hacerlo en varios pasos,

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{y}{2}\right)^2 = 2 \cdot 36 \\
&\tfrac{y}{2} = 6 \cdot \sqrt{2} \qquad \text{ó} \qquad \tfrac{y}{2} = -6 \cdot \sqrt{2} \\
&y = 12 \cdot \sqrt{2} \qquad \text{ó} \qquad y = -12 \cdot \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Como y es una longitud, la solución negativa no tiene sentido y por lo tanto $y = 12 \cdot \sqrt{2}$.
Resultado parcial: $y = 12 \cdot \sqrt{2}$.

Con este resultado parcial, es posible calcular la longitud del otro cateto, es decir, el valor de x

$$20^2 = x^2 + (12 \cdot \sqrt{2})^2 \iff 400 = x^2 + 288 \iff x^2 = 112.$$

En principio, $x = \sqrt{112}$ o $x = -\sqrt{112}$, pero como x representa una longitud, resulta $x = \sqrt{112}$.
Resultado parcial: $x = \sqrt{112}$.

Con estos datos podemos proceder a calcular el área de la figura,

área de la figura = área del triángulo+área del semicírculo $= \frac{x \cdot y}{2} + 36\pi$

área de la figura $= \frac{\sqrt{112} \cdot 12 \cdot \sqrt{2}}{2} + 36\pi = 6\sqrt{224} + 36\pi \approx 202,9$

Respuesta parcial: El área de la figura es $6\sqrt{224} + 36\pi \approx 202,9$.

El ángulo α se puede calcular usando, por ejemplo, el seno:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{20} \approx 0,85 \ .$$

Por lo tanto, $\alpha \approx 58^o$.

Respuesta parcial: El ángulo α mide aproximadamente 58^o.

Respuesta: El área de la figura es $6\sqrt{224} + 36\pi \approx 202,9\text{cm}^2$ y el ángulo α mide aproximadamente 58^o.

Trabajo práctico 20

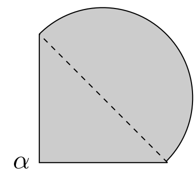
Ejercicio 1. A partir de un cuadrado se obtiene otro incrementando en 5 unidades la medida de su lado. El área del nuevo cuadrado supera en 70 al área del cuadrado inicial. ¿Cuál es la medida de lado del cuadrado inicial?

Ejercicio 2. ABC es un triángulo equilátero (sus lados son iguales y sus ángulos también lo son).

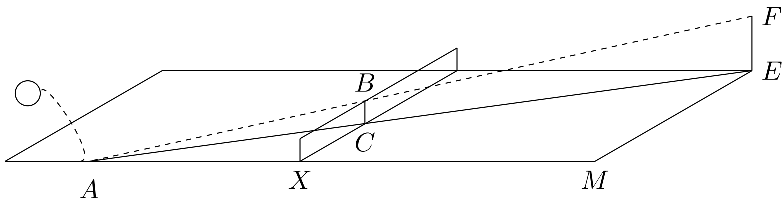
(a) ¿Cuál sería su área si uno de sus lados midiera 4 cm?

(b) ¿Cuál sería su perímetro si su área fuera $\sqrt{3}$ cm^2?

Ejercicio 3. La figura está compuesta por un triángulo rectángulo en α cuyos catetos son iguales y un semicírculo cuyo diámetro es la hipotenusa del triángulo. Calcular el área y el perímetro de la figura sabiendo que la longitud de la semicircunferencia es $5\,\pi$.

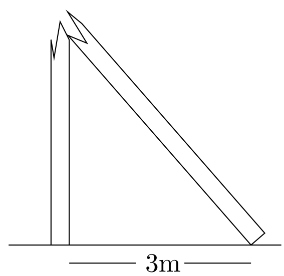


Ejercicio 4. Un tenista realiza un saque golpeando la pelota con su raqueta a una cierta altura. La pelota se sirve desde una esquina de la cancha a una altura de $2,4$m, cruza la cancha en diagonal (se asume que la trayectoria es una línea recta), pasa justo sobre la red y pica sobre el borde interno. Calcular la distancia del punto donde pica la pelota a la red.



Es útil conocer las dimensiones de una cancha de tenis: Largo: 23,77 m, ancho interno: 8,23 m, altura de la red: 1 m (promedio).

Ejercicio 5. Durante una tormenta un poste se quebró como se muestra en la figura. Se sabe que el poste mide 8 metros, que la punta del poste quedó a 3 metros del pie del poste y que el ángulo que forma la parte baja del poste con el piso es de 90^o. Calcular la altura de la quebradura.



Ejercicio 6. Se quiere plantar con pasto un cantero con forma de triángulo isósceles cuyo perímetro es de 17 m y los lados iguales son 2 m más largos que el lado desigual. El rendimiento de las semillas de ese pasto es de 5 g/m^2. ¿Cuántos gramos hay que sembrar?

De expresiones algebraicas a la factorización de polinomios

Hasta el momento hemos trabajado con diversas expresiones algebraicas, entendiendo como se construyen y las operaciones básicas que podemos realizar junto a las interpretaciones geométricas. Nos han dado una herramienta poderosa para representar relaciones matemáticas de manera general.

A continuación, tomaremos una selección del capítulo 3 de la bibliografía correspondiente al Manual de Matemática Preuniversitaria-UNL. Allí nos centraremos nuevamente en un aspecto clave de las expresiones algebraicas: la factorización. Será un paso importante en el tratamiento de una clase específica de expresiones algebraicas llamadas Polinomios.

Los polinomios son expresiones algebraicas que contienen una o más variables elevadas a potencias enteras no negativas. Son esenciales no solo por su presencia intramatemática, sino también porque permiten describir fenómenos complejos en diversas áreas de la ingeniería.

3.3. Factorización de polinomios

Como vimos en la sección anterior, cuando realizamos una división (de polinomios o de números naturales), la igualdad

$$\text{dividendo} = \text{cociente} \cdot \text{divisor} + \text{resto}$$

nos permite verificar el resultado obtenido. En el caso en que el resto sea cero, la igualdad anterior se transforma en

$$\text{dividendo} = \text{cociente} \cdot \text{divisor}.$$

En otras palabras, cuando el resto es cero logramos escribir al dividendo como producto de dos factores: el cociente y el divisor. Por ejemplo, para el caso de números naturales tenemos que

$$10 = 2 \cdot 5,$$

pues el cociente al dividir 10 por 2 es 5, y el resto es cero. En forma más general, si al dividir p por q obtenemos un cociente c y resto cero, entonces

$$p = q \cdot c$$

y decimos que p es **divisible** por q, o también que p es **múltiplo** de q. Desde otro punto de vista, se dice que q es **divisor** de p, o que q es **factor** de p. Esta terminología se emplea tanto para números naturales como para polinomios.

Ejemplo 61. Factores de un polinomio. Como vimos en el primer caso del Ejemplo 60, aplicando la regla de Ruffini obtuvimos que

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 + 2x + 1)(x - 1).$$

Entonces decimos que $x^3 + x^2 - x - 1$ es divisible por $x^2 + 2x + 1$ y por $x - 1$, o que es múltiplo de cada uno de ellos. También decimos que $x^2 + 2x + 1$ y $x - 1$ son factores de $x^3 + x^2 - x - 1$, o que son divisores de él. «

Factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de otros polinomios, como en el ejemplo anterior. Este es el objetivo de esta sección, y resultará una herramienta fundamental para resolver ecuaciones polinómicas.

Comencemos con casos ya conocidos, que son los estudiados en la sección anterior.

Diferencia de cuadrados. Este es uno de los casos más simples de identificar, ya que, como su nombre lo indica, es una diferencia (es decir, una resta) de dos cantidades al cuadrado. Esto es, nos encontramos con una expresión de la forma

$$a^2 - b^2,$$

y queremos factorizarla. En la sección anterior vimos que este es el aspecto del producto

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),}$$

obteniendo así una factorización del binomio dado.

Ejemplo 62. Reconociendo una diferencia de cuadrados. Como se dijo antes, es sencillo reconocer este caso: solamente hay que extraer las raíces de las dos cantidades involucradas en la resta:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x^2} \quad - \quad \underset{\substack{\downarrow \\ 4}}{16}.$$

Entonces factorizamos $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$. «

Notar que el término que aparece sumando en un factor y restando en el otro, es la cantidad cuyo cuadrado estaba restando en el binomio dado. El otro término siempre tiene un signo + delante.

Ejemplo 63. **Otra diferencia de cuadrados.** Factoricemos ahora $9t^8 - 5$:

$$\begin{array}{ccc} 9t^8 & - & 5. \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3t^4 & & \sqrt{5} \end{array}$$

Entonces $9t^8 - 5 = \left(3t^4 + \sqrt{5}\right)\left(3t^4 - \sqrt{5}\right)$. «

Trinomio cuadrado perfecto. Si el polinomio que queremos factorizar es de la forma

$$a^2 + 2ab + b^2,$$

entonces es lo que llamamos en la sección anterior un trinomio cuadrado perfecto. Sabemos que este tipo de trinomios provienen de hacer $(a+b)^2$. Es decir, en este caso se tiene

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,}$$

lo cual es una factorización del polinomio dado, pues $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$. Los factores repetidos se expresan en forma de potencia simplemente para agilizar la escritura.

Ejemplo 64. **Reconociendo un trinomio cuadrado perfecto.** Con la práctica, reconocer este tipo de trinomios no es difícil. Esencialmente, la idea es reconocer en el trinomio dos términos que sean el cuadrado de ciertas cantidades, y verificar si el término restante es el doble producto de dichas cantidades. Por ejemplo, considerar el trinomio

$$x^2 + 6x + 9.$$

Observando el polinomio, identificamos dos términos que son el cuadrado de dos cantidades: x y 3 (cuyos cuadrados son x^2 y 9). Además, si hacemos el doble producto de estas cantidades obtenemos $2 \cdot 3 \cdot x = 6x$, que coincide con el término restante. Entonces es un trinomio cuadrado perfecto, el cual se factoriza como

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2.$$

Miremos ahora el trinomio

$$x^2 - 10x + 25.$$

Aquí los cuadrados que identificamos son x^2 y 25, provenientes de x y 5. Sin embargo, el doble producto de ellos es $10x$, y en el trinomio aparece con signo opuesto. Para lograr $-10x$, tomamos una de las dos cantidades negativa, por ejemplo, -5 (y se sigue cumpliendo que $(-5)^2 = 25$). Entonces

$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2.$$ «

Los dos trinomios presentados en el ejemplo anterior muestran que se debe observar el signo del término de la forma $2ab$ para determinar si se factoriza como $(a + b)^2$, o como $(a - b)^2$. En este último caso, ya que $z^2 = (-z)^2$ para cualquier número real z, se tiene que $(a-b)^2 = (-a+b)^2$, por lo que cualquiera de estas dos factorizaciones es correcta.

En el siguiente ejemplo se incluye una forma más “visual” de identificar trinomios cuadrados perfectos. El mismo muestra además que el trinomio no debe ser necesariamente un polinomio de grado 2 y con coeficiente principal igual a 1.

Ejemplo 65. **Más trinomios cuadrados perfectos.** Factorizar los siguientes trinomios

$$p(x) = x^6 + 8x^3 + 16, \qquad q(x) = 9x^4 - 30x^2 + 25.$$

Solución: Para el caso de p, los dos cuadrados que vemos son x^6 que es el cuadrado de x^3, y 16 que es el cuadrado de 4. El doble producto de estas cantidades es $2 \cdot 4 \cdot x^3 = 8x^3$, que coincide con el término restante. Por lo tanto

$$p(x) = (x^3 + 4)^2.$$

Hagamos el mismo razonamiento para q pero en forma gráfica que suele ayudar:

$$9x^4 - \; 30x^2 \; + 25$$

$$3x^2 \qquad\qquad 5$$

$$\underbrace{2 \cdot 3x^2 \cdot 5 = 30x^2}_{\text{Doble producto de las raíces halladas.}}$$

En el gráfico anterior, debajo de las flechas verticales, identificamos las dos cantidades cuyos cuadrados son los términos del trinomio, y luego hicimos el doble producto de estas cantidades para comparar con el término restante. Finalmente, prestamos atención al signo de este término para concluir que

$$q(x) = \left(3x^2 - 5\right)^2.$$

«

Cuatrinomio cubo perfecto. Si el polinomio que queremos factorizar es de la forma

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

entonces es lo que llamamos en la sección anterior un cuatrinomio cubo perfecto. Sabemos que este tipo de cuatrinomios provienen de hacer $(a+b)^3$. Es decir, en este caso se tiene

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3,$$

lo que resulta una factorización del polinomio dado ya que

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b).$$

Como antes, utilizamos la potencia para agilizar la escritura de factores repetidos.

En los siguientes ejemplos identificaremos cuatrinomios cubos perfectos de manera análoga a lo que hicimos para reconocer trinomios cubos perfectos, solamente que ahora debemos identificar *cubos* en lugar de cuadrados, lo que automáticamente nos define los signos de cada término.

Ejemplo 66. **Reconociendo un cuatrinomio cubo perfecto.** Factorizar los polinomios

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8, \qquad q(t) = 27t^6 + 27t^4 + 9t^2 + 1.$$

Solución: Comencemos con el polinomio p:

$$x^3 - \underbrace{6x^2} + \underbrace{12x} - 8$$

$$x \qquad\qquad -2$$

$$3 \cdot x^2 \cdot (-2) = -6x^2, \qquad 3 \cdot x \cdot (-2)^2 = 12x.$$

Entonces $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$. Con respecto a q, tenemos:

$$27t^6 + \underbrace{27t^4} + \underbrace{9t^2} + 1$$

$$3t^2 \qquad\qquad 1$$

$$3 \cdot (3t^2)^2 \cdot 1 = 27t^4, \qquad 3 \cdot 3t^2 \cdot 1^2 = 9t^2.$$

Entonces $27t^6 + 27t^4 + 9t^2 + 1 = (3t^2+1)^3$.

Pero, ¿qué podemos hacer para factorizar polinomios que no tengan la forma de los presentados hasta ahora? Lo primero que debemos intentar es sacar *factor común*, como se explica a continuación.

Factor común. Así como los casos anteriores provinieron de leer una igualdad ya conocida desde el lado adecuado, lo mismo ocurre con el método de extraer factores comunes en un polinomio. Este método consiste en determinar si el polinomio dado es el resultado de haber aplicado la propiedad distributiva del producto respecto de la suma o la resta. Por ejemplo, esta propiedad nos dice que

$$3x^2\left(x+2\right) = 3x^3 + 6x^2.$$

Extraer factor común es exactamente el proceso inverso: nos dan el polinomio $3x^3 + 6x^2$ y debemos identificar qué factores aparecen en *todos* sus términos. En este caso vemos que el 3 aparece como factor en ambos términos (ya que $6 = 2 \cdot 3$), y también x^2 (ya que $x^3 = x^2 \cdot x$). Los factores comunes a todos los términos los extraemos, y lo multiplicamos por el polinomio que resulta de "quitarle" dichos factores al original (esto significa dividir cada término por lo que sacamos como factor común):

$$3x^3 + 6x^2 = 3x^2(x+2).$$

Como siempre es posible **verificar** si lo hemos hecho bien, aplicando la propiedad distributiva del lado derecho de la igualdad para ver si recuperamos el polinomio del lado izquierdo.

De esta forma hemos factorizado el polinomio dado. Recordemos que factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de otros *polinomios*, por lo que x se extrae como factor común con el menor exponente al que aparece, para evitar exponentes negativos. Por ejemplo, si en el ejemplo anterior hubiéramos tomado como factor común a $3x^3$, nos queda

$$3x^3 + 6x^2 = 3x^3(1 + 2x^{-1}),$$

y, aunque la igualdad es cierta para todo $x \neq 0$ (hacer la distributiva del lado izquierdo para verificarlo), lo que queda entre paréntesis *no* es un polinomio.

Ejemplo 67. Extrayendo factores comunes.

- $x^4 - 4x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 4x + 1)$.
- $10x^2 + 25x + 15 = 5(2x^2 + 5x + 3)$.
- $9t^3 - 6t^2 + 12t^8 - 18t^9 = 3t^2(3t - 2 + 4t^6 - 6t^7)$.
- $3x(x+1)+5(x+1) = (x+1)(3x+5)$. Aquí el factor común es el binomio $(x+1)$ que está en ambos términos.
- $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$. Sacar factor común nos permitió obtener una diferencia de cuadrados y seguir factorizando.
- $x^3 - 12x^2 + 36x = x(x^2 - 12x + 36) = x(x-6)^2$. Sacar factor común nos permitió obtener un trinomio cuadrado perfecto y seguir factorizando. «

Ejemplo 68. **Cualquier constante no nula como factor común.** Si consideramos el polinomio $p(x) = 3x^2 - 12x + 6$, es claro que podemos extraer al 3 como factor común:

$$3x^2 - 12x + 6 = 3(x^2 - 4x + 2).$$

Los coeficientes que quedan en el polinomio entre paréntesis son los coeficientes del polinomio original divididos por 3, de manera que al hacer la distributiva se recupera lo que está a la izquierda de la igualdad. Pero si podemos dividir cada coeficiente por 3, entonces podemos dividir por cualquier otro número que se desee, siempre que no sea cero:

$$3x^2 - 12x + 6 = 6\left(\tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right) = -4\left(-\tfrac{3}{4}x^2 + 3x - \tfrac{3}{2}\right).$$

En otras palabras, aunque el aspecto del resultado quizás "empeore",

todo polinomio p es divisible por cualquier polinomio de grado cero.

En particular, **siempre es posible factorizar un polinomio (no constante) dado, como producto entre una constante y un polinomio mónico (es decir, uno con coeficiente principal igual a 1).** Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 5 &= 2\left(x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}\right), \\ \pi x^5 + 2x^3 - x + \sqrt{2} &= \pi\left(x^5 + \tfrac{2}{\pi}x^3 - \tfrac{1}{\pi}x + \tfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right). \end{aligned}$$

Así, cada polinomio puede factorizarse como el producto entre una constante y uno o más polinomios mónicos:

$$2x^3 + 3x^2 = x^2(2x + 3) = 2(x^2)\left(x + \frac{3}{2}\right).$$

Aunque en algunos textos suele considerarse el último miembro en la expresión anterior como la factorización *completa* del polinomio dado, no exigiremos aquí que cada factor sea mónico.

Ejemplo 69. **Factor común en grupos.** A veces nos encontramos con un cuatrinomio que no tiene un factor común a todos sus términos, pero tiene uno que es común a dos de ellos, y otro factor común a los otros dos. Antes de describirlo veamos un ejemplo que ilustra el método:

$$\underbrace{4x^3 - 4x^2}_{\substack{4x^2 \text{ es factor común} \\ \text{de estos dos términos}}} \underbrace{+2x - 2}_{\substack{2 \text{ es factor común} \\ \text{de estos dos términos}}} = 4x^2(x - 1) + 2(x - 1) = \underbrace{(x - 1)}_{\substack{(x-1) \text{ es factor común} \\ \text{de ambos términos}}}(4x^2 + 2).$$

Este caso especial de extraer factores comunes se llama "factor común en grupos" porque se agrupan ciertos términos para sacar factor común entre ellos. Dado un cuatrinomio, la forma de agrupar los términos no es casual, sino que se eligen de manera que el resultado permita obtener nuevamente un factor común en el binomio resultante. El polinomio de partida también puede tener 6 términos, o cualquier otro número par de términos, pero no es tan sencillo darse cuenta de cómo armar los grupos en estos casos. «

Describiremos a continuación un método de factorizar un polinomio que incluye a algunos de los presentados antes. Es importante entender que aún cuando muchos de ellos puedan factorizarse con el método que sigue, manejar los casos "con nombre" que estudiamos antes ahorrará tiempo y cálculos. Es decir, aunque sea posible factorizar varios de los ejemplos anteriores mediante el método que presentaremos a continuación, siempre es más sencillo y rápido hacerlo como se ilustró.

Recordemos que para factorizar un polinomio hay que hallar sus divisores, es decir, polinomios tales que al dividir el polinomio por ellos, el resto sea cero. Existe un teorema* que nos permite saber cuánto es el resto de dividir un polinomio (de grado al menos 1) por un binomio de la forma $x - r$, siendo r un número real:

Teorema del resto: El resto de dividir un polinomio p, con $\text{gr}(p) \geq 1$, por el binomio $x - r$ es igual a $p(r)$.

Ejemplo 70. Aplicando el teorema del resto. Sea $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 4$.

- El resto de dividir p por $x - 4$ será $p(4) = 80$.
- El resto de dividir p por $x+2$ será $p(-2) = -22$ (notar que $x+2 = x-(-2)$, por lo que $r = -2$).
- El resto de dividir p por $x + 1$ será $p(-1) = 0$.
- El resto de dividir p por x será $p(0) = 4$. «

Volvamos a nuestro objetivo: buscamos dividir p por un polinomio tal que el resto sea cero. Por el teorema del resto, al dividir p por $x - r$ el resto es $p(r)$. Entonces el binomio $x - r$ será divisor de p si y solo si $p(r) = 0$. Este resultado se conoce como **teorema del factor**, ya que en otras palabras dice que:

El binomio $(x - r)$ es factor del polinomio p si y solo si $p(r) = 0$.

*En matemática llamamos **teorema** a una proposición que afirma una verdad demostrable.

Recordemos que un valor r que satisface $p(r) = 0$ es llamado raíz (o cero) del polinomio p. Entonces, el teorema del factor dice que p tendrá un factor de la forma $x - r$ si y solo si r es raíz de p.

Nuestro objetivo se transforma entonces en encontrar, si las tiene, raíces reales de un polinomio dado. Para esto contamos afortunadamente con otro teorema, el cual será la clave para nuestro propósito.

Teorema de la raíz racional: Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con todos sus coeficientes enteros, con a_0 y a_n no nulos. Si p tiene una raíz racional r, entonces r es de la forma $\frac{m}{k}$, siendo m divisor de a_0 y k divisor de a_n.

El teorema anterior dice "si el polinomio tiene una raíz racional, entonces es de tal forma", pero puede que no tenga raíces racionales o de hecho que no tenga raíces reales, a pesar de tener coeficientes enteros:

- $p(x) = x^2 - 2$ tiene como raíces a $\pm\sqrt{2}$, pues $p(\pm\sqrt{2}) = 2 - 2 = 0$, y puede verse que son las únicas*, por lo tanto no tiene raíces racionales.
- $q(x) = x^2 + 2$ no tiene raíces reales, pues $r^2 \geq 0$ para todo r real, entonces $q(r) = r^2 + 2 \geq 2$ y por lo tanto no es cero para ningún real r.

En este texto trabajaremos con polinomios que sí tengan raíces racionales, para poder aplicar este método.

Ejemplo 71. **Buscando raíces racionales.** Sea $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3$. Si p tiene raíces racionales, entonces serán de la forma $\frac{m}{k}$, siendo m divisor de -3 y k divisor de 2. Entonces:

- las posibilidades para m son: 1, −1, 3 y −3;
- las posibilidades para k son: 1, −1, 2 y −2.

Entonces las posibles raíces racionales son las combinaciones de $\frac{m}{k}$, las cuales son

$$\pm 1, \quad \pm 3, \quad \pm\tfrac{3}{2}, \quad \pm\tfrac{1}{2}.$$

Por supuesto, siempre es conveniente comenzar probando con las posibles raíces enteras:

$$p(1) = 2 - 5 + 6 - 3 = 0,$$

y así tuvimos suerte y encontramos que $r = 1$ es raíz de p, por lo que $x - 1$ es factor de p. Podemos ver que los demás valores posibles no son raíces de p. «

*Demostrar esta afirmación escapa a los contenidos de este manual, pero proviene del hecho que un polinomio de grado n no puede tener más de n raíces.

> Resumiendo el método, buscamos números reales r tales que $p(r) = 0$. Si el polinomio tiene coeficientes enteros, probaremos aquí con números de la forma $r = \frac{m}{k}$, siendo m divisor del término independiente y k divisor del coeficiente principal. Si lo hallamos, $x - r$ será factor de p, y podremos factorizar $p(x) = c(x)(x - r)$, siendo $c(x)$ el cociente que puede hallarse aplicando la regla de Ruffini.

Ejemplo 72. Factorizando un polinomio. Factorizar el polinomio

$$p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3.$$

Solución: En el ejemplo anterior vimos que $r = 1$ es raíz de p, lo que implica que el binomio $x - 1$ es divisor de p. Apliquemos entonces la regla de Ruffini para efectuar la división:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 6 & -3 \\ 1 & & 2 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & -3 & 3 & 0 \end{array}$$

Como se esperaba, el resto es cero por lo que

$$2x^3 - 5x^2 + 6x - 3 = (2x^2 - 3x + 3)(x - 1).$$ «

Ejemplo 73. Factorizando un polinomio. Factorizar completamente (es decir, seguir factorizando mientras sea posible) el polinomio $q(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$.

Solución: Como el coeficiente principal de q es 1, las posibles raíces racionales son todas enteras y estarán dadas por los divisores del término independiente, 12. Entonces, debemos probar con los valores ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 y ±12, para ver si alguno es raíz de q:

$$q(1) = 8, \quad ✗ \qquad q(-1) = 0. \quad ✓$$

Hacemos entonces la división por $x + 1$ utilizando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -9 & 4 & 12 \\ -1 & & -1 & 1 & 8 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -8 & 12 & 0 \end{array}$$

Como esperábamos, el resto es cero por lo que

$$q(x) = (x^3 - x^2 - 8x + 12)(x + 1).$$

Pero se pide que lo factoricemos por completo, lo que significa que debemos ver si el factor $c(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ puede a su vez factorizarse. Probando con los mismos valores que antes, vemos que $c(2) = 0$, por lo que haremos $c(x) : (x-2)$ mediante la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -8 & 12 \\ 2 & & 2 & 2 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Entonces $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x^2 + x - 6)(x - 2)$, por lo que

$$q(x) = (x^3 - x^2 - 8x + 12)(x + 1) = (x^2 + x - 6)(x - 2)(x + 1).$$

Pero $x^2 + x - 6$ aún se puede factorizar, pues su valor numérico en 2 es cero, por lo que aplicamos la regla de Ruffini por tercera vez para realizar el cociente $(x^2 + x - 6) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Luego $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ y, en consecuencia,

$$q(x) = (x + 3)(x - 2)(x - 2)(x + 1) = (x + 3)(x - 2)^2(x + 1).$$ «

Una **raíz múltiple** de un polinomio es una raíz que ocurre más de una vez. En el ejemplo anterior el factor $(x - 2)$ aparece dos veces en la factorización de q, así que $r = 2$ es una raíz múltiple. Puesto que ocurre dos veces, se llama una **raíz doble**. Si ocurriera solamente una vez es llamada **raíz simple**. Si ocurre tres veces se denomina **raíz triple**, y así sucesivamente. La cantidad de veces que ocurre una raíz se llama **orden de multiplicidad**, o simplemente **multiplicidad** de dicha raíz[*].

Una pregunta natural en este punto es ¿cómo nos damos cuenta si el polinomio está completamente factorizado? Es decir, ¿hasta cuándo seguimos? En el ejemplo anterior es claro que terminamos ya que llegamos a todos factores de

[*]En términos matemáticos, se dice que una raíz r de p tiene multiplicidad k si podemos factorizar $p(x) = (x - r)^k s(x)$, siendo $s(x)$ un polinomio tal que $s(r) \neq 0$. Es decir, $(x - r)^k$ es factor de p pero $(x - r)^{k+1}$ no lo es.

grado 1, por lo que más que eso no podemos hacer. Sin embargo, con factores de mayor grado no es tan claro darse cuenta si se puede seguir o si ya no tiene más raíces reales. Si bien no hay una receta para responder esta pregunta que esté dentro del alcance de este libro, la idea que servirá para abordar los ejercicios de este manual es la siguiente:

- Intentar aplicar cada uno de los métodos descriptos.

- Si se llega a un polinomio de grado 2, existe un criterio para saber si se puede o no seguir factorizando. Este criterio, al igual que una fórmula para determinar sus raíces aún cuando no sean racionales, será estudiado en el Capítulo 4. Allí se presenta un análisis que justifica la siguiente afirmación, que nos dice cuándo podremos factorizar a un polinomio de grado 2:

$p(x) = ax^2 + bx + c$ tiene raíces reales si y solo si $b^2 - 4ac \geq 0$.

Ilustremos esto con dos polinomios ya vistos.

Ejemplo 74. **Criterio de parada para polinomios cuadráticos.** En el Ejemplo 73 obtuvimos a $x^2 + x - 6$ como factor del polinomio original. En este polinomio,

$$a = 1, \quad b = 1 \quad \text{y} \quad c = -6.$$

Entonces $b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25 > 0$, por lo que la afirmación anterior dice que podemos seguir factorizando. Esto coincide con lo hecho, ya que lo logramos escribir como $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.

Por otro lado, en el Ejemplo 72 uno de los factores era $2x^2 - 3x + 3$. En este polinomio

$$a = 2, \quad b = -3 \quad \text{y} \quad c = 3,$$

por lo que $b^2 - 4ac = 9 - 24 = -15 < 0$, lo que indica que ya no tiene raíces reales y la factorización ha finalizado, es decir, que en dicho ejemplo ya habíamos completado la factorización. «

El siguiente ejemplo, además de aplicar lo estudiado a un caso particular de polinomio, nos da una pauta más con respecto a saber cuándo hemos finalizado la factorización para polinomios no cuadráticos con una forma especial.

Ejemplo 75. **Suma o diferencia de potencias de igual grado.** Esto no es un método nuevo, sino que consiste en aplicar lo aprendido a un caso particular: factorizar binomios de la forma $x^n - r^n$ o $x^n + r^n$, siendo r un número real positivo, y n un natural. En realidad, como explicamos a continuación, lo “nuevo” aparece solo cuando n es impar.

- n par

  - Suma $x^n + r^n$. Cuando tenemos la *suma* de dos potencias con exponentes *pares*, entonces el polinomio ya está factorizado por completo en los reales. Por ejemplo, x^2+4. Esto se debe a que dicha suma es estrictamente positiva, por lo que no tiene raíces reales.

  - Resta $x^n - r^n$. Cuando tenemos la *resta* de dos potencias con exponentes *pares*, entonces estamos en realidad ante una diferencia de cuadrados, y se trabaja como ya lo vimos. Por ejemplo:

$$x^8 - 3^8 = \left(x^4\right)^2 - \left(3^4\right)^2 = \left(x^4 - 3^4\right)\left(x^4 + 3^4\right).$$

  Notar que en lo anterior, $x^4 - 3^4$ puede a su vez factorizarse como

$$x^4 - 3^4 = (x^2 - 3^2)(x^2 + 3^2) = (x-3)(x+3)(x^2+3^2),$$

  al reconocer dos veces más una diferencia de cuadrados. Así,

$$x^8 - 3^8 = (x-3)(x+3)(x^2+3^2)\left(x^4 + 3^4\right).$$

Notar que los dos últimos factores son de la forma $x^n + r^n$ con n par y, por el caso anterior, no pueden factorizarse más.

- n impar

  - Suma $x^n + r^n$. Por ejemplo, consideremos

$$p(x) = x^3 + 125 = x^3 + 5^3.$$

  Observar que $p(-5) = 0$, por lo que $(x - (-5)) = (x+5)$ es divisor de p. Aplicando la regla de Ruffini tenemos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 125 \\ -5 & & -5 & 25 & -125 \\ \hline & 1 & -5 & 25 & 0 \end{array}$$

  Luego,

$$x^3 + 5^3 = (x^2 - 5x + 25)(x+5).$$

  - Resta $x^n - r^n$. Consideremos ahora

$$q(x) = x^5 - 32 = x^5 - 2^5.$$

  Notar que $q(2) = 0$, así que aplicamos la regla de Ruffini para dividir q por $(x-2)$:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 0 \end{array}$$

Entonces

$$x^5 - 2^5 = (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)(x - 2).$$

Resumiendo, si n es **impar** entonces

$$\boxed{x^n + r^n \text{ es divisible por } x + r,}$$

$$\boxed{x^n - r^n \text{ es divisible por } x - r.}$$

Más aún, puede demostrarse que $-r$ es la *única* raíz real de $x^n + r^n$, mientras que r es la *única* raíz real de $x^n - r^n$. Entonces, el polinomio se encuentra **totalmente factorizado** una vez efectuada la división por los respectivos factores.

Si n es **par** entonces $x^n + r^n$ *no tiene* raíces reales, mientras que $x^n - r^n$ es una diferencia de cuadrados, y sus *únicas* raíces reales son r y $-r$. «

Finalizamos la sección enfatizando algo que ya se ha mencionado pero es de gran importancia:

¿Cómo saber si una factorización es correcta? Siempre es posible verificar si la factorización es correcta multiplicando los factores obtenidos y operando, para comprobar que se llega de esta forma al polinomio de partida. No debemos olvidar que al factorizar un polinomio se obtiene una expresión con distinta forma (multiplicación de polinomios), pero equivalente a la original.

Ejercicios 3.3

1. Factorizar las siguientes diferencias de cuadrados:

(a) $4x^2 - 49$

(b) $t^8 - 6$

(c) $25x^6 - 9$

(d) $36x^2 - 25$

2. Factorizar los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

(a) $x^2 - 8x + 16$

(b) $9x^2 - 12x + 4$

(c) $4x^4 + 12x^2 + 9$

(d) $t^4 - 6t^3 + 9t^2$

3. Factorizar los siguientes cuatrinomios cubos perfectos:

(a) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

(b) $x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$

(c) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

(d) $8t^6 - 12t^4 + 6t^2 - 1$

4. Determinar m para que el resto de dividir $mx^5 - 2x^4 + 3x^2 - 7$ por el binomio $x - 1$ sea igual a 2.

5. Determinar k para que $x + 1$ sea factor de $5x^7 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + k$.

6. En el Ejemplo 69 se factorizó al polinomio $p(x) = 4x^3 - 4x^2 + 2x - 2$ extrayendo factor común por grupos. Rehacerlo buscando una raíz según el teorema del factor, y aplicando luego la regla de Ruffini para dividir.

7–20. Factorizar por completo los polinomios dados.

7. $3x^4 - 12x^2$

8. $3x^4 + 15x^2$

9. $x^3 - x^2 + 4x - 4$

10. $4x^3 - 4x^2 - 9x + 9$

11. $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3x$

12. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x - 8$

13. $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

14. $x^5 + 1$

15. $x^5 - 1$

16. $x^6 - 1$

17. $4x^4 - 64$

18. $3x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 40$

19. $2x^6 - 5x^5 - 3x^4$

20. $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40$

Polinomios en GeoGebra

Para comenzar a usar GeoGebra, veamos cómo se ingresa un polinomio. Para ello usamos el campo de Entrada, en el cual podremos escribir si habilitamos el teclado, cliqueando en el símbolo del mismo. Si trabajamos en una computadora, este se encuentra en la esquina inferior izquierda:

y si se utiliza la aplicación para Android, se encuentra en el centro:

Al cliquear en el campo de Entrada aparece una barra con 4 opciones para teclados, y los puntos suspensivos al final:

123 f(x) ABC αβγ ...

La primera es la numérica y principal, la siguiente contiene funciones especiales, luego viene la pestaña para el teclado alfabético, y finalmente la de letras griegas. Al tocar los puntos suspensivos de la derecha se abre una lista con todos los comandos disponibles, donde se pueden seleccionar en lugar de escribirlos. En el teclado numérico se encuentra la tecla $\boxed{x^{\square}}$, que se utiliza para ingresar los exponentes*. La tecla $\boxed{\square^{2}}$ es un caso particular, y es un acceso rápido para el exponente 2.

(a) Ingresar el polinomio $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ y presionar Enter $\boxed{\hookleftarrow}$ (la letra p se ingresa desde el teclado alfabético, y el resto desde el numérico. Si se ingresa solamente la expresión del lado derecho, el software le asigna por defecto el nombre f). Aparecerá un gráfico en la parte superior, el cual cobrará sentido a partir del Capítulo 5. Por el momento nos ocuparemos solamente del resultado algebraico que arroja el software, y no del gráfico.

(b) Ingresar el polinomio $q(x) = x - 1$ (siempre presionar Enter luego de cada instrucción).

(c) Escribir $p(4)$ para hallar el valor numérico de p en $x = 4$.

(d) Escribir p+q para sumar los polinomios, y p-q para restarlos.

(e) Para dividir dos polinomios, se ingresa División(p,q), siendo el primero el dividendo y el segundo el divisor. Como resultado se obtiene lo que se conoce como "lista", en la que el primer elemento es el cociente, y el segundo es el resto. Comprobarlo ingresando División(p,q) para hacer $p(x) : q(x)$ y también División(p,x^2+x) para hacer $p(x) : (x^2 + x)$. Determinar en cada caso el cociente y el resto.

*Si se utiliza una computadora, los exponentes se introducen también con la tecla $\boxed{\wedge}$. Por ejemplo, escribiendo x^3 se ingresa x^3.

(f) Escribir Raíz(p) para hallar las raíces del polinomio p. El software devolverá el resultado en la forma (r,0), para cada raíz del polinomio. Esta notación también tendrá sentido a partir del Capítulo 5, por el momento nos quedaremos con los valores de r. Una vez halladas, comprobar usando GeoGebra que $p(r) = 0$, para cada una de las raíces obtenidas.

(g) Ingresar Factoriza(p) para obtener la forma factorizada del polinomio p. Comparar con el resultado obtenido en el Ejemplo 61.

(h) Un comando similar al anterior es Factores(p). El resultado es una lista con los polinomios que son factores de p, y al lado un número natural que indica la multiplicidad de cada factor. Utilizar este comando para obtener los factores del polinomio $x^4-9x^2+4x+12$, y su correspondiente multiplicidad. Comparar con lo obtenido en el Ejemplo 73.

(i) Utilizar el comando Factores para comprobar que $x + 1$ es factor del polinomio del Ejercicio 5, para el valor de k hallado.

(j) El comando Resto(p,q) devuelve el resto de la división entre el polinomio p y el polinomio q. Utilizar este comando para comprobar que el resto de dividir el polinomio del Ejercicio 4 (con el valor m hallado) por el binomio $x - 1$ es igual a 2.

(k) Utilizar el comando Factoriza para factorizar por completo el polinomio $5x^4-117x^3+994x^2-3600x+4608$. Luego, utilizar lo obtenido y el comando División para expresar el polinomio dado como el producto de un polinomio de grado 3 y otro de grado 1.

(l) Utilizar el comando Factoriza para factorizar por completo el polinomio $f(x) = 27x^3 + 135x^2 + 225x + 125$. De acuerdo a lo obtenido, ¿qué nombre recibe f? ¿Qué binomio lo origina?

3.4. Expresiones racionales

Una **expresión racional**, o también conocida como **fracción algebraica**, es un cociente de polinomios. Es decir, es algo de la forma

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde p y q son polinomios. Esta expresión tendrá sentido para todos aquellos valores de x tales que $q(x) \neq 0$, pues la división por cero no está definida. Los valores de x que anulan a q son valores no permitidos para la fracción algebraica, e imponen lo que se conoce como **restricciones** para la misma. El **dominio** de una fracción algebraica es el conjunto de todos los valores permitidos, es decir, aquellos que no anulan al denominador.

Ejemplo 76. **Restricciones para fracciones algebraicas.** Las siguientes son expresiones racionales:

$$\frac{3x+6}{9x^2-9x-54}, \qquad \frac{x}{x^2+1}.$$

Observar que la primera está definida para $x \neq -2$ y $x \neq 3$, que son los valores que anulan al denominador. La segunda, en cambio, está definida para todo número real, pues el denominador nunca se anula. En otras palabras, los valores no permitidos para la primera expresión racional son $x = -2$ y $x = 3$, mientras que para la segunda no hay restricciones. «

Las expresiones racionales se **simplifican** factorizando los polinomios involucrados para luego "cancelar" los factores comunes tanto al numerador como al denominador:

$$\frac{a\cancel{c}}{b\cancel{c}} = \frac{a}{b}, \text{ para todo } c \neq 0.$$

Será fundamental no perder de vista los valores no permitidos para la variable, ya que algunos de ellos pueden olvidarse durante el proceso de simplificación (al cancelar c en la fórmula anterior). Ilustramos esto en los ejemplos.

Una fracción algebraica es **irreducible** o está en su **mínima expresión** cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes a excepción de las constantes. Notar que, con esta definición, si se multiplica el numerador y denominador de una fracción algebraica irreducible por una misma constante distinta de cero, se obtiene otra fracción irreducible equivalente. Por ejemplo:

$$\frac{6x+12}{4x+2} = 3 \cdot \frac{x+2}{2x+1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x+2}{x+\frac{1}{2}},$$

y según la definición dada, cualquiera de estas fracciones es irreducible. A pesar de ello, la del medio suele ser más "frecuente" de encontrar al momento de simplificar fracciones algebraicas. Esto se debe a que el procedimiento usual consiste en extraer por un lado el mayor *entero* factor común a todos los coeficientes del polinomio del numerador (en el ejemplo de arriba es 6), luego se hace lo mismo para el denominador (en este caso es 2), y finalmente se simplifican estos factores, si es posible (en este caso, $\frac{6}{2} = 3$). La tercera fracción se obtiene si se exige que tanto el numerador como el denominador sean polinomios mónicos, o un producto de ellos. Aunque esto sí genera unicidad en la forma reducida de una fracción algebraica, también haría, por ejemplo, que la mínima expresión de

$$\frac{3\pi x+12}{\sqrt{2}x+1} \quad \text{sea} \quad \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\frac{4}{\pi}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

la cual no parece "más simple" que la primera. En cambio, puede lograr que la forma simplificada de

$$\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}} \quad \text{sea} \quad 2\cdot\frac{x+1}{x-1},$$

la cual sí puede resultar "más simple", porque solo aparecen coeficientes enteros. Esto es, entonces, un criterio estético en lugar de formal, por lo que quedará a gusto de cada uno. Esta ambigüedad sucede solamente al nivel de las constantes, ya que el máximo común divisor de dos polinomios se define como único salvo factores constantes*. Dejaremos esto de lado ya que lo importante del proceso de simplificación se comprenderá mejor mediante los ejemplos.

Ejemplo 77. **Simplificando una expresión racional.** Simplificar la siguiente expresión racional, indicando los valores no permitidos para la variable:

$$\frac{x^3-4x}{x^3+3x^2-10x}.$$

Solución: Comenzamos factorizando tanto el numerador como el denominador, para luego cancelar:

$$\begin{aligned}\frac{x^3-4x}{x^3+3x^2-10x} &= \frac{x(x^2-4)}{x(x^2+3x-10)}\\ &= \frac{x(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+5)} \qquad \boxed{x\neq 0;\ x\neq 2;\ x\neq -5}\\ &= \frac{\cancel{x}\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x}\cancel{(x-2)}(x+5)}\\ &= \frac{x+2}{x+5}.\end{aligned}$$

Los valores no permitidos para x deben determinarse siempre **antes de cancelar términos**, en la expresión original. Puesto que la forma factorizada es equivalente a la expresión original, es más sencillo ver allí cuáles son los valores que anulan el denominador. En este caso, las restricciones son:

$$x\neq 0, \quad x\neq 2 \quad \text{y} \quad x\neq -5.$$ «

⚠ La expresión simplificada es igual a la original **excepto** para aquellos valores en los que el factor que se cancele sea igual a cero. Para comprender esto, en la expresión racional del ejemplo anterior es incorrecto escribir

$$\frac{x^3-4x}{x^3+3x^2-10x} = \frac{x+2}{x+5}, \qquad ✗$$

*Ver `https://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_greatest_common_divisor`. Consultado en noviembre de 2018.

ya que la expresión de la izquierda no puede evaluarse en $x = 0$ ni en $x = 2$, mientras que la de la derecha sí. Lo correcto es escribir

$$\frac{x^3 - 4x}{x^3 + 3x^2 - 10x} = \frac{x + 2}{x + 5}, \quad \text{para } x \neq 0,\ x \neq 2,\ x \neq -5, \qquad ✔$$

estableciendo de esta forma los valores no permitidos para la expresión original, incluso los que "no se ven" en la expresión simplificada de la derecha. Aunque en esta última sí puede verse la restricción $x \neq -5$, es conveniente recordarla de todas formas en la lista, junto a las restricciones "perdidas".

El comando Simplifica en GeoGebra puede usarse para reducir expresiones racionales. Por ejemplo, ingresando

Simplifica((x^3-4x)/(x^3+3x^2-10x))

se obtiene como resultado $\frac{x+2}{x+5}$, como en el ejemplo anterior. Además, los valores no permitidos pueden obtenerse escribiendo Raíz(x^3+3x^2-10x), lo que devuelve aquellos que hacen que el denominador se anule.

Ejemplo 78. Reducir a su mínima expresión, indicando las restricciones:

$$\frac{2x^2 - 12x - 14}{4x^2 + 8x + 4}.$$

Solución: Comenzamos factorizando tanto el numerador como el denominador, para luego cancelar:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 - 12x - 14}{4x^2 + 8x + 4} &= \frac{2(x^2 - 6x - 7)}{4(x^2 + 2x + 1)} \\
&= \frac{2\cancel{(x+1)}(x - 7)}{4\cancel{(x+1)}(x + 1)} \qquad \boxed{x \neq -1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{x - 7}{x + 1}.
\end{aligned}$$

La única restricción es $x \neq -1$. «

Para **operar** con fracciones algebraicas se procede de la misma forma que para las fracciones numéricas. Cualquier operación resultará más sencilla si antes de efectuarla se simplifican las fracciones algebraicas involucradas, pero con un poco más de trabajo también se puede simplificar al final. Las restricciones (es decir, los valores no permitidos) para la operación corresponden a la unión de las restricciones de cada una de las fracciones involucradas. Es decir, se da por supuesto que se trabaja con valores que no anulan ninguno de los denominadores de las fracciones dadas.

- La **suma** (o **resta**) de fracciones algebraicas con el mismo denominador es otra fracción algebraica con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma (o resta) de los numeradores. Si tienen denominador distinto, primero se las transforma en fracciones con denominador común (para lo cual es conveniente factorizar los denominadores), y luego se efectúa la suma o resta.

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b},} \qquad \boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{db}.}$$

- El **producto** de fracciones algebraicas es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores de las fracciones que estamos multiplicando, y cuyo denominador es el producto de los denominadores. Luego de resolver, se simplifica si es posible la fracción resultante.

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.}$$

- El **cociente** de dos fracciones algebraicas es el producto de la primera por el inverso o recíproco de la segunda:

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.}$$

Ilustramos las operaciones entre fracciones algebraicas en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 79. Suma y resta de expresiones racionales. Resolver:

- $\dfrac{x+2}{x^2-4}+\dfrac{x-3}{x^2-9}$,
- $\dfrac{x}{x^2+x}-\dfrac{2-x}{x^2-1}$.

Solución: Recordemos que siempre es más fácil simplificar las expresiones que aparecen, y luego realizar las operaciones. Para la primera tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x^2-4}+\frac{x-3}{x^2-9} &= \frac{x+2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-3}{(x-3)(x+3)} && \text{se factorizó}\\
&= \frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3} && \text{se canceló} \quad x\neq -2,\ x\neq 3\\
&= \frac{(x+3)+(x-2)}{(x-2)(x+3)} && \text{se sumaron las fracciones}\\
&= \frac{2x+1}{(x-2)(x+3)} && \text{se operó en el numerador.}
\end{aligned}$$

☞ Los valores prohibidos para las operaciones con fracciones algebraicas son aquellos que anulan el denominador de alguna de las fracciones involucradas. Entonces las restricciones para la suma anterior son $x \neq \pm 2$ y $x \neq \pm 3$. Notar que si observamos las restricciones solamente en el resultado final, perdemos aquellas que anulaban a alguno de los denominadores porque fueron "canceladas" durante el proceso de simplificación. Esos valores se indican en color rojo en el procedimiento anterior, para recordar que deben incluirse en los valores no permitidos.

De forma similar procedemos para efectuar la resta:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2+x} - \frac{2-x}{x^2-1} &= \frac{x}{x(x+1)} - \frac{2-x}{(x-1)(x+1)} && \text{se factorizó} \\
&= \frac{1}{(x+1)} - \frac{2-x}{(x-1)(x+1)} && \text{se canceló} \quad \boxed{x \neq 0} \\
&= \frac{(x-1)-(2-x)}{(x-1)(x+1)} && \text{se restaron las fracciones} \\
&= \frac{2x-3}{(x-1)(x+1)} && \text{se operó en el numerador.}
\end{aligned}$$

Las restricciones para esta resta son entonces $x \neq \pm 1$ y $x \neq 0$. «

Ejemplo 80. Producto y cociente de expresiones racionales. Resolver:

- $\dfrac{x-3}{x^2+6x+9} \cdot \dfrac{x^2+3x}{x^2-9}$,
- $\dfrac{2}{x+5} : \dfrac{1}{x^2-25}$.

Solución:

- $$\begin{aligned}\frac{x-3}{x^2+6x+9} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-9} &= \frac{\cancel{x-3}}{(x+3)^2} \cdot \frac{x\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+3)}} \\ &= \frac{x}{(x+3)^2}.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{2}{x+5} : \frac{1}{x^2-25} &= \frac{2}{x+5} \cdot (x^2-25) \\ &= \frac{2}{\cancel{(x+5)}} \cdot \cancel{(x+5)} \cdot (x-5) = 2(x-5).\end{aligned}$$

☞ Para que ambas fracciones en el producto anterior estén definidas se necesita $x \neq \pm 3$. Para el cociente, la restricción es $x \neq \pm 5$ (aunque al resolver la división el denominador $x^2 - 25$ se transforme en numerador, la fracción involucrada en el enunciado debe estar bien definida). «

Ejemplo 81. **Errores graves y frecuentes.** Estos son algunos de los errores que suelen verse al operar con fracciones algebraicas. En el Ejercicio 1 se pide probar que lo efectuado es incorrecto.

- $\dfrac{\cancel{x^2} + x + 2}{\cancel{x^2} + 4} \neq \dfrac{x + 2}{4}$, ✗
- $\dfrac{x^3}{x^2 + 5} \neq \dfrac{x^3}{x^2} + \dfrac{x^3}{5}$, ✗
- $\dfrac{2x - 1}{x^3} + \dfrac{x^2}{x + 1} \neq \dfrac{2x - 1 + x^2}{x^3 + x + 1}$. ✗

Ejercicios 3.4

1. Hallar valores adecuados para x que demuestren que los procedimientos efectuados en el Ejemplo 81 son incorrectos.

2. Simplificar las siguientes expresiones racionales a su mínima expresión, indicando los valores no permitidos para la variable:

(a) $\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

(b) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

(c) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-2x^2-x+2}$

(d) $\frac{4x^2-1}{4x^2+4x+1}$

3. Utilizar el comando Simplifica para verificar lo obtenido en el ejercicio anterior.

4. Realizar las operaciones indicadas y simplificar el resultado. Establecer las restricciones en cada caso:

(a) $\frac{x^3-3x-10}{x^2-4x+4} \cdot \frac{x-2}{x-5}$

(b) $\frac{3x+3}{x^2-1} : \frac{x+1}{x^2-2x+1}$

(c) $\frac{3x-2}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1}$

(d) $\frac{2x}{9x^2-16} - \frac{x+1}{(3x-4)^2}$

(e) $\frac{3}{2x+4} + \frac{2x}{x^2-4}$

(f) $x - \frac{x^2-1}{x}$

(g) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2}$

(h) $\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$