MÓDULO 1

Números y Cálculos

1 El uso de números enteros y racionales

1.1 Números enteros: una herramienta para contar y ordenar

Los *números naturales o enteros positivos* $1,\ 2,\ 3, \ldots$ son aquellos que, habitualmente, se usan para contar y ordenar. Los puntos suspensivos indican que esta sucesión de números nunca termina. El conjunto de tales números se denota con el símbolo $\mathbb{N}$.

El número cero se usa para indicar que no se tiene nada o para indicar el lugar donde se comienza a medir. Por ejemplo, en los ascensores de algunos edificios el botón "0" se usa para indicar la planta baja. La frase "la cuenta bancaria está en cero" indica que no hay dinero en la cuenta, pero que tampoco hay deudas.

En el ámbito de los negocios es necesario indicar en la consignación de un monto si el mismo corresponde a una deuda o a un crédito. Cuando un monto corresponde a una deuda se suele consignar con un signo menos adelante. Por ejemplo, si debo 34 pesos, debería escribir -34. Estos números se llaman números negativos. Otro ejemplo cotidiano del uso de números negativos se encuentra en los edificios con subsuelos. Estos números se usan para indicar las plantas por debajo de la planta baja.

Los números negativos, el cero y los números naturales o enteros positivos conforman el *conjunto de números enteros* que en símbolos se denota $\mathbb{Z}$.

Comparación. Los números enteros están ordenados. Volvamos al ejemplo del ascensor. Es claro que el segundo subsuelo está más bajo que el primer subsuelo y éste, a su vez, está más bajo que la planta baja. En símbolos, esto se anota como sigue

$$-2 \quad < \quad -1 \quad < \quad 0\ .$$

En la siguiente tabla se presentan los símbolos que se usan para comparar números y se explica el significado de cada uno de ellos.

En palabras	en símbolos
a es mayor que b	$a > b$
a es igual o mayor que b	$a \geq b$
a es menor que b	$a < b$
a es igual o menor que b	$a \leq b$
a es igual a b	$a = b$
a es distinto de b	$a \neq b$

Operatoria con números enteros. Todos sabemos cómo sumar, restar y multiplicar números naturales. En lo que sigue vamos a interpretar estas operaciones para todos los números enteros en el contexto de los movimientos de un ascensor.

Ejemplo 1. Un edificio tiene 5 pisos y 3 subsuelos. Se colocó un sensor que registra los números de los pisos donde el ascensor se detiene. Los registros obtenidos por el sensor se han volcado en la siguiente tabla:

Número de registro *	0	1	2	3	4
Piso	2	5	-1	-3	0

* El registro "0" indica el piso de partida.

A partir de estos registros se desea conocer la longitud del recorrido del ascensor entre dos paradas consecutivas y la longitud total del recorrido entre el registro 0 y 4.

Resolución. Como no contamos con el dato de la distancia entre pisos, vamos a medir esta longitud en cantidad de pisos. Además, la longitud del recorrido del ascensor es independiente de la dirección del movimiento (subida o bajada).

De acuerdo a los registros 0 y 1, el ascensor se movió desde el piso 2 hasta el piso 5, luego el ascensor recorrió 3 pisos y este número se obtiene de la resta

$$5 - 2 = 3 \ .$$

De acuerdo a los registros 1 y 2, el ascensor se movió desde el piso 5 al piso -1 (primer subsuelo), es decir, recorrió 6 pisos. Por convención, la resta cambia el signo por lo que la longitud del recorrido entre el piso 5 y el -1 es también el resultado de la resta entre los registros:

$$5 - (-1) = 5 + 1 = 6 \ .$$

Es importante notar que la longitud de un recorrido es siempre un número positivo o nulo, por lo que el valor mayor debe ser el primero. Los paréntesis se ponen para evitar dos signos consecutivos:

Notación correcta: $5 - (-1)$ Notación incorrecta: $5 - -1$.

En la tabla de abajo se calcula la longitud del recorrido entre paradas.

Registros	cantidad de pisos recorridos
0 y 1	$5-2=3$
1 y 2	$5-(-1)=5+1=6$
2 y 3	$-1-(-3)=-1+3=2$
3 y 4	$0-(-3)=-(-3)=3$

Para calcular la longitud total del recorrido del ascensor se suman los valores indicados en la segunda columna de la tabla de arriba:

$$\begin{aligned}\text{Longitud del recorrido} &= 5-2 \quad + \quad 5-(-1) \quad + \quad (-1)-(-3) \quad + \quad 0-(-3)\\ &= \quad 3 \quad + \quad 6 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3\\ &= \quad 14\end{aligned}$$

Respuesta. La longitud total del recorrido del ascensor es de 14 pisos.

De acuerdo a lo ejemplificado arriba, la suma y la resta de números enteros se efectúan del siguiente modo:

$a+(-b)=$	$a-b$
$-a+b=$	$b-a$
$a-(-b)=$	$a+b$
$a-(+b)$	$a-b$

La multiplicación y los signos. Para multiplicar cantidades donde aparecen signos negativos es conveniente recordar que $-a=(-1)\cdot a$. Esto se debe a que la multiplicación por el número -1 se interpreta como un cambio de sentido en el valor de la cantidad original. Por ejemplo, \$20 indica un crédito de veinte pesos, en cambio, la cantidad $(-1)\cdot \$20=-\$20$ indica una deuda de veinte pesos.

En resumen, vale la siguiente regla de los signos:

$1\cdot 1=$	1
$-1\cdot 1=$	-1
$1\cdot(-1)=$	-1
$-1\cdot(-1)=$	1

Ejercicio resuelto 1. Calcular el valor de a si

$$a=-(2-8)+(-7-(-4))-(-1)\cdot(4-7)+(-5)\cdot(-4)\ .$$

Resolución:

<table>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Los paréntesis indican que los cálculos dentro de los mismos deben realizarse en primer lugar.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$a = -(2-8) + (-7-(-4))$
$-(-1)\cdot(4-7)+(-5)\cdot(-4)$</td><td>Cálculos auxiliares
$2-8=-6,$
$-7-(-4)=-7+4=-3,$
$4-7=-3$</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Reemplazo los valores obtenidos en los cálculos auxiliares en a.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td colspan="2">$a = -(-6)+(-3)-(-1)\cdot(-3)+(-5)\cdot(-4)$</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Ahora se calculan los productos teniendo en cuenta la regla de los signos, se retiran los paréntesis innecesarios y se reemplazan los resultados en a para completar la cuenta.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$a = 6-3-3+20 = 20.$</td><td>Cálculos auxiliares
$(-1)\cdot(-3)=3,\ -(-6)=6$
$+(-3)=-3$
$(-5)\cdot(-4)=20$</td></tr>
<tr><td>Explicitación de la respuesta</td><td colspan="2">Respuesta: $a = 20$</td></tr>
</table>

Trabajo práctico 1

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) Dar ejemplos del uso de números negativos en la vida cotidiana.

(b) ¿Qué piso está más alto, el piso indicado como -3 o el indicado como -1? Escribir su afirmación en lenguaje coloquial y en símbolos.

(c) ¿Cómo se expresa en símbolos que los números a y b son distintos?

(d) ¿Qué indican los paréntesis en un cálculo? ¿Es correcta la siguiente cuenta: $1-(2-1)=-2$?

Ejercicio 2. En un edificio de 7 pisos y 2 subsuelos, un sensor registra los números de los pisos donde el ascensor del edificio se detiene a lo largo del día y los mismos se han volcado en la tabla de abajo.

Número de registro	0	1	2	3	4	5	6	7
Posición	-1	3	4	-2	7	0	-2	1

(a) Indicar en cada fila de la siguiente tabla la operación realizada para calcular la cantidad de pisos recorridos por el ascensor entre dos registros.

Registros	cantidad de pisos recorridos
0 y 1	$3-(-1)=4$
1 y 2	
2 y 3	
3 y 4	
4 y 5	
5 y 6	
6 y 7	

(b) ¿Cuál de los siguientes cálculos da como resultado la longitud recorrida por el ascensor a lo largo del día?¿Por qué?

(a) $3-(-1)+4-3+(-2)-4+7-(-2)+0-7+(-2)+1-(-2)$

(b) $3+1+4-3+4+2+7+2+7+2+1+2$

Ejercicio 3. Si un ascensor salió del tercer subsuelo y se detuvo en el cuarto piso, indicar por cuántas puertas de ascensor pasó sin detenerse.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes ítems, resolver el cálculo indicado sin usar la calculadora, explicando qué se hace y evidenciando los cálculos auxiliares.

(a) $(-1)\cdot(-1+4)+5-(-3-11)+45=$

(b) $(-3)\cdot(2-5)\cdot(10-13)+(-4-5)\cdot(-3)=$

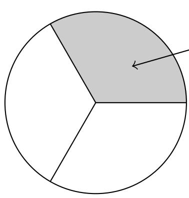
(c) $-(4+(5-7))+(9-2)\cdot(-1)\cdot(-4)=$

(d) $(-2+5)\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2-4)+(-3)=$

(e) $-2-(6-(-2+5)\cdot(2-5))-(-3)=$

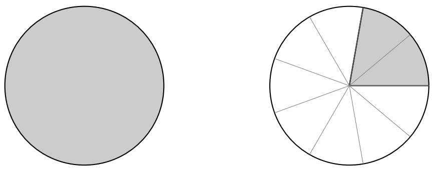
1.2 Fracciones. Números racionales

Fracciones como parte de un entero. Una forma habitual de interpretar a los números racionales o fracciones es como parte de un entero. El gráfico muestra un círculo dividido en tres partes iguales de las cuales se sombreó una. El círculo representa al entero y la región sombreada es un tercio de ese entero. En símbolos, la expresión "un tercio" se anota $\frac{1}{3}$. El número 1 se llama numerador y el número 3, denominador.



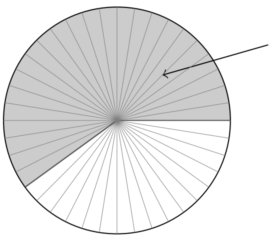
La región sombreada representa la fracción $\frac{1}{3}$. Notar que $\frac{1}{3}<1$.

Ejemplo 2. Representación de la fracción $\frac{11}{9}$.
Si dividimos un círculo en nueve partes iguales, cada parte representa un noveno de dicho círculo. Como queremos representar $\frac{11}{9}$ debemos considerar un círculo entero y un segundo círculo, del cual tomaremos dos novenas partes. La representación será un círculo completo y $\frac{2}{9}$ del otro.



La región sombreada representa la fracción $\frac{11}{9} = 1 + \frac{2}{9}$, $\frac{11}{9} > 1$.

Fracciones como proporciones o razones. Los números racionales se suelen utilizar para expresar una parte de una cantidad que se considera como un todo o unidad. Eso se llama proporción o razón de esa cantidad. Por ejemplo, en un curso hay 40 estudiantes de los cuales 24 aprobaron un examen, la proporción o razón de estudiantes que aprobó el examen es $\frac{24}{40}$. En este caso, el numerador es 24 y el denominador es 40. Esta información se suele representar en forma gráfica usando "diagramas de tortas" (ver figura).



La región sombreada representa la fracción $\frac{24}{40}$.

Fracciones y números racionales. La fracción $\frac{a}{b}$ expresa la idea de que se repartió una cierta población u objeto en b partes iguales y que de esas b partes se tomaron a. El número a deber ser entero y b debe ser natural. El número a se llama numerador y el número b se llama denominador.

Hasta ahora hemos dado ejemplos de fracciones cuyos numeradores y denominadores eran números naturales. También puede ser necesario trabajar con fracciones cuyo numerador o denominador es un entero negativo. Para estos casos, mostramos con un ejemplo, cómo funciona la convención de signos:

$$-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} \quad \text{y} \quad \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}\ .$$

Además, los números enteros se pueden pensar como fracciones con denominador igual a 1. Por ejemplo,

$$1 = \frac{1}{1}, \quad -2 = \frac{-2}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}\ .$$

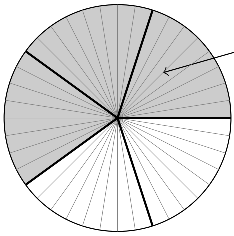
Todos los números que se pueden escribir como una fracción forman el conjunto de los números racionales y se lo denota con el símbolo $\mathbb{Q}$.

Fracciones equivalentes

Retomamos un ejemplo anterior. En un curso hay 40 estudiantes, de los cuales 24 aprobaron un examen. La proporción de aprobados es de $\frac{24}{40}$. Como $40 = 8 \cdot 5$ y $24 = 8 \cdot 3$ se pueden agrupar los estudiantes de a 8 y expresar la fracción $\frac{24}{40}$ con una fracción "equivalente":

$$\frac{24}{40} = \frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{5}.$$

Esta igualdad se puede ver gráficamente:



La región sombreada representa la fracción $\frac{24}{40} = \frac{3}{5}$.

Ejemplo 3. En un curso que tiene 60 estudiantes aprobaron las tres quintas partes ¿Cuántos estudiantes aprobaron?

Resolución. Empezamos dándole un nombre a la cantidad que queremos calcular, digamos que A es un buen nombre para denotar la cantidad de aprobados. Para calcular A se puede proceder de varias formas equivalentes que enumeramos a continuación:

1. Repartir 60 en 5 partes iguales y de las 5 partes quedarse con 3
2. Multiplicar 60 por 3 y luego dividir por 5.
3. Multiplicar $\frac{3}{5}$ por 60.

Esta lista pone en evidencia que

$$A = \frac{60}{5} \cdot 3 = \frac{3 \cdot 60}{5} = \frac{3}{5} \cdot 60 = 36 \ .$$

Respuesta: Aprobaron 36 estudiantes.

En los ejemplos anteriores se observa que los cursos tienen la misma proporción de aprobados a pesar de que la cantidad de estudiantes es diferente. Esto lo vemos pues

$$\frac{36}{60} = \frac{12 \cdot 3}{12 \cdot 5} = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \frac{24}{40} = \frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{5} \ .$$

Lo anterior nos lleva a la igualdad

$$\frac{36}{60} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5} \ .$$

Las fracciones $\frac{36}{60}$, $\frac{24}{40}$ y $\frac{3}{5}$ se llaman *equivalentes* pues representan la misma proporción.

También se puede ver que las fracciones $\frac{36}{60}$ y $\frac{24}{40}$ son equivalentes observando que

$$\frac{36}{60} = \frac{24}{40} \quad \text{si y sólo si} \quad 36 \cdot 40 = 24 \cdot 60 \ .$$

Efectivamente, resulta que $36 \cdot 40 = 24 \cdot 60 = 1440$.

Criterio para decidir si dos fracciones son equivalentes. Las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se llaman equivalentes si y sólo si se cumple la igualdad $a \cdot d = c \cdot b$. Es decir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En particular, la fracción $\frac{k \cdot c}{k \cdot d}$ es equivalente a la fracción $\frac{c}{d}$ para cualquier k entero no nulo.

Fracción irreducible. Simplificación de fracciones. Se dice que la fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible si a y b no tienen divisores comunes distintos de 1 y -1. Por cuestiones de practicidad, en general, conviene trabajar con fracciones irreducibles.

El procedimiento de llevar una fracción a su forma irreducible se suele llamar simplificación. Veamos cómo funciona en un ejemplo.

Ejemplo 4. Simplificar la fracción $\frac{-72}{-15}$

$$\frac{-72}{-15} = \frac{-3 \cdot 24}{-3 \cdot 5} = \frac{\cancel{-3} \cdot 24}{\cancel{-3} \cdot 5} = \frac{24}{5}\ .$$

Comparación de fracciones

Ejemplo 5. Decidir si la fracción $\frac{8}{13}$ es igual, mayor o menor que la fracción $\frac{21}{34}$.

Una forma de decidir esta cuestión es buscar fracciones equivalentes con el mismo denominador:

$$\frac{8}{13} = \frac{8 \cdot 34}{13 \cdot 34} = \frac{272}{442} \qquad \text{y} \qquad \frac{21}{34} = \frac{21 \cdot 13}{34 \cdot 13} = \frac{273}{442}\ .$$

Ahora la respuesta es evidente pues 272 es menor que 273, la escribimos en símbolos.

Respuesta: $\frac{8}{13} < \frac{21}{34}$.

Ejemplo 6. Comparación de números racionales negativos. Decidir si la fracción $-\frac{8}{13}$ es igual, mayor, menor que la fracción $-\frac{21}{34}$.

Para responder a la cuestión planteada es conveniente recordar que el signo $-$ se interpreta como una "deuda" y, por lo tanto, hay que invertir el sentido de la desigualdad respecto al valor positivo. Por ejemplo,

$$2 > 1 \quad \text{pero} \quad -2 < -1.$$

En nuestro ejemplo, ya sabemos que $\frac{8}{13} < \frac{21}{34}$ por lo que $-\frac{8}{13} > -\frac{21}{34}$.

Ejercicio resuelto 2. Se informa que las tres quintas partes de los estudiantes de un curso aprobaron la materia "M" durante 2010. Si en 2011 se inscribieron a esa materia 3500 estudiantes ¿Cuántos de ellos deberían aprobar para conservar la proporción de aprobados?

Resolución. Si A es la cantidad de aprobados en 2011, entonces $\frac{A}{3500}$ y $\frac{3}{5}$ deben ser fracciones equivalentes. Por el criterio correspondiente se tiene que cumplir que

$$5 \cdot A = 3 \cdot 3500 \quad \text{es decir} \quad A = \frac{3}{5} \cdot 3500 = 2100\ .$$

Respuesta. La cantidad de aprobados debería ser 2100.

Ejercicio resuelto 3. Carlos jugó dos billetes de lotería: uno con 7 amigos más y otro en un grupo de 7 compañeros del curso. El premio de ambos billetes coincide.

(a) Escribir las dos fracciones correspondientes al monto de dinero que recibiría en cada una de las jugadas y compararlas usando los signos $<, =, >$ según corresponda.

(b) ¿Con cuál de los dos grupos Carlos recibiría más plata?

Resolución.

(a) Con el primer grupo, Carlos recibiría $\frac{1}{8}$ del premio. En cambio, con el segundo grupo, recibiría $\frac{1}{7}$ del premio. Claramente, $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$.

(b) Este inciso se deduce inmediatamente del inciso anterior porque el premio de ambos billetes coincide: Carlos recibiría más plata con el segundo grupo.

Trabajo práctico 2

Ejercicio 1. Acerca de la lectura

(a) ¿Qué es una fracción? ¿Qué símbolo se usa para designar al conjunto que reúne a todas las fracciones?

(b) Según este texto, ¿cómo se hace para decidir si dos fracciones son equivalentes?

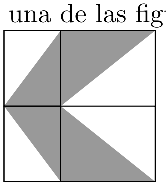
(c) ¿Qué es una fracción irreducible? ¿Qué es simplificar una fracción?

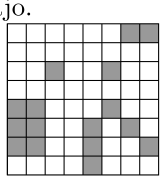
(d) Explicar el procedimiento que se describe en este texto para comparar dos fracciones. ¿Conoce otro procedimiento?

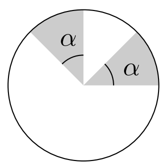
Ejercicio 2. Representar en "diagramas de tortas" las fracciones $\frac{3}{8}$, $\frac{12}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{10}{15}$ y $\frac{14}{24}$.
Indicar, si corresponde, los pares de fracciones equivalentes y las fracciones irreducibles.

Ejercicio 3. En cada caso, simplificar la fracción dada y encontrar una irreducible equivalente.
i) $\frac{70}{25}$ ii) $-\frac{-18}{27}$ iii) $\frac{9\cdot 3}{21}$ iv) $3\cdot\frac{7}{3}$ v) $\frac{8\cdot 3}{5\cdot 4\cdot(-1)}$.

Ejercicio 4. Determinar qué porción del área total representa la parte sombreada en cada una de las figuras de abajo.

(a) 

(b) 

(c) 

$\alpha = 45°$

Ejercicio 5. En una ciudad de 35.600 votantes, un candidato obtuvo las dos quintas partes de los votos ¿Cuántos votos obtuvo?

Ejercicio 6. En la ciudad A votaron 1.200.000 habitantes y el candidato opositor obtuvo 300.000 votos. Esta proporción de votos se mantuvo en la ciudad B en donde votaron 900.000 personas. ¿Cuántos votos obtuvo el candidato opositor en la ciudad B?

Ejercicio 7. Del total de una caja con 3900 tornillos se espera que las $\frac{2}{75}$ partes sean defectuosas. ¿Cuántos tornillos defectuosos se esperan?¿Qué parte del total se espera que sean buenos?

Ejercicio 8. Para pintar las paredes de una sala hacen falta 3500cm^3 de pintura. Las dos novenas partes se pintarán de color verde y el resto de color blanco. Indicar cuántos cm^3 de pintura serán necesarios de cada color de pintura.

Ejercicio 9. En su casa, Juan comió cuatro porciones de una pizza que estaba divida en 9 porciones. Después fue a visitar a unos amigos y comió tres porciones de una pizza que estaba dividida en 8 porciones.

(a) Escribir las dos fracciones correspondientes a la proporción de pizza que Juan comió en su casa y en la de sus amigos. Compararlas usando los signos $>$, $=$ o $<$ según corresponda.

(b) ¿En dónde comió Juan una proporción mayor de pizza?

Ejercicio 10. Ordenar de menor a mayor los números $\frac{3}{7}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{8}{17}$, $-\frac{15}{24}$, $\frac{5}{4}$, 1.

Ejercicio 11. Abajo se dan las indicaciones para la preparación de 4 porciones de puré instantáneo (paquete de 125 gr).

(a) Hervir 1/2 litro de agua y retirar del fuego, agregar una cucharada de manteca y sal a gusto.

(b) Agregar 1/4 litro de leche fría y mezclar.

(c) Agregar el contenido del paquete sin batir, esperar un minuto y revolver suavemente.

Calcular la cantidad de puré, agua y leche necesarios para preparar 7 porciones.

Suma de fracciones

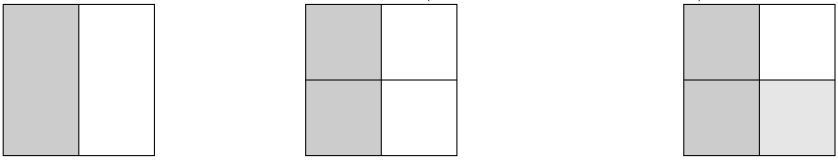
Sumar cantidades dadas en forma de fracción es una actividad habitual en la vida cotidiana. Para ilustrar este tema comenzaremos con un ejemplo.

Ejemplo 7. En una panadería se venden dos tipos de pan que cuestan lo mismo. Si se desea comprar medio kilogramo del tipo 1 y un cuarto del tipo 2 ¿Cuánto pan se compró?

La expresión coloquial “medio kilogramo más un cuarto de kilogramo” se expresa como

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,.$$

Representemos esta cuenta en un esquema (esta vez con cuadrados):



Dibujamos un cuadrado y lo dividimos en 2 partes iguales. La parte sombreada representa la fracción $\frac{1}{2}$.

Luego, dividimos las mitades nuevamente en 2. Cada uno de los nuevos cuadrados representa un cuarto $\frac{1}{4}$ del cuadrado original y se ve que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Sombreamos uno más de los cuartos. La parte sombreada ocupa $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

En resumen, la suma se realiza según el siguiente procedimiento

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4} \,.$$

Respuesta: La cantidad total de pan comprada es $\frac{3}{4}$ kg.

Procedimiento para sumar o restar fracciones. Para sumar (restar) las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, en primer lugar hay que buscar un denominador común para ambas fracciones. Lo más conveniente es que éste sea el mínimo múltiplo común de b y d. Sino, se puede usar como denominador cualquier múltiplo común de los números b y d; en particular, el producto entre ambos.

Luego se obtienen las fracciones equivalentes a $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con el nuevo denominador.

Finalmente, para obtener el resultado se suman las fracciones equivalentes. Si es posible y se desea trabajar con números más pequeños se puede simplificar el resultado.

Ejemplo 8. Calcular $\frac{8}{9} + \frac{7}{75}$.

Buscamos un denominador común factorizando los denominadores

$$9 = 3 \cdot 3 \quad \text{y} \quad 75 = 3 \cdot 25,$$

el mínimo común múltiplo entre 9 y 75 es $9 \cdot 25 = 225$. Por lo tanto,

$$\frac{8}{9} + \frac{7}{75} = \frac{8 \cdot 25}{225} + \frac{3 \cdot 7}{225} = \frac{8 \cdot 25 + 3 \cdot 7}{225} = \frac{221}{225}.$$

Ejemplo 9. Un profesor anota en su lista que las $\frac{4}{21}$ partes de su curso obtuvo una nota igual o mayor que cuatro y menor que siete y que las $\frac{8}{15}$ partes obtuvo una nota igual o mayor que 7. Un estudiante le pregunta qué proporción de su curso obtuvo una nota igual o mayor que cuatro y qué proporción obtuvo una nota menor que cuatro ¿Cómo debe proceder el profesor para responder la pregunta del estudiante?

Resolución. La observación interesante de este problema es que no se cuenta con el dato de la cantidad total de estudiantes del curso. Llamemos A a la proporción de estudiantes que obtuvieron una nota mayor o igual a 4. Es claro que la misma se calcula sumando las proporciones $\frac{4}{21}$ y $\frac{8}{15}$. Por lo tanto, la cuenta que resuelve el problema es

$$A = \frac{4}{21} + \frac{8}{15}.$$

Para sumar $\frac{4}{21}$ y $\frac{8}{15}$ buscamos el mínimo común múltiplo de ambos denominadores. Como,

$$21 = 3 \cdot 7 \quad \text{y} \quad 15 = 3 \cdot 5,$$

el mínimo común múltiplo entre 21 y 15 es $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Por lo tanto,

$$A = \frac{4}{21} + \frac{8}{15} = \frac{4 \cdot 5}{105} + \frac{8 \cdot 7}{105} = \frac{4 \cdot 5 + 8 \cdot 7}{105} = \frac{76}{105}.$$

Por lo que la proporción de aprobados es $\frac{76}{105}$.

Para calcular la proporción de desaprobados es necesario calcular

$$1 - A = 1 - \frac{76}{105} = \frac{105 - 76}{105} = \frac{29}{105}.$$

Respuesta: La proporción de estudiantes que obtuvieron una nota mayor o igual a 4 es $\frac{76}{105}$ y los que obtuvieron una nota menor que 4 es de $\frac{29}{105}$.

Producto de fracciones

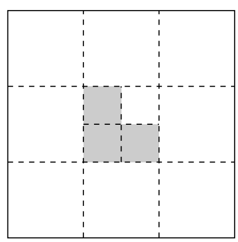
En general, el producto entre las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se realiza multiplicando los numeradores y denominadores de ambas fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}\ .$$

Coloquialmente, la multiplicación de una fracción por una cantidad se lee como "la fracción **de** esa cantidad". Por ejemplo, $\dfrac{2}{3} \cdot 8$ se lee "las dos terceras partes **de** ocho". Para entender el significado del producto de fracciones usaremos un diagrama.

Ejemplo 10. En la figura, el cuadrado grande está partido en 9 cuadrados, y el cuadrado central en 4 cuadrados. Los tres cuadraditos sombreados representan las tres cuartas parte de un noveno del cuadrado grande, es decir, la parte sombreada representa la fracción

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \quad \text{del total.}$$



Ejemplo 11. Las tres quintas partes de un curso obtuvo una nota mayor que 4 en un examen y de esos estudiantes una cuarta parte obtuvo una nota mayor que 7. Dar la proporción de estudiantes que obtuvieron una nota mayor que 7.

Resolución. Notar que no se sabe la cantidad de estudiantes del curso, pero este dato no es necesario para calcular la proporción pedida.

Llamemos E a la cantidad de estudiantes del curso y A a la cantidad de estudiantes que obtuvieron una nota mayor que 7,

$$A = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot E = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 5} \cdot E = \frac{3}{20} \cdot E.$$

Respuesta: La proporción de estudiantes que obtuvieron una nota mayor que 7 es $\frac{3}{20}$.

Cociente de fracciones

Nuevamente, apelamos a un problema para explicar cómo se dividen dos números fracciones. En lo que sigue usaremos también la notación a/b para denotar la fracción $\frac{a}{b}$ por cuestiones tipográficas.

Retomemos el ejemplo 11 y resolvámoslo de otra forma.

Las letras A y E representan las mismas cantidades que en dicho ejemplo. Con esta notación, la frase coloquial “la cuarta parte de los estudiantes que obtuvieron una nota igual o mayor que 4” se puede expresar simbólicamente como

$$A = \frac{\frac{3}{5}E}{4} \, .$$

Como el valor de A debe ser el mismo que el calculado anteriormente se concluye que

$$A = \frac{\frac{3}{5}E}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot E = \frac{3}{20} \cdot E \, .$$

De este ejemplo, parece sensato tomar la siguiente regla para efectuar el cociente: multiplicar la fracción que está en el lugar del numerador, en este ejemplo $\frac{3}{5}$, por la inversa de la fracción que está en el denominador, en este ejemplo $\frac{4}{1}$.

En general, el cociente entre las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Ejemplo 12. Calcular el siguiente cociente de fracciones $\frac{18/7}{45/32}$.

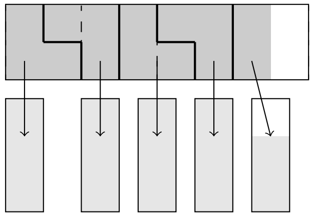
De acuerdo a la regla,

$$\frac{18/7}{45/32} = \frac{18}{7} \cdot \frac{32}{45} = \frac{18 \cdot 32}{7 \cdot 45} = \frac{2 \cdot \cancel{9} \cdot 32}{7 \cdot 5 \cdot \cancel{9}} = \frac{2 \cdot 32}{7 \cdot 5} = \frac{\quad}{35} \, .$$

Ejemplo 13. Hay que envasar 7/2 kg de mermelada en frascos que tienen una capacidad de 3/4 kg cada uno. La cantidad de frascos necesarios para envasar la mermelada es el resultado de la cuenta

$$\frac{7/2}{3/4} = \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3} \, .$$

7/2 kg de mermelada



$4 + \frac{2}{3}$ frascos de $\frac{3}{4}$ kg cada uno

1.3 Porcentajes

En la vida diaria y en los periódicos se suelen dar las proporciones en términos de porcentajes. Analicemos un titular típico de los diarios.

JUAN PEREZ OBTUVO EL 20% DE LOS VOTOS

Este titular significa que Juan Pérez obtuvo una fracción de $\frac{20}{100}$ de los votos.

Si hubo, digamos, 130.000 votos, entonces la cantidad de votos que obtuvo Pérez se calcula como sigue

$$\text{Cantidad de votos} = \frac{20}{100} \cdot 130.000 = \frac{1}{5} \cdot 130.000 = 26.000$$

Luego, Pérez obtuvo 26.000 votos.

Porcentajes: El $a\%$ de una cantidad se entiende como la fracción $\frac{a}{100}$ de esa cantidad.

En los siguientes ejemplos se muestra cómo resolver problemas que involucran porcentajes.

Ejemplo 14. Calcular el porcentaje de votos que obtuvo Pérez si él obtuvo 15.000 votos en una ciudad en la que votaron 300.000 personas.

El porcentaje que se pide calcular es la proporción de votos favorables a Pérez sobre el total de votantes:

$$\text{Proporción de votos} = \frac{15.000}{300.000} = \frac{5}{100}.$$

Luego, el porcentaje de votos que obtuvo Pérez es del 5%.

Ejemplo 15. Se sabe que la leche aumentará un 15%. Si el precio actual es de \$4 por litro, calcular el precio del litro de este alimento luego del aumento.

Al precio actual hay que sumarle el porcentaje de aumento previsto:

$$\text{Precio nuevo} = 4 + \frac{15}{100} \cdot 4 = \frac{400 + 60}{100} = \frac{460}{100} = 4,6.$$

El precio luego del aumento será de $\$4,6$.

Ejemplo 16. Si un producto costaba \$4 y ahora cuesta \$5, indicar el porcentaje de aumento.

El porcentaje de aumento es igual al porcentaje que representa el aumento sobre el precio original. En este caso, el aumento es de \$1, luego el porcentaje de aumento es

$$\frac{5-4}{4} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\% \ .$$

Ejemplo 17. Un diario informa que la variación del precio internacional de la soja fue de -2% entre mayo y junio de cierto año. Si el precio de la soja era de \$432 en mayo, calcular dicho precio en junio.

El signo $-$ nos indica que el precio bajó. El nuevo precio se calcula restando el 2% de 432 a 432, es decir

$$432 - \frac{2}{100} \cdot 432 = 423,36 \ .$$

El precio de la soja en junio fue de $\$423,36$.

Ejemplo 18. Se informa que, en una elección, González obtuvo la dos quintas partes de los votos. Expresar esta proporción como un porcentaje.

Para expresar la fracción dos quintos como un porcentaje hay que encontrar la fracción equivalente a $\frac{2}{5}$ cuyo denominador es 100:

$$\frac{2}{5} = \frac{a}{100} \quad \text{o, lo que es lo mismo} \quad a = 40 \ .$$

Es decir, González obtuvo el 40% de los votos.

Luego del repaso sobre desarrollo decimal se reverá este tema y este mismo problema se podrá resolver de otra manera.

Ejercicio resuelto 4. Tres hermanos, Juan, Pedro y Luis, reciben una herencia de \$100.000. En el testamento queda establecido que Pedro debe recibir el 30% de la herencia, Juan las dos quintas partes de lo que queda, y el resto es para Luis.

(a) ¿Cuál de los tres hermanos recibe la mayor parte de la herencia?

(b) Si no se conociera el monto de la herencia,¿Se podría decidir quién recibe la mayor parte de la misma? Justificar la respuesta.

Resolución.

(a) Pedro recibe el 30%, es decir $\frac{30}{100} \cdot \$100.000 = \$30.000$.

Juan recibe las $\frac{2}{5}$ de lo que queda, es decir $\frac{2}{5} \cdot \$70.000 = \$28.000$.

Luis recibe el resto, es decir

$$100.000 - \frac{30}{100} \cdot \$100.000 - \frac{2}{5} \cdot \$70.000 = \$100.000 - 30.000 - 28.000 = \$42.000.$$

Respuesta: Pedro recibe \$30.000, Juan recibe \$28.000 y Luis recibe \$42.000.

(b) Es posible decidir quién recibe la mayor parte de la herencia pues para hacerlo no es necesario conocer el monto sino que alcanza con comparar la fracciones correspondientes. Las fracciones de la herencia que reciben Pedro y Juan son datos.

- Pedro recibe 30% o lo que es lo mismo la fracción $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$,
- Juan recibe $\frac{2}{5}$ de lo que queda, es decir, $\frac{2}{5}$ de $\frac{7}{10}$, lo que es igual a $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{25}$,
- Luis recibe el resto:

$$1 - \frac{3}{10} - \frac{7}{25} = \frac{50 - 15 - 14}{50} = \frac{21}{50}.$$

Respuesta: Como $\frac{3}{10} = \frac{15}{50}$, $\frac{7}{25} = \frac{14}{50}$ y todas son calculadas sobre el mismo monto, resulta que $\frac{21}{50} > \frac{3}{10} > \frac{7}{25}$. Así, el que recibe la mayor parte de la herencia es Luis.

Trabajo práctico 3

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Cuáles operaciones entre fracciones se describieron en esta sección? Explicar cómo se realizan.

(b) Ejemplificar el uso de estas operaciones en un contexto cotidiano o aplicado distinto a los mencionados en este texto.

Nota: los siguientes ejercicios deberían resolverse sin la ayuda de la calculadora. Ésta se puede utilizar para verificar los resultados obtenidos.

Ejercicio 2.

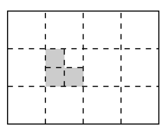
(a) Explicar un procedimiento para sumar varias fracciones. Aplicar dicho procedimiento para realizar los siguientes cálculos:

$$\frac{2}{9} + \frac{15}{27} - (-\frac{125}{84}) = \qquad\qquad \frac{-1}{31} + \frac{15}{125} + (-\frac{43}{45}) + 3 =$$

(b) Escribir las siguientes cantidades en forma de fracción irreducible.

i) $\frac{2}{9} \cdot \frac{45}{4}$ ii) $3 \cdot \frac{9}{-49} \cdot \frac{-7}{81}$ iii) $\frac{2/9}{45/4}$ iv) $\frac{-2/8}{16/32} \cdot \frac{-3}{2}$.

Ejercicio 3. En la figura, el rectángulo grande está partido en 12 cuadraditos iguales, y uno de esos cuadraditos está partido a su vez en 4 cuadraditos iguales. Indicar qué fracción del rectángulo grande representa la parte sombreada.



Ejercicio 4. Una pareja tiene 4 hijos y todos sus bienes son gananciales. Según la ley vigente, si uno de los cónyuges fallece, el otro recibe la mitad de los bienes y la

otra mitad se reparte en partes iguales entre los 4 hijos. ¿Qué parte de los bienes totales le corresponde a cada hijo?

Ejercicio 5. Se distribuye mermelada en frascos. Para la cantidad de mermelada y la capacidad de cada frasco especificada en cada caso, calcular la cantidad de frascos ocupados al envasar la mermelada.

(a) 10 kg de mermelada y frascos de 2 kg cada uno.

(b) 7 kg de mermelada y frascos de 2 kg cada uno.

(c) $\frac{7}{2}$ kg de mermelada y frascos de 2 kg cada uno.

(d) $\frac{7}{2}$ kg de mermelada y frascos de medio kg cada uno.

(e) Siete kilos y un cuarto de mermelada y los frascos tienen una capacidad de 5/8 kg cada uno.

Ejercicio 6. Acerca de los cálculos de porcentajes.

(a) ¿Qué significa el $a\%$ de una cantidad?

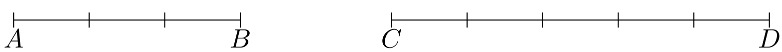
(b) Un candidato obtuvo 150.000 votos en una ciudad donde votaron 450.000 personas. ¿Qué porcentaje de votos obtuvo el candidato?

(c) Si la inflación del mes de marzo fuera del 3% y un asalariado cobrara \$5.000 en ese mes ¿cuál debería ser el salario del mes de abril para compensar la inflación?

(d) Se hace un descuento del 14% en el precio de un producto que vale 420 pesos.¿Cuál es el precio luego del descuento?

(e) Un diario informa que la variación del precio internacional del trigo fue de -4% entre mayo y junio de cierto año. Si el precio del trigo era de \$325 en mayo, calcular dicho precio en junio.

Ejercicio 7. El segmento AB está dividido en tres unidades y el CD en cinco unidades,



se pide decidir

(a) cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas justificando adecuadamente.

(i) $AB = \frac{3}{5}CD$

(ii) $CD = \frac{5}{3}AB$

(iii) $6\,CD = 10\,AB$

(iv) La longitud de AB es 60% de la longitud de CD

(v) El 20% de CD coincide con el 30% de AB.

(b) si $\frac{4}{5}AB$ es mayor, menor o igual que $\frac{4}{5}CD$.

Ejercicio 8. Una lámina que tiene un área de 4600cm^2 será pintada en tres franjas: dos de color amarillo y una de color verde. Se comienza pintando con color amarillo la primera franja, que representa un 45% del total de la lámina. Luego se pinta de verde la próxima franja, ocupando las dos quintas partes de la superficie que aún quedó sin pintar y, finalmente, se pinta el resto nuevamente con color amarillo.

(a) ¿Qué porcentaje de la superficie total de la lámina quedó pintada de verde?

(b) ¿Qué área quedó pintada de amarillo?

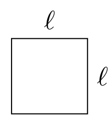
Ejercicio 9. En el mes de abril, un trabajador extrajo las $\frac{3}{5}$ partes de su sueldo del cajero automático, el 60% de lo que quedaba lo usó para pagar la tarjeta de crédito y el resto lo dejó en su cuenta bancaria a modo de ahorro. En cambio, en el mes de junio, el trabajador extrajo las $\frac{2}{5}$ partes de su sueldo del cajero, el 90% de lo que quedaba lo usó para pagar la tarjeta y dejó el resto en su cuenta bancaria a modo de ahorro.

Suponiendo que el salario de ambos meses es el mismo, ¿en qué mes ahorró más el trabajador?

1.4 Potencias y unidades de medida

Como sabemos, el área de un cuadrado cuyos lados miden ℓ es

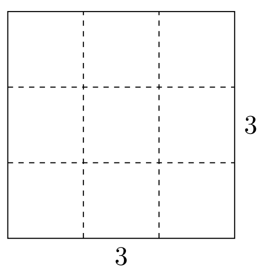
$$A = \ell \cdot \ell \ .$$



Para abreviar se anota, $\ell \cdot \ell = \ell^2$ y se lee "ℓ al cuadrado".

El área A de un cuadrado cuyos lados miden tres se calcula como sigue

$$A = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9 \ .$$



El cálculo de áreas es un ejemplo típico del uso de multiplicaciones repetidas de un mismo número o cantidad. Este tipo de operación se llama potenciación. El número que se multiplica repetidas veces se llama base y la cantidad de veces que se repite se llama exponente. En este caso, la base es 3 y el exponente es 2.

Ejemplo 19.

(a) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, la base es 4 el exponente es 3.

(b) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$, la base es -3 y el exponenete es 2.

(c) $(\frac{2}{3})^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$, la base es $\frac{2}{3}$ y el exponente es 4.

Potencias. Sean a un número cualquiera llamado base, y n un número natural, llamado exponente, a^n se calcula multiplicando n veces a, es decir,

$$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \ (n \text{ veces}).$$

La expresión a^n se lee "a elevado a la n". Además,

$$a^0 = 1 \quad \text{si} \quad a \neq 0 \quad \text{y} \quad a^1 = a \ .$$

En el caso en que $a \neq 0$, se define

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad n > 0 \ .$$

Ejemplo 20.

(a) $4^{-1} = \frac{1}{4}$

(b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$

(c) $(-3)^{-2} = (-\frac{1}{3})^2 = (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$

(d) $(\frac{4}{5})^{-2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$

Algunas propiedades de la potenciación Para a, b números distintos de cero y m, n números enteros valen las siguientes propiedades:

- Distributiva de la potencia respecto del producto y del cociente

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ .$$

- Producto y cociente de potencias de igual base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{y} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \ .$$

- Potencia de potencia $\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Ejemplo 21. El sistema de medidas de nuestro país, conocido como SIMELA *, estipula que, en nuestro país, la unidad de base para medir longitudes es el metro "m". Longitudes más pequeñas se miden usando submúltiplos del metro como el decímetro (dm), el centímetro (cm) y el milímetro (mm). Para medir longitudes más largas se usan múltiplos del metro como el decámetro (dam), el hectómetro (hm) y el kilómetro (km). Abajo se detallan las relaciones entre estas medidas con el metro.

*SIMELA significa sistema métrico legal argentino. Las unidades de pesos y medidas de nuestro país están establecidas en la ley nacional 19.511 que se puede ver en la página web inti.gov.ar/metrologia/pdf/19511.pdf

$1\text{mm} = 10^{-3}\text{m} = \frac{1}{1000}\text{m}$	$1\text{cm} = 10^{-2}\text{m} = \frac{1}{100}\text{m}$	$1\text{dm} = 10^{-1}\text{m} = \frac{1}{10}\text{m}$	$1\text{m} = 10^{0}\text{m}$
$1\text{dam} = 10^{1}\text{m} = 10\text{m}$	$1\text{hm} = 10^{2}\text{m} = 100\text{m}$	$1\text{km} = 10^{3}\text{m} = 1000\text{m}$	

A partir de la tabla de arriba y expresando las relaciones como potencias de 10, completar las líneas de puntos.

a) $1\text{m} = \ldots\ldots\text{km}$ b) $1\text{cm} = \ldots\ldots\text{m}$ c) $1\text{km} = \ldots\ldots\text{dm}$

Resolución.

a) De acuerdo a la tabla: $1\text{km} = 10^3\text{m}$, despejando y usando la definición de potencia con exponente negativo, se obtiene
$$1 \text{ m} = \frac{1}{10^3}\text{km} = 10^{-3}\text{km} \ .$$
Respuesta: $1\text{m} = 10^{-3}\text{km}$.

b) De acuerdo a la tabla, $1 \text{ cm} = 10^{-2}\text{m}$. Despejando y usando la definición de potencia con exponente negativo y la fórmula para dividir fracciones se deduce que $1 \text{ m} = \frac{1}{10^{-2}}\text{cm} = \frac{1}{1/10^2}\text{cm} = 10^2\text{cm} = 100\text{cm}$

Respuesta: $1\text{m} = 10^2\text{cm}$.

c) De acuerdo a la tabla y despejando se obtiene que
$$1\text{km} = 10^3\text{m y } 1\text{m} = 10^1\text{dm},$$
por lo tanto,
$$1\text{km} = 10^3\text{m} = 10^3 \cdot 10\text{dm} \cdot \underbrace{=}_{\text{prod. de potencias de igual base}} 10^{3+1}\text{dm} = 10^4\text{dm}$$

Respuesta: $1\text{km} = 10^4\text{dm}$

Ejemplo 22. Escribir el número $a = -(\frac{3}{4})^7 \cdot 2^8 \cdot 9^2$ como un producto de potencias de 2 y 3.

Explicación	Uso la propiedad distributiva de la potencia respecto de un cociente.
Planteo	$-(\frac{3}{4})^7 \cdot 2^8 \cdot 9^2 = -\frac{3^7}{4^7} \cdot 2^8 \cdot 9^2$
Explicación	Nos damos cuenta que $4 = 2^2$ y que $9 = 3^2$ y usamos la propiedad de potencia de potencia.
Planteo	$-\frac{3^7}{2^{2\cdot 7}} \cdot 2^8 \cdot 3^{2\cdot 2} = -\frac{3^7}{2^{14}} \cdot 2^8 \cdot 3^4$
Explicación	Agrupo las bases de acuerdo a la propiedad sobre las potencias de una misma base.
planteo	$-3^{7+4} \cdot 2^{8-14} = -3^{11} \cdot 2^{-6}$
Explicitación de la respuesta	*Respuesta:* $a = -3^{11} \cdot 2^{-6}$

Trabajo Práctico 4

Ejercicio 1. El sistema de medidas de nuestro país, conocido como SIMELA, estipula que la unidad de base para medir masas es el kilogramo kg. Sin embargo, los nombres de los múltiplos y submúltiplos de la unidad de masa se forman con los prefijos y la palabra gramo. Por ejemplo, una centésima parte de un gramo es un centigramo. Las masas más pequeñas que un gramo se miden usando submúltiplos del gramo como el decigramo (dg), el centigramo (cg) y el miligramo (mg). Para medir masas más grandes se usan múltiplos del gramo como el decagramo (dag), el hectogramo (hg) y el kilogramo (kg). Completar las relaciones entre estas medidas con el gramo en la tabla de abajo.

$1\text{mg} = 10^{-3}\text{g} = \frac{1}{1000}\text{g}$	$1\text{cg} =$	$1\text{dg} =$
$1\text{dag} =$	$1\text{hg} =$	$1\text{kg} =$

A partir de la tabla de arriba y expresando las relaciones como potencias de 10, completar las líneas de puntos.

a) $1\text{hg} = \ldots\ldots\text{dg}$ b) $100\text{mg} = \ldots\ldots\text{g}$ c) $1\text{kg} = \ldots\ldots\text{hg}$

Ejercicio 2. Escribir los siguientes números como un producto de potencias de 2 y de 3 indicando en cada paso las propiedades utilizadas y los cálculos auxiliares.

(a) $(-3)^2 \cdot (\frac{8}{3})^4 \cdot 4^{-5}$ (b) $(\frac{1}{9})^{-4} \cdot (-2)^3 \cdot 27^{-2}$

Ejercicio 3. Transformar la expresión $\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} : 4}{-125/1000}$ en la expresión $4^2 \cdot \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{8}\right)^{-1}$ indicando en cada paso las propiedades utilizadas y los cálculos auxiliares.

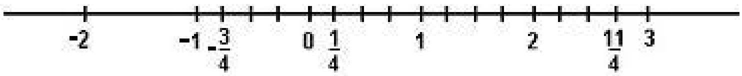
Ejercicio 4. Una de las unidades para medir la capacidad de almacenar información de los dispositivos informáticos es el byte. Un kilobyte (Kb) es igual a 1024 bytes $= 2^{10}$ bytes y el megabyte (Mb), igual a 1024Kb. Si la memoria RAM de una computadora tiene 512Mb, se pide expresar la capacidad de la memoria RAM en Kb y en bytes usando potencias de 2. Observar que $512 = 2^9$.

2 Representación gráfica de números

Representamos los números por puntos en una recta donde hayamos fijado dos puntos de referencia, uno de ellos correspondiente al 0 y otro a su derecha correspondiente al 1 (la unidad de escala).

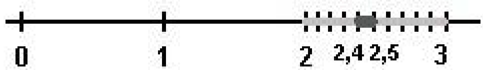
Luego vamos agregando los enteros marcando puntos que disten cantidades exactas de unidades a izquierda y derecha del 0:

Dividiendo en partes idénticas los segmentos entre los puntos enteros quedan determinados nuevos puntos: los racionales. Por ejemplo:

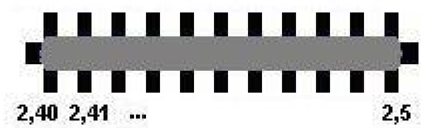


Un caso particular es el de aquellos cuyos denominadores son 10 ó 100 ó 1000, etc. Por ejemplo $2,41 = \frac{241}{100}$ que puede marcarse en tres etapas de la siguiente manera: $2 < 2,41 < 3$ que corresponde a un intervalo entero:

Luego, se agregan marcas separadas por un décimo de unidad en el intervalo $[2, 3]$; y allí $2,4 < 2,41 < 2,5$:



Con lupa:



Es decir:

Trabajo Práctico 5

Ejercicio 1. Describa coloquialmente cómo marcaría el punto de la recta que corresponde al número $-\frac{4}{7}$.

Ejercicio 2. Describa coloquialmente cómo marcaría el punto de la recta que corresponde al número $2,414213$.

Ejercicio 3. Nótese que $2,4$ ocupa una posición bastante próxima a $2,41$.

¿Puede precisar cuál es la distancia que hay de una posición a la otra?

Ejercicio 4. Ubicar en la recta numérica los siguientes pares de números y calcular la distancia entre ellos.

i) $-0,0001$ y $-0,00001$ ii) $1,32456$ y $1,32$ iii) $-10,54$ y $10,54$

Ejercicio 5. Ordenar de menor a mayor y ubicar en la recta numérica los siguientes números

$-\frac{6}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{-1}{3}$; $\frac{-5}{3}$; -1; $-0,75$; $0,4$; $-1,2$

Ejercicio 6. Decir qué valor numérico le corresponde a x y a y sabiendo que su posición en la recta real es la siguiente:

3 Representación decimal de números racionales

En la vida cotidiana y en la académica nos referimos a las cantidades y a las medidas usando fracciones o desarrollos decimales (números con coma). Por ejemplo, hablamos de un kilogramo y medio ($1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$) o bien de $1,5$ kilogramos. Estas son dos formas distintas de expresar el mismo peso. La cuestión que nos ocupa ahora es por qué el desarrollo decimal $1,5$ y la fracción $\frac{3}{2}$ representan el mismo número, es decir, $\frac{3}{2} = 1,5$. Para este ejemplo en particular la igualdad es evidente. Simplemente hay que recordar que $1,5$ significa un entero más cinco décimos,

$$1,5 = 1 + \frac{5}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{3}{2}\ .$$

Para el proceso inverso, pasar de fracción al desarrollo decimal, hay que aplicar el procedimiento conocido por división con decimales que ejemplificamos a continuación.

$$\begin{array}{l|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

porque 3 dividido 2 es 1 y el resto es 1.

$$\begin{array}{l|l} 3 & 2 \\ \hline 10 & 1{,}5 \\ \ \ 0 & \end{array}$$

porque 10 dividido 2 es 5 y el resto es 0.

En este ejemplo, al llegar al cero la división se termina y se obtiene en el cociente el desarrollo decimal de la fracción $\frac{3}{2}$.

Con este simple ejemplo, se ve como se puede pasar de una representación a otra. En las próximas secciones, veremos cómo se generalizan estos procedimientos.

3.1 De la fracción al desarrollo decimal

El desarrollo decimal de una fracción $\frac{a}{b}$ es el cociente de la división (con decimales) entre a y b. Hay dos posibilidades: en algún momento el resto es cero y el proceso termina, o bien, nunca se pasa por el resto cero y el proceso no termina. Veamos un ejemplo de cada caso.

Ejemplo 23. Calcular el desarrollo decimal de $\frac{11}{8}$ y de $\frac{7}{22}$.
(a) $\frac{11}{8}$

$$\begin{array}{r|l} 11 & \quad 8 \\ \cline{2-2} 3 & \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & \quad 8 \\ \cline{2-2} 30 & 1{,}3 \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & \quad 8 \\ \cline{2-2} 30 & 1{,}37 \\ 60 & \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & \quad 8 \\ \cline{2-2} 30 & 1{,}375 \\ 60 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Se llega a un resto cero y no tiene sentido continuar. Se deduce que $\frac{11}{8} = 1,375$.
(b) $\frac{7}{22}$

$$\begin{array}{r|l} 7 & \quad 22 \\ \cline{2-2} & \quad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & \quad 22 \\ \cline{2-2} 4 & 0{,}3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & \quad 22 \\ \cline{2-2} 40 & 0{,}31 \\ 18 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & \quad 22 \\ \cline{2-2} 40 & 0{,}318 \\ 180 & \\ 4 & \end{array}$$

El resto 4 volvió a aparecer, si bajamos el cero nos queda 40 y al dividirlo por 22 de nuevo el cociente será 1 y el resto 18. La misma situación se repite indefinidamente.

$$\begin{array}{r|l} 70 & \quad 22 \\ \cline{2-2} 40 & 0,318181\ldots \\ 180 & \\ 40 & \\ 180 & \\ 40 & \\ \vdots & \end{array}$$

En este ejemplo, los restos 4 y 18 se repiten dando lugar a un desarrollo decimal "periódico". A la parte del número que se repite se lo llama *período*. En este ejemplo, el período es 18. Para que quede más claro cuál es la parte que se repite se suele escribir

$$\frac{7}{22} = 0,3\,\overset{\frown}{18} \;.$$

3.2 Del desarrollo decimal a la fracción

En general, un número cuyo desarrollo decimal termina es igual a la fracción que tiene por numerador el número sin la coma y por denominador un 1 seguido por tantos ceros como cifras hay después de la coma.

Ejemplo 24.

$$0,032 = \frac{32}{1000} = \frac{4}{125}\;, \qquad 12,5 = \frac{125}{10} = \frac{25}{2}\;, \qquad -0,3 = -\frac{3}{10}\;.$$

Ahora, se muestra el procedimiento que permite pasar de un desarrollo decimal periódico a una fracción. Como se verá, no es tan fácil deducir cuál es la fracción a partir de un desarrollo decimal periódico.

Ejemplo 25. Escribir en forma de fracción los siguientes números
(a) $x = 0,\overset{\frown}{51}$ (b) $x = 10,12\,\overset{\frown}{51}$

Nota: El número $0,\overset{\frown}{51}$ es igual a $0,51515151\cdots$ donde los puntos suspensivos indican que el 51 se repite indefinidamente. Al "51" se lo llama "período". Para el caso de $10,12\,\overset{\frown}{51}= 10,12515151\ldots$, el arco indica que solo el 51 se repite indefinidamente y que el "12" no forma parte del período.
Resolución:
(a) El periodo de $0,\overset{\frown}{51}$ tiene dos cifras que son el 5 y el 1, por lo que multiplicamos al número por 100, para correr la coma tantos lugares como cifras periódicas haya.

$$100 \cdot 0,\overset{\frown}{51}= 51,\overset{\frown}{51}$$

Luego restamos el nuevo número con el dado

$$51,\overset{\frown}{51} - 0,\overset{\frown}{51}= 51,$$

Si escribimos $x = 0,\overset{\frown}{51}$, resumimos la cuenta anterior como:

$$100 \cdot x - x = 51.$$

Luego podemos escribir,

$$100 \cdot x - x = 51 \quad \Leftrightarrow \quad 99 \cdot x = 51 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$$

Respuesta: El número en fracción es $x = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$.

(b) En este caso x es $10,12\,\overset{\frown}{51}= 10,12515151\ldots$. Al multiplicar x por $10\,000$ se obtiene $10\,000x = 10\,1251,\overset{\frown}{51}$ y al multiplicarlo por 100 se obtiene $100x = 1012,\overset{\frown}{51}$. Restamos ambas cantidades,

$$10\,000x - 100x = 10\,1251,\overset{\frown}{51} - 1012,\overset{\frown}{51}$$

y resolvemos la ecuación,

$$10\,000x - 100x = 100239 \Leftrightarrow 9900x = 100239 \Leftrightarrow x = \frac{100239}{9900}\ .$$

Respuesta: $10,12\,\overset{\frown}{51}= \frac{100239}{9900}$

Breve análisis lógico. En este parágrafo se estudian dos formas de representar o escribir los números:

(a) en forma de fracción,

(b) como un desarrollo decimal

y nos preguntamos si es posible pasar de una a la otra. Vimos que esto es posible en los ejemplos que hemos trabajado. Esto ocurre en todos los casos y lo podemos resumir en la propiedad que enunciamos a continuación.

Propiedad. *Todo número que se puede representar con una fracción se puede representar como un desarrollo decimal finito o infinito periódico. A su vez, todo número que tenga un desarrollo decimal finito o infinito periódico se puede escribir como fracción.*

Esta propiedad es un enunciado conformado por las dos oraciones siguientes:

1. “Si un número se puede representar con una fracción entonces puede representarse como un desarrollo decimal finito o infinito periódico”,

2. “Si un número tiene desarrollo decimal finito o infinito periódico entonces se puede escribirse como una fracción”

Ambas oraciones tienen una estructura de implicación: si ocurren unas ciertas condiciones o hipótesis (antecedente) entonces ocurre una cierta conclusión o tesis (consecuente). En otros términos, unas ciertas condiciones implican una conclusión. (consecuente)

Condiciones, hipótesis o antecedente	$\Rightarrow$	conclusión, tesis o consecuente.

En nuestras oraciones se tiene que

	Condición, *Hipótesis* o antecedente	Conclusión, *Tesis* o consecuente
Oración 1	todo número que se puede representar con una fracción	se puede representar como un desarrollo decimal finito o infinito periódico
Oración 2	todo número que se puede representar como un desarrollo decimal finito o infinito periódico	se puede escribir con una fracción

Notar que las hipótesis y la tesis de las oraciones 1 y 2 se revierten. Se dice que las oraciones 1 y 2 son enunciados recíprocos.

La propiedad enunciada vale para cualquier número que cumpla con la condición o hipótesis. En las secciones 3.1 y 3.2 se mostraron procedimientos sólo sobre algunos ejemplos. En realidad, para asegurar que la propiedad enunciada es verdadera, deberíamos exhibir cómo aplicar los procedimientos antes ejemplificados a todas las fracciones y a cualquier desarrollo decimal finito o infinito periódico. Esto es posible de hacer, pero esta argumentación general o prueba excede los objetivos de este curso.

Desarrollos decimales infinitos no periódicos. Los números con desarrollo decimal infinito no periódicos no fueron contemplados en esta sección. A partir de la propiedad enunciada anteriormente sabemos que éstos no pueden ser racionales y por ello los llamamos irracionales. Nos ocuparemos de este asunto en la sección 5.

Trabajo Práctico 6

Ejercicio 1.

(a) Veamos cómo se obtiene el desarrollo decimal de $\frac{18}{7}$:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \cline{2-2} 4 & 2, \end{array}$$

porque 18 dividido 7 es 2 y el resto es 4.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \cline{2-2} 40 & 2{,}5 \\ 5 & \end{array}$$

porque 40 dividido 7 es 5 y el resto es 5.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \cline{2-2} 40 & 2{,}57\ldots \\ 50 & \\ 1 & \end{array}$$

porque 50 dividido 7 es 7 y el resto es 1.

Termine de obtener el desarrollo. ¿Cuántos restos posibles pueden aparecer al dividir por 7? ¿El desarrollo decimal es finito o infinito periódico?

(b) Realice el mismo procedimiento para los racionales $\frac{17}{11}$ y $\frac{29}{8}$. ¿Qué sucede cuando un resto, distinto de cero, se repite? ¿Qué sucede cuando el resto es 0?

Ejercicio 2.

1. Exhiba racionales con diferentes tipos de desarrollo decimal.

2. ¿Puede un racional tener un desarrollo decimal con infinitas cifras que no sea períodico? ¿Por qué?

Ejercicio 3. Estudiar la validez de las siguientes afirmaciones:

- $10 \cdot 1,44444\ldots = 14,44444\ldots$
- $14,44444\ldots - 1,44444\ldots = 13$
- $10 \cdot 1,44444\ldots - 1,44444\ldots = 13$
- Si la letra x denota un valor, reemplazando la x por $1,44444\ldots$ en $10 \cdot x - x = 13$ se satisface la igualdad.
- Si la letra x denota un valor, reemplazando la x por $\frac{13}{9}$ en $10 \cdot x - x = 13$ se satisface la igualdad.
- $1,44444\ldots = \frac{13}{9}$

Ejercicio 4. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar.

(a) $3 \times 0,3333333333 = 1$

(b) $0,3333333333 = \frac{1}{3}$

(c) $0,3333333333\ldots = \frac{1}{3}$

(d) $3 \times 0,3333333333\ldots = 3 \times \frac{1}{3}$

(e) $0,999999999\ldots = 1$

(f) $0,0999999999\ldots = 0,1$

(g) $4,2999999999\ldots = 4,3$

Ejercicio 5. Escribir en forma de fracción los siguientes números:

$$2,12; \qquad 1,\overset{\frown}{3}; \qquad 1,0\,\overset{\frown}{2}; \qquad 0,2\,\overset{\frown}{9}$$

Ejercicio 6. Escribir los siguientes números como una fracción irreducible, dar su desarrollo decimal y representarlos sobre la recta numérica:

$$\frac{1,23}{3}; \qquad 3 \cdot \frac{4}{2,5}; \qquad \frac{1}{0,33} \cdot \frac{1}{3}; \qquad \frac{32}{4}; \qquad \frac{1,\overset{\frown}{9}}{2}$$

Ejercicio 7. Reescribir las siguientes oraciones reemplazando las fracciones mencionadas por su desarrollo decimal y respetando las unidades.

El viaje duró dos horas y media.	El viaje duró 2,5 horas.
Queda un litro y medio de leche.	
Juan vendrá dentro de dos horas y cuarto.	
Hacen falta tres cuartos kilos de pan.	
Necesitamos tornillos de 3/16 y de 3/8 de pulgada.	

3.3 Porcentaje y desarrollo decimal

Cómo se explicó en el parágrafo 1.3, el $a\%$ de una cantidad se entiende como la proporción $\frac{a}{100}$ de esa cantidad. Por ejemplo, el $12,53\%$ de 34 se calcula como sigue

$$\frac{12,53}{100} \cdot 34 = 4,2602 \ .$$

Ejemplo 26. Se informa que González obtuvo la dos quintas partes de los votos en una elección. Expresar esta proporción como un porcentaje. Simplemente, el porcentaje $a\%$ se calcula como sigue

$$a = \frac{2}{5} \cdot 100 = 0,4 \cdot 100 = 40 \ .$$

Luego, González obtuvo el 40% de los votos.

Trabajo Práctico 7

En todos los ejercicios, dar la respuesta con una precisión mayor a un centésimo (dos cifras exactas después de la coma).

Ejercicio 1. En una elección, 2.123.432 personas votaron al candidato Pérez. ¿Qué de los votos porcentaje obtuvo Pérez si en total votaron 3.578.257 personas?

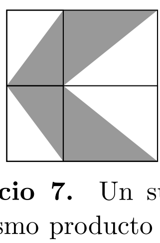
Ejercicio 2. Se sabe que el litro de leche aumentará un $4,5\%$. Si, actualmente, el litro cuesta $\$4,80$, calcular el costo del litro de este alimento luego del aumento.

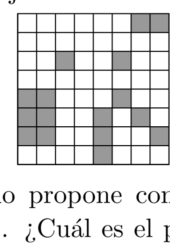
Ejercicio 3. Si un producto costaba $\$43,5$ en enero de 2011 y ahora cuesta $\$51,4$, indicar el porcentaje de aumento.

Ejercicio 4. Un diario informa que la variación del precio internacional de la soja fue de $-7,23\%$ entre mayo y junio de un cierto año. Si el precio de la soja era de 331 dólares estadounidenses en mayo, calcular dicho precio en junio.

Ejercicio 5. Se informa que un sexto de la población de una ciudad no tiene agua potable. Expresar esta proporción como un porcentaje.

Ejercicio 6. Indicar el porcentaje del área de cada figura que está sombreada.

(a) 

(b) 

(c) 

$\alpha = 30°$

Ejercicio 7. Un supermercado propone como oferta "Comprando tres unidades del mismo producto pague dos". ¿Cuál es el porcentaje de descuento que realiza el supermercado sobre el precio de cada unidad?

Ejercicio 8. Otro supermercado propone un 70% de descuento en el precio de la segunda unidad si se compran dos unidades del mismo producto. Calcular el porcentaje de descuento que se realiza sobre el precio de cada unidad y comparar esta oferta con la del supermercado del ejercicio anterior.

4 Cálculos combinados

En esta sección abordaremos situaciones cuyas resoluciones involucran el trabajo con expresiones numéricas en las que se combinan distintas operaciones. Al operar con este tipo de expresiones es necesario ser cuidadoso con el orden en el que se resuelven las operaciones involucradas pues, si no lo somos, podemos obtener resultados incorrectos. En la próxima sección veremos ejemplos en los que puede darse esta dificultad.

4.1 Los paréntesis y la propiedad distributiva

Los próximos ejemplos serán la base para entender el funcionamiento de los paréntesis y de la propiedad distributiva.

Ejemplo 27. ¿Cuánto dinero abona una persona que viaja 9 minutos en taxi sabiendo que se cobra \$5 la "bajada de bandera" y \$3 por minuto de viaje?

Juan y Pedro plantean que para responder a lo pedido hay que multiplicar el tiempo de viaje, 9 minutos, por el precio de cada minuto, \$3, y al resultado sumarle el monto por la bajada de bandera, \$5. En sus cuadernos escriben la siguiente cuenta:

$$5 + 9 \cdot 3 \ ,$$

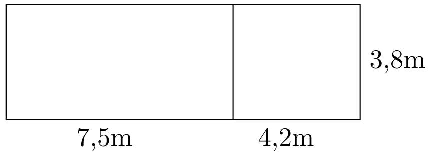
y para resolverla utilizan calculadora. Juan, que utiliza una calculadora científica, obtiene que el resultado es 32; pero Pedro, que utiliza una calculadora que no es científica, obtiene 42. ¿Por qué obtuvieron resultados distintos si ambos ingresaron la misma cuenta en la calculadora, y en el mismo orden en el que está escrita? Observemos que para obtener como resultado 32 la calculadora de Juan primero resolvió la multiplicación, $9 \cdot 3 = 27$, y luego efectuó la suma, $5 + 27 = 32$. En cambio, la calculadora (no científica) de Pedro organizó el cálculo de otra manera; primero resolvió la suma $5 + 9 = 14$ y luego al resultado lo multiplicó por 3 obteniendo el resultado $14 \cdot 3 = 42$. El orden seguido, en cada caso, es distinto y esto explica la discrepancia en los resultados.

La calculadora científica organiza los cálculos siguiendo la convención tradicional sobre la jerarquía de las operaciones (las multiplicaciones preceden a las sumas y restas) y obtuvo el resultado correcto. La calculadora no científica proporcionó un resultado incorrecto debido a que organizó el cálculo operando con los datos a medida que se los ingresa calculando de hecho el resultado de

$$(5 + 9) \cdot 3 \ .$$

En general, las calculadoras científicas resuelven las operaciones combinadas siguiendo un orden establecido de manera convencional. En lo que sigue trabajaremos sobre esta convención, discutiremos también sobre el uso de paréntesis y cómo afectan al orden de las operaciones.

Ejemplo 28. Un chacarero dispone de un terreno rectangular de 3,8 metros de largo que está dividido, a su vez, en dos parcelas rectangulares menores que comparten el largo de 3,8 m. Una de las parcelas tiene un ancho de 7,5 metros y tiene sembrado berenjenas. En la otra, de 4,2 metros de ancho, ha sembrado lechugas.



¿Cuál es el área total del terreno? ¿Cómo calcula dicha área involucrando las áreas de las parcelas?

Resolución: Para poder resolver este problema debemos recordar, antes que nada, cuál es la "fórmula" que nos permite calcular el área de un rectángulo de "base" b y "altura" h (donde b y h indican las longitudes de cada uno de esos lados).

El área de dicho rectángulo se calcula haciendo el producto de la medida de la base por la de la altura, es decir, el área A del rectángulo resulta ser

$$A = b \cdot h.$$

Utilizando esta regla para calcular áreas de rectángulos, ya puede resolverse fácilmente el problema del chacarero. Para calcular el área total, tenemos en cuenta que ambos rectángulos, correspondientes a las parcelas, comparten la altura y que la base del terreno es la suma de las bases de las parcelas

$$A = 3,8 \cdot (7,5 + 4,2)\text{m}^2 = 3,8 \cdot 11,7\text{m}^2 = 44,46\text{m}^2,$$

es decir, $A = 44,46\text{m}^2$.

Para calcular el área del total involucrando las áreas de las parcelas, calculamos cada una de ellas y luego las sumamos

$$\text{Área destinada a berenjenas es } A = 3,8 \cdot 7,5\text{m}^2 = 28,5\text{m}^2$$

la unidad en la que se mide esta área es el "metro cuadrado", que es una unidad de superficie, dado que cada una de las medidas que se multiplican para calcularla tiene al metro como unidad. De este modo, el área de dicha parcela es $A = 28,5\ \text{m}^2$. Por otro lado, y haciendo el mismo tipo de cuenta, se observa que el área de la parcela destinada a la lechuga es $A = 3,8 \cdot 4,2\text{m}^2 = 15,96\text{m}^2$, es decir, $A = 15,96\ \text{m}^2$. Por último, el área total del terreno puede obtenerse haciendo

$$A = 3,8 \cdot 7,5\text{m}^2 + 3,8 \cdot 4,2\text{m}^2 = 28,5\text{m}^2 + 15,96\text{m}^2 = 44,46\text{m}^2\ .$$

Observar que si a las tres áreas las llamamos A, cuando hablemos del área A no sabremos si nos estamos refiriendo a una u otra de las áreas. Para evitar ese inconveniente, llamamos a cada una con un nombre distinto, por ejemplo, el área de la parcela destinada a las berenjenas, en vez de llamarla A, podemos llamarla A_B, entonces al área del sector de las lechugas podemos llamarla A_L y al área total del terreno A_T. De este modo, utilizando esta notación tenemos:

$$A_B = 28,5\ \text{m}^2, \quad A_L = 15,96\ \text{m}^2 \quad \text{y} \quad A_T = 44,46\ \text{m}^2\ .$$

Es decir $A_T = A_B + A_L$. Esto que puede resultar sencillo y "obvio", no es un detalle menor...involucra algunos conceptos que son muy utilizados en matemática. Observemos que para calcular A_T hemos hecho el siguiente cálculo:

$$A_T = 3,8 \cdot (7,5 + 4,2)\mathrm{m}^2$$

y que, por otro lado, hemos hecho

$$A_B = 3,8 \cdot 7,5\mathrm{m}^2 \text{ y } A_L = 3,8 \cdot 4,2\mathrm{m}^2 \ .$$

Al decir que $A_T = A_B + A_L$ estamos diciendo que da lo mismo hacer

$$3,8 \cdot (7,5 + 4,2)\mathrm{m}^2 \text{ que hacer } 3,8 \cdot 7,5\mathrm{m}^2 + 3,8 \cdot 4,2\mathrm{m}^2$$

(que es la suma de A_B y A_L), es decir, que vale la igualdad:

$$3,8 \cdot (7,5 + 4,2)\mathrm{m}^2 = 3,8 \cdot 7,5\mathrm{m}^2 + 3,8 \cdot 4,2\mathrm{m}^2 \ .$$

Esta igualdad es un ejemplo de la conocida "propiedad distributiva" del producto respecto de la suma de números.

Propiedad distributiva. Dados tres números cualesquiera, a, b y c, se verifica que

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ . \tag{4.1}$$

Por otro lado, sabemos que las igualdades pueden leerse "en dos direcciones", de derecha a izquierda y de izquierda a derecha, dicho en símbolos, $x = y$ es lo mismo que decir $y = x$. En el caso de la igualdad planteada en la propiedad distributiva, se tiene que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ es lo mismo que decir que $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$. En este caso, estamos mencionando la misma igualdad que se propone en la propiedad distributiva pero escrita en el otro sentido adquiriendo, de esa forma, "el formato" de otra propiedad conocida: la de sacar factor común.

En resumen, las propiedad distributiva y el factor común son dos lecturas de la igualdad (4.1). En el caso del problema que hemos planteado al comienzo de esta sección, una u otra lectura de la misma propiedad nos da la posibilidad de hacer el mismo cálculo (el del área total del terreno) de dos maneras "diferentes": en un caso, sumar dos áreas (segundo miembro de la igualdad planteada en la propiedad distributiva) y en el otro, calcular una única área en donde uno de los lados del rectángulo (terreno) se obtiene como suma de los otros dos lados (primer miembro en la propiedad distributiva).

4.2 Uso de paréntesis y jerarquía de las operaciones

Se discutirá acerca de estos temas sobre la base de los siguientes ejercicios resueltos.

Ejercicio resuelto 5. En cada caso, relacionar con $=$ o $\neq$ las expresiones propuestas y justificar:

(a) $-4^2 \ldots\ldots (-4)^2$

(b) $1 - 2 \cdot \frac{5}{4} \ldots\ldots (1 - 2) \cdot \frac{5}{4}$

(c) $\dfrac{2^3}{4 - \frac{1}{2}} \ldots\ldots 2^3 : \left(4 - \dfrac{1}{2}\right)$

Resolución: Para decidir si las expresiones propuestas en cada inciso son iguales o distintas efectuemos los cálculos involucrados en cada una y comparemos los resultados obtenidos. En el inciso a) para operar con -4^2 debemos reflexionar sobre dos cuestiones: cómo interpretar el signo menos delante de la potencia 4^2 y en qué orden operar. El signo menos delante de la potencia 4^2 se interpreta como un -1 multiplicando a dicha expresión, de manera que se piensa de la siguiente forma $-4^2 = (-1)\cdot 4^2$. Esta forma de escribir el cálculo destaca que la base de la potencia es 4 y no -4. En cuanto al segundo aspecto debemos tener presente la *regla de jerarquía* para las operaciones, que establece el orden en el que se realizan las operaciones involucradas en un cálculo combinado:

- En primer lugar se resuelven las potencias.
- Luego, las operaciones de multiplicación y división.
- Finalmente, las operaciones de suma y resta

Resolvamos el cálculo partiendo de la igualdad $-4^2 = (-1)\cdot 4^2$ y tomando en cuenta la regla de jerarquía mencionada. El orden a seguir es primero resolver la potencia y luego la multiplicación. De manera que el desarrollo es

$$-4^2 = (-1)\cdot 4^2 = (-1)\cdot 4\cdot 4 = -16 \ .$$

Consideremos ahora el segundo cálculo $(-4)^2$. En éste, los paréntesis indican que la base de la potencia es -4. Además, estarían estableciendo un orden en las operaciones distinto del referido en la regla enunciada anteriormente. Si bien en este caso no hay operaciones por resolver dentro de los paréntesis, debe tenerse en cuenta que, en caso de haberlas, el orden impuesto sería primero resolver dichas operaciones y luego elevar al cuadrado.
Resolvamos el cálculo: $(-4)^2 = (-4)\cdot(-4) = 16$.

Los resultados obtenidos en cada caso son distintos. Ahora podemos dar una respuesta:

Respuesta: Las expresiones son distintas puesto que $-4^2 = -16$, $(-4)^2 = 16$ y $16 \neq -16$. Por ello completamos $-4^2 \neq (-4)^2$.

En el inciso b) para resolver $1 - 2\cdot\frac{5}{4}$ debemos tener en cuenta la regla de jerarquía. De esta manera, primero resolvemos el producto y luego realizamos la resta:

$$1 - 2\cdot\frac{5}{4} = 1 - \frac{5}{2} = \frac{2-5}{2} = \frac{-3}{2} \ .$$

La segunda expresión, $(1-2)\cdot\frac{5}{4}$, presenta paréntesis, los cuales indican una jerarquía de las operaciones distinta a la anterior; podríamos resolver de distintas formas pero en cualquiera de ellas debemos primero trabajar con los paréntesis. En este caso, resolvemos de la siguiente manera: primero realizamos la resta dentro los paréntesis y luego efectuamos la multiplicación:

$$(1-2)\cdot\frac{5}{4} = (-1)\cdot\frac{5}{4} = \frac{-5}{4} \ .$$

Los resultados obtenidos son distintos, por lo tanto las expresiones también.

Respuesta: Las expresiones son distintas puesto que $1 - 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{-3}{2}$, $(1 - 2) \cdot \frac{5}{4} = \frac{-5}{4}$ y $\frac{-3}{2} \neq \frac{-5}{4}$. Por ello completamos $1 - 2 \cdot \frac{5}{4} \neq (1 - 2) \cdot \frac{5}{4}$.

En el inciso c) para simplificar la expresión $\dfrac{2^3}{4 - \frac{1}{2}}$ el orden a seguir es primero resolver las operaciones involucradas en el numerador y en el denominador y luego realizar la división. Observemos que contrariamente a lo que establece la *regla de jerarquía*, se realiza la resta del denominador antes del cociente; esto es así puesto que el formato de fracción presentado es equivalente a $2^3 : (4 - \frac{1}{2})$, en donde se utiliza el signo ":" en lugar de la línea de fracción para denotar la división. Es importante destacar que en este último formato sí es necesario introducir paréntesis pues no es lo mismo escribir $2^3 : (4 - \frac{1}{2})$ que $2^3 : 4 - \frac{1}{2}$.

A partir de lo dicho anteriormente vemos que no es necesario resolver el cálculo de la segunda expresión pues es evidente que es igual a la primera.

Respuesta: las expresiones propuestas son iguales y por ello completamos

$$\frac{2^3}{4 - \frac{1}{2}} = 2^3 : \left(4 - \frac{1}{2}\right) .$$

A modo de práctica simplifiquemos esta expresión:

$$\frac{2^3}{4 - \frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{8-1}{2}} = \frac{8}{7/2} = 8 \cdot \frac{2}{7} = \frac{16}{7} .$$

Observación: En los distintos casos vimos que los paréntesis cumplen la función de precisar la jerarquía de las operaciones, ya sea para

- determinar cuál es la base de una potencia,
- determinar un factor de un producto,
- determinar un divisor en un cociente.

Ejercicio resuelto 6. ¿Al cálculo $-\dfrac{2 - \frac{1}{4}}{3}$ lo reescribiría como $-\dfrac{2}{3} - \dfrac{1/4}{3}$ o como $-\dfrac{2}{3} + \dfrac{1/4}{3}$?

Resolución: En este ítem nos preguntan cuál de las dos expresiones propuestas podría ser una manera válida de reescribir el cálculo $-\dfrac{2 - \frac{1}{4}}{3}$. Para responder deberíamos establecer si es posible transformar la expresión dada en alguna de las dos expresiones propuestas aplicando propiedades y procedimientos válidos. En primer lugar observamos que en la expresión dada hay una fracción con denominador 3 y en las expresiones propuestas aparecen dos fracciones con ese denominador. Esto sugiere la utilización de un procedimiento que comúnmente llamamos "distribuir el denominador" para transformar la primera expresión. Analicemos qué significa dicho procedimiento: la expresión $-\dfrac{2-\frac{1}{4}}{3}$ es igual a $-(2-\dfrac{1}{4})\dfrac{1}{3}$ puesto que dividir por 3 es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{3}$. Aún más, podríamos escribirla de la siguiente manera $-\dfrac{1}{3}(2-\dfrac{1}{4})$. Observemos que al plantearlo de esta manera, resulta evidente que $-\frac{1}{3}$ multiplica a la resta $(2-\frac{1}{4})$. De manera que resulta válido usar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma

$$-(2-\frac{1}{4})\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(2-\frac{1}{4}) = -\frac{2}{3} + \frac{1/4}{3} \ .$$

De esta manera vemos que una forma válida de reescribir el cálculo dado es con la segunda de las expresiones propuestas.
Respuesta: Al cálculo $-(2-\frac{1}{4})\frac{1}{3}$ lo reescribiría como $-\frac{2}{3}+\frac{1/4}{3}$.

Orden de las operaciones en la resolución de cálculos combinados. A partir de los ejemplos resueltos repasamos la regla que establece el orden para resolver las operaciones involucradas en un cálculo combinado. También, recordamos que dicho orden se altera con la presencia de paréntesis, y en ese nuevo orden, la prioridad está en la resolución de los mismos. Como conclusión podemos enunciar la siguiente regla de jerarquía, que contempla la presencia de paréntesis.

Regla de jerarquía. En primer lugar se resuelven las operaciones encerradas entre paréntesis; en segundo lugar las potencias; en tercer lugar, las multiplicaciones y divisiones, y por último, se efectúan las sumas y restas.

Resolución y planteo de cálculos combinados.

Ejercicio resuelto 7. Un granjero cultiva tomate, lechuga y berenjena en un terreno rectangular que tiene un área de 350m^2. Para el cultivo de tomate destina la quinta parte del terreno, para cultivar lechuga utiliza tres cuartos del terreno restante y en la porción que queda planta berenjena, ¿cuál es el área de la porción destinada al cultivo de berenjena?

Resolución: Para calcular la superficie de la porción de terreno en la que cultiva berenjena debemos realizar el siguiente cálculo: al área total restarle la suma de las áreas de las porciones en las que planta tomate y lechuga. Para calcular el área de la parte del terreno en la que planta tomate debemos obtener la quinta parte del área total, o sea, $\frac{1}{5}\cdot 350$.

Para determinar el área de la porción destinada al cultivo de lechuga debemos calcular las tres cuartas partes del área del terreno restante que, teniendo en cuenta que ya hemos quitado una quinta parte, representa cuatro quintos del total

$$350 - \frac{1}{5}\cdot 350 = \frac{4}{5}\cdot 350 \ .$$

De esta manera, para obtener el área de la parte en la que cultiva lechuga debemos calcular "tres cuartos de cuatro quintos de 350", es decir: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350$. De este modo, el área de la porción de terreno utilizada con la siembra de tomate y lechuga es $\frac{1}{5} \cdot 350 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350$.

Teniendo en cuenta el desarrollo anterior planteamos la siguiente expresión, que permite calcular el área de la porción de terreno en la que cultiva berenjena

$$350 - \left(\frac{1}{5} \cdot 350 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350 \right) \ .$$

Existen diversas formas de resolver el cálculo planteado, aquí presentaremos solo dos de ellas. A continuación desarrollamos cada una en un formato de tabla en la que distinguimos entre lo que pensamos al momento de encarar la resolución y lo que planteamos por escrito.

Resolución (forma 1):

<table>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Primero observamos que la expresión está formada por dos términos relacionados por una resta. Siguiendo la regla de jerarquía, ésta será la última operación a resolver. Manteniendo esta estructura, la estrategia de resolución será, en primer lugar, resolver cada término, y, por último, realizar la resta entre ellos.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td colspan="2">$350 - \left(\frac{1}{5} \cdot 350 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350 \right)$</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">En el primer término no hay operaciones para resolver. El segundo término, delimitado por paréntesis, consta de una suma de dos términos. Para resolverlo comenzamos obteniendo, en cálculos auxiliares, el resultado de cada uno de los términos y luego efectúo la suma entre los resultados obtenidos. Finalmente, realizamos la resta obteniendo así el resultado final.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$= 350 - \left(\frac{1}{5} \cdot 350 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350 \right) =$
$= 350 - (70 + 210) =$
$= 350 - 280 = 70$</td><td>Cálculos auxiliares
$\frac{1}{5} \cdot 350 = 70$
$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350 = 210$</td></tr>
<tr><td>Explicitación de la respuesta</td><td colspan="2">*Respuesta:* El granjero planta berenjena en una porción de terreno de $70\mathrm{m}^2$</td></tr>
</table>

Resolución (forma 2):

Explicación	Primero observamos que la expresión está formada por dos términos relacionados por una resta. Siguiendo la regla de jerarquía, ésta será la última operación a resolver. Dado que el segundo término está delimitado por paréntesis, la estrategia de resolución será, en primer lugar, eliminar los paréntesis, aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma; luego, resolver cada término (ahora serán tres términos en lugar de dos) y, finalmente, realizar las sumas o restas, según corresponda, entre los resultados de cada término.	
Planteo	$350 - \left(\frac{1}{5} \cdot 350 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350\right)$	
Explicación	Para eliminar los paréntesis recurrimos a la mencionada propiedad distributiva. Al aplicarla consideramos que el número que multiplica a cada término de la suma es -1. En cálculos auxiliares planteamos el uso de dicha propiedad y obtenemos los resultados de cada término. Para obtener el resultado final realizamos las sumas y restas entre los resultados de los tres términos.	
Planteo	$350 - \frac{1}{5} \cdot 350 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350 =$ $= 350 - 70 - 210 =$ $= 70$	Cálculos auxiliares $* \; -\left(\frac{1}{5} \cdot 350 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350\right) =$ $= -\frac{1}{5} \cdot 350 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350$ $* \; \frac{1}{5} \cdot 350 = \frac{350}{5} = 70$ $* \; \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 350 = 3 \cdot \frac{350}{5} = 210$

Observemos que en ambas resoluciones seguimos lo establecido en la regla de jerarquía de las operaciones pues trabajamos en primer lugar con los paréntesis. La diferencia es que en el primer caso los mantuvimos y en el segundo, los eliminamos utilizando una propiedad.

Ejercicio resuelto 8. Resolver el siguiente cálculo combinado

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \left(\frac{1}{2}\right)^{5} - \frac{(2 + \frac{1}{2})^2}{(1 - \frac{1}{5})^{-1}} \,.$$

Comparar los pasos de la resolución que se expone a continuación, con aquellos que provee Photomath. ¿Hay coincidencias?

Explicación	La expresión está formada por tres términos relacionados por sumas y restas. Siguiendo la regla de jerarquía, la estrategia será obtener el resultado de cada uno de los términos y, luego, sumarlos y restarlos para obtener el resultado final.	
Planteo	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5}-\dfrac{(2+\frac{1}{2})^2}{(1-\frac{1}{5})^{-1}}\,.$	
Explicación	En el primer término hay una potencia con exponente negativo. Utilizamos la definición: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ y la propiedad distributiva de la potencia respecto del cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.	
Planteo	$\frac{9}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}-\frac{(2+\frac{1}{2})^2}{(1-\frac{1}{5})^{-1}}\,.$	cálculos auxiliares $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$
Explicación	En el segundo término observamos que hay una multiplicación de potencias de igual base. Aplicamos la propiedad $a^{m+n}=a^ma^n$ y la propiedad distributiva de la potencia respecto del cociente. Resolvemos en cálculos auxiliares aplicando ambas propiedades y obtenemos el resultado del segundo término.	
Planteo	$\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{(2+\frac{1}{2})^2}{(1-\frac{1}{5})^{-1}}\,.$	Cálculos auxiliares $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1^2}{2^2}=\frac{1}{4}$
Explicación	En el tercer término hay un cociente de potencias. La resolución la realizaré en varios pasos y la estrategia será: resolver el numerador, el denominador por separado, y luego, realizar el cociente entre ambos resultados. En el numerador, primero resuelvo la suma y, luego, al resultado lo elevamos al cuadrado, usando la propiedad distributiva de la potencia respecto del cociente. Desarrollamos este planteo en cálculos auxiliares y obtenemos el resultado del numerador. En el denominador, primero resuelvo la resta y, luego, al resultado lo elevo a la -1, aplicando la definición de potencia con exponente negativo. Desarrollamos este planteo en cálculos auxiliares y obtenemos el resultado del denominador. Reemplazamos los resultados parciales.	
Planteo	$\frac{9}{4}+\frac{1}{4}-\frac{25/4}{5/4}$	Cálculos auxiliares $(2+\frac{1}{2})^2=\left(\frac{4+1}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5^2}{2^2}=\frac{25}{4}$ $(1-\frac{1}{5})^{-1}=\left(\frac{5-1}{5}\right)^{-1}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{4}$

Explicación	Queda un cociente de dos fracciones y para resolverlo aplicamos la regla que establece que hay que multiplicar la fracción del numerador por la inversa de la fracción del denominador: $\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. En este caso, la fracción del denominador es $\frac{5}{4}$, por lo tanto su inversa es $\frac{4}{5}$. El resultado obtenido es el correspondiente al tercer término.	
Planteo	$\frac{9}{4} + \frac{1}{4} - \frac{25/4}{5/4} =$ $\frac{10}{4} - 5 = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$	$\frac{25/4}{5/4} = \frac{25}{4} \cdot \frac{4}{5} = 5$
Respuesta: El resultado del cálculo planteado es $-\frac{5}{2}$.		

Trabajo práctico 8

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Qué dice la propiedad distributiva? Usarla para calcular (sin calculadora) $(2 - 3) \cdot 4$. Responder, sin calcular, si es cierto que $5 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 5 \cdot (4 - 3)$.

(b) Dar una explicación a alguien que no sabe mucho de matemática de cómo resolver correctamente un cálculo combinado en el que aparecen las operaciones de resta, potenciación y división. ¿Qué recomendaciones y sugerencias le darías?.

(c) ¿Qué se usa para cambiar el orden en las operaciones en un cálculo?

(d) ¿Qué dice la "regla de jerarquía"?

Ejercicio 2. María y Juana toman un taxi y realizan un viaje de 8 minutos. El taxista les informa que la bajada de bandera es de $\$7,5$ y que cada minuto de viaje cuesta $\$2,5$. Tanto Juana como María ingresan en sus calculadoras la siguiente cuenta:

$$7,5 \quad \boxed{+} \quad 2,5 \quad \boxed{\times} \quad 8 \quad \boxed{=}$$

María tiene una calculadora científica y obtiene como resultado $27,5$, en cambio, Juana, que tiene un calculadora común, obtiene como resultado 80.
¿Cuál de las dos respuestas es la correcta?¿Cómo organizó la cuenta cada calculadora?

Ejercicio 3. Al cálculo $-\dfrac{3-\frac{1}{5}}{4}$, lo reescribiría como $-\dfrac{3}{4} - \dfrac{\frac{1}{5}}{4}$ o como $-\dfrac{3}{4} + \dfrac{\frac{1}{5}}{4}$.

Ejercicio 4. Una pareja compra un terreno de 20 metros de ancho y 40 metros de largo. Deciden destinar la cuarta parte del terreno a la construcción de una casa y el 20% del terreno restante para el quincho y la pileta. Finalmente, lo que resta del terreno es destinado a jardín y huerta.

(a) Proponer una expresión que permita obtener el área de la porción de terreno destinada a jardín y huerta. (Aclaración: se espera que planteen *un único* cálculo que explicite *todas* las operaciones necesarias para obtener la superficie pedida).

(b) Si para la huerta se utiliza la tercera parte de la superficie destinada a jardín y huerta, ¿qué porcentaje del terreno total representa dicha porción?

Ejercicio 5. En cada caso relacionar con $=$ o $\neq$ las expresiones propuestas y justificar

(a) $-5^2 \ldots (-5)^2$ (b) $\dfrac{1-\frac{1}{3}}{2^3} \ldots 1 - \dfrac{1}{3} : 2^3$

Ejercicio 6. Dada la expresión numérica $-\frac{2+5^2}{3}$,

(a) Realizar las operaciones indicadas en la expresión explicitando el orden seguido al operar.

(b) ¿Cómo reescribiría la expresión usando el símbolo ":" (de división) para indicar el cociente en lugar de la línea de fracción?

(c) Modificar la jerarquía de las operaciones indicadas para que el resultado sea, en un caso, igual $\frac{49}{9}$ y en otro igual a $-\frac{49}{3}$. Justificar la respuesta en cada caso.

Ejercicio 7. Expresar en forma de cálculo combinado las siguientes frases y resolver

(a) "La doceava parte del cuadrado de la suma entre un tercio y un cuarto"

(b) "El doble del anterior de 7 sumado al cuadrado de 8".

Ejercicio 8. Debido a problemas financieros, el granjero del ejercicio resuelto decide alquilar a un vecino las porciones de terreno en las que planta tomate y lechuga. Considerando que alquila a un precio de \$16 el m^2 y que gasta \$800 en concepto de impuestos, determinar cuál o cuáles de los siguientes cálculos permiten obtener la ganancia del granjero:

(a) $16\dfrac{1}{5} \cdot 350 + \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot 350 - 800$.

(b) $16\left(\dfrac{1}{5} \cdot 350 + \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot 350\right) - 800$.

(c) $16 \cdot \dfrac{1}{5} \cdot 350 + 16 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot 350 - 800$.

Resolver cada uno de los cálculos.

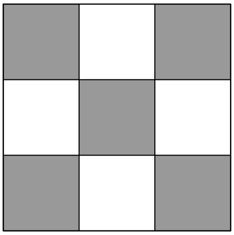
Ejercicio 9. Resolver los siguientes cálculos combinados y expresar la respuesta como una fracción irreducible.

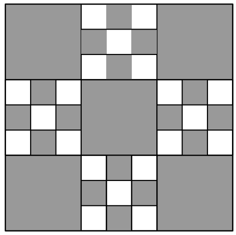
(a) $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2 - (-2)^2 \cdot \left(1-\frac{3}{4}\right)$. (b) $\dfrac{7 \cdot \left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)}{\frac{1}{4}-2}$

(c) $\dfrac{\left(-\frac{1}{8}-1\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)^{-1}}{\frac{1}{4}-\left(1-\frac{1}{5}\right)} \div \left(2 - \dfrac{2}{11}\right)$ (d) $\dfrac{(1,\overset{\frown}{5} - 1,\overset{\frown}{2})^2}{1-\frac{1}{3}} + 0,\overset{\frown}{18} \cdot 1,1 - \dfrac{0,0\overset{\frown}{3}}{0,5}$

(e) $\dfrac{(-3)\cdot(-3+1)+\frac{4}{5}}{(4-\frac{2}{3})(4+\frac{2}{3})}$

Ejercicio 10. Proponer un único cálculo que indique qué proporción del área del cuadrado está sombreada en las siguientes figuras. Resolverlo.

(a)


(b)


5 Aproximación y aritmética exacta

5.1 Desarrollo decimal, raíces y números irracionales.

Si bien el desarrollo decimal ofrece la ventaja de simplificar los cálculos en muchas ocasiones, tiene el incoveniente de introducir errores de aproximación cuando se trabaja con números con desarrollo decimal infinito o con muchas cifras. La operatoria que se realiza evitando usar los desarrollos decimales tiene como objetivo obtener resultados exactos. Ya vimos que en el caso de los números racionales, se puede obtener resultados exactos usando fracciones.

Cuando todos los números tienen un desarrollo decimal finito y corto (pocas cifras decimales), operar con el desarrollo decimal también nos da un resultado exacto. Por ejemplo, si deseamos calcular un medio más tres cuartos, podemos usar fracciones y estamos seguros de que el resultado será exacto. En efecto,

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Con el desarrollo decimal se obtiene

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 0,5 + 0,75 = 1,25.$$

Y sabemos que $\frac{5}{4} = 1,25$.

Cuando los números tienen desarrollos muy largos o infinitos, ya sea que trabajemos con lápiz y papel o con la calculadora, vamos a tender a cortar el desarrollo en algún dígito. De acuerdo con el manual, una de las calculadoras más comunes trabaja internamente con 12 dígitos exactos y muestra en la pantalla 9 dígitos exactos. Esta precisión suele ser más que suficiente para la mayoría de los cálculos que se deben hacer a lo largo de este curso, y muy probablemente a lo largo de los estudios y la vida profesional salvo para aquéllos que sigan carreras técnicas o exactas.

La costumbre de cortar todos los resultados intermedios en el segundo decimal puede producir errores grandes en los resultados finales aún en cálculos simples. A continuación se ejemplifica esto.

Ejemplo 29. Como resultado de una herencia, tres hermanos deben repartir \$500.000 en partes iguales. Es decir, a cada uno de los hermanos le corresponde un tercio de los \$500.000, por lo que, el valor exacto que le corresponde a cada hermano es el resultado de la cuenta

$$\frac{1}{3} \cdot \$500.000.$$

Vamos a mostrar diferentes tipos de operatorias.

(a) Usando fracciones tenemos un valor exacto pero que no es práctico:
$$\tfrac{1}{3} \cdot \$500.000 = \$\tfrac{500.000}{3}.$$

(b) Aproximando $\frac{1}{3}$ por $0,33$ obtenemos como valor aproximado
$$0,33 \cdot \$500.000 = \$165.000.$$

Esto nos da un poco más de información, pero, observemos que si cada hermano toma esta última suma de dinero hay una diferencia de \$5.000 entre lo que tienen los tres hermanos, $3 \cdot \$165.000 = \$495.000$, y el monto original de \$500.000. Alguien se está quedando \$5.000 extra ¿será el abogado?

Aquí, se introdujo un error al aproximar $\frac{1}{3}$ por $0,33$ al principio del cálculo. Como no tenemos control sobre ese error, este se propaga en los cálculos que siguen y la diferencia entre el resultado exacto y el que obtuvimos como respuesta no es fácil de deducir.

(c) Tomamos el valor exacto $\$\frac{500.000}{3}$ y calculamos su desarrollo decimal
$$\$\tfrac{500.000}{3} = \$166.666,6666\ldots.$$

Ahora podemos afirmar que a cada hermano le corresponde \$166.666 y la diferencia con el valor exacto no será mayor que \$1.

Esta es la respuesta más satisfactoria. Se mantuvieron los cálculos exactos todo lo que se pudo y se pasó al desarrollo decimal al final.

Raíces y números irracionales

Como sabemos (ver sección 3.2), un número racional tiene desarrollo *decimal finito o infinito periódico*, pero es fácil “crear” desarrollos decimales infinitos y no periódicos. Por ejemplo,

$$x = 23,4567891011121314151617 18\ldots$$

(los puntos suspensivos indican que se continúa la pauta de ir agregando sucesivamente números naturales consecutivos).

Este número NO es racional (ver el teorema sobre números racionales y desarrollo decimal). A este tipo de números se los llama *irracionales*.

Números irracionales y números reales.

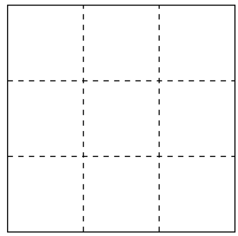
Definición: *Se llaman irracionales a todos los números cuyo desarrollo decimal es infinito y no periódico.*

Los números racionales junto con los irracionales conforman el conjunto de los números reales que se simboliza $\mathbb{R}$ y son los números representables en la recta.

Un número como el de arriba es una construcción artificial y operar con él de forma exacta es muy complicado. Hay otros números irracionales que surgen de forma natural e inevitable en numerosas construcciones geométricas como veremos más adelante.

Raíces cuadradas. Si un cuadrado tiene área 9 ¿Cuál es la longitud de sus lados? El área de un cuadrado de lado ℓ es ℓ^2. Para responder a la pregunta hay que encontrar un número positivo ℓ tal que

$$\ell^2 = 9 \ .$$



ℓ

La solución es $\ell = 3$ y se dice que 3 es la raíz cuadrada de 9. En símbolos se escribe

$$\sqrt{9} = 3 \ .$$

En este ejemplo tuvimos suerte, 3 es un número entero. Notar que también $(-3)^2 = 9$, pero descartamos esta posibilidad pues -3 no puede ser la longitud del lado de un cuadrado.

El número $\sqrt{2}$. Si queremos construir un cuadrado cuya área sea 2, debemos encontrar un número positivo ℓ tal que

$$\ell^2 = 2 \ .$$

Por analogía a lo anterior, a ese número lo llamamos la raíz cuadrada de 2 y se escribe $\ell = \sqrt{2}$.

¿Qué cantidad es $\sqrt{2}$?, ¿entre qué números puedo ubicarlo en la recta? Para responder esto podemos recurrir al desarrollo decimal del mismo.

Desarrollo decimal de $\sqrt{2}$. Por un momento, supongamos que no tenemos la calculadora e intentemos descubrir el desarrollo decimal. Como $1^2 = 1$ y $2^2 = 4$ entonces tiene que pasar que el lado del cuadrado que estamos buscando quede comprendido entre 1 y 2, es decir,

$$1 < \sqrt{2} < 2 \ .$$

Probando elevar al cuadrado los números $1,1,\ 1,2,\ \ldots 1,9$ nos encontramos con que $1,4^2 = 1,96$ y $1,5^2 = 2,25$, podemos deducir que

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \ .$$

Volvamos al siglo XXI. Una calculadora con una precisión de dos dígitos nos daría como valor aproximado de $\sqrt{2}$ el número $1,41$, pero este valor no es exacto pues

$$1,41^2 = 1,9881\,.$$

Una calculadora con una precisión de cuatro dígitos nos daría como valor aproximado de $\sqrt{2}$ el número $1,4142$, pero este valor no es exacto pues

$$1,4142^2 = 1,99996164\,.$$

Muchas calculadoras al efectuar la raíz cuadrada de 2 dan el valor $1,414213562$. Si elevamos el número $1,414213562$ al cuadrado haciendo la multiplicación a mano nos damos cuenta que el último dígito del producto debe ser 4.

$$\begin{array}{rr} & 1,414213562 \\ \times & \\ & 1,414213562 \\ \hline & 4 \\ & \text{- - - - - - - - - - - - - -} \end{array}$$

Lo que sucede es que $1,414213562$ es un *valor aproximado* de $\sqrt{2}$ y no es el *valor exacto*. Si usáramos una computadora podríamos calcular más dígitos de $\sqrt{2}$ y obtendríamos $1,4142\ldots d$ siendo d el último dígito no nulo de la derecha, pero usando el mismo razonamiento de recién d no puede valer ni 1, ni 2, ni 3 etc. De lo que se concluye que el desarrollo decimal de $\sqrt{2}$ no puede terminar.

Lo discutido anteriormente nos demuestra que el desarrollo decimal de $\sqrt{2}$ **no** puede ser finito, luego es infinito; pero no sabemos con lo hecho si es periódico o no.

Con un poco de ingenio, se puede demostrar que el número $\sqrt{2}$ es irracional y esto implica que su desarrollo decimal es infinito y no periódico, y que $\sqrt{2}$ no se puede escribir como una fracción. La argumentación que justifica la validez de esta afirmación excede los objetivos del curso.

Otros números irracionales son los siguientes:

(a) El número π que es la longitud de la circunferencia de diámetro 1. Un valor aproximado de π es $3,1416$.

(b) El único número que elevado al cubo da 2 se designa por $\sqrt[3]{2}$. Además este número es la longitud de la arista de un cubo de volumen 2. Un valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$ es $1,2599$.

(c) Las siguientes raíces cuadradas $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, etc.

5.2 Cálculos con raíces. Propiedades

En esta sección estudiamos como realizar cálculos cuando intervienen raíces. Por supuesto, todas las reglas sobre la prioridad de las operaciones y el uso de paréntesis siguen vigentes.

Raíces en general

- Para un número a positivo o cero, se llama raíz cuadrada de a y se escribe $b = \sqrt{a}$ al único número real no negativo cuyo cuadrado es a.

- Para un número natural $n \geq 2$, la *raíz enésima* de un número a se denota $\sqrt[n]{a}$ y se define de la siguiente manera:

  Si n es impar,
  $$b = \sqrt[n]{a} \quad \text{si} \quad b^n = a \tag{5.2}$$

  Si n es par y $a \geq 0$,
  $$b = \sqrt[n]{a} \quad \text{si} \quad b^n = a \quad \text{y} \quad b \geq 0 \tag{5.3}$$

  El número a se llama radicando y n, índice de la raíz.

Comentarios y ejemplos

- Notemos que $\sqrt[4]{-16}$ no tiene sentido pues cualquier número real elevado a una potencia par da un resultado positivo. Esto explica por qué si n es par, a debe ser positivo o cero.

- La longitud b de la arista de un cubo cuyo volumen es 8 debe cumplir con la ecuación
  $$b^3 = 8 \ .$$
  Se deduce que $b = \sqrt[3]{8} = 2$ pues $2^3 = 8$. Cuando el índice de la raíz es igual a 3, a la cantidad $\sqrt[3]{a}$ se la llama raíz cúbica de a.

- Si n es impar, el radicando puede ser cualquier número. Por ejemplo,
  $$\sqrt[3]{-8} = -2 \text{ pues } (-2)^3 = -8 \ .$$

Observación: La raíz enésima de un número puede expresarse como potencia con exponente fraccionario en el caso de que a sea un número positivo:
$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} \ .$$

Ejemplo 30. $\sqrt[3]{5}^8 = 5^{\frac{8}{3}} \qquad \sqrt[2]{9}^3 = 9^{\frac{3}{2}}$

Son válidas todas las propiedades de la potenciación explicadas en la sección 1.4.

Ejercicio resuelto 9.

(a) ¿Es correcto afirmar que el resultado de $\sqrt{4}$ es ± 2 ?

No es correcto. De acuerdo a la definición, $\sqrt{4}$ es el número no negativo que elevado al cuadrado da 4, que en este caso es 2.

(b) ¿Es cierto que para cualquier valor de a es válida la igualdad $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^{\,2}$?

No es cierto. Como estamos negando una afirmación de carácter general, para justificar nuestra respuesta debemos dar un contraejemplo. Es decir, encontrar un valor de a para el cual la igualdad no es válida.

Contraejemplo: si $a = -2$, el segundo miembro de la igualdad queda $\sqrt{a}^{\,2} = \sqrt{-2}^{\,2}$. Esta expresión no tiene sentido pues cualquier número no nulo elevado a una potencia par es positivo. En cambio, $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

En general, recordemos que las raíces de índice par con radicando negativo no tienen sentido. Sin embargo, la igualdad $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^{\,2}$ es válida si a es positivo o cero.

Ejercicio resuelto 10. Simplificar, usando las propiedades, las siguientes expresiones.

(a) $(2+\sqrt{3})^2 + \sqrt{27}$ (b) $(\sqrt[3]{7})^5$

Resolución:

(a) Resolvemos la cuenta $(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{27}$. Es decir operamos sobre la expresión para obtener otra más simplificada, con menos términos y menos operaciones indicadas.

<table>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Operamos en la expresión, teniendo en cuenta que:
• el cuadrado de un binomio se desarrolla haciendo uso de la propiedad distributiva
• por definición de raíz cuadrada, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$
• Los términos que tienen la misma raíz pueden sumarse o restarse entre sí</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{27}$
$= (2+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})+\sqrt{27}$</td><td>Cálculos auxiliares
$(2+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})$
$= 2\cdot 2 + 2\cdot\sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot 2 + \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$
$= 4 + 2\times 2\cdot\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\cdot\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td colspan="2">Reemplazo en la expresión el resultado obtenido al desarrollar el cuadrado del binomio.
$$(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{27} = 7 + 4\cdot\sqrt{3}+\sqrt{27}.$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Explicación</td><td colspan="2">Para poder seguir operando con términos que tienen raíces irracionales, debemos ver si la misma raíz irracional puede extraerse como factor común. No es el caso por ahora... en un término tenemos $\sqrt{3}$ y en el otro $\sqrt{27}$. Pero si notamos que $27 = 3^3$, entonces se puede continuar operando.</td></tr>
<tr><td>Planteo</td><td>$(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{27}$
$= 7 + 4\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3^3}$</td><td>Cálculos auxiliares
$\sqrt{3^3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3\cdot\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>Planteo y respuesta</td><td colspan="2">Ahora extraemos factor común entre el segundo y tercer término:
$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{27} &= 7+4\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{3} &&= 7+(4+3)\sqrt{3}\\ &= 7+7\sqrt{3} &&= 7(1+\sqrt{3})\end{aligned}$$</td></tr>
</table>

(b) Se quiere usar que $(\sqrt[3]{7})^3 = 7$, para ello escribimos el 5 como $3+2$ usamos la propiedad sobre el producto de potencias de igual base, nos queda

$$(\sqrt[3]{7})^5 = (\sqrt[3]{7})^{3+2} = (\sqrt[3]{7})^3\cdot(\sqrt[3]{7})^2 = 7\cdot(\sqrt[3]{7})^2 = 7\sqrt[3]{49}\ .$$

Esta última expresión no se puede simplificar, nuevamente, la justificación de esta afirmación excede los objetivos del curso.

Trabajo Práctico 9

Ejercicio 1. Acerca de la lectura.

(a) ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de trabajar con fracciones y raíces en lugar de trabajar con desarrollos decimales?

(b) ¿Con qué precisión se suelen dar los montos de dinero?

(c) Indicar si las siguientes cantidades están dadas de forma exacta o aproximada.

(i) $(\frac{1}{2} - 4\sqrt{2})^2$

(ii) La suma de las cantidades $0,1324$ y $2,5431$ es $2,6755$

(iii) El área de un círculo de radio 3 es 28,27

(iv) El área de un círculo de radio 3 es 28,27433388

(v) La arista de un cubo de volumen 5 mide 1,7099.

(d) ¿Se puede escribir al número $\frac{1,23}{5,9}$ en forma de fracción? ¿Es racional?

(e) Exhiba ejemplos de números que no se pueden expresar como una fracción.

(f) ¿Cómo se definen las cantidades $\sqrt[n]{a}$ y $a^{\frac{m}{n}}$? ¿Bajo cuáles condiciones se puede calcular la raíz enésima de un número negativo?

(g) Reescribir las propiedades de la potenciación para el caso de exponentes fraccionarios (ver subsección 1.4).

Ejercicio 2. Explicar por qué las siguientes afirmaciones son incorrectas y corregirlas.

(a) $\sqrt{9} = \pm 3$.

(b) Para todo valor de a resulta $\sqrt{a^2} = a$.

Ejercicio 3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) $\sqrt{21}$ es el único número que elevado al cuadrado da 21.

(b) $\sqrt{21}$ es el único número positivo que elevado al cuadrado da 21.

(c) $\sqrt{21} = 4,58$.

Ejercicio 4. El objetivo de este ejercicio es calcular 4 cifras decimales del número $\sqrt{21}$ suponiendo que se dispone de una calculadora que solo suma, resta y multiplica.

(a) Elevando al cuadrado los números 1, 2, ... comprobar que $4^2 < 21 < 5^2$. ¿Qué puede concluir sobre $\sqrt{21}$?

(b) Elevando al cuadrado los números $4,1$; $4,2$; etc. Comprobar que

$$(4,5)^2 < 21 < (4,6)^2.$$

¿Qué puede concluir sobre $\sqrt{21}$?

(c) Reproducir este procedimiento para obtener una aproximación de 4 cifras decimales de $\sqrt{21}$. ¿Es el número obtenido igual a $\sqrt{21}$?¿Por qué?

(d) Muchas calculadoras al efectuar la raíz cuadrada de 21 dan el valor $4,582575695$. Decidir si este valor es igual o distinto de $\sqrt{21}$ elevándolo al cuadrado a mano como se muestra en la figura.

$$\begin{array}{rr} & 4,582575695 \\ \times & \\ & 4,582575695 \\ \hline & \\ & \text{- - - - - - - - - - - -} \end{array}$$

(e) Generalizar el argumento del inciso anterior y concluir que el desarrollo decimal de $\sqrt{21}$ es infinito. ¿Alcanza este argumento para afirmar que $\sqrt{21}$ es irracional?

Ejercicio 5. Multiplique en su calculadora: $10,00001 \times 9.99999$ (hay solo 5 dígitos decimales en cada factor).

- ¿El resultado es 100?
- ¿Obtendríamos el mismo resultado multiplicando a mano?

$$\begin{array}{r} 10,00001 \\ \times \quad \\ 9,99999 \\ \hline \text{- - - - - - - -} \end{array}$$

Ejercicio 6. Decidir si los números $\frac{312689}{99532}$ y $\frac{833719}{265381}$ son iguales usando la calculadora y usando el criterio de fracciones equivalentes explicado en la subsección 1.2. Representarlos en la recta numérica.

Ejercicio 7. Escribir en forma de fracción las siguientes cantidades.
(a) $\sqrt[3]{\frac{-125}{8}}$ (b) $\sqrt[4]{16}$ (c) $\frac{1}{\sqrt[2]{(-2)^2}}$ (d) $4^{-\frac{1}{2}}$ (e) $\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{7}{3}}$

Ejercicio 8.

(a) Efectuar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre los números $\sqrt{(-7)^2}$ y -3^2 (en ese orden y sin calculadora).

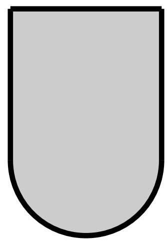
(b) ¿Cuál de esas operaciones dieron como resultado 16?

Ejercicio 9. (Este ejercicio integra el trabajo con raíces y la sección de cálculos combinados.) Simplificar la escritura de los siguientes números explicando cada paso realizado:
(a) $\left(\left(2-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-3-\frac{3}{4}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (b) $3\cdot\sqrt[4]{16^3}-\dfrac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}}{27^{-\frac{1}{3}}}$ (c) $(\frac{1}{2}-\sqrt{5})^2\cdot\sqrt[3]{125}$

Área y Perímetro

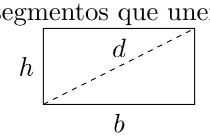
1 Medición de áreas y perímetros

Esta sección se ocupa del cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Recordemos que el perímetro es el contorno de una figura, aunque también designa la medida de ese contorno. La palabra área designa tanto la superficie comprendida dentro de un contorno como a la extensión de dicha superficie expresada en una determinada unidad de medida. En la figura, se ha demarcado el perímetro con una línea gruesa y el área está sombreada.



Algunas fórmulas que conviene recordar. Es conveniente tener presente las fórmulas que permiten calcular el área y el perímetro de las figuras más simples.

Rectángulo. Es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos. Los lados consecutivos se suelen llamar base y altura y designar con las letras b y h. Los segmentos que unen los vértices opuestos se llaman diagonales.

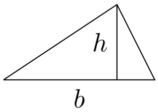


Area $= b \cdot h$ Perímetro $= 2 \cdot b + 2 \cdot h$

Recordar que un cuadrado es un rectángulo de lados iguales.

Triángulo. El triángulo es una figura plana limitada por tres segmentos que se cortan mutuamente formando tres ángulos. Se llama *triángulo equilátero* a los triángulos que tienen tres lados iguales, *triángulo isósceles* es el que tiene dos lados iguales y *triángulo escaleno* es aquel cuyos lados son desiguales. Un triángulo se llama *rectángulo* si uno de sus ángulos es recto.

Para calcular el área se elige uno de los lados como base y la altura correspondiente a ese lado es un segmento perpendicular al mismo y que contiene al el vértice opuesto.

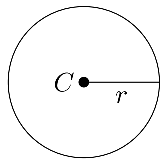


$$\text{Area} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Perímetro = suma de las longitudes de los lados

Círculo y circunferencia. Un círculo de centro C y radio r es el conjunto de todos los puntos que están a distancia a lo sumo r del centro C. Una circunferencia es el perímetro de un círculo. Todos los puntos de la circunferencia están a distancia exactamente r del centro.

El radio designa a cualquier segmento que una el centro con uno de los puntos de la circunferencia aunque también designa la medida de dicho segmento. Un diámetro es cualquiera de los segmentos que unen dos puntos de la circunferencia y pasan por el centro. También se llama diámetro a la longitud de uno de esos segmentos.

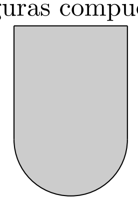


Area$= \pi \cdot r^2$

Perímetro$= 2 \cdot \pi \cdot r$

Unas palabras sobre π. El número π es la longitud de una circunferencia de diámetro 1 y es un número es irracional, es decir, su desarrollo decimal es infinito y no periódico. Las calculadoras habituales muestran hasta la octava cifra de este número aunque lo largo de la historia, ha sido un desafío para los matemáticos calcular más y más cifras de π. Actualmente, se conocen varios miles de millones de sus cifras. En los cálculos exactos o simbólicos se utiliza el símbolo π y para los cálculos aproximados, al menos para este curso, $\pi \cong 3,1416$.

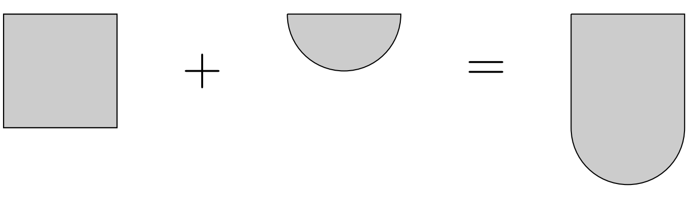
Cálculo de áreas y perímetros de figuras compuestas. En lo que sigue se ejemplifica cómo trabajar para calcular el área y el perímetro de figuras compuestas.



Ejercicio resuelto 1. La figura representada al costado está compuesta por un semicírculo y un cuadrado. Sabiendo que los lados del cuadrado miden 20cm, calcular el área y el perímetro de la figura en forma exacta y aproximada.

Resolución:

Cálculo del área. Antes de intentar calcular, se estudia cómo se descompone la figura en otras más simples. En este ejercicio las figuras que intervienen son un cuadrado y un semicírculo.



De la descomposición de arriba se deduce que

$$\text{área de la figura} = \text{área del cuadrado} + \text{área del semicírculo} \ . \tag{1.1}$$

En el enunciado del problema nos dan como dato la longitud de los lados del cuadrado a la que designamos ℓ y $\ell = 20$cm. Usando la fórmula para el área tenemos que

$$\text{área del cuadrado} = \ell^2 = (20)^2\text{cm}^2 = 400\text{cm}^2 \ .$$

El área del semicírculo es la mitad del área del círculo y para calcular el área del círculo necesitamos conocer el radio. La información que tenemos es que el diámetro del círculo es igual al lado del cuadrado y el diámetro de un círculo duplica a su radio, es decir, $\ell = 2 \cdot r$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{área del semicírculo} &= \tfrac{1}{2} \cdot \text{área del círculo} = \tfrac{1}{2}\pi \cdot r^2 \underbrace{=}_{r=\frac{\ell}{2}} \tfrac{1}{2}\pi \cdot \left(\tfrac{\ell}{2}\right)^2 \\ &\underbrace{=}_{\ell=20\text{cm}} \tfrac{1}{2}\pi \cdot \left(\tfrac{20}{2}\right)^2 \text{cm}^2 = 50 \cdot \pi \text{ cm}^2 \ .\end{aligned}$$

Finalmente, retomamos la igualdad (1.1) y, reemplazando, se obtiene el valor exacto:

$$\text{área de la figura} = \text{área del cuadrado} + \text{área del semicírculo} = 400 + 50 \cdot \pi \text{ cm}^2 \ .$$

Para conseguir el valor aproximado ingresamos el valor exacto en la calculadora* y se obtiene la siguiente aproximación $400 + 50 \cdot \pi \text{ cm}^2 \cong 557,07 \text{ cm}^2$.

Cálculo del perímetro. Para calcular el perímetro necesitamos pensar cómo se recorre el contorno de la figura:

Del recorrido propuesto se ve que el perímetro es igual a tres veces la longitud de los lados del cuadrado, a la que llamamos ℓ, más la longitud de la semicircunferencia:

$$\text{perímetro de la figura} = 3 \cdot \ell + \text{long. semicircunferencia} \ .$$

La semicircunferencia mide la mitad de lo que mide una circunferencia entera y el radio de la semicircunferencia es igual a la mitad de la longitud del lado del cuadrado

$$\text{long. semicircunferencia} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \underbrace{=}_{r=\frac{\ell}{2}} \pi \cdot \frac{\ell}{2} \ .$$

Finalmente, recordando que $\ell = 20$cm se obtiene el valor exacto del perímetro

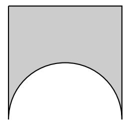
$$\text{Perímetro de la figura} = 3 \cdot 20 + 10 \cdot \pi \text{ cm} = 60 + 10 \cdot \pi \text{ cm}.$$

*Las calculadoras habituales tienen una precisión de 8 dígitos o cifras decimales.

El valor aproximado es $60 + 10 \cdot \pi$ cm $\cong 91,41$ cm.

Respuesta: El valor exacto del área es $400 + 50 \cdot \pi$ cm^2 y su valor aproximado es $557,07$ cm^2. El valor exacto del perímetro es $60 + 10 \cdot \pi$ cm y su valor aproximado es $91,41$ cm.

Trabajo Práctico 10



Ejercicio 1. En la figura representada a la derecha intervienen un semicírculo y un cuadrado.

(a) Explicar cómo fue construida la figura.

(b) Si ℓ designa la longitud del lado del cuadrado, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Justificar.

  (i) El área total se calcula sumando las áreas del cuadrado y del semicírculo.

  (ii) El área de la figura se calcula restando el área del semicírculo a la del cuadrado.

  (iii) El área del semicírculo es igual a la $\pi \cdot \ell^2$.

  (iv) El área del semicírculo es igual a la $\frac{1}{8} \cdot \pi \cdot \ell^2$.

(c) Calcular el área de la figura si los lados del cuadrado miden 15cm.

(d) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Justificar.

(i) El perímetro de la figura se calcula sumando el perímetro del cuadrado y el del semicírculo.

(ii) El perímetro del semicírculo es igual a $\ell + \frac{\pi \cdot \ell}{2}$.

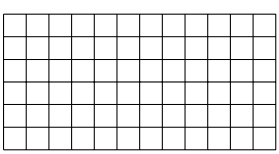
(iii) El perímetro de la figura se calcula restando el perímetro de la semicircunferencia al perímetro del cuadrado.

(e) Calcular el perímetro de la figura si los lados del cuadrado miden 15cm.

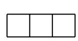
Ejercicio 2. (a) Proponer estrategias para obtener el área de figuras obtenidas al adosar una figura a otra y al recortar una figura de otra.

(b) Explicar por qué en el caso de los perímetros lo más conveniente es recorrerlos y no sumar o restar.

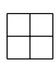
Ejercicio 3. Se quiere embaldosar el siguiente patio rectangular.



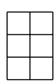
PATIO



BALDOSA A



BALDOSA B



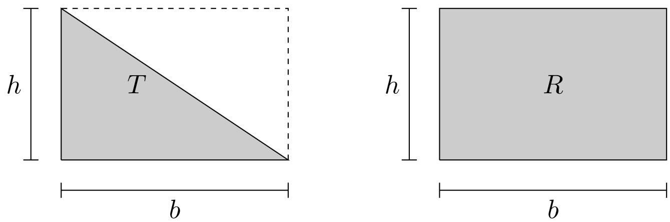
BALDOSA C

(a) Calcular cuántas baldosas de cada tipo se requieren.

(b) ¿Cuál es la relación que hay entre la cantidad de baldosas necesarias para embaldosar el patio y el área del rectángulo?

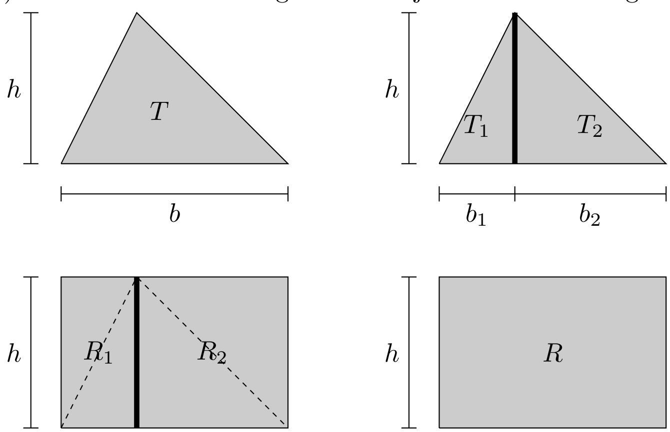
(c) Explicar por qué el área del rectángulo se calcula haciendo el producto de la longitud de la base por la longitud de la altura.

Ejercicio 4. (a) Considerar un triángulo rectángulo T de base b y altura h, como vemos en la figura, y comparar con el correspondiente rectángulo R de base b y altura h.



¿Qué fracción del área del rectángulo representa el triángulo?¿Es correcto decir que AREA R = 2.AREA T?

(b) Considerar ahora la figura de abajo relativa al triángulo (no rectángulo) T:



Analizar la validez de las afirmaciones que siguen:

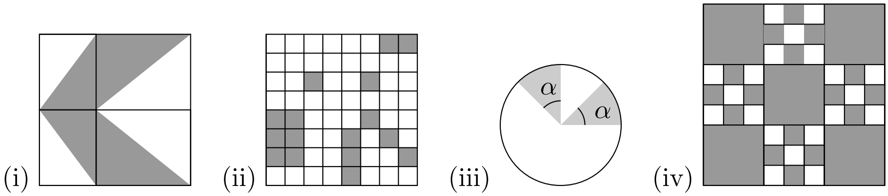
(i) AREA T_1 + AREA T_2 = AREA T

(ii) 2·AREA T_1 + 2.AREA T_2 = AREA R_1 + AREA R_2

(iii) 2·AREA T = AREA R

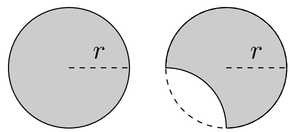
(iv) AREA T = $\dfrac{b \cdot h}{2}$

Ejercicio 5. Calcular el área de la parte sombreada de las figuras de abajo.



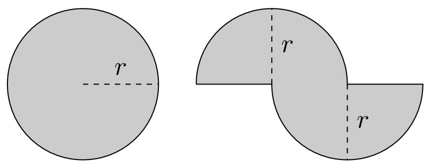
i) La longitud del lado del cuadrado grande es 2cm.
ii) La longitud del lado del cuadrado grande es 7,5cm.
iii) El radio de la circunferencia mide 0,67cm y $\alpha = 45°$.
iv) La longitud del lado del cuadrado grande es 8cm.

Ejercicio 6. (a) Considerar las siguientes figuras.
(i) ¿Cuál tiene mayor área?
(ii) Comparar los perímetros de ambas y decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:



“Dos figuras con el mismo perímetro tienen la misma área”.

(b) Considerar las siguientes figuras.
(i) ¿Cuál tiene mayor perímetro?
(ii) Comparar las áreas de ambas y decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: “Dos figuras con la misma área tienen el mismo perímetro”.



Ejercicio 7.

(a) Comparar las áreas y los perímetros de las siguientes figuras.

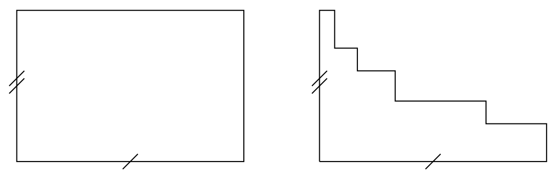
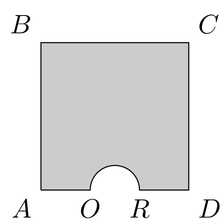


Figura A Figura B

(b) A partir de la figura A generar, recortando alguna porción de ella, una nueva figura que tenga menor área que A y mayor perímetro y otra que tenga menor área y menor perímetro.

Ejercicio 8. Calcular el área y el perímetro de la siguiente figura sombreada sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado, $AB = 5$ y $AO = OR = RD$. La semicircunferencia tiene diámetro OR.



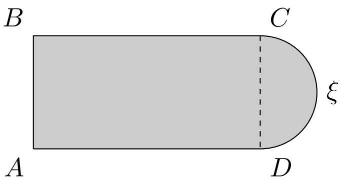
Ejercicio 9. De un rectángulo se sabe que uno de sus lados mide 10 cm y que su perímetro es de 80 cm. Se pide:

(a) Hallar el área.

(b) Construir otro rectángulo que tenga el mismo perímetro pero otra área. ¿El área del nuevo rectángulo resultó mayor o menor que el dado?

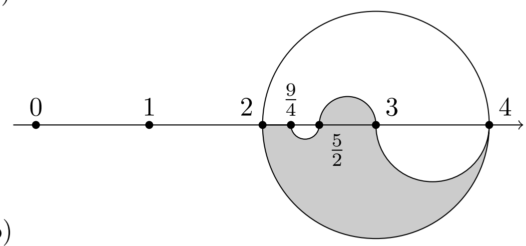
(c) Construir otro rectángulo que tenga la misma área pero distinto perímetro. ¿El perímetro es mayor o menor que el del rectángulo inicial?

Ejercicio 10. Calcular el área y el perímetro de las siguientes figuras sombreadas usando los datos indicados en cada una de ellas.

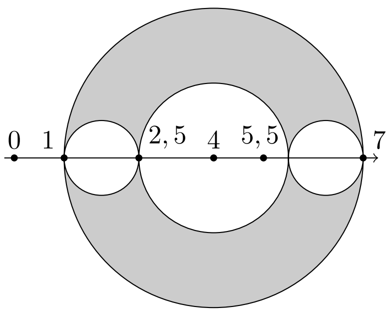


$ABCD$ rectángulo
$AD = 2AB$, $AB = 3\,\text{cm}$
ξ es una semicircunferencia de diámetro CD

(a)

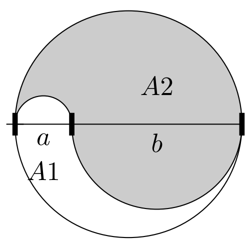


(b)

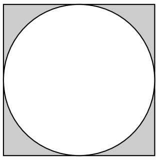
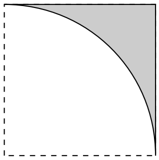
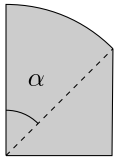
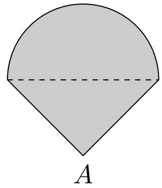


(c)

Ejercicio 11. Calcular las áreas $A1$ y $A2$ del círculo (ver figura) si $b = 4$ y $a = 2$.



Ejercicio 12. Calcular de forma exacta y aproximada el área y el perímetro de las siguientes figuras sombreadas usando los datos consignados abajo.

(i)  (ii)  (iii)  (iv) 

(i) La figura está formada por un círculo inscripto en un cuadrado de 7cm de lado.

(ii) La figura está formada por un cuadrado al cual se le recortó un cuarto de círculo. El lado del cuadrado es igual al radio del círculo y mide 3,25cm.

(iii) La figura está formada por un triángulo rectángulo y un sector circular que tiene por radio a la hipotenusa del triángulo. Los dos catetos miden 2cm cada uno y la hipotenusa mide $\sqrt{8}$cm. El ángulo α mide 45°.

(iv) La figura está formada por un triángulo rectángulo y un semicírculo cuyo diámetro es la hipotenusa del triángulo. Los dos catetos del triángulo miden 2cm cada uno y su hipotenusa mide $\sqrt{8}$cm.

2 Áreas y Rompecabezas.

Para esta sección necesitamos recordar que:

- Un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo interior recto (de 90^o).
- En todo triángulo rectángulo, los lados que determinan al ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto a dicho ángulo se llama hipotenusa.

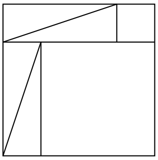
Considerar dos rompecabezas conformados con las siguientes piezas:

Primer rompecabezas: 4 triángulos rectángulos iguales y dos cuadrados. El lado de uno de los cuadrados es igual a uno de los catetos de un triángulo y el lado del otro cuadrado es igual al otro cateto del mismo triángulo.

Segundo rompecabezas: 4 triángulos rectángulos iguales (e iguales a los del rompecabezas anterior) y 1 cuadrado cuyo lado es igual a la hipotenusa de uno de los triángulos.

Ejercicio 1 Justificar que se pueden armar dos cuadrados iguales, uno con cada juego de piezas. Deducir que la suma de las áreas de los cuadrados que son piezas del ítem 1) es igual al área del cuadrado que es pieza del ítem 2)

Esperamos que el armado del primer rompecabezas haya quedado así:



En cada triángulo, llamamos a la medida de uno de los catetos, b a la del otro cateto y c a la de la hipotenusa. En primer lugar notemos que al enfrentar dos triángulos rectángulos haciendo coincidir sus hipotenusas se obtienen rectángulos cuyos lados miden a y b. Obtenemos dos de estos rectángulos. Luego el lado de medida a se ajusta con el cuadrado de igual lado y lo mismo se hace con el lado de medida b. La figura completa tiene ángulos rectos en cada una de sus esquinas y además sus lados miden todos la suma de los catetos $a + b$. Por eso es que la figura se trata de un cuadrado.

El área A del cuadrado resultante se puede calcular de dos maneras: a) mediante la medida de su lado, b) mediante la suma de las áreas de las figuras que lo componen. Analicemos lo necesario para estos cálculos:

- medida del lado del cuadrado resultante $L = a + b$,
- área de cada triángulo $= \frac{a \cdot b}{2}$,
- área de cuadrado de lado a $= a^2$,
- área de cuadrado de lado b $= b^2$.

Área del cuadrado mediante su lado:

$$A = (a + b)^2$$

Área del cuadrado por figuras que lo componen:

$A = 4\cdot$área de cada triángulo+área de cuadrado de lado a +área de cuadrado de lado b.

$$A = 4 \cdot \frac{ab}{2} + a^2 + b^2.$$

Por lo que resulta

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + a^2 + b^2.$$

Ejercicio 2. Hacer para el segundo rompecabezas un análisis similar al realizado para el primero. Llegar a que el área del cuadrado resultante puede calcularse con la expresión $4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$.

Dado que el área de los cuadrados de ambos rompecabezas es el mismo, porque la medida del lado en ambos casos es $a + b$, podemos igualar las áreas que resultan de sumar las figuras que los componen respectivamente obteniendo:

$$4 \cdot \frac{ab}{2} + a^2 + b^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2.$$

Cancelando los términos iguales en ambos miembros obtenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Este último renglón nos está mostrando una propiedad que se cumple para todo triángulo rectángulo. Esta propiedad puede enunciarse de dos modos diferentes.

Formulación mediante áreas: *En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa del triángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son, respectivamente, las longitudes de los catetos.*

Formulación mediante longitudes de lados del triángulo: *Dado un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de cada uno de los catetos.*

Ambas formulaciones corresponden al *Teorema de Pitágoras*, aunque la última es más conocida y nos permite hacer cálculos de longitudes de lados.

Teorema de Pitágoras: *Para todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Nota: Los cálculos de esta sección son de medidas, las cuales son positivas. De modo que expresiones del tipo $u^2 = v$, donde u es una medida y $v \geq 0$, se calculan $u = \sqrt{v}$.

Ejemplo 1. Si en un triángulo rectángulo, un cateto mide $a = 3$ cm y el otro cateto mide $b = 5$ cm, ¿cuánto mide su hipotenusa?

Considerando que ambas longitudes están expresadas en la misma unidad de medida (centímetros) podemos operar sólo con los números

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = 3^2 + 5^2 \Longrightarrow c^2 = 9 + 25 = 34 \Longrightarrow c = \sqrt{34} \approx 5,83.$$

La hipotenusa mide entonces $c \approx 5,83$ cm.

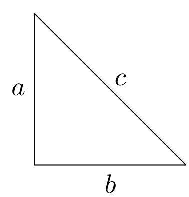
Ejemplo 2. Si en un triángulo rectángulo, un cateto mide 3 cm y la hipotenusa mide 5 cm, ¿cuánto mide el otro cateto?

En este caso, llamando b al cateto que debemos averiguar resulta:

$$5^2 = 3^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Longrightarrow b = \sqrt{16} = 4.$$

El cateto mide $b = 4$ cm.

Ejemplo 3. Si en un triángulo rectángulo, los catetos miden 1 ¿Cuánto mide la hipotenusa? ¿Qué puede decir de los ángulos?



Este es un triángulo isósceles pues tiene dos lados iguales. Llamamos c a la medida de la hipotenusa, a a la medida de uno de los catetos y b a la medida del otro.

Usamos el Teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 &= 1^2 + 1^2 \\ c^2 &= 2\,. \end{aligned}$$

Luego, $c = \sqrt{2}$.
De aquí podemos inferir una posible construcción geométrica de $\sqrt{2}$.

Ejemplo 4. Si en un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide el doble del otro y la hipotenusa mide 5 cm, calcule la medida de cada cateto.

Pongamos al cateto a como el doble de b, eso se escribe $a = 2b$ (podríamos haber supuesto que $b = 2a$ y los resultados finales darían lo mismo). La relación entre los lados del triángulo rectángulo según el Teorema de Pitágoras es:

$$5^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 5^2 = (2b)^2 + b^2 \Longrightarrow 5^2 = 4b^2 + b^2 = 5b^2.$$

Luego,

$$5^2 = 5b^2 \Longrightarrow \frac{5^2}{5} = b^2 \Longrightarrow 5 = b^2 \Longrightarrow b = \sqrt{5} \approx 2,236.$$

La longitud de la hipotenusa es aproximadamente $2,236$ cm.

Ejemplo 5. Se apoya una escalera de 3 metros de largo en una pared (la pared es perpendicular al piso) ¿A qué distancia de la pared habría que apoyar la base de la escalera si se quiere alcanzar una altura de $2,30$ m?

Se quiere saber a qué distancia de la pared hay que apoyar la escalera, para ello medimos a partir del canto de la pared (hacer un esquema). Como vemos, queda formado un triángulo rectángulo del que se conocen la hipotenusa, que es la medida de la escalera, y uno de los catetos, que es la altura que se desea alcanzar. Luego,

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ 3^2 &= 2,30^2 + a^2 \\ a^2 &= 3^2 - 2,30^2 \\ a^2 &= 3,71 \\ a &= \sqrt{3,71}, \\ a &\approx 1,92 \end{aligned}$$

Respuesta: La escalera debe colocarse a aproximadamente $1,92$ m de la pared para alcanzar la altura deseada.

Método para comprobar si una pared está a escuadra

En las construcciones edilicias es importante construir las paredes “a escuadra”. Esto significa que cuando dos paredes se encuentran, el ángulo formado por ellas debe ser 90^o. Para verificar esto los constructores miden sobre las paredes apoyándose en el suelo. Desde el punto de encuentro de ambas paredes, donde ubican una marca, hacen otra marca a los 40 cm sobre una de ellas y otra a los 30 cm sobre la otra, todas al ras del suelo. Luego, con un hilo comprueban si entre las dos marcas sobre ambas paredes hay una distancia de 50cm.

¿Por qué este es un buen método de comprobación? ¡La razón la revela el Teorema de Pitágoras! pero... ¡usado al revés!

Observemos que si unimos las marcas podríamos imaginar segmentos que forman un triángulo tal que las medidas de sus lados verifican la siguiente igualdad numérica:

$$50^2 = 40^2 + 30^2$$

Dado que se cumple la igualdad de arriba entre las medidas de los lados del triángulo, podemos asegurar que el ángulo formado por los segmentos es recto y entonces las paredes están a escuadra.
La propiedad que usamos para asegurar esto es el recíproco del Teorema de Pitágoras (por eso dijimos “al revés”), el cual se enuncia en forma general del siguiente modo.
Teorema recíproco del Teorema de Pitágoras: *Si un triángulo es tal que la suma de los cuadrados de la longitud de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del tercero, entonces el ángulo comprendido por los dos primeros lados es recto.*

Breve análisis lógico de una propiedad con estructura de implicación.

En Matemática, llamamos *proposición* a la oración con sentido completo de la cual se puede decir, sin ambigüedades, que es verdadera o que es falsa. Es muy habitual en esta disciplina que una proposición tenga estructura de implicación: *Antecedente* $\Longrightarrow$ *Consecuente*. En el antecedente se expresan las condiciones y en el consecuente las conclusiones. Lo expresado en la implicación es verdadero siempre que si las condiciones del antecedente se cumplan o sean verdaderas, se concluye aquello que está dicho en el consecuente el cual resulta también verdadero.

El Teorema de Pitágoras es un ejemplo de proposición con esta estructura:

	Condición o *Hipótesis* (Antecedente)	Conclusión o *Tesis* (Consecuente)
Teorema de Pitágoras	Si el triángulo ABC es rectángulo en B (es decir tiene un ángulo recto con vértice B)	entonces se cumple la siguiente relación entre las longitudes de sus lados: $BC^2 + AB^2 = AC^2$

¿Qué es lo que asegura en este caso que la implicación es verdadera? ¡El armado de los rompecabezas! Para cualquier triángulo rectángulo que tengamos, podemos armar los rompecabezas como los del principio de la sección con medidas de las piezas que se obtengan del triángulo dado. El trayecto realizado (construcción de los rompecabezas + análisis y cálculos de las áreas + igualación de las áreas de los cuadrados resultantes

+ cancelación de términos iguales en ambos miembros) nos asegura que de la condición de ser triángulo rectángulo siempre podemos concluir la conocida relación entre las medidas de la hipotenusa y las de los catetos. Este proceso se lo llama *demostración matemática*. Una vez que sabemos que hay una demostración matemática (puede haber más de una) usamos la propiedad enunciada por esa implicación con validez garantizada. Como ya dijimos en el capítulo de Números y Cálculos, los enunciados importantes (por su utilidad y alcance) garantizados por una demostración se llaman usualmente *teoremas*.

Casi todos las propiedades que están en este libro tienen una demostración matemática aunque no las mostremos en la mayoría de los casos pues no son objeto de este curso.

A partir de un enunciado con estructura de implicación, se puede enunciar otra proposición llamada *recíproca* que se obtiene intercambiando los roles del antecedente y del consecuente, como en el caso del Teorema Recíproco del Teorema de Pitágoras.

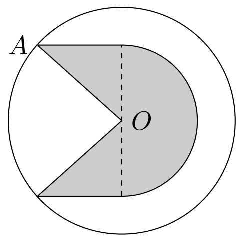
	Condición o *Hipótesis* (Antecedente)	Conclusión o *Tesis* (Consecuente)
Teorema de Pitágoras	Si el triángulo ABC es rectángulo en B (es decir tiene un ángulo recto con vértice B)	entonces se cumple la siguiente relación entre las longitudes de sus lados: $$BC^2 + AB^2 = AC^2$$
Teorema recíproco del Teorema de Pitágoras	Si en un triángulo ABC se cumple la siguiente relación entre las longitudes de sus lados: $$BC^2 + AB^2 = AC^2$$	entonces el triángulo es rectángulo con ángulo recto con vértice B.

En el caso visto, tanto la implicación del Teorema de Pitágoras como la de su recíproco son verdaderas (en el Trabajo Práctico se orienta una demostración del recíproco), sin embargo es importante notar que dada una implicación verdadera su recíproca <u>no necesariamente</u> es verdadera, como lo vemos en el siguiente ejemplo:

	Condición o *Hipótesis* (Antecedente)	Conclusión o *Tesis* (Consecuente)	Validez
Proposición	Si un cuadrilátero $ABCD$ es cuadrado	entonces es rombo	La proposición es siempre verdadera pues el cuadrado cumple la definición de rombo ya que tiene todos sus lados iguales.
Proposición recíproca	Si un cuadrilátero $ABCD$ es rombo	entonces es cuadrado	La proposición NO es verdadera en todas las figuras que cumplan la condición ya que el hecho de tener todos los lados iguales no asegura que los ángulos sean rectos.

Ejercicios resueltos.

Ejercicio resuelto 2. (Engarce de la joya) Sobre una placa circular de plata un orfebre quiere engarzar un motivo en oro con el diseño de la parte sombreada de la figura. Se sabe que la circunferencia y semicircunferencia son concéntricas en O. Además, el diámetro de la circunferencia mayor es 3,6 cm, el diámetro de la semicircunferencia interior es 2,4 cm. Los triángulos que componen la figura sombreada son rectángulos e iguales y el segmento AO es lado de uno de ellos. ¿Cuál es el área de la superficie a engarzar? ¿Cuál es su perímetro?



Resolución: Antes de comenzar a ver cuáles son las medidas, debemos entender cómo está formada la figura de la cual se quiere obtener el área. Se trata de un semicírculo de diámetro $2,4$cm al cual se le adosan dos triángulos rectángulos iguales, por lo que los catetos sobre el diámetro del semicírculo también son iguales y miden $\frac{2{,}4\,\mathrm{cm}}{2} = 1,2$ cm cada uno. También observamos que la hipotenusa de dichos triángulos son radios de la circunferencia mayor y por lo tanto miden lo mismo que la mitad del diámetro, es decir, $1,8$cm.

El área de la figura a engarzar es:

$$\text{Área a engarzar} = \text{Área de semicírculo menor} + 2\text{Área de triángulo rectángulo.}$$

Tenemos los datos necesarios para obtener el área del semicírculo que resulta:

$$\text{Área de semicírculo menor} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \approx \frac{3,1416 \cdot 1,2^2\,\mathrm{cm}^2}{2} \approx 2,262\,\mathrm{cm}^2.$$

Para obtener el área de un triángulo nos conviene usar los catetos del mismo, uno como base y otro como altura. De los catetos, c_1 y c_2, sólo conocemos la medida de uno de ellos, el otro se averigua usando el Teorema de Pitágoras:

$$c_2 = \sqrt{\text{long. de hipotenusa}^2 - c_1^2} = \sqrt{1,8^2 - 1,2^2} \approx 1,341.$$

Ahora estamos en condiciones de averiguar el área del triángulo:

$$\text{Área de triángulo rectángulo} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} \approx \frac{1,341\ \cdot 1,2\,\text{cm}^2}{2} \approx 0,8046\,\text{cm}^2.$$

Luego, volviendo a la figura inicial, se tiene:

$$\text{Área de la figura a engarzar } \approx 2,262\,\text{cm}^2 + 2 \cdot 0,8046\,\text{cm}^2 \approx 3,8711\,\text{cm}^2$$

En cuanto al perímetro, se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\text{Perímetro de figura} &= \text{long. de semicircunferencia}\\ &+ 2\cdot(\text{long. de hipotenusa AO} + \text{long. de cateto } c_2).\end{aligned}$$

Analicemos cada término:

$$\begin{aligned}\text{Long. de semicircunferencia} &= \frac{2\cdot\pi\cdot\ r}{2} = \pi\cdot r\\ &\approx 3,1416\cdot 1,2\\ &\approx 3,77\end{aligned}$$

Longitud de hipotenusa $AO = 1,8$

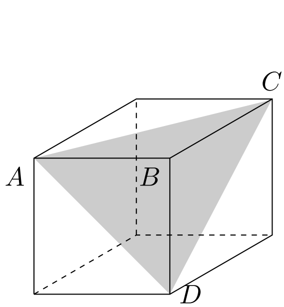
Longitud de cateto $c_2 \approx 1,341$.

Luego

$$\text{Perímetro de figura} \approx 3,77 + 2\cdot(1,8 + 1,341) = 10,052.$$

Respuesta: El área de figura a engarzar es, aproximadamente, de $3,8711$ y su perímetro de $10,052$ cm.

Ejercicio resuelto 3. (Imaginando figuras en el espacio.) Se tiene un cubo de arista $AB = 3$. Se consideran tres caras que coinciden en un mismo vértice al que llamamos B. Consideremos las aristas del cubo que concurren en B. A los otros extremos de dichas aristas llamémoslos A, C y D. Se quiere conocer el área del triángulo ACD. Repetir el problema, calculando el área en función del lado $AB = \ell$.



Antes de leer lo que sigue, indicar las características que tiene el triángulo formado.

Explicación	Los lados del triángulo AC, AD y CD son diagonales de caras del cubo. Como las caras del cubo son todos cuadrados iguales, sus diagonales son iguales también, con lo cual el triángulo formado es equilátero. Para calcular el área, necesitaríamos conocer uno de los lados del triángulo y la altura correspondiente a dicho lado. Cada lado del triángulo equilátero es diagonal de una cara del cubo. Observando una de las caras, su diagonal la divide en dos triángulos rectángulos iguales; en ellos los catetos son los lados de las caras (aristas) del cubo y la hipotenusa es dicha diagonal. De este modo, para calcular la diagonal podemos usar el teorema de Pitágoras
Planteo y Cálculos	$$AD^2 = AB^2 + BD^2 \Longrightarrow AD = \sqrt{AB^2 + BD^2}$$ $$AD = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2} \cdot 3.$$
Explicación	Luego, cada lado del triángulo equilátero mide $\sqrt{2} \cdot 3$. Para calcular el área necesitamos calcular la altura correspondiente a uno de los lados. Al trazar la altura, queda formado un triángulo rectángulo del cual conocemos uno de los lados y el otro es la mitad Esto se debe a una propiedad de los triángulos isósceles que dice: *la altura que tiene por extremo el vértice donde concurren los lados iguales es mediana del lado opuesto.*. Como un triángulo equilátero lo consideramos isósceles, entonces podemos hacer uso de esta propiedad. Volvemos a usar el teorema de Pitágoras
Planteo y Cálculos	$$\begin{aligned} (\text{long. de altura})^2 &= (\sqrt{2} \cdot 3)^2 - (\frac{\sqrt{2} \cdot 3}{2})^2 \\ &= 2 \cdot 9 - \frac{2 \cdot 9}{4} \\ &= \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 9 = \frac{3}{2} \cdot 9 \end{aligned}$$ Luego, long. de altura $= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 3$.

Explicación	Ahora podemos calcular el área,
Planteo y Cálculos	$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \cdot \text{long. de base} \cdot \text{long. de altura.}$$ $$\begin{aligned} \text{Área del triángulo} &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 3 \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}) \cdot 9 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 9 \\ &\approx 7,794 \end{aligned}$$
Explicación	Si en lugar de usar la medida $AB = 3$ usamos una medida genérica, $AB = \ell$, los planteos son los mismos y en cada lugar donde reemplazamos por la medida 3 deberíamos reemplazar por la medida ℓ.
Planteo y Cálculos	$$AD = \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \sqrt{2 \cdot \ell^2} = \sqrt{2} \cdot \ell.$$ $$\text{long. de altura} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \ell.$$ $$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \ell \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \ell = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ell^2$$
Respuesta	El área del triángulo cuyo lado es la diagonal de un cubo de arista de medida 3 es aproximadamente $7,794$ mientras que si la medida es ℓ, su área se calcula mediante la expresión $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ell^2$.

Trabajo Práctico 11. Argumentar en Matemática

Los ejercicios sobre los rompecabezas corresponden a los ejercicios 1 y 2 de este trabajo práctico.

Ejercicio 3.

(a) Enunciar el Teorema recíproco del Teorema de Pitágoras. Reconocer en él condiciones (antecedente) y conclusiones (consecuente).

(b) Mostrar aplicaciones del Teorema de Pitágoras y de su recíproco.

(c) Sugerencias para la demostración del Recíproco del Teorema de Pitágoras (RTP) (para valientes o interesados):

(i) Se tiene un triángulo, genérico, que cumple la hipótesis del RTP. Todavía no se puede afirmar que sea rectángulo.

(ii) Se puede afirmar que uno de los lados es más largo que cada uno de los otros dos. Por qué?

(iii) Describa la construcción de un triángulo auxiliar que sea rectángulo cuyos catetos midan lo mismo que cada uno de los lados menores del triángulo genérico dado.

(iv) En este triángulo construido, justifique que se puede calcular el tercer lado. Muestre cómo se calcula.

(v) ¿Cómo son los lados del triángulo construido en relación con los del dado?

(vi) ¿Qué puede decir como conclusión del ítem anterior sobre los dos triángulos? ¿Por qué?

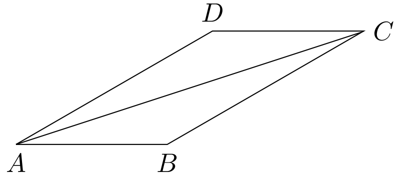
(vii) Escriba, a modo de explicación y siguiendo lo obtenido en los ítems anteriores, la demostración del teorema recíproco del de Pitágoras.

Ejercicio 13.

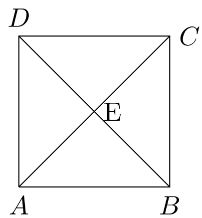
(a) ¿Cuál es la condición o hipótesis del Teorema de Pitágoras? ¿y la conclusión o tesis?

(b) Determinar en cuál de las siguientes situaciones es lícito aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular las longitudes indicadas en cada caso. Explicar por qué y consignar si utilizó alguna propiedad geométrica para argumentar.

El cuadrilátero es un paralelogramo de lados de longitud 2 y 3 cm y se desea calcular AC.



El cuadrilátero es un cuadrado de lados de longitud 2 cm y se desea calcular la longitud de los segmentos AE y EB.



(c) ¿Cuál es su conclusión si sabe que un triángulo dado NO cumple la condición identificada en el item a)? ¿Por qué?

Ejercicio 14.

(a) Reconocer el antecedente y el consecuente de la siguiente propiedad matemática: *En todo cuadrado, las diagonales son iguales.*

(b) ¿Qué sucede cuando una figura cumple la condición del antecedente? ¿Por qué?

(c) ¿Cuál es su conclusión si sabe que una figura NO cumple la condición identificada en el item anterior?

(d) Enunciar la recíproca de la propiedad anterior. Explicar si la recíproca es verdadera o no.

Ejercicio 15. Para las propiedades matemticas (de cualquier tema) en forma de implicación, que se enuncian a continuación se pide enunciar su recíproca e indicar si es verdadera o falsa.

(a) Si un número es múltiplo de dos entonces es múltiplo de 4.

(b) Si un número tiene desarrollo decimal finito entonces es un número racional.

(c) En un triángulo isósceles la altura que corresponde a la base es también mediana.

Trabajo Práctico 12

Ejercicio 1. En cada caso, calcular de forma exacta y aproximada el tercer lado del triángulo ABC sabiendo que el ángulo $\widehat{ABC}$ es recto.

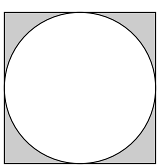
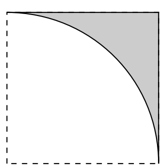
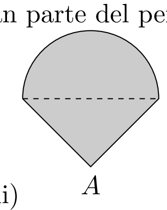
(a) $AC = \sqrt{5}$, $AB = 1$

(b) $AB = 3$, $BC = 2$

(c) $AB = \sqrt{5} - 1$, $BC = \sqrt{6}$

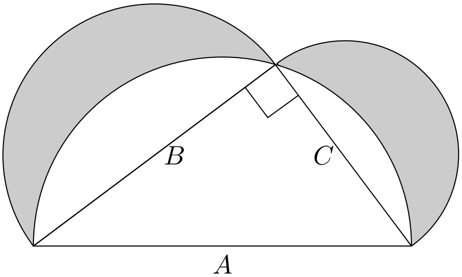
(d) $AC = 2AB$, $AB = 2\sqrt{3}$

Ejercicio 2. Calcular de forma exacta y aproximada el área y el perímetro de las siguientes figuras sombreadas usando los datos consignados abajo, para cada una de ellas. Recordar que las líneas interiores no forman parte del perímetro.

i)  ii)  iii) 

i) La diagonal del cuadrado mide 7 cm.
ii) La figura está formada por un cuadrado al cual se le recortó un cuarto de círculo. La diagonal del cuadrado mide 3,25cm.
iii) La figura está formada por un triángulo rectángulo isósceles y un semicírculo. El diámetro del semicírculo coincide con la hipotenusa del triángulo que mide 4cm.

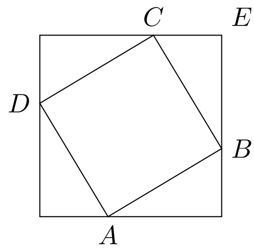
Ejercicio 3. Las regiones sombreadas de la siguiente figura se llaman "Lúnulas de Hipócrates". Las líneas curvas son semicircunferencias.



(a) Describir detalladamente cómo se determinan las lúnulas.

(b) Calcular su área sabiendo que $B = 8$ y $C = 6$.

Ejercicio 4. Calcule el área del cuadrado interno sabiendo que el cuadrado exterior tiene área 12 cm^2, que los segmentos más cortos que unen los vértices del cuadrado externo con los vértices del cuadrado interno tienen todos la misma longitud y que la longitud del segmento que une a C con E es $CE = 1,5$ cm



Ejercicio 5. Una puerta tiene 0,70 m de ancho y 2 m de alto. ¿Puede una tabla de 3,5 m por 2,15 m pasar por esa puerta? Explique.

Ejercicio 6. ¿Hay otras medidas posibles para trazar las marcas sobre las paredes en el método del constructor para comprobar si las mismas están a escuadra (ver la sección sobre el teorema de Pitágoras)? ¿Puede indicar algunas?.

Ejercicio 7. Se atraviesa un cubo macizo, de 0,5m de arista, con una placa plana, perpendicular a una de las caras del cubo, de modo que la placa contenga dos artistas opuestas. Por la intersección del cubo macizo con la placa queda formado un rectángulo. Calcular el área de dicho rectángulo y la longitud de su diagonal.

Ejercicio 8. Del ejemplo resuelto en (3), calcular el área total de la pirámide de vértice B y base el triángulo ACD (suma de las áreas de todas las caras planas).