Tarea: Teoría de Grafos y Matrices

Realizada la investigación por el campista Itamhar Daniel Barrios Castro taller en clase y casa.

1. ¿Qué es teoría de grafos?

La teoría de grafos es una rama de las matemáticas y la informática que estudia las relaciones entre los elementos de un conjunto mediante estructuras llamadas grafos. Un grafo está compuesto por nodos (también llamados vértices) y aristas (o enlaces) que conectan pares de nodos.

Ejemplos de grafos:

- Un mapa de carreteras donde los vértices son ciudades y las aristas son las carreteras que las conectan.

- Una red social, donde cada persona es un nodo y la relación de amistad es una arista.

- Una red eléctrica, donde los nodos son generadores o consumidores de energía y las líneas eléctricas son las aristas.

Tipos de grafos:

- Grafo no dirigido: Las aristas no tienen dirección. Es decir, si existe una arista entre A y B, se puede ir de A a B y de B a A.

- Grafo dirigido (dígrafo): Las aristas tienen una dirección, lo que indica que solo se puede ir de un nodo a otro en un solo sentido.

Características de los grafos:

- **Adyacencia (matriz A):** Se refiere a si dos nodos están conectados por una arista. Se representa con una matriz cuadrada A donde A[i][j] = 1 si hay una arista entre los vértices i y j; de lo contrario, es 0.

- **Incidencia (matriz I):** Representa la relación entre vértices y aristas. En la matriz de incidencia, las filas representan los vértices y las columnas las aristas. Si una arista j incide en un vértice i, entonces I[i][j] = 1 (o -1 dependiendo de la dirección si es un grafo dirigido).

- **Grado de un vértice:** Es el número de aristas que inciden en ese vértice. En un grafo dirigido se distingue entre grado de entrada (aristas que llegan) y grado de salida (aristas que salen).

- **Ley del "hand shaking":** En un grafo no dirigido, la suma de los grados de todos los vértices es igual al doble del número de aristas. Matemáticamente: $\sum \text{grado}(v) = 2|E|$.

- **Trayectoria:** Es una secuencia de vértices conectados por aristas. Una trayectoria simple no repite vértices ni aristas, mientras que una trayectoria cerrada empieza y termina en el mismo vértice.

2. Definiciones de las matrices A, R y D(i,j):

- Matriz A (de adyacencia): Representa si hay conexión directa entre los nodos. A[i][j] = 1 si hay una arista entre i y j, 0 si no.

- Matriz R (de alcanzabilidad): Indica si existe una trayectoria (directa o indirecta) entre dos nodos. R[i][j] = 1 si existe un camino de i a j.

- Matriz D(i,j) (de distancias): Representa la longitud (peso mínimo) del camino más corto entre dos nodos i y j. D[i][j] contiene el valor de dicha distancia.

3**. Cómo hacer la multiplicación entre dos matrices manualmente:**

Supongamos que tenemos dos matrices A (de dimensión m×n) y B (de dimensión n×p). El producto C = A × B será una matriz de dimensión m×p.

Para calcular un elemento C[i][j] de la matriz resultante, se toma la fila i de A y la columna j de B, y se multiplican sus elementos correspondientes y se suman:

C[i][j] = A[i][1] * B[1][j] + A[i][2] * B[2][j] + ... + A[i][n] * B[n][j]

Ejemplo:

A = |1 2| B = |3 4|
      |3 4| |5 6|

C = A × B = |(1×3 + 2×5) (1×4 + 2×6)| = |13 16|
                  |(3×3 + 4×5) (3×4 + 4×6)| |29 36|

Entonces, C = |13 16|
                      |29 36|

4. Algoritmo de Dijkstra:

El algoritmo de Dijkstra es un método utilizado para encontrar el camino más corto desde un nodo origen hacia todos los demás nodos en un grafo ponderado (es decir, donde las aristas tienen pesos o costos). Este algoritmo funciona para grafos dirigidos y no dirigidos, siempre y cuando los pesos sean no negativos.

Pasos básicos del algoritmo:
- Se inicializa la distancia del nodo origen a 0 y la del resto de los nodos a infinito.
- Se marca el nodo origen como visitado.
- Se actualizan las distancias a los nodos vecinos usando la fórmula: nueva_distancia = distancia_actual + peso_arista.

Campista BlackTiger04 de ciberseguridad nivel explorador.

- Se selecciona el nodo no visitado con la menor distancia acumulada y se repite el proceso.

Ejemplo sencillo:
Grafo con nodos A, B, C, D y pesos en las aristas:
A - B (1), A - C (4), B - C (2), B - D (5), C - D (1)

Desde A, el camino más corto a D es: A → B → C → D con un costo total de 1 + 2 + 1 = 4.

5. Algoritmo de Yen:

El algoritmo de Yen se usa para encontrar los K caminos más cortos entre un nodo origen y un destino en un grafo ponderado. A diferencia de Dijkstra, que da un único camino más corto, Yen genera múltiples alternativas.

Pasos generales:
- Se encuentra el camino más corto con Dijkstra (el primero).
- Luego se exploran desviaciones del camino anterior (subtrayectoria + desvío).
- Se almacenan todos los caminos posibles sin repetir nodos o ciclos.
- Se ordenan según el costo total y se seleccionan los K caminos más cortos.

6. Inventar dos grafos y hacer análisis completo:

GRAFO 1 (No dirigido):
Vértices: A, B, C, D, E
Aristas: A-B, A-C, B-D, C-D, D-E

Matriz de adyacencia (A):
    A B C D E
A [0 1 1 0 0]
B [1 0 0 1 0]
C [1 0 0 1 0]
D [0 1 1 0 1]
E [0 0 0 1 0]

Grados:
Grado(A) = 2, Grado(B) = 2, Grado(C) = 2, Grado(D) = 3, Grado(E) = 1
Suma = 10 → 10/2 = 5 aristas (verifica la ley del handshaking).

GRAFO 2 (Dirigido y ponderado):
Vértices: X, Y, Z, W
Aristas: X→Y(2), Y→Z(3), X→Z(6), Z→W(1), Y→W(5)

Matriz de adyacencia (ponderada):

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & X & Y & Z & W \\
\hline
X & 0 & 2 & 6 & 0 \\
Y & 0 & 0 & 3 & 5 \\
Z & 0 & 0 & 0 & 1 \\
W & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Grado de entrada/salida:
Grado salida(X)=2, entrada(X)=0
Grado salida(Y)=2, entrada(Y)=1
Grado salida(Z)=1, entrada(Z)=2
Grado salida(W)=0, entrada(W)=2

Camino más corto de X a W usando Dijkstra: X → Y → Z → W = 2 + 3 + 1 = 6

4. Análisis del grafo de Euler:

Un grafo de Euler es aquel en el que existe un ciclo que recorre todas las aristas exactamente una vez y regresa al punto de inicio. Para que un grafo tenga un ciclo euleriano:

- En grafos no dirigidos: todos los vértices deben tener grado par.
- En grafos dirigidos: cada vértice debe tener el mismo grado de entrada que de salida.

Ejemplo:
Grafo: A-B, B-C, C-D, D-A, A-C, B-D

Todos los vértices tienen grado 3 → impar → No es euleriano.

Pero si quitamos una arista (por ejemplo A-C), todos quedan con grado par:
A: 2, B: 2, C: 2, D: 2 → Es un grafo euleriano

Ciclo Euleriano posible: A → B → D → C → B → A