Лекции по курсу "Функциональный анализ"

Белоусов Григорий Николаевич

Оглавление

Глава 1

Топологические и метрические пространства

1. Неравенства Юнга, Гельдера и Минковского

Вначале рассмотрим несколько неравенств, которые понадобятся нам на протяжении курса.

Теорема 1.1 (неравенство Юнга). *Пусть числа $p > 1$ и $q > 1$ удовлетворяют условию $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a, b \geq 0$. Тогда*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Доказательство. Мы можем считать, что $a, b > 0$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^{\frac{1}{p}} - \frac{x}{p}, \quad x \geq 0.$$

Заметим, что

$$f'(x) = \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p}\left(x^{-\frac{1}{q}} - 1\right)$$

положительна при $0 < x < 1$, и отрицательна при $x > 1$. Тогда в точке $x = 1$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение. Следовательно,

$$x^{\frac{1}{p}} - \frac{x}{p} \leq f(1) = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}.$$

Пусть $x = \frac{a^p}{b^q}$. Тогда

$$\frac{a}{b^{\frac{q}{p}}} - \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} \leq \frac{1}{q}.$$

Отсюда,

$$ab^{q-\frac{q}{p}} - \frac{a^p}{p} \leq \frac{b^q}{q}.$$

Получаем

$$ab^{q(1-\frac{1}{p})} \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Здесь $q(1 - \frac{1}{p}) = q\frac{1}{q} = 1$. $\square$

Теорема 1.2 (неравенство Гельдера). *Пусть числа $p > 1$ и $q > 1$ удовлетворяют условию $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Заметим, что это неравенство однородно, т.е. оно выполнено для векторов a и b тогда и только тогда, когда оно выполнено для векторов λa и μb. Таким образом, мы можем считать, что

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q = 1.$$

Согласно неравенству Юнга (см. 1.1),

$$|a_i b_i| \leq \frac{|a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q}.$$

Суммируя это неравенство по всем i, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq 1.$$

Что и требовалось доказать. □

Заметим, что при $p = q = 2$ неравенство Гельдера переходит в неравенство Коши–Буняковского.

Теорема 1.3 (неравенство Минковского). *Пусть $p \geq 1$. Тогда*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. При $p = 1$ неравенство очевидно. Заметим, что

$$(|a_i| + |b_i|)^p = (|a_i| + |b_i|)^{p-1}|a_i| + (|a_i| + |b_i|)^{p-1}|b_i|.$$

Суммируя это неравенство по всем i, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)^p = \sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)^{p-1}|a_i| + \sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)^{p-1}|b_i|.$$

Применим к каждому слагаемому в правой части неравенство Гельдера (см. 1.2). Получим

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p \le \left(\sum_{i=1}^{n}((|a_i|+|b_i|)^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} +$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n}((|a_i|+|b_i|)^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где q удовлетворяет условию $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Заметим, что $(p-1)q=p$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p \le \left(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Поделим обе части равенства на

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Поскольку $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Откуда следует неравенство Минковского. □

2. Топологические пространства

Определение 1.4. Пусть на множестве X задана система подмножеств $\mathcal{T}$ такая, что

- если $U_i \in \mathcal{T}\ \forall i$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$, т.е. пересечение конечного числа подмножеств из $\mathcal{T}$ есть элемент $\mathcal{T}$.
- если $U_\alpha \in \mathcal{T}\ \forall \alpha$, то $\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha \in \mathcal{T}$, т.е. объединение любого числа (конечного или бесконечного) подмножеств из $\mathcal{T}$ есть элемент $\mathcal{T}$.
- $X \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$.

Тогда пара (X, T) называется *топологическим пространством*. Система $\mathcal{T}$ называется *топологией* на X. Элементы системы $\mathcal{T}$ называются *открытыми множествами*. Элементы множества X

называются *точками.* Открытое множество, содержащее точку x мы будем называть *окрестностью* точки x.

Определение 1.5. Семейство $\mathfrak{B}$ называется *базой* топологии, если $\mathfrak{B}$ состоит из элементов $\mathcal{T}$ и любое множество $U \in \mathcal{T}$ представимо в виде объединения элементов семейства $\mathfrak{B}$.

Определение 1.6. Множество $V \subset X$ называется *замкнутым,* если его дополнение открыто, т.е. $X \setminus V \in \mathcal{T}$.

Замечание 1.7. Заметим, что множества X и $\emptyset$ одновременно открыты и замкнуты.

Непосредственно из определения видно, что объединение конечного числа замкнутых множеств снова замкнуто. Пересечение любого числа замкнутых множеств также замкнуто.

Пример 1.8. Пусть X состоит из двух элементов, $X = \{a, b\}$. Тогда $\mathcal{T} = \{\emptyset, a, X\}$ образует топологию на X, в которой точка a открыта, а точка b замкнута. Это топологическое пространство называется *связное двоеточие.*

Пример 1.9. Пусть $X = \mathbb{R}$ и $\mathfrak{B} = \{(a, b)\}$ — множество интервалов. Тогда $\mathfrak{B}$ является базой топологии на $\mathbb{R}$. Эта топология называется *стандартной* топологией на прямой. Теперь в качестве $\mathcal{T}$ мы можем взять множества $\{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}\}$, т.е. открытыми множествами являются пустое множество, вся прямая и прямая без конечного числа точек. Эта топология называется *топологией Зарисского.*

Замечание 1.10. Предыдущий пример показывает, что на одном и том же множестве можно задать несколько топологий.

Теорема 1.11. *Семейство $\mathfrak{B}$ тогта и только тогда является базой топологии $\mathcal{T}$, когда для любого множества $U \in \mathcal{T}$ и любой точки $x \in U$ существует $V \in \mathfrak{B}$ такая, что $x \in V \subset U$.*

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{T}$ — открытое множество. Тогда для каждой точки $\alpha \in U$ существует $V_\alpha \in \mathfrak{B}$ такая, что $V_\alpha \subset U$. Тогда $U = \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$. Обратно, пусть $\mathfrak{B}$ — база топологии $\mathcal{T}$. Тогда любое множество $U \in \mathcal{T}$ представимо $U = \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$, $V_\alpha \in \mathfrak{B}$. Пусть $x \in U = \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$. Тогда существует V_α такая, что $x \in V_\alpha$ и $V_\alpha \subset U$. $\square$

Заметим, что в процессе доказательства, мы доказали следующую лемму.

Лемма 1.12. *Множество U открыто тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in U$ существует окрестность V такая, что $V \subset U$.*

Введем еще несколько определений.

Определение 1.13. Будем говорить, что топологическое пространство X удовлетворяет *первой аксиоме отделимости* (обладает свойством T_1), если для любых двух точек $x, y \in X$ существует открытые множества U и V такие, что $x \in U, y \notin U$ и $x \notin V, y \in V$.

Определение 1.14. Будем говорить, что топологическое пространство X удовлетворяет *второй аксиоме отделимости* (обладает свойством T_2), если для любых двух точек $x, y \in X$ существует открытые множества U и V такие, что $x \in U, y \in V$ и $U \cap V = \emptyset$. T_2-пространства называются *Хаусдорфовами.*

Очевидно, что T_2-пространства являются и T_1-пространствами.

Определение 1.15. Будем говорить, что топологическое пространство X удовлетворяет *второй аксиоме счетности*, если существует счетная база.

Определение 1.16. Будем говорить, что топологическое пространство X удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если для любой точки $x \in X$ существует счетная система множеств $\Sigma_x \subset \mathcal{T}$, содержащих x. Более того, для любого множества $V \in \mathcal{T}$, содержащего x, существует множество $U_i \in \Sigma_x$ такое, что $U_i \subset V$.

Из теоремы 1.11 видно, что пространства, удовлетворяющие второй аксиоме счетности, удовлетворяют и первой аксиоме счетности.

Определение 1.17. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение двух топологических пространств. Будем говорить, что f *непрерывно* в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности $V \subset Y$ точки $f(x_0)$ существует окрестность U точки x_0 такая, что $f(U) \subset V$. Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точки пространства X. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если f взаимно однозначно отображает X в Y и отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ непрерывно.

Теорема 1.18. *Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, $V \subset Y$ — открытое множество. Пусть $x \in f^{-1}(V)$. Заметим, что V — окрестность $f(x)$. Тогда существует окрестность U точки x такая, что $f(U) \subset V$, т.е. $U \subset f^{-1}(V)$. Согласно лемме 1.12 $f^{-1}(V)$ открыто. Обратно, пусть $V \subset Y$ — окрестность точки $f(x_0)$. Тогда $f^{-1}(V)$ — окрестность точки x_0 и $f(f^{-1}(V)) = V \subset V$. Следовательно, f непрерывно. □

3. Метрические пространства

Определение 1.19. Пусть на множестве X задана функция $\rho(x, y)$ такая что

- $\rho(x, y) = 0$ тогда, и только тогда когда $x = y$;
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Тогда пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*. Функция $\rho(x, y)$ называется *метрикой*.

Утверждение 1.20. $\rho(x, y) \ge 0$.

Доказательство. Действительно,

$$0 = \rho(x, x) \le \rho(x, y) + \rho(y, x) = 2\rho(x, y).$$

□

Определение 1.21. *Шаровой окрестностью* точки $x \in X$ радиуса ε называется множество $U_\varepsilon(x) = \{y \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$.

Определение 1.22. Точка x называется *внутренней точкой* множества Y, если существует ε такое, что $U_\varepsilon(x) \subset Y$. Множество внутренних точек называется *внутренностью* и обозначается $\operatorname{Int} Y$. Точка x называется *граничной точкой* множества Y, если для любого $\varepsilon > 0$ шаровая окрестность $U_\varepsilon(x)$ содержит точки Y, но $U_\varepsilon(x) \not\subset Y$. Множество всех граничных точек называется *границей* и обозначается ∂Y. *Замыканием* множества Y называется $\bar{Y} = Y \cup \partial Y$.

Определение 1.23. Множество Y называется *замкнутым*, если $\partial Y \subset Y$, и *открытым*, если $\partial Y \cap Y = \emptyset$. Множества $\emptyset$ и X мы будем считать и замкнутыми, и открытыми.

Очевидно, что если Y — открытое множество, то $X \setminus Y$ — замкнутое множество, и наоборот. Сейчас мы докажем несколько утверждений, которые покажут, что система открытых множеств задает топологию.

Определение 1.24. *Расстоянием* между двумя множествами $A, B \subset X$ называется $\rho(A,B) \inf\limits_{x\in A, y\in B} \rho(x,y)$. *Точкой прикосновения* множества $A \subset X$ называется всякая точка x для которой $\rho(x, A) = 0$.

Заметим, что точка прикосновения множества Y это точка в любой окрестности которой содержатся точки множества Y, т.е. это либо внутренняя точка, либо точка границы. Очевидно, что замыкание множества Y можно описать, как множество всех точек прикосновения.

Утверждение 1.25. *Пересечение двух открытых множеств — открытое множество.*

Доказательство. Пусть U_1 и U_2 — два открытых множества. Пусть $x \in U_1 \cap U_2$. Тогда $x \in U_1$ и $x \in U_2$. Следовательно, существует ε_1 такое что $U_{\varepsilon_1}(x) \subset U_1$, и существует ε_2 такое, что $U_{\varepsilon_2}(x) \subset U_2$. Положим $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Тогда $U_\varepsilon(x) \subset U_1$ и $U_\varepsilon(x) \subset U_2$. Следовательно, $U_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap U_2$. Отсюда, x — внутренняя точка. $\square$

Заметим, что из утверждения 1.25 следует, что пересечение любого конечного числа открытых множеств — открытое множество.

Утверждение 1.26. *Объединение любого числа открытых множеств — открытое множество.*

Доказательство. Пусть $x \in \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$. Тогда существует U_α такое, что $x \in U_\alpha$. Следовательно, существует $U_\varepsilon(x)$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$. Тогда $U_\varepsilon(x) \subset \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$. $\square$

Из утверждений 1.25 и 1.26 следует, что открытые множества задают топологию.

Утверждение 1.27. *Множество шаровых окрестностей образуют базу этой топологии.*

Доказательство. Следует из теоремы 1.11. $\square$

Пример 1.28. Пусть $X = \mathbb{R}$. Тогда мы можем задать метрику $\rho(x,y) = |x-y|$. Аналогично мы можем ввести метрику на $\mathbb{R}^n$. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогда

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}.$$

Более того, если $p \geq 1$, то мы можем определить метрику

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из неравенства Минковского (см. 1.3) следует неравенство треугольника для этой метрике. Еще одну метрику на $\mathbb{R}^n$ можно задать, как

$$\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|.$$

Определение 1.29. Две метрики называются *эквивалентными*, если они задают одну и ту же топологию.

Замечание 1.30. Все метрики в примере 1.28 эквивалентны.

Утверждение 1.31. *Все метрические пространства являются Хаусдорфовыми.*

Доказательство. Пусть $x, y \in X$ и $\rho(x, y) = a$. Возьмем две шаровые окрестности $U_{\frac{a}{2}}(x)$ и $U_{\frac{a}{2}}(y)$. Докажем, что они не пересекаются. Предположим, что существует точка $z \in U_{\frac{a}{2}}(x)$ и $z \in U_{\frac{a}{2}}(y)$. Тогда

$$\rho(x, y) \leq \rho(z, x) + \rho(z, y) < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a.$$

Противоречие. $\square$

Утверждение 1.32. *Все метрические пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности.*

Доказательство. Как известно, множество рациональных чисел счетно. Возьмем множество шаровых окрестностей рационального радиуса с центром в точке x. Пусть $x \in V$. Тогда существует шаровая окрестность $U_\varepsilon(x)$ такая, что $U_\varepsilon(x) \subset V$. Пусть $\tilde{\varepsilon}$ — рациональное число, меньшее ε. Тогда $U_{\tilde{\varepsilon}}(x) \subset U_\varepsilon(x) \subset V$. $\square$

Теперь рассмотрим операцию замыкание. Имеют место следующие свойства.

(1) $\bar{Y}$ — замкнутое множество.
(2) $\overline{Y_1 \cup Y_2} = \bar{Y}_1 \cup \bar{Y}_2$
(3) $\overline{Y_1 \cap Y_2} = \bar{Y}_1 \cap \bar{Y}_2$

Определение 1.33. Множество $Y \subset X$ называется *всюду плотным* в X, если $\bar{Y} = X$. Множество $Y \subset X$ называется *нигде не плотным*, если $\operatorname{Int} \bar{Y} = \emptyset$.

Определение 1.34. Пространство X называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество Y.

Пример 1.35. Пусть $X = \mathbb{R}$. Поскольку $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$ и счетно, то $\mathbb{R}$ сепарабельно. Аналогично сепарабельными являются все пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.36. *Каждое пространство X, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = \{U_i\}$ счетная база пространства X. Выберем в каждом U_i точку x_i. Обозначим через M — множество этих точек. Пусть x — произвольная точка и V — ее окрестность. Согласно теореме 1.11 существует множество $U_i \subset V$, т.е. существует точка $x_i \in V$. Тогда $x \in \bar{M}$. Следовательно, $\bar{M} = X$. $\square$

Теорема 1.37. *Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение двух метрических пространств. Отображение f непрерывно в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что для любого x с условием $\rho(x, x_0) < \delta$, выполнено неравенство $\rho_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ (здесь ρ_1 означает метрику в Y).*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке x_0. Рассмотрим шаровую окрестность $U_\varepsilon(f(x_0))$. Согласно определению, существует окрестность V точки x_0 такая, что $f(V) \subset U$. Поскольку V открыто и содержит x_0, то существует шаровая окрестность $V_\delta(x_0) \subset V$. Следовательно, $f(V_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$. Обратно, пусть U — окрестность точки $f(x_0)$. Тогда существует шаровая окрестность $U_\varepsilon(f(x_0)) \subset U$. По предположению, существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что для любого x с условием $\rho(x, x_0) < \delta$, выполнено неравенство $\rho_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Рассмотрим шаровую окрестность $V_\delta(x_0)$. Тогда $f(V_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0)) \subset U$. Следовательно, f непрерывно в точке x_0. $\square$

4. Полные метрические пространства

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве X. Будем говорить, что эта последовательность *сходится* к точке x, если для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для любых $n > N$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Или по другому

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0.$$

Теорема 1.38. *Точка $x \in Y$ тогда и только тогда является точкой прикосновения этого множества, когда существует последовательность $\{x_n\}$ точек из Y сходящаяся к x.*

Доказательство. Пусть x — точка прикосновения. Тогда в шаровой окрестности $U_{\frac{1}{n}}(x)$ содержится хотя бы одна точка $x_n \in Y$. Эти точки образуют последовательность, сходящуюся к x. Обратно, пусть существует последовательность $\{x_n\}$ точек из Y сходящаяся к x. Тогда в любой окрестности $U_\varepsilon(x)$ содержатся все точки последовательности $\{x_n\}$, начиная с какого-то n. □

Определение 1.39. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что для любых $n, m > N$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Любая сходящаяся последовательность фундаментальна. Действительно, выберем такое N, что для любых $n, m > N$ выполнялись неравенства $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, из неравенства треугольника,

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Определение 1.40. Если в пространстве X любая фундаментальная последовательность сходится, то это пространство называется *полным*.

Пример 1.41. Пространство $\mathbb{R}$ с обычной метрикой является полным. Пространство $\mathbb{Q}$ не является полным. Пространство $\mathbb{R}^n$ с обычной метрикой также является полным.

Теорема 1.42. *Метрическое пространство X полно тогда и только тогда, когда в нем всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Доказательство. Предположим, что X полно. Пусть $B_1, B_2, \ldots$ — последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, и пусть $x_1, x_2, \ldots$ — их центры, $r_1, r_2, \ldots$ — их радиусы ($r_n \to 0$). Заметим, что $\rho(x_n, x_m) < \max(r_n, r_m)$. Следовательно, последовательность $x_1, x_2, \ldots$ фундаментальна. Пусть x — ее предел. С другой стороны, шар B_m содержит все точки последовательности $\{x_n\}$, за исключением, быть может, точек $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$. Тогда x — точка прикосновения шара B_m (см. теорема 1.38). Поскольку B_m — замкнутый шар, то $x \in B_m$. Следовательно, $x \in \bigcap\limits_n B_n$.

Предположим, что всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Тогда существует элемент x_{n_1} такой, что $\rho(x_{n_1}, x_n) < \frac{1}{2}$ для всех $n > n_1$. Пусть B_1 — замкнутый шар, радиуса 1 с центром в x_{n_1}. Тогда B_1 содержит все элементы последовательности $\{x_n\}$ начиная с x_{n_1}. Выберем элемент x_{n_2} такой, что $\rho(x_{n_2}, x_n) < \frac{1}{2^2}$ для всех $n > n_2$ и $n_2 > n_1$. Пусть B_2 — замкнутый шар, радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в x_{n_2}. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров B_n. Их радиусы равны $\frac{1}{2^{n-1}}$, т.е. стремятся к нулю. Тогда существует точка $x \in \bigcap\limits_n B_n$. Очевидно, что x является пределом последовательности $\{x_n\}$. □

Теорема 1.43 (теорема Бэра). *Полное метрическое пространство X не может быть представлено в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n,$$

где M_n нигде не плотно. Пусть B_1 — замкнутый шар, такой что $B_1 \cap M_1 = \emptyset$, и его радиуса меньше 1. Поскольку $B_1 \cap M_2$ нигде не плотно, то существует замкнутый шар B_2 такой что $B_2 \subset B_1$, $B_2 \cap M_2 = \emptyset$ и радиус B_2 меньше $\frac{1}{2}$. Аналогично, $B_2 \cap M_3$ нигде не плотно. Тогда существует замкнутый шар B_3 такой что $B_3 \subset B_2$, $B_3 \cap M_3 = \emptyset$ и радиус B_3 меньше $\frac{1}{2^2}$. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров B_n, радиусы которых стремятся к нулю. По теореме 1.42 существует точка $x \in \bigcap\limits_n B_n$. С другой стороны, $x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. □

Определение 1.44. Точка $x \in X$ называется *изолированной*, если существует $\varepsilon > 0$ такой, что $U_\varepsilon(x)$ состоит из одной точки x. Пространство, каждая точка которого является изолированной, называется *дискретным*.

Утверждение 1.45. *Всякое полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно.*

Определение 1.46. Пусть X — метрическое пространство. Полное метрическое пространство X^* называется *пополнением* пространства X, если $X \subset X^*$ и $\bar{X} = X^*$.

Теорема 1.47. *Каждое метрическое пространство X имеет единственное (с точности до изометрии) пополнение.*

Доказательство. Пусть X — метрическое пространство. Рассмотрим множество фундаментальных последовательностей $\tilde{X}$. Назовем две фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентными, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$. Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Рефлексивность и симметричность очевидна. Транзитивность следует из неравенства треугольника

$$\rho(x_n, z_n) \le \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n).$$

Таким образом, $\tilde{X}$ распадается на классы эквивалентности. Определим пространство X^*. Его точками будут классы эквивалентных между собой последовательностей. Определим метрику на этом пространстве следующим образом. Пусть x^*, y^* — два класса эквивалентности. Пусть $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$. Тогда

$$\rho(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Докажем, что этот предел существует и не зависит от выбора $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$. Заметим, что

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| = |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y_m) + \rho(x_n, y_m) - \rho(x_m, y_m)| \le$$

$$\le |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y_m)| + |\rho(x_n, y_m) - \rho(x_m, y_m)| \le \rho(y_n, y_m) + \rho(x_n, x_m).$$

Здесь мы использовали

$$\rho(x_n, y_n) \le \rho(y_n, y_m) + \rho(x_n, y_m),$$

$$\rho(x_n, y_m) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m).$$

Поскольку $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — фундаментальные последовательности, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $n, m > N$ выполнено $\rho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, согласно критерию Коши последовательность $\rho(x_n, y_n)$ сходится. Докажем единственность. Пусть $\{x_n\}, \{x'_n\} \in x^*$ и $\{y_n\}, \{y'_n\} \in y^*$. Тогда

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| = |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y'_n) + \rho(x_n, y'_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \le$$

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y'_n)| + |\rho(x_n, y'_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \le \rho(y_n, y'_n) + \rho(x_n, x'_n).$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y'_n) = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

Теперь проверим аксиомы метрического пространства. То, что $\rho(x^*, y^*) = 0$ тогда и только тогда, когда $x^* = y^*$ следует из определения классов эквивалентности. Симметричность $(\rho(x^*, y^*) = \rho(y^*, x^*))$ очевидна. Осталось доказать неравенство треугольника. Пусть $x^*, y^*, z^* \in X^*$, и пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{z_n\} \in z^*$. Поскольку X — метрическое пространство, то

$$\rho(x_n, z_n) \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n).$$

Переходим к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z_n).$$

Отсюда,

$$\rho(x^*, z^*) \leq \rho(x^*, y^*) + \rho(y^*, z^*).$$

Таким образом, X^* — метрическое пространство. Теперь отобразим X в пространство X^*. Сопоставим $x \in X$ класс фундаментальных последовательностей, сходящихся к x. Заметим, что хотя бы одна такая последовательность есть всегда, например постоянная последовательность $x, x, x, \ldots$. Теперь докажем, что X всюду плотно в X^*. Пусть $x^* \in X^*$ и $\{x_n\} \in x^*$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Так как последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, то существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для любых $n, m > N$. С другой стороны,

$$\rho(x_n, x^*) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Таким образом, произвольная окрестность точки $x^* \in X^*$ содержит точку X. Теперь докажем, что X^* полно. Заметим, что любая последовательность $\{x_n\}$, составленная из точек X сходится. Пусть теперь $\{x_n^*\}$ — фундаментальная последовательность из X^*. Поскольку X всюду плотно в X^*, то существуют точки $x_n \in X$ удовлетворяющие условию $\rho(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n}$. Заметим, что

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_n^*) + \rho(x_n^*, x_m^*) + \rho(x_m^*, x_m) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \rho(x_n^*, x_m^*).$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Тогда она сходится к x^*. С другой стороны,

$$\rho(x^*, x_n^*) \leq \rho(x^*, x_n) + \rho(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n} + \rho(x_n, x_n^*).$$

Таким образом, $\{x_n^*\}$ также сходится к x^*.

Теперь докажем единственность. Пусть есть два пополнения X^* и X^{**} пространства X. Определим отображение $f\colon X^* \to X^{**}$ следующим образом, $f(x) = x$, если $x \in X$. Пусть $x^* \in X^*$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$, составленная из точек X такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Точки $\{x_n\}$ входят в X^{**} и последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в X^{**}. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^{**}$ в пространстве X^{**}. Положим $f(x^*) = x^{**}$. Проверим, что f является изометрией. Пусть ρ_1 и ρ_2 — метрики в X^* и X^{**} соответственно. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y^* \text{ в } X^*,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^{**}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y^{**} \text{ в } X^{**}.$$

Тогда

$$\rho_1(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n),$$

$$\rho_2(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n\to\infty} \rho_2(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Таким образом, $\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**})$. □

Пример 1.48. Пусть $X = \mathbb{Q}$. Рассмотрим стандартную метрику $\rho(x, y) = |x - y|$. Тогда пополнение $X^* = \mathbb{R}$.

Пример 1.49. Пусть $C[a;b]$ — пространство непрерывных функций на $[a;b]$. Рассмотрим метрику $\rho(f, g) = \max\limits_{x\in[a;b]} |f(x) - g(x)|$. Тогда пространство $C[a;b]$ — полное пространство. Действительно, пусть $\{y_n(x)\}$ — фундаментальная последовательность. Это означает что для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для любых $n, m > N$ и любого $x \in [a;b]$ выполнено $|y_n(x) - y_m(x)| < \varepsilon$. Тогда $y_n(x) \rightrightarrows y(x)$. Устремив m к бесконечности в неравенстве $|y_n(x) - y_m(x)| < \varepsilon$, получаем $|y_n(x) - y(x)| \le \varepsilon$, т.е. $\rho(y_n, y) \le \varepsilon$. Следовательно, $\{y_n(x)\}$ сходится к $y(x)$ в смысле метрики ρ.

5. Принцип сжимающих отображений

Определение 1.50. Пусть X — метрическое пространство. Отображение A называется *сжимающим*, если существует число $\alpha < 1$ такое, что $\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y)$.

Утверждение 1.51. *Любое сжимающее отображение непрерывно.*

Доказательство. Действительно, если $\rho(x, y) < \varepsilon$, то $\rho(Ax, Ay) < \varepsilon$. □

Теорема 1.52 (принцип сжимающих отображений). *Любое сжимающее отображение полного метрического пространства X имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ — произвольная точка. Положим

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1 = A^2x_0, \dots, \quad x_n = Ax_{n-1} = A^nx_0, \dots.$$

Докажем, что $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Пусть $m > n$ — натуральные числа. Тогда

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^nx_0, A^nx_{m-n}) \leq \alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}) \leq$$
$$\leq \alpha^n(\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \leq$$
$$\leq \alpha^n(\rho(x_0, x_1) + \rho(Ax_0, Ax_1) + \dots + \rho(A^{m-n-1}x_0, A^{m-n-1}x_1)) \leq$$
$$\leq \alpha^n\rho(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}) \leq \frac{\alpha^n\rho(x_0, x_1)}{1-\alpha}.$$

Поскольку $\alpha < 1$, то $\frac{\alpha^n\rho(x_0,x_1)}{1-\alpha}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Пусть x — ее предел. Тогда, в силу непрерывности отображения A (см. 1.51), получаем

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Докажем единственность точки x. Пусть есть две неподвижные точки x и y. Тогда

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y).$$

Поскольку $\alpha < 1$, то $\rho(x, y) = 0$. Следовательно, $x = y$. □

Рассмотрим некоторые приложения этой теоремы.

Пусть $f(x)$ определена на $[a; b]$ и удовлетворяет условию Липшица, существует R такое, что для любых $x_1, x_2 \in [a; b]$ выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$. Предположим, что $K < 1$ и $f(x)$ отображает $[a; b]$ в себя. Тогда $f(x)$ — сжимающее отображение. Согласно теореме 1.52, последовательность $x_0 \in [a; b]$, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,... сходится к единственному корню $x = f(x)$. В частности, если $f(x)$ имеет производную на $[a; b]$, и $|f'(x)| \leq K < 1$, то из теоремы Лагранжа следует, что $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$, т.е. $f(x)$ — сжимающее отображение.

Рассмотрим отображение A n-мерного пространства в себя, задаваемое системой линейных уравнений

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

Если A сжимающее отображение, то мы можем применить этот метод к решению уравнения $x = Ax$. Осталось выяснить, когда это отображение сжимающее. Ответ зависит от выбора метрики. Пусть на $\mathbb{R}^n$ задана метрика $\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Пусть $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ $x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$, $y' = Ax'$, $y'' = Ax''$. Тогда

$$\rho(y', y'') = \max_i |y'_i - y''_i| = \max_i \left| \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j + b_i \right) - \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x''_j + b_i \right) \right| =$$

$$= \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \right| \le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x'_j - x''_j| \le$$

$$\le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \max_j |x'_j - x''_j| = \left(\max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \rho(x', x'').$$

Отсюда, если $\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$ для любого i, то A — сжимающее отображение. Рассмотрим метрику $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|$. Тогда

$$\rho(y', y'') = \sum_{i=1}^n |y'_i - y''_i| = \sum_{i=1}^n \left| \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j + b_i \right) - \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x''_j + b_i \right) \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \right| \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x'_j - x''_j| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) |x'_j - x''_j| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^n \left(\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) |x'_j - x''_j| = \left(\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \sum_{j=1}^n |x'_j - x''_j| =$$

$$= \left(\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \rho(x', x'').$$

Следовательно, A — сжимающее отображение, если $\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}| < 1$ для любого j. Теперь рассмотрим стандартную метрику

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Тогда

$$\rho^2(y',y'') = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j + b_i\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x''_j + b_i\right)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x'_j - x''_j)\right)^2 \leq$$

используя неравенство Коши-Буняковского

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(x'_j - x''_j)^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\rho(x',x'').$$

Отсюда, получаем условие $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1$.

Рассмотрим еще один важный пример. Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Предположим, что $f(x,y)$ — определена и непрерывна в некоторой области G, содержащей точку (x_0,y_0). Более того, $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по y, т.е. существует K такое, что

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

для любых $(x,y_1),(x,y_2) \in G$. Поскольку $f(x,y)$ — непрерывно, то $|f(x,y)| < M$ в области $G' \subset G$. Теперь рассмотрим прямоугольную область $G'' = \{[x_0 - d, x_0 + d] \times [y_0 - Md, y_0 + Md]\} \subset G'$. Более того, $dK < 1$. Пусть C^* — пространство непрерывных функций на $[x_0 - d, x_0 + d]$ таких, что $|\varphi(x) - y_0| \leq Md$. Зададим метрику на C^*,

$$\rho(\varphi_1,\varphi_2) = \max_{x\in[x_0-d;x_0+d]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

Заметим, что пространство C^* полно (оно является замкнутым подмножеством полного пространства). Рассмотрим отображение A, определяемое

$$\psi(x) = A(\varphi) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt.$$

Заметим, что A переводит C^* в себя. Действительно, пусть $\varphi \in C^*$. Тогда

$$|\psi(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt\right| \leq Md.$$

Пусть $\varphi_1\varphi_2 \in C^*$ и $\psi_1 = A(\varphi_1), \psi_2 = A(\varphi_2)$. Тогда

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} (f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t)))dt\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))|dt \leq \int\limits_{x_0}^{x} K|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|dt \leq$$

$$\leq Kd \max_{x\in[x_0-d;x_0+d]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = Kd\rho(\varphi_1,\varphi_2).$$

Поскольку $Kd < 1$, то A сжимающее отображение. Следовательно, существует единственная функция $\varphi(x)$ такая, что

$$\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t)dt.$$

Тогда $\varphi(x)$ является решением дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Замечание 1.53. Предыдущий пример является доказательством теоремы Коши о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

6. Компактные пространства

Одной из основных теорем в анализе является теорема Гейне–Бореля: из любого покрытия отрезка $[a;b]$ открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Теперь мы примем утверждение теоремы за определение компактных пространств.

Определение 1.54. Топологическое пространство X называется *компактным*, если любое покрытие X открытыми множествами содержит конечное подпокрытие. Компактное хаусдорфово пространство называется *компактом*.

Определение 1.55. Пусть $\{A_\alpha\}$ — некоторая система подмножеств в X. Будем называть $\{A_\alpha\}$ *центрированной*, если любое конечное пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ не пусто.

Теорема 1.56. *Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждая центрированная система его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть $\{A_\alpha\}$ — центрированная система замкнутых подмножеств X и пусть X компактно. Множества $B_\alpha = X \setminus A_\alpha$ — открыты. Поскольку для любого конечного набора A_i $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$, то B_i не покрывают все пространство. Тогда B_α не покрывают все пространство. Следовательно, $\bigcap A_\alpha \neq \emptyset$. Обратно, пусть $\{B_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства X. Пусть $A_\alpha = X \setminus B_\alpha$. Поскольку B_α — покрытие, то $\bigcap A_\alpha = \emptyset$. Следовательно, система $\{A_\alpha\}$ не может быть центрированной. Тогда существуют множества $A_1, A_2, \ldots A_n$ такие, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$. Отсюда, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = X$. □

Следствие 1.57. *Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.*

Доказательство. Пусть $Y \subset X$ — замкнутое подмножество. Пусть $\{A_\alpha\}$ — центрированная система замкнутых подмножеств в Y. Тогда $\{A_\alpha\}$ — центрированная система замкнутых подмножеств и в X. Следовательно, согласно теореме 1.56, $\bigcap A_\alpha \neq \emptyset$. Отсюда, снова по теореме 1.56, Y компактно. □

Следствие 1.58. *Замкнутое подмножество компакта есть компакт.*

Доказательство. Очевидно, что подпространство хаусдорфова пространства есть хаусдорфово пространство. Теперь из следствия 1.57 следует наше утверждение. □

Теорема 1.59. *Компакт замкнут в любом содержащем его метрическом пространстве.*

Доказательство. Пусть K — компакт в метрическом пространстве X, и пусть $y \notin K$. Тогда для любого $x \in K$ существуют окрестности U_x и V_x точек x и y соответственно такие, что $U_x \cap V_x = \emptyset$. Заметим, что U_x покрывают компакт K. Тогда можно выбрать конечное подпокрытие $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}$. Пусть $V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \ldots \cap V_{x_n}$. Тогда V не пересекается с $U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_n}$, а следовательно и с K. Таким образом y не может быть точкой прикосновения. Следовательно, K замкнуто. □

Определение 1.60. Пространство X называется *счетно компактным*, если в любом счетном покрытия X есть конечное подпокрытие.

Очевидно, что компактные пространства счетно компактны. Рассмотрим связь компактных и метрических пространств.

Теорема 1.61. *Если X — счетно компактное метрическое пространство, то любое бесконечное подмножество имеет предельную точку.*

Доказательство. Предположим, что в X есть бесконечное множество не имеющее ни одной предельной точки, то в X существует счетное множество

$$A = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

не имеющее ни одной предельной точки. Рассмотрим

$$A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

Заметим, что A_n — замкнутые множества. Положим $B_n = X \setminus A_n$. Поскольку $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, то B_n — счетное покрытие пространства X. С другой стороны, мы видим, что из этого покрытия нельзя выбрать конечное подпокрытие. Противоречие. □

Замечание 1.62. Заметим, что здесь мы фактически повторили рассуждения, использовавшиеся при доказательстве теоремы 1.56.

Следствие 1.63. *Если X — счетно компактное метрическое пространство, то оно полно.*

Определение 1.64. Пусть X — метрическое пространство, и пусть $M \subset X$ — его подмножество. Множество A называется *ε-сетью* для M, если для любого $x \in M$ существует $a \in A$ такой, что $\rho(x, a) < \varepsilon$. Множество M называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть.

Замечание 1.65. Заметим, что вполне ограниченные множества ограничены. Обратное неверно.

Теорема 1.66. *Если метрическое пространство X счетно компактно, то оно вполне ограниченно.*

Доказательство. Пусть X не вполне ограниченно. Тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ в X не существует конечной ε_0-сети. Пусть $x_1 \in X$ — произвольная точка. Поскольку $\{x_1\}$ не является ε_0-сетью, то существует $x_2 \in X$ такой, что $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon_0$. Поскольку $\{x_1, x_2\}$ не является ε_0-сетью, то существует $x_3 \in X$ такой, что $\rho(x_1, x_3) > \varepsilon_0$, $\rho(x_2, x_3) > \varepsilon_0$ и т.д. Таким образом, мы получили последовательность

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

такую, что $\rho(x_n, x_m) > \varepsilon_0$ для любых $n \neq m$. Тогда эта последовательность не имеет ни одной предельной точки. Противоречие. $\square$

Лемма 1.67. *Пусть X — топологическое пространство со счетной базой, т.е. X удовлетворяет второй аксиоме счетности. Тогда из всякого открытого покрытия можно выбрать конечное или счетное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие. Тогда для любого $x \in X$ существует U_α такой, что $x \in U_\alpha$. Пусть $\{B_n\}$ — счетная база. Тогда существует $B_n(x)$ такой, что $x \in B_n(x) \subset U_\alpha$. Выбрав для каждого $B_n(x)$ одно из U_α, мы получим конечное или счетное подпокрытие. $\square$

Теорема 1.68. *Пусть X — вполне ограниченное метрическое пространство. Тогда X — топологическое пространство со счетной базой, т.е. X удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ построим конечную $\frac{1}{n}$-сеть $\{x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm_n}\}$. Для каждого x_{ni} возьмем шар $B(x_{ni}, \frac{1}{n})$ радиуса $\frac{1}{n}$ с центром в x_{ni}. Их объединение и будет счетной базой. $\square$

Следствие 1.69. *Всякое счетно компактное метрическое пространство компактно.*

Доказательство. Пусть X — счетно компактное пространство. Тогда, по теореме 1.66, оно вполне ограничено. По теореме 1.68, X удовлетворяет второй аксиоме счетности. Согласно лемме 1.67 из любого покрытия X можно выбрать счетное подпокрытие, а следовательно и конечное подпокрытие. $\square$

Рассмотрим еще одну "компактность".

Определение 1.70. Пусть X — метрическое пространство. Мы говорим, что X секвенциально компактно, если из любой последовательности его точек можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Замечание 1.71. Выше (см. 1.61) мы доказали, что счетно компактное пространство секвенциально компактно. На самом деле верно и обратное утверждение.

Теорема 1.72. *Пусть X — секвенциально компактное пространство. Тогда любая непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ ограничена и достигает своего максимума и минимума.*

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ не ограничена. Тогда существует неограниченная возрастающая (или убывающая) последовательность $f(x_n)$. Поскольку X секвенциально компактно, то из последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть x_0 — ее предел. Тогда, в силу непрерывности $f(x)$, $f(x_{n_k})$ сходится к $f(x_0)$. Следовательно, $f(x)$ ограничена. Пусть $A = \sup f(x)$. Тогда существует последовательность $f(x_n)$ сходящуюся к A. Выберем в $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность$\{x_{n_k}\}$. Пусть x_0 — ее предел. Тогда, в силу непрерывности $f(x)$, $f(x_{n_k})$ сходится к $f(x_0)$, т.е. $f(x_0) = A$. Аналогично доказывается для минимума. $\square$

Теорема 1.73. *Метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.*

Доказательство. В одну сторону мы уже доказали. Докажем, в другую. Пусть X секвенциально компактно. Предположим, что существует открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid \exists U_\alpha, B_r(x) \subset U_\alpha\},$$

где $B_r(x)$ — шар радиуса r с центром в x. Докажем непрерывность $f(x)$. Более того, мы докажем 1-липшевость этой функции, т.е. для любых x, y выполнено $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)$. Предположим противное, т.е. существуют $x, y \in X$ такие, что $|f(x) - f(y)| > \rho(x, y)$. Можно считать, что $f(x) > f(y)$. Тогда $f(x) > f(y) + \rho(x, y)$. Выберем $a, b \in \mathbb{R}$ так, что $b > f(y)$, $a < f(x)$ и $a > b + \rho(x, y)$. Тогда $B_b(y) \subset B_a(x)$ и существует U_α такое, что $B_a(x) \subset U_\alpha$. Отсюда, $B_b(x) \subset U_\alpha$. Но тогда $f(y) \geq b$. Противоречие. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна. Тогда, по теореме 1.72, $f(x)$ достигает минимума. Пусть $m = \min f(x)$. Положим $r = \frac{m}{2}$. Пусть $x_1 \in X$. Тогда существует $U_1 \in \{U_\alpha\}$ такое, что $x_1 \in U_1$ и $B_r(x_1) \subset U_1$. Выберем $x_2 \in (X \setminus U_1)$. Тогда существует $U_2 \in \{U_\alpha\}$ такое, что $x_2 \in U_2$ и $B_r(x_2) \subset U_2$. Если мы выбрали $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $U_1, U_2, \dots U_n$, выберем $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Тогда существует $U_{n+1} \in \{U_\alpha\}$ такое, что $x_{n+1} \in U_{n+1}$ и $B_r(x_{n+1}) \subset U_{n+1}$. Таким образом, мы получили последовательность $\{x_n\}$ в которой $\rho(x_n, x_m) \geq r$, но такая последовательность не содержит сходящейся подпоследовательности. $\square$

Теорема 1.74. *Метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограниченно.*

Доказательство. Мы уже доказали, что если X компактно, то оно полно и вполне ограниченно. Предположим, что X полно и вполне ограниченно. Мы докажем, что X секвенциально компактно. Тогда из теоремы 1.73 будет следовать, что X компактно. Пусть $\{x_n\}$ последовательность точек из X. Рассмотрим 1-сеть и множество замкнутых шаров, радиуса 1 с центрами в точках сети. Поскольку эти шары покрывают все пространство и их конечное число, то существует шар B_1 содержащий бесконечное множество точек последовательности $\{x_n\}$. Обозначим это множество A_1. Выберем одну из точек $x_{n_1} \in A_1$. Далее возьмем $\frac{1}{2}$-сеть. Рассмотрим множество замкнутых шаров, радиуса $\frac{1}{2}$ с центрами в точках сети. Поскольку эти шары покрывают все пространство и их конечное число, то существует шар B_2 содержащий бесконечное множество точек A_1. Обозначим это множество A_2. Выберем одну из точек $x_{n_2} \in A_2$. Далее возьмем $\frac{1}{4}$-сеть. Выберем B_3, содержащий бесконечное множество A_3 точек A_2 и $x_{n_3} \in A_3$ и т.д. Таким образом, мы получили последовательность $\{x_{n_i}\}$. Эта последовательность является фундаментальной, поскольку $\rho(x_n, x_m) \leq \frac{1}{2^{\min(n,m)}}$. Следовательно, у этой последовательности существует предел. $\square$

Определение 1.75. Множество M, лежащее в некотором метрическом пространстве X называется *относительно компактным*, если его замыкание компактно.

Следствие 1.76. *Пусть X — полное метрическое пространство. Для того, чтобы множество $M \subset X$ было относительно компактно необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне ограничено.*

Определение 1.77. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — функция на метрическом пространстве. Мы говорим, что f *равномерно непрерывна*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что для любых $x_1, x_2 \in X$ с условием $\rho(x_1, x_2) < \delta$, выполнено неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Теорема 1.78. *Непрерывная функция на компактном метрическое пространство X равномерно непрерывна.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Предположим, что $f(x)$ не равномерно непрерывна. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что при любом n существуют $x_n, x'_n \in X$ с условием $\rho(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$, для которых $|f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon$. Из последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть x — ее предел. Тогда последовательность $\{x'_{n_k}\}$ также сходится к x. С другой стороны, поскольку

$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| > \varepsilon$, то

$$|f(x) - f(x_{n_k})| > \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x) - f(x'_{n_k})| > \frac{\varepsilon}{2},$$

что противоречит непрерывности $f(x)$. □

Рассмотрим метрическое пространство $C[a;b]$.

Определение 1.79. Семейство функций Φ, определенных на $[a;b]$ называется *равномерно ограниченным*, если существует $K \in \mathbb{R}$, что для любого $\varphi \in \Phi$ и любого $x \in [a;b]$ выполнено $|\varphi(x)| < K$. Семейство функций Φ, определенных на $[a;b]$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что для всех $x_1, x_2 \in [a;b]$ с условием $|x_1 - x_2| < \delta$, и любой $\varphi \in \Phi$ выполнено неравенство $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$.

Теорема 1.80 (теорема Арцела). *Для того чтобы семейство непрерывных функций Φ, определенных на $[a;b]$, было относительно компактно в $C[a;b]$, необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равномерно ограничено и равномерно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство непрерывных функций Φ компактно. Мы можем считать, что Φ замкнуто. Тогда, согласно следствию 1.76, для любого ε в семействе Φ существует конечная $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Заметим, что все функции φ_i ограничены, т.е. существуют K_i такие, что $|\varphi(x)| < K_i$. Положим $K = \max K_i + \frac{\varepsilon}{3}$. Заметим, что для любой $\varphi \in \Phi$ существует φ_i такая, что

$$\rho(\varphi, \varphi_i) = \max_{x \in [a;b]} |\varphi(x) - \varphi_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда, для любого $x \in [a;b]$

$$|\varphi(x)| < |\varphi_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} < K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leq K.$$

Таким образом, Φ равномерно ограничено. Поскольку все функции φ_i непрерывны, то они равномерно непрерывны. Тогда существуют δ_i такие, что для любых $x_1, x_2 \in [a;b]$ с условием $|x_1 - x_2| < \delta_i$ выполнено неравенство $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Положим $\delta = \min \delta_i$. Пусть $\varphi \in \Phi$ — любая функция. Тогда существует φ_i такая, что

$$\rho(\varphi, \varphi_i) = \max_{x \in [a;b]} |\varphi(x) - \varphi_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда, для любых $x_1, x_2 \in [a;b]$ с условием $|x_1 - x_2| < \delta$ имеем

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1) + \varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2) + \varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| \leq$$

$$|\varphi(x_1)-\varphi_i(x_1)|+|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)|+|\varphi_i(x_2)-\varphi(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Таким образом, Φ равномерно непрерывно.

Достаточность. Пусть Φ равномерно ограничено и равномерно непрерывно. Следовательно существует $K \in \mathbb{R}$ такое, что $|\varphi(x)| < K$ для любых $x \in [a;b]$, $\varphi \in \Phi$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда существует δ такое, что для любых $\varphi \in \Phi$ и $x_1, x_2 \in [a;b]$ с условием $|x_1 - x_2| < \delta$ выполнено неравенство $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$. Разобьём отрезок $[a;b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ на интервалы длины меньше δ. Отрезок $[-K;K]$ мы разобьем точками $-K = y_0 < y_1 < \dots < y_m = K$ на интервалы длины меньше ε. Рассмотрим множество ломаных ψ_n, проходящих через точки

$$(x_0, y_{j_0}), (x_1, y_{j_1}), (x_2, y_{j_2}), \dots, (x_k, y_{j_k}),$$

где $j_0, j_1, \dots, j_k$ — произвольные целые числа от 0 до m. Заметим, что таких ломаных конечное число. Пусть $\varphi \in \Phi$ — произвольная функция, и $x \in [a;b]$ — произвольная точка на отрезке. Выберем ломаную ψ так, что $|\varphi(x_i) - \psi(x_i)| < \varepsilon$ для любого x_i. Выберем ближайшую к x слева точку x_i. Тогда

$$\begin{gathered}|\varphi(x)-\psi(x)| = |\varphi(x)-\varphi(x_i)+\varphi(x_i)-\psi(x_i)+\psi(x_i)-\psi(x)| \le \\ \le |\varphi(x)-\varphi(x_i)|+|\varphi(x_i)-\psi(x_i)|+|\psi(x_i)-\psi(x)| \le \\ \varepsilon+\varepsilon+|\psi(x_i)-\psi(x)| = 2\varepsilon+|\psi(x_i)-\psi(x_{i+1})|.\end{gathered}$$

Здесь мы использовали линейность ψ на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$. Заметим, что

$$|\psi(x_i)-\psi(x_{i+1})| = |\psi(x_i)-\varphi(x_i)+\varphi(x_i)-\varphi(x_{i+1})+\varphi(x_{i+1})-\psi(x_{i+1})| \le$$

$$\le |\psi(x_i)-\varphi(x_i)|+|\varphi(x_i)-\varphi(x_{i+1})|+|\varphi(x_{i+1})-\psi(x_{i+1})| < \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Таким образом,

$$|\varphi(x)-\psi(x)| < 5\varepsilon.$$

Мы получили 5ε-сеть. В силу произвольности ε, Φ вполне ограниченное множество, а следовательно, Φ относительно компактно в $C[a;b]$. □

Глава 2

Нормированные пространства

1. Линейные пространства

Определение 2.1. Пусть на множестве L заданы операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие следующим свойствам.

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)\ \forall x,y,z \in L$;
(2) $x+y = y+x\ \forall x,y \in L$;
(3) существует элемент $0 \in L$ такой, что $x+0 = x\ \forall x \in L$;
(4) для любого $x \in L$ существует элемент $(-x) \in L$ такой, что $x+(-x) = 0$;
(5) для любых чисел α, β и любого $x \in L$ выполнено $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$;
(6) для любого числа α и любых $x,y \in L$ выполнено $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$;
(7) для любых чисел α, β и любого $x \in L$ выполнено $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
(8) $1 \cdot x = x\ \forall x \in L$.

Тогда L называется *линейным пространством*.

Замечание 2.2. Здесь α и β принадлежат некоторому полю. Мы будем рассматривать пространства над вещественными и комплексными числами.

Определение 2.3. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не все равные нулю, что

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Определение 2.4. Если в пространстве L существуют n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов линейно зависимы, то говорят, что L имеет *размерность* n. Если в L можно найти систему из произвольного конечного числа векторов, то говорят, что L *бесконечномерно*. *Базисом* n-мерного пространства L называется любая система из n линейно независимых элементов.

Определение 2.5. Непустое подмножество L' линейного пространства L называется *подпространством*, если L' — является пространством, т.е. если $x, y \in L'$, то $\alpha x + \beta y \in L'$ для любых α, β.

Заметим, что линейное пространство является модулем над полем. Тогда, если L' — подпространство L, мы можем рассмотреть фактормодуль L/L', который также будет линейным пространством. Пространство L/L' называется *факторпространством*. Размерность факторпространства L/L' называется *коразмерностью* подпространства L' в пространстве L.

Определение 2.6. Пусть L — линейное пространство над полем K. Отображение $f\colon V \to K$ называется *линейным функционалом*, если

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in L$;
(2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)\ \forall x \in L, \alpha \in K$.

Определение 2.7. Пусть на линейном пространстве L задан линейный функционал f. Множество

$$L_f = \{x \mid x \in L, f(x) = 0\}$$

называется *подпространством нулей* (или *ядром*) функционала f.

Легко проверяется, что L_f — подпространство. Действительно, если $x, y \in L_f$, $\alpha \in K$, то $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0$, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = 0$.

Утверждение 2.8. *Пусть f — линейный функционал, отличный от тождественного нуля. Тогда подпространство L_f имеет коразмерность один.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in L$ и $f(x_0) \neq 0$. Умножив при необходимости на $\frac{1}{f(x_0)}$, мы можем считать, что $f(x_0) = 1$. Тогда $x - f(x)x_0 \in L_f$. Действительно,

$$f(x - f(x)x_0) = f(x) - f(x)f(x_0) = f(x) - f(x) = 0.$$

Таким образом, для любого элемента $x \in L$ имеем представление $x = ax_0 + y$, где $y \in L_f$. Это представление единственно. Действительно, предположим, что есть два представления

$$x = ax_0 + y, \quad x = a'x_0 + y', \quad y, y' \in L_f.$$

Тогда $(a-a')x_0+(y-y')=0$. Если $a=a'$, то $y=y'$. Предположим, что $a\neq a'$. Тогда

$$x_0=\frac{1}{a-a'}(y'-y)\in L_f.$$

Противоречие. Пусть $x,y\in L$. Заметим, что x и y лежат в одном смежном классе тогда и только тогда, когда $f(x)=f(y)$. Действительно, если x и y лежат в одном смежном классе тогда и только тогда, когда $x-y\in L_f$. С другой стороны, $f(x-y)=f(x)-f(y)$. Поскольку всякий смежный класс определяется своим представителем, то в качестве такого можно взять ax_0. Отсюда видно, что пространство L/L_f одномерно. $\square$

Пусть на пространстве L заданы два линейных функционала f,g. Мы можем определить их сумму, как

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x).$$

Не трудно заметить, что $f+g$ также линейный функционал. Мы можем определить умножение функционала f на число α как $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$. Очевидно, что эти операции удовлетворяют аксиомам линейного пространства.

Определение 2.9. Множество всех функционалов на данном линейном пространстве L обозначается L^* и называется *сопряженным линейным пространством.*

Замечание 2.10. Элементы пространства L^* часто называют *ковекторами.*

Рассмотрим сначала конечномерный случай. Пусть $e_1,e_2,\dots,e_n$ — базис пространство L. Числа

$$a_1=f(e_1),\quad a_2=f(e_2),\dots\dots,\quad a_n=f(e_n)$$

называются *коэффициентами* функционала f в базисе $e_1,e_2,\dots,e_n$. Для любого вектора

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n,$$

в силу линейности f, имеем

$$f(x)=x_1a_1+x_2a_2+\dots+x_na_n.$$

Таким образом, всякий линейный функционал однозначно определяется своими коэффициентами в базисе $e_1,e_2,\dots,e_n$. Пусть $f_1,f_2,\dots,f_n$ — множество функционалов таких, что

$$f_i(e_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

Утверждение 2.11. *Функционалы $f_1, f_2, \dots, f_n$ образуют базис в пространстве L^*. Более того, коэффициенты функционала являются его координатами.*

Доказательство. Пусть задан линейный функционал f, и $a_1, a_2, \dots, a_n$ — его коэффициенты. Пусть $x = x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n$. Тогда

$$(a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_nf_n)(x) = (a_1f_1 + \dots + a_nf_n)(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) =$$
$$= x_1(a_1f_1 + \dots + a_nf_n)(e_1) + \dots + x_n(a_1f_1 + \dots + a_nf_n)(e_n) =$$
$$= x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n.$$

Осталось проверить линейную независимость $f_1, f_2, \dots, f_n$. Предположим, что существуют $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не все равные нулю, что

$$\lambda_1f_1 + \lambda_2f_2 + \dots + \lambda_nf_n = 0.$$

Пусть $\lambda_i \neq 0$. Тогда

$$0 = (\lambda_1f_1 + \lambda_2f_2 + \dots + \lambda_nf_n)(e_i) = \lambda_if_i(e_i) = \lambda_i.$$

Противоречие. □

Следствие 2.12. *Для конечномерных пространств выполнено* $\dim L = \dim L^*$.

Рассмотрим пространство $(L^*)^*$ сопряженное к сопряженному. Пусть $x \in L$. Тогда x можно рассматривать, как линейный функционал на L^*. Действительно, $x(f) = f(x)$. Линейность очевидна. Тогда существует естественное отображение $L \to (L^*)^*$, которое является изоморфизмом в конечномерном случае.

Определение 2.13. Пусть $x, y \in L$. Множество точек вида $\alpha x + (1-\alpha)y$, где $0 \le \alpha \le 1$ называется *(замкнутым) отрезком*. Множество M называется *выпуклым*, если для любых $x, y \in M$ отрезок, соединяющий их, лежит в M.

Само L очевидно является выпуклым множеством.

Утверждение 2.14. *Пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

Доказательство. Пусть $M = \bigcap\limits_{\alpha} M_\alpha$ и все M_α — выпуклые множества. Если $x, y \in M$, то $x, y \in M_\alpha$, для любого α. Тогда отрезок xy лежит во всех M_α. Следовательно, отрезок xy лежит в M. □

Определение 2.15. Пусть A — множество в L. Наименьшее выпуклое множество, содержащие A, называется *выпуклой оболочкой* множества A. Очевидно, что выпуклой оболочкой является пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A.

Пример 2.16. Рассмотрим один важный пример выпуклой оболочки. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ — точки пространства L. Будем говорить, что эти точки находятся в общем положении, если они не содержаться ни в каком $(n-1)$-мерном подпространстве. Выпуклая оболочка точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, находящихся в общем положении, называется n-мерным *симплексом*.

Определение 2.17. Неотрицательный функционал p, определенный на вещественном линейном пространстве L, называется *выпуклым*, если

(1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in L$;
(2) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ $\forall x \in L$, $\alpha \geq 0$.

Если выполнено $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, то $p(x)$ называется *полунормой*.

Утверждение 2.18. *Пусть $p(x)$ — выпуклый функционал на линейном пространстве L и k — положительное число. Тогда множество $E = \{x \mid p(x) \leq k\}$ выпукло.*

Доказательство. Пусть $x, y \in E$. Тогда

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq p(\alpha x) + p((1-\alpha)y) = \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y) \leq$$
$$\leq \alpha k + (1-\alpha)k = k.$$

Здесь $0 \leq \alpha \leq 1$. Таким образом, E выпукло. □

Теорема 2.19 (теорема Хана–Банаха). *Пусть $p(x)$ — конечный выпуклый функционал, определенный на вещественном пространстве L. Пусть L_0 — подпространство в L, и $f_0(x)$ — линейный функционал на L_0, удовлетворяющий условию $f_0(x) \leq p(x)$ для любого $x \in L_0$. Тогда существует линейный функционал $f(x)$ на пространстве L такой, что $f(x) = f_0(x)$ для любого $x \in L_0$, и $f(x) \leq p(x)$ для любого $x \in L$.*

Доказательство. Пусть $y \in L$ и $y \notin L_0$. Пусть L' — подпространство, порожденное L_0 и элементом y. Рассмотрим продолжение $f'(x)$ линейного функционала $f_0(x)$, определяемое $f'(y) = a$. Поскольку любой элемент L' имеет вид $\alpha y + x$, где $x \in L_0$. Тогда $f'(\alpha y + x) = \alpha a + f_0(x)$. Теперь выберем a так, чтобы

$$f'(\alpha y + x) = \alpha a + f_0(x) \leq p(\alpha y + x).$$

Если $\alpha > 0$, то, деля на α, получаем

$$f_0\left(\frac{x}{\alpha}\right) + a \leq p\left(\frac{x}{\alpha} + y\right).$$

Отсюда,

$$a \leq p\left(\frac{x}{\alpha} + y\right) - f_0\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Если $\alpha < 0$, то, деля на $-\alpha$, получаем

$$-f_0\left(\frac{x}{\alpha}\right) - a \leq p\left(-\frac{x}{\alpha} - y\right).$$

Отсюда,

$$a \geq -p\left(-\frac{x}{\alpha} - y\right) - f_0\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Докажем, что

$$-f_0(y_1) + p(y_1 + y) \geq -f_0(y_2) - p(-y_2 - y)$$

для любых $y_1, y_2 \in L_0$. Действительно,

$$f_0(y_1) - f_0(y_2) = f_0(y_1 - y_2) \leq p(y_1 - y_2) = p((y_1 + y) + (-y_2 - y)) \leq \\ \leq p(y_1 + y) + p(-y_2 - y).$$

Пусть

$$a' = \inf_{y_1}(-f_0(y_1) + p(y_1 + y)), \quad a'' = \sup_{y_2}(-f_0(y_2) - p(-y_2 - y)).$$

Тогда $a' \geq a''$. Выберем a так, чтобы $a' \geq a \geq a''$. Тогда функционал f', определяемый на L' формулой $f'(\alpha y + x) = \alpha a + f_0(x)$ удовлетворяет условию $f'(x) \leq p(x)$ для любого $x \in L'$. Если в L можно выбрать счетную систему $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ порождающую все L, то искомый функционал строится по индукции. В общем случае нужно применить лемму Цорна. Совокупность B продолжений $f(x)$ функционала $f_0(x)$, удовлетворяющих условию $f_0(x) \leq p(x)$, является частично упорядоченным множеством, и каждое его линейно упорядоченное подмножество B_0 обладает верхней гранью. Этой верхней гранью является функционал, определенный на объединении областей определения функционалов $f \in B_0$. По лемме Цорма во всем B существует максимальный элемент f. Этот максимальный элемент и определяет искомый функционал. □

Рассмотрим теперь комплексный случай.

Определение 2.20. Неотрицательный вещественный функционал p, определенный на комплексном линейном пространстве L, называется *выпуклым*, если

(1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)\ \forall x, y \in L$;
(2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)\ \forall x \in L,\ \alpha \in \mathbb{C}$.

Теорема 2.21 (теорема Хана–Банаха). *Пусть $p(x)$ — конечный выпуклый функционал, определенный на комплексном пространстве L. Пусть L_0 — подпространство в L, и $f_0(x)$ — линейный функционал на L_0, удовлетворяющий условию $|f_0(x)| \leq p(x)$ для любого $x \in L_0$. Тогда существует линейный функционал $f(x)$ на пространстве L такой, что $f(x) = f_0(x)$ для любого $x \in L_0$, и $|f(x)| \leq p(x)$ для любого $x \in L$.*

Доказательство. Пусть L_R и L_{0R} — пространства L и L_0, рассматриваемые как вещественные линейные пространства. Положим $f_{0R} = Ref_0(x)$. Поскольку $|f_0(x)| \leq p(x)$, то $f_{0R}(x) \leq p(x)$ для всех $x \in L_0$. Согласно теореме 2.19, существует действительный линейный функционал f_R на L_R, удовлетворяющий условиям

$$f_R(x) \leq p(x), \forall x \in L_R, \quad f_R(x) = f_{0R}(x), \forall x \in L_{0R}.$$

Очевидно, что

$$-f_R(x) = f_R(-x) \leq p(-x) = p(x).$$

Следовательно, $|f_R(x)| \leq p(x)$. Положим $f(x) = f_R(x) - if_R(ix)$. Заметим, что $f(x) = f_0(x)$ для любого $x \in L_0$, и $Ref(x) = f_R(x)$. Осталось показать, что $|f(x)| \leq p(x)$. Предположим, что существует $x_0 \in L$ такое, что $|f(x_0)| > p(x_0)$. Тогда $f(x_0) = re^{i\varphi}$. Положим $y_0 = e^{-i\varphi}x_0$. Тогда

$$f_R(y_0) = Ref(y_0) = Re(e^{-i\varphi}f(x_0)) = Re(e^{-i\varphi}re^{i\varphi}) = r > p(x_0).$$

Заметим, что

$$p(y_0) = p(e^{i\varphi}x_0) = |e^{i\varphi}|p(x_0) = p(x_0).$$

Тогда $f_R(y_0) > p(y_0)$. Противоречие. $\square$

Определение 2.22. *Ядром* множества $E \subset L$ называется совокупность точек $x \in E$ таких, что для любого $y \in E$ существует ε такое, что $x + \alpha y \in E$ для любых $|\alpha| < \varepsilon$.

Определение 2.23. Пусть E — выпуклое множество, ядро которого содержит 0. Пусть

$$p_E(x) = \inf\{r \mid \frac{x}{r} \in E\}.$$

Функционал $p_E(x)$ называется *функционалом Минковского.*

Теорема 2.24. *Функционал минковского $p_E(x)$ является конечным и выпуклым.*

Доказательство. Конечность следует из того, что 0 принадлежит ядру. Докажем выпуклость. Очевидно, что $p_E(x) > 0$. Пусть $\alpha > 0$. Тогда

$$p_E(\alpha x) = \inf\{r \mid \frac{\alpha x}{r} \in E\} = \alpha \inf\{r \mid \frac{x}{r} \in E\} = \alpha p_E(x).$$

Пусть $x, y \in L$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Выберем r_1, r_2 так, что

$$p_E(x_1) < r_1 < p_E(x_1) + \varepsilon, \quad p_E(x_2) < r_2 < p_E(x_2) + \varepsilon.$$

Положим $r = r_1 + r_2$. Тогда

$$\frac{x_1 + x_2}{r} = \frac{r_1}{r}\frac{x_1}{r_1} + \frac{r_2}{r}\frac{x_2}{r_2}$$

принадлежит отрезку с концами $\frac{x_1}{r_1}$, $\frac{x_2}{r_2}$. В силу выпуклости E, $\frac{x_1+x_2}{r} \in E$. Тогда

$$p_E(x_1 + x_2) \leq r = r_1 + r_2 < p_E(x_1) + p_E(x_2) + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε, получаем $p_E(x_1 + x_2) \leq p_E(x_1) + p_E(x_2)$. □

2. Нормированные пространства

Определение 2.25. Пусть L — линейное пространство. Конечный вещественный функционал $p(x)$ называется *нормой*, если он удовлетворяет следующим условиям.

(1) $p(x) \geq 0$, причем $p(x) = 0$ только при $x = 0$;
(2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in L$;
(3) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, $\forall x \in L$, $\forall \alpha \in K$.

Линейное пространство, в котором задана норма, называется *нормированным пространством.* Норму элемента $x \in L$ мы будем обозначать $\|x\|$.

Заметим, что на любом нормированном пространстве, мы можем задать метрику

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Непосредственно проверяются аксиомы метрики.

Определение 2.26. Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством.*

Теорема 2.27. *Нормированное пространство L полно тогда и только тогда, когда из сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$.*

Доказательство. Пусть L — полно и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ сходится. Рассмотрим $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$. Тогда для любого ε существует номер N такой, что длялюбого $n>N$ и любого m выполнено

$$\|s_{n+m}-s_n\|\le\sum_{k=n+1}^{n+m}\|x_k\|<\varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{s_n\}$ фундаментальна. Обратно. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Рассмотрим подпоследовательность x_{n_m} такую, что $\|x_{n_{m+1}}-x_{n_m}\|<\frac{1}{2^m}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\|x_{n_{m+1}}-x_{n_m}\|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(x_{n_{m+1}}-x_{n_m})$ сходится. Следовательно, сходится последовательность $x_{n_1}-x_{n_m}$ при m стремящимся к бесконечности. Тогда сходится последовательность $\{x_{n_m}\}$, а, следовательно, и последовательность $\{x_n\}$. $\square$

Определение 2.28. Две нормы p_1 и p_2 на линейном пространстве L называются *эквивалентными*, если существуют положительные числа c_1 и c_2 такие, что

$$c_1p_1(x)\le p_2(x)\le c_2p_1(x).$$

Замечание 2.29. Очевидно, что эта эквивалентность рефлексивна, симметрична и транзитивна.

Теорема 2.30. *На любом конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Пусть L — конечномерное пространство и $e_1,e_2,\dots,e_n$ — его базис. Пусть

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n.$$

Введем норму

$$p(x)=|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|.$$

Пусть $q(x)$ — другая норма. Положим $c=\max\limits_i q(e_i)$. Тогда

$$q(x)\le|x_1|q(e_1)+|x_2|q(e_2)+\dots+|x_n|q(e_n)\le c(|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|)=cp(x).$$

В частности, $q(x-y) \le cp(x-y)$. Таким образом, функция q непрерывна относительно метрики p. Заметим, что q достигает максимума и минимума на единичной сфере относительно p, т.е. на множестве $S = \{x \mid p(x) = 1\}$. Пусть $m = \min\limits_{x \in S} q(x)$. Заметим, что $m > 0$. Тогда

$$q(x) = q\left(p(x)\frac{x}{p(x)}\right) = p(x)q\left(\frac{x}{p(x)}\right) \ge mp(x).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $p(\frac{x}{p(x)}) = 1$. Таким образом, $mp(x) \le q(x) \le cp(x)$, т.е. любая метрика эквивалентна $p(x)$. □

Следствие 2.31. *В конечномерном нормированном пространстве замкнутые шары компактны.*

Следствие 2.32. *Любое конечномерное нормированное вещественное или комплексное пространство полно.*

Следствие 2.33. *Всякое конечномерное линейное подпространство нормированного пространства замкнуто.*

Замечание 2.34. Утверждение 2.33 неверно в бесконечномерном случае. Например в пространстве $C[a;b]$ множество многочленов образуют подпространство, которое не замкнуто.

Теорема 2.35 (лемма о почти перпендикуляре). *Пусть L_0 — замкнутое подпространство в нормированном пространстве L и $L_0 \ne L$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in L$ такой, что $\|x_\varepsilon\| = 1$ и $\|x_\varepsilon - y\| > 1 - \varepsilon$ для любого $y \in L_0$.*

Доказательство. Пусть $z \in L$, $z \notin L_0$. Положим, $\delta = \inf\limits_{y \in L_0} \|z - y\|$. Поскольку L_0 — замкнуто, то $\delta > 0$. Выберем ε_0 так, что $\frac{\delta}{\delta+\varepsilon_0} > 1 - \varepsilon$. Выберем $y_0 \in L_0$ так, что $\|z - y_0\| < \delta + \varepsilon_0$. Положим $x_\varepsilon = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|}$. Тогда для любого $y \in L_0$ выполнено

$$\|x_\varepsilon - y\| = \frac{1}{\|z - y_0\|}\|z - y_0 - \|z - y_0\|y\| \ge \frac{\delta}{\|z - y_0\|} \ge \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon.$$

□

Теорема 2.36 (теорема Рисса). *Нормированное пространство L конечномерно тогда и только тогда, когда любое ограниченное множество в L относительно компактно.*

Доказательство. В одну сторону мы уже доказали (см. 2.31 1.58). Предположим, что L бесконечномерное. Пусть $x_1 \in L$ и $\|x_1\| = 1$. Положим L_1 — линейная оболочка x_1. Поскольку L бесконечномерно, то $L_1 \ne L$. Согласно теореме 2.35 существует x_2

такой, что $\|x_2\| = 1$ и для любого $x \in L_1$ выполнено $\|x_2 - x\| > \frac{1}{2}$. В частности $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$. Положим L_2 — линейная оболочка x_1, x_2. Снова $L_2 \neq L$. Согласно теореме 2.35 существует x_3 такой, что $\|x_3\| = 1$ и для любого $x \in L_2$ выполнено $\|x_3 - x\| > \frac{1}{2}$. В частности $\|x_3 - x_1\| > \frac{1}{2}$, $\|x_3 - x_2\| > \frac{1}{2}$. Продолжая этот процесс, мы получаем последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ такую, что $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$. Из этой подпоследовательности нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, шар радиуса 1 не компактен. $\square$

Рассмотрим теперь сопряженное пространство L. Пусть L^* — множество непрерывных линейных функционалов на L. Зададим на нем норму

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Эта норма удовлетворяет всем требованиям. Действительно, $\|f\| > 0$ для любого ненулевого функционала, $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$. Проверим неравенство треугольника,

$$\|f_1 + f_2\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f_1(x) + f_2(x)|}{\|x\|} \leq= \sup_{x \neq 0} \frac{|f_1(x)|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{|f_2(x)|}{\|x\|} = \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Топология в L^*, определяемая этой нормой, называется *сильной топологией* в L^*.

Теорема 2.37. *Сопряженное пространство полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность функционалов. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует N такой, что для любых $n, m > N$ выполнено $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Тогда для любого $x \in L$ имеем

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|.$$

Таким образом, последовательность $f_n(x)$ сходится для любого x. Положим

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Докажем, что $f(x)$ — линейный непрерывный функционал. Проверим линейность

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to \infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to \infty} (\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)) =$$

$$= \alpha \lim_{n \to \infty} f_n(x) + \beta \lim_{n \to \infty} f_n(y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Выберем N так, что для любых $n > N$ и p выполнено $\|f_{n+p} - f_n\| < 1$. Тогда $\|f_{n+p}\| \leq \|f_n\| + 1$. Следовательно, $|f_{n+p}(x)| \leq (\|f_n\| + 1)\|x\|$. Устремляя p к бесконечности, получаем

$|f(x)| \leq (\|f_n\|+1)\|x\|$. Отсюда, $f(x)$ непрерывен. Зафиксируем ε, выберем N так, что для любых $n > N$ и p выполнено $\|f_{n+p}-f_n\| < \varepsilon$. Заметим, что существует $x \in L$ такое, что

$$\|f_n - f\| \leq \frac{|f_n(x) - f(x)|}{\|x\|} + \varepsilon = \left| f_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| + \varepsilon.$$

Тогда

$$\|f_{n+p} - f\| \leq \left| f_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| + 2\varepsilon.$$

Следовательно, $\{f_n\}$ сходится к f. □

3. Эвклидовы и гильбертовы пространства

Определение 2.38. Пусть L — вещественное линейное пространство. *Скалярным произведением* в L называется действительная функция (x, y) на $L \times L$, удовлетворяющая следующим условиям.

(1) $(x, y) = (y, x)$;
(2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
(3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
(4) $(x, x) \geq 0$ причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Линейное пространство, в котором задано скалярное произведение, называется *эвклидовым пространством.*

Заметим, что скалярное произведение задает норму с помощью формулы

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Таким образом эвклидовы пространства являются нормированными.

Определение 2.39. Полное сепарабельное эвклидово пространство называется *гильбертовым пространством.*

Замечание 2.40. Иногда в определении гильбертовых пространств требуют бесконечномерность.

Замечание 2.41. Заметим, что нормированное пространство мы определили как над полем вещественных чисел, так и над полем комплексных чисел. Однако, эвклидово пространство и гильбертово пространство мы определили лишь над полем вещественных чисел. Более того, если определить скалярное произведение таким же образом, то $(ix, ix) = -(x, x)$. Таким образом, квадраты x и

ix не могут быть одновременно положительными. Поэтому на комплексных пространствах вводят эрмитово скалярное произведение.

Определение 2.42. Пусть L — комплексное линейное пространство. *Эрмитовым скалярным произведением* в L называется комплексная функция (x, y) на $L \times L$, удовлетворяющая следующим условиям.

(1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
(2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
(3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
(4) $(x, x) \geq 0$ причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Линейное пространство, в котором задано эрмитово скалярное произведение, называется *эрмитовым пространством.*

Утверждение 2.43. $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$

Доказательство. Действительно,

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha(y, x)} = \bar{\alpha}\overline{(y, x)} = \bar{\alpha}(x, y).$$

□

Теперь вернемся к вещественным пространствам.

Теорема 2.44 (неравенство Коши–Буняковского). *Пусть L — вещественное эвклидово пространство. Тогда*

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Доказательство. Рассмотрим $x + \alpha y$. Тогда

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) = (y, y)\alpha^2 + 2(x, y)\alpha + (x, x).$$

Это неравенство должно быть выполнено для любого α. Следовательно, дискриминант должен быть отрицательным, т.е.

$$4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0.$$

Отсюда, $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$. □

Определение 2.45. Два элемента x, y называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Система ненулевых векторов $\{x_\alpha\}$ называется *ортогональной*, если $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Определение 2.46. Система векторов $\{x_\alpha\}$ называется *полной* в L, если наименьшее содержащее $\{x_\alpha\}$ замкнутое подпространство есть само L. Если ортогональная система $\{x_\alpha\}$ полна, то она называется *ортогональным базисом.* Если при этом норма каждого элемента равна 1, то система $\{x_\alpha\}$ называется *ортонормированным базисом.*

Теорема 2.47. *Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ — линейно независимая система элементов в эвклидовом пространстве L. Тогда в L существует ортонормированная система*

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

такая, что

$$\varphi_n = a_{n1} f_1 + a_{n2} f_2 + \dots + a_{nn} f_n,$$

причем $a_{nn} \neq 0$.

Доказательство. Элемент φ_1 ищется в виде $\varphi_1 = a_{11} f_1$. Находим a_{11}, получаем

$$1 = (\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2 (f_1, f_1).$$

Отсюда, $a_{11} = \frac{1}{(f_1, f_1)}$. Предположим, что $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ уже построены. Тогда

$$\varphi_n = f_n - b_{n1}\varphi_1 - b_{n2}\varphi_2 - \dots - b_{nn-1}\varphi_{n-1}.$$

Находим b_{ni} из условия $(\varphi_n, \varphi_i) = 0$. Получаем $b_{ni} = (f_n, \varphi_i)$. Таким образом мы получили элемент φ_n, ортогональный ко всем $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$. Поделим его на (φ_n, φ_n), получаем ортонормированную систему. □

Следствие 2.48. *В сепарабельном эвклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ — счетное всюду плотное множество. Тогда система $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ полна. Выберем из этой системы полную систему линейно независимых элементов $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$. Для этого достаточно исключить все элементы g_n, являющиеся линейной комбинацией $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$. Применим к полученной системе теорему 2.47, получим ортонормированный базис. □

Определение 2.49. Пусть $\{f_n\}$ — ортонормированная система в эвклидовом пространстве L, $g \in L$. Число $c_n = (g, f_n)$ называется *коэффициентом Фурье* элемента $g(x)$ по ортонормированной системе $\{f_n\}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ называется *рядом Фурье* элемента g по ортонормированной системе $\{f_n\}$.

Теорема 2.50 (неравенство Бесселя). *Пусть $\{f_n\}$ — ортонормированная система в эвклидовом пространстве L, $g \in L$. Тогда* *для любого n справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|g\|^2,$$

где $c_k = (f_k, g)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k.$$

Пусть $h_n = g - g_n$. Тогда

$$(g_n, f_m) = \sum_{k=1}^{n} c_k (f_k, f_m) = \begin{cases} c_m, & \text{если } m \leq n \\ 0, & \text{если } m > n. \end{cases}$$

Тогда

$$(h_n, f_m) = c_m - (g_n, f_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \leq n \\ c_m, & \text{если } m > n. \end{cases}$$

Отсюда,

$$(g_n, h_n) = (h_n, g_n) = 0.$$

Заметим, что

$$(g_n, g_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k, \sum_{l=1}^{n} c_l f_l \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_k c_l (f_k, f_l) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Следовательно,

$$(g, g) = (g_n + h_n, g_n + h_n) = (g_n, g_n) + 2(g_n, h_n) + (h_n, h_n) =$$

$$= (g_n, g_n) + (h_n, h_n) \geq (g_n, g_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

□

Устремляя n к бесконечности, получаем следующие следствия.

Следствие 2.51. *В условиях теоремы 2.50 имеем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq (g, g).$$

Следствие 2.52. *В условиях теоремы 2.50*

$$\lim_{n \to \infty} c_n = 0.$$

Определение 2.53. Ортонормированная система $\{f_n\}$ называется *замкнутой*, если

$$(g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Это равенство называется *равенством Парсеваля.*

Теорема 2.54. *При любых $a_1, a_2, \cdots, a_n$ выполнено*

$$\left\| g - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \right\| \leq \left\| g - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right\|.$$

Доказательство. Пусть $g_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k$. Заметим, что $(g - g_n, f_k) = 0$ при всех $k \leq n$. Тогда

$$\left\| g - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right\|^2 = \left\| (g - g_n) + \sum_{k=1}^{n} (c_k - a_k) f_k \right\|^2 =$$

$$= \|g - g_n\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} (c_k - a_k) f_k \right\|^2 = \|g - g_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - a_k)^2 \geq \|g - g_n\|^2.$$

□

Теорема 2.55. *В сепарабельном эвклидовом пространстве L всякая полная ортонормированная система функций является замкнутой, и обратно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — замкнутая ортонормированная система и $g \in L$. Рассмотрим последовательность частичных сумм

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k.$$

Тогда

$$\|g - g_n\|^2 = (g - g_n, g - g_n) = \|g\| - 2(g, g_n) + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\left(g, \sum_{k=1}^{n} c_k f_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k (g, f_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2.$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (g,g)$, то $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} c_k^2$ стремиться к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, последовательность $\{g_n\}$ сходиться к g. Следовательно, $\{f_n\}$ всюду плотно в L, т.е. система $\{f_n\}$ полна. Обратно, пусть $\{f_n\}$ полна. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k f_k$ такая, что

$$\|g - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k\| < \varepsilon.$$

Согласно теореме 2.54 имеем

$$\|g - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k\| < \varepsilon.$$

Отсюда,

$$\varepsilon > \|g - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k\| \geq \|g\| - \|\sum_{k=1}^{n} c_k f_k\| = \|g\| - \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ мы получаем равенство Парсеваля. $\square$

Рассмотрим более подробно гильбертовы пространства.

Лемма 2.56. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство. Тогда любое его подпространство X' сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — счетное всюду плотное множество в X. Положим

$$a_n = \inf_{y \in X'} \rho(x_n, y).$$

Тогда для любых m и n существует точка $y_{mn} \in X'$ такая, что

$$\rho(x_n, y_{mn}) < a_n + \frac{1}{m}.$$

Пусть $y \in X'$. Заметим, что для любого ε существует x_n такой, что $\rho(x_n, y) < \varepsilon$. Следовательно, $a_n < \varepsilon$. Тогда

$$\rho(y_{mn}, y) \leq \rho(y_{mn}, x_n) + \rho(y, x_n) < a_n + \frac{1}{m} + \varepsilon < 2\varepsilon + \frac{1}{m}.$$

В силу произвольности m можно считать, что $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Получаем $\rho(y_{mn}, y) \leq 3\varepsilon$. Следовательно, $\{y_{mn}\}$ — счетное всюду плотное множество в X'. $\square$

Теорема 2.57. *Пусть H — гильбертого пространство, M — замкнутое подпространство в H. Тогда M содержит ортонормированную систему $\{\varphi_n\}$, линейное замыкание которой совпадает с M.*

Доказательство. Применим процесс ортогонализации к какой-либо счетной всюду плотной последовательности в M. □

Утверждение 2.58. *Пусть M — замкнутое подпространство в H. Обозначим через M' множество элементов $g \in H$, ортогональных ко всем $f \in M$. Тогда M' — замкнутое подпространство в H.*

Доказательство. Пусть $g_1, g_2 \in M'$. Тогда для любого $f \in M$ имеем

$$(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, f) = \alpha_1(g_1, f) + \alpha_2(g_2, f) = 0.$$

Отсюда следует линейность M'. Докажем замкнутость. Пусть последовательность $g_n \in M'$ стремиться к g. Тогда

$$(f, g) = \lim_{n\to\infty}(f, g_n) = 0.$$

Следовательно, $g \in M'$, и M' замкнуто. □

Подпространство M' называется *ортогональным дополнением* подпространства M.

Теорема 2.59. *Пусть H — гильбертого пространство, M — замкнутое подпространство в H. Тогда любой элемент $f \in H$ единственным образом представляется в виде $f = g + h$, где $g \in M$, $h \in M'$.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}$ — полная ортогональная система в M. Положим

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n, \quad c_n = (f, \varphi_n).$$

Согласно неравенству Бесселя ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ сходится. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$ тоже сходится и $g \in M$. Положим $h = f - g$. Заметим, что $(h, \varphi_n) = 0$ для любого φ_n. С другой стороны, любой элемент $v \in M$ можно представить в виде $v = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n$. Тогда

$$(h, v) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(v, \varphi_n) = 0.$$

Таким образом, $h \in M'$. Предположим, что существует другое представление $f = g_1 + h_1$, где $g_1 \in M$, $h_1 \in M'$. Тогда

$$(g_1, \varphi_n) = (g, \varphi_n) = c_n$$

для всех n. Отсюда, $g = g_1$. Следовательно, $h = h_1$. □

Следствие 2.60. *Каждая ортонормированная система может быть расширена до системы, полной в H.*

Теорема 2.61. *Пусть $\{f_n\}$ — произвольная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Пусть числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится. Тогда существует элемент $g \in H$ такой что $c_k = (g, f_k)$ и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|.$$

Доказательство. Положим $g_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k$. Тогда

$$\|g_{n+p} - g_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k f_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится, то последовательность $\{g_n\}$ фундаментальна. Пусть g — ее предел. Тогда

$$(g, f_k) = (g_n, f_k) + (g - g_n, f_k),$$

где $n \geq k$. Заметим, что $(g_n, f_k) = c_k$ и

$$|(g - g_n, f_k)| \leq \|g - g_n\| \|f_k\| = \|g - g_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $(g, f_k) = c_k$. С другой стороны,

$$\|g - g_n\|\|^2 = \left(g - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k, g - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k\right) = (g, g) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|.$$

□

Теорема 2.62 (теорема Рисса–Фишера). *Всякое бесконечномерное гильбертого пространство изометрично пространству l_2.*

Доказательство. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство, $\{f_n\}$ — ортонормированный базис. Определим $J\colon H \to l_2$ по правилу

$$J(g) = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots),$$

где $c_k = (g, f_k)$. Очевидно, что

$$\|J(g)\|^2 = \|g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Более того, согласно теореме 2.61, $J(H) = l_2$. □

Следствие 2.63. *Все бесконечномерные гильбертовы пространства изометричны.*

Теорема 2.64 (теорема Рисса). *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда для любого $v \in H$ формула $f_v(x) = (x, v)$ задает линейный непрерывный функционал на H и $\|f_v\| = \|v\|$. Обратно, всякий функционал $f \in H^*$ задается таким способом.*

Доказательство. Очевидно, что $f_v(x) = (x, v)$ задает линейный непрерывный функционал на H. Равенство $\|f_v\| = \|v\|$ следует из неравенства Коши–Буняковского $|(v, x)| \le \|v\|\|x\|$ и равенства $f_v(v) = \|v\|^2$. Пусть $f \in H^*$. Если $f = 0$, то возьмем $v = 0$. Пусть $f \ne 0$ и H_0 — ядро f. Тогда H_0 имеет коразмерность один (см. 2.8). Пусть H_0' — ортогональное дополнение к H_0. Тогда H_0' имеет размерность один. Пусть $e \in H_0'$ — единичный вектор. Положим $v = f(e)e$. Согласно теореме 2.59 любой элемент $x \in H$ имеет представление $x = ae + y$, где $y \in H_0$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда $f(x) = af(e) + f(y) = af(e)$. С другой стороны,

$$(x, v) = (ae + y, f(e)e) = af(e)(e, e) + f(e)(y, e) = af(e).$$

□

Теорема 2.65. *Нормированное пространство L эвклидово тогда и только тогда, когда для любых двух элементов f, g выполнено равенство*

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Доказательство. Пусть L — эвклидово пространство. Тогда

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = (f + g, f + g) + (f - g, f - g) =$$

$$= (f, f) + 2(f, g) + (g, g) + (f, f) - 2(f, g) + (g, g) = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Таким образом, мы доказали необходимость. Докажем достаточность. Положим

$$(f, g) = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2).$$

Докажем, что (f, g) — скалярное произведение. Очевидно, что $(f, g) = (g, f)$. Пусть $g = f$. Тогда

$$(f, f) = \frac{1}{4}(\|f+f\|^2 - \|f-f\|^2) = \frac{1}{4}\|2f\|^2 = \|f\|^2.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(f_1, f_2, g) = 4((f_1 + f_2, g) - (f_1, g) - (f_2, g)) =$$
$$\|f_1+f_2+g\|^2 - \|f_1+f_2-g\|^2 - \|f_1+g\|^2 + \|f_1-g\|^2 - \|f_2+g\|^2 + \|f_2-g\|^2.$$

Нам нужно доказать, что $\Phi(f_1, f_2, g) = 0$ для любых f_1, f_2, g. Заметим, что

$$\|f_1 + f_2 + g\|^2 = 2\|f_1 + g\|^2 + 2\|f_2\|^2 - \|f_1 + g - f_2\|^2,$$
$$\|f_1 + f_2 - g\|^2 = 2\|f_1 - g\|^2 + 2\|f_2\|^2 - \|f_1 - g - f_2\|^2.$$

Получаем

$$\Phi(f_1, f_2, g) = \|f_1 - g - f_2\|^2 - \|f_1 + g - f_2\|^2 +$$
$$+\|f_1 + g\|^2 - \|f_1 - g\|^2 - \|f_2 + g\|^2 + \|f_2 - g\|^2.$$

Просуммировав выражения для $\Phi(f_1, f_2, g)$, получаем

$$2\Phi(f_1, f_2, g) = \|f_1+f_2+g\|^2 - \|f_1+f_2-g\|^2 + \|f_1-g-f_2\|^2 - \|f_1+g-f_2\|^2 -$$
$$-2\|f_2 + g\|^2 + 2\|f_2 - g\|^2.$$

Заметим, что

$$\|f_1 + f_2 + g\|^2 + \|f_1 - g - f_2\|^2 = 2\|f_2 + g\|^2 + 2\|f_1\|^2,$$
$$\|f_1 + f_2 - g\|^2 + \|f_1 + g - f_2\|^2 = 2\|f_2 - g\|^2 + 2\|f_1\|^2.$$

Получаем, $2\Phi(f_1, f_2, g) = 0$. Рассмотрим

$$\varphi(c) = (cf, g) - c(f, g).$$

Нужно доказать, что $\varphi(c) = 0$ для любого c. Очевидно, что $\varphi(1) = 0$. Заметим, что

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}(\|g\|^2 - \|g\|^2) = 0.$$

Более того,

$$\varphi(-1) = (-f, g) + (f, g) =$$
$$= \frac{1}{4}(\|-f+g\|^2 - \|-f-g\|^2) + \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2) = 0.$$

Таким образом, $(-f, g) = -(f, g)$. Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$(nf, g) = \operatorname{sign} n(|n|f, g) = \operatorname{sign} n(f + \cdots + f, g) = \operatorname{sign} n|n|(f, g) = n(f, g).$$

Таким образом, $\varphi(n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Пусть $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$(\frac{p}{q}f, g) = p(\frac{1}{q}f, g) = \frac{p}{q}q(\frac{1}{q}f, g) = \frac{p}{q}((\frac{1}{q}f, g) + \cdots (\frac{1}{q}f, g)) = \frac{p}{q}(f, g).$$

Таким образом, $\varphi(c) = 0$ для любого $c \in \mathbb{Q}$. В силу непрерывности $\varphi(c)$ получаем $\varphi(c) = 0$ для любого $c \in \mathbb{R}$. □

Пример 2.66. Рассмотрим n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$. Определим норму

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть

$$f = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0), \quad g = (1, -1, 0, 0, \ldots, 0).$$

Тогда

$$f + g = (2, 0, 0, 0, \ldots, 0), \quad f - g = (0, 2, 0, 0, \ldots, 0).$$

С другой стороны,

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 2^{\frac{1}{p}}, \quad \|f + g\| = \|f - g\| = 2.$$

Таким образом, $\mathbb{R}^n$ с этой нормой не является эвклидовым при $p \neq 2$.

4. Функции ограниченной вариации

Определение 2.67. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке (интервале, полуинтервале) $[a; b]$. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет *ограниченную вариацию*, если

$$V_a^b(f) := \sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty,$$

где sup берется по всем наборам $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [a; b]$.

Утверждение 2.68. *Пусть $f(x)$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[a; b]$. Тогда $f(x)$ ограничена на $[a; b]$. Более того, для любых точек $x_0, x \in [a; b]$ выполнено $|f(x)| \leq |f(x_0)| + V_a^b(f)$.*

Доказательство. Действительно,

$$|f(x)| - |f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| \leq \sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

□

Утверждение 2.69. *Пусть f, g — функции ограниченной вариации на отрезке $[a;b]$. Тогда $f+g$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[a;b]$ и αf — функция ограниченной вариации на отрезке $[a;b]$. Более того, $V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f)+V_a^b(g)$ и $V_a^b(\alpha f) = |\alpha| V_a^b(f)$.*

Доказательство. Имеем

$$V_a^b(f+g) = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) + g(t_i) - f(t_{i-1}) - g(t_{i-1})| \leq$$

$$\leq \sup \sum_{i=1}^{n} (|f(t_i) - f(t_{i-1})| + |g(t_i) - g(t_{i-1})|) \leq$$

$$\leq \sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \sup \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|.$$

Аналогично,

$$V_a^b(\alpha f) \sup \sum_{i=1}^{n} |\alpha f(t_i) - \alpha f(t_{i-1})| = |\alpha| \sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

□

Таким образом, функции ограниченной вариации образуют линейное пространство.

Теорема 2.70. *Пусть $f(x)$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[a;b]$. Тогда*

(1) *функции $V(x) = V_a^x(f)$ и $U(x) = V(x) - f(x)$ неубывающие на $[a;b]$;*
(2) *$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$ для любого $c \in [a;b]$.*

Доказательство. Поскольку добавление новой точки в набор $t_0, t_1, \ldots, t_n$ сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$ не уменьшается, то можно считать, что c входит в набор $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Пусть $t_k = c$. Тогда

$$V_a^b(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| =$$

$$= \sup \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \sup \sum_{i=k+1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Отсюда, мы получили утверждение (2) и то, что функция $V(x) = V_a^x(f)$ неубывающая. Заметим, что

$$V(x) - V(y) = V_x^y(f) \geq |f(x) - f(y)| \geq f(x) - f(y).$$

Таким образом, $U(x) = V(x) - f(x)$ неубывает на $[a; b]$. $\square$

Следствие 2.71. *Любая функция ограниченной вариации может быть представлена как разность двух ограниченных неубывающих функций.*

Пусть $f(x)$ — функция на $[a; b]$, $u(x)$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[a; b]$. Пусть

$$V = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$$

— размеченное разбиение. Пусть $\Delta_i u = u(t_i) - u(t_{i-1})$. Положим

$$\sigma_{u,V}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta_i u.$$

Тогда $\sigma_{u,V}(f)$ называется *интегральной суммой Стильтьеса*. Если существует предел

$$I_u(f) = \lim_{\Delta_V \to 0} \sigma_{u,V}(f),$$

то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по функции* $u(x)$, а величина $I_u(f)$ называется *интегралом Стильтьеса* от функции $f(x)$ по функции $u(x)$.

Глава 3

Теория операторов

1. Определения и основные свойства

Определение 3.1. Пусть L и L' — два линейных пространства. *Линейным оператором* A, действующим из L в L', называется отображение $y = Ax$ ($x \in L$, $y \in L'$), удовлетворяющее условиям.

(1) $A(\alpha x) = \alpha Ax$;
(2) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$.

Множество всех $x \in L$, для которых отображение A определено, называется *областью определения* оператора A. Предположим, что L, L' — нормированные пространства. Оператор A *непрерывен* в точке $x_0 \in L$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что для любого $x \in L$ с условием $\|x - x_0\| < \delta$ выполнено $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$. Оператор A ограничен, если он определен на всем L и каждое ограниченное множество переводит в ограниченное множество.

Утверждение 3.2. *Для того, чтобы линейный оператор A был ограничен необходимо и достаточно, чтобы существовала константа C такая, что $\|Ax\| \leq C\|x\|$ для любого x.*

Доказательство. Пусть A ограничен. Пусть $C = \sup\limits_{x:\|x\|=1} \|Ax\|$. Докажем, что $\|Ax\| \leq C\|x\|$ для любого x. Предположим, что существует $x \in L$ такой, что $\|Ax\| > C\|x\|$. Рассмотрим $y = \frac{x}{\|x\|}$. Заметим, что $\|y\| = 1$. С другой стороны,

$$\|Ay\| = \frac{1}{\|x\|}Ax > \frac{C\|x\|}{\|x\|}.$$

Противоречие. Предположим, что существует константа C такая, что $\|Ax\| \leq C\|x\|$ для любого x. Пусть $M \subset L$ — ограниченное множество, но $AM \subset L'$ не ограничено. Поскольку M — ограниченное множество, то существует константа K такая, что $\|x\| < K$ для всех $x \in M$. С другой стороны, $AM \subset L'$ не ограничено, следовательно, существует $x \in M$ такой, что $\|Ax\| > CK > C\|x\|$. Противоречие. $\square$

Число
$$\sup_{x:\|x\|=1}\|Ax\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$
называется *нормой* оператора и обозначается $\|A\|$.

Утверждение 3.3. *Для линейного оператора следующие условия равносильны:*

(1) *A ограничен;*
(2) *A непрерывен;*
(3) *A непрерывен в некоторой точке.*

Доказательство. Пусть A ограничен. Тогда $\|Ax-Ay\|=\|A(x-y)\|\le\|A\|\|x-y\|$. Отсюда следует непрерывность A. Пусть оператор A непрерывен в точке x_0. Из равенства $Ax=A(x-x_0)+Ax_0$ следует непрерывность A в нуле. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует δ такое, что для любого $x\in L$ с условием $\|x\|<\delta$ выполнено $\|Ax\|<\varepsilon$. Положим $\varepsilon=1$. Тогда $\|Ax\|<\frac{1}{\delta}$ при $\|x\|<1$. Следовательно, A ограничен. □

Лемма 3.4. *Пусть X — полное метрическое пространство и $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$, где X_n — замкнутые множества. Тогда хотя бы для одного X_n существует шар $B_r(a)$ радиуса r с центром в a такой, что $B_r(a)\subset X_n$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $y_1\notin X_1$. Тогда существует шар $B_1=B_{r_1}(y_1)$, радиуса r_1 такой, что $B_1\cap X_1=\emptyset$. Если $B_1\not\subset X_2$, то существует $y_2\in B_1$ такой, что $y_2\notin X_2$. Тогда существует шар $B_2=B_{r_2}(y_2)$, радиуса $r_2<\frac{r_1}{2}$ такой, что $B_2\cap X_2=\emptyset$. Аналогично, существует $B_3=B_{r_3}(y_3)$ такой, что $B_3\cap X_3=\emptyset$, $r_3<\frac{r_2}{2}$, $y_3\in B_2$ и т.д. Мы получили последовательность вложенных шаров $B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_n\supset\cdots$ такую, что их радиусы стремятся к нулю, а их пересечение не лежит в $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$ (см. 1.42). Противоречие. □

Теорема 3.5 (теорема Банаха–Штейнгауза). *Пусть дано семейство $\{A_\alpha\}$ — ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве L, принимающие значения в нормированном пространстве L'. Предположим, что $\sup\limits_{\alpha}\|A_\alpha x\|<\infty$ для любого $x\in L$. Тогда $\sup\limits_{\alpha}\|A_\alpha\|<\infty$.*

Доказательство. Рассмотрим

$$M_n = \{x \in L \mid \|A_\alpha x\| \le n \text{ для всех } \alpha\}.$$

Заметим, что все M_n замкнуты и покрывают все пространство. Тогда существует шар $B_r(a)$ радиуса r с центром в a такой, что $B_r(a) \subset M_n$. Поскольку $Ax = A(x-a) + Aa$ и $\sup\limits_\alpha \|A_\alpha a\| < \infty$, то получаем равномерную ограниченность операторов $\{A_\alpha\}$ на шаре $B_r(0)$. Следовательно, $\{A_\alpha\}$ равномерно ограниченно на единичном шаре. □

Следствие 3.6. *Пусть L и L' — банаховы пространства, $A_n\colon L \to L'$ — непрерывные операторы, причем для каждого x существует $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Тогда A — непрерывный оператор.*

Доказательство. Очевидно, что A — линейное отображение. По теореме Банаха–Штейнгауза имеем $\sup\limits_n \|A_n\| \le C < \infty$. Тогда

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \le C\|x\|,$$

т.е. $\|A\| \le C$. □

Определение 3.7. Оператор A называется *обратимым*, если для любого $y \in L'$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение в L. Если A обратим, то каждому $y \in L'$ можно поставить в соответствие $x \in L$, являющееся решением уравнения $Ax = y$. Оператор, осуществляющий это соответствие называется *обратным* к A и обозначается A^{-1}.

Теорема 3.8. *Оператор A^{-1}, обратный к линейному оператору A, также линеен.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in L'$. Положим $Ax_1 = y_1$ и $Ax_2 = y_2$, т.е. $A^{-1}y_1 = x_1$, $A^{-1}y_2 = x_2$. Тогда $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = y_1 + y_2$. Отсюда,

$$A^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2.$$

Аналогично, $A(\alpha x_1) = \alpha(Ax_1) = \alpha y_1$. Отсюда, $A^{-1}(\alpha y_1) = \alpha x_1 = \alpha A^{-1} y_1$. □

Лемма 3.9. *Пусть M — всюду плотное множество в банаховом пространстве L. Тогда любой ненулевой элемент $y \in L$ можно разложить в ряд*

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots,$$

где $y_n \in M$ и $\|y_n\| \le \frac{3\|y\|}{2^n}$.

Доказательство. Выберем $y_1 \in M$ так, что $\|y - y_1\| < \frac{\|y\|}{2}$. Выберем $y_2 \in M$ так, что $\|y - y_1 - y_2\| < \frac{\|y\|}{4}$, $y_3 \in M$ так, что

$$\|y - y_1 - y_2 - y_3\| < \frac{\|y\|}{8}$$

и т.д. Таким образом,

$$\|y - y_1 - y_2 - \cdots - y_n\| \leq \frac{\|y\|}{2^n}.$$

Очевидно, что

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{n} y_i \right\| \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

С другой стороны,

$$\|y_1\| = \|y_1 - y + y\| \leq \|y_1 - y\| + \|y\| \leq \frac{3\|y\|}{2},$$

$$\|y_2\| = \|y_2 + y_1 - y + y - y_1\| \leq \|y_2 + y_1 - y\| + \|y - y_1\| \leq \frac{3\|y\|}{4},$$

и т.д. Наконец,

$$\|y_n\| = \|y_n + \cdots + y_2 + y_1 - y + y - y_1 - y_2 - \cdots - y_{n-1}\| \leq$$

$$\leq \|y_n + \cdots + y_2 + y_1 - y\| + \|y - y_1 - y_2 - \cdots - y_{n-1}\| \leq \frac{3\|y\|}{2^n}.$$

□

Теорема 3.10. *Пусть A — линейный ограниченный оператор, взаимно однозначно отображающий банахово пространство L на банахово пространство L'. Тогда оператор A^{-1}, обратный к линейному оператору A, также ограничен.*

Доказательство. Положим

$$M_n = \{y \in L' \mid \|A^{-1}y\| \leq n\|y\|\}.$$

Тогда $L' = \bigcup M_n$. По теореме Бэра 1.43 хотя бы одно множество M_n плотно в некотором шаре B_0. Внутри шара B_0 рассмотрим шаровой слой

$$P = \{z \mid \beta < \|z - y_0\| < \alpha\},$$

$0 < \beta < \alpha$, $y_0 \in M_n$. Пусть $P_0 = \{z \mid \beta < \|z\| < \alpha\}$. Покажем, что в $P - 0$ плотно некоторое множество M_N. Пусть $z \in P \cap M_n$. Тогда $z - y_0 \in P_0$. Заметим, что

$$\|A^{-1}(z - y_0)\| \leq \|A^{-1}z\| + \|A^{-1}y_0\| \leq n(\|z\| + \|y_0\|) =$$

$$= n(\|z - y_0 + y_0\| + \|y_0\|) \leq n(\|z - y_0\| + 2\|y_0\|) =$$

$$= n\|z - y_0\| \left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\|z - y_0\|}\right) \leq n\|z - y_0\| \left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right).$$

Возьмем целое число N, большее $n\left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right)$. Тогда $z - y_0 \in M_N$. Поскольку M_n плотно в P, то M_N плотно в P_0. Пусть $y \in L'$. Заметим, что существует λ такое, что $\beta < \|\lambda y\| < \alpha$, т.е. $\lambda y \in P_0$. Так как M_N плотно в P_0, то существует последовательность $y_n \in M_N$, сходящаяся к λy. Тогда последовательность $\frac{1}{\lambda} y_n$ сходится к y. Заметим, что если $y_n \in M_N$, то и $\frac{1}{\lambda} y_n \in M_N$ при $\lambda \neq 0$. Таким образом, M_N плотно в L'.

Пусть $y \in L'$. Согласно лемме 3.9 существует ряд из элементов $y_n \in M_N$ сходящийся к y т.е.

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots .$$

Более того, $\|y_n\| < \frac{3\|y\|}{2^n}$. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — прообразы $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$. Тогда

$$\|x_n\| = \|A^{-1} y_n\| \leq N\|y_n\| < \frac{3N\|y\|}{2^n}.$$

Следовательно, ряд $\sum x_n$ сходится. Более того

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq 3N\|y\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3N\|y\|.$$

Отсюда,

$$Ax = Ax_1 + Ax_2 + \cdots + Ax_n + \cdots = y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots = y.$$

Тогда $x = A^{-1} y$ и

$$\|A^{-1} y\| = \|x\| \leq 3N\|y\|.$$

Следовательно, A^{-1} ограничен. □

Определение 3.11. Пусть A — линейный ограниченный оператор, отображающий пространство L в пространство L'. Пусть g — линейный непрерывный функционал на L', т.е. $g \in L'^*$. Тогда мы можем определить функционал f на L, как $f(x) = g(Ax)$. Не сложно проверить, что f — линейный непрерывный функционал. Таким образом, $f \in L^*$. Каждому функционалу $g \in L'^*$ мы поставили в соответствие функционал $f \in L^*$. Таким образом, мы получили отображение $A^*\colon L'^* \to L^*$. Это отображение линейно, т.е. A^* — линейный оператор. Он называется *сопряженным* оператором.

Очевидно, что $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.

Теорема 3.12. *Пусть A — линейный ограниченный оператор, отображающий банахово пространство L на банахово пространство L'. Тогда оператор A^* также ограничен и*

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Доказательство. Пусть $x \in L$, $g \in L'^*$. Заметим, что

$$|A^*g(x)| = |g(Ax)| \leq \|g\|\|A\|\|x\|.$$

Отсюда, $\|A^*g\| \leq \|A\|\|g\|$. Таким образом, $\|A^*\| \leq \|A\|$. Пусть $y_0 = \frac{Ax}{\|Ax\|}$. Тогда $\|y_0\| = 1$. По теореме Хана–Банаха существует функционал g, что $\|g\| = 1$ и $g(y_0) = 1$, т.е. $g(Ax) = \|Ax\|$. Тогда

$$\|Ax\| = g(Ax) = |A^*g(x)| \leq \|A^*g\|\|x\| \leq \|A^*\|\|g\|\|x\| = \|A^*\|\|x\|.$$

Отсюда, $\|A\| \leq \|A^*\|$. □

Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Согласно теореме Рисса 2.64 любой функционал имеет вид $f(x) = (x, y)$. Тогда сопряженный оператор A^* можно задать равенством $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Определение 3.13. Линейный ограниченный оператор A называется *самосопряженным*, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для любых $x, y \in H$.

2. Спектр линейного оператора

Пусть A — линейный оператор в конечномерном пространстве. Число λ называется *собственным значением* оператора A, если уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение. Совокупность всех собственных значений называется *спектром* оператора A, а все остальные значения λ — *регулярными*. Заметим, что в конечномерном пространстве существуют лишь два случая:
1) уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение; оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ при этом не существует (здесь I — тождественный оператор);
2) существует ограниченный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$.

В бесконечномерном пространстве существует еще один случай:
3) оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует, но не ограничен.

Рассмотрим оператор A на бесконечномерном пространстве L. Число λ называется *регулярным* для оператора A, если оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ определен на всем L и непрерывен. Оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ называется *резольвентой*. Совокупность всех

λ, которые не являются регулярными, называется *спектром* оператора A. Очевидно, что спектру принадлежат все собственные значения оператора A. Их совокупность называется *точечным спектром.* Остальная часть спектра, т.е. совокупность всех λ, для которых $(A-\lambda I)^{-1}$ существует, но не непрерывен, называется *непрерывным спектром.* Будем обозначать множество регулярных чисел через $\varrho(A)$, а спектр $\sigma(A)$.

Теорема 3.14. *Пусть A — линейный ограниченный оператор, отображающий банахово пространство L на банахово пространство L', обладает ограниченным обратным оператором A^{-1}. Пусть D — линейный ограниченный оператор, отображающий банахово пространство L на банахово пространство L', такой что $\|D\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда оператор $A+D$ также ограничен и обладает ограниченным обратным.*

Доказательство. Согласно теореме 3.10 нужно показать, что уравнение $Ax+Dx=y$ однозначно разрешимо для любого y. Это уравнение равносильно уравнению

$$A^{-1}(Ax+Dx) = A^{-1}y.$$

Отсюда, $A^{-1}y - A^{-1}Dx = x$. Заметим, что отображение $F(x) = A^{-1}y - A^{-1}Dx$ сжимающее. Действительно,

$$\|F(x)-F(z)\| = \|A^{-1}y - A^{-1}Dx - A^{-1}y + A^{-1}Dz\| =$$

$$= \|A^{-1}D(z-x)\| \le \|A^{-1}\|\|D\|\|z-x\|.$$

Поскольку $\|A^{-1}\|\|D\| < 1$, то отображение $F(x)$ сжимающие. Тогда, согласно теореме 1.52, уравнение $Ax+Dx=y$ имеет ровно одно решение. □

Следствие 3.15. *Пусть $\lambda \in \varrho(A)$. Тогда при достаточно малом δ, число $\lambda+\delta \in \varrho(A)$.*

Таким образом, регулярные точки образуют открытое множество. Следовательно, спектр — замкнутое множество.

Теорема 3.16. *Пусть A — линейный ограниченный оператор, отображающий банахово пространство L на себя. Тогда при $|\lambda| > \|A\|$, имеем $\lambda \in \varrho(A)$. Более того,*

$$R_\lambda(A) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}.$$

Доказательство. Поскольку $\|-\lambda I\| = |\lambda|$, то $\|(-\lambda I)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|}$. Тогда, согласно теореме 3.14, оператор $-\lambda I + A$ обладает ограниченным обратным. Поскольку

$$A - \lambda I = -\lambda(I - \frac{A}{\lambda}),$$

то достаточно доказать, что

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

если $\|A\| < 1$. Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k < \infty.$$

Поскольку L полно, то сумма $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ является ограниченным линейным оператором. Для любого n получаем

$$(I - A)\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) = \sum_{k=0}^{n} A^k(I - A) = \sum_{k=0}^{n}(A^k - A^{k+1}) = I - A^{n+1}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$(I - A)\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right) = I.$$

□

Следствие 3.17. *Пусть $\lambda_0 \in \varrho(A)$. Тогда при $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$, имеем $\lambda \in \varrho(A)$. Более того,*

$$R_\lambda(A) = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^k (R_{\lambda_0}(A))^{k+1}.$$

Доказательство. Сходимоть ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^k (R_{\lambda_0}(A))^{k+1}$ доказывается точно так же, как в теореме 3.16. Для его суммы имеем,

$$(A - \lambda I)\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^k (R_{\lambda_0}(A))^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^k (R_{\lambda_0}(A))^{k+1}(A - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left((\lambda - \lambda_0)^k (R_{\lambda_0}(A))^k - (\lambda - \lambda_0)^{k+1} (R_{\lambda_0}(A))^{k+1} \right) = I.$$

□

Теорема 3.18. *Спекр любого оператора A в комплексном банаховом пространстве L является непустым компактом в круге радиуса $\|A\|$ с центром в нуле комплексной плоскости.*

Доказательство. Мы уже доказали, что $\sigma(A)$ замкнуто и

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \|A\|\}.$$

Предположим, что $R_\lambda(A)$ существует для всех λ. Пусть φ — линейный непрерывный функционал на пространстве операторов. Положим $f(\lambda) = \varphi(R_\lambda(A))$. Согласно 3.17 $f(\lambda)$ — аналитическая функция на всем $\mathbb{C}$. Более того, согласно теореме 3.16 $|f(\lambda)| \to 0$ при $\lambda \to \infty$. По теореме Лиувилля $f(\lambda) \equiv 0$. Отсюда, $R_\lambda(A) = 0$ при всех λ. □

Определение 3.19. *Спектральный радиус* оператора A зададим формулой

$$r(A) = \inf \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Теорема 3.20. *Имеет место равенство*

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Более того,

$$r(A) = \max\{|z| : z \in \sigma(A)\}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем такое $p \in \mathbb{N}$, что $\|A^p\|^{\frac{1}{p}} \le r(A) + \varepsilon$. Пусть $n = kp + m$, где $0 \le m \le p - 1$. Тогда

$$\|A^n\| \le \|A^p\|^k \|A^m\| \le M\|A^p\|^k,$$

где $M = \max\limits_{m=1,\dots,p-1} \|A^m\|$. Отсюда,

$$r(A) \le \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \le M^{\frac{1}{n}} \|A^p\|^{\frac{k}{n}} \le M^{\frac{1}{n}} (r(A) + \varepsilon)^{\frac{kp}{n}}.$$

Поскольку $M^{\frac{1}{n}} \to 1$, $\frac{kp}{n} \to 1$ при $n \to \infty$, то

$$r(A) \le \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \le r(A) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε, получаем

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Покажем, что при $\lambda > r(A)$ оператор $A - \lambda I$ обратим. Поскольку $A - \lambda I = \lambda(\frac{A}{\lambda} - I)$, то мы можем считать, что $\lambda = 1$, а $r(A) < 1$.

Пусть ε такое, что $r(A) + \varepsilon < 1$. Заметим, что существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n > N$ выполнено $\|A^n\| \leq (r(A) + \varepsilon)^n$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится. Аналогично, как при доказательстве теоремы 3.16, получаем, что $(A - I)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$.

Докажем, что существует точка на окружности радиуса $r(A)$ есть точка спектра. Предположим противное. Поскольку $\sigma(A)$ — замкнутое множество, то существует $r < r(A)$ такое, что для всех λ с условием $|\lambda| > r$ существует $R_\lambda(A)$. Пусть φ — линейный непрерывный функционал на пространстве операторов. Тогда функция $f(\lambda) = \varphi(R_\lambda(A))$ голоморфна при $|\lambda| > r$. Мы знаем, что вне круга радиуса $\|A\|$ эта функция задается рядом Лорана (см. 3.16)

$$f(\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(A^k)}{\lambda^{k+1}}.$$

В силу единственности разложения этот ряд задает $f(\lambda)$ при $|\lambda| > r$. Пусть $r < \lambda < r(A)$. Тогда, согласно теореме Банаха–Штейнгауза, существует C такое, что для любого k имеем $\|\lambda^{-k-1}A^k\| \leq C$. Следовательно, $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq C^{\frac{1}{k}}\lambda^{1+\frac{1}{k}}$. Отсюда, $r(A) \leq \lambda$. Противоречие. □

3. Компактные операторы

Определение 3.21. Пусть X и Y — банаховы пространства. Линейный оператор $A\colon X \to Y$ называется *компактным*, если он каждое ограниченное множество переводит в относительно компактное.

Утверждение 3.22. *Линейный оператор $A\colon X \to Y$ компактен тогда и только тогда, когда он переводит единичный шар в X в относительно компактное множество в Y.*

Теорема 3.23. *Пусть A и B — компактные операторы. Тогда $A + B$ и αA — также компактные операторы.*

Доказательство. Пусть U — ограниченное множество. Тогда $(A+B)(U) \subset A(U)+B(U)$ и $(\alpha A)(U) = \alpha(A(U))$. Поскольку $A(U)$ и $B(U)$ относительно компактны, то $A(U)+B(U)$ также относительно компактно. Действительно, пусть $\{x_n + y_n\}$ — последовательность в $A(U) + B(U)$. Выберем сходящуюся подпоследовательность $\{x_{i_n}\}$ в $\{x_n\}$, затем выберем сходящуюся подпоследовательность $\{y_{j_n}\}$ в

$\{y_{i_n}\}$. Тогда последовательность $\{x_{j_n} + y_{j_n}\}$ сходится. Если последовательность $\{x_n\} \subset A(U)$ сходится, то сходится и последовательность $\{\alpha x_n\} \subset \alpha A(U)$. Следовательно, $A+B$ и αA — компактные операторы. $\square$

Теорема 3.24. *Пусть $\{A_n\}$ — последовательность компактных операторов, сходящихся по норме к оператору A. Тогда A — компактный оператор.*

Доказательство. Нам достаточно доказать, что для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ ($\|x_n\| < C$), из последовательности $\{Ax_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Поскольку A_1 компактен, то можно выбрать подпоследовательность $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots$ такую, что последовательность $A_1 x_n^{(1)}$ будет сходиться. Из этой последовательности можно выбрать подпоследовательнось $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots$ такую, что последовательность $A_2 x_n^{(2)}$ будет сходиться и т.д. Возьмем последовательность $x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots$. Докажем, что последовательность $Ax_n^{(n)}$ сходится. Для этого достаточно доказать, что она фундаментальная. Действительно,

$$\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| = \|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)} + A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)} + A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\| \leq$$

$$\leq \|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\| + \|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| + A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\|.$$

Выберем k так, что $\|A - A_k\| < \frac{\varepsilon}{C}$. Тогда

$$\|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\| = \|(A - A_k)x_n^{(n)}\| \leq \|A - A_k\|\|x_n\| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon.$$

Аналогично, $\|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\| < \varepsilon$. Теперь выберем N так, что для всех $n > N$ и $m > N$ было выполнено $\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| < \varepsilon$. Тогда $\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| < 3\varepsilon$. Следовательно, последовательность $Ax_n^{(n)}$ сходится. $\square$

Следствие 3.25. *Множество компактных операторов образует замкнутое линейное подпространство.*

Доказательство. Следует из теорем 3.23 и 3.24. $\square$

Теорема 3.26. *Пусть $A\colon X \to Y$ и $B\colon Y \to Z$ — линейные операторы на баноховых пространствах X, Y, Z. Тогда BA — компактный оператор, если один из операторов компактен, а второй ограничен.*

Доказательство. Пусть $U \subset X$ — ограниченное множество. Предположим A ограничен, B компактен. Тогда $A(U)$ также ограничено. Следовательно, $B(A(U))$ относительно компактно, т.е. BA — компактный оператор. Предположим A компактен, B ограничен. Тогда $A(U)$ относительно компактно. Поскольку B непрерывный оператор (т.е. B переводит фундаментальную последовательность в фундаментальную последовательность), то $B(A(U))$ также относительно компактно. Следовательно, BA — компактный оператор. □

Теорема 3.27. *Пусть $A\colon X \to Y$ — линейный оператор на банаховых пространствах X, Y. Тогда A компактен тогда и только тогда, когда $A^*\colon Y^* \to X^*$ компактен.*

Доказательство. Предположим, что $A\colon X \to Y$ — компактный оператор. Пусть V, V^* — единичные шары в X и в Y^* соответственно. Пусть $f \in V^*$. Тогда $A^*f(x) = f(Ax)$. Заметим, что $A^*(V^*)$ равномерно ограниченно и равномерно непрерывно. Поскольку $A(V)$ — относительно компактно, то по теореме Арцела $A^*(V^*)$ относительно компактно.

Предположим, что A^* — компактный оператор. Тогда A^{**} — компактный оператор. Мы знаем, что существуют изометричные вложения $J_1\colon X \to X^{**}$, $J_2\colon Y \to Y^{**}$. Более того,

$$A^{**}(J_1x)(f) = J_1x(A^*(f)) = (A^*(f))(J_1x) = f(Ax) =$$
$$= f(J_2Ax) = (J_2Ax)(f).$$

Отсюда следует, что A — компактный оператор. □

Литература

[1] Келли Дж.Л. *Общая топология.*

[2] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, *Элементы теории функции и функционального анализа.*

[3] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии.*

[4] Энгелькинг Р. *Общая топология.*