



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

MUSE

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Curso de programación

Segunda entrega

Autores:

Andújar Saltoratto, Gabriel

González Fariña, Álvaro

Ruiz Royo, Pablo

7 de abril de 2019

Índice

0. Introducción al problema	3
1. Obtención de los puntos de Lagrange	3
2. Estabilidad de los puntos de Lagrange	5
3. Cálculo de órbitas con FORTRAN	7
3.1. RK Dormand-Prince (DOPRI853)	7
3.2. Adams-Bashforth-Moulton (ODE)	8
3.3. Gregg-Bulirsch-Stoer (ODEX)	8
3.4. Resultados obtenidos	8
4. Cálculo de órbitas con GMAT	13
4.1. Resultados obtenidos	13
5. Comparación FORTRAN-GMAT	17
6. Conclusiones	18

Índice de figuras

1.	Esquema gráfico de los puntos de Lagrange del sistema Tierra-Luna .	3
2.	Órbita del satélite en L1 tras 10 días (con FORTRAN)	9
3.	Órbita del satélite en L4 tras 50 días (con FORTRAN)	9
4.	Órbita del satélite en L4 tras 200 días (con FORTRAN)	10
5.	Órbita del satélite en L4 tras 1000 días (con FORTRAN)	10
6.	Representación de la distancia Tierra-satélite tras 1000 días.	11
7.	Representación de la distancia Tierra-satélite tras 2000 días.	11
8.	Representación de la distancia Tierra-satélite tras 10000 días.	11
9.	Comparación de la distancia Tierra-satélite tras integrar con los tres esquemas numéricos en 100 días.	12
10.	Órbitas obtenidas en el problema no lineal y el lineal (tras 100 días). .	12
11.	Órbita del satélite en L1 tras 10 días (con GMAT)	13
12.	Órbita del satélite en L4 tras 50 días (con GMAT)	14
13.	Órbita del satélite en L4 tras 200 días (con GMAT)	14
14.	Órbita del satélite en L4 tras 1000 días (con GMAT)	15
15.	Órbita del satélite en L4 tras 1000 días con referencia Tierra y Luna .	15
16.	Representación de la distancia Tierra-satélite y Luna-satélite tras 1000 días.	16
17.	Representación de la distancia Tierra-satélite y Luna-satélite tras 2000 días.	16
18.	Representación de la distancia Tierra-satélite tras 10000 días.	16
19.	Comparación de la distancia Tierra-satélite tras integrar con los tres esquemas numéricos en 100 días.	17

Índice de tablas

1.	Coordenadas de los puntos de Lagrange obtenidas en Fortran	5
2.	Autovalores de la matriz del sistema para cada punto de Lagrange . .	7

0. Introducción al problema

Tras la primera entrega, en la que el equipo se familiarizó con el entorno de programación *Visual Studio*, con el lenguaje de alto nivel *Fortran 90*, y con el estudio de ciertas órbitas y su estabilidad, llega la segunda entrega, que se divide en cinco secciones concatenadas. En la [Sección 1](#), a partir de las ecuaciones del movimiento de Newton, se calculan los puntos de Lagrange. Tras esto, en la [Sección 2](#), se halla la estabilidad de los puntos calculados. En la [Sección 3](#), se coloca un satélite en cada uno de los puntos de Lagrange y se calcula el movimiento que describen a lo largo del tiempo (usándose tres esquemas numéricos diferentes). En la [Sección 4](#) se realiza lo mismo que en la sección anterior, pero con el programa de análisis de misión *GMAT*. Por último, en la [Sección 5](#) se comparan los resultados obtenidos en las dos secciones anteriores, extrayendo algunas conclusiones de utilidad.

1. Obtención de los puntos de Lagrange

Los puntos de Lagrange son las soluciones que se obtienen al resolver el problema de los tres cuerpos de forma estacionaria (restringido a órbitas circulares). Se trata de cinco posiciones en un sistema orbital donde un objeto pequeño, afectado solamente por la gravedad, podría estar estacionario respecto a dos objetos de masa mucho mayor (independientemente de si ocupan mucho o poco, teniendo en cuenta que se realiza la hipótesis de masas puntuales), como es el caso de un satélite artificial respecto a la Tierra y la Luna (véase [Figura 1](#)).

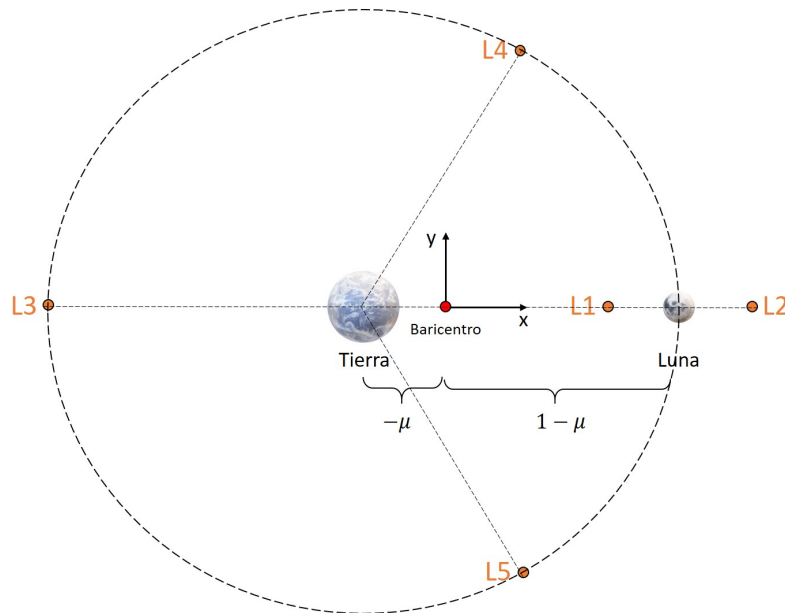


Figura 1: Esquema gráfico de los puntos de Lagrange del sistema Tierra-Luna.

Para analizar dicho problema se toman las ecuaciones de Newton en un sistema no inercial. Se sitúa su origen en el baricentro del sistema Tierra-Luna, con el eje x apuntando siempre a la Luna. De esta forma, las ecuaciones que se obtienen son las siguientes (se han añadido los términos de la aceleración por fuerzas ficticias):

$$\ddot{x} = x + 2\dot{y} - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{d^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r^3}, \quad (1)$$

$$\ddot{y} = y - 2\dot{x} - \frac{(1-\mu)y}{d^3} - \frac{\mu y}{r^3}, \quad (2)$$

$$\ddot{z} = -\frac{(1-\mu)z}{d^3} - \frac{\mu z}{r^3}, \quad (3)$$

donde,

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad (4)$$

$$d^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2, \quad (5)$$

$$r^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2. \quad (6)$$

Por tanto, para obtener las coordenadas de los puntos de Lagrange se calculará el estacionario del sistema anterior, quedando:

$$0 = x + 2 - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{d^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r^3}, \quad (7)$$

$$0 = y - \frac{(1-\mu)y}{d^3} - \frac{\mu y}{r^3}, \quad (8)$$

$$0 = -\frac{(1-\mu)z}{d^3} - \frac{\mu z}{r^3}, \quad (9)$$

Se trata de un sistema de tres ecuaciones no lineal que debe resolverse mediante un método numérico, como por ejemplo el método de Newton.

El método de Newton-Raphson es un método abierto, ya que no está garantizada su convergencia global. La única forma de alcanzar la convergencia es seleccionar un valor inicial lo suficientemente cercano a la raíz buscada. Esto no es un problema, ya que se conoce a priori de manera aproximada la posición de los cinco puntos.

Se linealiza la función por la recta tangente en ese valor supuesto. La abscisa en el origen de dicha recta será una mejor aproximación de la raíz que el valor anterior. Por consiguiente, se realizarán sucesivas iteraciones hasta que el método haya convergido lo suficiente.

Para aplicarlo se utiliza la librería *NumericalHUB* de [2]; donde se encuentra la subrutina *Newton(F, x0)* dentro del módulo *Non_Linear_Systems*. Como puede verse, esta subrutina necesita el vector F (contiene las derivadas de las componentes del vector de estado (11)), y una semilla para cada punto de Lagrange.

Tras introducir las semillas (se escogen puntos aproximados a los de la Figura 1), la subrutina devuelve el vector de estado U de cada punto.

$$U = \begin{bmatrix} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T, \quad (10)$$

$$F = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{bmatrix}^T. \quad (11)$$

Tabla 1: Coordenadas de los puntos de Lagrange obtenidas en Fortran.

Coordenada	L1	L2	L3	L4	L5
x	0,837	1,156	-1,005	0,488	0,488
y	0,000	0,000	0,000	0,867	-0,867
z	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Los números obtenidos en la Tabla 1 corresponden a las distancias adimensionalizadas (partiendo de que la distancia entre la Tierra y la Luna es de una unidad). Puede observarse que los resultados se aproximan bastante a la Figura 1, por lo que se darán por buenos y se pasará a la siguiente sección: estudiar la estabilidad alrededor de cada uno de los cinco puntos obtenidos.

2. Estabilidad de los puntos de Lagrange

Para estudiar el carácter de estabilidad de cada uno de los puntos de Lagrange es necesario hallar los autovalores de la matriz del sistema. Si la parte real tiene signo negativo, la solución es estable, y por tanto, la órbita descrita por el satélite converge al punto estudiado. En cambio, si tiene signo positivo, la solución es inestable, y la órbita descrita por el satélite diverge. En el supuesto de que la parte real sea nula se tiene una solución marginalmente estable, que se traduce en un mantenimiento prolongado de la órbita (ni converge al punto ni diverge).

Debido a la no linealidad del problema, no es posible obtener de forma analítica la matriz del sistema. Por tanto, se linealizarán las ecuaciones del movimiento entorno a cada punto de Lagrange, estudiándose el carácter de estabilidad en las cercanías.

Se introduce una pequeña perturbación en el sistema ($\epsilon \ll 1$):

$$U = U_0 + \epsilon \cdot W, \quad (12)$$

$$\frac{dU}{dt} = 0 + \epsilon \cdot \frac{dW}{dt} = F(U) = F(U_0 + \epsilon \cdot W). \quad (13)$$

Linealizando (13) entorno al punto de equilibrio se obtiene,

$$F(U) \simeq F(U_0) + \frac{dF}{dU}(U_0) \cdot (U - U_0) = 0 + \frac{dF}{dU}(U_0) \epsilon \cdot W, \quad (14)$$

quedando,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dF}{dU}(U_0) \cdot W, \quad (15)$$

donde la matriz del sistema linealizado se corresponde con:

$$A = \frac{dF}{dU}(U_0). \quad (16)$$

Para aplicarlo se utiliza la librería *NumericalHUB* de [2]; en la que se encuentra la subrutina *System_matrix(F, U0, t, A)* dentro del módulo *Cauchy_Problem*. Se observa que esta subrutina necesita el vector F (véase (11)), y un vector U_0 con las coordenadas de cada punto de Lagrange. Además, es necesario meter la variable t , aunque no se utilice para nada. Tras esto, devuelve una matriz A de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 2 & 0 \\ k_4 & k_5 & k_6 & -2 & 0 & 0 \\ k_7 & k_8 & k_9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

El cálculo de los autovalores de esta matriz se realiza con la misma librería, pero con la subrutina *Eigenvalues_QR(A, lambda)* del módulo *Numerical_Recipes*.

En la siguiente tabla puede verse el valor de los seis autovalores de cada punto:

Tabla 2: Autovalores de la matriz del sistema para cada punto de Lagrange.

Autovalor	L1	L2	L3	L4	L5
λ_1	2,944	0,000	-2,152	0,000	0,000
λ_2	-2,940	0,000	2,146	0,000	0,000
λ_3	0,000	0,180	0,000	0,000	0,000
λ_4	0,000	-0,177	0,000	0,000	0,000
λ_5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
λ_6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Por consiguiente, los puntos L1, L2 y L3 son inestables, ya que poseen algún autovalor positivo. De esta forma, la órbita descrita por el satélite en alguno de los tres puntos diverge con el tiempo. En cambio, los puntos L4 y L5 tienen un carácter marginalmente estable, debido a que todos sus autovalores son nulos. Por tanto, un satélite en alguno de estos puntos realizaría órbitas alrededor de los mismos indefinidamente, sin llegar a converger al punto ni diverger.

3. Cálculo de órbitas con FORTRAN

En este apartado va a comprobarse el carácter de estabilidad obtenido en el apartado anterior. Para ello, se integrará a lo largo del tiempo la órbita del satélite en cada punto de Lagrange, utilizando tres esquemas numéricos diferentes: el RK Dormand-Prince (DOPRI853), el Adams-Bashforth-Moulton (ODE113) y el Gregg-Bulirsch-Stoer (ODEX). Estos se obtienen de la referencia [3] y [4], y para hacer uso de ellos será necesario realizar una serie de wrappers.

Así pues, se crea un módulo separado del programa principal, llamado *wrapper*, que contiene a la subrutina *propagator*, que se utiliza para llamar a cualquier esquema numérico que quiera usarse. Esta subrutina necesita los siguientes argumentos: una variable tipo *character* que indica el esquema numérico que va a utilizarse, una variable tipo *character* que indica si el problema es lineal o no lineal, la dimensión del sistema GL , el tiempo inicial t , el vector de estado inicial x ; y el tiempo final tf .

A continuación se muestra un resumen de cómo integra cada esquema numérico, y de los argumentos necesarios que deben introducirse para poder hacer uso de ellos.

3.1. RK Dormand-Prince (DOPRI853)

Se trata de un método explícito multietapa para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, agrupándose dentro de la familia de los Runge Kutta. Lleva a cabo la aproximación evaluando seis veces la función, de forma que calcula las soluciones de

cuarto y quinto orden. La diferencia entre estas soluciones se toma como error de la solución, un error que será de cuarto orden.

Los argumentos que se utilizan del DOPRI853 son: la dimensión del sistema N , la subrutina con el operador diferencial FCN , la variable independiente X , el vector de estado Y , el valor final de la variable independiente $XEND$, las tolerancias del error relativa y absoluta; y otras opciones que se dejan por defecto.

3.2. Adams-Bashforth-Moulton (ODE)

Los métodos de Adams son una subclase de los métodos lineales multipaso que provienen de una cuadratura numérica. Por un lado, los esquemas explícitos se denominan métodos de Adams-Bashforth, y por el otro, los esquemas implícitos métodos de Adams-Moulton.

Cuando se tiene que resolver un sistema no lineal de ecuaciones por cada paso, se utilizan los métodos predictor-corrector. Generalmente, estos esquemas se implementan basados en parejas Adams: esquemas Adams-Bashforth como predictor y esquemas Adams-Moulton como corrector.

Los argumentos que se utilizan en el ODE son: la subrutina con el operador diferencial F , la dimensión del sistema N , el vector de estado Y , la variable independiente t , valor final de la variable independiente $tout$, tolerancias del error relativa y absoluta y otras opciones que se usan por defecto.

3.3. Gregg-Bulirsch-Stoer (ODEX)

Este método combina tres poderosas ideas distintas: la extrapolación de Richardson, la extrapolación racional de la función y el método del punto medio modificado.

Los argumentos que se utilizan del ODEX son: la dimensión del sistema N , la subrutina con el operador diferencial FCN , la variable independiente X , el vector de estado Y , el valor final de la variable independiente $XEND$, las tolerancias del error relativa y absoluta; y otras opciones que se dejan por defecto.

3.4. Resultados obtenidos

Tras aplicar los tres esquemas, se ha observado que los resultados son prácticamente iguales. Por tanto, se ha decidido plasmar en el informe únicamente las órbitas obtenidas con el DOPRI853 (para el sistema no lineal). Además, solamente se estudiarán los casos más representativos, un punto estable y uno inestable (L4 y L1). Para todos los casos se ha utilizado una tolerancia de error absoluta de 10^{-11} .

En la siguiente figura se muestra la órbita del satélite al situarlo en L1:

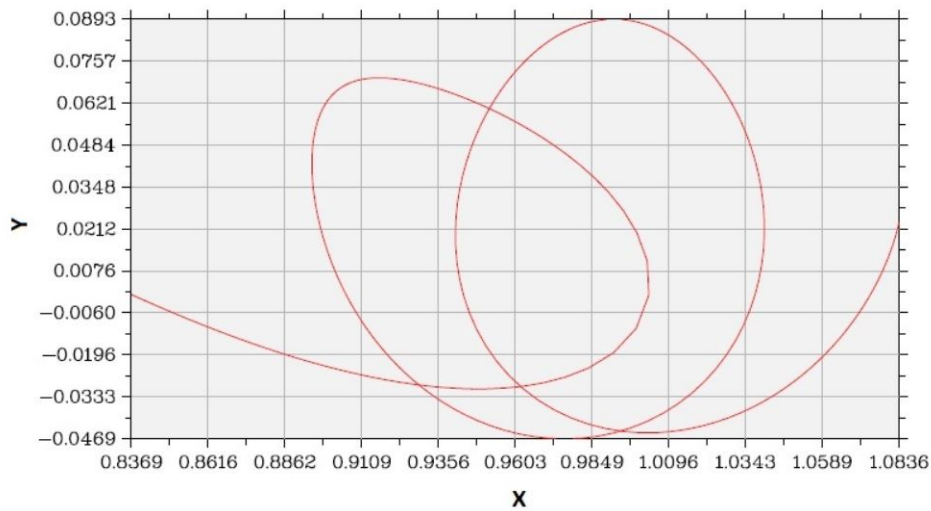


Figura 2: Órbita del satélite en L1 tras 10 días (con FORTRAN).

Como ya se predijo en la [Sección 2](#), el L1 es un punto inestable. Se observa que a los 10 días el satélite ya se sitúa a más de 100000 km de su posición inicial.

En cambio, según los cálculos, el L4 debería ser un punto marginalmente estable, de forma que permanezca en las cercanías de la posición inicial indefinidamente.

Las siguientes figuras muestran la propagación de la órbita tras 50, 200 y 1000 días. Puede parecer que el satélite se aleja demasiado del punto L4, pero en realidad, tras casi tres años, permanece a una distancia máxima de 500 km del punto.

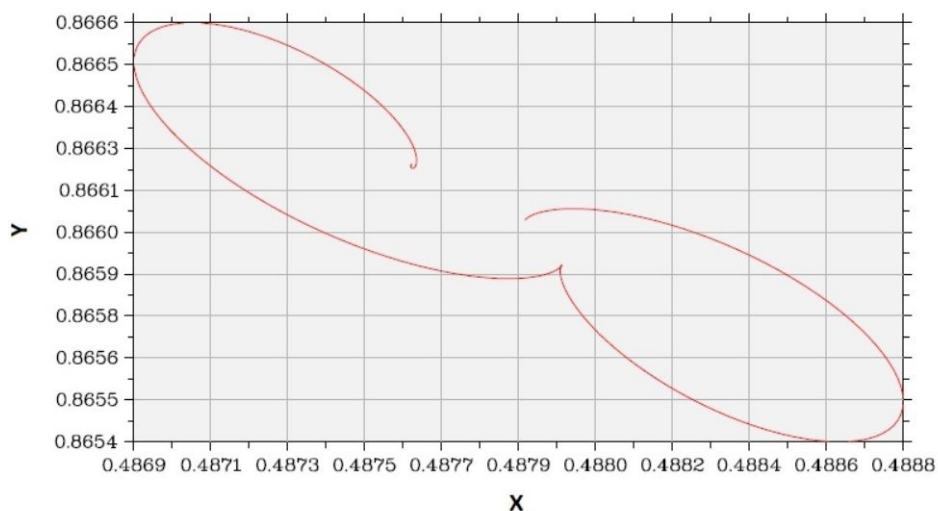


Figura 3: Órbita del satélite en L4 tras 50 días (con FORTRAN).

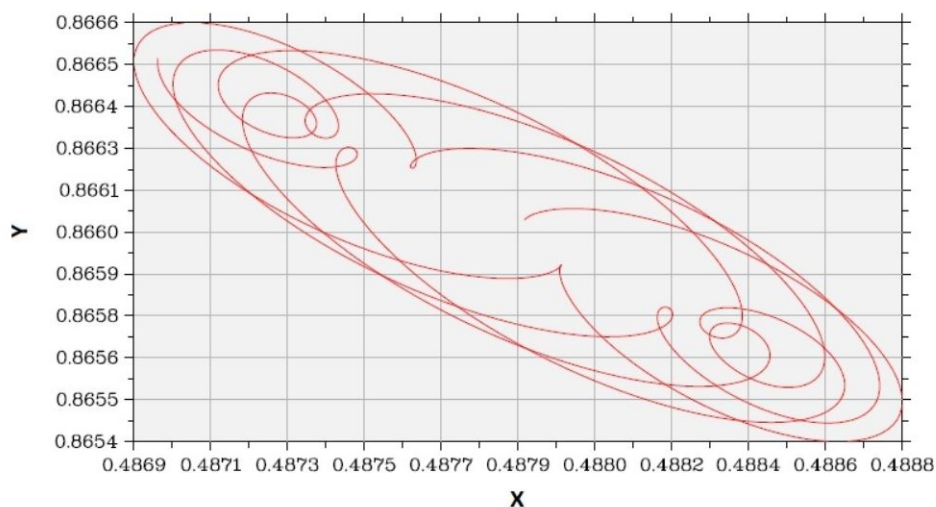


Figura 4: Órbita del satélite en L4 tras 200 días (con FORTRAN).

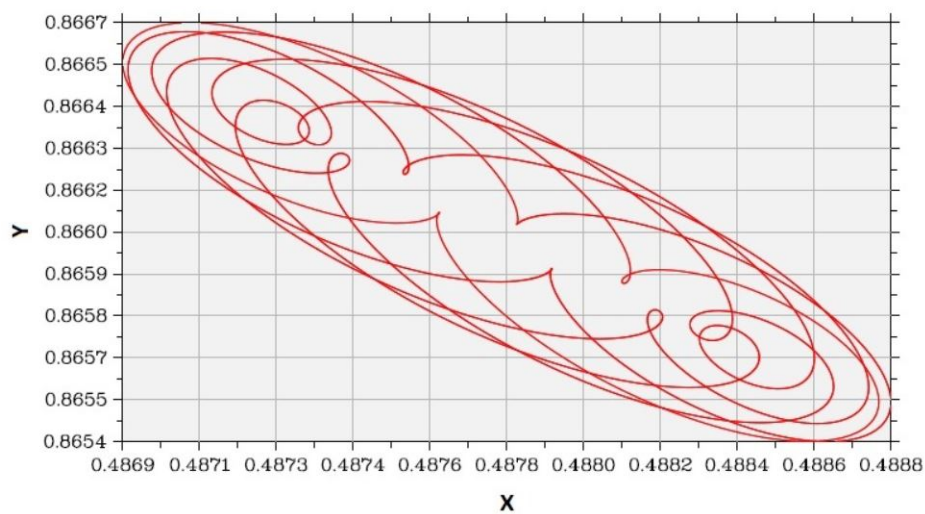


Figura 5: Órbita del satélite en L4 tras 1000 días (con FORTRAN).

Las imágenes anteriores muestran la distancia adimensionalizada (con la distancia de la Tierra a la Luna). Se ve claramente cómo se repite el movimiento pasado un tiempo, ya que el trazado va aumentando de grosor en cada una de las imágenes.

En las siguientes imágenes puede apreciarse más claramente que el movimiento que lleva a cabo el satélite sigue un patrón, que se repite cada 250 días. Se ha representado la distancia del satélite a la Tierra y Luna tras 1000, 2000 y 10000 días:

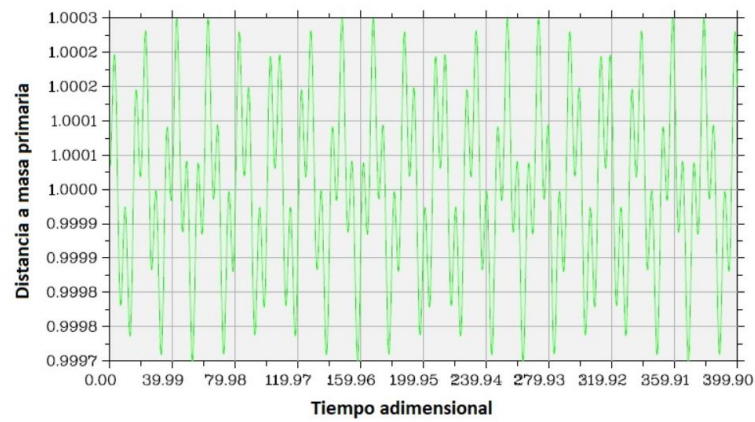


Figura 6: Representación de la distancia Tierra-satélite tras 1000 días.

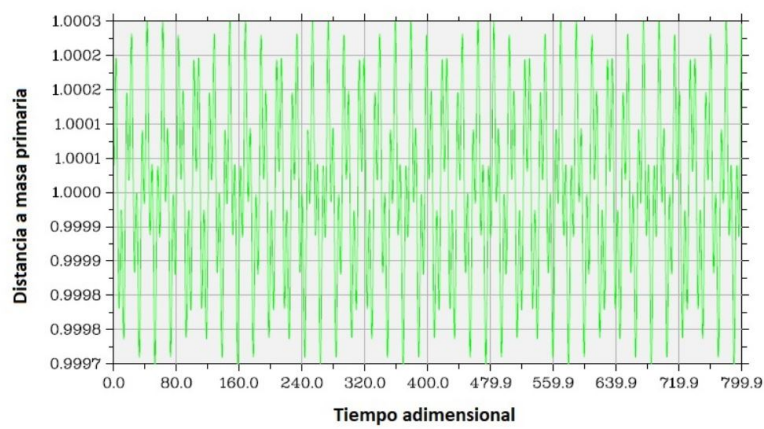


Figura 7: Representación de la distancia Tierra-satélite tras 2000 días.

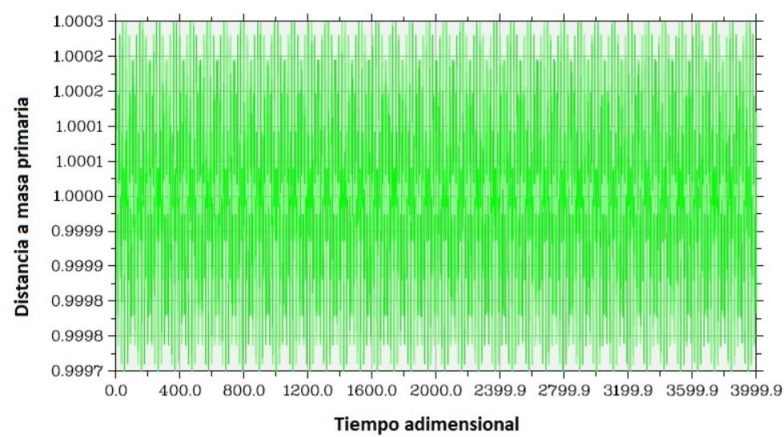


Figura 8: Representación de la distancia Tierra-satélite tras 10000 días.

Se comentó anteriormente que no se iban a mostrar en el informe las órbitas para cada integrador. En la siguiente imagen se comprueba la igualdad de resultados con los tres esquemas utilizados:

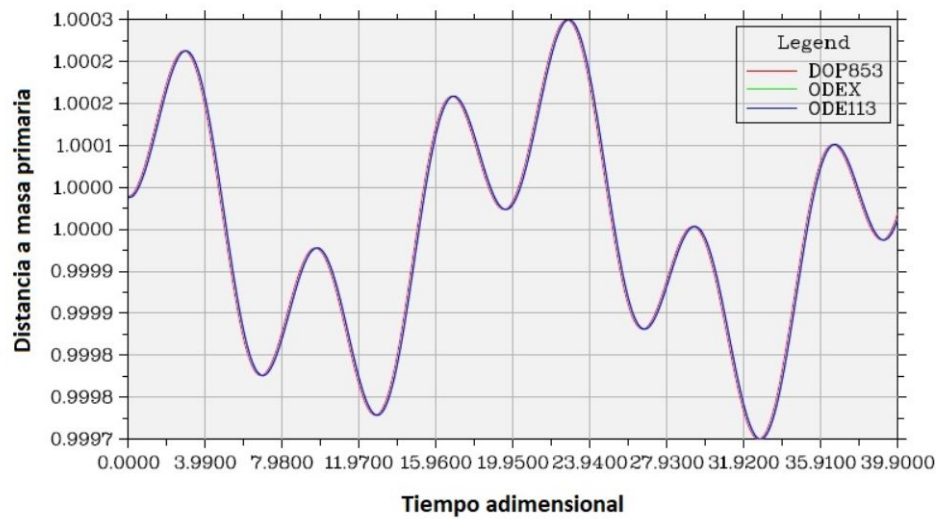


Figura 9: Comparación de la distancia Tierra-satélite con los tres esquemas numéricos tras 100 días.

Todos los resultados anteriores se han extraído del problema no lineal. A continuación se muestra una comparativa entre la órbita obtenida con el problema no lineal y la órbita obtenida tras linealizar las ecuaciones. Se observa que a pesar de no seguir la misma traza, es bastante similar, permaneciendo en las cercanías del punto de Lagrange pasados 100 días.

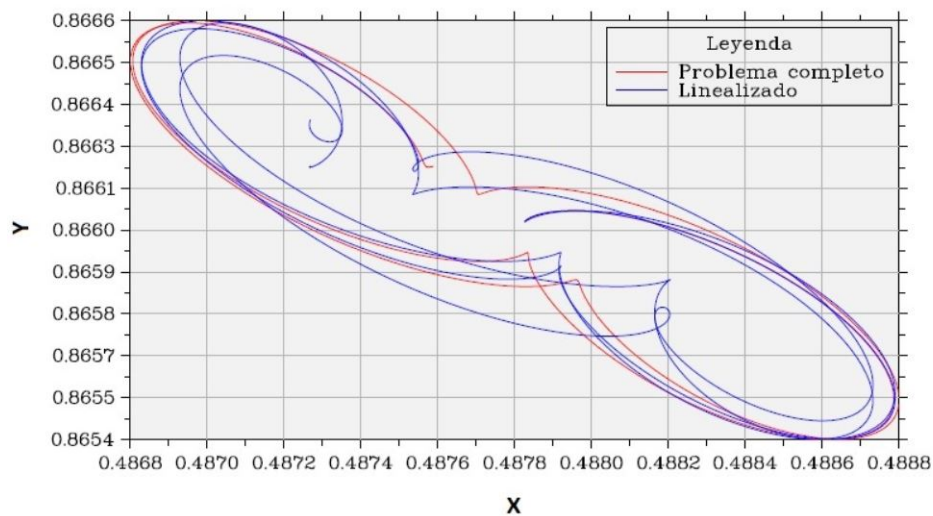


Figura 10: Órbitas obtenidas en el problema no lineal y el lineal (tras 100 días).

4. Cálculo de órbitas con GMAT

Tras resolver el problema en FORTRAN, se acude a GMAT, una herramienta utilizada por la NASA para el análisis de misiones espaciales. Este programa, para la resolución de las ecuaciones diferenciales del movimiento, ofrece la posibilidad de utilizar integradores de alto orden.

Al igual que en la sección anterior, solamente se estudiarán los casos más representativos, un punto estable y uno inestable (L4 y L1).

El diseño de la misión se lleva a cabo de la siguiente manera: creación de los dos puntos de Lagrange; creación de un sistema de referencia situado en cada punto de Lagrange; creación de un satélite con una masa despreciable de 0,0001 kg y situado en el punto $P = (10 \text{ km}, 10 \text{ km}, 0)$ del sistema de referencia anterior; y creación de propagadores. En GMAT se denomina propagador al esquema temporal que va a utilizarse en la resolución de las ecuaciones diferenciales del movimiento. Por tanto, se crearán tres: uno con el Adams-Bashforth-Moulton, otro con el Prince Dormand 853 y el último con el Runge Kutta 89 (no permite utilizar el GBS).

4.1. Resultados obtenidos

Al igual que en el apartado anterior, tras aplicar los tres esquemas, se ha observado que los resultados son prácticamente iguales. Por tanto, se ha decidido plasmar en el informe únicamente las órbitas obtenidas con el DOPRI853. Para todos los casos se ha utilizado una tolerancia de error absoluta de 10^{-11} .

En la siguiente figura se muestra la órbita del satélite al situarlo en L1:

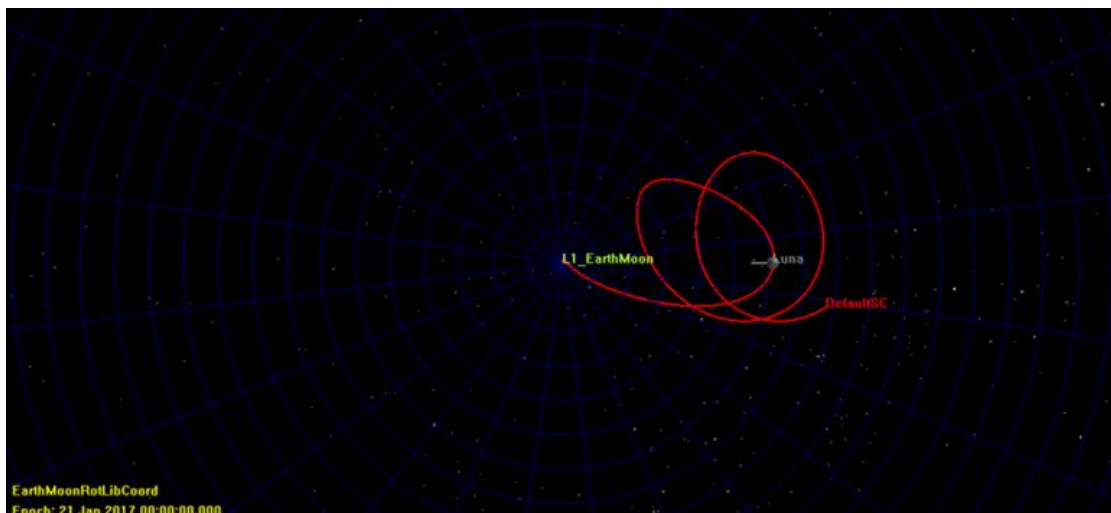


Figura 11: Órbita del satélite en L1 tras 10 días (con GMAT).

Como ya se predijo en la [Sección 2](#), el L1 es un punto inestable. Se observa que a los 10 días el satélite ya se sitúa a más de 100000 km de su posición inicial.

En cambio, según los cálculos, el L4 debería ser un punto marginalmente estable, de forma que permanezca en las cercanías de la posición inicial indefinidamente.

Las siguientes figuras muestran la propagación de la órbita tras 50, 200 y 1000 días. Puede parecer que el satélite se aleja demasiado del punto L4, pero en realidad, tras casi tres años, permanece a una distancia máxima de 50000 km del punto.

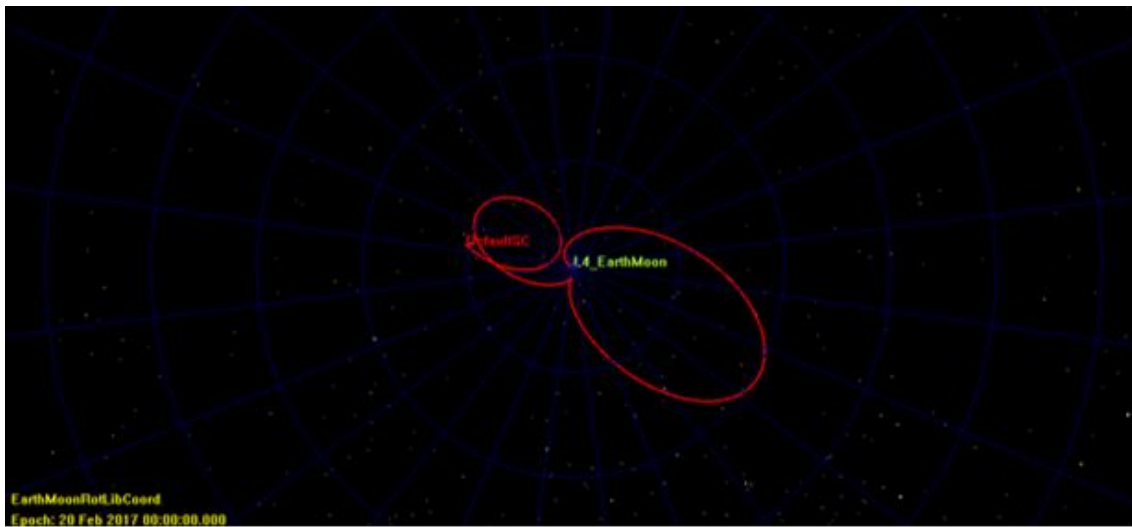


Figura 12: Órbita del satélite en L4 tras 50 días (con GMAT).

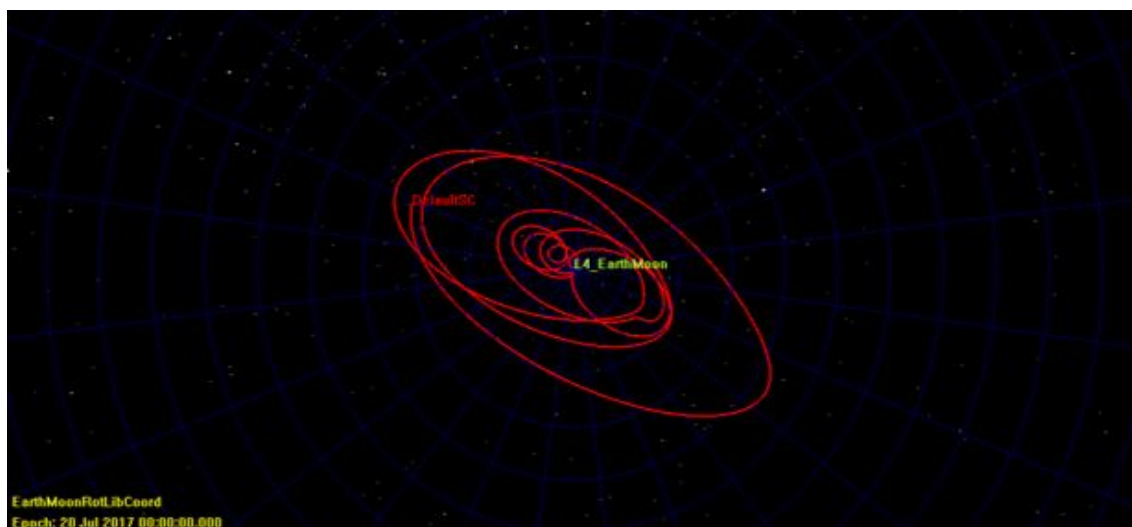


Figura 13: Órbita del satélite en L4 tras 200 días (con GMAT).

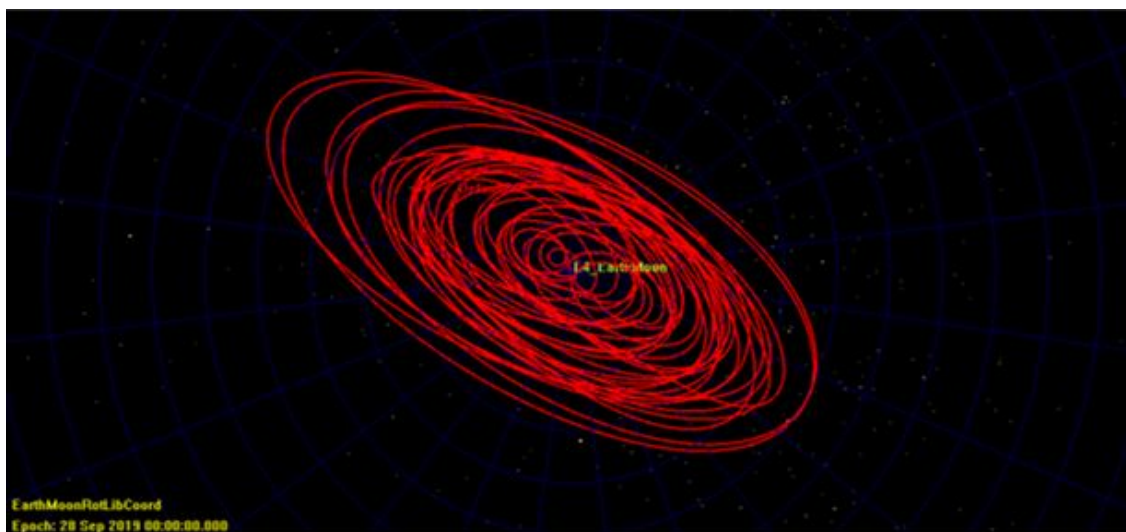


Figura 14: Órbita del satélite en L4 tras 1000 días (con GMAT).

En la siguiente figura puede apreciarse lo comentado en el último párrafo, ya que se sitúa la posición de la Tierra y la Luna como referencia:

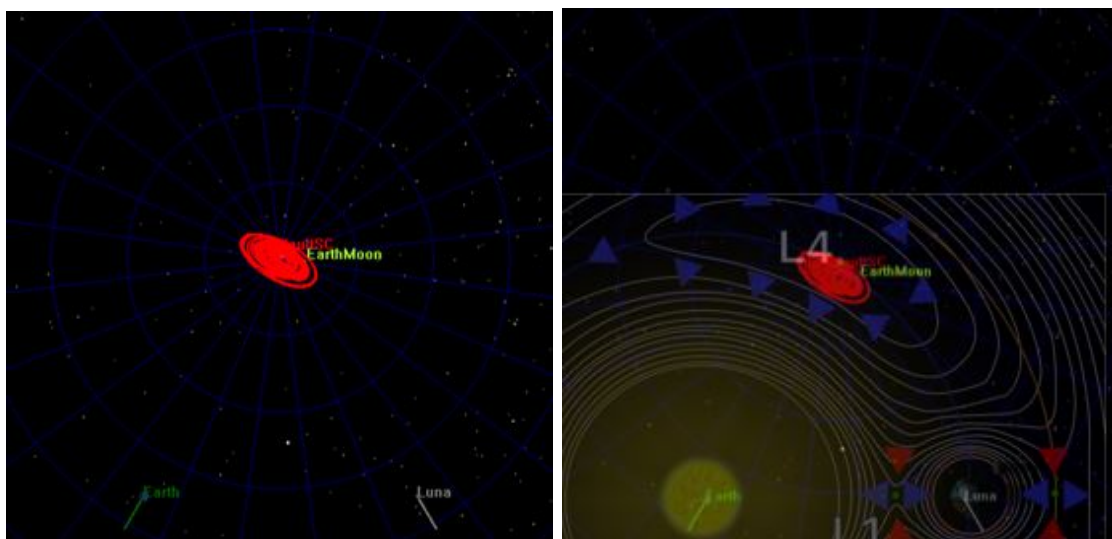


Figura 15: Órbita del satélite en L4 tras 1000 días con referencia Tierra y Luna. En la imagen de la derecha se ha superpuesto una imagen de internet con la definición de las regiones de estabilidad del sistema de los tres cuerpos.

A diferencia de las gráficas obtenidas con FORTRAN, las siguientes imágenes muestran la distancia en km. Estas demuestran que el movimiento que lleva a cabo el satélite sigue un patrón, repitiéndose cada 2 años aproximadamente. Se ha representado la distancia del satélite a la Tierra y Luna tras 1000, 2000 y 10000 días:

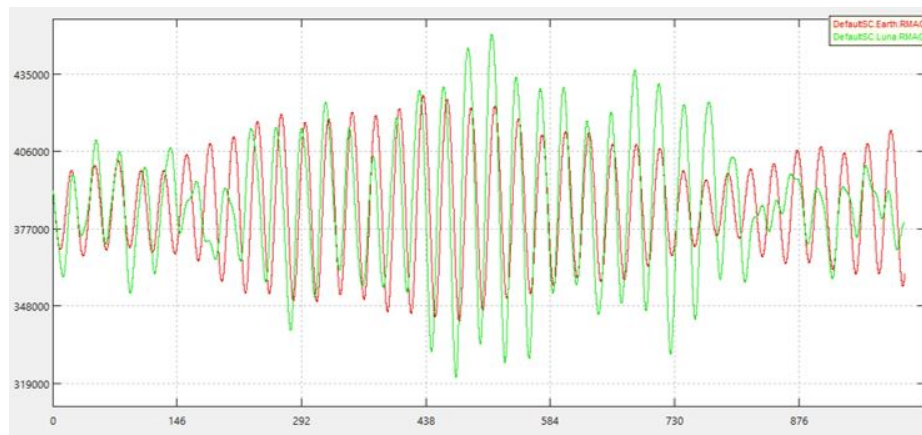


Figura 16: Representación de la distancia Tierra-satélite y Luna-satélite tras 1000 días.

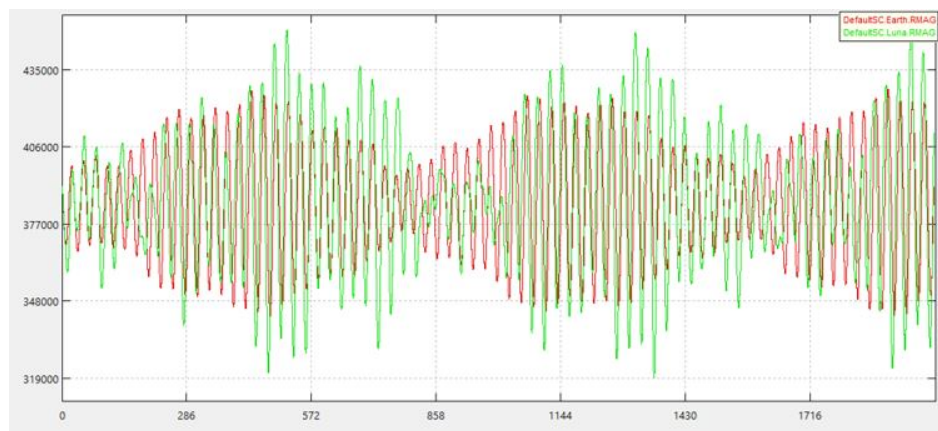


Figura 17: Representación de la distancia Tierra-satélite y Luna-satélite tras 2000 días.

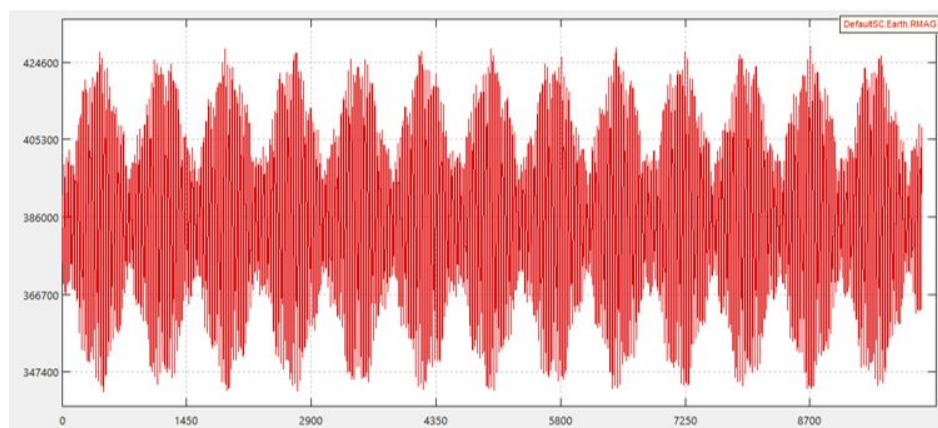


Figura 18: Representación de la distancia Tierra-satélite tras 10000 días.

Se comentó anteriormente que no se iban a mostrar en el informe las órbitas para cada integrador. En la siguiente imagen se comprueba la igualdad de resultados con los tres esquemas utilizados:

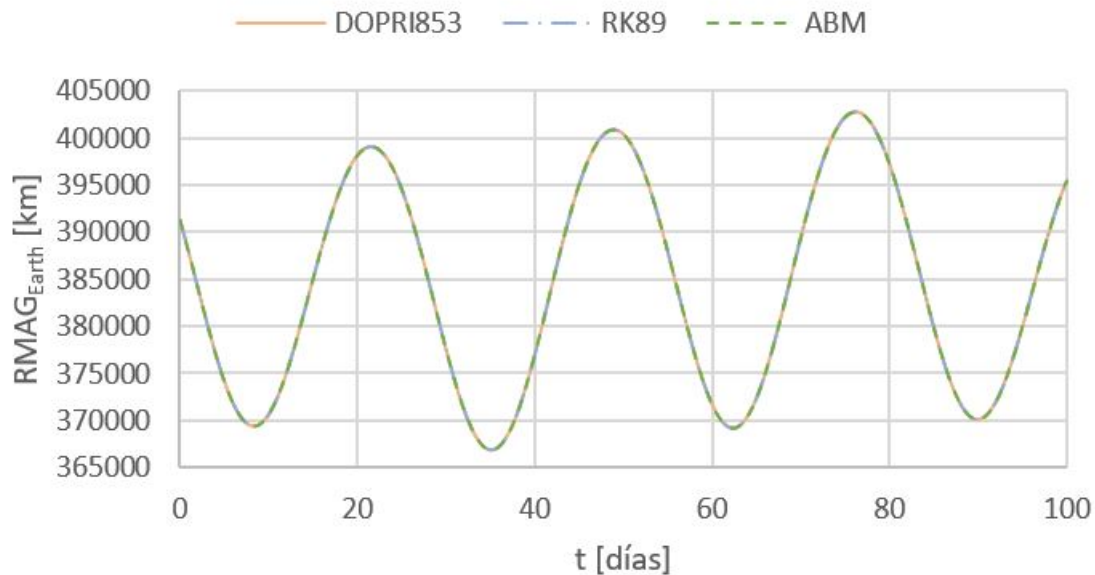


Figura 19: Comparación de la distancia Tierra-satélite con los tres esquemas numéricos tras 100 días.

5. Comparación FORTRAN-GMAT

A pesar de que se cumple el carácter de estabilidad en ambos, se observa una clara diferencia entre las órbitas extraídas con el programa propio en FORTRAN y con las extraídas de GMAT. Con el primero de ellos la máxima distancia que alcanza el satélite en su trazado es de alrededor de 500 km; mientras que en el segundo, se tiene una distancia máxima de 50000 km. La diferencia es de dos órdenes de magnitud, algo claramente notable.

Es bastante probable que esto suceda debido a que GMAT tiene en cuenta órbitas con excentricidad, tiene implementado un modelo de gravedad de la Tierra más complejo y tiene en cuenta el efecto de todos los planetas del sistema solar.

Por ello, los resultados obtenidos con el programa realizado en FORTRAN son una primera aproximación, de la cual se obtienen unas soluciones que permiten formarse una idea de lo que sucede en realidad.

6. Conclusiones

- Los puntos de Lagrange L1, L2 y L3 son inestables, mientras que L4 y L5 son puntos marginalmente estables.
- Los resultados obtenidos con FORTRAN y GMAT son iguales en cuanto a carácter de estabilidad de los puntos se refiere, pero distintos a la hora de modelizar el trazado del satélite en el tiempo. Esto se debe a que en GMAT se consideran órbitas con excentricidad, un modelo de gravedad de la Tierra más complejo y el efecto de todos los planetas del sistema solar.
- Las órbitas obtenidas con ambos métodos siguen un patrón, su traza se repite cada cierto tiempo. En FORTRAN esto sucede cada 250 días, mientras que en GMAT cada 2 años.
- Las órbitas obtenidas con FORTRAN tras linealizar las ecuaciones del movimiento no son iguales que las obtenidas integrando numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal (aunque guardan cierta similitud).
- En dinámica orbital es imprescindible utilizar integradores de alto orden para conseguir soluciones estables en el tiempo y suficientemente precisas.
- Los esquemas numéricos de alto orden RK Dormand-Prince (DOPRI853), Adams-Bashforth-Moulton (ODE113) y Gregg-Bulirsch-Stoer (ODEX) convergen a la misma solución en este problema.
- El método multipaso Adams-Bashforth-Moulton tarda en converger más tiempo que los otros dos esquemas (del orden de tres veces más).
- Acostumbrarse a utilizar partes de códigos ajenos es realmente importante, ya que supone un gran ahorro de tiempo y trabajo. Para ello los *wrappers* son una herramienta excepcional, ya que permiten realizar esto con una simple entrada de argumentos.

Referencias

- [1] Puntos de Lagrange. [Online] https://es.wikipedia.org/wiki/Puntos_de_Lagrange
- [2] jahrWork [Online] <https://github.com/jahrWork>
- [3] Fortran Codes [Online] <http://www.unige.ch/hairer/software.html>
- [4] ODE [Online] <http://www.netlib.org/ode/>
- [5] Dormand Prince method [Online] <https://en.wikipedia.org/wiki/Dormand-Prince>
- [6] Bulirsch-Stoer method [Online] <https://en.wikipedia.org/wiki/Bulirsch-Stoer>