第一章 矢量分析

1.1 • 矢量代数与位置矢量

1.2 • 标量场及其梯度

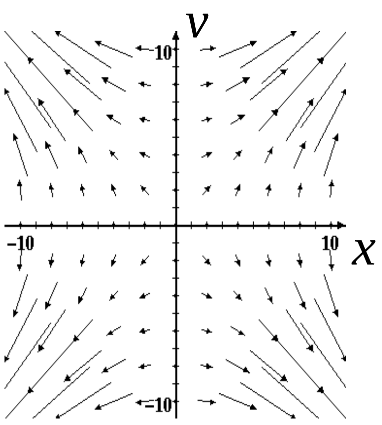
1.3 • 矢量场的通量及散度

1.4 • 矢量场的环量及旋度

1.5 • 场函数的高阶微分运算

1.6 • 矢量场的积分定理

1.7 • 赫姆霍兹定理



三度，两定理

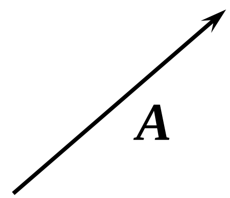
1.1 矢量代数与位置矢量

1、矢量和标量

矢量：如A或 $\vec{A}$ a或 等；　　标量：如 f、g、φ、ψ 等。

矢量A的模记作 $|A|$ 或 A。

矢量A的图示:



2、矢量运算

❖ 两矢量A和B相加定义为一个新矢量$A+B$

(a) 平行四边形法则　　(b) 首尾相接法则

图1-1两矢量相加

1.1 矢量代数与位置矢量

❖ $\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$相减为新矢量$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$

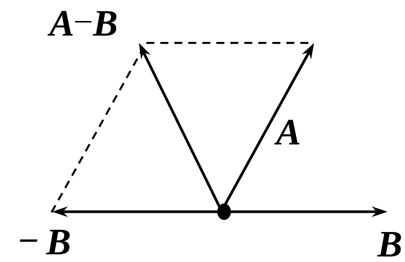


图1-2 两矢量相减

交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (1-1)

结合律 $\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}\pm\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\pm(\boldsymbol{B}\pm\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\pm\boldsymbol{C}$ (1-2)

直角坐标系中的矢量及运算

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x A_x+\boldsymbol{e}_y A_y+\boldsymbol{e}_z A_z \qquad (1\text{-}3)$$

模： $|A| = (A^2{}_x + A^2{}_y + A^2{}_z)^{1/2}$ (1-4)

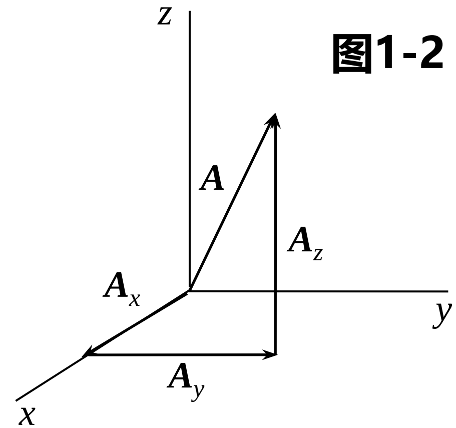


图 1-3 直角坐标中的A及其各分矢量

若已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x A_x+\boldsymbol{e}_y A_y+\boldsymbol{e}_z A_z$ $\qquad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x B_x+\boldsymbol{e}_y B_y+\boldsymbol{e}_z B_z$

则 $\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x(A_x\pm B_x)+\boldsymbol{e}_y(A_y\pm B_y)+\boldsymbol{e}_z(A_z\pm B_z)$ （1-5）

$$|\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}|=[(A_x\pm B_x)^2+(A_y\pm B_y)^2+(A_z\pm B_z)^2]^{1/2} \qquad （1\text{-}6）$$

1.1 矢量代数与位置矢量

标量f与矢量A的乘积定义为一新矢量，用$f\boldsymbol{A}$表示，它是A的f倍。

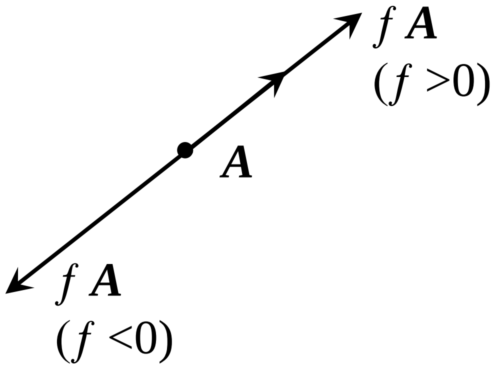


图1-4 f与A 相乘

由 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z$

可得 $f\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x fA_x + \boldsymbol{e}_y fA_y + \boldsymbol{e}_z fA_z$ （1-7）

标量积或点积

定义式 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta$ $(0\le\theta\le 180^\circ)$ （1–8）

点积的基本性质：

交换律 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$；

分配律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$；

A、B相互垂直，即$\theta=90^\circ$ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$；

A自身的点积， 即$\theta=0^\circ$ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A^2$。

1.1 矢量代数与位置矢量

直角坐标系中的点积运算

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z)\cdot(\boldsymbol{e}_x B_x + \boldsymbol{e}_y B_y + \boldsymbol{e}_z B_z)$$

由单位矢量的正交性

$$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z = 1$$

$$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_x = 0$$

得

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (1\text{-}9)$$

- **矢量积或叉积**

定义式

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = AB\sin\theta\,\boldsymbol{e}_n \qquad (1\text{-}10)$$

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$两矢量决定的平面垂直，方向由右手定则决定。

叉积基本性质：

不遵从交换律 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$；

遵从分配律 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$相平行（$\theta = 0$或$180°$）时，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$，反之亦然；

$\boldsymbol{A}$自身的叉积为零，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$。

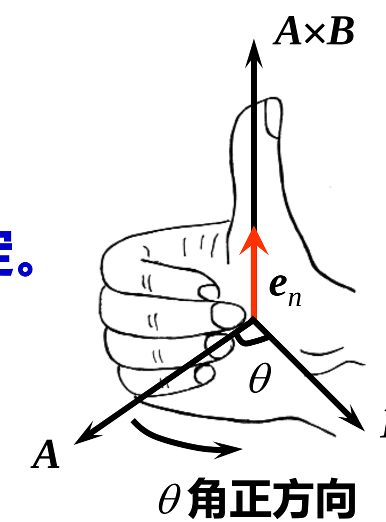


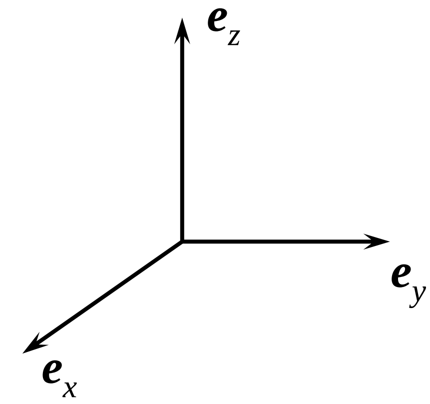
图1-5 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的右手定则

1.1 矢量代数与位置矢量

直角坐标系中的叉积运算

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z)\times(\boldsymbol{e}_x B_x + \boldsymbol{e}_y B_y + \boldsymbol{e}_z B_z)$$

由单位矢量的叉乘关系



$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z = 0$$

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \quad (\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x = -\boldsymbol{e}_z)$$

$$\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x \quad (\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y = -\boldsymbol{e}_x)$$

$$\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \quad (\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z = -\boldsymbol{e}_y)$$

可得 $$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_x(A_yB_z - A_zB_y) + \boldsymbol{e}_y(A_zB_x - A_xB_z) + \boldsymbol{e}_z(A_xB_y - A_yB_x)$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (1\text{-}12)$$

1.1 矢量代数与位置矢量

- **三矢量的乘积**

标量三重积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

矢量三重积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$

标量三重积的行列式形式

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

1.1 矢量代数与位置矢量

3 位置矢量

设P点的坐标为（x, y, z），则

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z$$

其模 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

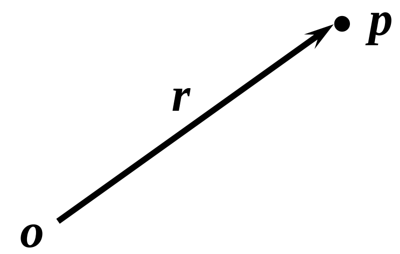


图1-6 位置矢量

相对位置矢量及模

$\boldsymbol{r}'$ 是$P'(x', y', z')$点的位置矢量

$$\boldsymbol{r}' = x'\,\boldsymbol{e}_x + y'\,\boldsymbol{e}_y + z'\,\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = (x - x')\,\boldsymbol{e}_x + (y - y')\,\boldsymbol{e}_y + (z - z')\,\boldsymbol{e}_z$$

$$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = [\,(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\,]^{1/2}$$

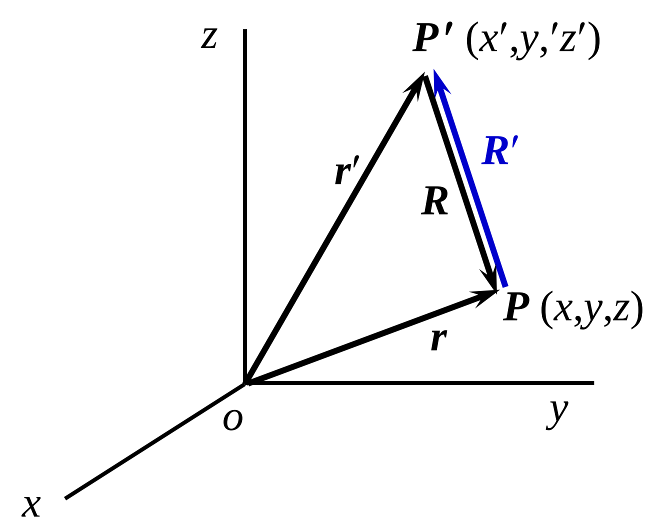


图1-7 位置矢量与相对位置矢量

1.1 矢量代数与位置矢量

相对坐标函数

相对坐标标量函数：

$$f(\boldsymbol{R}) = f(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = f(x - x', y - y', z - z')$$

相对坐标矢量函数：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \boldsymbol{F}(x - x', y - y', z - z')$$

1.1 矢量代数与位置矢量

1. 在直角坐标系中，从点 $(2,-4,1)$ 到点 $(0,-2,0)$ 的矢量为 $\vec{A}$，则矢量 $\vec{A}$ 的单位矢量 $\vec{e}_A$ 为(　　)

A. $-2\vec{e}_x+2\vec{e}_y-\vec{e}_z$

B. $2\vec{e}_x-2\vec{e}_y+\vec{e}_z$

C. $-\frac{2}{3}\vec{e}_x+\frac{2}{3}\vec{e}_y-\frac{1}{3}\vec{e}_z$

D. $-\frac{2}{9}\vec{e}_x+\frac{2}{9}\vec{e}_y-\frac{1}{9}\vec{e}_z$

矢量 $\vec{A}=(0-2)\vec{e}_x+[-2-(-4)]\vec{e}_y+(0-1)\vec{e}_z=-2\vec{e}_x+2\vec{e}_y-\vec{e}_z$

则单位矢量 $\vec{e}_A=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{-2\vec{e}_x+2\vec{e}_y-\vec{e}_z}{\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}}=-\frac{2}{3}\vec{e}_x+\frac{2}{3}\vec{e}_y-\frac{1}{3}\vec{e}_z$

1.1 矢量代数与位置矢量

2. 已知 $\vec{A}=2\vec{e}_x+4\vec{e}_y-3\vec{e}_z$， $\vec{B}=\vec{e}_x-\vec{e}_y$，则 $\vec{A}\bullet\vec{B}$ 为(　　)

A. $2\vec{e}_x-4\vec{e}_y$

B. -2

C. $-3\vec{e}_x-3\vec{e}_y-6\vec{e}_z$

D. -12

若已知矢量 $\vec{A}=A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+A_z\vec{e}_z$ 与矢量 $\vec{B}=B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y+B_z\vec{e}_z$，

则 $\vec{A}\bullet\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

由已知条件可得 $\vec{A}\bullet\vec{B}=2\times1+4\times(-1)+(-3)\times0=-2$

1.1 矢量代数与位置矢量

3. 已知 $\vec{A}=2\vec{e}_x+4\vec{e}_y-3\vec{e}_z$，$\vec{B}=\vec{e}_x-\vec{e}_y$，则 $\vec{A}\times\vec{B}$ 为(　　)

A. $2\vec{e}_x-4\vec{e}_y$

B. -2

C. $-3\vec{e}_x-3\vec{e}_y-6\vec{e}_z$

D. -12

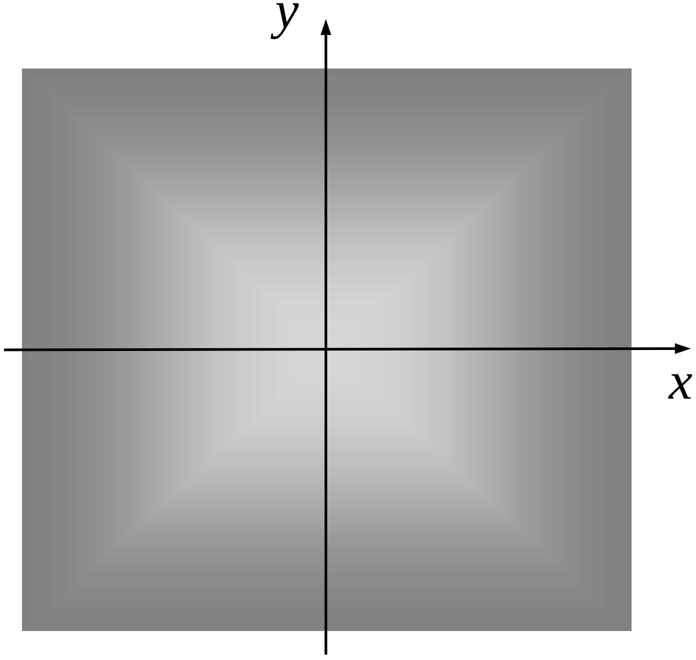
若已知矢量 $\vec{A}=A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+A_z\vec{e}_z$ 与矢量 $\vec{B}=B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y+B_z\vec{e}_z$，

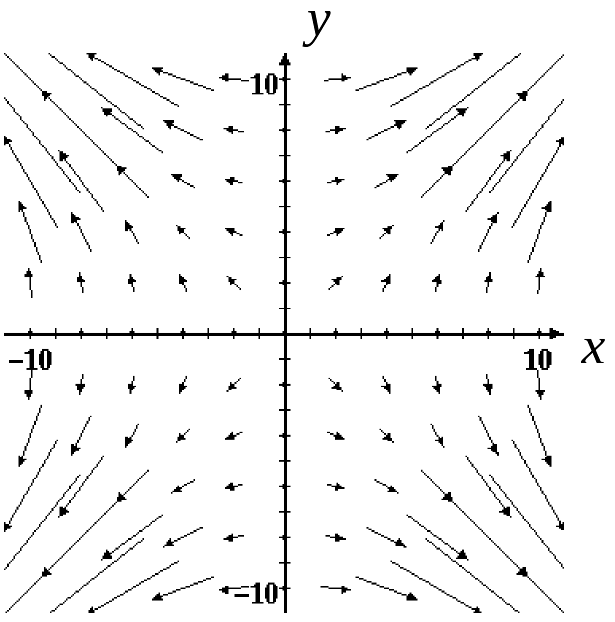
$$\text{则 } \vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{e}_z$$

$$\text{由已知条件可得 } \vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 2 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-3\vec{e}_x-3\vec{e}_y-6\vec{e}_z$$

1.2 标量场及其梯度

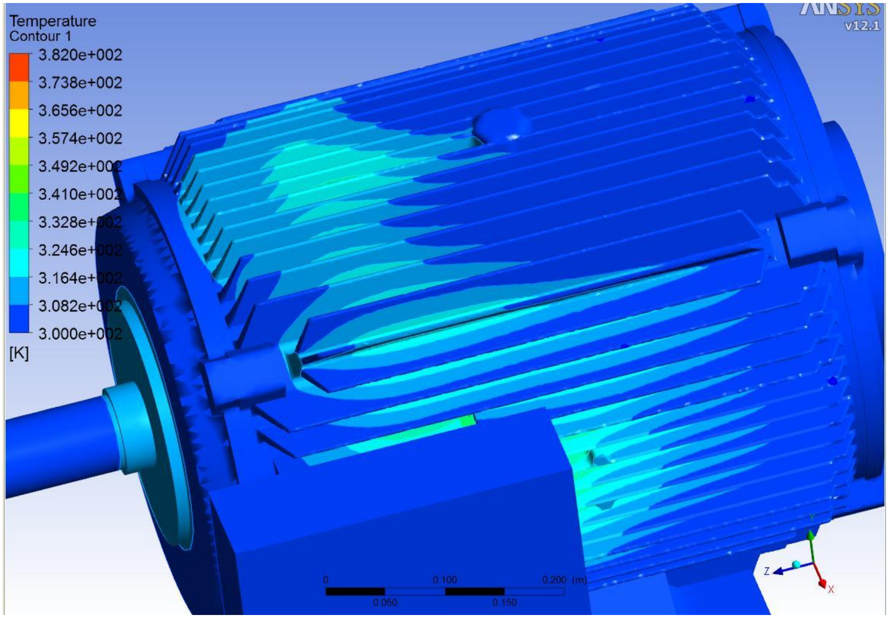
标量场（Φ）和矢量场（A）



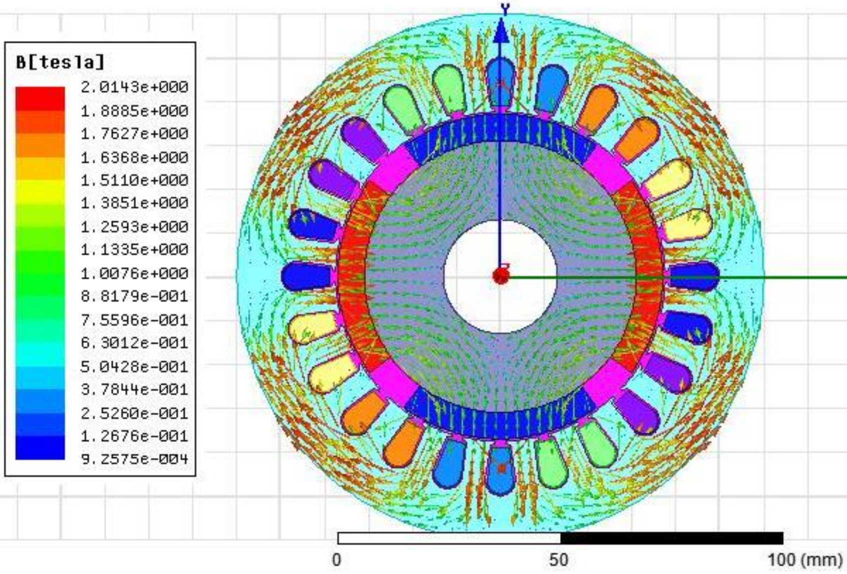


以浓度表示的标量场Φ　　**以箭头表示的矢量场A**

1.2 标量场及其梯度

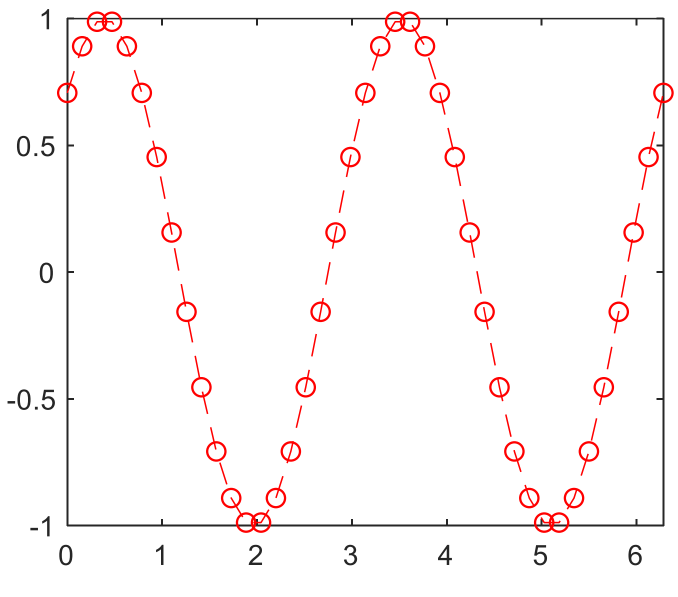


某电机温度场分布

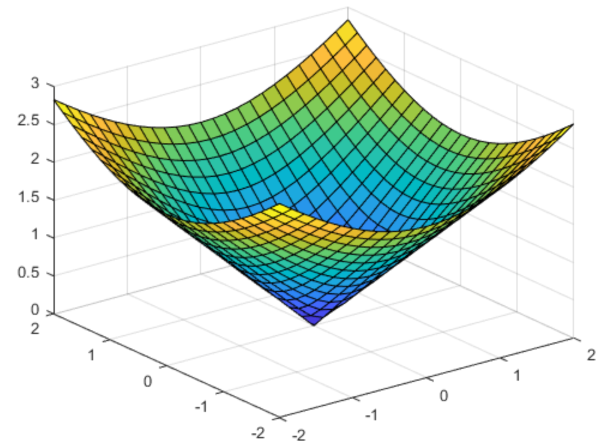


某电机磁感应强度分布

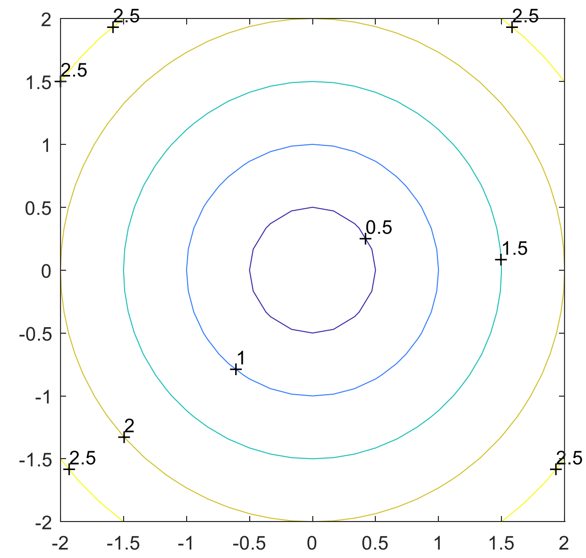
1.2 标量场及其梯度



1
0.5
0
-0.5
-1
0
1
2
3
4
5
6



3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2

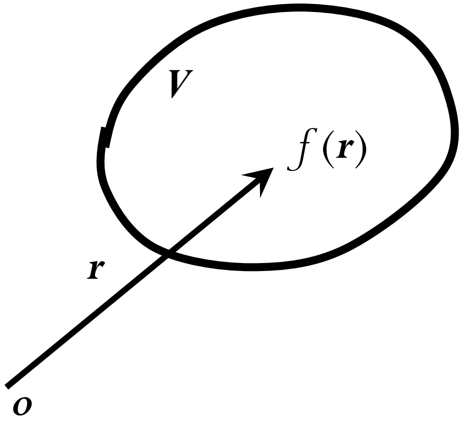


2.5
2.5
2.5
0.5
1.5
1
2
2.5
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

1.2 标量场及其梯度

1、标量场定义及图示

对于区域 V 内的任意一点 r，若有某种物理量的一个确定的数值或标量函数 $f(r)$ 与之对应，我们就称这个标量函数 $f(r)$ 是定义于 V 内的标量场。



标量场有两种：

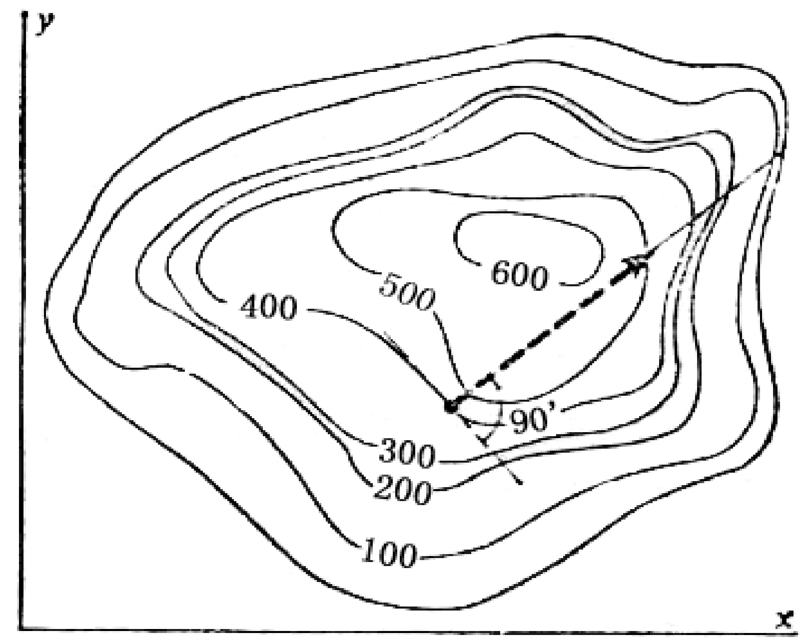
与时间无关的恒稳标量场——$f(\boldsymbol{r})$

与时间有关的时变标量场——$f(\boldsymbol{r}, t)$

1.2 标量场及其梯度

标量场的图示--等值线(面)。

$$f\ (x, y, z) = const$$



等值线

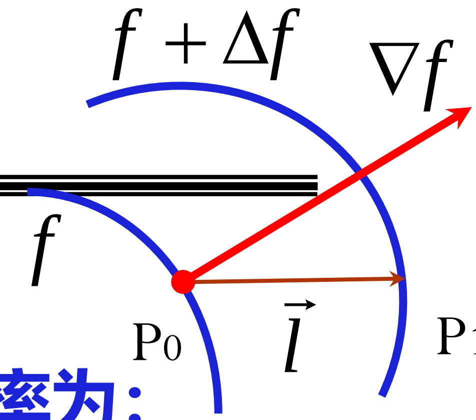
作图原则：

1）等值线(面)不能相交，

2）相邻等值线（面）差值为常数。

在某一高度上沿什么方向高度变化最快?

1.2 标量场及其梯度



1、方向导数

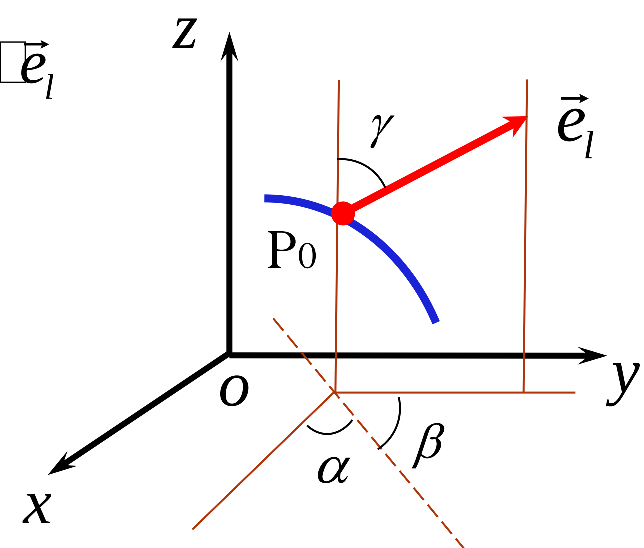
函数 $f = f(x,y,z)$ 沿某一方向 $\vec{l}$ 的变化率为：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{f(P_1)-f(P_0)}{\Delta l} = \boxed{\nabla f} \cdot \vec{e}_l$$

$$= \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\Delta z}{\Delta l}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

$$= \underbrace{\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z\right)}}_{\nabla f} \cdot \left(\cos\alpha\,\mathbf{e}_x + \cos\beta\,\mathbf{e}_y + \cos z\,\mathbf{e}_z\right)$$



$\cos\alpha, \cos\beta, \cos z$为$\vec{l}$方向的方向余弦。

当 $\vec{e}_l$ 与 ∇f 方向一致时，方向导数最大。

1.2 标量场及其梯度

哈密顿算子∇（读作del或nabla）

直角坐标系中的具体形式为

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

使用 ∇ 算符时注意几点：

- 单独存在没有任何意义；
- ∇虽然不是一个真实矢量，但在运算中，必须视为矢量并令它具有矢量的一般特性，即 $\nabla\times\nabla=0$ ，$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$ 。
- 在不同坐标系中，算符有不同的表达形式。

1.2 标量场及其梯度

2、梯度（gradient）

标量场$f(x,y,z)$在(x,y,z)点的梯度定义为：

$$gradf=\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z)$$

因此

$$\mathrm{d}f=\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

1.2 标量场及其梯度

（3）梯度的物理意义

- 标量场的梯度是一个矢量,是空间坐标的函数;
- 梯度的大小为该点标量函数 f 的最大变化率，即该点最大方向导数;
- 梯度的方向为该点最大方向导数的方向,即与等值线（面）相垂直的方向，它指向函数的增加方向.

1.2 标量场及其梯度

例：已知标量场$u(p)=3x^2+z^2-2yz+2zx$，求过点$P(0,0.5,1)$点的梯度和梯度的模。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x+2z \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=-2z \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=2z-2y+2x$$

所以 $$\nabla u=(6x+2z)\vec{e}_x-2z\vec{e}_y+2(x-y+z)\vec{e}_z$$

$$=2\vec{e}_x-2\vec{e}_y+\vec{e}_z$$

$$\left|\nabla u\right|=\sqrt{2^2+2^2+1}=3$$

1.2 标量场及其梯度

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\nabla f)_l = \nabla f \cdot \mathbf{e}_l$$

例 **求** $f = 4\mathrm{e}^{2x-y+z}$ **在点**P_1（1，1，–1）**处的由该点指向**P_2（–3，5，6）**方向上的方向导数。**

解：

$$\nabla f = \nabla(4\mathrm{e}^{2x\text{-}y+z}) = 4\nabla(\mathrm{e}^{2x\text{-}y+z})$$

$$= 4\mathrm{e}^{2x\text{-}y+z}\nabla(2x - y + z) = 4\mathrm{e}^{2x\text{-}y+z}(2\vec{\mathrm{e}}_x - \vec{\mathrm{e}}_y + \vec{\mathrm{e}}_z)$$

$$\nabla f\big|_{P_1} = 4\mathrm{e}^{2\text{-}1\text{-}1}(2\vec{\mathrm{e}}_x - \vec{\mathrm{e}}_y + \vec{\mathrm{e}}_z) = 4(2\vec{\mathrm{e}}_x - \vec{\mathrm{e}}_y + \vec{\mathrm{e}}_z)$$

$$\mathrm{e}_{12} = \frac{\mathrm{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{(-3-1)\vec{\mathrm{e}}_x + (5-1)\vec{\mathrm{e}}_y + (6+1)\vec{\mathrm{e}}_z}{[(-4)^2 + 4^2 + 7^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{-4\vec{\mathrm{e}}_x + 4\vec{\mathrm{e}}_y + 7\vec{\mathrm{e}}_z}{\sqrt{81}} = \frac{-4\vec{\mathrm{e}}_x + 4\vec{\mathrm{e}}_y + 7\vec{\mathrm{e}}_z}{9}$$

1.2 标量场及其梯度

（5）梯度的基本运算公式

$$\nabla c = 0$$ （c 为常数）

$$\nabla(cf) = c\nabla f$$

$$\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$$

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$$

$$\nabla(f/g) = \left(g\nabla f - f\nabla g\right)/g^2$$

$$\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$$

1.2 标量场及其梯度

（6）梯度运算的几个基本关系式

- 相对坐标标量函数 $f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$　　$\nabla f=-\nabla' f$

证明：在直角坐标系中$f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=f(x-x', y-y', z-z')$

上式重写为　$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z=-\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y'}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z'}\boldsymbol{e}_z\right)$$

等式若成立，则应有 $$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x'}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y'}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{\partial f}{\partial z'}$$

令 $x-x'=\mathrm{X}$，$y-y'=\mathrm{Y}$，$z-z'=\mathrm{Z}$，应用复合函数求导法则可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}}\cdot\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}}\cdot\frac{\partial (x-x')}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}}\ ;\quad \frac{\partial f}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}}\cdot\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}}\cdot\frac{\partial (x-x')}{\partial x'}=-\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}}$$

即有　$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x'}$$

1.2 标量场及其梯度

同理可得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y'} \quad , \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial z'}$$

$$\nabla f = -\nabla' f$$

证毕。

1.2 标量场及其梯度

- **相对位置矢量**$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ **的模** $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$

$$\nabla R = \frac{\boldsymbol{R}}{R} = \boldsymbol{e}_R \qquad \nabla \frac{1}{R} = -\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = -\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

在直角坐标中

$$\boldsymbol{R} = (x - x')\boldsymbol{e}_x + (y - y')\boldsymbol{e}_y + (z - z')\boldsymbol{e}_z$$

$$R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$$

则

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{2}[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-1/2}$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x}[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x - x')}{R} = \frac{(x - x')}{R}$$

1.2 标量场及其梯度

- 相对位置矢量$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ 的模 $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$

同理有 $$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{(y - y')}{R} \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{(z - z')}{R}$$

于是 $$\nabla R = \frac{\partial R}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial R}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial R}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

$$= \frac{1}{R}[(x - x')\boldsymbol{e}_x + (y - y')\boldsymbol{e}_y + (z - z')\boldsymbol{e}_z] = \frac{\boldsymbol{R}}{R} = \boldsymbol{e}_R$$

1.2 标量场及其梯度

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = -\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

根据算符的微分特性可得

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \nabla R = -\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R} = -\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2} \qquad (R \neq 0)$$

1.2 标量场及其梯度

例 2 求 $f = 4\mathrm{e}^{2x-y+z}$ 在点P_1（1，1，–1）处的由该点指向P_2（–3，5，6）方向上的方向导数。

于是，f 在P_1处沿$\boldsymbol{R}_{12}$方向上的方向导数为：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial R_{12}}\right|_{P_1} = \nabla f\big|_{P_1} \cdot \boldsymbol{e}_{12} = 4(2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z) \cdot \frac{-4\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y + 7\boldsymbol{e}_z}{9}$$

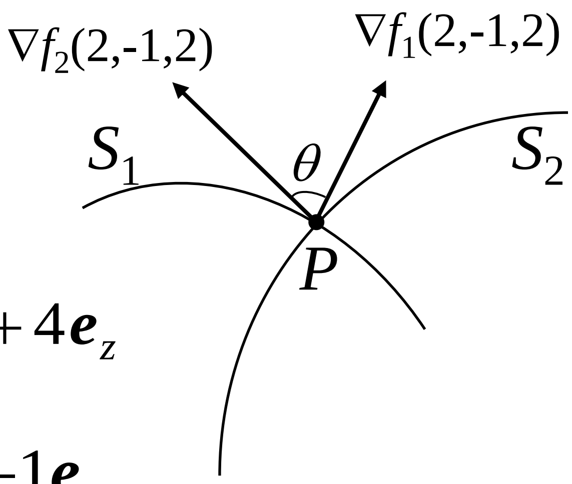
$$= \frac{4}{9}\left[2\times(-4) + (-1)\times 4 + 1\times 7\right] = -\frac{20}{9}$$

1.2 标量场及其梯度

例3 **应用标量场的梯度与该标量场的等值面处处正交的概念，求两曲面** $x^2+y^2+z^2=9$ **和** $x^2+y^2=z+3$**在**$P(2,-1,2)$**处相交的锐角。**

解：将这两个曲面分别看作是两个标量场的等值面，对应的两个标量场函数为：

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad f_2 = x^2 + y^2 - z$$



求P**点处的梯度**

$$\nabla f_1\big|_{\mathrm{p}} = \left(2x\boldsymbol{e}_x + 2y\boldsymbol{e}_{\mathrm{y}} + 2z\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}\right)_{\mathrm{p}} = 4\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla f_2\big|_{\mathrm{p}} = \left(2x\boldsymbol{e}_x + 2y\boldsymbol{e}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}\right)_{\mathrm{p}} = 4\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y - 1\boldsymbol{e}_z$$

1.2 标量场及其梯度

例3 **应用标量场的梯度与该标量场的等值面处处正交的概念，求两曲面** $x^2+y^2+z^2=9$ **和** $x^2+y^2=z+3$**在**$P(2,-1,2)$**处相交的锐角。**

$$|\nabla f_1| = \sqrt{4^2+(-2)^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$|\nabla f_2| = \sqrt{4^2+(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{21}$$

$$\nabla f_1 \cdot \nabla f_2 = |\nabla f_1||\nabla f_2|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\nabla f_1 \cdot \nabla f_2}{|\nabla f_1||\nabla f_2|} = \frac{(4\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z)\cdot(4\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y - 1\boldsymbol{e}_z)}{6\sqrt{21}}$$

$$= \frac{16+4+-4}{6\sqrt{21}} = \frac{8}{3\sqrt{21}}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\frac{8}{3\sqrt{21}}$$

1.3 矢量的通量及散度

1、矢量场定义及图示

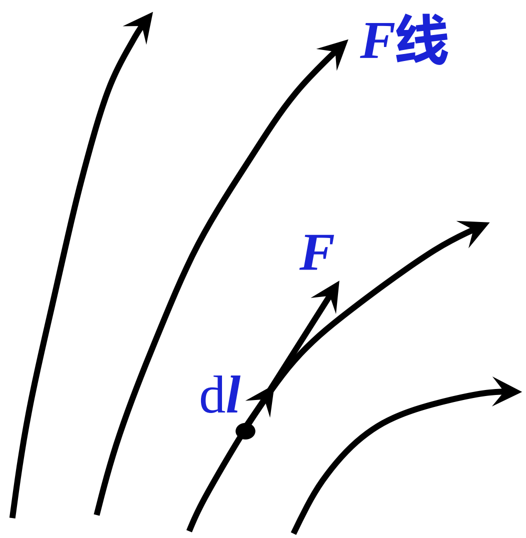
对于空间区域V内的任意一点r，若有一个矢量$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$与之对应，我们就称这个矢量函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$是定义于$V$的矢量场。

恒稳矢量场$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ ，时变矢量场$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t)$。

矢量场图 -- 矢量线

其方程为

$$\boldsymbol{F}\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$



矢量线的示意图

1.3 矢量的通量及散度

矢量场的直角坐标式为

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=F_x(x,y,z)\,\boldsymbol{e}_x+F_y(x,y,z)\,\boldsymbol{e}_y+F_z(x,y,z)\,\boldsymbol{e}_z$$

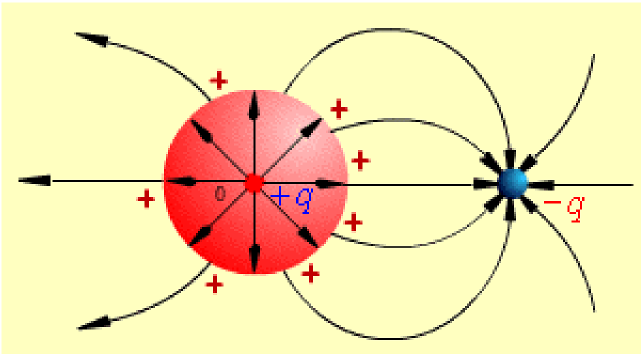
$$(F_y\,\mathrm{d}z-F_z\,\mathrm{d}y)\,\boldsymbol{e}_x+(F_z\,\mathrm{d}x-F_x\,\mathrm{d}z)\,\boldsymbol{e}_y+(F_x\,\mathrm{d}y-F_y\,\mathrm{d}x)\,\boldsymbol{e}_z=0$$

或

$$F_y\,\mathrm{d}z-F_z\,\mathrm{d}y=0$$

$$F_z\,\mathrm{d}x-F_x\,\mathrm{d}z=0$$

$$F_x\,\mathrm{d}y-F_y\,\mathrm{d}x=0$$



矢量线

得直角坐标式的矢量线方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_x}=\frac{\mathrm{d}y}{F_y}=\frac{\mathrm{d}z}{F_z}$$

1.3 矢量的通量及散度

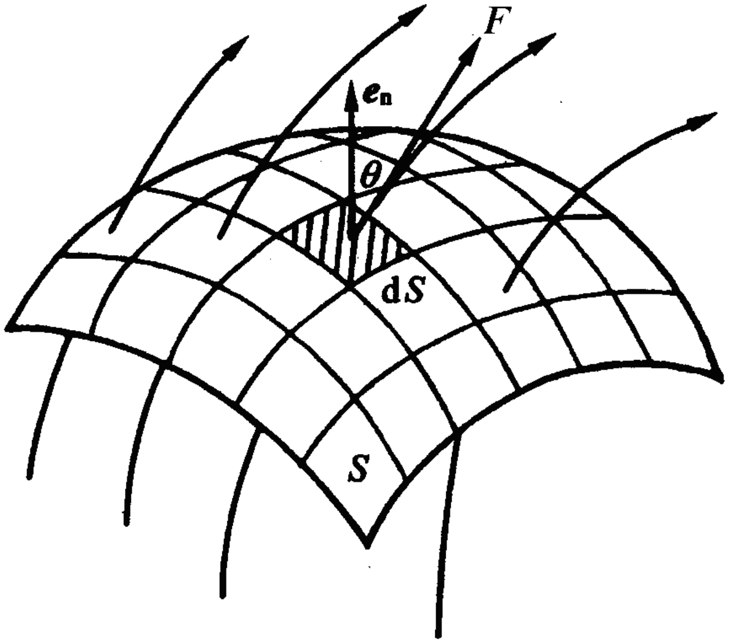
2、通量

矢量 $\boldsymbol{F}$ 在面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的面积分为

$$\mathrm{d}\Psi = F_n \mathrm{d}s = F\cos\theta \mathrm{d}S = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

矢量 $\boldsymbol{F}$沿有向曲面S 的面积分

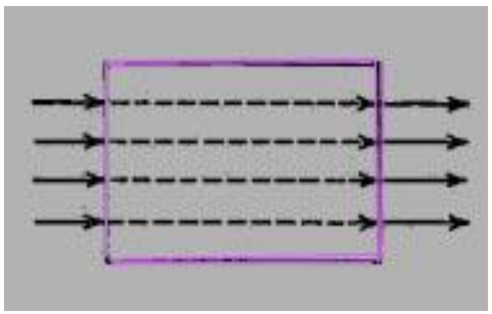
$$\Psi = \int_S \mathrm{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$$



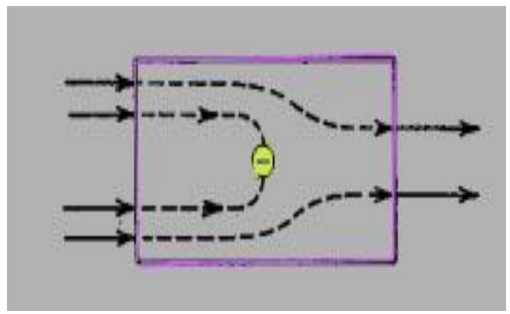
矢量场的通量

1.3 矢量的通量及散度

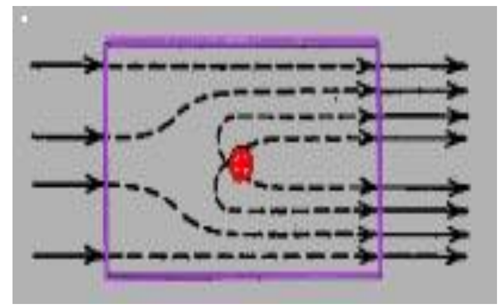
若S 为闭合曲面 $\Psi = \oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ ，可以根据净通量的大小判断闭合面中源的性质:



$\Psi = 0$ (无源)



$\underline{\Psi < 0}$ (有负源)

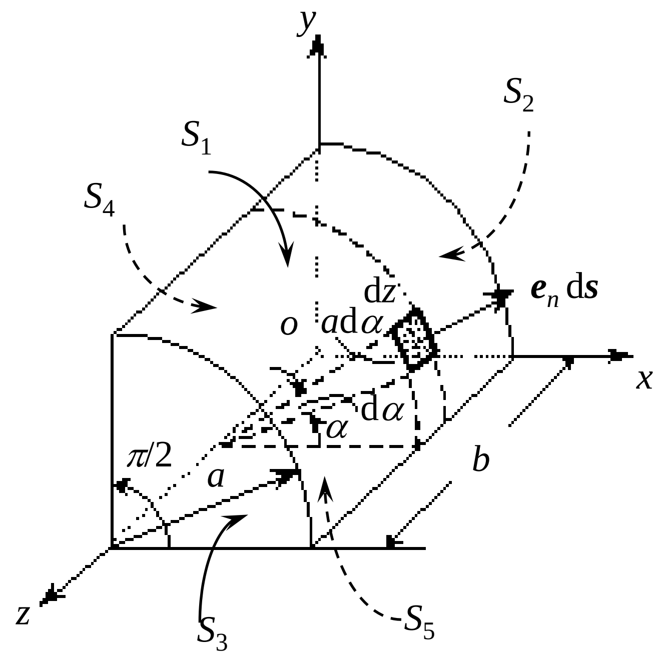


$\underline{\Psi > 0}$ (有正源)

矢量场的闭合面通量

1.3 矢量的通量及散度

例3 **已知** $F(x,y,z)=yz\boldsymbol{e}_x+xz\,\boldsymbol{e}_y+xyz\,\boldsymbol{e}_z$，**试求它穿过闭合面的部分圆柱面$S_1$的通量。**



解 **在S_1面上有圆的参数方程：**

$$x=a\cos\alpha\ ,\quad y=a\sin\alpha$$

S_1上的$\boldsymbol{F}$写成

$$\boldsymbol{F}=az\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_x+az\cos\alpha\,\boldsymbol{e}_y+a^2z\sin\alpha\cos\alpha\,\boldsymbol{e}_z$$

因 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1=a\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_n$

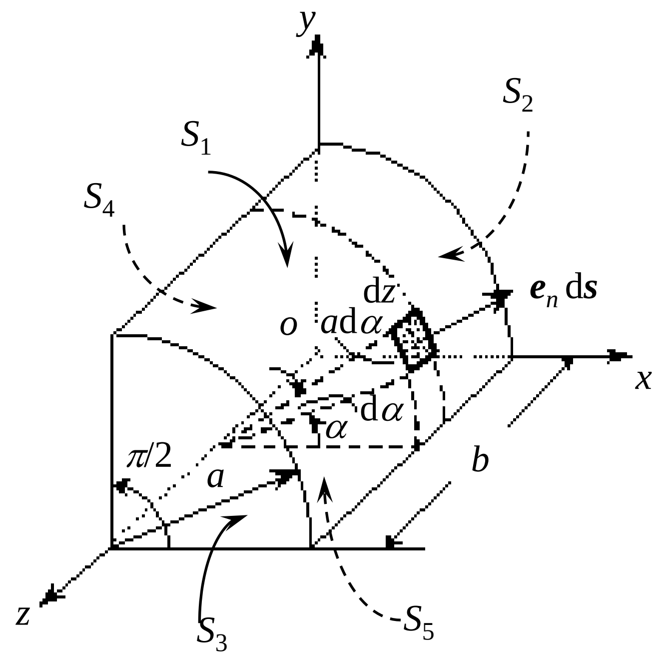
则 $$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1=[\,a^2z\sin\alpha(\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_n)+a^2z\cos\alpha(\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_n)$$

$$+\,a^3z\sin\alpha\cos\alpha(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_n)\,]\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z$$

$$=2a^2z\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z$$

1.3 矢量的通量及散度

例3 **已知** $\boldsymbol{F}(x,y,z)=yz\boldsymbol{e}_x+xz\,\boldsymbol{e}_y+xyz\,\boldsymbol{e}_z$， **试求它穿过闭合面的部分圆柱面$S_1$的通量。**



所以

$$\int_{s_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1=\int_0^{\pi/2}[a^2\sin\alpha\cos\alpha(\int_0^{b}2z\mathrm{d}z)]\mathrm{d}\alpha$$

$$=a^2b^2\int_0^{\pi/2}\sin\alpha\cos\alpha\mathrm{d}\alpha=\frac{a^2b^2}{2}\sin^2\alpha\Big|_0^{\pi/2}=\frac{a^2b^2}{2}$$

1.3 矢量的通量及散度

在直角坐标系中，设

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x + F_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y + F_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_z$$

则通量可写成

$$\varPsi = \int_s \mathrm{F}\cdot\mathrm{d}\,\mathrm{s} = \int_s F_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + F_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + F_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.3 矢量的通量及散度

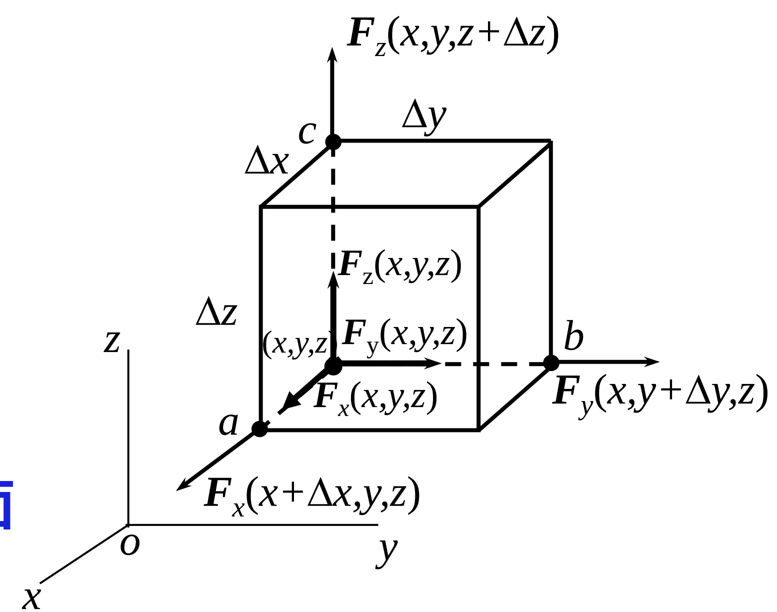
3 散度

如果包围点P 的闭合面ΔS 所围区域ΔV 以任意方式缩小为点P 时, 通量与体积之比的极限 $\lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\Delta V}$ 存在,我们就将它定义为P 点处$F(r)$的散度（divergence），

记作

$$div\,\boldsymbol{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\Delta V}$$

求边长分别为Δx、Δy、Δz 的小平行六面体的通量，其体积$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ 。



直角坐标的微分体积

1.3 矢量的通量及散度

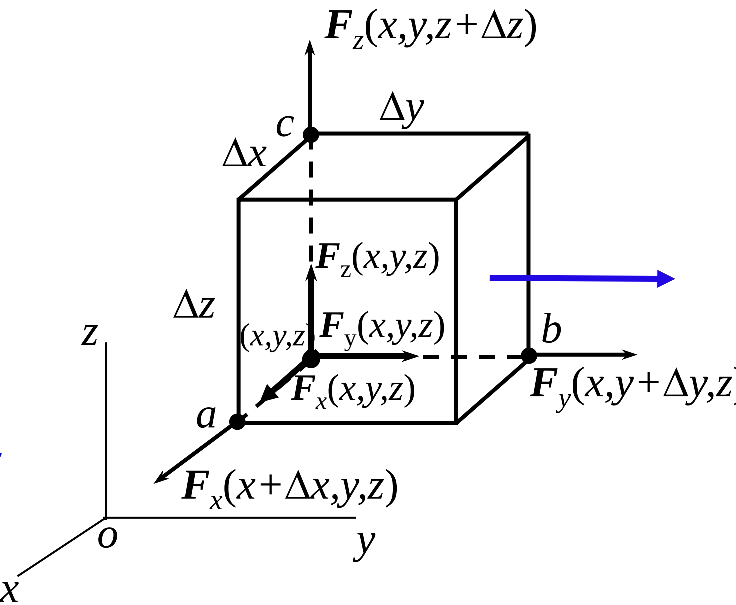
3 散度

根据泰勒级数可知

$$F_x(x+\Delta x,y,z)\approx[F_x(x,y,z)+\frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial x}\Delta x]\vec{e}_x$$

$$F_y(x,y+\Delta y,z)\approx[F_y(x,y,z)+\frac{\partial F_y(x,y,z)}{\partial y}\Delta y]\vec{e}_y$$

$$F_z(x,y,z+\Delta z)\approx[F_z(x,y,z)+\frac{\partial F_z(x,y,z)}{\partial z}\Delta z]\vec{e}_z$$



直角坐标的微分体积

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}\approx[(F_x+\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x)\Delta y\Delta z-F_x\Delta y\Delta z)]+[(F_y+\frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta y)\Delta x\Delta z-F_y\Delta x\Delta z)]$$

$$+[(F_z+\frac{\partial F_z}{\partial z}\Delta z)\Delta x\Delta y-F_z\Delta x\Delta y)]$$

$$=(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z})\Delta V$$

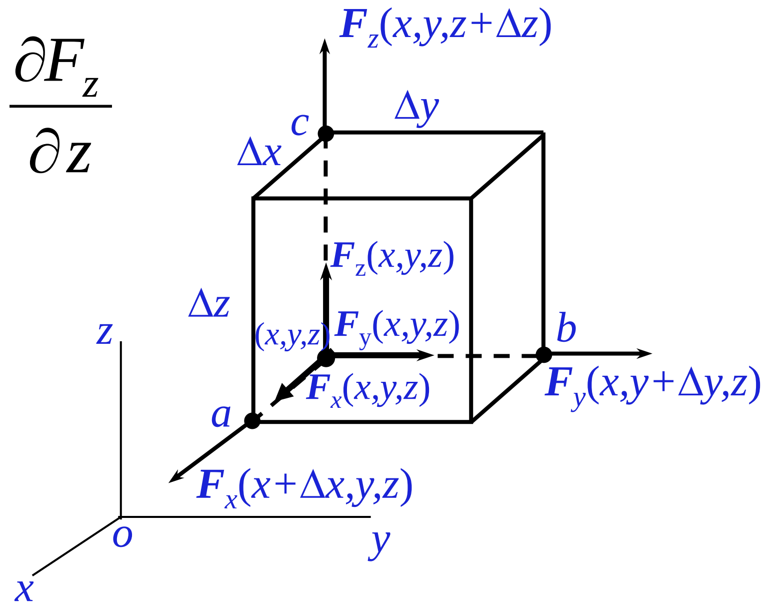
1.3 矢量的通量及散度

即得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\Delta V} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

或

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$



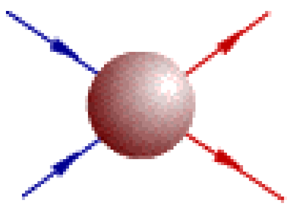
直角坐标的微分体积

1.3 矢量的通量及散度

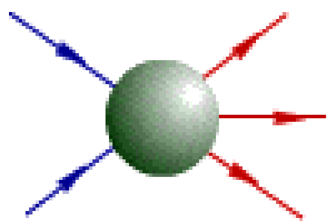
4、散度的物理意义

- 矢量的散度是一个标量，是空间坐标点的函数；
- 散度代表矢量场的通量源的分布特性

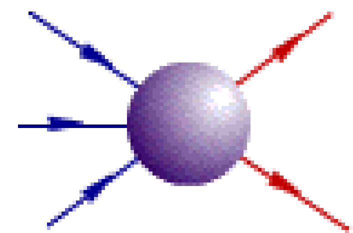
$\nabla\cdot \boldsymbol{F} = 0$（无源）



$\nabla\cdot \boldsymbol{F} = \rho > 0$ （正源）



$\nabla\cdot \boldsymbol{F} = -\rho < 0$（负源）



在矢量场中，若$\nabla\cdot\vec{F} = \rho \neq 0$,则成为之有源场，$\rho$ 成为（通量）源密度

若矢量场中处处$\nabla\cdot\vec{F} = 0$,则成为之无源场。

1.3 矢量的通量及散度

求矢量场 $\vec{D}=(2xyz-y^2)\vec{e}_x+(x^2z-2xy)\vec{e}_y$

$+x^2y\vec{e}_z$在$pA(2,3,-1)$的散度。

$$\nabla\cdot\vec{D}\Big|_{PA}=\left(\frac{\partial\vec{D}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{D}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{D}_z}{\partial z}\right)\Big|_{PA}$$

$$=(2yz-2x+0)\Big|_{PA}$$

$$=2\times3\times(-1)-2\times2$$

$$=-10$$

1.3 矢量的通量及散度

5、散度运算的几个基本关系式

- **相对坐标矢量函数** $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ $\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{F}=-\nabla'\cdot\boldsymbol{F}$

- **相对位置矢量** $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ $\qquad \nabla\cdot\mathrm{R}=3$

- **标量场** $f(\boldsymbol{r})$ **和矢量场** $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ **之积** $f\boldsymbol{F}$ $\qquad \nabla\cdot(f\boldsymbol{F})=f\nabla\cdot\boldsymbol{F}+\nabla f\cdot\boldsymbol{F}$

- $\boldsymbol{R}$ 及其模R $\qquad \nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}=0 \qquad R\neq 0$

1.3 矢量的通量及散度

$$\nabla \cdot (f\,\boldsymbol{F}) = f\,\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \nabla f \cdot \boldsymbol{F}$$

证明： 设 $f(r) = f(x,y,z)$，

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\,\boldsymbol{e}_x + F_y(x,y,z)\,\boldsymbol{e}_y + F_z(x,y,z)\,\boldsymbol{e}_z$$

则

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (f\,\boldsymbol{F}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right) \cdot (fF_x\,\boldsymbol{e}_x + fF_y\,\boldsymbol{e}_y + fF_z\,\boldsymbol{e}_z) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(f\,F_x) + \frac{\partial}{\partial y}(f\,F_y) + \frac{\partial}{\partial z}(f\,F_z) \\
&= \left(f\,\frac{\partial F_x}{\partial x} + F_x\,\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(f\,\frac{\partial F_y}{\partial y} + F_y\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(f\,\frac{\partial F_z}{\partial z} + F_z\,\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= f\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) + \left(F_x\,\frac{\partial f}{\partial x} + F_y\,\frac{\partial f}{\partial y} + F_z\,\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= f\,\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \nabla f \cdot \boldsymbol{F}
\end{aligned}$$

1.3 矢量的通量及散度

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = 0$$

证明：

设： $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}$ $\qquad f = \dfrac{1}{R^3}$

$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{F}) = f\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \cdot \nabla f$$

$$= \frac{1}{R^3}\nabla \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{R} \cdot \nabla \frac{1}{R^3}$$

$$= \frac{3}{R^3} + \boldsymbol{R} \cdot \left(\frac{1}{R^3}\right)' \nabla R$$

$$= \frac{3}{R^3} + \boldsymbol{R} \cdot \left(-\frac{3}{R^4}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R} = 0$$

1.3 矢量的通量及散度

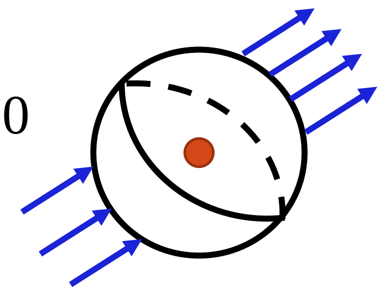
通量

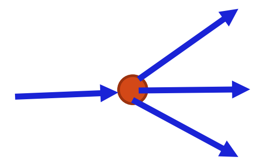
$$\Phi = \oiint_s \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

散度

$$\nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint_s \vec{A} \cdot \mathrm{d}\mathrm{s}}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$\Phi > 0$

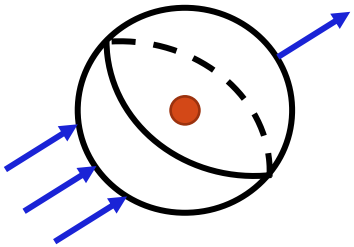




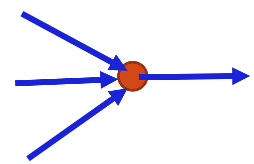
$\nabla \cdot \vec{A} > 0$

$$\oiint_s \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

$\Phi < 0$

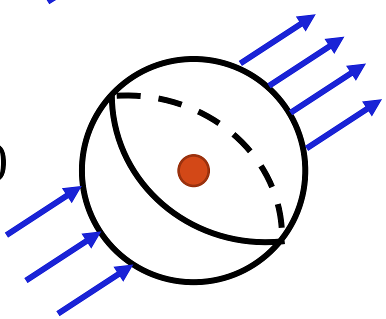


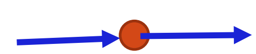
面积分 ⟶ 体积分



$\nabla \cdot \vec{A} < 0$

$\Phi = 0$





$\nabla \cdot \vec{A} = 0$

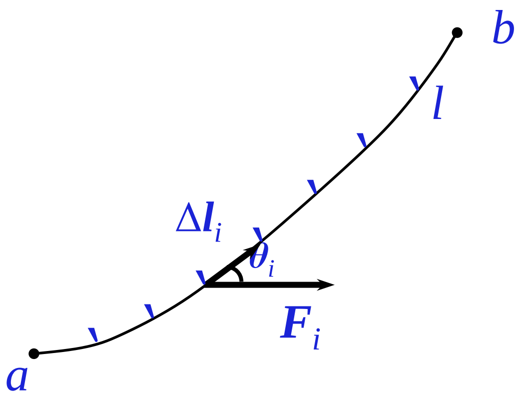
1.4 矢量的环量及旋度

1、环量

先从变力作功问题引入矢量场环量的概念。

$$\Delta A_i \approx F_i \Delta l_i \cos\theta_i = \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{l}_i$$

$$A = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta l \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{l}_i\right) = \int_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

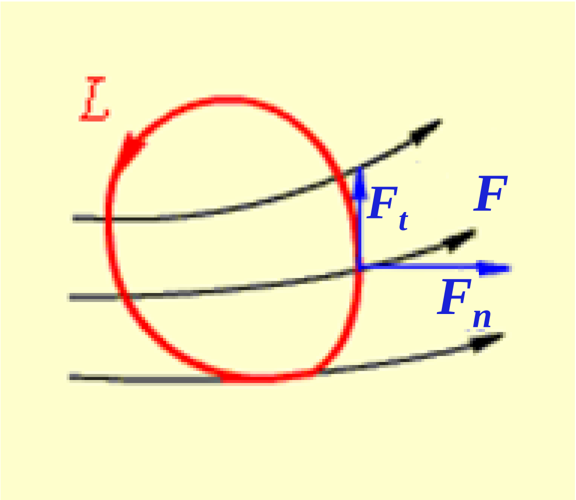


一段积分路径及其细分

1.4 矢量的环量及旋度

若将$F(r)$看成是任意的矢量场，上述积分则代表矢量场$F(r)$沿路径 l 的标量线积分。**矢量场的环量**是上述矢量场线积分概念推广应用于闭合路径的结果，因此，$F(r)$的环量为

$$\boxed{C = \oint_{l} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$



环量的计算

环量不为零的矢量场叫做旋涡场，其场源称为旋涡源，矢量场的环量有检源作用。

1.4 矢量的环量及旋度

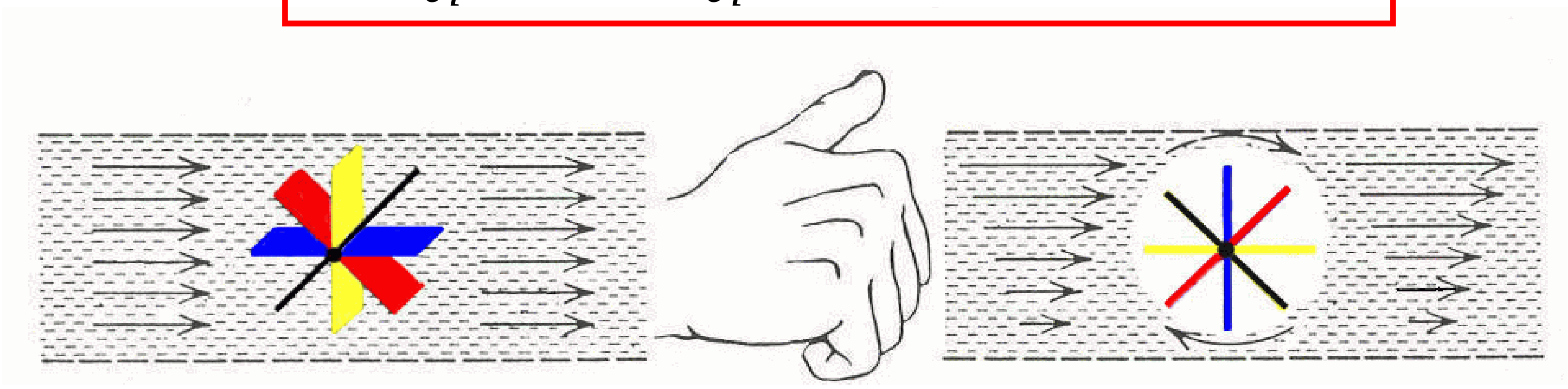
在直角坐标系中，设

$\boldsymbol{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x + F_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y + F_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$

$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_z$

则环量可写成

$$\boxed{C = \oint_l \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l (F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z)}$$



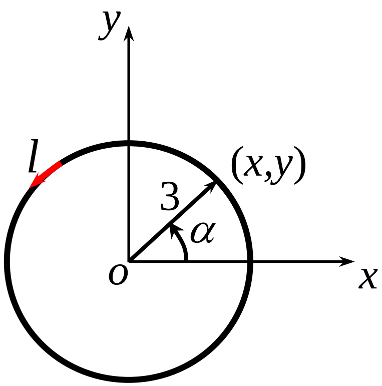
水流沿平行于水管轴线方向流动 $C=0$，无涡旋运动

流体做涡旋运动 $C\neq 0$，有产生涡旋的源

1.4 矢量的环量及旋度

例 4 **已知**$\boldsymbol{F}=(2x-y-z)\boldsymbol{e}_x+(x+y-z^2)\boldsymbol{e}_y+(3x-2y+4z)\boldsymbol{e}_z$**试就图所示**$xoy$**平面上以原点为心、3为半径的圆形路径，求**$\boldsymbol{F}$ **沿其逆时针方向的环量。**

解 **在** xoy **平面上，有**



$$\boldsymbol{F}=(2x-y)\boldsymbol{e}_x+(x+y)\boldsymbol{e}_y+(3x-2y)\boldsymbol{e}_z\ ,\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y$$

$$\oint_l \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_l\left[(2x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y\right]$$

设 $x=3\cos\alpha\ ,\ \ y=3\sin\alpha$

则 $$\oint_l \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^{2\pi}\left\{\left[2(3\cos\alpha)-3\sin\alpha\right](-3\sin\alpha)\mathrm{d}\alpha+(3\cos\alpha+3\sin\alpha)(3\cos\alpha)\mathrm{d}\alpha\right\}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[9\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-9\sin\alpha\cos\alpha\right]\mathrm{d}\alpha$$

$$=\int_0^{2\pi}9(1-\sin\alpha\cos\alpha)\mathrm{d}\alpha=9\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)\Bigg|_0^{2\pi}=18\pi$$

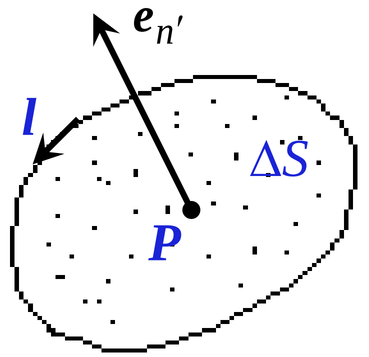
1.4 矢量的环量及旋度

2、旋度

（1）环量密度

过点P 作一微小有向曲面$\Delta \boldsymbol{S}$, 它的边界曲线记为l, 曲面的法线方向与曲线绕向成右手螺旋关系。当$\Delta S \to$点P 时，存在极限

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$



面元法向矢量与周界循行方向的右手关系

称为环量密度

过点P 的有向曲面ΔS 取不同的方向，其环量密度将会不同。

1.4 矢量的环量及旋度

（2）旋度

P 点的旋度定义为该点的最大的环量密度，并令其方向为e_n，即

$$curl\,\boldsymbol{F} = \left[\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta s}\right]_{\max} \boldsymbol{e}_n$$

旋度与环量密度的关系

$$(curl\,\boldsymbol{F})_{n'} = curl\,\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_{n'} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta s}$$

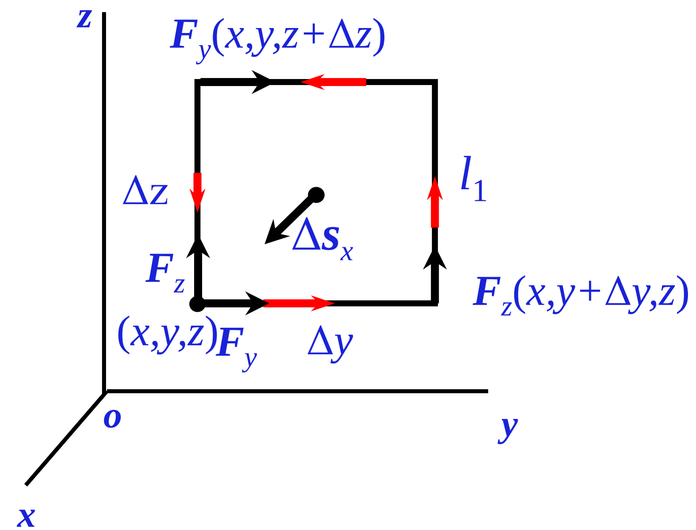
1.4 矢量的环量及旋度

旋度直角坐标式的推导

$$\oint_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \approx F_y(x,y,z)\Delta y + F_z(x,y+\Delta y,z)\Delta z$$
$$- F_y(x,y,z+\Delta z)\Delta y - F_z(x,y,z)\Delta z$$

$$\approx F_y(x,y,z)\Delta y + \left[F_z(x,y,z) + \frac{\partial F_z(x,y,z)}{\partial y}\Delta y\right]\Delta z$$
$$-\left[F_y(x,y,z) + \frac{\partial F_y(x,y,z)}{\partial z}\Delta z\right]\Delta y - F_z(x,y,z)\Delta z$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\Delta S_x$$



推导旋度的直角坐标式所取的面元和它的围线

于是得

$$(curl\ \boldsymbol{F})_x = \lim_{\Delta S_x \to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S_x} = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

1.4 矢量的环量及旋度

同理可求得 $curl F$ **的** y，z**分量**

$$(curl\ \boldsymbol{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad , \qquad (curl\ \boldsymbol{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

所以

$$\boxed{curl \boldsymbol{F} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z})\boldsymbol{e}_x + (\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x})\boldsymbol{e}_y + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})\boldsymbol{e}_z}$$

或用 ∇ **算符将其写成**

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

1.4 矢量的环量及旋度

(3）旋度的物理意义

- 矢量的旋度仍为矢量，是空间坐标点的函数。
- 点P 的旋度的大小是该点环量密度的最大值。
- 点P 的旋度的方向是该点最大环量密度的方向。
- 在矢量场中，若$\nabla\times F=J\neq 0$,称之为旋度场(或涡旋场)，J 称为旋度源密度(或涡旋源密度)；
- 若矢量场处处$\nabla\times F=0$，称之为无旋场或保守场。

1.4 矢量的环量及旋度

例 5 **求矢量场** $F=xyz$（$\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$）**在点** M(1,3,2)**处的旋度。**

解：

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}(xyz)-\frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\boldsymbol{e}_x+\left[\frac{\partial}{\partial z}(xyz)-\frac{\partial}{\partial x}(xyz)\right]\boldsymbol{e}_y+\left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz)-\frac{\partial}{\partial y}(xyz)\right]\boldsymbol{e}_z$$

$$=(xz-xy)\boldsymbol{e}_x+(xy-yz)\boldsymbol{e}_y+(yz-xz)\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F}\Big|_{\mathrm{M}}=(2-3)\boldsymbol{e}_x+(3-6)\boldsymbol{e}_y+(6-2)\boldsymbol{e}_z$$

$$=-\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y+4\boldsymbol{e}_z$$

1.4 矢量的环量及旋度

(4) 有关旋度的几个关系式

- **相对位置矢量的旋度为零，即**

$$\nabla\times\boldsymbol{R}=0 \qquad \left(\nabla\times\boldsymbol{r}=0\right)$$

- $f(\boldsymbol{r})$**与**$F(\boldsymbol{r})$**之积** fF **的旋度有恒等式**

$$\nabla\times(f\,\boldsymbol{F})=f(\nabla\times\boldsymbol{F})+\nabla f\times\boldsymbol{F}$$

- $f(R)$ **与** R **之积的旋度，有** $\nabla\times\left[f(R)\,\boldsymbol{R}\right]=0$

证明： $\nabla\times\left[f(R)\,\boldsymbol{R}\right]=f(R)\nabla\times\boldsymbol{R}+\nabla f(R)\times\boldsymbol{R}$

$$=0+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R}\nabla R\times\boldsymbol{R}=0$$

1.5 场函数的高阶微分运算

1、场函数的三种基本微分运算

标量场的梯度∇f,矢量场的散度$\nabla\cdot \boldsymbol{F}$和$\nabla\times \boldsymbol{F}$旋度简称“三度” 运算。

2、场函数的二阶运算

（1）标量场梯度的散度 $\nabla\cdot\nabla f$

（2）标量场梯度的旋度 $\nabla\times\nabla f$

（3）矢量场散度的梯度 $\nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{F})$

（4）矢量场旋度的散度 $\nabla\cdot(\nabla\times \boldsymbol{F})$

（5）矢量场旋度的旋度 $\nabla\times (\nabla\times \boldsymbol{F})$

1.5 场函数的高阶微分运算

两个重要的恒等式

$$\nabla \times \nabla f = 0 \qquad \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0$$

3、场函数 的拉普拉斯运算

- 标量场

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$$

在直角坐标系中

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

所以有

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

1.5 场函数的高阶微分运算

- ∇^2 作用于矢量场

因为 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{F}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F}$

所以 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$

$$\nabla^2\boldsymbol{F}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})$$

算符 ∇^2 作用于矢量场的结果将得到一个新的矢量场。

在直角坐标系中 $$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{F}=\boldsymbol{e}_x\nabla^2F_x+\boldsymbol{e}_y\nabla^2F_y+\boldsymbol{e}_z\nabla^2F_z$$

1.5 场函数的高阶微分运算

4、两个与算符 ∇ ² 有关的恒等式

- **相对坐标标量函数** $f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

$$\nabla^2 f = \nabla'^2 f$$

- **相对位置矢量 *R* 及其模 *R***

$$\nabla^2 \boldsymbol{R} = 0 \qquad \nabla^2 \frac{1}{R} = 0$$

因为

$$\nabla^2 \boldsymbol{R} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{R}) - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{R}) = \nabla 3 - \nabla\times 0 = 0$$

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = \nabla\cdot\nabla\frac{1}{R} = \nabla\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right) = -\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = 0$$

1.5 场函数的高阶微分运算

例 5　计算 $\nabla\cdot(r\nabla\dfrac{1}{r^3})$ 。

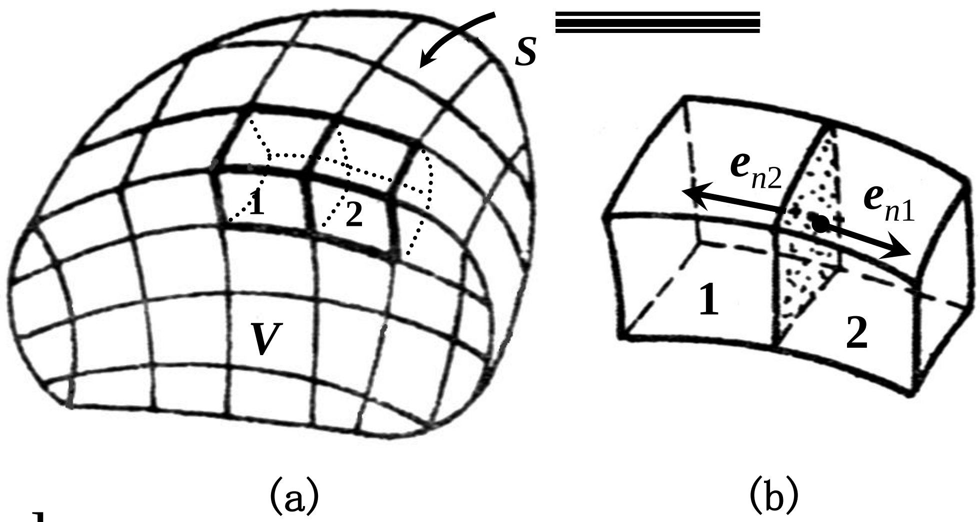
解 $$\nabla\cdot(r\nabla\frac{1}{r^3})=\nabla\cdot\left[r\left(-\frac{3}{r^4}\nabla r\right)\right]=-\nabla\cdot\left(-\frac{3}{r^3}*\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=-3\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^4}$$

$$=-3\left(\frac{1}{r^4}\nabla\cdot\boldsymbol{r}+\nabla\frac{1}{r^4}\cdot\boldsymbol{r}\right)=-3\left(\frac{3}{r^4}-\frac{4}{r^5}\nabla r\cdot\boldsymbol{r}\right)$$

$$=-3\left(\frac{3}{r^4}-\frac{4}{r^5}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)=-3\left(\frac{3}{r^4}-\frac{4}{r^4}\right)=3r^{-4}$$

1.6 矢量场的积分定理

1 高斯散度定理（Gauss）



$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_v (\nabla\cdot\boldsymbol{F})\mathrm{d}v}$$

证明：

$$\oint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{N}\oint_{S_i} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}_i$$

上式可写成

$$\oint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\oint_{S_i} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}_i}{\Delta V_i}\Delta V_i$$

取 $N\to\infty$， $\Delta V_i \to 0$ 的极限，可得

$$\oint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \lim_{\substack{N\to\infty\\ \Delta V_i\to 0}}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\oint_{S_i} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}_i}{\Delta V_i}\Delta V_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\lim_{\Delta V_i\to 0}\frac{\oint_{S_i} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}_i}{\Delta V_i}\Delta V_i\right]$$

$$= \int_v (\nabla\cdot\boldsymbol{F})\mathrm{d}v$$

1.6 矢量场的积分定理

$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{s} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{F})\mathrm{d}v}$$

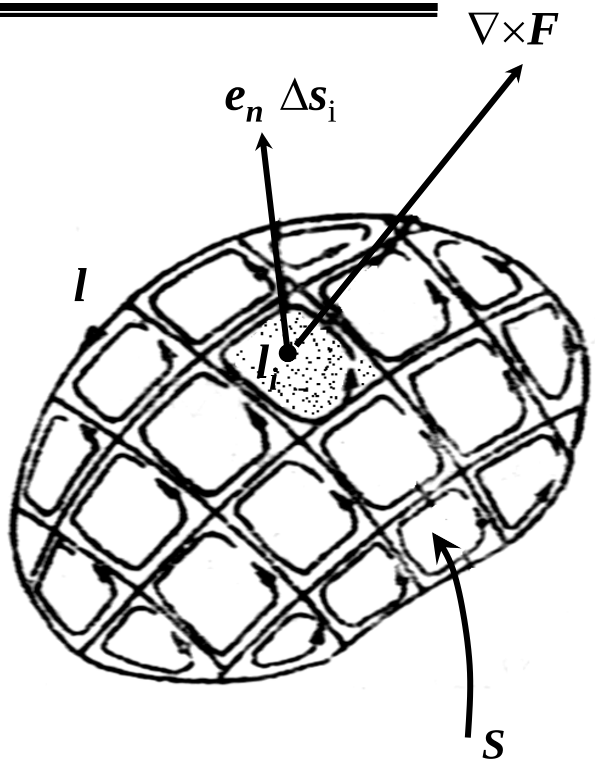
- 矢量函数的面积分与体积分的互换。

- 该公式表明了区域 *V* 中场 *F* 与边界 *S* 上的场 *F* 之间的关系。

1.6 矢量场的积分定理

2 斯托克斯定理(Stockes)

$$\boxed{\oint_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}$$



证明：

上式可写成 $\oint_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\oint_{l_i} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_i}{\Delta S_i}\Delta S_i$

取 $N\to\infty,\ \Delta S_i\to 0$ **的极限，可得**

$$\oint_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \lim_{\substack{N\to\infty\\ \Delta S_i\to 0}}\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\oint_{l_i} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_i}{\Delta S_i}\Delta S_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\lim_{\Delta S_i\to 0} \frac{\oint_{l_i} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_i}{\Delta S_i}\Delta S_i\right]$$

$$= \int_S\left[(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{e}_n\,\mathrm{d}s\right] = \int_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

1.6 矢量场的积分定理

$$\boxed{\oint_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{l} = \int_s \left(\nabla\times\boldsymbol{F}\right)\cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{s}}$$

- 矢量函数的线积分与面积分的互换。
- 该公式表明了区域 *S* 中场 *F* 与边界 *l* 上的场 *F* 之间的关系

在电磁场理论中，Gauss 定理和 Stockes 定理是两个非常重要的公式。

1.7 亥姆霍兹定理

1、矢量场的类型

无旋场、无散场、调和场和一般矢量场

（1）无旋场

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$$

无旋场在其定义域内沿任意闭合路径 l 的环量恒为零，无旋场就是保守场。

1.7 亥姆霍兹定理

（2）无散场

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$$

由上式可定义一个矢量位函数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$

令

$$\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

可得无散场的二阶偏微分方程

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{r})$$ 泊松方程

1.7 亥姆霍兹定理

（3）调和场（无旋无散场）

调和场可简单看成是无旋场的散度也为零的特例，因此亦可引入标量位函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$

令 $b=0$ 得

$$\nabla^2\varphi = 0$$

调和场的二阶偏微分方程称为拉普拉斯方程

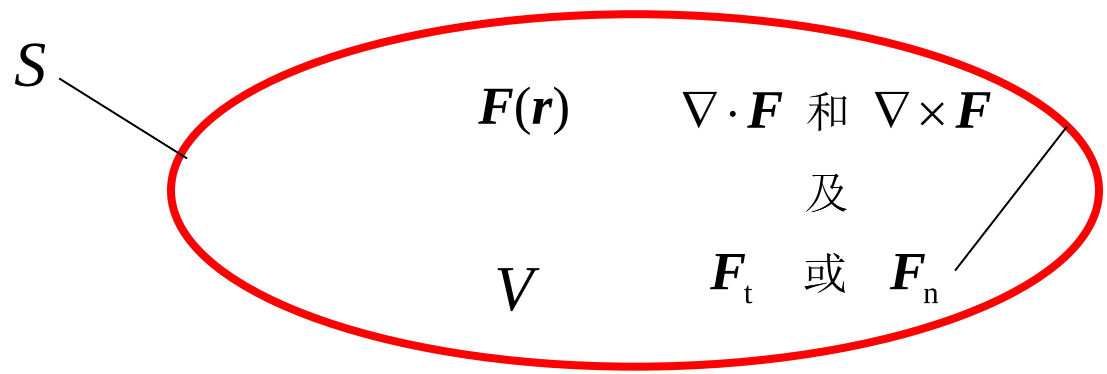
（4）一般矢量场的旋度和散度均不为零

1.7 亥姆霍兹定理

2、赫姆霍兹定理

（1） 矢量场的唯一性

位于某一区域中的矢量场，当其**散度**、**旋度**以及边界上场量的**切向**分量或**法向**分量给定后，则该区域中的矢量场被惟一地确定。



已知散度和旋度代表产生矢量场的源，可见惟一性定理表明，矢量场被其**源**及**边界条件**共同决定。

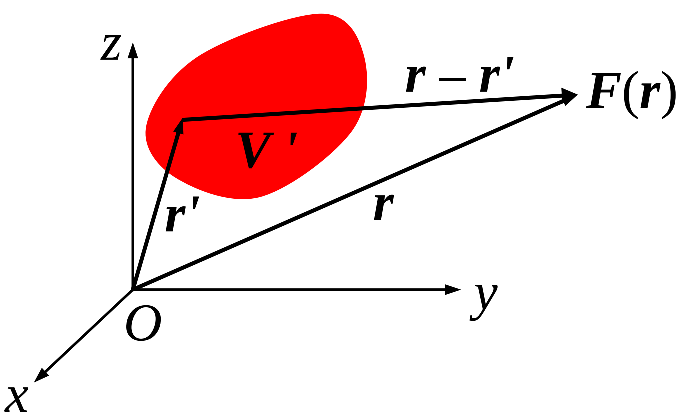
1.7 亥姆霍兹定理

（2）亥姆霍兹定理

若矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 在无限区域中处处是单值的， 且其导数连续有界，源分布在有限区域V'中，则当矢量场的散度及旋度给定后，该矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 可以表示为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \Phi(\boldsymbol{r}) + \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

式中



$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\nabla' \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V'$$

1.7 亥姆霍兹定理

已知

- 矢量F 的通量源密度
- 矢量F 的旋度源密度
- 场域边界条件

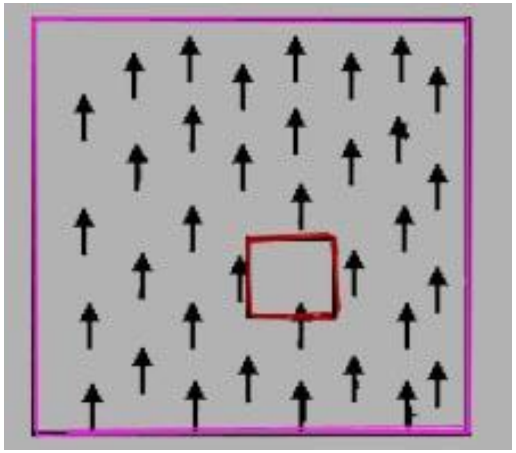
（矢量F 唯一地确定）

在电磁场中 →

- 电荷密度 ρ
- 电流密度 J
- 场域边界条件

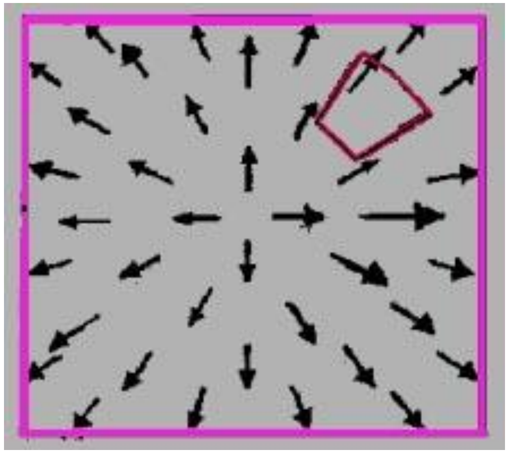
1.7 亥姆霍兹定理

例：判断矢量场的性质



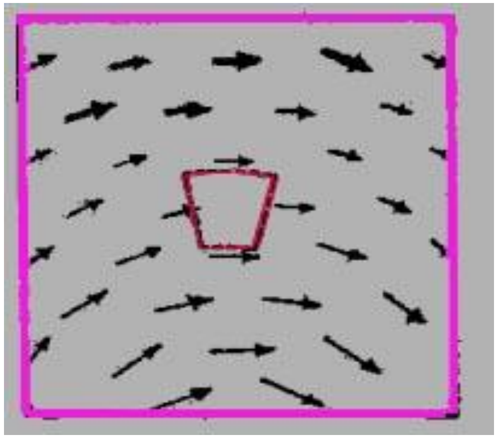
$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = ?$ $=0$

$\nabla \times \boldsymbol{F} = ?$ $=0$



$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = ?$ $\neq 0$

$\nabla \times \boldsymbol{F} = ?$ $=0$



$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = ?$ $=0$

$\nabla \times \boldsymbol{F} = ?$ $\neq 0$

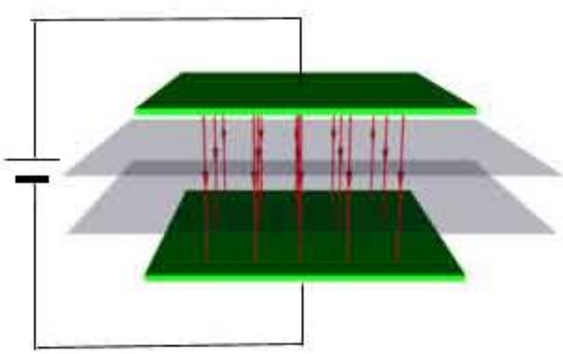
1.7 亥姆霍兹定理

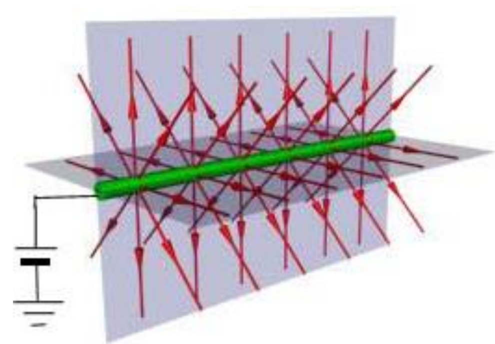
3、三种特殊形式的场

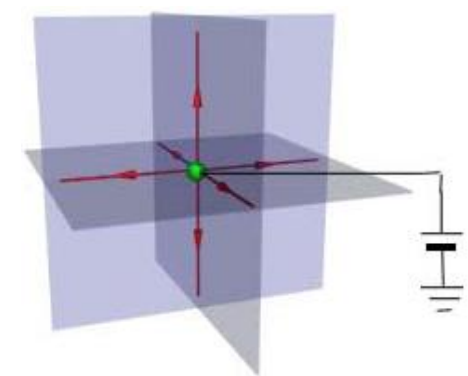
(1).平行平面场：如果在经过某一轴线(设为Z 轴)的一族平行平面上，场 F 的分布都相同，即 $F(r)= F(x,y)$，则称这个场为平行平面场。

(2).轴对称场：如果在经过某一轴线(设为Z轴)的一族子午面上,场F的分布都相同，即$F(r)= F(\rho ,z)$，则称这个场为轴对称场。

(3).球面对称场：如果在一族同心球面上(设球心在原点)，场 F 的分布都相同，即 $F(r)= F(r)$，则称这个场为球面对称场。



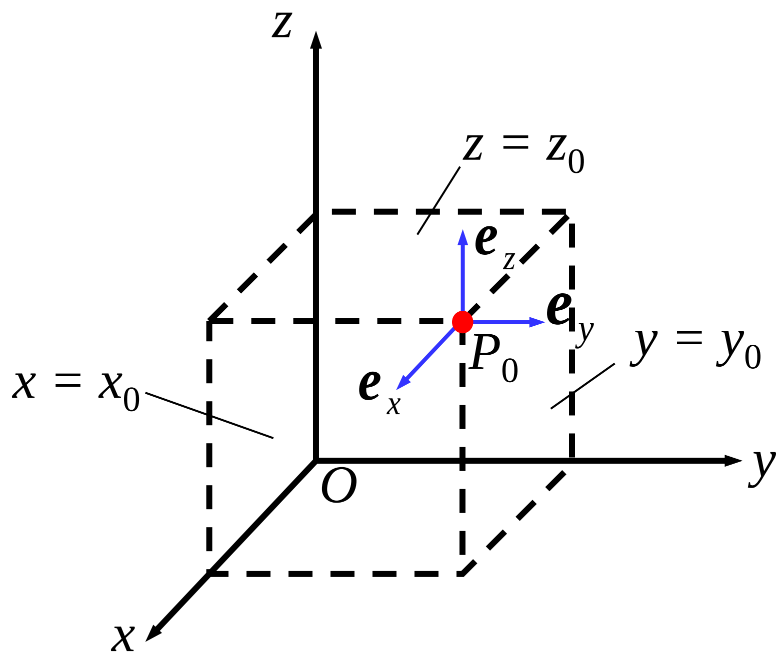




三种坐标系介绍

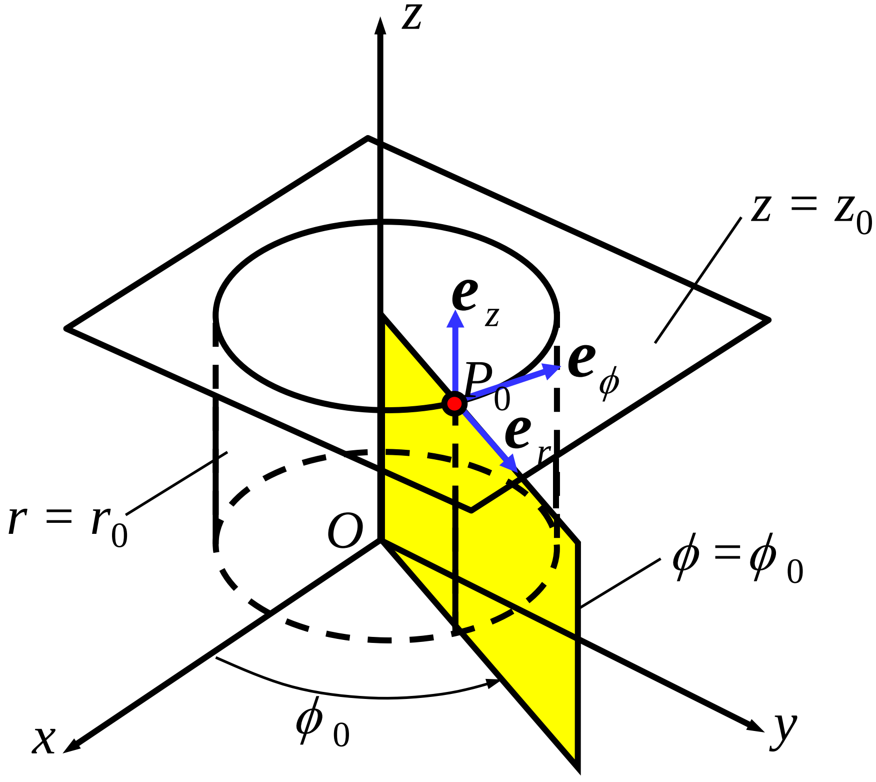
1. 正交曲面坐标系

直角坐标系(x, y, z)



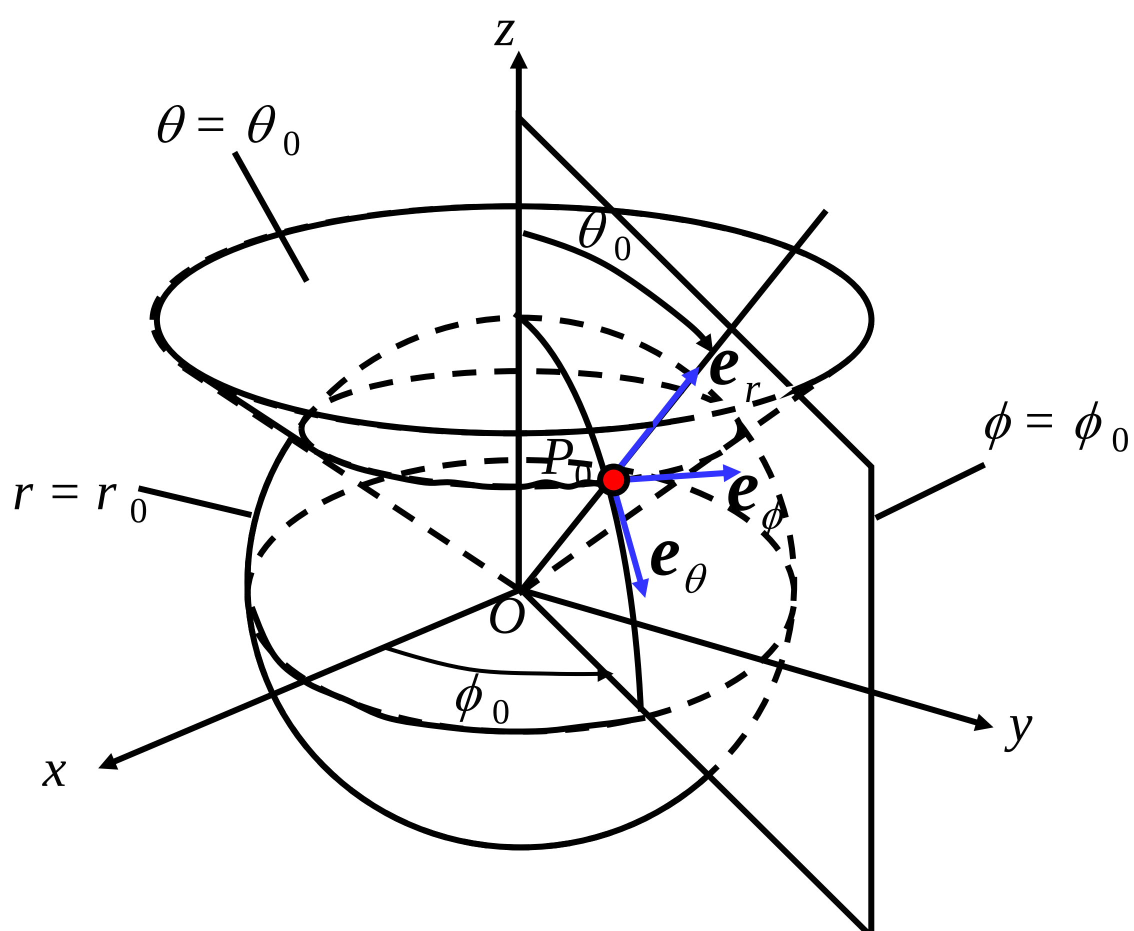
三种坐标系介绍

圆柱坐标系(r, ϕ , z)



三种坐标系介绍

球坐标系(r, θ, ϕ)



三种坐标系介绍

微分单元的表示

直角坐标系

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

圆柱坐标系

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}r+\boldsymbol{e}_\phi r\,\mathrm{d}\phi+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_r r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_\phi\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_z r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}V=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$$

球坐标系

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}r+\boldsymbol{e}_\theta\,r\mathrm{d}\theta+\boldsymbol{e}_\phi\,r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_r r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi+\boldsymbol{e}_\theta\,r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi+\boldsymbol{e}_\phi r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

三种坐标系介绍

坐标变量的转换

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \phi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

三种坐标系介绍

矢量分量的转换

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

三种坐标系介绍

已知矢量 A 在直角坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{e}_x + b\boldsymbol{e}_y + c\boldsymbol{e}_z$$

式中， a, b, c 均为常数。A 是常矢量吗?

又知矢量 A 在圆柱坐标系和球坐标系中可分别表示为

$$\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{e}_r + b\boldsymbol{e}_\phi + c\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{e}_r + b\boldsymbol{e}_\theta + c\boldsymbol{e}_\phi$$

式中， a, b, c 均为常数。A 是常矢量吗?