习题一

一、单项选择： (1) D； (2) D； (3) D； (4) C

二、填空题：

(1) 17， $n(n-1)$

(2) $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

(3) $\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$ (4) $0, \quad 0$； (5) 0

三、利用对角线法则计算下列行列式

(1) 6 (2) 76 (3) a^3-4a (4) $-2(x^3+y^3)$ (5) $3abc-a^3-b^3-c^3$

(6) $(a-b)(b-c)(c-a)$

习题二

一、单项选择：(1) D；(2) C；(3) A。

二、填空题：(1) 0 ， -28 (2) $a=b$ (3) 一次

三、$k\neq 1$且$k\neq\pm 2$

四 (1) $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)($

(2) -597

(3) x^2y^2

(4) $x^n+(-1)^{n+1}y$

复习题一

一、单项选择题 (1) C；(2) C；(3) D；(4) B

二、填空题 (1) $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$；(2) 0；(3) k^3

三、计算行列式 (1) 0；(2) 0；(3) -12 (4) 0

习题三

一、判断题 (1) √；(2) ×。

二、单项选择题 (1) D； (2) D。

三、填空题 (1) $\begin{pmatrix} 9 & 21 \\ 20 & -27 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 19 & -3 \\ -5 & 16 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -36 & 3 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 19 & 14 \\ 27 & -15 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 23 & 8 \\ 17 & -21 \end{pmatrix}$。

(2) 10；$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

四、计算题

(1) 略； (2) 略；

（3）$A^n = \lambda^{n-2}\begin{pmatrix} \lambda^2 & n\lambda & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & \lambda^2 & n\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$；

(4) $A^{99} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$， $A^{100} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

(5) $-8^{99}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -6 & -12 \end{pmatrix}$

习题四

一、判断题 (1) ×；（2） ×。

二、单项选择题 (1) C；(2) B；(3) D。

三、填空题 (1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$；

(2) 1，$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$； (3) 9，$\dfrac{8}{3}$，$3^5$，$3^4$，$-9$。

四、计算题 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3n & 1 \end{pmatrix}$；(2) $A^* = \begin{pmatrix} 29 & 55 & -19 \\ 5 & 23 & 17 \\ 26 & 2 & 10 \end{pmatrix}$，$A^{-1} = \dfrac{1}{196} A^*$。

(3) $X = \begin{pmatrix} -109 & -9 \\ -44 & -3 \end{pmatrix}$；　　(4) $B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

五、证明：由于 $(B+E)(B-2E) = B^2 - B - 2E = -2E$，即有

$$A(E - \frac{1}{2}B) = E$$

所以，A 可逆且 $A^{-1} = E - \dfrac{1}{2}B$

习题五

一、 (1) $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$

(2) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = -1$

(3) $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$

(4) $x_1 = 2,\ x_2 = -\dfrac{1}{2},\ x_3 = \dfrac{1}{2}$

二、$D = \prod\limits_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j)$，$D_1 = D$，$D_2 = D_3 = \cdots = D_n = 1$，

故 $x_1 = 1, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$

复习题二

一、判断题 (1) × 　(2) √

二、单项选择题 (1) C；(2) B。

三、填空题 (1) $\begin{pmatrix} -30 & 36 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$；(3) 0。

四、(1) $\left| \dfrac{1}{a} A^{-1} - A^* \right| = \left| \dfrac{1}{a} A^{-1} - |A| A^{-1} \right| = \left| \left(\dfrac{1}{a} - 2 \right) A^{-1} \right|$

$$=\left(\frac{1-2a}{a}\right)^3|A|^{-1}=\frac{(1-2a)^3}{a^3}\bullet\frac{1}{2}=-\frac{17}{16}$$

$\Rightarrow a=2$ ；

(2) 变形可得

$(A^*-E)B=A-E$，

可直接算 A^*，然后再算 $|B|$，但计算量比较大. 另一可取的方法如下

$(|A|E-A)B=A(A-E)$，两边取行列式

$$(4E-A)B=A(A-E)\Rightarrow|B|=\frac{4|A-E|}{|4E-A|}=-1$$

（3）$\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$ （4）$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2^{13} & 4+2^{13}\\ -1-2^{11} & -4-2^{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2731 & 2732\\ -683 & -684\end{pmatrix}$

习题六

一、判断题 (1) √； (2) √。

二、单项选择题 (1) C； (2) B。

三、填空题 (1) 1, 0；(2) 1。

四、计算题 1、 (1) $r(A)=2$，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$；(2) $r(B)=2$，$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$。

2、$\begin{bmatrix}\frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2}\\ -1 & -1 & 2\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 3、$\begin{pmatrix}27 & -9\\ -46 & 17\\ 32 & -11\end{pmatrix}$

4、$A\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 3k\\ 0 & 2(k-1) & -3(k-1)\\ 0 & 0 & (k+2)(k-1)\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，于是有

(1) $k=1$；(2) $k=-2$；(3) $k\neq1,-2$

五、略

习题七

一、单项选择题 (1) D；（2）B；(3) D。

二、计算题 1、(1) $k_1\begin{pmatrix}8\\-5\\0\\7\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$； (2) $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\0\\-3\end{pmatrix}$；

2、当 $\lambda=1$，或者 $\mu=0$ 时，方程组有非零解。

3、（1） $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$

(2) $\lambda=-2$

(3) $\lambda=1$ $x=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

4、 $\begin{cases}x_1-2x_3+2x_4=\\x_2+3x_3-4x_4=\end{cases}$

三、略

习题八

一、判断题 (1) √；（2） √；（3） ×。

二、单项选择题 (1) A；(2) C。

三、填空题 (1) $t=5, t\neq5$；(2) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&3\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$； (3) 0

四、(1) 设 $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\1&-1&2\\2&2&7\\1&4&-1\end{pmatrix}$，而 $r(A)=3$，所以该向量组是线性无关的。

(2) 设 $D=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\1&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1&1\end{pmatrix}$，而 $|D|=1$,

所以该向量组是线性无关的。

五、解：$\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&1&-1&5\\1&1&-1&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-11\\0&1&0&14\\0&0&1&9\end{pmatrix}$，

所以 $\beta=-11\alpha_1+14\alpha_2+9\alpha_3$

六、a=2 或 a=−1

七、证 设 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)=0$，即

$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2+2k_3)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以

$\begin{cases}k_1+\quad\quad k_3=0\\k_1+k_2+2k_3=0\\\quad\quad k_2+\ k_3=0\end{cases}$，该方程组有非零解，其通解为 $k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$。

所以原向量组是线性相关的。

习题九

一、判断题 (1) √；(2) √；(3) √； (4) ×。

二、单项选择题 (1) C； (2) C； (3)B。

三、解 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&1\end{pmatrix}$，

所以该向量组的前三列向量是线性无关的。

四、解 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&3&2&5\\2&2&3&5\\3&1&1&2\\-1&-1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是该向量组的一个最大线性无关组，并且有

$\alpha_4=\alpha_2+\alpha_3$。

五、$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&p+2&p\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&-2\\0&-2&0&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&p-2\end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} B$$

当 $p-2=0$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个最大无关组

此时 $\alpha_4 = 2\alpha_2$

六、$a=2, b=5$

习题十

一、 1、$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2、 $t=12$

二、 C D

三、填空题 (1) $k\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$；(2) $n-1$

四、$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 8 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

五、$x = k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

六、$\beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3$

复习题三

一、 1、 $\frac{1}{2}$ 2、 $t=1$， $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2$

3、 $t \neq 1$, $t=1$ 4、 0

5、 $t=4$ 6、 $R(B)=1$

二、 D B A A D

三、当$a=1$时，$r(A)=1$；当$a=1-n$时，$r(A)=n-1$；

当$a\neq 1,1-n$时，$r(A)=n$

四、 略

五、(1) $\alpha=-4,\ \beta\neq 0$

(2) $\alpha\neq -4$

(3) $\alpha=-4,\quad \beta=0$

习题十一

一、1、$\sqrt{7},\quad \sqrt{14},\quad \dfrac{\pi}{4}$

2、 -14， 42， 0

3、 $\dfrac{1}{\sqrt{3}},\quad \dfrac{1}{\sqrt{6}}$、

二、解：$b_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},b_2=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix},b_3=\dfrac{7}{9}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$

单位化得：$e_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},e_2=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix},e_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$

三、$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$， $\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

标准正交基为$e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$， $e_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$， $e_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$， $\alpha_4=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

习题十二

一、× × √

二、 A B C C

三、1、 4

2、<u>6</u>， $\underline{1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}}$ ，<u>1， -2， 3</u> ，<u>4，1，16</u>

3、$\frac{4}{3}$

四、（1）$\lambda_1=-2,\ k\begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}(k\neq 0)$，

$$\lambda_2=\lambda_3=1\quad k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(k_1,k_2\text{不同时为零})$$

（2）$\lambda_1=3,\ k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(k\neq 0)$， $\lambda_2=\lambda_3=-3\quad k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}(k\neq 0)$

五、$x=3$ 或 $x=4$

六、解：(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&\lambda-1&0\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+5)$

$$\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-5$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，方程组 $(E-A)x=0$

$$(E-A)=\begin{bmatrix}2&-2&-2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$（k_1，k_2 不同时为 0）为特征向量.

当 $\lambda_3=-5$ 时，$\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$，$k\alpha_3$（$k\neq 0$ ）为特征向量.

(2) 设 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$，左乘 A^*,A^{-1},A^2，知特征值分别为

$$\frac{|A|}{\lambda_i}+\frac{1}{\lambda_i}+\lambda_i^2, i=1,2,3, \text{故 } \mu_1=\mu_2=-3, \mu_3=\frac{129}{5}$$

所对应的特征向量为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，$k_3\alpha_3$不变.

习题十三

一、× √ ×

二、D D

三、1、 -12， -17

2、 24

四、 $a=b=0$， $P=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

五、$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

六、$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

七、略

习题十四

一、× × ×

二、 B C B

三、1、 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$

2、 $k\geq 2$

3、$a=2$

四、$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$

$x=Cy$，$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

五、$x=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}y$，$f=-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2$

六、1) 由条件

$$r(f)=2\Rightarrow r(A)=2\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow a=0$$

2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=0\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$

$$a_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\ a_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ a_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}a_1\ ,\eta_2=a_2\ ,\ \eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}a_3；\ Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$$

$$Q^TAQ=A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ ,$$

故标准型：$f=2y_1^2+2y_2^2$

规范型：$g=z_1^2+z_2^2$.

3) $a=0$时，$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+2x_3^2$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}\Rightarrow x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

，kx 为方程的解.

复习题五

一、 √ √ × ×

二、C D C D C C

三、1、 -2， 2， 1

2、-1，-2， 1

3、 -288

4、 4

5、 3， 2， 1

四、$a=0,\ A=\begin{pmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

五、$a=2(a=-2\text{舍去})$，

所用的正交变换矩阵为：$Q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

六、特征向量为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$

自测题一参考答案

一、单项选择题

D B B A A, D A D D B

二、填空题

11. $(2,3)$ 12. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 13. -1 14. 3 15. 2

16. 3 17. 3 18. 4 19. $\frac{1}{3}(A-E)$ 20. 0

三、求解下列各题

21. $D=\begin{vmatrix} 14 & 3 & 3 & 3 \\ 14 & 5 & 3 & 3 \\ 14 & 3 & 5 & 3 \\ 14 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}=14\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$=14\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=11$

$$22.\ A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&4\\2&3&5&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&3\\0&1&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&-2\\0&1&3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$

$$23.\ \begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-1\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&3&3&0\\0&1&1&0\\0&2&2&-4\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

向量组的秩为 3，最大线性无关组是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$， $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$

$$24.\ (A,B)=\begin{pmatrix}1&1&0&1&2\\0&-1&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&1&2\\0&-1&0&-1&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&1&-1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

所以， $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}0&3\\1&-1\\1&0\end{pmatrix}$

25.特征矩阵为 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\7&11-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-10)$

特征值为 $\lambda_1=4,\lambda_2=10$

当$\lambda_1=4,$解方程$(A-4E)x=0$。由 $A-4E=\begin{pmatrix}-1&-1\\7&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$

基础解系，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，所以，$k_1\xi_1(k_1=0)$是对应于$\lambda_1=4$的全部特征向量。

当$\lambda_2=10,$解方程$(A-10E)x=0$。由 $A-10E=\begin{pmatrix}-7&-1\\7&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}7&1\\0&0\end{pmatrix}$

基础解系，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$，所以，$k_2\xi_2(k_2=0)$ 是对应于 $\lambda_2=10$ 的全部特征向量。

26. 解：$f=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 1 & t/2\\0 & t/2 & 1\end{pmatrix}$,

用顺序主子式进行判断知必须满足:

$\Delta_1=2>0$，$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}>0$， $\Delta_3=|A|=1-\dfrac{t^2}{2}>0\Rightarrow|t|<\sqrt{2}$

27、求一个正交变换 $x=Py$，把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+3x_2{}^2+3x^2{}_3+4x_2x_3$ 化为标准形。

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2 & & 0\\0 & & 3\\0 & & 2\end{pmatrix}$，

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2\text{-}\lambda & 0 & 0\\0 & 3\text{-}\lambda & 2\\0 & 2 & 3\text{-}\lambda\end{vmatrix}=(2\text{-}\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$ 得

特征值有：$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$

$\lambda_1=1$时，解方程 $(A-E)x=0$

由 $A-E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 2 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，把 ξ_1 单位化得 $p_1=\begin{pmatrix}0\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$\lambda_2=2$ 时，解方程 $(A-2E)x=0$

由 $A-2E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，令 $p_2=\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\lambda_3=5$ 时，解方程 $(A-5E)x=0$

由 $A-5E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，

把 ξ_3 单位化得 $p_3=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.　令 $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，于是有正交变换 $x=Py$，把二次型化为标准形 $f=y_1^{\ 2}+2y_2^{\ 2}+5y^2{}_3$

。

四、证明题

28.证明：设 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_3,\beta_2=\alpha_2-\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2$，则

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\ &0&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$$

而 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&2\\2&-1&0\end{vmatrix}=0$，所以矩阵 A 不可逆，

故 $R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$ 。

所以，向量组 $\alpha_1+2\alpha_3,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2$ 线性相关

29. 证明：若 $|A|=0$，则 $A\cdot A^*=|A|E=0$，

假设 $|A^*|\neq 0$，那么伴随矩阵 A^* 是可逆的，

因此，在 $AA^*=0$ 的两边右乘 A^* 的逆，可得 $A=0$ 。

由 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的定义，知 $A^*=0$，故 $|A^*|=0$。与假设相假设矛盾。

自测题二参考答案

一、单项选择

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
答案	D	**B**	A	D	A	B	D	C	B	C

二、填空题

1、$\underline{-2}$。　2、$\underline{\begin{pmatrix} 15 & 9 & -20 \\ 6 & -9 & 15 \end{pmatrix}}$。　3、$\underline{4}$。　4、$\underline{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$。5、$\underline{3}$。

6、$\underline{3}$。　7、$\underline{\ 0\ }$。　8、$\underline{2}$。　9、$\underline{1/\lambda}$。　10、$\underline{x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3}$

三、计算题

1、解：$2A_{21}+3A_{22}+2A_{23}+2A_{24}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$

2、解：由 $AX=A+X$ 有 $(A-E)X=A$

$$\because (A-E|A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3、解：由 $A^2-2A-5E=O$ 有

$$(A-3E)(A+E)=2E$$

$$|A-3E||A+E|=2\neq 0$$

有 $|A-3E|\neq 0$ 所以 $A-3E$ 可逆且 $(A-3E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)$

4、解：

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^T & \alpha_2^T & \alpha_3^T & \alpha_4^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha$线性相关，$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，$\alpha_1,\alpha_2$ 是它的一个极大无关组，且

$\alpha_3=\frac{3}{2}\alpha_1-\frac{7}{2}\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$.

5、解：矩阵 A 的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$$

得特征值　$\lambda_1=-2$　　$\lambda_2=\lambda_3=1$

当 $\lambda_1=-2$ 时有

$$\begin{cases}-6x_1-6x_2=0\\ 3x_1+3x_2=0\\ 3x_1+6x_2-3x_3=0\end{cases}，\quad 即\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}$$

它的基础解系是 $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以对应于 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量是 $c\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(c\neq 0)$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时有

$$\begin{cases}-3x_1-6x_2=0\\ 3x_1+6x_2=0\\ 3x_1+6x_2=0\end{cases}，\quad 即x_1+2x_2=0$$

它的基础解系是向量 $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，所以对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量是

$c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2$ 不全为零）

6、解：$\because\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ \hline 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\therefore P=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2-y_2^2+4y_3^2$$

7、解：(1) 顺序主子式 $\Rightarrow t>0$

(2) $A \cong B \Rightarrow r(A) = r(B)$，而 $r(B) = 2$，第 3 行为 2 行-1 行

故 $t = 0$.

(3) A 与 C 相似 $\Rightarrow \lambda_A = \lambda_C$；而 $\lambda_C = 1,3,5$，故 $tr(A) = tr(C)$

$\Rightarrow 2 + 2 + t = 1 + 3 + 5 \Rightarrow t =$.

(4) A 与 D 合同(对称矩阵) $\Rightarrow$ 正负惯性指数相等 $\Leftrightarrow$ 正负特征根个数相等，

$|\lambda E - D| = 0 \Rightarrow \lambda_D : 1, 1, -4$. 而 $|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \lambda_A = 1, 3, T$，故 $t < 0$.

四、证明题

1、证明：由 $AB = O$ 有 $A(X_1, X_2, \cdots, X_s) = O$

即 $(AX_1, AX_2, \cdots, AX_s) = O$

得 $AX_i = O \quad (i = 1, 2, \cdots s)$

即 X_i 为 $AX = O$ 的 s 个解

显然 $R(B) = R(X_1, X_2, \cdots, X_s) \le n - R(A)$

即 $R(A) + R(B) \le n$

2、证明：$\because$ $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$，$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$

$\because$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关　　$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关

则有 $\alpha_4 = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3$ 成立

设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0$

有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_5 - k_4(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3) = 0$

$(k_1 - k_4 m_1)\alpha_1 + (k_2 - k_4 m_2)\alpha_2 + (k_3 - k_4 m_3)\alpha_3 + k_4\alpha_5 = 0$

$\because$ $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = 4$　　$\because$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha$ 线性无关

则有 $\begin{cases} k_1 - k_4 m_1 = 0 \\ k_2 - k_4 m_2 = 0 \\ k_3 - k_4 m_3 = 0 \\ k_4 = 0 \end{cases}$　　解之有 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关　即 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4) = 4$　所以 $|A^*|\ne$

自测题三答案

一、单项选择题　　BBCCA　CCDDA

二、填空题

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
-27	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$	1	1	25

三、求解下列各题

⑴ 解：$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=6$

（2）解 ：令 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，则 $A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$

由 $|A_1|=1$，$|A_2|=-1$，　有 $|A|=|A_1|\cdot|A_2|=-1$，则 $|A^9|=|A|^9=-1$

又 $A_1^{-1}=\dfrac{1}{|A_1|}A_1^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$，$A_2^{-1}=\dfrac{1}{|A_2|}A_2^*=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

故 $A=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

⑶解 ：因为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以　$R(A)=2$

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$，故 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ 是矩阵 A 的一个最高阶非零子式。

（4） 解 ：由于 $AX+E=A^2+X$　，则 $(A-E)X=A^2-E=(A-E)(A+E)$，

因为$A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$是可逆矩阵，

故 $X=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

(5) 解 ：由于$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&b+2&3\\1&b&-2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&-b&-1\\0&0&(b-3)(b+1)&b-3\end{pmatrix}$，

而β不能由向量组α_1，α_2 α_3线性表示，则$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)>R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

故 $b=-1$

(6) 解 ：$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$与$B=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&y\end{bmatrix}$相似，

则有相同的特征值，于是$1,2,y$为其共同特征值，

而 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-2&x-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-x\lambda+x-4)$

于是$\lambda^2-\lambda-x\lambda+x-4=4-2-2x+x-4=0$，得$x=-2$，

于是 $|A-\lambda E|=(1-\lambda)(\lambda-2)($ ，这样矩阵A的特征值为$1,2,-3$，所以$y=-3$。

或：由于$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$与$B=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&y\end{bmatrix}$相似，

则$\begin{cases}|A|=|B|\\1+x+1=1+2+y\end{cases}$，即$\begin{cases}x-4=2y\\x+2=3+y\end{cases}$

解得$x=-2$，$y=-3$

(7)

解 ：由于$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\2&-4&8&0\\-2&4&-2&3\\3&-6&0&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&-2\\0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

于是 α_1, α_3 为一个最大无关组。

且$\alpha_2=-2\ \alpha_1$， $\alpha_4=-2\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_3$

（8）**解**：(1) A 为 3 阶实对称矩阵，$\lambda_1=\lambda_2=6$，$r(A)=2$，故$\lambda_3=0$，设 0 所对应的特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则$\alpha_1$与$\alpha_3$，$\alpha_2$与$\alpha_3$正交，即

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\2x_1+x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

(2) 正交：$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$

单位化：$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$，$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

令$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，则$Q$正交矩阵且

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{bmatrix}$$

(8)解 ：由于

$$B=(A,b)=\begin{pmatrix}2&1&-3&1&-1\\1&2&-2&2&0\\-1&3&2&-2&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-4&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix},$$

于是对应的齐次线性方程组基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\end{pmatrix}$

方程组的通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}4\\0\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}$

（9）解 ：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&0\\-1&2-\lambda&0\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)=0$ 得

特征值有：$\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=3$

$\lambda_1=-1$时，解方程$(A+E)x=0$

由 $A+E=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，令 $p_1=\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=1$时，解方程$(A-E)x=0$

由 $A-E=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得基础解系$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,

把ξ_2单位化得 $p_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$

$\lambda_3=3$时，解方程$(A-3E)x=0$

由 $A-3E=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，

把 ξ_3 单位化得 $p_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$

令 $P=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\end{pmatrix}$，于是有正交变换 $x=Py$，把二次型化为标准形

$f=-{y_1}^2+{y_2}^2+3y^2{}_3$

四、证明题

证明：令 $\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2,\beta_2=\alpha_2-\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，有

$$k_1(2\alpha_1+3\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0,$$

即 $$(2k_1+k_3)\alpha_1+(3k_1+k_2+k_3)\alpha_2+(-k_2+k_3)\alpha_3=0 ,$$

由于 α_1，α_2,α_3 线性无关，于是

$$\begin{cases}2k_1+k_3=0\\3k_1+k_2+k_3=0\\-k_2+k_3=0\end{cases},$$

由于 $\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=1\neq0$，则关于 k_1,k_2,k_3 的方程组只有零解，即 $k_1=k_2=k_3=0$，

故向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关，即向量组 $2\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关.