引言与矢量代数

引言

工欲善其事，必先利其器 ——

矢量分析是研究电磁场理论的重要数学工具

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\mathrm{C}} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \bullet \vec{B} = 0 \\
\nabla \bullet \vec{D} = \rho_f
\end{cases}
$$

➢ 本节的研究目的

复习：矢量代数的相关公式

➢ 本节的研究内容

一、标量、矢量和单位矢量

二、矢量的加减法

三、矢量的点乘

四、矢量的叉乘

一、标量、矢量和单位矢量

1. 标量(scalar)

只有大小，没有空间方向的量。

如质量、密度、温度、功、路程、速率、体积、时间、能量、电阻、功率、电荷、电位等物理量。

无论选取什么坐标系，标量的数值恒保持不变。

一、标量、矢量和单位矢量

2. 矢量(vector)

不仅具有大小，而且具有空间方向的量。

如位移、速度、力、电场强度、电流密度、磁感应强度等，都是矢量。

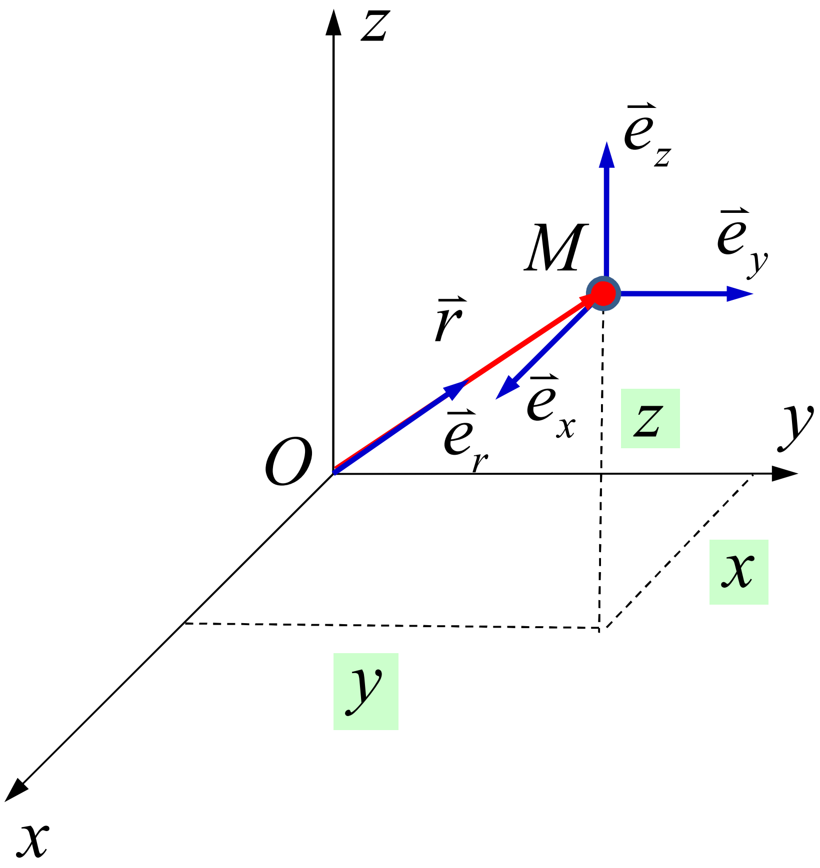
在不同坐标系中，矢量的表达式是不同的。

矢量的大小用绝对值表示，称为矢量的模。

一、标量、矢量和单位矢量

3. 单位矢量

模为1的矢量称为单位矢量，用 $\vec{e}$ 来表示。



$$M(x, y, z)$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

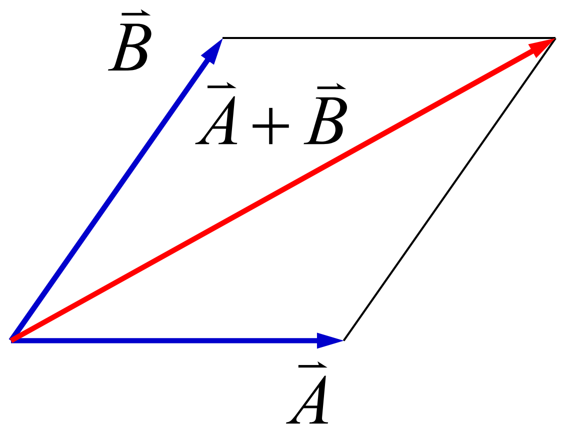
$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

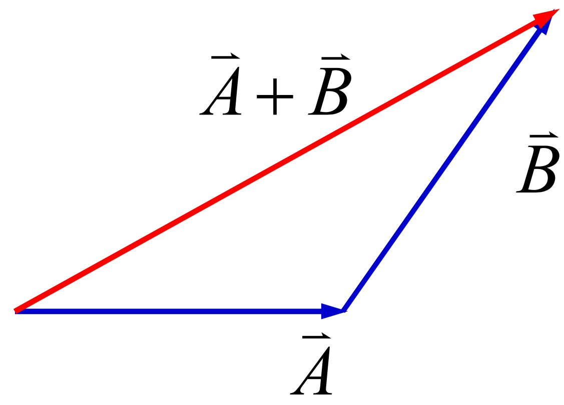
二、矢量的加减法

$$\vec{A}=A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+A_z\vec{e}_z \qquad \vec{B}=B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y+B_z\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{A}\pm\vec{B}=(A_x\pm B_x)\vec{e}_x+(A_y\pm B_y)\vec{e}_y+(A_z\pm B_z)\vec{e}_z$$

矢量加法满足平行四边形法则和三角形法则。



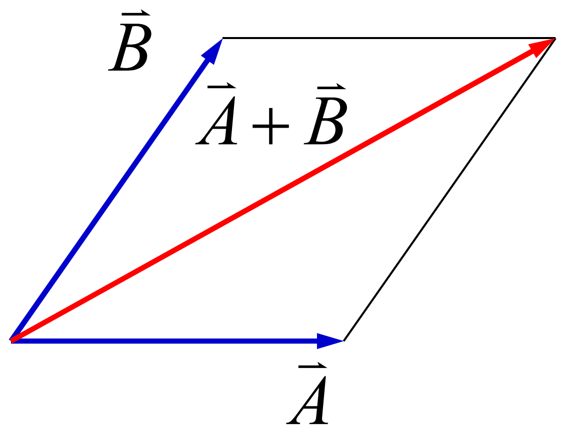


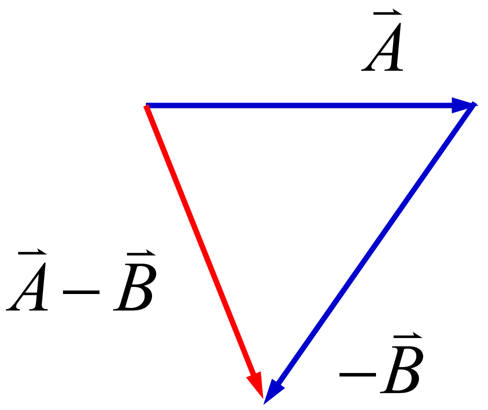
二、矢量的加减法

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z \qquad \vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\vec{e}_x + (A_y \pm B_y)\vec{e}_y + (A_z \pm B_z)\vec{e}_z$$

矢量加法满足平行四边形法则和三角形法则。

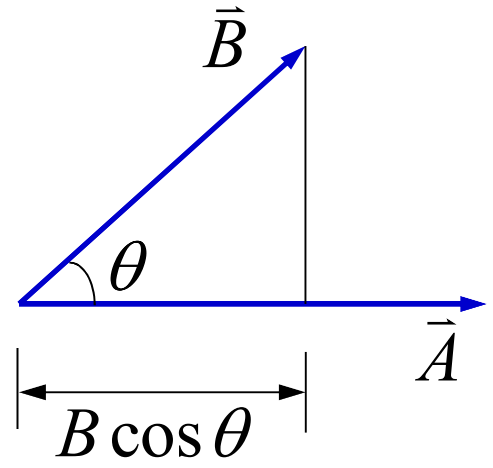




三、矢量的点乘

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z \qquad \vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}\bullet\vec{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$



$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \theta = 0°，\ \vec{A}\bullet\vec{B} = AB \\ \theta = 90°，\ \vec{A}\bullet\vec{B} = 0 \end{cases}$$

三、矢量的点乘

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z \qquad \vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{A}\bullet\vec{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

矢量点乘小结:

1. 矢量点乘的结果是标量;

2. 两矢量相互垂直，其点乘为0;

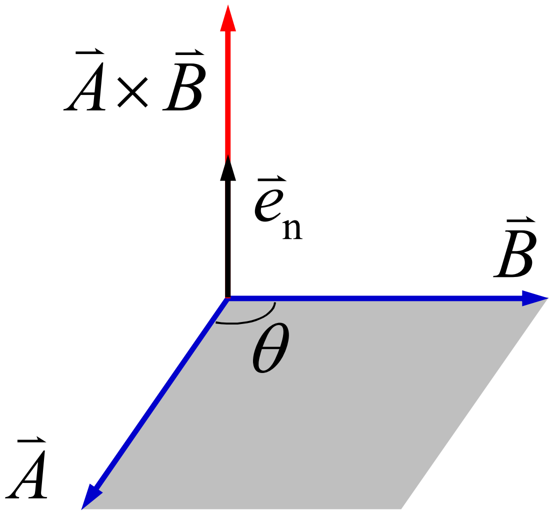
3. 物理上，力做功就是矢量点乘的例子。

$$A = \vec{f}\bullet\mathrm{d}\vec{l}$$

四、矢量的叉乘

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z \qquad \vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$$

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} \Rightarrow \begin{cases} \text{大小：} AB\sin\theta\text{，平行四边形的面积} \\ \text{方向：} \vec{C}\perp\vec{A}\text{，}\vec{C}\perp\vec{B}\text{，} \\ \qquad \vec{A}\text{、}\vec{B}\text{和}\vec{C}\text{满足右手螺旋法则} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \theta = 0°\text{，}\vec{A}\times\vec{B} = 0 \\ \theta = 90°\text{，}\vec{A}\times\vec{B} = AB\vec{e}_{\mathrm{n}} \end{cases}$$

四、矢量的叉乘

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z \qquad \vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$$

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

矢量叉乘小结：

1. 矢量叉乘的结果是矢量；

2. 两矢量相互平行，其叉乘为0；

3. 物理上，已知力与力臂求力矩，就是矢量叉乘的例子。

$$\vec{M} = \vec{R}\times\vec{f}$$

本 节 要 点

- 本节的研究目的

复习：矢量代数的相关公式

1. 标量和矢量二者区别；
2. 单位矢量的计算；
3. 矢量加减法的计算和几何关系；
4. 矢量的点乘和叉乘的计算和几何关系；