矢量场的环量和旋度

- 本节的研究目的

寻找能够度量和刻画矢量场变化情况的量。

旋度是描述矢量场中任一点旋转性质的量。

- 本节的研究内容

一、矢量场的环量

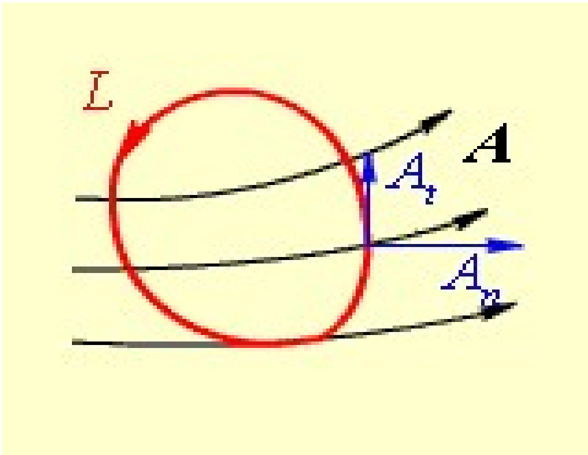
二、环量面密度

三、矢量场的旋度

一、矢量场的环量

在矢量场中，若L是一条有向闭合曲线，则矢量场$\vec{A}$ 沿有向闭曲线 L的线积分，称为矢量$\vec{A}$ 沿有向闭曲线L的环量，即

$$\Gamma = \oint_L \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{L}$$

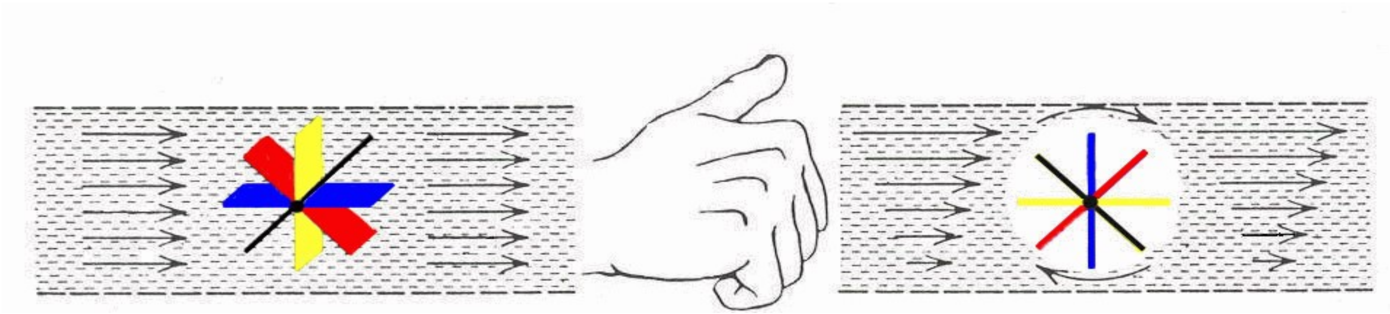


一、矢量场的环量

环量的物理意义：不同物理量的环量意义不同。

以河水中放置的水轮为例，水轮边缘受到的力为 $\vec{A}$，则矢量 $\vec{A}$ 沿水轮边界 L 的环量表示水流沿整个水轮所作的功。

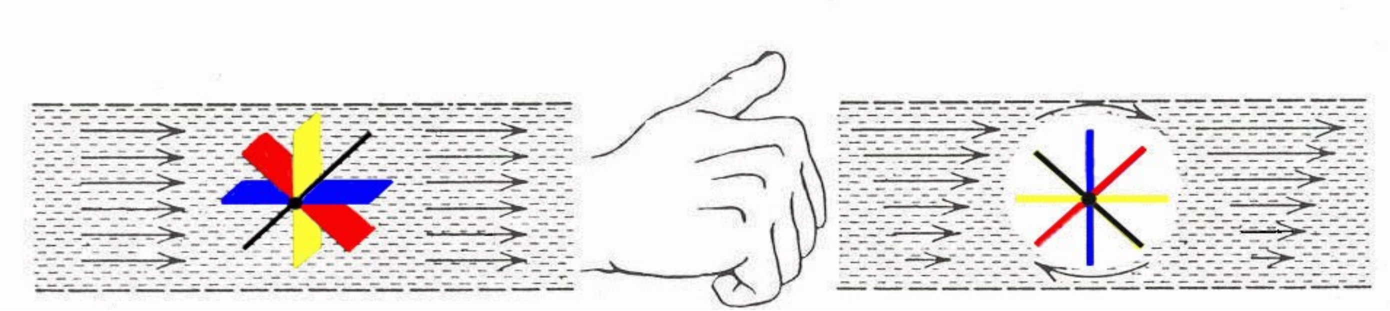
$$\Gamma = \oint_L \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{L}$$



$\Gamma = 0$ $\Gamma \neq 0$

一、矢量场的环量

根据环量的大小判断闭合曲线中是否存在涡旋源:



$\Gamma = 0$

(无涡旋源)

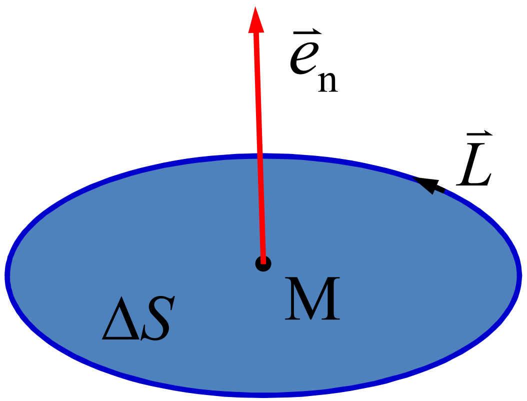
$\Gamma \neq 0$

(有涡旋源)

环量无法说明闭合面内每一点处的性质，怎么办?

二、环量面密度

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_L \vec{A}\bullet \mathrm{d}\vec{L}}{\Delta S}$$



矢量场 $\vec{A}$ 在点 M 处沿方向 $\vec{e}_{\mathrm{n}}$ 的环量面密度。

环量面密度反映了矢量 $\vec{A}$ 在点 M 处环绕 $\vec{e}_{\mathrm{n}}$ 方向旋转的强弱情况。

围绕一点可以获得无数个环量面密度，哪个最大?

三、矢量场的旋度(rotation)

1.旋度的定义

若在矢量场 $\vec{A}$ 中的点 M 处存在一矢量，该矢量的大小是 M 处的最大环量面密度，它的方向就是能够获得最大环量面密度的方向，则称该矢量为矢量场 $\vec{A}$ 在点 M 处的旋度，记为 $\mathrm{rot}\vec{A}$。

三、矢量场的旋度(rotation)

2.旋度的计算

根据斯托克斯定理，可得

$$\Rightarrow \quad \text{环量面密度} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \vec{A} \bullet d\vec{L}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} (\nabla \times \vec{A}) \bullet d\vec{S}}{\Delta S}$$

根据积分中值定理，可得

$$\Rightarrow \quad \text{环量面密度} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} (\nabla \times \vec{A}) \bullet d\vec{S}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{(\nabla \times \vec{A})_{\mathrm{P}} \bullet \vec{e}_n \Delta S}{\Delta S}$$

三、矢量场的旋度(rotation)

2.旋度的计算

进一步整理，可得

$\Rightarrow$ **环量面密度** $= (\nabla \times \vec{A})_{\mathrm{M}} \bullet \vec{e}_n = \left|\nabla \times \vec{A}\right|_{\mathrm{M}} \cdot \left|\vec{e}_n\right| \cdot \cos\theta$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla \times \vec{A}}$$

三、矢量场的旋度(rotation)

$$\nabla\times\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

旋度小结:

1. 矢量场的旋度是一个矢量，它是描述矢量场中任一点旋转性质的量。

2. 旋度代表矢量场的涡旋源的特性:

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{A}\neq 0 & \text{该点矢量线有旋}\\ \nabla\times\vec{A}=0 & \text{该点矢量线无旋}\end{cases}$$

三、矢量场的旋度(rotation)

旋度小结:

3. 经过点M的任意方向的环量面密度，都可用旋度在该方向上的投影获得，即

$$\Rightarrow \quad \text{环量面密度} = (\nabla\times\vec{A})_{\mathrm{M}}\bullet\vec{e}_n$$

4. 在矢量场中，若 $\nabla\times\vec{A}=\vec{J}\neq 0$， 称之为有旋场，

$\vec{J}$ 称为**旋度源**;

5. 若场中处处 $\nabla\times\vec{A}=0$，称之为无旋场。

本 节 要 点

- 本节的研究目的

寻找能够度量和刻画矢量场变化情况的量

——旋度（分析矢量场的工具之一）

旋度是描述矢量场中任一点旋转性质的量

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{A}\neq 0 & \text{该点矢量线有旋} \\ \nabla\times\vec{A}=0 & \text{该点矢量线无旋} \end{cases}$$