

密立根油滴实验再认识

董 键

(曲阜师范大学物理工程学院, 山东 曲阜 273165)

摘要:密立根油滴实验用于证明电荷量子化是合适的,但要将电荷量测量准确就不容易了,需要克服诸多实验上的困难,很多人借助“后期算法”进行修饰.油滴的布朗运动是一个重要因素,它对油滴平衡电压和下落时间都有影响,若合理应对,还是能改善测量的准确性,再结合电量-编号作图法,可以简洁地证明电荷量子化,并求得元电荷较为准确的值.本文还分析了电荷量测量误差的分布特点,并用测量数据有效数字的限制进行了恰当的解释,为选取合适的油滴奠定了理论基础.

关键词:密立根油滴实验; 电荷量子化; 布朗运动; 误差分布; 有效数字

中图分类号: O 4-34

文献标识码: A

文章编号: 1000-0712 (2021) 02-0036-06

【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.200130

密立根油滴实验已经做过 100 多年了^[1-3], 由于其独特的科学价值和教学价值, 一直以来被各个大学选为学生实验, 一代一代的大学生都在重复做着该实验, 学生们喜欢做这个实验, 因为它能直观地证明电荷的不连续性, 即电荷量是量子化的, 这个科学事实太重要了. 然而, 对这样一个经典实验, 当下存在着不同做法, 有的做法不甚合理, 甚至不甚科学, 没有发挥好该实验的科学认知和实验训练的价值. 众所周知, 油滴实验的科学内容分为两个方面, 定性的方面是电荷量子化, 定量的方面是测量基本电荷. 作为定性特征, 要证明电荷是不连续的, 自然不能拿一个电荷量的值做为证据, 但也不能只靠少数几个油滴的电荷量就做出结论, 它需要足够多的油滴数据, 用统计分析进行证明, 重要的是让数据说话, 而不能“替数据说话”, 即不能事先假定电荷量是量子化的, 用“倒过来”的方法来证明量子化. 这个道理, 很多人都是认同的, 但具体到对学生的要求上, 就是另一回事了, 原因是学生实验时间有限, 测不了很多油滴, 于是, 有的作者开始“替学生着想”, 用各种“后期算法”来“证明”, 几个油滴的数据(10 个以内)也能证明电荷量子化, 仿佛有“捷径”可走. 另有一些作者, 将不同年级学生实验的数据收集起来, 数量上千个, 着实足够, 但却忘了来自不同仪器和不同学生的数据精度参差不齐, 不能混用. 更有作者, 自己不做实验, 从网上搜集他人数据, 用繁琐的算法, 计算基本电荷的值, 这样做的意义值得怀疑. 在各种油滴实验的做法中, 往往对于考察电荷量

定性性质方面不突出, 而把精力集中在计算基本电荷的数值上, 对于后者, 又不是着重把数据测得更准, 而是试图用算法将基本电荷“算得更准”^[4-8]. 如果不加以澄清, 将会降低油滴实验的科学意义, 弱化该实验在学生心目中的形象, 使学生漫不经心地对待该实验, 以凑合着交差过关为目标, 那就可悲了.

基于以上认识, 本文用“平衡法”重做油滴实验, 希望提供不同的参考视角. 文中严格求解实验方程组, 认真对待布朗运动, 把平衡态掌握得更准, 分析对下落时间求平均的必要性, 使电荷量测量误差显著减小; 采用新的电荷量作图法, 简洁地显示电荷量的分组性即量子化, 由此衍生出元电荷新的计算方法; 导出电荷量测量误差的分布规律, 并用测量数据的有效数字的限制进行了解释, 为选取合适的油滴奠定了理论基础. 实验采用南京培中科技开发所 MOD5 型油滴仪.

1 油滴实验的“平衡法”

密立根油滴实验的“平衡法”主要分两步, 第一步是将带电油滴控制在均匀电场中静止, 电场由两个平行电极板提供, 见图 1. 第二步是将板极电压调整到零, 让油滴自然下落, 进入匀速运动状态. 先不计空气浮力, 这两步对应的方程组是

$$mg = q \frac{U}{d} \quad (1)$$

$$mg = 6\pi\eta rv \quad (2)$$

其中 m 是油滴的质量, g 是重力加速度, d 是极板间

收稿日期: 2020-04-08; 修回日期: 2020-05-30

作者简介: 董键(1962—), 男, 山东微山县人, 曲阜师范大学物理工程学院讲师, 硕士, 从事计算物理和实验物理研究

距, U 是板极电压, r 是油滴半径, η 是空气黏滞系数, q 是油滴所带的电荷量(实验测量的目标), v 是油滴匀速下落的速度, 它可以通过测量油滴经过竖直高度 l 所用的时间 t 来计算.

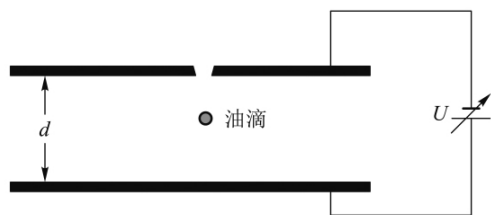


图1 油滴实验原理图

$$v = \frac{l}{t} \quad (3)$$

方程(1)和(2)有3个未知量: r 、 m 和 q , 不能求解, 需要补充一个关系式:

$$m = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \quad (4)$$

其中 ρ 是油的密度. 考虑到油滴的尺度是微米量级, 空气的黏度需要用下式修正,

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + b\rho/r} \quad (5)$$

η_0 是用宏观方法测量的黏度, 它是温度的函数, 需要事先测量出来; p 是实验时的气压, 气压和温度都需要测量; b 是修正常数, 取为 $8.23 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{Pa}$.

现在可以求解方程组(1)、(2)和(4)了, 得到油滴半径和电荷量, 教科书上给出的都是近似公式, 现在, 计算软件很发达, 例如 Mathematica, 严格求解, 结果如式(6)、式(7)所示.

$$r = \frac{-bgpt + \sqrt{gpt(18lp^2\eta_0 + b^2gpt)}}{2gp\rho t} \quad (6)$$

$$q = \frac{d}{3gp^3\rho t^2U} [(9lp^2\eta_0 + 2b^2gpt) \cdot \sqrt{gpt(18lp^2\eta_0 + b^2gpt)} - 27bglp^2\rho_0\eta_0t - 2b^3g^2\rho^2t^2] \quad (7)$$

实验是在寒假里进行的, 实验室停暖, 室内气温 0°C (有助于降低油的挥发), 气压 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$, 采用 701 钟表油, 密度 991 kg/m^3 , 黏度 $1.91 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$, 当地的重力加速度是 9.797 m/s^2 , $l = 2.00 \text{ mm}$, $d = 5.00 \text{ mm}$.

2 布朗运动的影响

“平衡法”的两步都明显受到油滴布朗运动的影响, 是实验中最大的影响因素, 需要认真对待. 首

先, 由于布朗运动, 油滴无法静止, 给判断何时才是重力与电场力的平衡状态带来了莫大的难度. 模拟计算显示, 即使重力与电场力平衡了, 布朗运动也会导致油滴持续向一个方向运动^[9], 比如往上运动, 没有经验者就会认为板极电压大了, 减小之, 如此反复, 最后没有了衡量标准, 随便取一个“差不多”的电压作为平衡电压. 正确的判断方法是: 将油滴移动到屏幕某条水平格线附近, 如果能保持几秒不离开格线, 以后即使离开了格线, 向一个方向运动, 不要马上调整电压, 观察其运动, 若油滴还能反方向运动, 说明板极电压离平衡电压不远了, 再将油滴移动到格线上, 观察还能否保持不动, 微调板极电压, 使之保持几秒不离开, 这个电压就可以作为平衡电压. 这个过程可能反复几次, 需要若干分钟, 没有耐心不行. 若只看油滴短时间不离开格线就决定其平衡态, 有时候会导致 $10 \sim 20 \text{ V}$ 的误差.

其次, 油滴在自然下落过程中也会受到布朗运动的影响, 导致下落相同的距离, 所用时间不相同, 这很容易用反复测量一个油滴下落距离 l 的时间差别来观察. 图2是专门进行的下落时间的残差分布测试结果, 横轴是油滴下落若干次的平均时间 \bar{t} , 纵轴是对应的残差 δt ,

$$\delta t = t - \bar{t} \quad (8)$$

竖直线段表示某个油滴下落时间的残差分布范围.

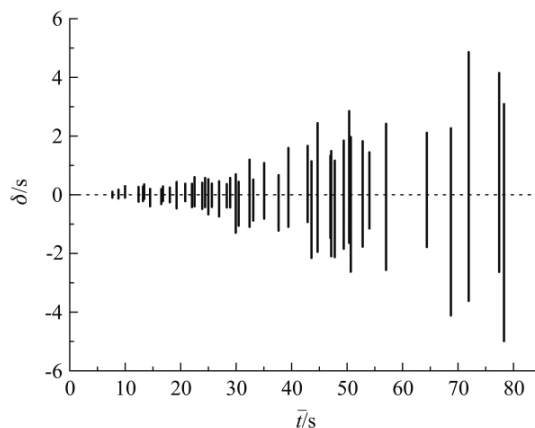


图2 油滴下落时间的残差分布

表1是从所测油滴选出来的代表, 它们的下落时间分布更具体的展示出来, 随着下落时间的增长, 时间的起伏增大, 好像比线性增大的更快, 最短时间与最长时间差别可达 8 s , 这远远超出了人按按钮的反应时间 0.2 s , 这种起伏就是布朗运动影响的证明. 经验表明: 对于一个计时熟练的人来讲, 下落时间小于 15 s , 测量一次就够了; 时间大于 15 s 之后, 就需要

反复测量,用平均值作为计算用的下落时间,因为起伏相对于平均值是对称分布的.这是一个利用误差分布特点来减小误差的很好的例子,取平均方法的合理性也被关舒月等人的模拟计算所证明^[10-11].

表1 反复测量的油滴下落时间分布
(n : 油滴编号, i : 测量次数)

t/s $n \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	\bar{t}/s
1	7.8	7.9	7.8	7.8	7.8	7.8	7.7	7.80
2	17.9	18.0	18.3	17.9	18.3	18.3	18.4	18.16
3	27.2	27.4	27.0	26.9	26.3	27.0	27.5	27.04
4	32.5	31.4	33.1	32.1	33.7	32.2	32.5	32.50
5	44.1	43.8	43.5	44.1	41.5	44.8	43.8	43.66
6	50.7	52.0	51.7	49.2	48.1	52.7	50.7	50.73
7	64.6	71.0	68.0	70.9	69.2	70.2	69.9	69.11
8	76.9	81.4	80.4	73.3	77.6	78.7	80.1	78.34

3 “电荷量-编号作图法”证明电荷量子化

油滴实验的作用就是证明电荷的量子化,这不能通过一个油滴的电荷量来证明,必须通过大量油滴的测量,用统计比较的方法来证明,如果电荷量有分组性,就证明是量子化的.为此,笔者要求学生至少测量20个油滴,才能用电脑进行计算,用下面的作图方法来显示电荷的量子性:用油滴的编号 n 做横轴,用电荷量 q 做纵轴,简简单单地将电荷量“晒”在平面上.表2是笔者测量的120个油滴的平衡电压和下落时间数据,图3展示了根据这些数据计算出的油滴电荷量分布,具有明显的分组性,即:同一组的电荷量近似相等,不同组之间是宽大的无电荷区,电荷量子化的特性得到直观的统计证明,这样给学生的印象更深刻.

表2 平衡法测量120个油滴的实验数据(U : 平衡电压, \bar{t} : 下落时间平均值)

U/V	80	498	114	204	634	194	195	174	191	125	255	249
\bar{t}/s	24.52	8.44	27.14	10.10	12.70	12.40	13.30	20.92	8.93	25.72	9.90	16.61
U/V	133	191	144	127	193	405	229	216	334	205	152	84
\bar{t}/s	19.90	17.38	7.90	47.20	12.40	7.40	14.26	21.18	14.00	12.93	13.54	22.44
U/V	91	244	123	173	507	443	117	263	240	360	241	122
\bar{t}/s	25.07	6.60	10.00	21.08	18.70	10.20	11.00	29.03	47.83	23.63	48.50	19.55
U/V	119	147	260	221	164	190	145	365	256	277	80	318
\bar{t}/s	18.16	42.93	8.80	18.20	12.53	22.70	23.86	5.55	16.48	29.08	27.50	26.30
U/V	125	157	231	153	136	232	239	138	131	192	204	254
\bar{t}/s	14.10	40.85	11.10	39.95	16.90	13.98	30.92	13.18	44.75	12.00	26.67	13.40
U/V	202	100	165	137	165	407	266	609	134	190	120	142
\bar{t}/s	26.83	16.46	39.10	33.2	58.60	16.60	21.40	26.40	44.10	11.80	74.90	44.00
U/V	211	591	157	118	62	163	120	495	241	199	197	205
\bar{t}/s	16.85	13.40	14.55	78.30	57.07	13.33	16.91	19.78	49.00	27.04	50.50	50.73
U/V	155	149	278	169	206	170	246	331	102	173	166	346
\bar{t}/s	40.15	64.38	43.83	39.50	33.20	39.36	30.56	19.36	23.98	29.37	19.40	39.35
U/V	198	220	344	256	245	278	178	272	290	342	228	139
\bar{t}/s	15.52	32.50	24.57	22.60	30.25	43.66	14.75	43.70	17.50	24.93	50.44	33.85
U/V	407	310	260	223	275	196	144	149	380	277	294	227
\bar{t}/s	17.10	40.70	18.70	7.80	28.43	27.30	32.80	26.88	8.80	18.00	42.70	20.00

4 求基本电荷

图3不仅显示了电荷量的分组性,还显示了相邻组之间的电荷量间隔是相等的,并且等于最小一组的电荷量——这个特征说明了基本电荷(又称元电荷)的存在,也就是电子电荷的量值.为此,根据图3可以计算基本电荷,做法如下:将电荷量数据分组,求每组电荷量的平均值 \bar{q}_k ,当该组电荷量的值,最低的7组电荷量均值见表3.

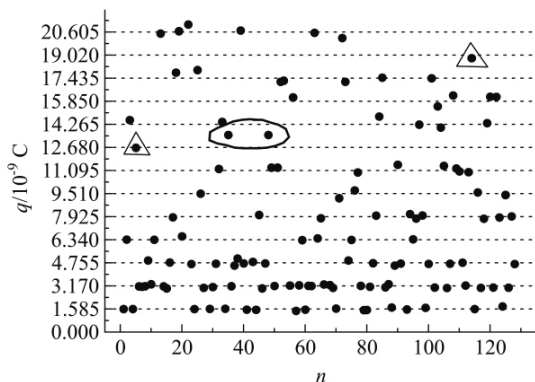


图3 油滴电荷量子化的图示

表3 各组电荷量的平均值(k :组别)

k	1	2	3	4
$\bar{q}_k / 10^{-19} \text{C}$	1.559	3.107	4.703	6.386
k	5	6	7	
$\bar{q}_k / 10^{-19} \text{C}$	7.903	9.463	11.189	

作电荷量平均值随组别 k 变化的图,见图4.该图显示,不同组的电荷量呈良好的线性增大,若做线性拟合,数据点都靠近拟合线,这就是前述电荷量分布特点的定量表示,其中拟合线的斜率自然就是基本电荷 e 了,其值为 $(1.585 \pm 0.005) \times 10^{-19} \text{C}$,这就是图3纵轴分度值的由来.顺便指出,若计及空气浮力项(0°C ,空气密度 1.293 kg/m^3),则用同样的测量数据计算的基本电荷是 $1.587 \times 10^{-19} \text{C}$,仅对 e 值小数点后第三位带来小的修正.如果拟合时取的电荷组数再小一些, e 的值会有所不同.

5 电量测量误差的分布规律

在计算每组电荷量平均值的时候,同时也算出了该组电荷量的标准差 δ_k ,其分布曲线见图5, k 是组序号(图中缺少第8和第12组的数据,因为从图3画三角形的两个地方看,那些组只有一个数据,不

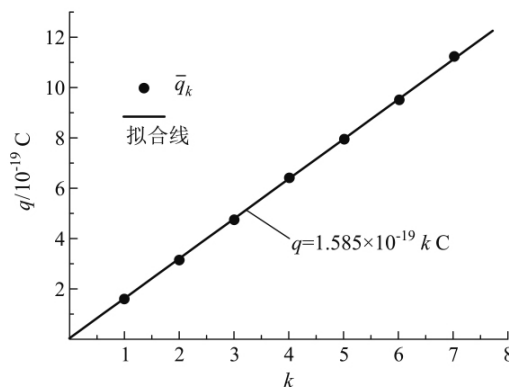


图4 各组电量平均值的分布与拟合线

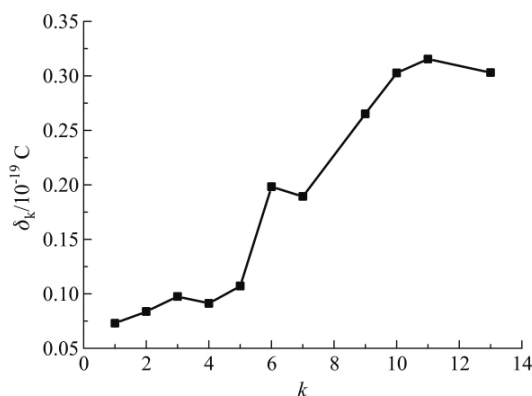


图5 各组电量标准差的分布

能计算标准差).曲线显示,标准差的分布趋势是随着组别 k 的增大而增大的,由此推论:当电荷量误差超过半个基本电荷时,就无法判断该电荷量属于哪个分组,量子化就无法证明了.图3中用红线圈起来的两个数据点就属于这种情况.因此,相对误差的概念在本实验是失效的,降低绝对误差是本实验所要求的.

图5显示的规律是客观的,为什么会这样呢?笔者发现,这个规律的来源有一个简单的解释,它来自测量仪表有效数字的限制^[12],具体来说,油滴仪电压表和计时器都是三位的,所显示数据的最后一位是不准确的,导致电荷量计算值有效数字也是三位(计算中间值多保留一位),最后一位也是不准确的.

设电荷量计算值的三位分别用 a 、 b 和 c 表示, a 不能为0,计算结果有3种可能,即 $a.bc$ 、 $ab.c$ 和 abc (略去 10^{-19}C ,余同).由于 c 是不准确的,它的波动范围是0~9,该范围对于不同的电荷量含义不同,对于 $a.bc$,意味着电荷量的最大波动为0.1;对于 $ab.c$,

意味着 1; 对于 abc , 意味着 10. 因此, 电荷量误差随着电量的增大一定是增大的. 由此推论: 因为当电荷量波动超过半个基本电荷 (0.8) 时, 就无法证明量子化了, 换言之, 从 $ab.c$ 开始, 误差就可能量子化证明了失效, 必须选择电量小的油滴, 例如电荷量不超过 $10.0 \times 10^{-19} \text{C}$, 也就是在 7 个最低的分组之内. 虽然有的作者是这么做的^[13], 但是依据不充分、不定量, 以上分析, 给选择油滴提供了定量依据.

6 选择油滴一定要很苛刻吗?

上面是从电荷量大小的角度对选择油滴做出了限定, 由于电荷量是由平衡电压和下落时间来计算的, 自然就提出了对平衡电压和下落时间限定的问题. 由于电荷量是双变量函数, 选择的范围就多样化了. 不少作者根据自己的分析和喜好, 各自做出了选择, 例如: 高铁军主编的《近代物理实验》就约定电压取 200 V 附近的值, 时间 15 s ~ 30 s^[14]; 于津江等限定时间 20 s ~ 30 s, 电压 200 V 附近, 带电荷 2 ~ 4 个^[15]; 刘芬等主张时间 20 s ~ 30 s, 电压 100 V ~ 250 V, 带电荷不大于 5 个^[16], 等等. 时间范围和电压范围普遍较窄, 笔者认为这过于苛刻. 事实上, 凡是满足电荷量计算公式的电压和时间, 都是可取的, 只要能控制测量误差到可以接受的程度, 例如如上面测量的 120 多个油滴所做的那样. 在这些油滴中, 电压取值 62 V ~ 634 V, 时间取值 5.5 s ~ 78.3 s. 为了显示在“极端条件”下所测量的油滴电荷量是否有很大的误差, 笔者从以上油滴中选择了 10 个, 其参数和电荷量见表 4, 电荷量的分布见图 6, 可见, 电荷量的误差并不大, 与所在组的电荷量均值靠的很近. 既然如此, 对油滴的选择条件就可以放宽: 时间 10 s ~ 60 s, 电压大于 100 V. 这样, 学生选择起来就容易多了, 能把精力更多地放在误差控制上, 也有利于测量更多油滴.

表 4 部分“极端”油滴的电荷量 (n : 油滴编号)

n	1	2	3	4	5
U/V	634	507	609	591	149
\bar{t}/s	12.75	18.70	26.45	13.40	64.38
$q/10^{-19}\text{C}$	4.731	3.259	1.575	4.699	1.559
n	6	7	8	9	10
U/V	407	105	62	165	120
t/s	16.60	52.87	57.07	58.60	74.95
$q/10^{-19}\text{C}$	4.889	3.039	4.552	1.639	1.513

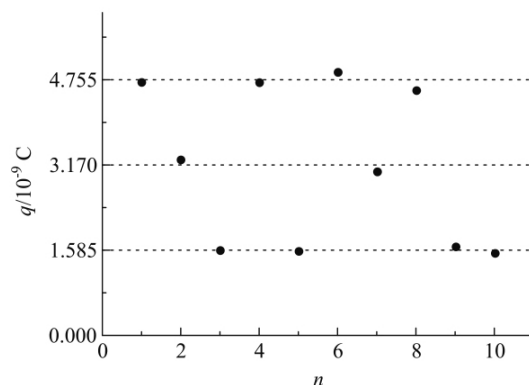


图 6 部分“极端”油滴的电荷量分布

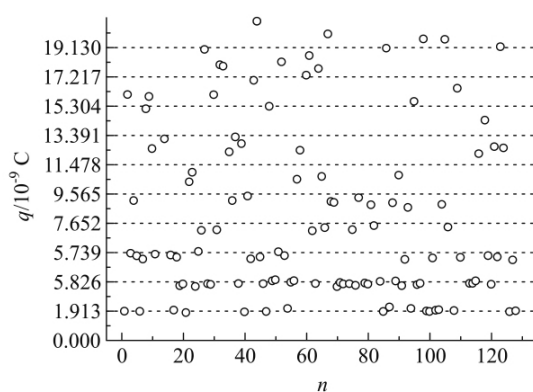


图 7 不计空气黏度修正的电荷量分布

7 若不计黏度修正会怎样?

式 (5) 是黏度的修正公式, 是密立根创造的一个重要理论成果^[17], 它是在实验上发现当油滴较小时, 电荷量计算值偏大, 而想到了微米尺度上空气的不连续性对油滴下落的影响, 依据气体运动论推导出来的一个近似公式, 后来证明这个修正是十分必要的, 修正之后, 电荷量的计算值才趋于量子化. 在今天的实验教学中, 学生很少去想这个修正项的来源和必要性, 普遍缺乏对修正项作用的认知. 其实, 只要对测量数据按照非修正公式 (即在式 (7) 中令 $b=0$) 再算一遍, 结果就由图 3 变为图 7, 数据点改用圆圈标记. 该图显示, 电荷量的起伏性随油滴电荷量的增大而迅速增大, 在第四组之后, 就难以辨认分组性了, 数据点几乎均匀分布在平面上, 好像撒了一把沙子. 在下部 4 个可辨认的分组中, 若取每组的平均值当做该组的电荷量, 则相邻两组电荷量的间隔也不再相等, 且都大于 1.77, 第一组的电荷量最大, 达到 1.913, 远远大于元电荷的值, 即使拿第一组的平均值当做元电荷也不行.

8 述评

在密立根油滴实验中,只要测量的油滴数量足够多,只要将油滴的电荷量按编号作图,电荷量子化就能直观地显现,无需设计其他算法去证明,电荷量子化是统计结论.根据经验,适当限制平衡电压和下落时间的范围,可以将油滴的电荷量控制在10个基本电荷以内,误差也会减小,更有利于量子化的结论.

油滴实验的主要误差来源是油滴的布朗运动,可以针对性地采取措施,减弱误差的影响,但效果有限,由于还涉及更多的因素,用油滴实验测量基本电荷,精度不易提高.当人们接受了电荷量子化的理念之后,还可以寻求其他途径测量电子电荷,例如塞曼效应,半导体PN结的伏安曲线等等,以开阔学生的视野.

油滴实验给了学生思考很多物理问题的机会,例如:油滴是如何带上电荷的?这将给物质带电机制以怎样的启发?如何更好地描述油滴的运动?油滴挥发速率多大,将给实验带来多大的影响?油滴实验原理还有其他用途吗?等等.

油滴实验还给学生提供了数据分析的很好范例,借助于适当的计算软件,克服“数据分析恐惧症”,不再面对着一堆杂乱的数字发呆,只要有想法,软件就可以助力“拷问”数据,让它回答不同的问题,以充分发掘数据的潜力.这样内含丰富的经典实验,值得师生认真对待,倍加珍视,使之成为学生心目中的科学里程碑.

参考文献:

- [1] Millikan R A. The Isolation of an Ion, a Precision Measurement of its Charge, and the Correction of Stokes' s Law [J]. Phys Rev. (Series I), 1911, 32(4) : 349-397.
- [2] Millikan R A. On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant [J]. Phys Rev, 1913, 2 (2) : 109-143.
- [3] R. A. 密立根. 电子及其他质点(上) [M]. 钟问, 译. 北京: 商务印书馆, 1954.
- [4] 于光辉. 油滴实验的数据处理方法 [J]. 大学物理, 1995, 14(10) : 31-32.
- [5] 李炜疆. 密立根油滴实验数据处理的最优化方法 [J]. 内蒙古工学院学报, 1990, 9(2) : 54-58.
- [6] 温猛, 洪朱旭, 冯运军, 等. 密立根油滴实验的概率统计分析 [J]. 中山大学学报(自然科学版), 2004, 43: 33-35.
- [7] 何长英, 张桂刚. 基于演化算法求解电子电荷量 e 的值 [J]. 大学物理, 2005, 24(5) : 50-52.
- [8] 朱鹤年, 郭旭波, 常纓, 等. 油滴实验计算元电荷的简明方法 [J]. 物理实验, 2018, 38(2) : 22-26.
- [9] 董键. Mathematica 与大学物理计算 [M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2013.
- [10] 关舒月, 张明, 张师平, 等. 密立根油滴实验中的布朗运动 [J]. 大学物理, 2019, 38(6) : 48-54.
- [11] Ehler E, Hason A. Effects of Brownian Motion on the Millikan Oil Drop Experiment [J]. Journal of Undergraduate Research at Minnesota State University, Mankato, 2010, 5: 1-11.
- [12] 董键, 崔秀芝. 有效数字, 误差分析与实验条件的选择 [J]. 大学物理, 2007, 26(8) : 39-41.
- [13] 陈晓. 密立根油滴实验的探究性数据处理方案 [J]. 大学物理实验, 2013, 26(2) : 88-90.
- [14] 高铁军, 朱俊孔. 近代物理实验 [M]. 济南: 山东大学出版社, 2000: 41-45.
- [15] 于津江, 耿荣华. 密立根油滴实验中油滴的最佳选择分析 [J]. 石家庄师范专科学校学报, 2003, 5(6) : 13-15.
- [16] 刘芬, 王爱芳, 杨田林. 密立根油滴实验中油滴的参数选择分析 [J]. 实验科学与技术, 2014, 12(4) : 23-24.
- [17] 史志强. 油滴实验方法的研究 [J]. 物理实验, 2002, 22(6) : 29-32.

Re-understanding the experiment of Millikan oil drop

DONG Jian

(College of Engineering and Physics, Qufu Normal University, Qufu, Shandong 273165, China)

Abstract: The experiment of Millikan oil drop was considered to be appropriate for demonstrating the charge quantization, but the quantity of electric charge is not easy to be accurately measured by it, because there are many experimental difficulties need to be overcome. Many people expected to decorate the results with a late algorithm. The Brown motion of oil droplets was one of the important factors which had an impact on the balance voltage and

(下转 62 页)

子的平均动量,也就存在一个真实的 CTWL.这个长度和热波长的定义类似,但是很不同.有些系统例如光子气体不能定义热波长,但是 CTWL 依然有效.

利用这个 CTWL,可以对热力学系统的线度进行估算.得到的线度和温度之间具有不同的幂次关系.对于有质量的玻色子, $L \sim T^{-2}$; 对于光子气体, $L \sim T^{-1}$; 对于室温附近金属中的电子, $L \sim T^0$ 即和温度无关.

本文仅仅对于简单系统的 CTWL 进行了研究,如果是极端相对论性的玻色或者费米气体,有限温度下的费米气体,或者冷原子气体,甚至超导体等等,CTWL 依然适用.这些将是今后深入研究的问题.

参考文献:

- [1] Toda M, Kubo R, Sait N. Statistical Physics I: Equilibrium Statistical Mechanics [M]. 2nd Ed, Berlin: Springer-Verlag, 2012.
- [2] Pathria R K. Statistical Mechanics [M]. 2nd Ed, Oxford: Butterworth-Heinemann, 1997.
- [3] Reif F. Fundamentals of statistical and thermal physics [M]. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [4] 林宗涵. 热力学与统计物理学 [M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2018.
- [5] 汪志诚. 热力学·统计物理 [M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [6] Richard Fitzpatrick [EB/OL]. <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/qmech/Quantum/node66.html>, 2010.
- [7] Yamamoto Y, Kakahashi Y. In Principles and methods of quantum information technologies, Lecture Notes in Physics 911 [M]. ed. by Yamamoto Y and Semba K, Tokyo: Springer, 2016.
- [8] 班世豪, 张子奕, 王鑫, 等. 自由粒子在 μ 空间的运动描述 [J]. 大学物理, 2020, 39(8): 80-83.

Generalized thermal wavelength: definition, significance and applications

LI Xin-yu, ZHANG Zi-yi, WANG Xin, LIU Quan-hui

(School for Theoretical Physics, College of Physics and Electronics, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China)

Abstract: Photon gas and highly degenerate quantum gases are not classical ideal gas at all, and each of them has its own mean momentum from which a generalized thermal wave length can be thus defined, and the usual thermal wave length is an irrelevant concept. For a non-degenerate system, this wave length converges to the usual thermal one from a matter particle. For a degenerate system, the dimension of thermodynamic system must be larger than this generalized thermal wavelength, which leads to a criterion on the minimum dimension of the thermodynamic system. For some typical systems, we use the criterion to give their minimum dimensions.

Key words: thermal wavelength; quantum gas; thermodynamic limit

(上接 41 页)

the free fall time of the oil droplet. If reasonably dealing with it, the accuracy of the measurement could improve. Combining with the charge-numbering graph method, the charge quantization could be demonstrated concisely, and the more accurate value of Meta-charge could be obtained. The distribution characteristics of the charge measurement error is analyzed, and it is properly explained with the limit of the number of significant digits of the measurement data. It settles a theoretical foundation for selecting the suitable oil droplets.

Key words: Millikan oil drop experiment; charge quantization; Brown motion; error distribution; significant digits