方向导数和梯度

- **本节的研究目的**

研究标量场的变化率。最大变化率?

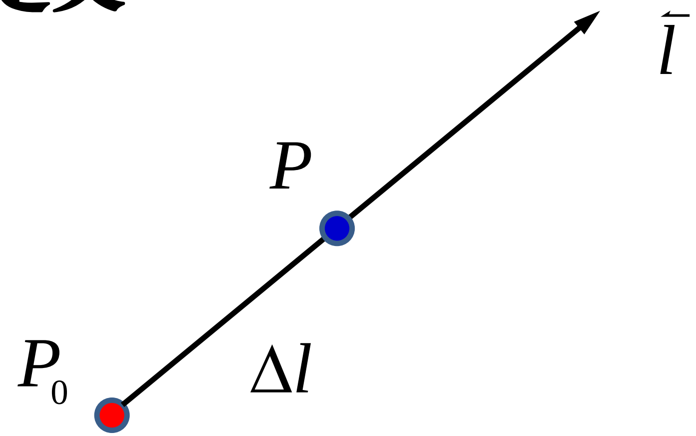
- **本节的研究内容**

一、方向导数

二、梯度

一、方向导数

1. 方向导数的定义



$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \lim_{P \to P_0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{P \to P_0} \frac{u(P) - u(P_0)}{\Delta l}$$

方向导数： 表示标量场中 $u(P)$ 在给定点处沿某一方向 $\vec{l}$ 的变化率。

一、方向导数

方向导数：表示标量场中$u(P)$在给定点处沿某一方向$\vec{l}$的变化率。

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

函数$u(P)$从给定点出发有无穷多个变化方向，其中哪个方向的**变化率最大**?

最大变化率是多少?

一、方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

令:

$$\vec{g} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_l = \vec{e}_x\cos\alpha + \vec{e}_y\cos\beta + \vec{e}_z\cos\gamma$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \vec{g}\bullet\vec{e}_l \quad = |\vec{g}||\vec{e}_l|\cos(\vec{g},\vec{e}_l) \quad = |\vec{g}|\cos(\vec{g},\vec{e}_l)$$

$\Rightarrow \quad \cos(\vec{g},\vec{e}_l) = 1 \quad \dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = |\vec{g}|$ **方向导数取得最大值**

二、梯度

$$\mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z$$

梯度小结:

1. **标量场的梯度是一个矢量，是空间坐标点的函数;**
2. **梯度的大小为该点标量函数的最大变化率，即最大方向导数;**
3. **梯度的方向为该点方向导数最大的方向;**

二、梯度

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z$$

梯度小结:

4. 梯度描述标量场中任一点函数值在该点附近增减性质的量，沿着梯度的方向，函数值增加或减小得最快;

5. 已知梯度即可求出沿任一方向的方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=\mathrm{grad}u\bullet\vec{e}_l$$

6. 梯度与等值面垂直，如电力线垂直于等位面。

本 节 要 点

- **本节的研究目的**

研究标量场的变化率。最大变化率？

梯度的概念及运算

$$\mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \mathrm{grad}u \bullet \vec{e}_l$$

$$\mathrm{grad}u = \nabla u$$