矢量场的通量和散度

- **本节的研究目的**

  寻找能够度量和刻画矢量场变化情况的量

  散度是描述矢量场中任一点发散性质的量

- **本节的研究内容**

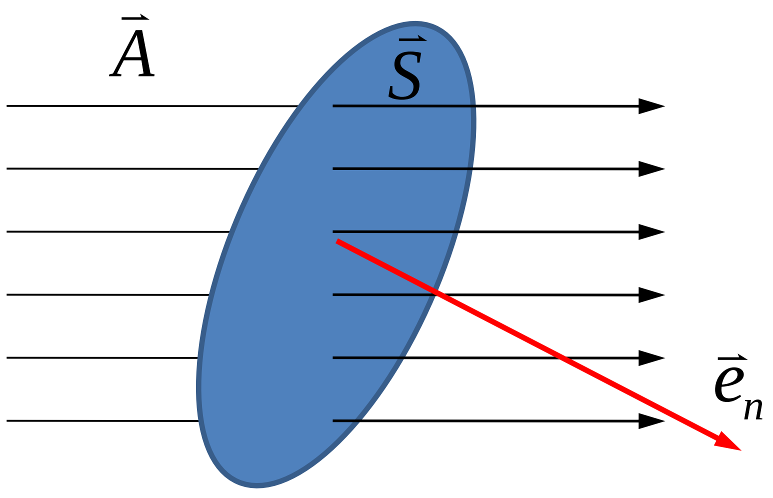
  一、矢量场的通量

  二、矢量场的散度

一、矢量场的通量

在矢量场中，取一个有向曲面 $\vec{S}$，则矢量场 $\vec{A}$ 在 $\vec{S}$ 上的面积分称为矢量 $\vec{A}$ 穿过曲面 $\vec{S}$ 的通量，即

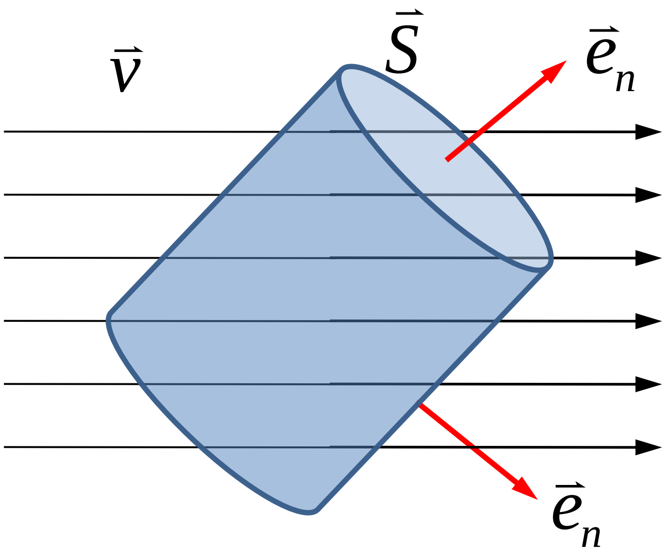
$$\Phi = \int_S \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \vec{A} \bullet \vec{e}_n \mathrm{d}S$$



一、矢量场的通量

通量的物理意义：不同物理量的通量意义不同。

以流速场为例，流速场 $\vec{v}$ 的通量表示单位时间内流体穿过 $\vec{S}$ 的流量。



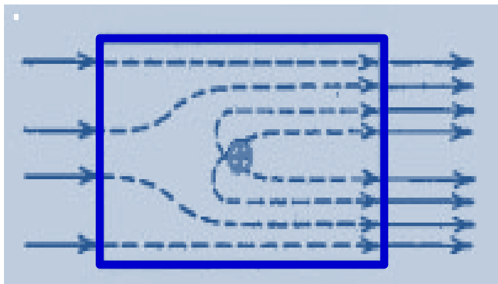
$$\Phi = \oint_S \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

$\Downarrow$

表示穿出闭合 $\vec{S}$ 面的净流量

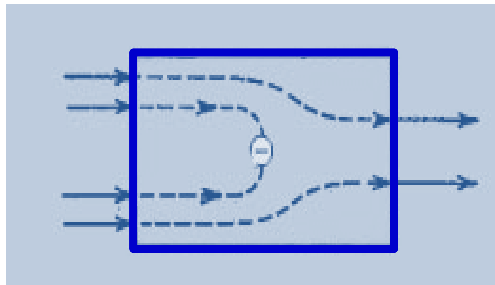
一、矢量场的通量

根据通量的大小判断闭合面中源的性质:



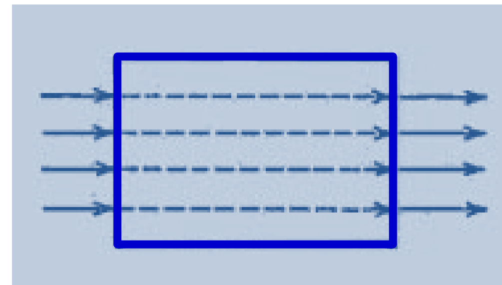
$\Phi > 0$

(有正源)



$\Phi < 0$

(有负源)



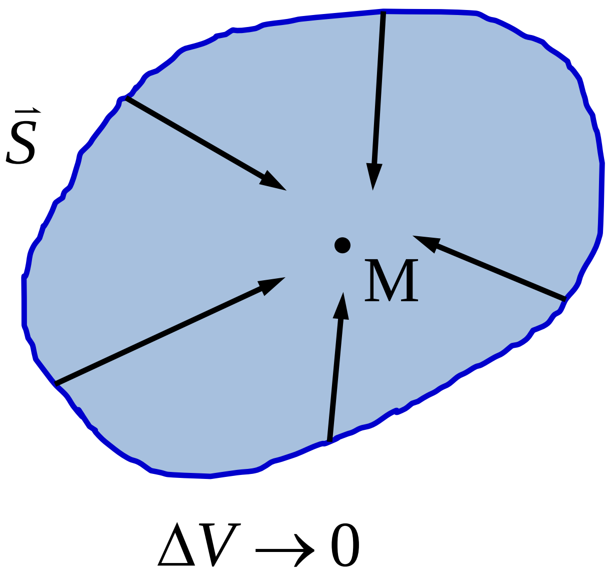
$\Phi = 0$

(无源或正负源同时存在)

通量无法说明闭合面内每一点处的性质，怎么办?

二、矢量场的散度(divergence)

1.散度的定义



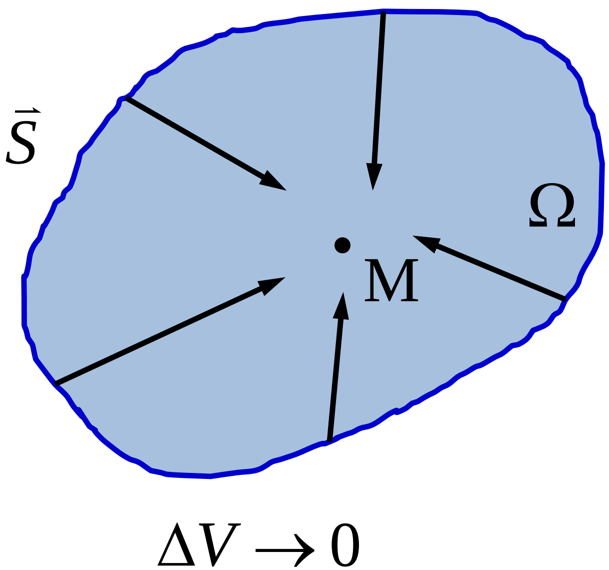
$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}$$

矢量场 $\vec{A}$ 在点 M 处的散度

单位体积发出的通量—通量体密度

二、矢量场的散度(divergence)

1.散度的定义



$$\mathrm{div}\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}$$

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{A} > 0 & \textbf{该点有正源} \\ \mathrm{div}\vec{A} < 0 & \textbf{该点有负源} \\ \mathrm{div}\vec{A} = 0 & \textbf{该点无源} \end{cases}$$

二、矢量场的散度(divergence)

2.散度的计算

根据高斯—奥斯特洛格拉茨基公式，可得

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}\vec{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \vec{A}\bullet \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_{\Delta V}\nabla\bullet\vec{A}\mathrm{d}V}{\Delta V}$$

根据积分中值定理，可得

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}\vec{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_{\Delta V}\nabla\bullet\vec{A}\mathrm{d}V}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{(\nabla\bullet\vec{A})_{\mathrm{P}}\Delta V}{\Delta V}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \mathrm{div}\vec{A}=\nabla\bullet\vec{A}}$$

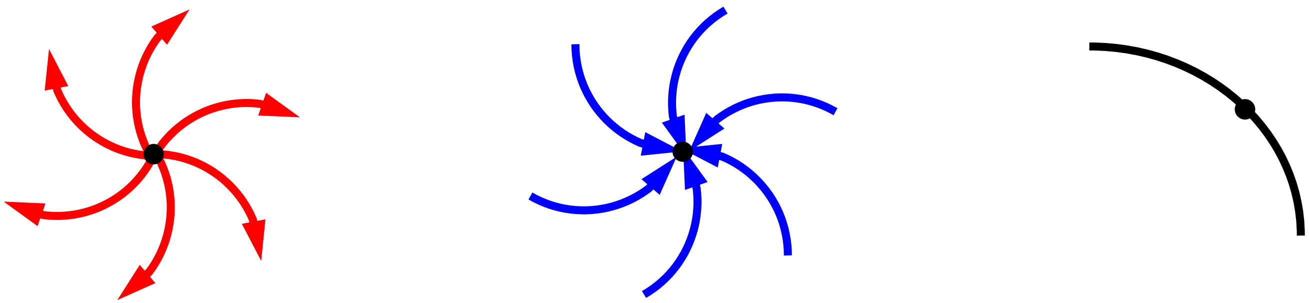
二、矢量场的散度(divergence)

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

散度小结:

1. 矢量场的散度是一个标量，它是描述矢量场中任一点发散性质的量;

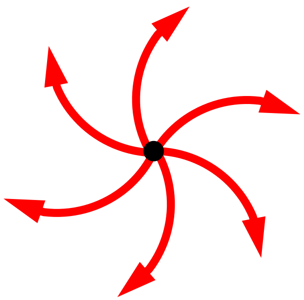
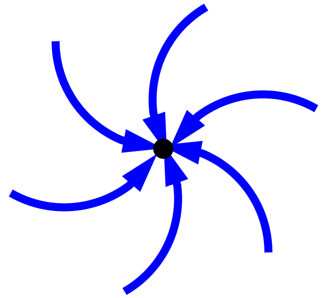
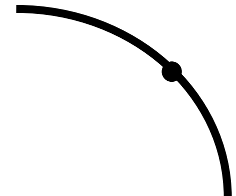
2. 散度代表矢量场的通量源的分布特性:



$\nabla\cdot\vec{A}=\rho>0$ **(正源)** $\nabla\cdot\vec{A}=-\rho<0$ **(负源)** $\nabla\cdot\vec{A}=0$ **(无源)**

二、矢量场的散度(divergence)

散度小结:

$\nabla \cdot \vec{A} = \rho > 0$ **(正源)**　$\nabla \cdot \vec{A} = -\rho < 0$ **(负源)**　$\nabla \cdot \vec{A} = 0$ **(无源)**

3. 在矢量场中，若 $\nabla \cdot \vec{A} = \rho \neq 0$ **，称之为有源场，**

ρ **称为(通量)源密度；**

4. 若场中处处 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ **，称之为无源场。**

本 节 要 点

- 本节的研究目的

寻找能够度量和刻画矢量场变化情况的量

——散度（分析矢量场的工具之一）

散度是描述矢量场中任一点发散性质的量