第二章

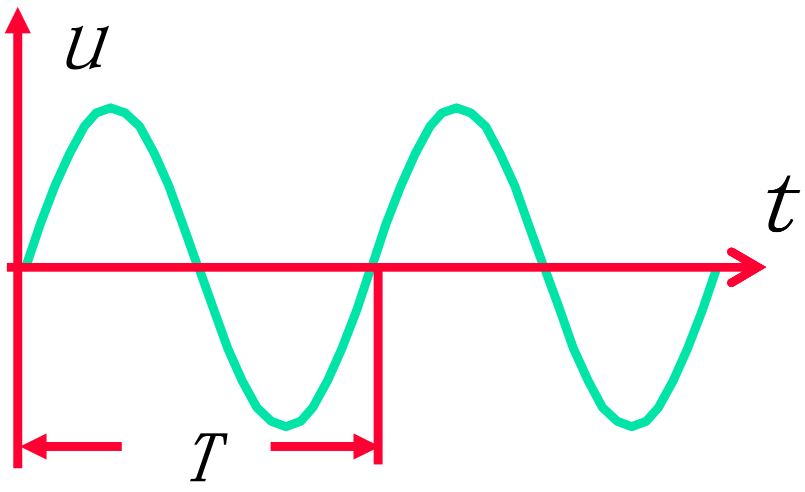
正弦交流电路

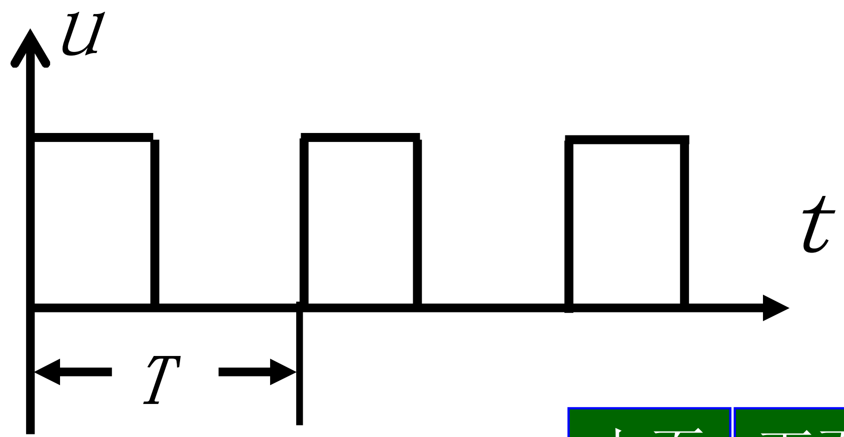
第三章 正弦交流电路

§3.1 概述

交流电的概念

如果电流或电压每经过一定时间（T）就重复变化一次，则此种电流、电压称为周期性交流电流或电压。如正弦波、方波、三角波、锯齿波等。记作：$u(t) = u(t+T)$





正弦交流电路

如果在电路中电动势的大小与方向均随时间按正弦规律变化，由此产生的电流、电压也是按正弦规律变化的，这样的电路称为正弦交流电路。

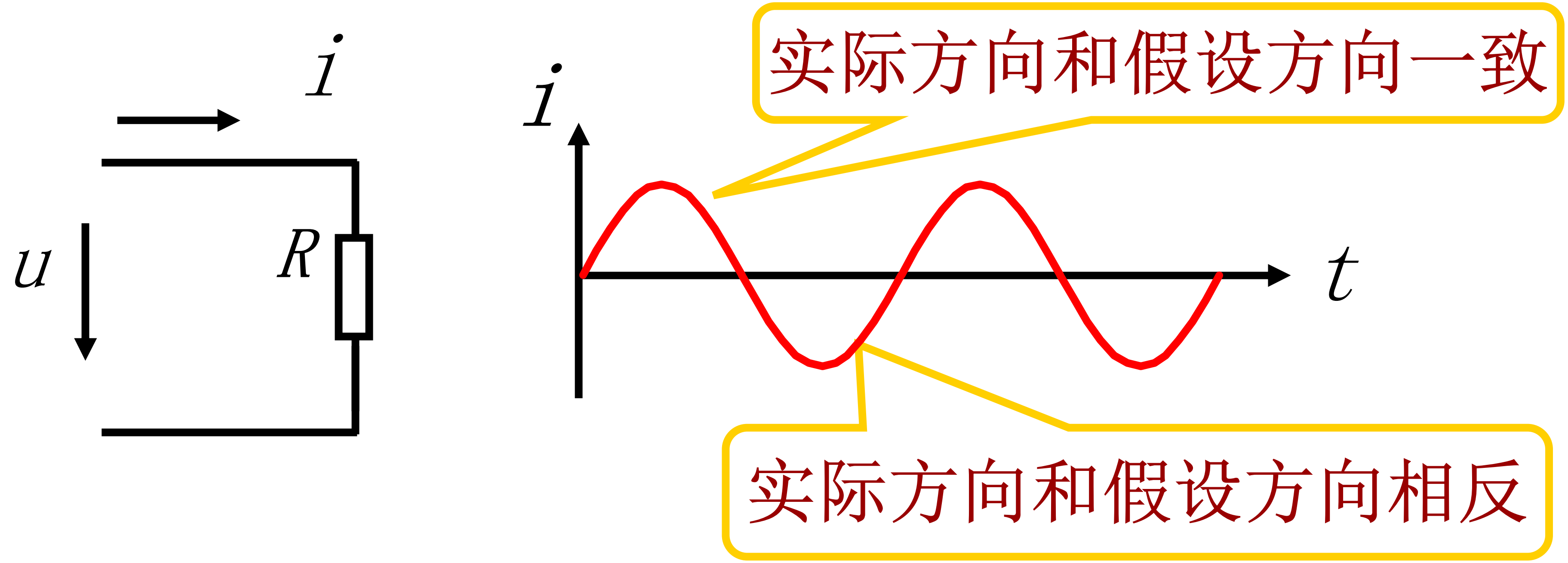
正弦交流电的优越性：

- 便于传输；
- 便于运算；
- 有利于电器设备的运行；

. . . . .

正弦交流电的方向

正弦交流电也有正方向，一般按正半周的方向假设。



交流电路进行计算时，首先也要规定物理量的正方向，然后才能用数字表达式来描述。

§3.2 正弦波的数学描述

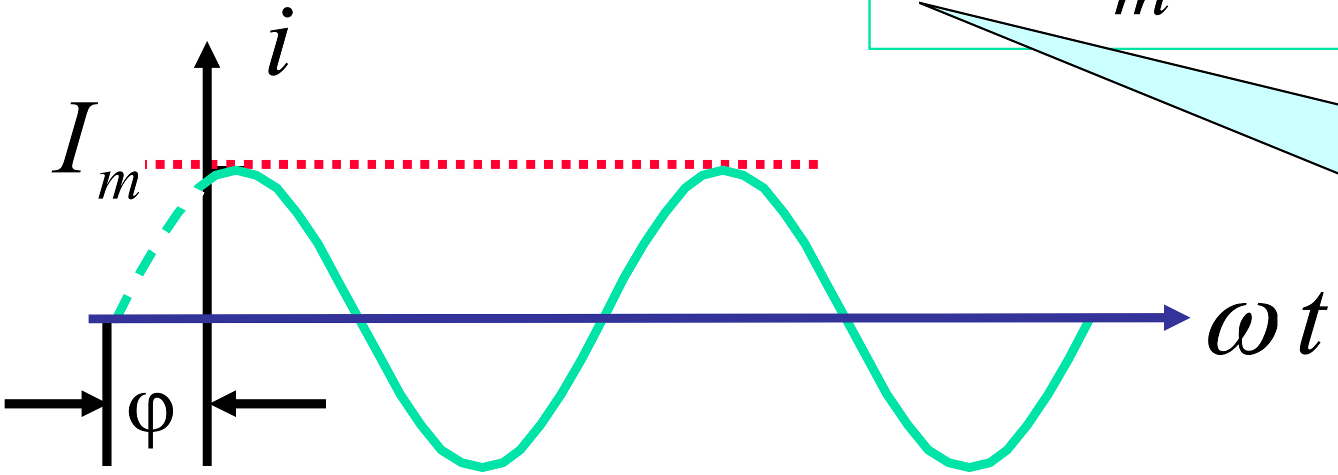
3.2.1 正弦波的特征量

3.2.2 正弦波的相量表示方法

3.2.1 正弦波的特征量（三要素）

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

瞬时值电量
必须小写
如：u、i



特征量:

I_m ： 电流幅值（最大值）

ω ： 角频率（弧度/秒）

φ ： 初相角

上页 下页

正弦波特征量之一 —— 幅值

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

I_m 为正弦电流的最大值

最大值

电量名称必须大写，下标加 m。
如：U_m、I_m

在工程应用中常用有效值表示正弦电流、电压和电动势的大小。常用交流电表指示的电压、电流读数，就是被测物理量的有效值。标准电压220 V，也是指供电电压的有效值。

有效值概念

热效应相当

$$\underbrace{\int_0^T i^2 R\,dt}_{交流} = \underbrace{I^2 RT}_{直流}$$

有效值

电量必须大写

如：U、I

则有

$$\boxed{I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}}$$

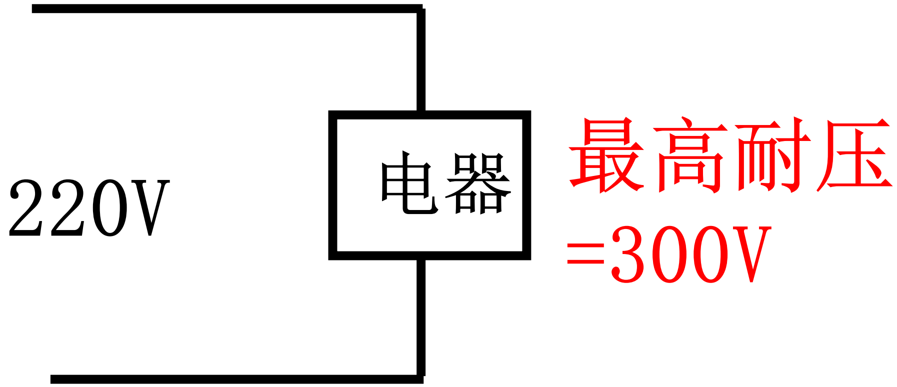
（方均根值）

当 $i = I_m \sin(\omega t + \phi)$ 时，　可得

$$\boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

问题与讨论

若购得一台耐压为 300V 的电器，是否可用于 220V 的线路上?

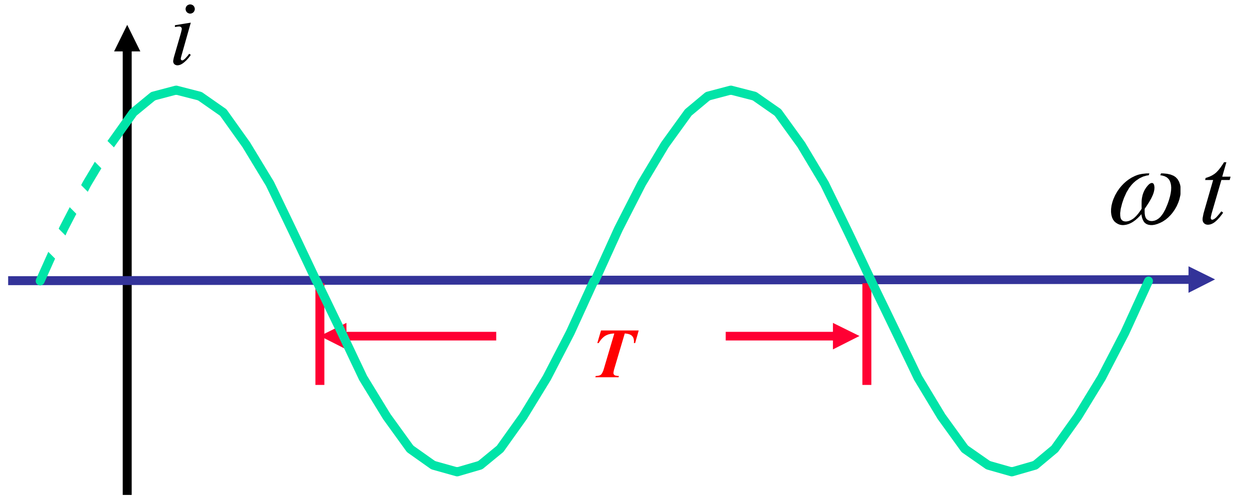


$$\text{电源电压}\begin{cases}\text{有效值}\quad U = 220\text{V} \\ \text{最大值}\quad U_m = \sqrt{2}\cdot 220\text{V} = 311\text{V}\end{cases}$$

该用电器最高耐压低于电源电压的最大值，所以不能用。

上页 下页

正弦波特征量之二 —— 角频率



描述变化周期的几种方法：

1. 周期 T： 变化一周所需的时间 单位：秒，毫秒..
2. 频率 f： 每秒变化的次数 单位：赫兹，千赫兹 ...
3. 角频率 ω： 每秒变化的弧度 单位：弧度/秒

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

小常识

＊ 电网频率：　中国　50 Hz

美国 、日本　60 Hz

＊ 有线通讯频率：300 － 5000 Hz

＊ 无线通讯频率：　30 kHz － 3×10^{4} MHz

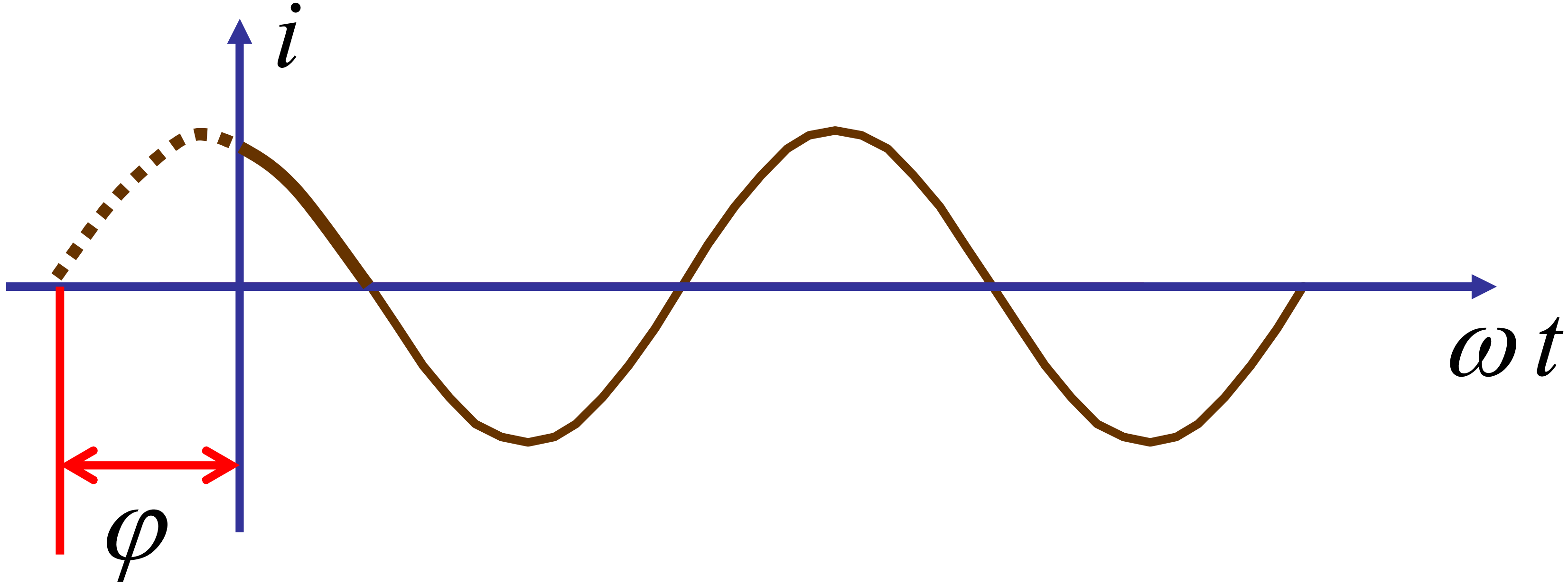
上页 下页

正弦波特征量之三 —— 初相位

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi)$$

$(\omega t + \varphi)$：正弦波的相位角或相位。

φ ： $t = 0$ 时的相位，称为初相位或初相角。

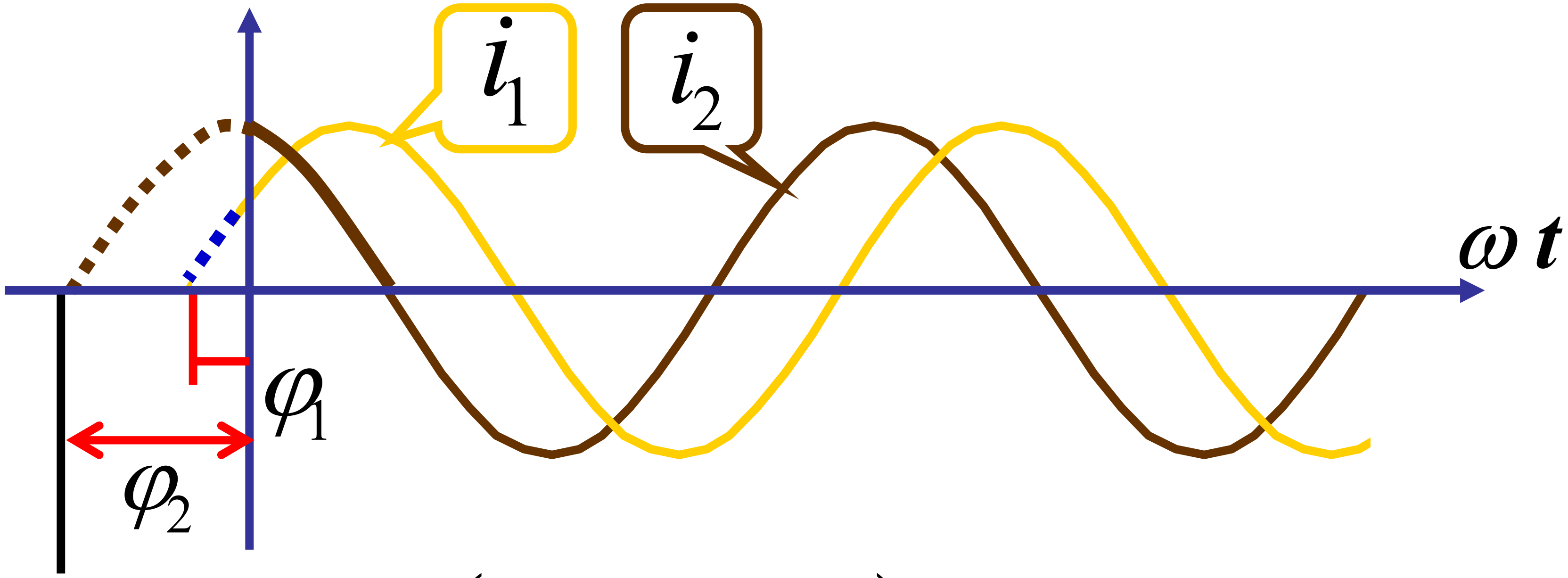


说明： φ 给出了观察正弦波的起点或参考点，

常用于描述多个正弦波相互间的关系。

上页 下页

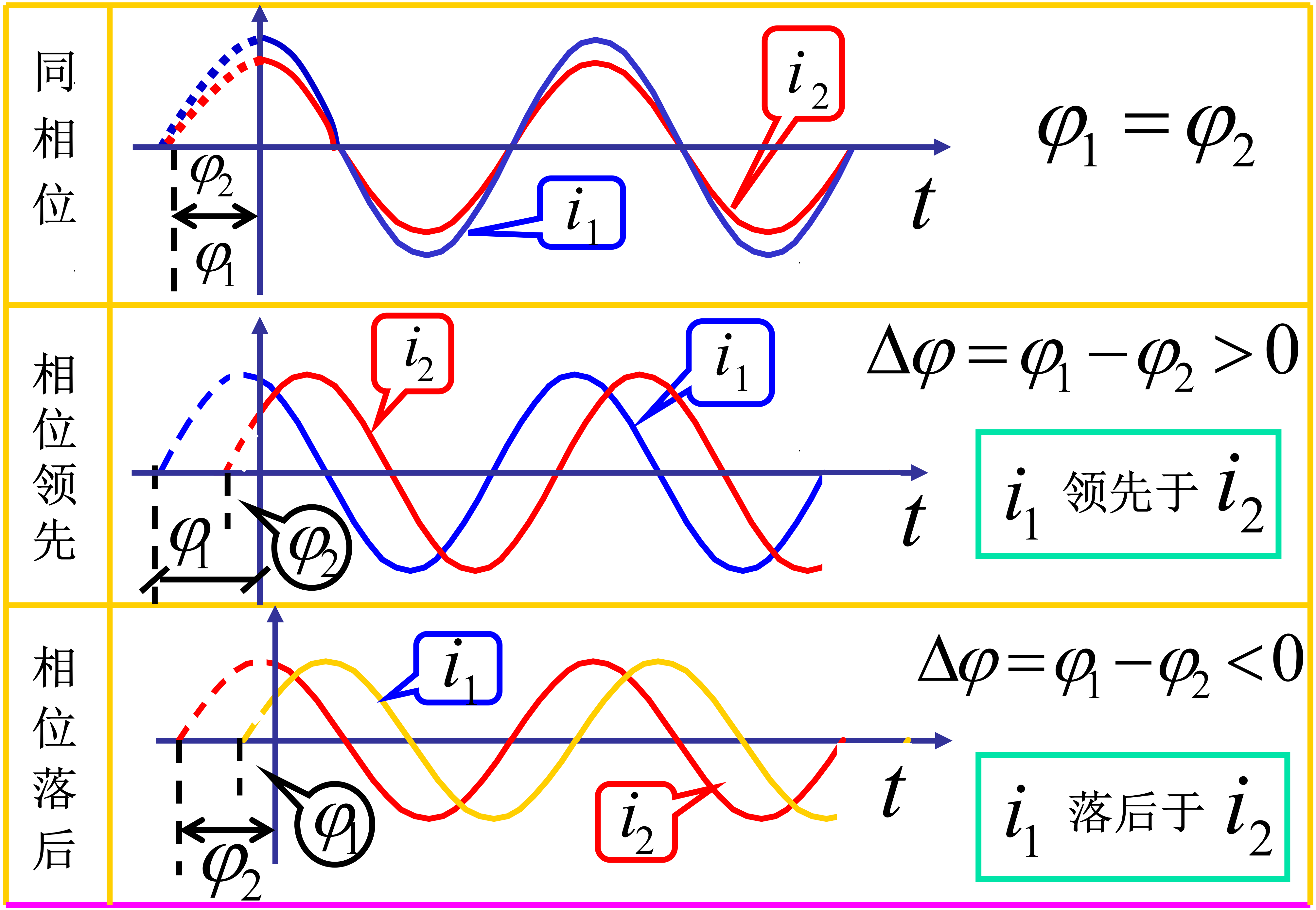
两个同频率正弦量间的相位差（初相差）



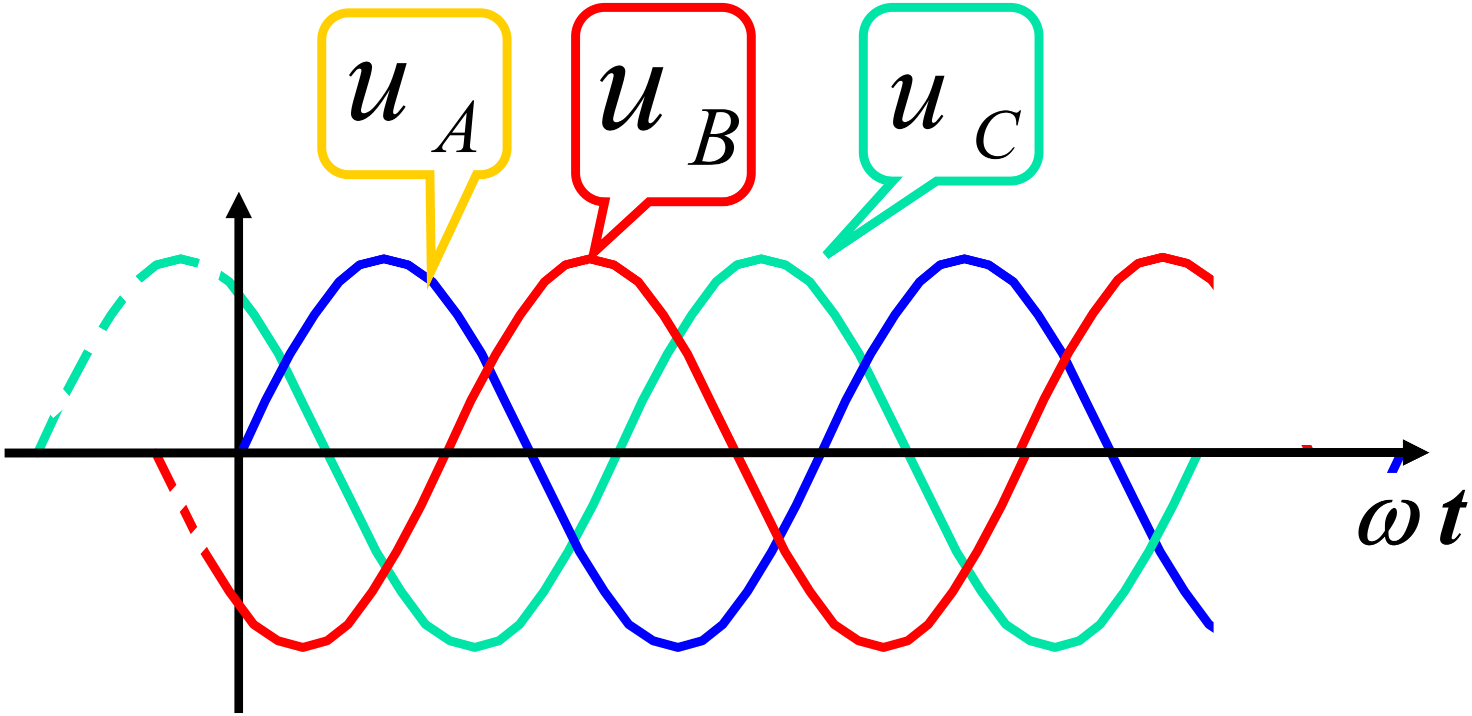
$$\begin{cases} i_1 = I_{m1}\sin(\omega t+\varphi_1) \\ i_2 = I_{m2}\sin(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi=(\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)=\varphi_2-\varphi_1}$$

两种正弦信号的相位关系



三相交流电路：三种电压初相位各差120°。



上页 下页

可以证明同频率正弦波运算后，频率不变。

如：
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ u_2 = \sqrt{2}U_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \sqrt{2}U_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \\ &= \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

幅度、相位变化
频率不变

结论：

因角频率（ω）不变，所以以下讨论同频率正弦波时，ω 可不考虑，主要研究幅值与初相位的变化。

例

已知： $i = \sin(1000t + 30°)$

幅值： $I_m = 1\text{A}$ $\quad I = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707\text{A}$

频率： $\omega = 1000 \ \text{rad/s}$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1000}{2\pi} = 159 \ \text{Hz}$$

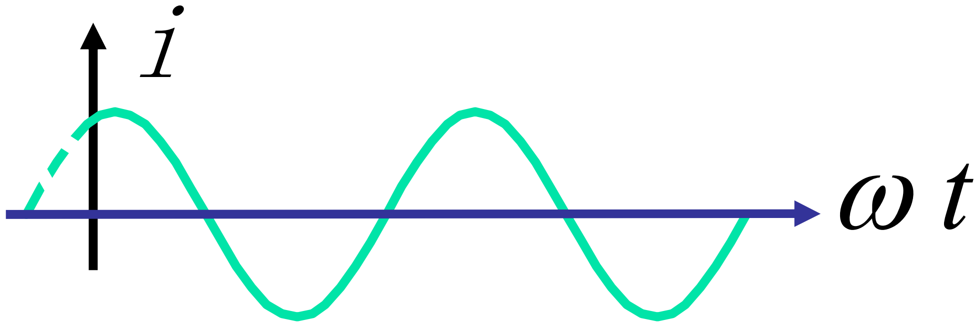
初相位： $\varphi = 30°$

上页 下页

3.2.2 正弦波的相量表示方法

正弦波的表示方法：

- 波形图



- 瞬时值表达式 $i = \sin(1000t + 30°)$

必须小写

- <u>相量</u>

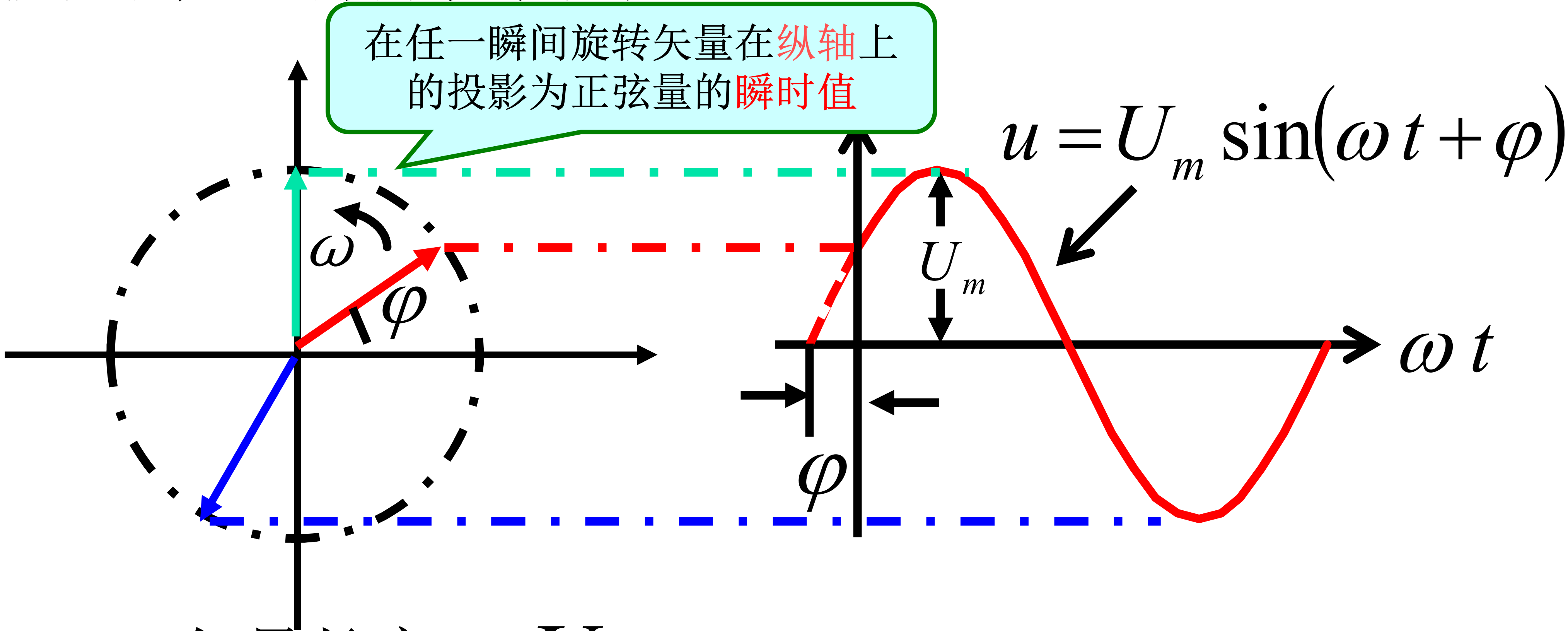
重点

前两种不便于运算，重点介绍相量表示法。

上页 下页

正弦波的相量表示法

概念 ：一个正弦量的瞬时值可以用一个旋转的有向线段在纵轴上的投影值来表示。

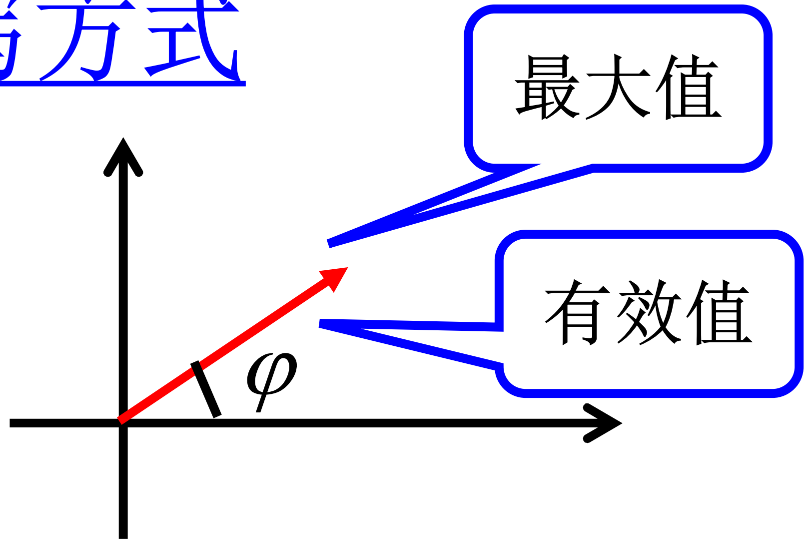


矢量长度 $= U_m$

矢量与横轴夹角 = 初相位 φ

矢量以角速度 ω 按逆时针方向旋转

相量的书写方式



$\boxed{\dot{U}_m}$

$\boxed{\dot{U}}$

1．描述正弦量的有向线段称为相量（phasor）。若其幅度用最大值表示，则用符号：$\boxed{\dot{U}_m、\dot{I}_m}$

2．在实际应用中，幅度更多采用有效值，则用符号：$\boxed{\dot{U}、\dot{I}}$

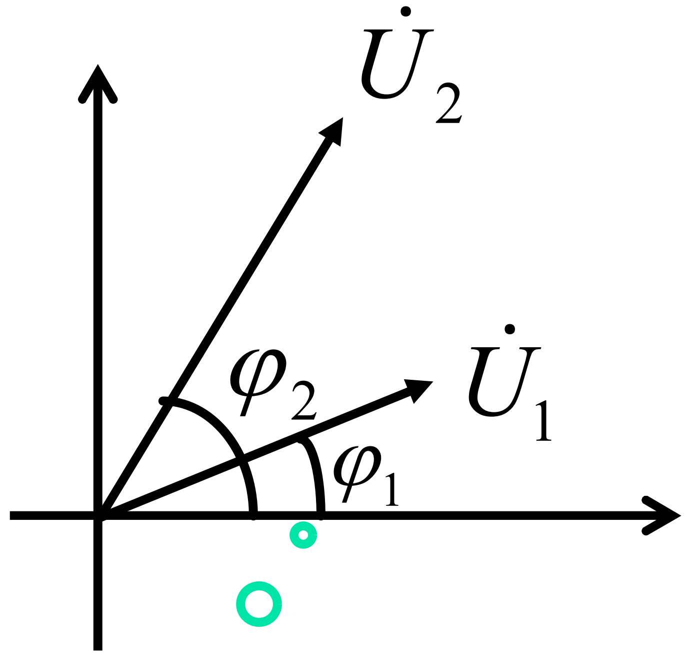
3．相量符号 $\dot{U}、\dot{I}$ 包含幅度与相位信息。

正弦波的相量表示法举例

例1：将 u_1、 u_2 用相量表示。

$$u_1 = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2 = \sqrt{2}U_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$



设：
- 幅度：相量大小 $U_2 > U_1$
- 相位： $\varphi_2 > \varphi_1$

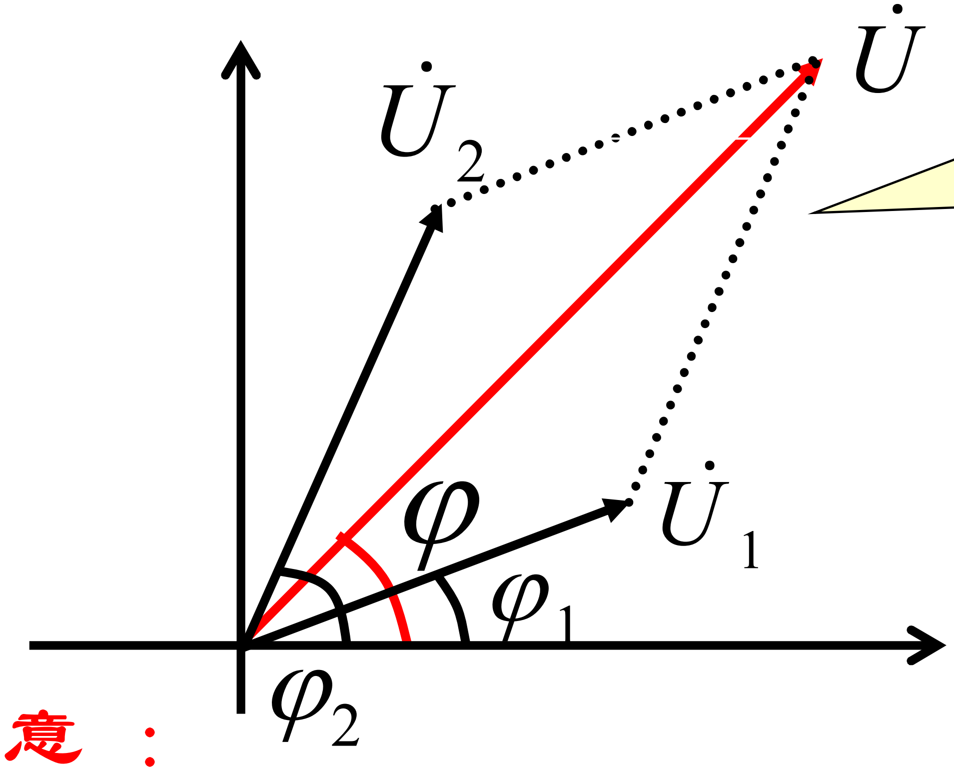
$\dot{U}_2$ 领先/落后 $\dot{U}_1$?

$\boxed{\dot{U}_1 \text{ 落后于 } \dot{U}_2}$

上页 下页

例2：同频率正弦波相加 -- 平行四边形法则

$$u_1 = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \qquad u_2 = \sqrt{2}U_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$



同频率正弦波的相量画在一起，构成相量图。

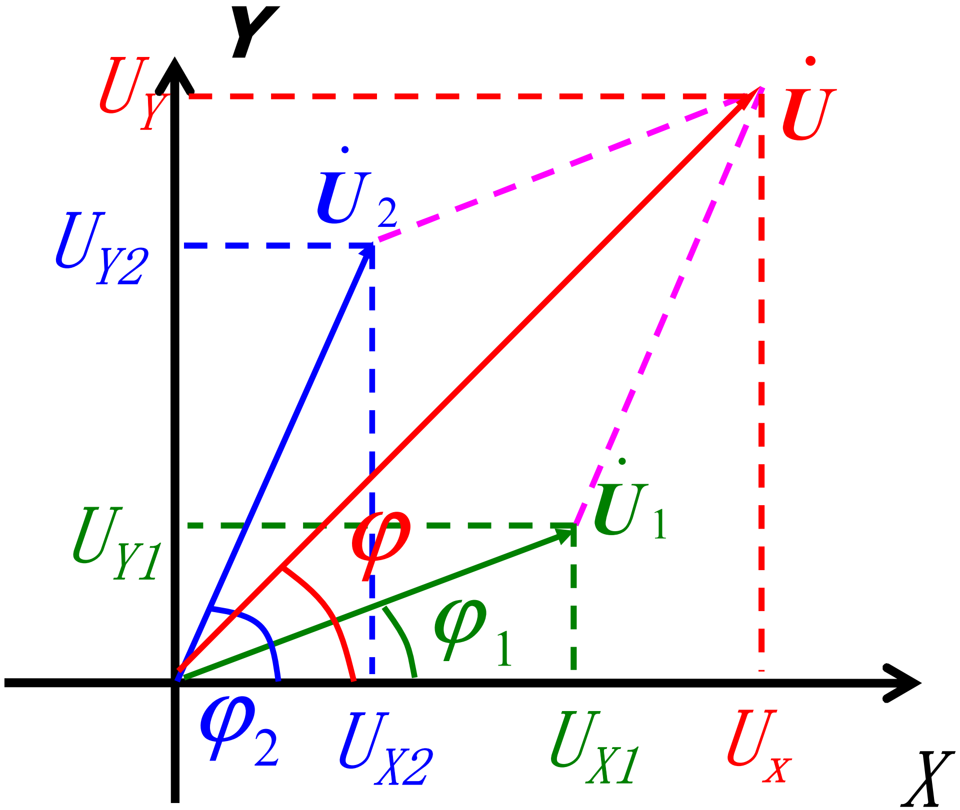
$$\boxed{\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2}$$

注意：

1. 只有正弦量才能用相量表示，非正弦量不可以。
2. 只有同频率的正弦量才能画在一张相量图上，不同频率不行。

上页 下页

平行四边形法则



$$U_{X1} = U_1 \cos\varphi_1$$

$$U_{Y1} = U_1 \sin\varphi_1$$

$$U_{X2} = U_2 \cos\varphi_2$$

$$U_{Y2} = U_2 \sin\varphi_2$$

$$U_X = U_{X1} + U_{X2}$$

$$U_Y = U_{Y1} + U_{Y2}$$

$$U = \sqrt{U_X{}^2 + U_Y{}^2} = \sqrt{(U_{X1}+U_{X2})^2 + (U_{Y1}+U_{Y2})^2}$$

有效值

初相位

$$\varphi = arctg\frac{U_Y}{U_X} = arctg\frac{U_{Y1}+U_{Y2}}{U_{X1}+U_{X2}}$$

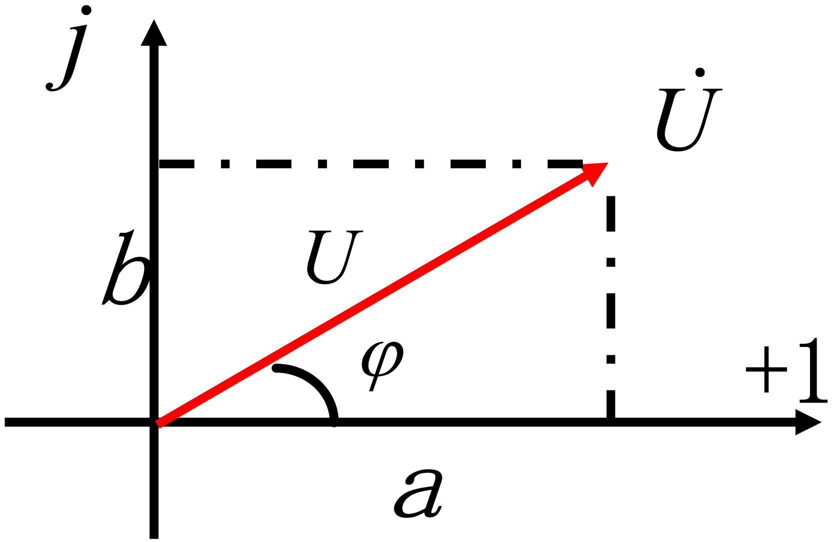
新问题提出：

平行四边形法则可以用于相量运算，但不方便。

故引入相量的复数运算法。

相量的复数表示

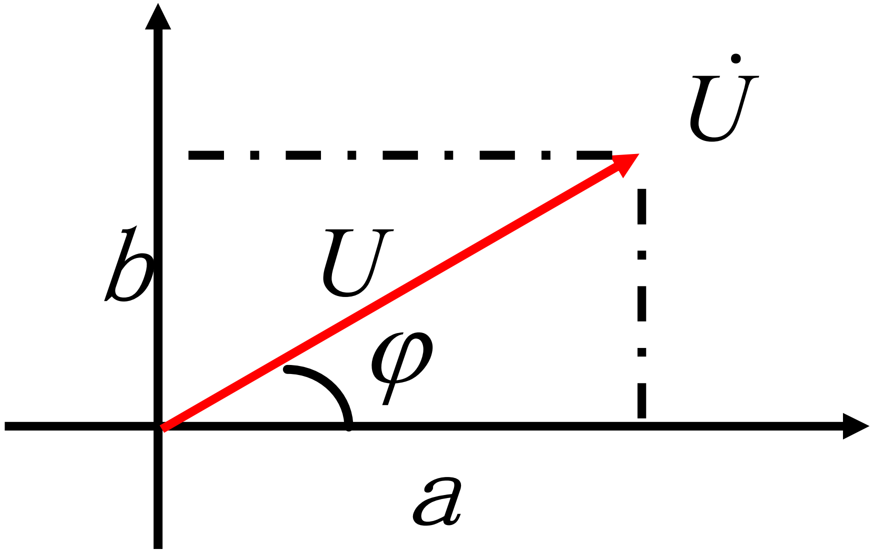
将复数 $\dot{U}$ 放到复平面上，可如下表示：



$$U = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = tg^{-1}\frac{b}{a}$$

$$\dot{U} = a + jb = U\cos\varphi + jU\sin\varphi$$



欧拉公式

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{U} &= a + jb \\ &= U(\cos\varphi + j\sin\varphi) \end{aligned}\right\}$$ 代数式

$= Ue^{j\varphi}$ ------ 指数式

$= U\angle\varphi$ ------ 极坐标形式

设a、b为正实数

$\dot{U} = a + jb = U e^{j\varphi} \Longrightarrow \varphi$ 在第一象限

$\dot{U} = -a + jb = U e^{j\varphi} \Longrightarrow \varphi$ 在第二象限

$\dot{U} = -a - jb = U e^{j\varphi} \Longrightarrow \varphi$ 在第三象限

$\dot{U} = a - jb = U e^{j\varphi} \Longrightarrow \varphi$ 在第四象限

相量的复数运算

1. 加 、减运算

设：$$\begin{cases} \dot{U}_1 = a_1 + jb_1 \\ \dot{U}_2 = a_2 + jb_2 \end{cases}$$

则：

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \pm \dot{U}_2$$

$$= (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

$$= Ue^{j\varphi}$$

2. 乘法运算

设：$\begin{cases} \dot{U}_1 = U_1 e^{j\varphi_1} \\ \dot{U}_2 = U_2 e^{j\varphi_2} \end{cases}$

则：
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 \cdot \dot{U}_2 \\ &= U_1 \cdot U_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}}$$

说明：

设：任一相量 $\dot{A}$

则：$\dot{A} \times e^{\pm j90^\circ} = (\pm j)\dot{A}$

90°旋转因子。+j逆时针转90°，-j顺时针转90°

上页 下页

3. 除法运算

设：$\begin{cases} \dot{U}_1 = U_1 e^{j\varphi_1} \\ \dot{U}_2 = U_2 e^{j\varphi_2} \end{cases}$

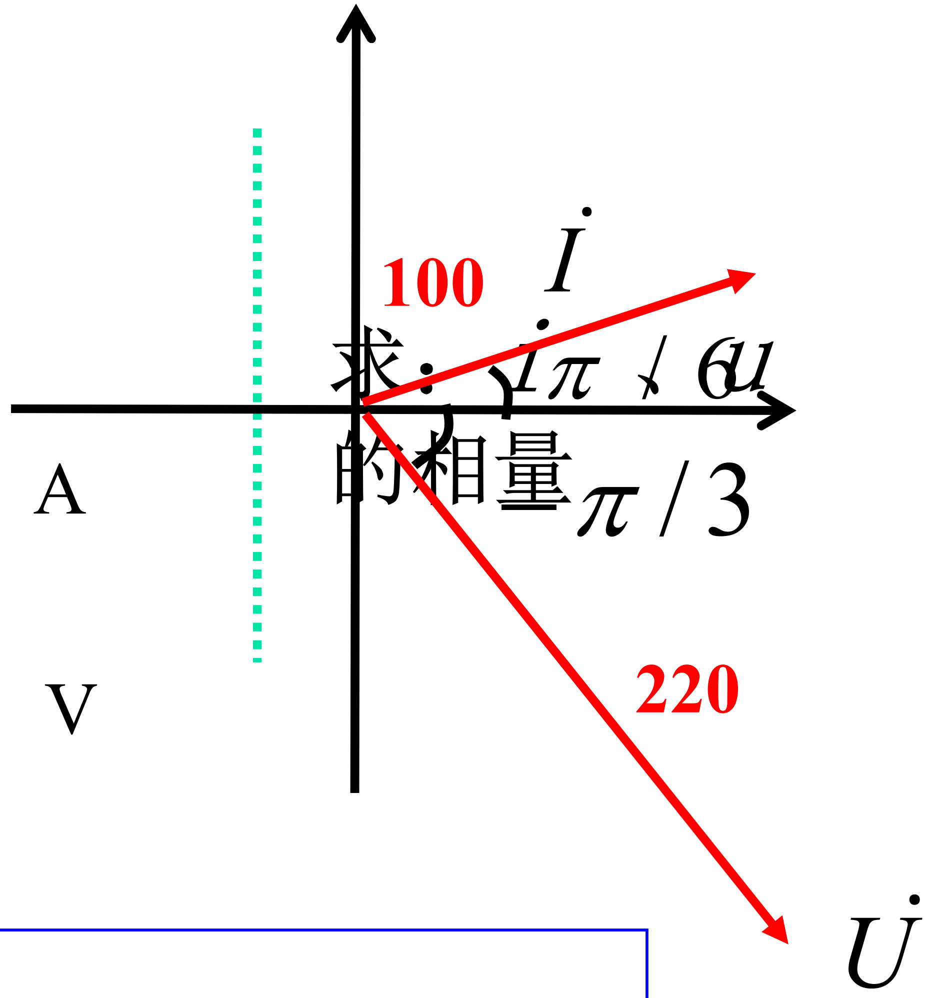
则：$$\boxed{\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{U_1}{U_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

复数表示法应用举例

例1：已知瞬时值，求相量。

已知：
$$\begin{cases} i = 141.4\sin\left(314t + \dfrac{\pi}{6}\right) \quad \text{A} \\ u = 311.1\sin\left(314t - \dfrac{\pi}{3}\right) \quad \text{V} \end{cases}$$

求：i, u 的相量



解：

$$\boxed{\dot{I} = \frac{141.4}{\sqrt{2}}\angle 30^\circ = 100\angle 30^\circ = 86.6 + j50 \quad \text{A}}$$

$$\boxed{\dot{U} = \frac{311.1}{\sqrt{2}}\angle -60^\circ = 220\angle -60^\circ = 110 - j190.5 \quad \text{V}}$$

上页 下页

例2：已知相量，求瞬时值。

已知两个频率都为 1000 Hz 的正弦电流其相量形式为：

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = 100\angle -60^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_2 = 10\,e^{j30^\circ} \text{ A} \end{cases}$$

求：i_1、i_2

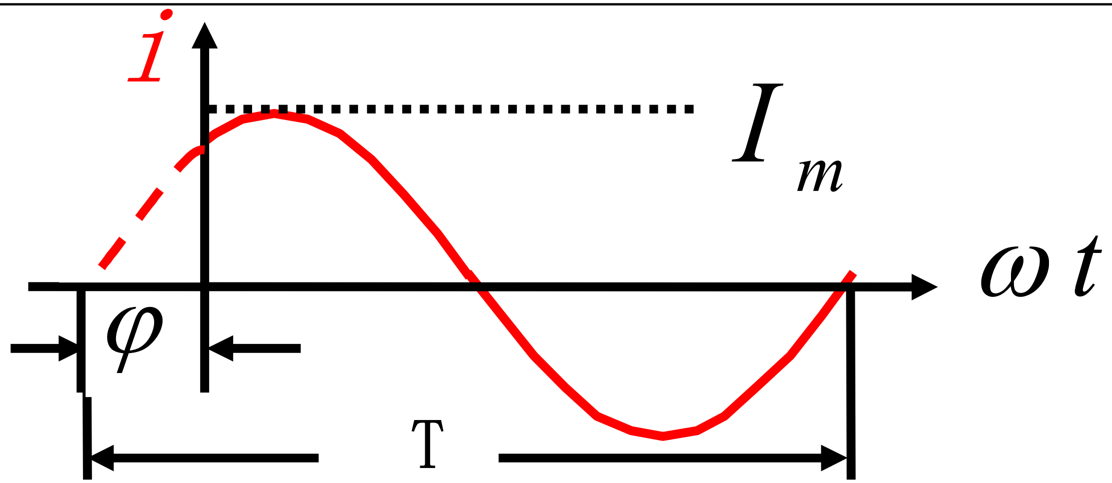
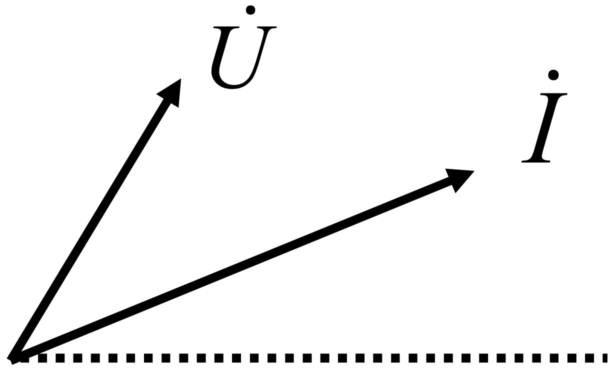
解：

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 1000 = 6280 \ {rad}/{s}$$

$$i_1 = 100\sqrt{2}\sin(6280t - 60^\circ) \text{ A}$$

$$i_2 = 10\sqrt{2}\sin(6280t + 30^\circ) \text{ A}$$

小结：正弦波的四种表示法

波形图	
瞬时值	$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$
相量图	
复数符号法	$\dot{U} = a + jb = Ue^{j\varphi} = U\angle\varphi$

上页 下页

提示 计算相量的相位角时，要注意所在象限。如：

$$\dot{U}=3+j4 \Longrightarrow u=5\sqrt{2}\sin(\omega t+53\cdot 1^{\circ})$$

$$\dot{U}=3-j4 \Longrightarrow u=5\sqrt{2}\sin(\omega t-53\cdot 1^{\circ})$$

$$\dot{U}=-3+j4 \Longrightarrow u=5\sqrt{2}\sin(\omega t+126\cdot 9^{\circ})$$

$$\dot{U}=-3-j4 \Longrightarrow u=5\sqrt{2}\sin(\omega t-126\cdot 9^{\circ})$$

符号说明

瞬时值 --- 小写 u、i

有效值 --- 大写 U、I

最大值 --- 大写+下标 U_m

复数、相量 --- 大写 + “.” $\dot{U}$

正误判断

$$u = 100\sin\omega t \cancel{=} \dot{U}$$

瞬时值

复数

正误判断

$$\dot{U}=50e^{j15^\circ} \cancel{=} 50\sqrt{2}\sin(\omega t+15^\circ)$$

复数

瞬时值

正误判断

已知： $$i = 10\sin(\omega t + 45^\circ)$$

$$\dot{I} \cancel{=} \frac{10}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ$$

有效值

$$\dot{I}_m \cancel{=} 10\, e^{45^\circ}$$

j45°

上页 下页

正误判断

已知： $u = \sqrt{2}\,10\sin(\omega t - 15^\circ)$

则： $U = 10$

-15°

$\dot{U} \cancel{=} 10\,e^{j15^\circ}$

上页 下页

正误判断

已知：$\dot{I} = 100\angle 50^\circ$

则：$i \cancel{=} 100\sin(\omega t + 50^\circ)$

最大值

$I_m = \sqrt{2} I = 100\sqrt{2}$

上页 下页