

T. D. n° 3

Tests de comparaisons

Exercice 1. Gaz nocif. D'après l'examen de Janvier 2006.

Dans l'atmosphère, le taux d'un gaz nocif, pour un volume donné, suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 . Nous effectuons n prélèvements conduisant aux valeurs x_1, \dots, x_n .

1. Nous savons que $\sigma^2 = 100$ et que sur $n = 10$ prélèvements, nous avons trouvé une valeur moyenne de 48.
 - a. Pouvons-nous conclure, avec un risque $\alpha = 5\%$, que l'espérance μ est inférieure à 50, qui est le seuil tolérable admis ?
 - b. Pouvons-nous donner cette conclusion au risque 1% et 10% ?
2. Nous ne connaissons pas la variance σ^2 de la population, mais nous avons effectué 200 prélèvements. Nous trouvons une moyenne empirique égale à 51 et une variance empirique corrigée égale à 100.
Pouvons-nous conclure, avec un risque $\alpha = 5\%$, que l'espérance μ est inférieure à 50, qui est le seuil tolérable admis ?

Exercice 2. Contrôle des teneurs en nitrates d'eaux de sources. D'après le livre de Dagnélie.

Nous avons observé les teneurs en nitrates suivantes, en ce qui concerne les eaux de 30 sources d'une région donnée (en milligrammes de NO_3 par litre). Ces données proviennent de Demarets, 1992. Les données sont présentées dans le tableau suivant :

37	21	0	19	1	5	0	13	1	20
34	19	17	74	28	34	61	15	35	55
28	10	69	48	63	8	18	34	18	90

Nous nous posons la question de savoir si, en moyenne, les teneurs en nitrates des eaux de sources de l'ensemble de la région considérée ne dépassent pas un seuil ou une norme de 25 mg/l, au risque $\alpha = 5\%$.

Exercice 3. D'après le livre « Mathématiques pour les Sciences de l'Ingénieur ».

Nous avons prélevé, au hasard, dans une population dont la variable qui nous intéresse suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ , un échantillon de taille $n = 30$. La moyenne et la variance calculées sur cet échantillon sont respectivement $\hat{\mu}_{30}(\text{obs}) = 4$ et $S_{30,c}^2(\text{obs}) = 6$.

1. Calculer une estimation sans biais de σ^2 sans faire d'hypothèse sur la valeur de μ .
2. Tester, au risque $\alpha = 5\%$, l'hypothèse $\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = 4$.
3. Calculer une estimation sans biais de μ sans faire d'hypothèse sur la valeur de σ^2 .
4. En admettant σ^2 égale à 4, tester, au risque $\alpha = 5\%$, l'hypothèse $\mathcal{H}_0 : \mu = 3$.
5. Tester, au risque $\alpha = 5\%$, l'hypothèse $\mathcal{H}_0 : \mu = 3$ sans faire d'hypothèse sur la valeur de σ^2 .

Exercice 4. Les poires. D'après l'examen de rattrapage Septembre 2011.

Nous nous intéressons à l'évolution de la masse des poires entre le début et la fin d'une récolte pour une même saison. Nous avons donc prélevé deux échantillons, le premier de 200 poires au début de la récolte et le second de 250 poires à la fin de la récolte. Dans le premier échantillon, la masse moyenne des poires est de 100 g alors que dans le second, elle est de 150 g. Les écarts-types corrigés observés sont respectivement de 30 g et 10 g. De plus, nous supposons que la masse des poires suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 .

La différence entre les masses moyennes des poires en début et en fin de récolte est-elle significative au risque $\alpha = 5\%$?

Exercice 5. Pisciculture. D'après l'examen de Janvier 2006.

Dans une pisciculture, l'effet de deux régimes alimentaires sur la croissance d'une espèce de poisson a été analysé. Pour se faire, la longueur de deux lots de poissons a été mesurée à l'issue de l'expérience. Les résultats obtenus sont les suivants :

Régime A	Régime B
$n_A = 180$	$n_B = 100$
$\sum x_A = 3780$	$\sum x_B = 2140$
$\sum x_A^2 = 80000$	$\sum x_B^2 = 46000$

Une différence de régime alimentaire affecte-t-elle significativement la croissance des poissons au risque $\alpha = 5\%$?

Exercice 6. Enseignement.

Nous souhaitons tester l'efficacité d'une formation dans un domaine donné. Pour cela, nous comparons deux échantillons de personnes du niveau de connaissance requis pour accéder à la formation. Le premier échantillon (1) est constitué de 220 personnes n'ayant pas subi la formation, le deuxième (2) de 210 personnes venant de la terminer. Chaque échantillon, que nous considérerons comme représentatif (au sens de la sélection quasi aléatoire) des populations avec ou sans formation, est soumis au même test. Les notes moyennes respectives obtenues sont 13,4 et 14,6. Les notes montrent, respectivement aussi, des écarts-types corrigés de 2,98 et 2,64.

Poser et tester, au risque $\alpha = 5\%$, l'hypothèse nulle \mathcal{H}_0 à l'aide de ces résultats.