Zadanie domowe 1

Należy znaleźć funkcję $u\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ spełniającą równanie różniczkowe

$$-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + cu(x,y) = f(x,y),$$

w którym występuje dana funkcja ciągła $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ i taką, która na brzegu kwadratu $[0,1]^2$ ma wartość 0. Stała $c \geqslant 0$. Dla $c = 0$ jest to tzw. równanie Poissona.

To zadanie jest dobrze postawione, tj. ma jednoznaczne rozwiązanie, które zależy od funkcji f w sposób ciągły. Nie za się go w ogólności rozwiązać metodami algebry, ale metody numeryczne umożliwiają znalezienie przybliżenia rozwiązania z dużą dokładnością.

Dyskretyzacja równania polega na założeniu, że funkcja u_h, tj. poszukiwane przybliżenie rozwiązania, ma szczególną postać, zależną od skończenie wielu zmiennych, i na ułożeniu układu równań, którego rozwiązaniem jest wektor tych zmiennych.

W metodzie różnic w kwadracie $[0,1]$ wprowadzimy regularną siatkę punktów. Wybieramy liczbę naturalną $N > 1$ i określamy punkty (x_i, y_j), gdzie $x_i = i/N$, $y_j = j/N$ dla $i, j = 0, \ldots, N$. Jeśli zatem i lub j jest równe 0 lub N, to punkt (x_i, y_j) leży na brzegu kwadratu.

Oznaczamy $h = 1/N$, zatem $x_i = ih$, $y_j = jh$. Poszukiwana funkcja u_h jest określona tylko w punktach (x_i, y_j): jej wartości w tych punktach oznaczamy u_{ij}. Dla punktu wewnątrz kwadratu $[0,1]$ sumę pochodnych drugiego rzędu funkcji u zastąpimy wyrażeniem

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}).$$

W ten sposób otrzymamy układ $(N-1)^2$ równań liniowych

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}) + cu_{ij} = f_{ij}.$$

w których $f_{ij} = f(u_i, y_j)$.

Macierz tego układu składa się z $(N-1)^2$ bloków o wymiarach $(N-1) \times (N-1)$, przy czym ma ona strukturę blokowo-trójdiagonalną:

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T & -I & 0 & \cdots & 0 \\ -I & T & -I & \ddots & 0 \\ 0 & -I & T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & \cdots & 0 & -I & T \end{bmatrix}.$$

Każdy blok I jest macierzą jednostkową $(N-1) \times (N-1)$. Blok T jest macierzą trójdiagonalną:

$$T = \begin{bmatrix} b & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & b & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & b \end{bmatrix},$$

gdzie $b = 4 + h^2c$. Macierz A jest symetryczna i dodatnio określona, a więc jest nieosobliwa, choć jej wskaźnik uwarunkowania jest proporcjonalny do $1/h^2$, czyli dla dużych N jest bardzo duży.

Macierz A jest zatem rzadka: w żadnym wierszu nie ma ona więcej niż 5 współczynników różnych od zera. Dla N rzędu kilkadziesiąt lub więcej nie należy jej reprezentować za pomocą pełnej tablicy współczynników. Są dwie sensowne alternatywy: można użyć reprezentacji w postaci wykazu niezerowych współczynników, jaką w pakiecie Matlab albo Octave tworzy funkcja `sparse`, albo można napisać funkcję (skrypt Octave'a), która dla dowolnego wektora $x \in \mathbb{R}^{(N-1)^2}$ obliczy iloczyn Ax, generując potrzebne współczynniki „w locie”.

Pewne metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych wymagają mnożenia macierzy układu przez kolejne wektory, aby wytworzyć ciąg zbieżny do rozwiązania układu. Takie są metody Richardsona i sprzężonych gradientów. Inne metody, np. Jacobiego lub Gaussa–Seidela, wymagają mnożenia wektora przez macierze otrzymane z rozłożenia macierzy A na składniki i rozwiązywania równań z macierzami będącymi tymi składnikami — według opisu na wykładzie.

Rozwiązanie zadania polega na napisaniu i uruchomieniu skryptu (lub zestawu skryptów) pakietu Octave, który znajduje opisanym wyżej sposobem tablicę wartości funkcji u_h, przy użyciu jednej z metod iteracyjnych rozwiązywania układów równań liniowych (polecam metodę sprzężonych gradientów). Liczba N ma być parametrem do wyboru.
Za funkcję f można przyjąć funkcję stałą lub wielomian niskiego stopnia zmiennych x, y, np. $f(x, y) = x$ itp. W kolejnych iteracjach trzeba wypisywać normę wektora residuum, $\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k$, gdzie $\mathbf{b}$ jest wektorem prawej strony (jego współrzędne są wartościami funkcji f), a $\mathbf{x}_k$ jest kolejnym przybliżeniem rozwiązania (wektora wartości funkcji u_h).
Wisienką na torcie może być wykonanie wykresu rozwiązania, przy użyciu funkcji `mesh` lub `surf`.

Wersja dla osób ambitnych: *preconditioning*, tj. zamiana układu równań na równoważny układ z macierzą o mniejszym wskaźniku uwarunkowania, przez ściskanie widma. Za macierz ściskającą S (oznaczenie zgodne z wykładem) można przyjąć macierz blokowo-diagonalną z blokami T (czyli macierz trójdiagonalną; układ równań z taką macierzą można szybko, tj. kosztem rzędu N^2, rozwiązać metodą eliminacji Gaussa). Warto zbadać, jaki wpływ na szybkość zbieżności metody CG ma użycie takiej macierzy.