Movimiento de Proyectiles (con Resistencia del Aire)

Eduardo Castillo Bastida

October 27, 2017

Para el estudio de proyectiles con resistencia del aire(figura 1), consideremos un proyectil de masa m, lanzado a un tiempo $t_0 = 0$ al nivel de la superficie terrestre con un ángulo θ y una velocidad inicial v_0. Adicional a la fuerza por la gravedad, se considera la presencia de una fuerza por la resistencia del aire, opuesta a la dirección del movimiento, proporcional a la velocidad instantánea.

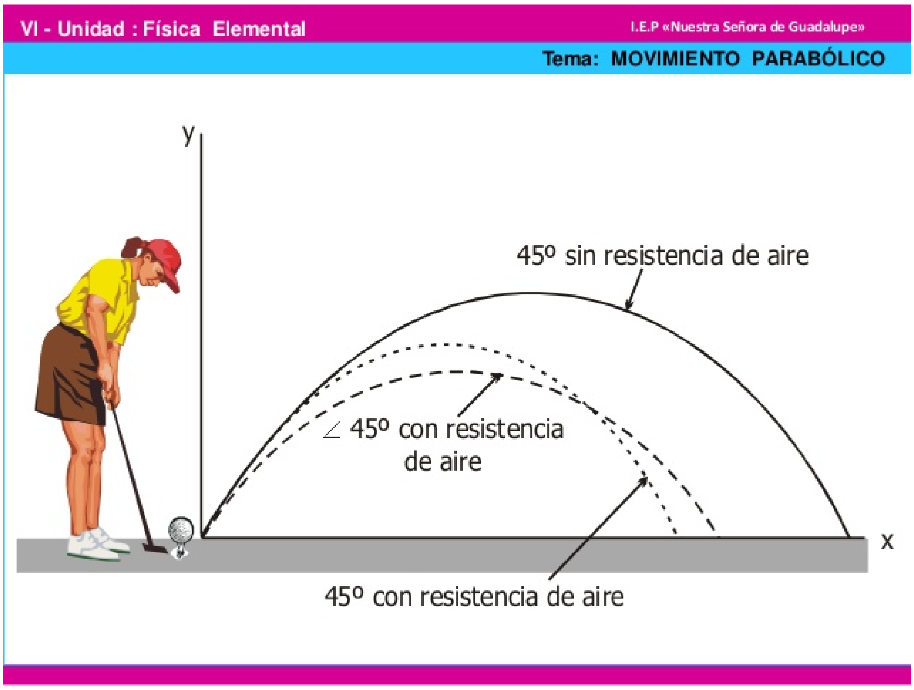

Figure 1: Trayectoria de un proyectil con y sin resistencia del aire.

Considerandoque el movimiento se realiza completamente en el plano x-y, la ecuación del movimiento, viene dada por la siguiente ecuación:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv \tag{1}$$

En donde $v = (v_x, v_y)$ es la velocidad del proyectil, $g = (0, -g)$ es la aceleración gravitacional tomada como un vector en direccion de $-y$ y c es una constante positiva. Mientras tanto las ecuaciones que describen el movimiento por componentes, estan dadas por:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -cv_x$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - cv_y \tag{2}$$

Las ecuaciones anteriores, pueden resolverse con el método de integración de Euler. Este método consiste en solucionar una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, através de un procedimiento numérico de primer orden, partiendo de valores iniciales. En general, si se conoce el valor de una funcion $y(t)$, para un t_0 dado, el siguiente valor de la función para $t_0 + h$, tomando un h lo sufientemente pequeño, puede determinarse, empleando una expansión de Taylor alrededor de t_0, como sigue:

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_0) + O(h^3) \tag{3}$$

Despreciando los terminos cuadráticos y mayores de h, obtenemos:

$$y'(t_0) \simeq \frac{f(t_0) - f(t_0 + h)}{h} \tag{4}$$

Tomando $y'(t_0) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ y $t_n = t_0 + nh$, el siguiente paso de t_n a t_{n+1}, para $y(t)$según el método de Euler, corresponde a:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \tag{5}$$

1 Aplicación del Método de Euler

1.1 Componente Horizontal de la Velocidad

Considerando la ecuación diferencial de la componente horizontal de la velocidad, tenemos:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{c}{m}v_x = f(t, v_x(t)) \tag{6}$$

Según el método de Euler el valor de $v_x(t_{n+1})$ a partir de t_n, corresponde a:

$$\begin{aligned} v_x(t_{n+1})) &= v_x(t_n) - \frac{\delta t}{m}cv_x(t_n) \\ v_x(t_{n+1})) &= v_x(t_n)[1 - \frac{\delta t}{m}c] \end{aligned} \tag{7}$$

Donde $h = \delta t$. La componente x de la posición se determinar a partir de:

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \simeq \frac{x_{n+1} - x_n}{\delta t} \tag{8}$$

Luego:

$$x_{n+1} = x_n + \delta t v_x(t_n) \tag{9}$$

1.2 Componente Vertical de la Velocidad

Similarmente al proceso realizado para v_x, tenemos:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{c}{m}v_y = f(t, v_y(t)) \tag{10}$$

$$v_y(t_{n+1})) = v_y(t_n)[1 - \frac{\delta t}{m}c] - g\delta t \tag{11}$$

$$y_{n+1} = y_n + \delta t v_y(t_n) - g\delta t \tag{12}$$

2 Aplicación Fortran para la Trayectoria de un Proyectil con Resistencia del Aire usando el Método de Euler

El código de la aplicación fortran para determinar las trayectorias de un proyectil esférico con resistencia del aire y velocidades v_0 entre 2 y 10 m/s, con valores iniciales $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ y $x_0 = 0$, usando el método de integración de Euler. El código Fortran corresponde a:

```
   !     A continuacion la nomenclatura para llevar a cabo el programa
   !     m= masa del proyectil                                                    *
   !     r= radio del proyectil                                                   *
   !     v0= velocidad de lanzamiento
   !     vt= velocidad terminal
   !     cd= coeficiente de arrastre
   !     rho_a=  densidad de aire
   !     a= ángulo de lazamiento en grados                                        *
   !     dt= incremento del tiempo
   !     g= aceleración gravitacional



   !program Resistans
  use parametros
  implicit none
  real :: vt,v0,m,r

  ! Leer valores para la velocidad inicial desde la terminal

  print*, 'Movimiento parabolico con resistencia de aire'
  print*, 'con trayectoria a funcion del angulo'
  write(*,*) 'Por Favor: introduzca los valores de  la velocidad inicial (v) en m/s'
  read(*,*)   v0
  write(*,*) 'Introduzca la masa del proyectil en kg'
  read(*,*)   m
  write(*,*) 'Introduzca el radio del proyectil en metros'
  read(*,*)   r
  call v_terminal(vt)
  call friccion(vt, v0, fy, fx, x, a,  y, t)

end program Resistencia
 module parametros
   implicit none

   !Calcularemos la velocidad terminal usando estas variables
   !
   !     h -------------- incremento del tiempo
   !     rho_a ----------Densidad del aire kg/m**3
   !     size -----------Tamaño del array
   !     g --------------Aceleración gravitacional
   !     C --------------Constante de arrastre
```

```
  !definimos parametros y variables
  real, parameter :: g = 9.81, pi = 3.1415927, rho_a=1.128, C=0.45, h=0.01
  integer:: size = 100

end module parametros

*********************************************
  subroutine v_terminal(vt)
  use parametros
  implicit none
  real, intent(in)::m,r
  real, intent(out):: vt
  !Calculo de la velocidad terminal

  vt= sqrt((2*m*g)/(rho_a*pi*r**2*C))

end subroutine v_terminal

***********************************************
  subroutine friccion(a,vt,v0,x,y,t,fx,fy)


   !     v0--------------Velocidad inicial del proyectil
   !     vt -------------Velocidad terminal del proyectil vt = (d**2 *g)*( rho_p-rho_a)/
   !     a -------------- Angulo del proyectil
   !     h --------------Incremento del tiempo
   !     x_t y y_t ------Desplazamientos horizontal y vertical
   !     fx y  fy------Velocidades horizontales y verticales f_x = dx(t)/dt y f_y =dy(t)
  use parametros
  implicit none
  real, intent(in) :: v0
  real :: a,vt
  real, dimension(size):: t, fx, fy, x, y
  integer::i,j

  !Definimoos el el ciclo de angulo
   do j = 0,90,15

  ! Utilizaremos el angulo en radianes
     a = j * pi / 180.0


  !Definimos nuestro ciclo de posicion
   do i = 0,size
     fx(0) =v0*cos(a)
     fy(0) =v0*sin(a)
     x(0)=0.
     y(0)=0.
     t(0)=0.
```

```
    t(i+1)=t(i)+h
    x(i+1)=x(i)+h*fx(i)
    y(i+1)=y(i)+h*fy(i)

    fx(i+1) = fx(i) + (2*vt/(g*t(i+1)**2))*(v0*cos(a)-x(i+1))
    fy(i+1) = fy(i) + (2*vt/(g*t(i+1)**2))*(v0*sin(a)-y(i+1))-vt

    if (y(i)<0) exit
   !Escribiendo datos
    open(1, file='r_aire.dat', status='unknown')
    write(1,1000) x(i+1), y(i+1)
    1000 format(f18.10,5x,f18.10)
  end do
  write(1,1100)
  1100 format(/)

  do i=0,size
    t(i)=0.
    x(i)=0.
    y(i)=0.
    fx(i)=0.
    fy(i)=0.
    end do
  end do
   close(1)
end subroutine
```