

Movimiento de Projectiles

Eduardo Castillo Bastida

14 de septiembre de 2017

El movimiento de un proyectil es un tipo de movimiento en el cual un objeto o partícula describe una trayectoria parabólica cuando se mueve en cercanías de la superficie terrestre. Si consideramos el caso mas simple del movimiento, despreciamos la resistencia por el aire y solo consideramos al acción de la atracción gravitacional.

1. Componentes del Movimiento de Projectiles

1.1. Velocidad Inicial

Corresponde a la velocidad de lanzamiento del proyectil. Consta de dos componentes, una vertical y otra horizontal:

$$v_0 = v_{0x}i + v_{0y}j \quad (1)$$

Las componentes vertical e horizontal de la velocidad inicial, se determinan mediante el angulo con respecto a la horizontal:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos(\theta) \\ v_{0y} &= v_0 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

1.2. Aceleración

Dado que la unica fuerza considerado durante este tipo de movimiento, corresponde a la fuerza de atracción gravitacional, solamente existe al aceleración vertical. La componente horizontal de la velocidad permanece constante. Luego tenemos:

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= -g \end{aligned} \quad (3)$$

1.3. Velocidad Tangencial

Durante todo el recorrido, la velocidad total, se mantiene tangente a la trayectoria. Su componente horizontal se mantiene constante, mientras que su componente vertical, varia por la existencia de la aceleración gravitacional. Por tanto, las componentes en función del tiempo t , pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos(\theta) \\ v_y &= v_0 \sin(\theta) - gt \end{aligned} \quad (4)$$

La magnitud de la velocidad usando la identidad pitagórica, corresponde a:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (5)$$

1.4. Desplazamiento

En cualquier momento, los desplazamientos vertical y horizontal pueden determinarse por medio de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}x &= v_0 t \cos(\theta) \\ y &= v_0 t \sin(\theta) - gt^2\end{aligned}\quad (6)$$

La magnitud del desplazamiento está dada por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (7)$$

Combinando la ecuación del desplazamiento vertical con la del desplazamiento horizontal, se obtiene una ecuación independiente del tiempo de la forma:

$$y = x \tan(\theta) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2 \quad (8)$$

Dado que g , el ángulo y la velocidad inicial son constantes, la ecuación anterior es de la forma:

$$y = ax + bx^2 \quad (9)$$

En donde a y b son constantes. La ecuación corresponde a la ecuación de una parábola y por ende el movimiento describe una trayectoria parabólica. Si la posición (x, y) y el ángulo son conocidos, la velocidad inicial puede determinarse mediante la ecuación:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{x \sin 2(\theta) - 2y \cos^2(\theta)}} \quad (10)$$

1.5. Tiempo de Vuelo

Corresponde al tiempo que permanece el proyectil en el aire. Se obtiene una expresión para el tiempo de vuelo, de manera muy sencilla, con solo utilizar la ecuación vertical, haciendo $y=0$ y despejando t . La ecuación obtenida es:

$$t = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g} \quad (11)$$

1.6. Altura Máxima del proyectil

Usando la expresión para el tiempo de vuelo, puede determinarse una ecuación para la altura máxima $Y_{m\acute{a}x}$. Simplemente, el tiempo de subida hasta el punto mas alto, corresponde a la mitad del tiempo de vuelo. Luego la ecuación obtenida esta dada por:

$$Y_{m\acute{a}x} = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g} \quad (12)$$

1.7. Alcance Máximo del Proyectil

EL angulo asociado con el alcance máximo del proyectil $X_{m\acute{a}x}$, puede determinarse combinando las ecuaciones del alcance horizontal y tiempo de vuelo. Obtenemos la expresión:

$$X_{m\acute{a}x} = \frac{v_0^2}{g} \sin(\theta) \quad (13)$$

Dado que v_0 y g son constantes, la ecuación anterior alcance su máximo valor para:

$$\begin{aligned}\sin 2(\theta) &= 1 \\ 2(\theta) &= 90^\circ \\ \theta &= 45^\circ\end{aligned}\quad (14)$$

2. Ejemplo

Dada una velocidad de inicial 42 m/s y un ángulo de 40° . Determina la altura máxima, el tiempo de vuelo y la distancia horizontal alcanzada por un proyectil en las cercanías a la superficie terrestre.

Solución:

Determinamos primero el tiempo de vuelo usando la ecuación: $t = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g}$

$$\begin{aligned} t_v &= \frac{2(42 \text{ m/s}) \sin(40^\circ)}{9,8 \text{ m/s}^2} \\ t_v &= 5,5 \text{ seg} \end{aligned} \tag{15}$$

Luego con este dato, calculamos el alcance horizontal y la altura máxima, usando las ecuaciones $Y_{m\acute{a}x} = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g}$ y $X_{m\acute{a}x} = \frac{v_0^2}{g} \sin(\theta)$, tal como:

$$\begin{aligned} Y_{m\acute{a}x} &= \frac{(42 \text{ m/s})^2 \sin^2(40^\circ)}{2(9,8 \text{ m/s}^2)} \\ Y_{m\acute{a}x} &= 37,18 \text{ mts} \\ X_{m\acute{a}x} &= \frac{(42 \text{ m/s})^2}{9,8 \text{ m/s}^2} (\sin(40^\circ)) \\ X_{m\acute{a}x} &= 115,7 \text{ mts} \end{aligned} \tag{16}$$

Los cálculos del problema anterior pueden ser resueltos usando las aplicaciones Fortran del apéndice.

Apéndice

3. Aplicaciones Fortran

3.1. Tiempo de Vuelo

El código Fortran para la aplicación del calculo del tiempo de vuelo de proyectiles en cercanías a la superficie terrestre es:

```
program projectile
  implicit none

  ! definimos constantes
  real, parameter :: g = 9.8
  real, parameter :: pi = 3.1415927

  ! definimos las variables
  real :: a, t, v

  ! Leer valores para el ángulo (a) y la velocidad inicial (u) desde la terminal

  write(*,*) 'MOVIMIENTO PARABÓLICO'
  write(*,*) 'APLICACIÓN PARA CALCULAR EL TIEMPO DE VUELO'
  write(*,*) 'Introduzca los valores de ángulo (a) en grados y la velocidad inicial (v)'
  read(*,*) a, v

  ! convirtiendo ángulo a radianes
  a = a * pi / 180.0

  ! las ecuación para el cálculo del tiempo de vuelo

  t=2*v*sin(a)/g

  ! escribiendo el resultado en la pantalla
  write(*,*) 'El tiempo de vuelo es: ', t

end program projectile
```

3.2. Altura Máxima

El código para la aplicación fortran para el cálculo de la altura máxima es:

```
program proyectilAltura

implicit none

!Definiendo Constantes
real, parameter :: g = 9.8
real, parameter :: pi=3.1415927
```

```

!Definiendo variables

real::a,v,y,t

!Leer los valores en pantalla

write(*,*) 'MOVIMIENTO PARABÓLICO'
write(*,*) 'APLICACIÓN PARA CALCULAR LA ALTURA MÁXIMO (Ymáx)'
write(*,*) 'Introduzca los datos de velocidad inicial (v) en m/s, el tiempo de vuelo (t)'
read(*,*) v,t,a

!Cálculo del angulo en radianes
a=a*pi/180.0
!Cálculo del alcance máximo

y=v*t*sin(a)-(g*t*t)/2

!Escribiendo los resultados en pantalla
write(*,*) 'Xmáx corresponde a: ',y,'metros '

end program proyectilAltura

```

3.3. Alcance Horizontal

Para el alcance horizontal usamos el código:

```

program proyectilAltura

implicit none

!Definiendo Constantes
real, parameter :: g = 9.8
real, parameter :: pi=3.1415927

!Definiendo variables

real::a,v,x,t

!Leer los valores en pantalla

write(*,*) 'MOVIMIENTO PARABÓLICO'
write(*,*) 'APLICACIÓN PARA CALCULAR EL ALCANCE MÁXIMO (Xmáx)'
write(*,*) 'Introduzca los datos de velocidad inicial (v) en m/s y el ángulo (a) en grados'
read(*,*) v,a

!Cálculo del ángulo en radianes
a=a*pi/180.0
!Cálculo del alcance máximo

```

```
x=(v*v/g)*sin(a)

!Escribiendo los resultados en pantalla
write(*,*) 'Xmáx corresponde a: ',x,'metros '

end program proyectilAltura
```