

LÒGICA I LLENGUATGES

PROBLEMES

Llenguatges de proposicions

Exercici 1. Determineu quines expressions són fórmules proposicionals. I construïu l'arbre de generació de les expressions que són fórmules.

- | | |
|------------------------------------|---|
| a) $R \vee S$ | j) $((P \vee) \wedge Q)$ |
| b) P | k) $\neg(P \rightarrow Q) \wedge \neg R$ |
| c) $PQ \rightarrow P$ | l) $\vee P \wedge Q$ |
| d) $(\neg P) \rightarrow P$ | m) $P \vee (Q \neg R)$ |
| e) $\neg S \neg Q$ | n) $P \wedge (Q \vee R)$ |
| f) $S \leftrightarrow (\neg T)$ | o) $(P \vee Q) \wedge R$ |
| g) $(P \vee Q) \rightarrow \neg R$ | p) $(P \rightarrow Q) \wedge (S \rightarrow R)$ |
| h) $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ | q) $P \neg \neg(Q \rightarrow R)$ |
| i) $P \neg Q$ | r) $\neg(\neg R \rightarrow (S \vee P))$ |

Exercici 2. Formalitzeu les següents frases mitjançant fórmules proposicionals:

1. O està plovent i nevant, o fa vent.
2. No he vist la pel·lícula, però he llegit la novel·la.
3. Ni he vist la pel·lícula, ni he llegit la novel·la.
4. He vist la pel·lícula, encara que no he llegit la novel·la.
5. Si estudio i treballo, aprovo.
6. Si bec cafè, no m'adormo; i si no (no en bec), sí (m'adormo).
7. Si tinc mal de cap, me'n vaig a nedar o a dormir (però no les dues coses).
8. Quan menjo molt i faig la migdiada, em costa llevar-me i estic de mal humor.

9. Si sempre que menjo molt faig la migdiada, aleshores em costa llevar-me i estic de mal humor.
10. Si faig la migdiada i em costa llevar-me, estic de mal humor si menjo molt.

Exercici 3. Formalitzeu les següents frases mitjançant fórmules proposicionals:

1. Et mulles quan plou.
2. Una relació és d'equivalència si, i només si és reflexiva, simètrica i transitiva.
3. Es podrà curar el càncer quan es determini la seva causa i es trobi un nou medicament adequat.
4. Es necessita coratge i habilitat per escalar una muntanya.
5. El motor s'engega si la bateria està carregada
6. El motor s'engega només si la bateria està carregada
7. Si vaig en cotxe, trobo aparcament si arribo aviat
8. Si vaig en cotxe, trobo aparcament només si arribo aviat.
9. Quan cal portar calculadora per aprovar, cal recordar les fórmules per estar tranquil.
10. Tant si plou com si neva, cal portar gavadina per no mullar-se.

Exercici 4. Calculeu la taula de veritat de la fórmula $(P \rightarrow \neg R) \wedge (S \vee (P \leftrightarrow S))$ i determineu si es tautologia, satisfactible o contradicció.

Exercici 5. Determineu si les següents fórmules són tautologies i/o satisfactibles o contradiccions:

1. $P \rightarrow \neg\neg P$
2. $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$

3. $(\neg P \rightarrow Q) \vee P$
4. $\neg P \rightarrow P$
5. $(P \wedge Q) \rightarrow \neg(R \vee Q)$
6. $\neg(P \vee (Q \rightarrow R)) \wedge (Q \vee \neg P)$

Exercici 6. Determineu si les següents fórmules són tautologies i/o satisfactibles o contradiccions:

1. $\neg(\neg P \vee Q) \wedge Q$
2. $P \vee (P \rightarrow Q)$
3. $\neg P \wedge \neg(P \rightarrow Q)$
4. $P \rightarrow (P \wedge Q)$
5. $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$
6. $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
7. $(\neg P \wedge \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$
8. $((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)) \leftrightarrow ((P \vee R) \rightarrow (Q \vee S))$

Exercici 7. Siguin $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ fórmules proposicionals. Determineu quines de les següents condicions són certes:

1. Si $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ és satisfactible, aleshores $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rightarrow \varphi_3$ és satisfactible.
2. Si $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3$ és satisfactible, aleshores $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow \varphi_3$ és satisfactible
3. φ_1 satisfactible implica $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ satisfactible.
4. φ_2 insatisfactible implica $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ insatisfactible.

Exercici 8. Determineu si les següents equivalències lògiques són correctes:

1. $P \vee P \equiv P$
2. $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$
3. $(P \leftrightarrow Q) \equiv (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$
4. $(P \vee Q) \rightarrow R \equiv (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)$
5. $(P \vee Q) \rightarrow R \equiv (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$
6. $P \rightarrow (Q \vee R) \equiv (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$
7. $(P \rightarrow Q) \rightarrow R \equiv P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

Exercici 9. Tres estudiants A, B, C són acusats d'introduir un virus a les aules d'ordinadors de la Facultat d'Informàtica. Durant l'interrogatori les declaracions són les següents:

A diu: "B ho va fer i C és innocent".

B diu: "si A és culpable aleshores C també ho és".

C diu: "Jo no ho vaig fer, ho va fer algun dels altres".

Llavors, es demana:

- (a) Determinar si les tres declaracions son contradictòries.
- (b) Assumint que ningú va mentir, qui és innocent i qui és culpable ?

Exercici 10. Tenim tres caixes A, B i C, una de les quals conté or i les altres dues estan buides. La tapa de cada caixa conté una afirmació. La caixa A diu "l'or no és aquí", la caixa B diu "l'or no és aquí" i la caixa C diu "l'or és a la caixa B". Sabem que una i només una de les afirmacions és certa. Aleshores, quina caixa conté l'or ?

Exercici 11. Determineu una forma normal conjuntiva de les següents fórmules:

- | | |
|--|---|
| a) $P \vee (\neg P \wedge (Q \wedge R))$ | g) $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ |
| b) $\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \vee Q)$ | h) $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \rightarrow (Q \vee \neg P))$ |
| c) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$ | i) $\neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$ |
| d) $P \rightarrow ((Q \wedge R) \rightarrow S)$ | j) $(\neg P \wedge Q) \rightarrow R$ |
| e) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ | k) $(P \vee Q) \wedge ((\neg P \vee R) \rightarrow Q)$ |
| f) $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$ | l) $\neg(P \rightarrow (\neg P \wedge Q))$ |

Exercici 12. Volem pintar un mapa de n països amb 4 colors de manera que no hi hagi dos països veïns que tinguin el mateix color. Llavors, es demana representar aquest problema mitjançant una fórmula en FNC de manera que pugui ser resolt per un SAT-solver.

Exercici 13. Volem organitzar els torns de guàrdia de 40 farmàcies d'una ciutat per un període de 60 nits. Cada nit hi ha d'haver-hi exactament una farmàcia de guàrdia. Tenim una llista R de restriccions en forma de parells (i, j) amb $1 \leq i < j \leq 60$ amb el significat que una mateixa farmàcia no pot estar de guàrdia la nit i i la nit j . A més a més, cada farmàcia k proporciona una llista L_k de nits en les quals la farmàcia no pot estar de guàrdia. Aleshores, es tracta d'assignar els torns de guàrdia respectant les restriccions de R i les restriccions de les llistes L_k de les farmàcies.

Llavors, es demana representar aquest problema mitjançant una fórmula en FNC de manera que pugui ser resolt per un SAT-solver.

Exercici 14. Per millorar la seguretat del nostre ordinador hem d'instal·lar paquets d'actualització complint les següents restriccions:

- (a) Exactament un dels paquets A,B,C s'ha d'instal·lar.
- (b) El paquet E no es pot instal·lar.
- (c) És necessari instal·lar el paquet D si es vol instal·lar el paquet B.
- (d) Si instal·lem el paquet A o el paquet C, llavors hem d'instal·lar el paquet B o el paquet E.
- (e) Els paquets D i E no es poden instal·lar al mateix temps.

Llavors es demana :

(1) Definir una fórmula proposicional en forma normal conjuntiva per determinar mitjançant un SAT-solver si es pot actualitzar l'ordinador complint les restriccions dels paquets.

(2) Demostrar que la fórmula definida en (1) és satisfactible.

Exercici 15. Aplicant les regles de Davis i Putnam, decidir si les següents fórmules són satisfactibles o insatisfactibles.

- (1) $(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge P$.
- (2) $P \wedge Q \wedge R$.
- (3) $(P \vee Q) \wedge \neg Q$.
- (4) $(P \vee Q) \wedge (R \vee Q) \wedge \neg R \wedge \neg Q$.

- (5) $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge R.$
- (6) $(P \vee \neg Q \vee R \vee \neg S) \wedge (\neg R \vee S) \wedge Q \wedge \neg P.$
- (7) $(P \vee Q) \wedge (\neg R \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg P).$
- (8) $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg Q).$

Exercici 16. Calculeu totes les resolvents de les clàusules φ_1 i φ_2 i les de φ_2 i φ_3 essent

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \neg A \vee \neg B \vee C \vee \neg D \vee \neg E, \\ \varphi_2 &= A \vee \neg B \vee C \vee \neg D, \\ \varphi_3 &= A \vee B \vee \neg C.\end{aligned}$$

Exercici 17. Demostreu que si $P \vee \varphi_1$ i $\neg P \vee \varphi_2$ són clàusules, aleshores $(P \vee \varphi_1) \wedge (\neg P \vee \varphi_2) \models (\varphi_1 \vee \varphi_2).$

Exercici 18. Demostreu per resolució que dels següents conjunts de clàusules es dedueix la clàusula buida.

- (a) $\{S \vee T \vee \neg R, \neg S \vee \neg R, \neg T, R\}.$
- (b) $\{\neg S \vee R, \neg P \vee S, \neg R, P \vee S\}.$
- (c) $\{\neg S \vee P, S \vee \neg T, S \vee R, \neg T \vee Q, \neg P, \neg R\}.$
- (d) $\{\neg P \vee \neg Q \vee \neg R, Q \vee R, P \vee \neg Q, \neg R \vee Q, \neg P \vee \neg Q\}.$

Exercici 19. Demostreu per resolució:

- (a) $\models P \rightarrow (Q \rightarrow P).$
- (b) $\models (P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q.$
- (c) $\models ((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P.$
- (d) $P \rightarrow (Q \wedge R) \models \neg R \rightarrow \neg P.$
- (e) $\{T \rightarrow \neg P, S \rightarrow R, \neg Q \rightarrow U, R \rightarrow T, U \rightarrow S\} \models P \rightarrow Q.$

Exercici 20. Considereu les següents frases del llenguatge natural:

1. Quan la borsa baixa, els inversors venen o les lletres del tresor pugen.
2. Si les lletres del tresor pugen, els inversors venen.
3. Els inversors no venen.
4. La borsa puja.

Lavors es demana:

- (a) Escriviu fórmules proposicionals $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ que formalitzin (1),(2),(3) i (4) respectivament, usant els següents àtoms: B : “Baixa la borsa” ; V : “els inversors venen” ; T : “Les lletres del tresor pugen” .
- (b) Demostreu per resolució que φ_4 es dedueix de $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.