Ejercicio 1. Determinar si las siguientes fórmulas son satisfactibles, tautologías o contradicciones.

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = P \to (Q \to \neg P),\\
&\varphi_2 = (P \to Q) \wedge (P \vee Q),\\
&\varphi_3 = ((P \wedge Q) \to R) \to (P \to (\neg Q \vee R)),\\
&\varphi_4 = (P \wedge Q) \to (P \vee Q),\\
&\varphi_5 = ((P \to Q) \to P) \to Q,\\
&\varphi_6 = (P \to \neg(Q \vee R)) \wedge (P \wedge (\neg Q \to R)).
\end{aligned}$$

Solución:

(a) $\varphi_1 \equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg P \equiv \neg P \vee \neg Q$. Por tanto, ϕ_1 es satisfactible pero no tautología.

$\varphi_2 \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \equiv Q \vee (P \wedge \neg P) \equiv Q \vee F \equiv Q$. Por tanto, ϕ_2 es satisfactible pero no tautología.

φ_3 es tautología. Para comprobarlo, consideremos una σ-interpretación I donde $\sigma = \{P, Q, R\}$. Supongamos que $I((P \wedge Q) \to R)) = V$ y que $I(P) = V$. Tenemos que demostrar que $I(\neg Q \vee R) = V$. Si $I(Q) = F$, se sigue que $I(\neg Q \vee R) = V$. Supongamos entonces que $I(Q) = V$. Como $I((P \wedge Q) \to R)) = V$, $I(P) = V$ e $I(Q) = V$, se tiene que $I(R) = V$, y por tanto $I(\neg Q \vee R) = V$.

$\varphi_4 \equiv \neg P \vee \neg Q \vee P \vee Q$. Como $\neg P \vee P$ es una tautología, ϕ_1 es una tautología.

φ_5 es satisfactible pero no tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(P) = I(Q) = V$, tenemos que $I(\phi_2) = V$. Y si tomamos la interpretación I' definida por $I'(P) = V$ e $I'(Q) = F$, tenemos que $I'(\phi_2) = ((V \to F) \to V) \to F = (F \to V) \to F = V \to F = F$.

φ_6 es contradicción, ya que $\neg(P \to \neg(Q \vee R)) \equiv P \wedge \neg\neg(Q \vee R) \equiv P \wedge (Q \vee R) \equiv P \wedge (\neg Q \to R)$. Por tanto, tenemos que $\phi_3 \equiv \psi \wedge \neg\psi$ donde $\psi = P \to \neg(Q \vee R)$, y por consiguiente ϕ_3 es insatisfactible.

Exercicio 2. Consideremos las siguientes fórmulas:

$\varphi_1 = (P \to Q) \to (\neg P \to \neg Q)$,
$\varphi_2 = ((P \wedge Q) \to R) \to (P \to (\neg Q \vee R))$,
$\varphi_3 = ((P \wedge R) \to S) \vee (T \to (R \wedge S))$.

Se pide entonces:

(1) Determinar si φ_1, φ_2 y φ_3 son tautologías, satisfactibles o contradicciones.

(2) Calcular formas normales conjuntivas de φ_1, φ_2 y φ_3.

Solución:

(1) La fórmula φ_1 es satisfactible pero no tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(P) = I(Q) = V$, tenemos que $I(\varphi_1) = (V \to V) \to (F \to F) = V \to V = V$. Y si tomamos la interpretación I' definida por $I'(P) = F, I'(Q) = V$, tenemos que $I'(\varphi_1) = (F \to V) \to (V \to F) = V \to F = F$.

La fórmula φ_2 es tautología. Para comprobarlo, consideremos una interpretación I para el conjunto de átomos $\{P, Q, R\}$. Supongamos que $I((P \wedge Q) \to R)) = V$ y que $I(P) = V$. Tenemos que demostrar que $I(\neg Q \vee R) = V$. Si $I(Q) = F$, se sigue que $I(\neg Q \vee R) = V$. Supongamos entonces que $I(Q) = V$. Como $I((P \wedge Q) \to R)) = V$, $I(P) = V$ e $I(Q) = V$, se tiene que $I(R) = V$, y por tanto $I(\neg Q \vee R) = V$.

La fórmula φ_3 es satisfactible pero no tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(P) = F$ e $I(R) = I(S) = I(T) = V$, tenemos que $I(\varphi_3) = ((F \wedge V) \to V) \vee (V \to (V \wedge V)) = (F \to V) \vee V = V \vee V = V$. Y si tomamos la interpretación I' definida por $I'(P) = I'(R) = I'(T) = V$ e $I'(S) = F$, tenemos que $I'(\varphi_3) = ((V \wedge V) \to F) \vee (V \to (V \wedge F))$ $= (V \to F) \vee (V \to F) = F \vee F = F$.

(2) Tenemos que $\varphi_1 \equiv \neg(P \to Q) \vee (\neg P \to \neg Q) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (P \vee \neg Q) \equiv (P \vee \neg Q \vee P) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg Q) \equiv (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q) \equiv P \vee \neg Q$.

Como φ_2 es tautología, tenemos que $\varphi_2 \equiv V$.

Tenemos que $\varphi_3 \equiv (\neg(P \wedge R) \vee S) \vee (\neg T \vee (R \wedge S)) \equiv (\neg P \vee \neg R \vee S) \vee (\neg T \vee (R \wedge S)) \equiv (\neg P \vee \neg R \vee S \vee \neg T) \vee (R \wedge S) \equiv (\neg P \vee \neg R \vee S \vee \neg T \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S \vee \neg T \vee S) \equiv V \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S \vee \neg T) \equiv \neg P \vee \neg R \vee S \vee \neg T$.

Ejercicio 3. Poner las siguientes fórmulas en forma normal conjuntiva:

$\varphi_1 = (P \wedge \neg Q) \vee R$,
$\varphi_2 = P \vee (R \to Q) \vee ((\neg S \wedge \neg P) \to \neg R)$,
$\varphi_3 = \neg(P \leftrightarrow R) \to (\neg Q \vee P)$,
$\varphi_4 = ((P \vee Q) \to R) \vee (T \to Q)$.

Solución:

$\varphi_1 = (P \wedge \neg Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$,

$\varphi_2 = P \vee (R \to Q) \vee ((\neg S \wedge \neg P) \to \neg R) \equiv P \vee (\neg R \vee Q) \vee (\neg(\neg S \wedge \neg P) \vee \neg R) \equiv (P \vee \neg R \vee Q) \vee (S \vee P \vee \neg R) \equiv P \vee \neg R \vee Q \vee S$,

$\varphi_3 = \neg(P \leftrightarrow R) \to (\neg Q \vee P) \equiv (P \leftrightarrow R) \vee (\neg Q \vee P) \equiv ((\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee P)) \vee (\neg Q \vee P) \equiv (\neg P \vee R \vee \neg Q \vee P) \wedge (\neg R \vee P \vee \neg Q \vee P) \equiv \neg R \vee P \vee \neg Q$,

$\varphi_4 = ((P \vee Q) \to R) \vee (T \to Q) \equiv (\neg(P \vee Q) \vee R) \vee (\neg T \vee Q) \equiv ((\neg P \wedge \neg Q) \vee R) \vee (\neg T \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (R \vee \neg T \vee Q) \equiv (\neg P \vee R \vee \neg T \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R \vee \neg T \vee Q) \equiv \neg P \vee R \vee \neg T \vee Q$.

Ejercicio 4. En una empresa de artes gráficas se quiere pintar un mapa de n países con 4 colores de manera que no haya dos países vecinos que tengan el mismo color. Formalizar entonces este problema mediante una fórmula en forma normal conjuntiva para que pueda ser resuelto por un SAT-solver.

Solución:

Para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq 4$ consideramos la proposición Pij que significa que al país i le asignamos el color j.

(1) A cada país se le asigna un color.

Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ ponemos la cláusula

$Pi1 \vee Pi2 \vee Pi3 \vee Pi4$.

(2) A ningún país se le asigna más de un color.

Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para todo $j, j' \in \{1, \ldots, 4\}$ con $j \neq j'$ añadimos la cláusula

$\neg Pij \vee \neg Pij'$.

(3) A dos países vecinos no se les asigna el mismo color.

Para cada par de países $i, i' \in \{1, \ldots, n\}$ tales que i, i' son países vecinos y para cada color $j \in \{1, \ldots, 4\}$ añadimos la cláusula

$\neg Pij \vee \neg Pi'j$.

La fórmula buscada es entonces la conjunción de las cláusulas de (1), (2) y (3).

Ejercicio 5. Tenemos un país con n aeropuertos y queremos que en cada vuelo haya un control antidrogas en el aeropuerto de salida o en el aeropuerto de llegada. Tenemos la lista L de los vuelos existentes formada por pares (i, j) donde i es el aeropuerto de salida del vuelo y j es el aeropuerto de llegada. Además disponemos de e equipos de policía. El problema consiste en determinar los aeropuertos donde se han de situar los equipos de policía. Se pide entonces representar el problema mediante una fórmula proposicional en forma normal conjuntiva de manera que pueda ser resuelto por un SAT-solver. Para ello, para $i \in \{1, \ldots, e\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$, considerar la proposición Pij que significa que el "i-ésimo equipo de policía ha de ir al aeropuerto j".

Solución:

Tenemos que formalizar lo siguiente:

(1) Cada vuelo tiene un equipo de policía en el aeropuerto de origen o en el aeropuerto de destino.

Para cada vuelo (i, j) de la lista L ponemos la cláusula

$P1i \vee P1j \vee P2i \vee P2j \vee \ldots \vee Pei \vee Pej$.

(2) Ningún equipo de policía puede estar en dos aeropuertos.

Para todo $i \leq e$ y para todo $j, j' \leq n$ con $j \neq j'$, ponemos la cláusula

$\neg Pij \vee \neg Pij'$.

(3) Ningún aeropuerto tiene más de un equipo de policía.

Para todo $i, i' \leq e$ con $i \neq i'$ y para todo $j \leq n$, ponemos la cláusula

$\neg Pij \vee \neg Pi'j$.

La fórmula buscada es entonces la conjunción de las cláusulas de (1), (2) y (3).

Ejercicio 6. Queremos organizar los turnos de guardia nocturna de 40 farmacias de una ciudad durante un período de 60 noches. Cada noche tiene que haber exactamente una farmacia de guardia. Tenemos una lista R de restricciones en forma de pares (i, j) con $1 \leq i < j \leq 60$ que significan que una misma farmacia no puede estar de guardia la noche i y la noche j . Además, cada farmacia k proporciona una lista L_k de noches en las que no puede estar de guardia. Se trata entonces de asignar los turnos de guardia respetando las restricciones de R y las restricciones de las listas L_k de las farmacias.

Se pide representar el problema mediante una fórmula proposicional en forma normal conjuntiva de manera que pueda ser resuelto por un SAT-solver. Para hacer la representación, considerar para $1 \leq k \leq 40$ y para $1 \leq i \leq 60$, la proposición P_{ki} con el significado: "la farmacia k está de guardia la noche i".

Solución:

Tenemos que formalizar lo siguiente:

(1) En cada noche hay una farmacia de guardia.

Para cada $i \leq 60$ ponemos la cláusula

$$P1i \vee P2i \vee \ldots \vee P40i.$$

(2) En cada noche no hay dos farmacias de guardia.

Para cada $i \leq 60$ y para $k, k' \leq 40$ con $k \neq k'$ ponemos la cláusula

$$\neg Pki \vee \neg Pk'i.$$

(3) Se respetan las restricciones de R.

Para cada par $(i, j) \in R$ y para cada $k \leq 40$ ponemos la cláusula

$$\neg Pki \vee \neg Pkj.$$

(4) Se respetan las restricciones de las farmacias.

Para cada $k \leq 40$ y para cada $i \in L_k$ ponemos la cláusula $\neg Pki$.

La fórmula buscada es entonces la conjunción de las cláusulas de (1), (2), (3) y (4).

Ejercicio 7. Demostrar por resolución que la cláusula vacía $\square$ se deduce del conjunto de cláusulas $\{P \vee Q \vee \neg R, \neg P, P \vee Q \vee R, P \vee \neg Q\}$.

Solución:

Tenemos la siguiente prueba por resolución:

1. $P \vee Q \vee \neg R$ entrada
2. $\neg P$ entrada
3. $P \vee Q \vee R$ entrada
4. $P \vee \neg Q$ entrada
5. $P \vee Q$ (1,3)
6. P (4,5)
7. $\square$ (2,6)

Ejercicio 8. Demostrar por resolución que la fórmula φ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ donde:

$\varphi_1 = \neg E \to (\neg O \vee (L \wedge R))$,

$\varphi_2 = \neg E$,

$\varphi_3 = O$,

$\varphi = L$.

Solución:

Hemos de demostrar por resolución que el conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi\}$ es insatisfactible. En primer lugar, hemos de encontrar una forma normal conjuntiva de φ_1. Tenemos que $\varphi_1 \equiv E \vee (\neg O \vee (L \wedge R)) \equiv (E \vee \neg O \vee L) \wedge (E \vee \neg O \vee R)$. Tenemos entonces la siguiente prueba por resolución:

1. $E \vee \neg O \vee L$ input
2. $E \vee \neg O \vee R$ input
3. $\neg E$ input
4. O input
5. $\neg L$ input
6. $\neg O \vee L$ (1,3)
7. L (4,6)
8. $\square$ (5,7)

Ejercicio 9. Demostrar por resolución que la fórmula $P \to Q$ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $\{T \to \neg P, S \to R, \neg Q \to U, R \to T, U \to S\}$.

Solución:

Tenemos que demostrar por resolución que la fórmula $(T \to \neg P) \wedge (S \to R) \wedge (\neg Q \to U) \wedge (R \to T) \wedge (U \to S) \wedge \neg(P \to Q)$ es una contradicción. Tenemos que $T \to \neg P \equiv \neg T \vee \neg P$, $S \to R \equiv \neg S \vee R$, $\neg Q \to U \equiv Q \vee U$, $R \to T \equiv \neg R \vee T$, $U \to S \equiv \neg U \vee S$ y $\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q$. Tenemos entonces la siguiente prueba por resolución:

1. $\neg T \vee \neg P$ input
2. $\neg S \vee R$ input
3. $Q \vee U$ input
4. $\neg R \vee T$ input
5. $\neg U \vee S$ input
6. P input
7. $\neg Q$ input
8. $\neg T$ (1,6)
9. $\neg R$ (4,8)
10. $\neg S$ (2,9)
11. $\neg U$ (5,10)
12. Q (3,11)
13. $\square$ (7,12)

Ejercicio 10. Demostrar por resolución que la fórmula φ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ donde
$\varphi_1 = A \to \neg B \vee C$,
$\varphi_2 = A \to \neg B \vee D$,
$\varphi_3 = \neg G \to \neg E \vee \neg F$,
$\varphi_4 = \neg H \to \neg G \vee \neg D$,
$\varphi_5 = A \wedge B \wedge F \wedge E$ y
$\varphi = H$.

Solución:

Hemos de demostrar por resolución que el conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \neg\varphi\}$ es insatisfactible. En primer lugar, hemos de computar formas normales conjuntivas de las fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Tenemos que $\varphi_1 \equiv \neg A \vee \neg B \vee C$, $\varphi_2 \equiv \neg A \vee \neg B \vee D$, $\varphi_3 \equiv G \vee \neg E \vee \neg F$ y $\varphi_4 \equiv H \vee \neg G \vee \neg D$. Tenemos entonces la siguiente prueba por resolución:

1.	$\neg A \vee \neg B \vee C$	input
2.	$\neg A \vee \neg B \vee D$	input
3.	$G \vee \neg E \vee \neg F$	input
4.	$H \vee \neg G \vee \neg D$	input
5.	A	input
6.	B	input
7.	F	input
8.	E	input
9.	$\neg H$	input
10.	$\neg B \vee D$	(2,5)
11.	D	(6,10)
12.	$G \vee \neg F$	(3,8)
13.	G	(7,12)

14. $H \vee \neg D$ (4,13)

15. H (11,14)

16. $\square$ (9,15)