LÒGICA I LLENGUATGES

CURSO 2017-18

PRIMERA PRUEBA PARCIAL DE PROBLEMAS

(a) Consideremos las siguientes fórmulas:

$\varphi_1 = (P \to (P \to Q)) \to Q,$
$\varphi_2 = (P \to \neg(Q \vee R)) \wedge (P \wedge (\neg Q \to R)),$
$\varphi_3 = (P \vee (R \to Q) \vee (\neg S \wedge P)) \to (R \vee S).$

Se pide entonces:

(1) Determinar si φ_1, φ_2 y φ_3 son tautologías, satisfactibles o contradicciones.

(2) Calcular formas normales conjuntivas de φ_1, φ_2 y φ_3.

(4 puntos)

(b) Consideremos el siguiente problema. Un consejo comarcal de una región quiere asignar una frecuencia de radio, de un total de 12 frecuencias disponibles, a la emisora municipal de cada uno de los 30 pueblos de la comarca. Para evitar que haya interferencias, se exige que dos pueblos situados a menos de 20 kilómetros de distancia emitan en distinta frecuencia. Disponemos de una tabla que contiene las distancias entre cada par de pueblos de la comarca. El problema consiste en asignar las frecuencias de radio a las emisoras de los pueblos de la comarca.

Se pide entonces representar el problema mediante una fórmula proposicional en forma normal conjuntiva de manera que pueda ser resuelto por un SAT-solver. Para ello, para $i \in \{1, \ldots, 30\}$ y $j \in \{1, \ldots, 12\}$, considerar la proposición Pij que significa que "al pueblo i se le asigna la frecuencia j".

(4 puntos)

(c) Demostrar por resolución que la fórmula $T \wedge S$ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $\{P \to (\neg R \vee S), \neg R \to (S \wedge \neg T), P \to T, P\}$.

(2 puntos)

Solución:

(a) (1). La fórmula φ_1 es satisfactible pero no tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(Q) = V$, tenemos que $I(\varphi_1) = V$, con independencia del valor $I(P)$. Y si $I(P) = F$ y $I(Q) = F$, tenemos $I(\varphi_1) = F$.

ϕ_2 es una contradicción, ya que si I es una interpretación tal que $I(\varphi_2) = V$, entonces $I(P) = I(P \to \neg(Q \vee R)) = I(\neg Q \to R) = V$. Pero si $I(P) = V$ y $I(P \to \neg(Q \vee R)) = V$, entonces $I(Q \vee R) = F$, con lo cual $I(Q) = I(R) = F$; pero eso es incompatible con $I(\neg Q \to R) = V$.

La fórmula φ_3 es satisfactible pero no tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(R) = V$, tenemos $I(\varphi_3) = V$, con independencia de los valores de las otras variables. Y si $I(R) = I(S) = F$, tenemos $I(\varphi_3) = F$, de nuevo con independencia de los valores de las otras variables.

(2). $\phi_1 \equiv \neg(P \to (P \to Q)) \vee Q \equiv (P \wedge \neg(P \to Q)) \vee Q \equiv (P \wedge P \wedge \neg Q) \vee Q \equiv (P \wedge \neg Q) \vee Q \equiv (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q) \equiv P \vee Q$

Como ϕ_2 es una contradicción, basta con tomar una contradicción en forma normal conjuntiva, por ejemplo $P \wedge \neg P$.

$\phi_3 \equiv \neg(P \vee (R \to Q) \vee (\neg S \wedge P)) \vee (R \vee S) \equiv (\neg P \wedge \neg(R \to Q) \wedge \neg(\neg S \wedge P)) \vee (R \vee S) \equiv (\neg P \wedge R \wedge \neg Q \wedge (S \vee \neg P)) \vee (R \vee S) \equiv (\neg P \vee R \vee S) \wedge (R \vee R \vee S) \wedge (\neg Q \vee R \vee S) \wedge (S \vee \neg P \vee R \vee S) \equiv (\neg P \vee R \vee S) \wedge (R \vee S) \wedge (\neg Q \vee R \vee S) \wedge (\neg P \vee R \vee S) \equiv (R \vee S) \wedge (\neg Q \vee R \vee S) \wedge (\neg P \vee R \vee S) \equiv (R \vee S)$.

Para el último paso, obsérvese que la cláusula $(R \vee S)$ implica todas las demás y que si $(R \vee S) \wedge (\neg Q \vee R \vee S) \wedge (\neg P \vee R \vee S)$ es verdad, entonces, en particular, la primera cláusula $(R \vee S)$ es verdad.

(b) Tenemos que formalizar lo siguiente:

(1) Cada pueblo tiene asignada una frecuencia.

Para todo $i \leq 30$ ponemos la cláusula

$Pi1 \vee Pi2 \vee \ldots \vee Pi12$.

(2) Ningún grupo pueblo tiene asignada más de una frecuencia.

Para todo $i \leq 30$ y para todo $j, j' \leq 12$ con $j < j'$, ponemos la cláusula

$\neg Pij \vee \neg Pij'$.

(3) Pueblos distintos situados a menos de 20 km tienen frecuencias distintas.

Para todo $i, i' \leq 30$ con $i < i'$ y para todo $j \leq 12$, si los pueblos i, i' están a menos de 20 km de distancia, ponemos la cláusula

$\neg Pij \vee \neg Pi'j$.

La fórmula buscada es, entonces, la conjunción de las cláusulas de (1), (2) y (3).

(c) Hemos de demostrar por resolución que el conjunto de fórmulas

$$\{P \to (\neg R \vee S), \neg R \to (S \wedge \neg T), P \to T, P, \neg(T \wedge S)\}$$

es insatisfactible. En primer lugar, hemos de poner las fórmulas del conjunto anterior en forma normal conjuntiva. Tenemos que $P \to (\neg R \vee S) \leftrightarrow \neg P \vee \neg R \vee S$, $\neg R \to (S \wedge \neg T) \leftrightarrow R \vee (S \wedge \neg T) \leftrightarrow (R \vee S) \wedge (R \vee \neg T)$, $P \to T \leftrightarrow \neg P \vee T$, y $\neg(T \wedge S) \leftrightarrow \neg T \vee \neg S$. Tenemos, entonces, la siguiente prueba por resolución.

1.	$\neg P \vee \neg R \vee S$	entrada
2.	$R \vee S$	entrada
3.	$R \vee \neg T$	entrada
4.	$\neg P \vee T$	entrada
5.	P	entrada
6.	$\neg T \vee \neg S$	entrada
7.	$\neg P \vee \neg R \vee \neg T$	(1,6)
8.	$\neg P \vee \neg T$	(3,7)
9.	$\neg P$	(4,8)
10.	$\square$	(5,10)