

LOGICA I LLENGUATGES

PROBLEMES

Llenguatges de predicats

Exercici 1. Determineu quines de les següents expressions són variables, constants i/o termes en el vocabulari $\sigma = \{P^2, F^1, f^1, g^1, h^1, f_0^3, c, b\}$.

1. $x, x^*, y_1, \emptyset, \text{Sol}, x_{445}, z_4$.
2. $b, c, c', h, h(c), 3, f, F, f(v_6), f(b, c), \alpha$.
3. $f_0(x, b, y), f_0(x, b), f_0(b, c), g(3), g(b), g(b, b), F(x), Fx, Pcx$.

Exercici 2. Considereu el següent vocabulari $\sigma = \{R^2, Q^1, f^2, a, b\}$. Determineu quines de les següents expressions són σ -fórmules i quines són σ -fórmules atòmiques:

- | | |
|---------------------|--|
| (a) $\forall x Rxy$ | (j) $Qf(a, b)$ |
| (b) $\forall x Px$ | (k) $f(x, t) = g(x) + t$ |
| (c) Rab | (l) $Qf(b, Ray)$ |
| (d) $Qf(a, f(x))$ | (m) $\forall x (Px \rightarrow (Qx \vee Rxy))$ |
| (e) $\neg Rxy$ | (n) $\forall x \exists y (Qx \rightarrow Rxy)$ |
| (f) $QRxy$ | (o) $\forall x (Qx \rightarrow \exists y (Qx \vee Rxy))$ |
| (g) $Rxy \wedge Qx$ | (p) $\forall x \exists y Qy \rightarrow Rxy$ |
| (h) $\forall a Qa$ | (q) $x \rightarrow y \vee x$ |
| (i) $\exists b Rxb$ | (r) $\forall x (Qx \rightarrow (Qx \vee Rx))$ |

Exercici 3. Formalitzeu les següents frases per mitjà de fórmules del llenguatge de predicats.

- (a) Tot volcà és una muntanya.
- (b) Cap turó és una muntanya.

- (c) A Dinamarca no hi han muntanyes.
- (d) L'Everest és més alt que les muntanyes europees.

Per aixó, utilitzeu els següents predicats:

Mx : “ x és una muntanya”,

Vx : “ x és un volcà”,

Tx : “ x és un turó”,

Exy : “ x està en y ”,

Axy : “ x és més alt que y ”.

Exercici 4. Formalitzeu les següents frases per mitjà de fórmules del llenguatge de predicats.

- (a) Tot diari recolça a un candidat.
- (b) Tot candidat està recolçat per un diari.
- (c) Hi ha un candidat que no està recolçat per cap diari.
- (d) Cap diari recolça a tots els candidats.

Exercici 5. Formalitzeu les següents frases per mitjà de fórmules del llenguatge de predicats.

- (a) El Miquel és un bon professor.
- (b) Un professor és un bon pedagog només si està ben informat.
- (c) La Laia ha llegit tots els llibres que han escrit els autors de Sant Quirze i de Santa Maria.
- (d) Una persona és intel·ligent si la seva mare i el seu pare ho són.
- (e) Hi ha persones que compren un producte només si apareix en algun catàleg.
- (f) Sense testar-lo, cap programa pot funcionar.
- (g) Totes les caixes d'estalvis tenen clients descontents.
- (h) Homes i dones tenen dret a reclamar si es creuen ultratjats.

Exercici 6. Donades les fórmules següents:

- | | |
|--|---|
| (a) $\forall x Rxy$ | (g) $\forall x (Px \rightarrow Rxy)$ |
| (b) $\forall x (Rxy \wedge \exists y Py)$ | (h) $\exists y (\exists x Rxy \wedge \neg Px)$ |
| (c) $\forall x Px \vee \forall y Rxy$ | (i) $\forall x (Rxx \rightarrow \exists y (Py \wedge Rxy))$ |
| (d) $\forall x (Px \rightarrow (Qx \vee \exists y \exists x Rxy))$ | (j) $\forall x \forall y (Px \rightarrow (Qx \vee Rxy))$ |
| (e) $\exists x (Px \wedge \exists y (Qx \vee Rxy))$ | (k) $\forall x \exists y Rxy$ |
| (f) $\exists y \forall y Rxy$ | (l) $\forall x (\exists x Px \rightarrow Rxy)$ |

1. Determineu-ne les ocurrencies de les variables lliures i de les variables lligades.
2. Determineu-ne les fórmules tancades.

Exercici 7. Sigui $\sigma = \{f^1, g^2, h^2, c, d\}$ i I la interpretació amb domini el conjunt nombres enters, definida com $I(f) =$ la funció successor, $I(g) = +$, $I(h) = *$, $I(c) = 2$ i $I(d) = 3$. Llavors, interpreteu els següents termes en I :

- (a) $f(c)$
- (b) $f(f(c))$
- (c) $g(f(c), f(d))$
- (d) $h(f(c), f(d))$
- (e) $h(f(f(c)), f(f(f(d))))$

Exercici 8. Siguin $\sigma = \{f^2, g^2, c, d, R^2\}$ i I la interpretació amb domini el conjunt dels nombres enters, definida com $I(f) = +$, $I(g) = *$, $I(c) = 0$, $I(d) = 1$, $I(R) = <$ i $I(x_n) = 2n$ si n és parell i $I(x_n) = -2n$ si n és senar. Llegiu i valideu les següents fórmules a partir de la interpretació donada:

- (a) $\exists x_0 (Rf(x_0, x_0)x_1 \wedge Rx_1 f(x_0, x_0))$
- (b) $\exists x_0 (Rg(x_0, x_0)c \wedge Rcg(x_0, x_0))$
- (c) $\forall x_0 \exists x_1 (Rdx_0 \wedge Rx_1 d)$
- (d) $\forall x_0 \exists x_1 \exists x_2 (Rx_0 x_2 \wedge Rx_2 x_1)$
- (e) $\forall x_0 \forall x_1 (Rx_0 x_1 \rightarrow \exists x_2 (Rx_0 x_2 \wedge Rx_2 x_1))$

Exercici 9. Siguin $\sigma = \{a, b, P^1, Q^1, R^2\}$ i la σ -interpretació I definida de la manera següent:

1. domini de $I = \{1, 2, 3\}$

2. $I(a) = 1$ i $I(b) = 2$
3. $I(P) = \{1, 2\}$
4. $I(Q) = \{1, 3\}$
5. $I(R) = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$

Llavors, determineu si les següents fórmules són certes en I :

- (a) $Pa \wedge \neg Qb$
- (b) $Pa \rightarrow Rab$
- (c) $\forall x Rxa$
- (d) $\exists x (Rxa \wedge Pb)$
- (e) $\forall x (Px \rightarrow \exists y (Qy \wedge Rxy))$

Exercici 10. Considereu el vocabulari $\sigma = \{c, d, f^1, R^2\}$ i la interpretació I amb domini $\{0, 1\}$, $I(c) = 0$, $I(d) = 1$, $I(f)(0) = 1$, $I(f)(1) = 0$ i $I(R) = \{(0, 0), (0, 1)\}$. Avalueu les següents fórmules en interpretar-les en I :

- | | |
|--|--|
| (a) $\forall v_0 \forall v_1 Rv_0 v_1$ | (f) $\forall v_0 \forall v_1 (Rv_0 v_1 \rightarrow Rv_1 v_0)$ |
| (b) $\exists v_0 \forall v_1 Rv_0 v_1$ | (g) $\forall v_0 Rv_0 v_0$ |
| (c) $\exists v_0 \forall v_1 Rv_1 v_0$ | (h) $\forall v_0 \exists v_1 Rv_0 v_1$ |
| (d) $\exists v_0 \neg Rcv_0$ | (i) $\forall v_0 \exists v_1 Rv_1 v_0$ |
| (e) $Rcf(c) \wedge Rdf(d)$ | (j) $\forall v_0 \forall v_1 (Rv_0 v_1 \rightarrow Rf(v_0)f(v_1))$ |

Exercici 11. Considereu el vocabulari $\sigma = \{a, f^2, R^2\}$. Per a cada una de les fórmules següents, trobeu una interpretació que la faci certa i un altra que la faci falsa.

1. Rxa
2. $\neg Rxf(x, y)$
3. $Rf(x, y)x \rightarrow Raf(x, y)$
4. $\forall x Rf(x, y)z$
5. $\exists z Rf(x, y)z$

Exercici 12. Sigui $\sigma = \{P^1, Q^1, R^2\}$. Determineu si els següents parells de fórmules són lògicament equivalents:

1. $\neg\forall x(Px \rightarrow Qx), \exists x(Px \wedge \neg Qx)$
2. $\neg\exists x\forall yRxy, \forall x\exists y\neg Rxy$
3. $\forall x(\neg Px \vee Qx), \neg\exists xPx \vee \forall xQx$
4. $\forall x\exists y(Px \rightarrow Rxy), \neg\exists x\forall y(Px \wedge \neg Rxy)$
5. $\exists x(Px \rightarrow Qx), \exists xPx \rightarrow \forall xQx$
6. $\forall x(Px \rightarrow Qc), \forall xPx \rightarrow Qc$

Exercici 13. Fent servir l'algorisme d'unificació, determineu si els següents parells d'àtoms són unificables:

- (1) Pa, Pb
- (2) Qax, Qxx
- (3) $Qxf(a), Qyy$
- (4) $Qg(b)z, Qyf(y)$
- (5) $Raxf(x), Rayy$
- (6) $Rxyz, Ruh(v, v)u$
- (7) $Rxxz, Ruh(u, u)v$

Exercici 14. Calculeu els resolvents dels següents parells de clàusules:

- (1) $\varphi_1 = \neg Px \vee Qxb, \varphi_2 = Pa \vee Qab$
- (2) $\varphi_1 = \neg Px \vee Qxx, \varphi_2 = \neg Qaf(a)$
- (3) $\varphi_1 = \neg Px \vee Qxy \vee Rg(x, y)xy, \varphi_2 = \neg Qaf(a)$

Exercici 15. Calculeu els resolvents de les dues següents clàusules:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \neg Pxy \vee \neg Pf(a)g(u, b) \vee Qxu, \\ \varphi_2 &= Pf(x)g(a, b) \vee \neg Qf(a)b \vee \neg Qab.\end{aligned}$$

Exercici 16. Fent servir la regla de resolució, deduir la clàusula buida \square del conjunt format per les següents clàusules

$$\varphi_1 = \neg Px \vee \neg Pf(a) \vee Qx,$$

$$\varphi_2 = \neg Pa \vee \neg Qb,$$

$$\varphi_3 = Py.$$

Exercici 17. Fent servir la regla de resolució, deduir la clàusula buida \square del conjunt format per les següents clàusules

$$\varphi_1 = Paz,$$

$$\varphi_2 = \neg Pf(f(a))a,$$

$$\varphi_3 = \neg Pxg(y) \vee Pf(x)y.$$

Exercici 18. Fent servir la regla de resolució, deduir la clàusula buida \square del conjunt format per les següents clàusules:

$$\varphi_1 = \neg Ax \vee Bx \vee Dxf(x),$$

$$\varphi_2 = \neg Ax \vee Bx \vee Cf(x),$$

$$\varphi_3 = Ac,$$

$$\varphi_4 = Ec,$$

$$\varphi_5 = \neg Dcy \vee Ey,$$

$$\varphi_6 = \neg Ex \vee \neg Bx,$$

$$\varphi_7 = \neg Ex \vee \neg Cx.$$