Problema 1. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas en el vocabulario $\sigma = \{a, f^2, P^1, Q^1, R^2\}$, justificando la respuesta.

(1) $Rxaz$.

(2) $PxQy$.

(3) $Rxf(a, x)$.

(4) $f(a, Ray)$.

(5) $\exists x \forall y(Px \to Rxy)$.

(6) $\forall x(Qx \to Sx)$.

**Solución**:

$Rxaz$ no es una fórmula, ya que por la definición del vocabulario $\sigma$, $R$ debe tener siempre dos argumentos, y en la fórmula aparecen tres argumentos para el predicado $R$.

$PxQy$ no es una fórmula, ya que una fórmula atómica, en este caso $Qy$, no puede figurar como argumento de otra fórmula atómica. Los argumentos de una fórmula atómica son siempre términos.

$Rxf(a, x)$ es una fórmula atómica, ya que $R$ es un símbolo de predicado de dos argumentos y $x, f(a, x)$ son términos.

$f(a, Ray)$ no es una fórmula, ya que la expresión comienza por un símbolo de función. Las expresiones que comienzan por símbolos de función sólo pueden ser términos. En este caso, la expresión $f(a, Ray)$ tampoco es un término, ya que $Ray$ no es término.

$\exists x \forall y(Px \to Rxy)$ es una fórmula. $Px$ y $Rxy$ son fórmulas atómicas, ya que $P$ tiene un argumento, $R$ tiene dos argumentos, y $x, y$ son términos al ser variables. Por la regla de la implicación, $Px \to Rxy$ es una fórmula, y ahora aplicando las reglas del para todo y del existe se tiene que $\exists x \forall y(Px \to Rxy)$ es una fórmula.

$\forall x(Qx \to Sx)$ no es una fórmula, ya que el predicado $S$ no está en el vocabulario $\sigma$.

Problema 2. Formalizar en lógica de predicados las siguientes frases:

(1) Todo volcán es una montaña.

(2) Ninguna colina es una montaña.

(3) En La Mancha no hay montañas, pero hay algunas colinas.

(4) El Everest es más alto que las montañas europeas.

Para ello, utilizar los siguientes predicados:

Mx: "x es una montaña",

Vx: "x es un volcán",

Cx: "x es una colina",

Exy: "x está en y",

Axy: "x es más alto que y".

**Solución**:

Representamos a La Mancha por a, a El Everest por b y a Europa por c. Obtenemos entonces las fórmulas siguientes:

(1) $\forall x(Vx \rightarrow Mx)$.

(2) $\forall x(Cx \rightarrow \neg Mx)$.

(3) $\neg\exists x(Mx \wedge Exa) \wedge \exists y(Cy \wedge Eya)$.

(4) $\forall x((Mx \wedge Exc) \rightarrow Abx)$.

Problema 3. Formalizar las siguientes frases:

(1) Ninguna torre se mueve en diagonal.

(2) Toda pieza se mueve en diagonal a no ser que sea una torre o un caballo.

(3) Las piezas blancas sólo comen piezas negras.

(4) Para que una torre coma un caballo es necesario que las dos piezas estén alineadas.

Para ello, utilizar el siguiente vocabulario:

Px para "x es una pieza",

Tx para "x es una torre",

Cx para "x es un caballo",

Dx para "x se mueve en diagonal",

Bx para "x es blanca",

Nx para "x es negra",

Oxy para "x come a y".

Axy para "x e y están alineadas".

**Solución:**

Obtenemos las siguientes fórmulas:

(1) $\forall x(Tx \to \neg Dx)$.

(2) $\forall x((Px \land \neg Tx \land \neg Cx) \to Dx)$.

(3) $\forall x((Px \land Bx) \to \forall y(Oxy \to (Py \land Ny))$.

(4) $\forall x \forall y((Tx \land Cy \land Oxy) \to Axy)$.

Problema 4. Consideremos el vocabulario $\sigma = \{f^1, P^2\}$ y la $\sigma$-interpretación I definida de la siguiente forma:

- dominio de $I = \{1, 2, 3\}$,
- $I(f)(1) = 2$, $I(f)(2) = 3$, $I(f)(3) = 1$,
- $I(P) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$.

Determinar entonces, razonando la respuesta, si las siguientes fórmulas son verdaderas o falsas en I:

(1) $\forall x Pxf(x)$,

(2) $\exists x \exists y \neg Pxy$,

(3) $\forall x \forall y (Pxy \to Pf(x)f(y))$,

(4) $\forall y \exists x Pf(x)y \to \exists x \forall y Pf(x)y$

**Solución**:

(1) es falsa y ello se puede comprobar tomando $x = 3$. Se tiene que $I(f)(3) = 1$ y sin embargo $(3, 1) \notin I(P)$. Por tanto, $\overline{P}\,3\overline{f}(3) = F$.

(2) es verdadera, lo cual se comprueba con $x = 1$ e $y = 1$. Como $(1, 1) \notin I(P)$, esta asignación da $\overline{P}11 = F$.

(3) es falsa y ello se puede comprobar tomando $x = 2$ e $y = 2$. Se tiene que $(2, 2) \in I(P)$, $I(f)(2) = 3$ y $(3, 3) \notin I(P)$. Por tanto $\overline{P}22 = V$ y $\overline{P}\,\overline{f}(2)\overline{f}(2) = F$, de lo cual se obtiene que $(\overline{P}22 \to \overline{P}\,\overline{f}(2)\overline{f}(2)) = F$.

(4) es verdadera ya que $\exists x \forall y Pf(x)y$ es verdadera. Esto último lo podemos justificar con $x = 1$. Tenemos que $\overline{f}(1) = 2$ y podemos comprobar que para cada valor $n$ de $y$ vamos a tener que $\overline{P}2n = V$, pues $(2, 1) \in I(P)$, $(2, 2) \in I(P)$ y $(2, 3) \in I(P)$. Por tanto, para cada valor $n$ de $y$ se tiene $\overline{P}\,\overline{f}(1)n$.

Problema 5. Consideremos el vocabulario $\sigma = \{c, f^1, P^1, Q^2\}$ y la $\sigma$-interpretación I definida de la siguiente forma:

- dominio de $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
- $I(P)n = V \iff n$ es par,
- $I(Q)nm = V \iff n$ es múltiplo de $m$,
- $I(f)(n) = 11 - n$ para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
- $I(c) = 3$,
- $I(v) = 5$ para cada variable $v$.

Determinar entonces, razonando la respuesta, si las siguientes fórmulas son verdaderas o falsas en I:

(1) $\exists x Q x f(x)$,
(2) $\exists x (Px \wedge Qxy)$,
(3) $\forall x (Qxc \rightarrow Px)$,
(4) $\exists x \forall y Qxy$,
(5) $\forall x (Pf(x) \rightarrow \exists y (Py \wedge Qyx))$.

**Solución:**

(1) es verdadera, ya que tomando $n = 10$, tenemos que $\overline{Q}10\overline{f}(10) = \overline{Q}10\,1 = V$.

(2) es verdadera. En esta ocasión, debemos interpretar la variable $y$ por $I(y) = 5$, ya que $y$ está libre en la fórmula. Se tiene entonces que la fórmula es cierta en $I$, ya que tomando $n = 10$ tenemos que $\overline{P}10 = V$ y $\overline{Q}10\,5 = V$.

(3) es falsa, porque no es verdad que para todo $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ se tenga que $\overline{Q}n3 = V$ implica que $\overline{P}n = V$, ya que tomando $n = 9$ tenemos que $\overline{Q}9\,3 = V$ pero $\overline{P}9 = F$.

(4) es falsa, ya que no es verdad que existe $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ tal que para todo $m \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ se tenga que $\overline{Q}nm = V$. Si $n < 10$ tenemos que $\overline{Q}n\,10 = F$, y si $n = 10$ tenemos que $\overline{Q}10\,3 = F$.

(5) es falsa, ya que no es verdad que para todo $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ se tenga que $\overline{P}\,\overline{f}(n) = V$ implica que existe $m \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ tal que $\overline{P}m = V$ y $\overline{Q}mn = V$. Para comprobarlo, tomamos $n = 9$. Se tiene entonces que $\overline{P}\,\overline{f}(n) = \overline{P}2 = V$ y no existe $m \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ tal que $m$ es par y $m$ es múltiplo de 9.

Problema 6. Consideremos la siguiente tabla:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | 1 | 2 | |
| | 3 | 4 | |
| | | | 5 |

Consideramos ahora el vocabulario $\sigma = \{E^2, F^2\}$ y la $\sigma$-interpretación $I$ definida de la siguiente manera:

- dominio de $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $I(E) = \{(x, y) : x$ está más arriba que $y$ en la tabla (no necesariamente en la misma columna) $\}$
- $I(F) = \{(x, y) : x \neq y$ y $x, y$ están en la misma fila de la tabla $\}$

Determinar entonces, razonando la respuesta, si las siguientes fórmulas son verdaderas o falsas en I:

(1) $\exists x \forall y Exy$

(2) $\forall x \exists y Eyx$

(3) $\exists x \forall y \neg Fyx$

(4) $\exists x \exists y \exists z (Fxy \wedge Exz)$

(5) $\exists x \forall y (\neg Exy \wedge \neg Fxy)$

**Solución**:

(1) es falsa, ya que en la tabla no hay ningún número que esté más arriba que todos los demás números.

(2) es falsa, ya que si $x = 1$, en la tabla no hay ningún número más arriba que el 1.

(3) es verdadera, ya que tomando $x = 5$ tenemos que para todo $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 5 e $y$ no están en la misma fila si $y \neq 5$.

(4) es verdadera, ya que tomando $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$, se tiene que $x, y$ están en la misma fila y $x$ está más arriba que $z$.

(5) es verdadera, ya que tomando $x = 5$ tenemos que para todo $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 5 no está más arriba que $y$, y 5 e $y$ no están en la misma fila si $y \neq 5$.

Problema 7. Determinar, razonando la respuesta, si los siguientes pares de fórmulas son lógicamente equivalentes:

(1) $\phi_1 = \forall x(Px \vee Qx)$, $\phi_2 = \forall xPx \vee \forall xQx$.

(2) $\phi_1 = \neg\exists x\forall yRxy$, $\phi_2 = \forall x\exists y\neg Rxy$.

(3) $\phi_1 = \neg\exists x\forall y(Px \wedge \neg Rxy)$, $\phi_2 = \forall x\exists y(Px \to Rxy)$.

(4) $\phi_1 = \forall x(Px \to Qc)$, $\phi_2 = (\forall xPx) \to Qc$.

**Solución:**

(1) Las fórmulas no son lógicamente equivalentes. Para comprobarlo, definimos la siguiente interpretación $I$:

- dominio de $I = \{0, 1\}$,
- $I(P) = \{0\}$,
- $I(Q) = \{1\}$.

Se tiene entonces que $I(\phi_1) = V$, pero $I(\phi_2) = F$.

(2) Las fórmulas son lógicamente equivalentes, pues $\neg\exists x\forall yRxy \equiv \forall x\neg\forall yRxy \equiv \forall x\exists y\neg Rxy$.

(3) Las fórmulas son lógicamente equivalentes, pues $\neg\exists x\forall y(Px\wedge\neg Rxy) \equiv \forall x\neg\forall y(Px\wedge\neg Rxy) \equiv \forall x\exists y\neg(Px\wedge\neg Rxy) \equiv \forall x\exists y(\neg Px\vee Rxy) \equiv \forall x\exists y(Px \to Rxy)$.

(4) Las fórmulas no son lógicamente equivalentes. Para comprobarlo, definimos la siguiente interpretación $I$:

- dominio de $I = \{0, 1\}$,
- $I(c) = 0$,
- $I(P) = \{0\}$,
- $I(Q) = \{1\}$.

Se tiene entonces que $I(\forall x(Px \to Qc)) = F$, ya que tomando $x = 0$ tenemos que $\overline{P}0 = V$ pero $\overline{Q}\overline{c} = \overline{Q}0 = F$. Y por otra parte, tenemos que $I((\forall xPx) \to Qc) = V$, ya que $I(\forall xPx) = F$.

Problema 8. Demostrar por resolución que la cláusula vacía $\square$ se deduce de las siguientes cláusulas:

$\varphi_1 = \neg Px \vee \neg Pf(a) \vee Qx$,

$\varphi_2 = \neg Pa \vee \neg Qb$,

$\varphi_3 = Py$.

**Solución**: Tenemos la siguiente deducción por resolución:

(b) Tenemos la siguiente prueba por resolución:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg Px \vee \neg Pf(a) \vee Qx$ | input |
| 2 | $\neg Pa \vee \neg Qb$ | input |
| 3 | $Py$ | input |
| 4 | $\neg Qb$ | $(2,3)$ tomando $\{y = a\}$ |
| 5 | $\neg Pb \vee \neg Pf(a)$ | $(1,4)$ tomando $\{x = b\}$ |
| 6 | $\neg Pb$ | $(3,5)$ tomando $\{y = f(a)\}$ |
| 7 | $\square$ | $(3,6)$ tomando $\{y = b\}$ |

<u>Problema 9</u>. Demostrar por resolución que la cláusula vacía $\Box$ se deduce del conjunto de cláusulas $\{Paz, \neg Pf(f(a))a, \neg Pxg(y) \vee Pf(x)y\}$.

**Solución**:

Tenemos la siguiente deducción por resolución:

| | |
|---|---|
| 1. $Paz$ | input |
| 2. $\neg Pf(f(a))a$ | input |
| 3. $\neg Pxg(y) \vee Pf(x)y$ | input |
| 4. $\neg Pf(a)g(a)$ | (2,3) tomando $\{x = f(a), y = a\}$ |
| 5. $\neg Pag(g(a))$ | (3,4) tomando $\{x = a, y = g(a)\}$ |
| 6. $\Box$ | (6,8) tomando $\{z = g(g(a))\}$ |

Problema 10. Calcular los resolventes de las dos siguientes cláusulas:

$\varphi_1 = \neg Pxy \vee \neg Pf(x)x \vee \neg Pf(a)h(u,b) \vee Qxu$,

$\varphi_2 = Pvv \vee \neg Qf(a)b$.

**Solución**: Distinguimos los siguientes casos:

**Caso 1**. Elegimos en $\varphi_1$ el literal $\neg Pxy$ y en $\varphi_2$ el literal $Pvv$.

Aplicando el algoritmo de unificación, vemos que el conjunto $\{Pxy, Pvv\}$ es unificable por $\{v = x, y = x\}$. Por tanto, obtenemos el resolvente:

$$\neg Pf(x)x \vee \neg Pf(a)h(u,b) \vee Qxu \vee \neg Qf(a)b.$$

**Caso 2**. Elegimos en $\varphi_1$ el literal $\neg Pf(x)x$ y en $\varphi_2$ el literal $Pvv$.

En este caso, el conjunto $\{Pf(x)x, Pvv\}$ no es unificable, ya que aplicando el algoritmo de unificación, emparejaríamos $v$ con $f(x)$, obteniendo el conjunto $\{Pf(x)x, Pf(x)f(x)\}$. Pero este último conjunto no se puede unificar, ya que $x$ no puede emparejar con $f(x)$. Recordar que en cada paso del algoritmo de unificación se empareja una variable $z$ con un término $t$ de manera que la variable $z$ no aparece en el término $t$. Por consiguiente, no hay resolvente en este caso.

**Caso 3**. Elegimos en $\varphi_1$ el literal $\neg Pf(a)h(u,b)$ y en $\varphi_2$ el literal $Pvv$.

En este caso, el conjunto $\{Pf(a)h(u,b), Pvv\}$ no es unificable, ya que aplicando el algoritmo de unificación, emparejaríamos $v$ con $f(a)$, obteniendo el conjunto $\{Pf(a)h(u,b), Pf(a)f(a)\}$. Pero este último conjunto no se puede unificar, ya que $h(u,b)$ no unifica con $f(a)$, por ser términos con diferentes operadores. Por tanto, no hay resolvente en este caso.

**Caso 4**. Elegimos en $\varphi_1$ el literal $Qxu$ y en $\varphi_2$ el literal $\neg Qf(a)b$.

Aplicando el algoritmo de unificación, vemos que el conjunto $\{Qxu, Qf(a)b\}$ es unificable por $\{x = f(a), u = b\}$. Por tanto, obtenemos el resolvente:

$$\neg Pf(a)y \vee \neg Pf(f(a))f(a) \vee \neg Pf(a)h(b,b) \vee Pvv.$$