河海大学2019-2020学年工科类《概率论与数理统计》试卷

一、填空与选择题（每小题3分，本题满分21分）

1.在三次独立重复射击中，若至少有一次击中目标的概率为$\frac{37}{64}$，则每次射击击中目标的概率为________。

2.设r.v. X与Y相互独立，且

X	-1	1
p	0.5	0.5

，

Y	-1	1
p	0.5	0.5

，则$P\{X=Y\}=$（　　）。

（A）0.25　　（B）0.75　　（C）0.5　　（D）1

3.设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ kx^2, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ 则$k=$________。

4.设随机变量$X\sim B(n,p)$，且$E(X)=2.4$，$D(X)=1.44$，则$n=$________，$p=$________。

5.下列结论中，**不是**随机变量X与Y不相关的充要条件的是（　　）。

（A）$E(XY)=E(X)E(Y)$　　（B）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

（C）$Cov(X,Y)=0$　　（D）X与Y相互独立

6.设$X_1,X_2,\cdots,X_{12}$来自正态总体$N(0,1)$，$Y=\left(\sum_{i=1}^{4}X_i\right)^2+\left(\sum_{i=5}^{8}X_i\right)^2+\left(\sum_{i=9}^{12}X_i\right)^2$，当常数$k=$ ________时，kY服从χ^2分布。

7. 设两独立样本$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$分别来自总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中μ_1、μ_2未知，σ_1^2、σ_2^2已知，$\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}Y_j$，则$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间为___________.

二、（本题满分10分）设随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ A-x, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$（1）求常数$A$；（2）求$P\{0.2<X<1.2\}$；（3）求$X$的分布函数。

三、（本题满分9分）设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$求随机变量$Y=X^2$的概率密度函数$f_Y(y)$。

四、（本题满分14分）设(X,Y)的概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}A(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$其中$A$为常数。（1）求$A$；（2）求$D(X+Y)$；（3）求$Z=X+Y$的概率密度函数。

五、（本题满分10分）设随机变量X与Y满足：$D(X)=2$，$D(Y)=4$，$Cov(X,Y)=1$。令$U=2X-3Y$，$V=3X-2Y$。求U与V的相关系数ρ_{UV}。

六、试解下列各题（本题满分 28 分，每小题 7 分）

（1）若总体 X~$P(\lambda)$，其分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，$\lambda>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本。求参数λ的矩估计量 $\hat{\lambda}_M$，并判断 $\hat{\lambda}_M$ 是否为λ的无偏估计。

（2）设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

（0<θ<$\dfrac{1}{2}$）是未知参数，利用总体 X 的样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 3, 2，求θ的极大似然估计值 $\hat{\theta}_{MLE}$。

（3）随机地选取某种炮弹 9 发做试验，测得炮口速度的样本标准差 $s=11$ (m/s)。设炮口速度服从正态分布，求炮口速度的方差 σ^2 的置信度为 95%的置信区间。

（4）设某种产品的某项指标服从正态分布，已知它的标准差 $\sigma=150$。现从一批产品中随机抽取 26 个，测得该项指标的平均值为 1637，问能否认为这批产品的该项指标值为 1600（$\alpha=0.05$）。【参考数值：$z_{0.025}=1.96$，$z_{0.05}=1.645$，$t_{0.025}(25)=2.060$，$t_{0.05}(25)=1.708$，$t_{0.025}(26)=2.056$，$t_{0.05}(26)=1.706$，$\sqrt{26}=5.1$】

七、（本题满分 8 分）设二维随机变量(X,Y)服从区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$ 上的均匀分布。令$U=\begin{cases}0, & X\le Y,\\ 1, & X>Y,\end{cases}$ $V=\begin{cases}0, & X\le 2Y,\\ 1, & X>2Y.\end{cases}$ 问 U 与 V 是否独立？为什么？

参考解答

一、填空与选择题（每小题 3 分，本题满分 21 分）

(1)1/4；(2) C；(3) 1；(4) 6，0.4；(5) D；(6) 1/4；(7)$(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})$

二、（本题满分 10 分）（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \Rightarrow \int_0^1 xdx+\int_1^2 (A-x)dx=1 \Rightarrow$ A=2

（2）$P\{0.2<\mathrm{X}<1.2\}=\int_{0.2}^{1.2} f(x)dx=\int_{0.2}^{1} xdx+\int_1^{1.2}(2-x)dx=0.66$

（3）$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_0^x xdx=\frac{x^2}{2}, & 0\le x\le 1\\ \int_0^1 xdx+\int_1^x(2-x)dx=-\frac{x^2}{2}+2x-1, & 1<x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

三、（本题满分 9 分） $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$。当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0\Rightarrow f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx$

$\Rightarrow f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})]=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})=\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}$

综上有$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$。

四、（本题满分 14 分）（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{dxdy}=1\Rightarrow$ A=1/8

（2）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{dxdy}=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{x}{8}(x+y)\mathrm{dy}=\frac{7}{6}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)\mathrm{dxdy}=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{x^2}{8}(x+y)\mathrm{dy}=\frac{5}{3}$，同理 $E(Y)=\frac{7}{6}$，$E(Y^2)=\frac{5}{3}$

$\Rightarrow D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{11}{36}$，同理 $D(Y)=\frac{11}{36}$

$\Rightarrow Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{36}\Rightarrow D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=\frac{5}{9}$

（3）$f(z-y,y)=\begin{cases}\frac{z}{8}, & y<z<2+y,\ 0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy=\begin{cases}\int_0^z\frac{z}{8}dy=\frac{z^2}{8}, & 0<z\le 2,\\ \int_{z-2}^{2}\frac{z}{8}dy=\frac{(4-z)z}{8}, & 2<z\le 4,\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

五、（本题满分 10 分） $D(U)=D(2X-3Y)=4D(X)+9D(Y)-12Cov(X,Y)=32$

$D(V)=D(3X-2Y)=9D(X)+4D(Y)-12Cov(X,Y)=22$

$Cov(U,V)=Cov(2X-3Y,3X-2y)=6Cov(X,X)-4Cov(X,Y)-9Cov(Y,X)+6Cov(Y,Y)$

$=6D(X)-4Cov(X,Y)-9Cov(X,Y)+6D(Y)=23\Rightarrow\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{23}{88}\sqrt{11}=0.87$

六、（本题满分 14 分）（1）由矩估计法有 $E(X)=\overline{X}$，又因为 $X\sim P(\lambda)$，所以 $E(X)=\lambda$，于是有 $\hat{\lambda}_M=\overline{X}$。因为 $E(\hat{\lambda}_M)=E(\overline{X})=E(X)=\lambda$，所以 $\hat{\lambda}_M=\overline{X}$ 为 λ 的无偏估计。

（2）似然函数为

$L(\theta)=P\{X_1=3\}P\{X_2=1\}P\{X_3=3\}P\{X_4=0\}P\{X_5=3\}P\{X_6=1\}P\{X_7=3\}P\{X_8=2\}=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$

$\Rightarrow \ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)\Rightarrow\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=0\Rightarrow\theta_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$,

又因为 $0<\theta<\frac{1}{2}$，所以 $\hat{\theta}_{MLE}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$

七、（本题满分 14 分）（1）由题意总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 未知，于是 σ^2 的置信度为 1−α的置信区间为 $(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$，又 n=9，s=11，α=0.05，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(8)=17.534$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(8)=2.180$，代入得 σ^2 的 95%的置信区间为 $(\frac{968}{17.534},\frac{968}{2.180})=(55.21,444.04)$

（2）由题意总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，提出假设 $H_0:\mu=1600$，$H_1:\mu\neq 1600$。$\sigma=150$ 已知，于是构造检验统计量为 $U=\frac{\bar{x}-1600}{\sigma/\sqrt{n}}\overset{H_0为真}{=}\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，$P\{H_1|H_0\}=\alpha$ 可得拒绝域为 $|U|>z_{\alpha/2}$。又 n=26，$\bar{x}=1637$，$\sigma=150$，$\alpha=0.05$，$z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$，代入公式计算得 $|U|=1.256<1.96$，所以接受 H_0，即在置信度 95%下可以认为这批产品该项指标值为 1600。

八、（本题满分 8 分） 由题意可知(X,Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & otherwise\end{cases}$，于是

$P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=\iint_{x\le y}f(x,y)dxdy=\frac{1}{4}$，$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=0$

$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\le 2Y\}=P\{Y<X\le 2Y\}=\iint_{y<x\le 2y}f(x,y)dxdy=\frac{1}{4}$，$P\{U=1,V=1\}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

由上可得（U,V）的联合分布律为

U \ V	0	1	$p_{i\cdot}$
0	1/4	0	1/4
1	1/4	1/2	3/4
$p_{\cdot j}$	1/2	1/2	1

，进一步可得 U 和 V 的边缘分布律如表，由于 $P\{U=0,V=1\}=0\neq P\{U=0\}P\{V=1\}=1/8$，所以 U 与 V 不相互独立。