河海大学 2022-2023 学年第一学期

《高等数学 AI》期末试卷(A 卷)

考试对象: 2022 级物理、力学、海洋等专业

考试时间: 2023 年 02 月 15 日

专业__________学号____________姓名___________成绩__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩
得分									

得分	

一. 选择题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+1, & x<0 \\ \cos x, & x\ge 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 连续, 可导　　B. 连续, 不可导　　C. 不连续, 可导　　D. 不连续, 不可导

2. 参数方程 $\begin{cases} x=\ln(e+\sin t) \\ y=e^t-\cos t \end{cases}$ 表示的曲线在对应 $t=0$ 处的切线方程为(　　).

A. $y=e(x-1)$　　B. $y=-e(x-1)$　　C. $y=\dfrac{1}{e}(x-1)$　　D. $y=-\dfrac{1}{e}(x-1)$

3. 下列直线中, 不是曲线 $y=(1+e^x)^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线的是(　　).

A. $y=0$　　B. $y=1$　　C. $y=e$　　D. $x=0$

4. 下列反常积分中收敛的是(　　).

A. $\int_0^1 \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　B. $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x$　　C. $\int_e^{+\infty} \dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$　　D. $\int_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$

5. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数且 $f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x^2}=1$，则(　　).

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

得分	

二．填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2022^n+2023^n+2024^n}=$ ____________________.

2. 设 $f(x)$ 是 $y=\dfrac{e^x}{x}$ 的一个原函数，则 $\mathrm{d}[f(\sin x)]=$ ____________________.

3. $\int_{-1}^{1}(x^{2023}\cos x+\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=$ ____________________.

4. 设曲线 $y=f(x)$ 在点(1,2)处的曲率圆为 $(x-1)^2+y^2=4$,则该曲线在点(1,2)处的曲率为____________.

5. 写出函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的概念：____________________________________
____.

得分	

三．解答题(每小题 6 分，共 30 分)

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(\sqrt{1+t^2}-1\right)t\,\mathrm{d}t}{x^2-2(1-\cos x)}$.

2. 用定积分表示 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$，并求其值.

3. 求不定积分 $\int x^2 \arctan x \mathrm{d}x$.

4. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$ 在 $x=1$ 处带皮亚诺余项的 4 阶泰勒公式.

5. 已知方程 $\cos(xy)+\int_1^y e^{-t^2}\mathrm{d}t = x+1$ 确定隐函数 $y=f(x)$，求 y'，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$.

得分	

四．(8 分)求解微分方程 $y''-4y'+5y=2(x-1)e^{x}$.

得分	

五．(8 分)设 $F(x)=\int_0^x e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t$，求 $F(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上的极大值与极小值.

得分	

六．(10 分)已知 $y=f(x)$ 在[0,1]上可导，在(0,1)内大于零，且满足

$$xf'(x)-f(x)=\frac{3a}{2}x^2 \quad (a\text{ 为常数}).$$

曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1$ 及 $y=0$ 所围图形 S 的面积值为 2. 问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小.

得分	

七．(6 分)证明：$(1+x)\ln(1+x)+\sin x<2x+\dfrac{x^2}{2}, \quad \forall x\in(0,\pi).$

得分	

八．(8 分)设 $a>0$, $f(x),g(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续函数，$g(x)$ 是偶函数，且

$$f(x)+f(-x)\equiv A,\quad A\text{是常数}.$$

(1) 证明：$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = A\int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x$；

(2) 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\arctan e^{x}\mathrm{d}x.$