第十七章 平面图及图的着色

说明：本章所涉及的图均指无向图。

17.1 平面图的基本概念

定义17.1（平面图）

如果图G能以这样的方式画在曲面S上，即除顶点处外无边相交，则称**G可嵌入曲面S**。若G可嵌入平面，则称G是**平面图**。

画出的无边相交的图称为**G的平面嵌入**。

无平面嵌入的图称为**非平面图**。

例如： K_1（平凡图）、K_2、K_3、K_4都是平面图，其中K_1、K_2、K_3本身就是平面嵌入。

K_5不是平面图，但K_5-e是平面图。

完全二部图$K_{1,n}$（$n\geq1$），$K_{2,n}$（$n\geq2$）也都是平面图。

平面图的性质：

定理17.1 若图G是平面图，则G的任何子图都是平面图。

定理17.2 若图G是非平面图，则G的任何母图也都是非平面图。

推论 K_n（n≥5）和$K_{3,n}$（n≥3）都是非平面图。

定理17.3 若图G是平面图，则在图G中加平行边或环后得到的图还是平面图。

说明： 平行边或环不影响图的平面性。

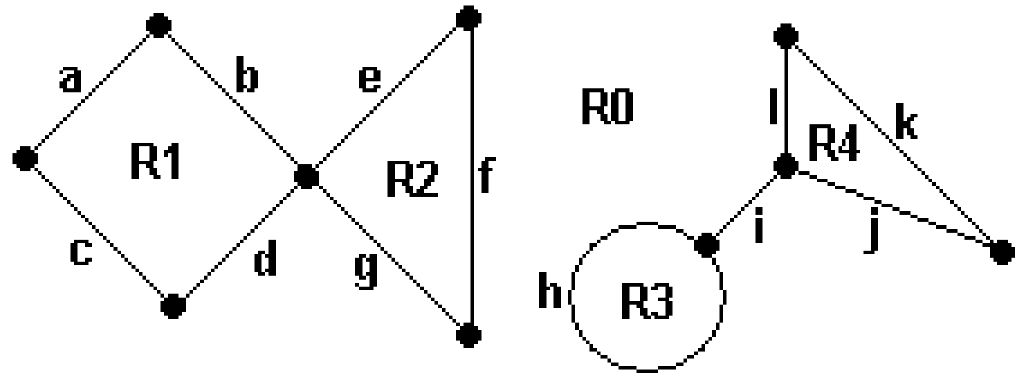
定义17.2（面）若图G是平面图（且已是平面嵌入），由G的边将G所在的平面划分成若干区域，每个区域都称为G的一个**面**。

面积无限的面称为**无限面**或**外部面**。面积有限的面称为**有限面**或**内部面**。

每个面的所有边组成的回路或回路组称为该面的**边界**，边界的长度称为该面的**次数**。

外部面记为R_0，内部面记为R_1，R_2，…，R_k，面R的次数记为$\deg(R)$。

说明：定义中的回路组可能是圈、环、简单回路、复杂回路，或以上元素的并。



R_1的边界为圈abdc，deg(R_1)=4；

R_2的边界为圈egf，deg(R_2)=3；

R_3的边界为环h，deg(R_3)=1；

R_4的边界为圈kjl，deg(R_4)=3；

R_0的边界由一个简单回路abefgdc和一个复杂回路kjihil组成的回路组，deg(R_0)=13；

定理17.4 平面图G中所有面的次数之和等于边数m的两倍。

如果一个图可以画出的无边相交的形式（可嵌入平面），则该图是平面图。

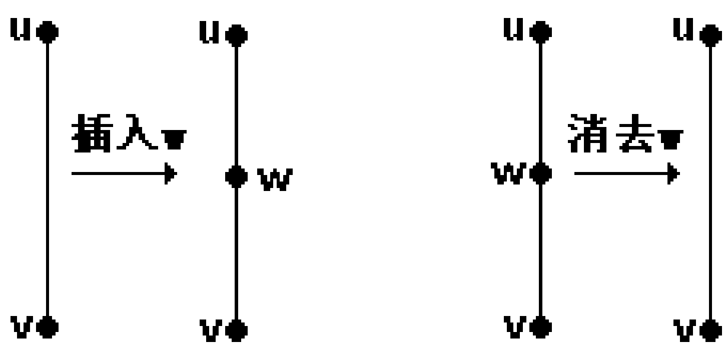
如何判断一个图是平面图？

17.3 平面图的判断

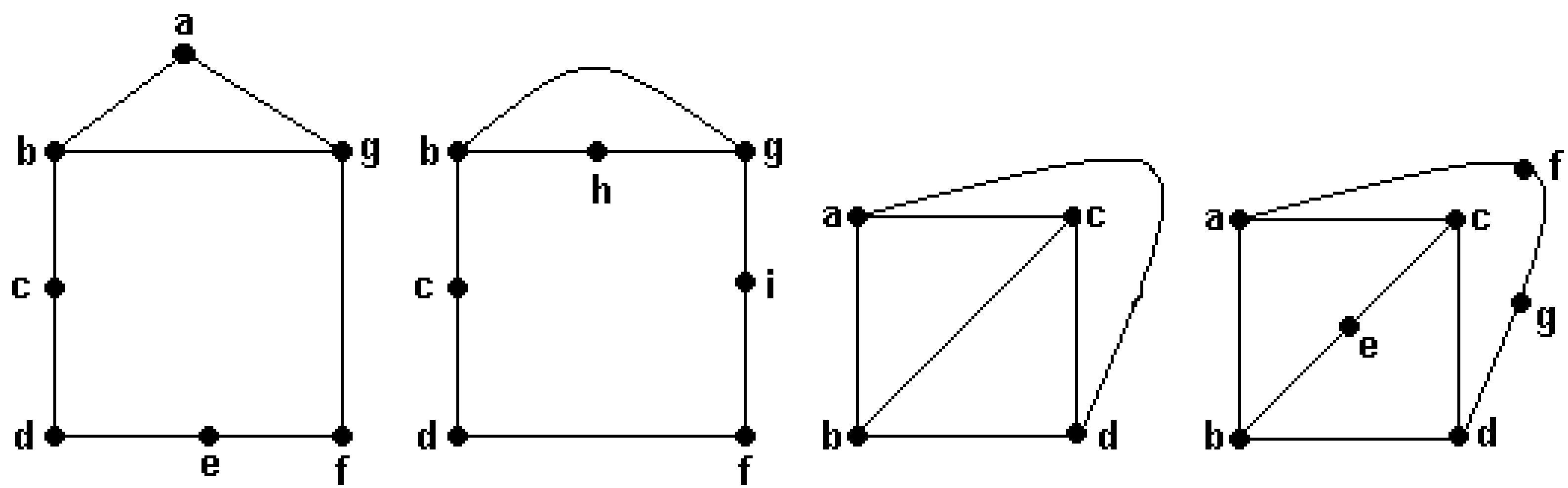
定义17.5

设e=(u, v)是图G的一条边，在G中删除e，增加新的顶点w，使u, v均与w相邻，称为在G中**插入2度顶点w**。

设w为G中的一个2度顶点，w与u, v相邻，删除w，增加新边(u, v)，称为在G中**消去2度顶点w**。



定义17.6（同胚） 若两个图G1与G2同构，或通过反复插入或消去2度顶点后是同构的，则称G1与G2是**同胚的**。

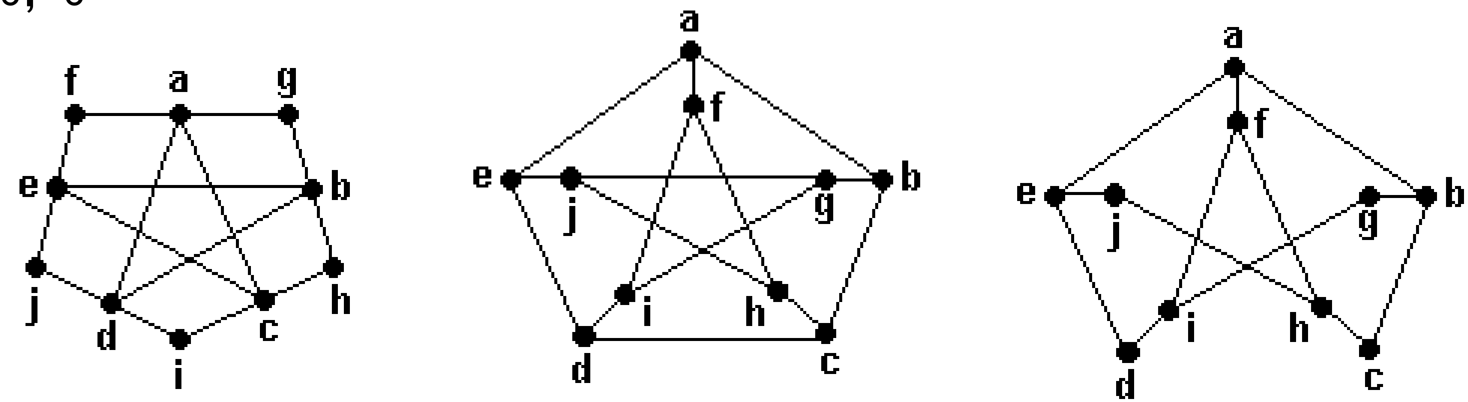


（1） （2） （3） （4）

（1）与（2）是同胚的，（3）与（4）是同胚的

定理17.15（库拉图斯基定理1） 图G是平面图当且仅当G中不含与K_5的同胚子图也不含与$K_{3,3}$的同胚子图。

定理17.16（库拉图斯基定理2）图G是平面图当且仅当G中即没有可以收缩到K_5的子图，也没有可以收缩到$K_{3,3}$的子图。



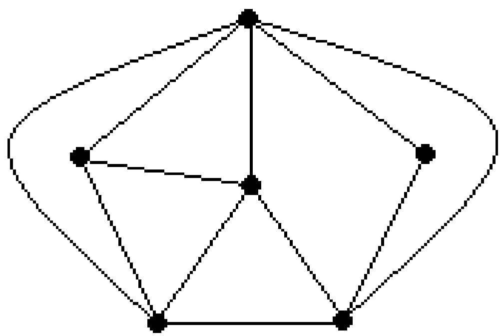
（1） （2） （3）

（1）与K_5同胚，并且（1）可以收缩到K_5，所以（1）不是平面图。

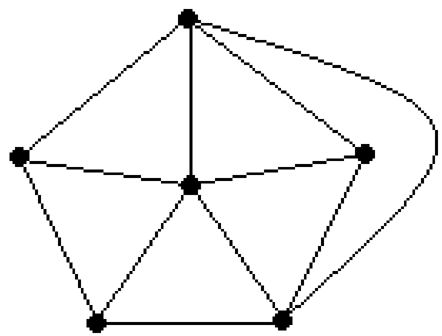
（2）可以收缩到K_5，所以（2）不是平面图。

（2）的子图（3）与$K_{3,3}$同胚，所以（2）不是平面图。

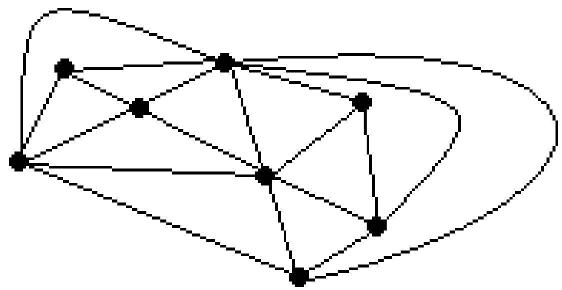
定义17.3（极大平面图）若图G是简单平面图，若在G的任意不相邻的顶点之间加一条边，所得图为非平面图，则称G为**极大平面图**。（P325）



（1）



（2）



（3）

其中只有（3）是极大平面图。

定理17.7（极大平面图的判定）设G是n（n≥3）阶简单连通平面图，G为极大平面图，当且仅当G的每个面的次数均为3。

极大平面图的性质：

定理17.5 极大平面图是连通的。

定理17.6 设G是n（$n\geq 3$）阶极大平面图，则G中不可能存在割点和桥。

定义17.4（极小非平面图）若在非平面图G中任意删除一条边，所得图为平面图，则称G为**极小非平面图**。

例如：K_5和$K_{3,3}$为极小非平面图。

17.4 平面图的对偶图

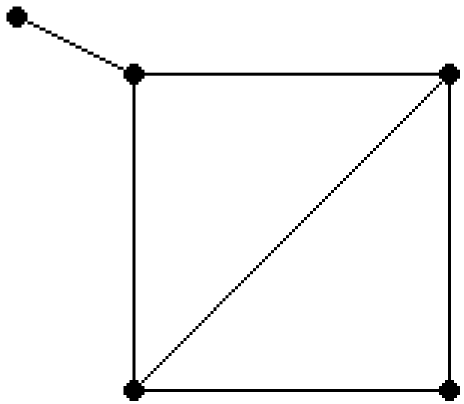
定义17.7（对偶图） 设G是某平面图的某个平面嵌入，m，r分别为G的边数，面数。构造图G^*如下：

（1）在G的面R_i中的任取一个点 v_i^*作为G^*的顶点，则G^*的顶点集为$V^*=\{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_r^*\}$

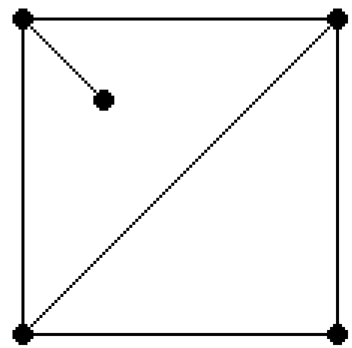
（2）若面R_i和R_j的边界中有公共边e_k，连接对应的顶点v_i^*和v_j^*，得到G^*的边e_k^*与e_k相交。当e_k为桥且在G的一个面R_i的边界上时，以R_i中的顶点v_i^*为顶点作环e_k^*，e_k^*为G^*中的一个环。最终得到G^*的边集为$E^*=\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*\}$。

称$G^*=<V^*, E^*>$为G的**对偶图**。

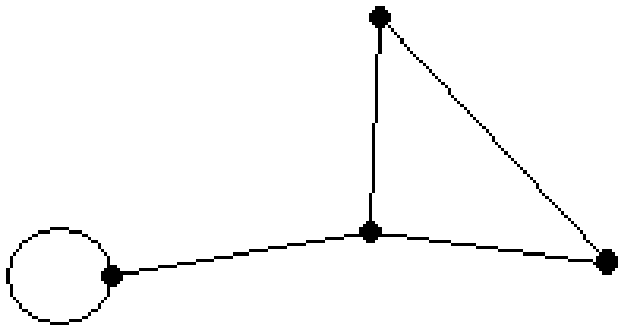
例如： 构造下面平面图的对偶图。



（1）



（2）



（3）

平面图G与其对偶图G*的顶点数，边数，面数有如下的关系：

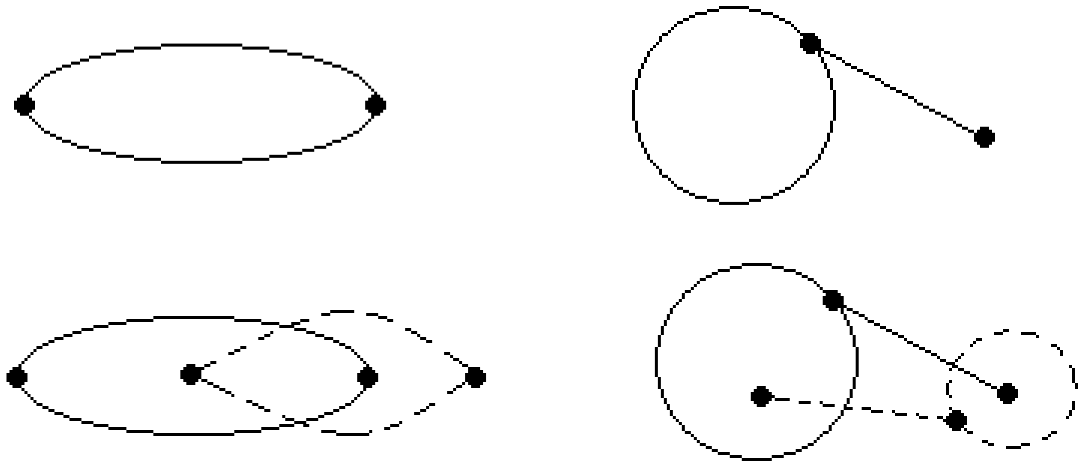
定理17.17 设G*是连通平面图G的对偶图，n^*, m^*, r^*和n, m, r分别是G*和G的顶点数，边数，面数，则

（1）$n^*=r$

（2）$m^*=m$

（3）$r^*=n$

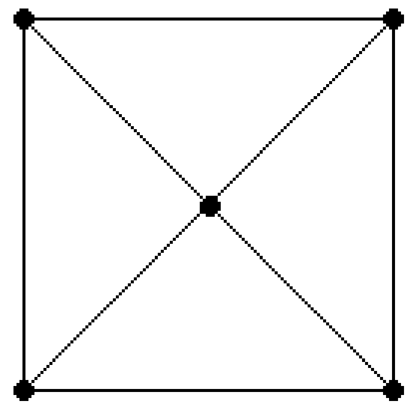
（4）设G*的顶点v_i^*位于G的面R_i中，则$d_{G^*}(v_i^*)=\deg(R_i)$



定义17.8(自对偶图) 设G*是G的对偶图，若G*≌G，则称G为自对偶图。

轮图： 在n-1（n≥4）边形内放一个顶点，使这个顶点与（n-1）边形上的所有顶点均相邻，所得到的n阶简单图称为**n阶轮图**，记作W_n。n为奇数的轮图称为**奇阶轮图**，n为偶数的轮图称为**偶阶轮图**。

例如： 下图为5阶轮图。

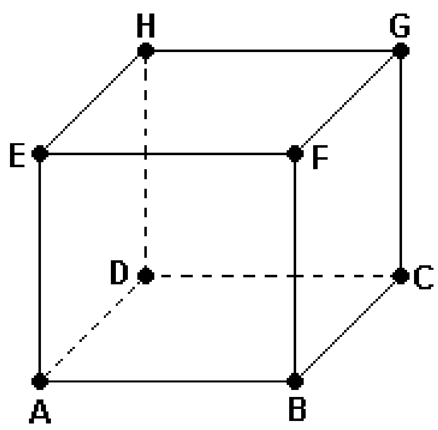


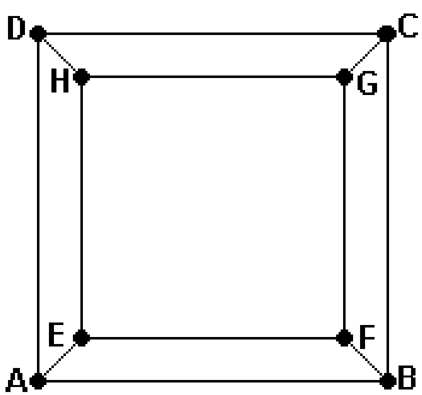
说明： 轮图都是自对偶图。

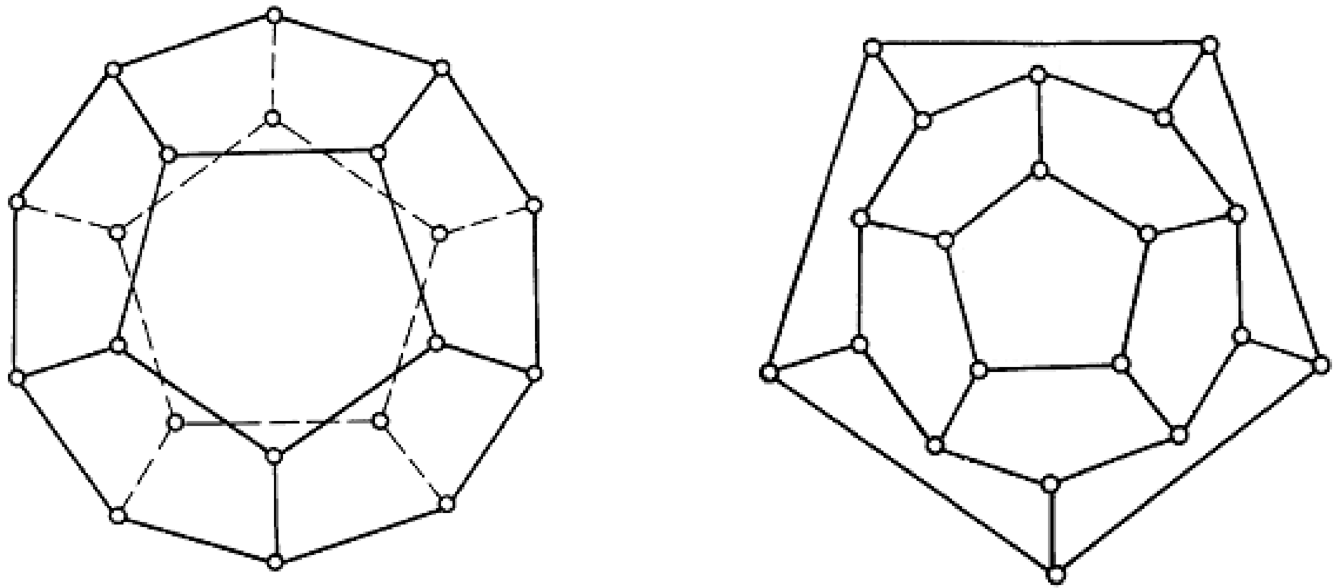
17.2 平面图中欧拉公式

欧拉在研究多面体时发现，多面体的

顶点数-棱数+面数=2







12面体（含20个顶点，30条边）

连通的平面图的阶数，边数，面数也满足欧拉公式。

定理17.8(欧拉公式) 如果图G是任意的连通的平面图，则有$n-m+r=2$成立。其中n为G中顶点数，m为边数，r为面数。

思考：对于具有k（k≥2）个连通分支的平面图G，

$$n-m+r=?$$

定理17.9（欧拉公式的推广）对于任意的具有k（k≥2）个连通分支的平面图G，有$n-m+r=k+1$。其中n为G中顶点数，m为边数，r为面数。

由欧拉公式及其推广可以得到平面图的一些性质：

定理17.10 设G是连通的平面图，且每个面的次数至少为l(l≥3)，则G的边数m与顶点数n有如下的关系：

$$m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$$

推论 K_5和$K_{3,3}$都不是平面图。

定理17.11 设G是具有k（k≥2）个连通分支的平面图，且每个面的次数至少为l(l≥3)，则G的边数m与顶点数n有如下的关系：

$$m \le \frac{l}{l-2}(n-k-1)$$

17.5-7 平面图的着色问题

图的着色问题起源于“四色猜想”。

四色猜想问题：至多用4种颜色就能给平面或球面上的地图着色，使相邻的国家染上不同的颜色。

1852年，英国的业余数学家弗朗西斯.格斯里发现对于能够找到的地图，只需要4种颜色就能使得相邻的国家染上不同的颜色。

请问：能不能找到需要5种或更多种颜色的例子？

四色猜想问题已提出150多年了，但是至今还没有在理论上得到彻底解决，成为数学领域中最难解决的问题之一。

着色问题包含点着色、边着色、面着色等。

定义17.9(点着色) 对无环图G的每个顶点涂上一种颜色，使相邻的顶点涂不同的颜色，称为对图G的一种着色。

定义17.11（面着色） 对平面图G的每个面涂上一种颜色，使相邻的面涂不同的颜色，称为对G的一种面着色。

定义17.12（边着色） 对无环无向图G的每条边涂上一种颜色，使相邻的边涂上不同的颜色，称为对G的一种边着色。

定义17.9（点着色） 对无环图G的每个顶点涂上一种颜色，使相邻的顶点涂不同的颜色，称为对图G的一种**着色**。

若能用k种颜色给G的顶点着色，就称对G进行了**k着色**，也称G是**k-可着色的**。

若G是k-可着色的，但不是（k-1）-可着色的，就称G是**k色图**，并称这样的k为G的**色数**，记作$\chi(G)=k$，简记为χ。

k色图性质：

定理17.19 $\chi(G)=1$当且仅当G是零图。

定理17.20 $\chi(K_n)=n$。

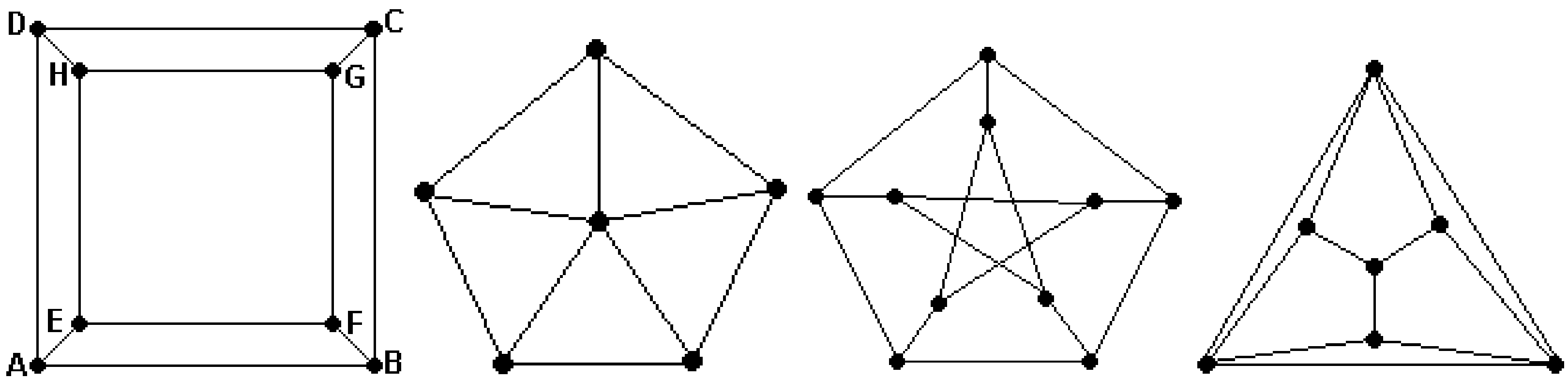
定理17.21 奇圈和奇阶轮图的色数均为3，而偶阶轮图的色数为4。

定理17.22 设G中至少含一条边，则$\chi(G)=2$当且仅当G为二部图。

定理17.23 对于任意的无环图G，均有$\chi(G)\leq\Delta(G)+1$。

定理17.14（布鲁克斯定理） 设连通图G不是完全图（$n\geq3$），也不是奇圈，则$\chi(G)\leq\Delta(G)$。

例17.14 判断下图的色数。



（G1）　（G2）　（G3）　（G4）

解：

（1）G1中无奇数长度的回路，所以G1为二部图，色数为2。

（2）G2为6阶轮图，色数为4。

（3）由布鲁克斯定理，$\chi(G3)\leq 3$；又由于G3中有奇圈，所以$\chi(G3)\geq 3$。所以$\chi(G3)=3$。

（4）由布鲁克斯定理，$\chi(G4)\leq 4$；又由于G4中有奇圈，所以$\chi(G4)\geq 3$。所以$3\leq\chi(G4)\leq 4$。

实际$\chi(G4)=4$。

17.6 地图的着色与平面图的面着色

定义17.10（地图和国家）连通无桥平面图的平面嵌入及其所有的面称为**平面地图**或**地图**，地图的面称为**国家**。若两个国家的边界至少有一条公共边，则称这两个国家是**相邻**的。

定义17.11（面着色） 对地图G的每个国家涂上一种颜色，使相邻的国家涂不同的颜色，称为对G的一种**面着色**。

若能用k种颜色给G的面着色，就称对G的面进行了**k着色**，或称G是**k-面可着色的**。

若G是k-面可着色的，但不是(k-1)-面可着色的，就称G的**面色数**为k，记作$\chi^*(G)=k$。

地图的着色可以转化为它的对偶图的点着色。

定理17.25 地图G是k-面可着色的当且仅当它的对偶图G*是k-可着色的。

定理17.26（五色定理或希伍德定理） 任何平面图都是5-可着色的。

17.7 边着色

定义17.12（边着色） 对无环无向图G的每条边涂上一种颜色，使相邻的边涂上不同的颜色，称为对G的一种**边着色**。

若能用k种颜色给G的边着色，就称G是**k-边可着色的**。

若G是k-边可着色的，但不是(k-1)-边可着色的，就称G的**边色数**为k，记作$\chi'(G)=k$。

判断边色数的方法：

定理17.27（维津定理）设G是简单图，则$\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$

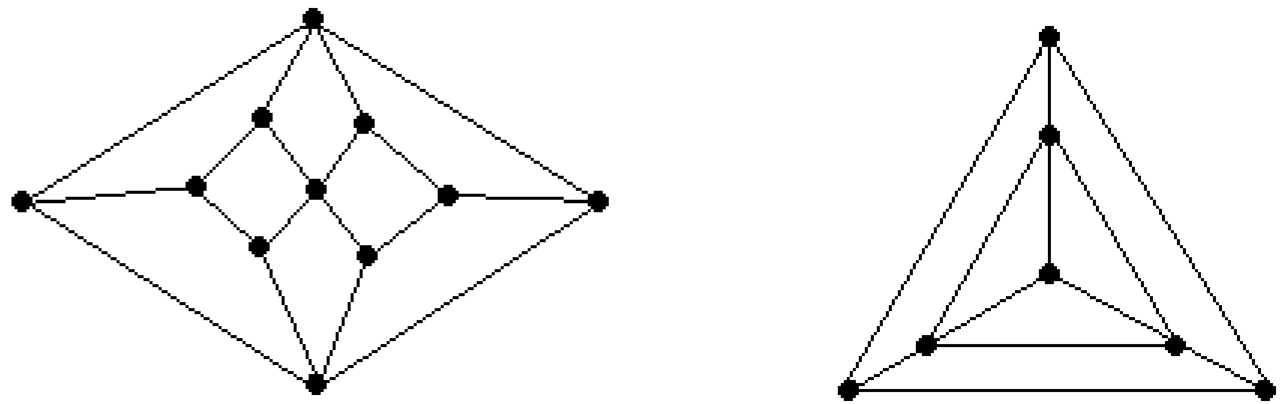
定理17.28 设G为长度大于或等于2的偶圈，则$\chi'(G)=\Delta(G)=2$。设G为长度大于或等于3的奇圈，则$\chi'(G)=\Delta(G)+1=3$。

定理17.29 $\chi'(W_n)=\Delta(W_n)=n-1$，其中$n \ge 4$。

定理17.30 设G=<V1，V2，E>为二部图，则$\chi'(G)=\Delta(G)$。

定理17.31 当n（$n \ne 1$）为奇数时，$\chi'(K_n)=n$，当n为偶数时，$\chi'(K_n)=n-1$。

例17.6 判断下面各图的边色数。



G1　　　　G2

解：

（1）G1中无奇数长度的回路，所以G1为二部图，$\chi'(G1)=\Delta(G1)=4$

（2）由维津定理可知$\Delta(G2)\leq\chi'(G2)\leq\Delta(G2)+1$，所以$4\leq\chi'(G2)\leq5$。实际上$\chi'(G2)=4$。