河海大学 2018-2019 学年工科类《概率论与数理统计》试卷

一、填空题（每小题 3 分，本题满分 21 分）

1. 设 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，则 $P(AB)=$ ________；P（$A\cup B$）= ________ 。

2. 设每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$，则在三次独立重复试验中至少成功一次的概率为（　　）。

（A）p^3　　（B）$1-p^3$　　（C）$(1-p)^3$　　（D）$1-(1-p)^3$

3．若随机变量 $X\sim N(1,1)$，其概率密度函数为 $f(x)$，则下列结论正确的是（　　）。

（A）$P\{X\le 0\}=P\{X\ge 0\}=0.5$　　（B）$f(x)=f(-x),\ x\in(-\infty,+\infty)$

（C）$P\{X\le 1\}=P\{X\ge 1\}=0.5$　　（D）$F(x)=1-F(-x),\ x\in(-\infty,+\infty)$

4. 设随机变量 $X\sim U(0,4)$，则 $P\{D(X)<X<E(X)\}=$ ____________ 。

5. 设随机变量 $X,\ Y$ 独立同分布且方差都大于 0，令 $\xi=X+aY$，$\eta=X+bY$，其中 a、b 为常数且 $ab\neq 0$，则当 ξ,η 不相关时，有（　　）。

（A）$ab=1$　　（B）$ab=-1$　　（C）$a=b$　　（D）a,b 为任意非零常数

6．设 $X_1, X_2,\dots, X_{2019}$ 为来自标准正态总体的简单随机样本，已知统计量$Y=\dfrac{cX_{2019}}{\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{2018}^2}}$服从 t 分布，则常数 $c=$ ____________ 。

7. 设两独立样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别来自总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，令 $\overline{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n_2}\sum\limits_{j=1}^{n_2}Y_j$，$S_1^2=\dfrac{1}{n_1-1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n_2-1}\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2$，则 $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim$ ____________ 。（写出分布和参数）

二、（本题满分 10 分） 有两个袋子，甲袋中有 2 只白球，1 只黑球；乙袋中有 1 只白球，2 只黑球。从甲袋中任取一只球放入乙袋，再从乙袋中任取一只球。（1）求从乙袋中取出的球为白球的概率；（2）若发现从乙袋中取出的是白球，问从甲袋中取出放入乙袋的球，黑、白哪种颜色可能性大？

三、（本题满分 13 分） 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}kx^{\alpha}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 k、α 为常数且 $k>0$，$\alpha>0$，又已知 $E(X)=0.75$。（1）求常数 k 和 α；（2）求 X 的分布函数 $F(x)$；（3）求概率 $P\{\frac{1}{2}<X<1\}$；（4）求 $D(X)$。

四、（本题满分 13 分） 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。（1）求 X 和 Y 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；（2）问 X 与 Y 是否独立？为什么？（3）求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}。

五、（本题满分 8 分） 设 X、Y 是相互独立的随机变量，密度函数分别为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$，求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

六、（本题满分 13 分）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为对应的样本值。

（1）若总体 $X \sim P(\lambda)$，其分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，$\lambda>0$ 为未知参数。求参数 λ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda}_{MLE}$，并判断 $\hat{\lambda}_{MLE}$ 是否为 λ 的无偏估计。

(2)若总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 未知。求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$。

七、（本题满分 14 分）某高校 2017 级《概率论与数理统计》期末考试成绩服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，为了评估考试成绩，现从所有考生中抽取了 31 名考生，算得他们的平均成绩为 73 分，标准差为 8 分。（1）求总体方差 σ^2 的置信度为95%的双侧置信区间。（2）某位老师说这次考试的年级平均成绩为 75 分，你赞同这位老师的观点吗？（$\alpha=0.05$）

八、（本题满分 8 分）设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}x^2, & 0<x<3 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$，令 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1 \\ X, & 1<X<2 \\ 1, & X\ge 2\end{cases}$。求（1）$Y$ 的分布函数；（2）$P\{X\le Y\}$。

参考解答

一、填空题

（1）1/6，5/12；（2）D；（3）C；（4）1/6；（5）B；（6）$\sqrt{2018}$；（7）$F(n_1-1, n_2-1)$

二、设 $B_1=$“从甲袋中取出的是白球”，$B_2=$“从甲袋中取出的是黑球”，$A=$“从乙袋中取出白球”。则 B_1, B_2 构成一个完备事件组，则由全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{4/12}{5/12}=\frac{4}{5}$，$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{3/12}{5/12}=\frac{3}{5}$

所以白球可能性大。

三、（1）由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 kx^\alpha dx=\frac{k}{a+1}$，$0.75=EX=\int_0^1 xkx^a dx=\frac{k}{a+2}$。

$\therefore k=3, a=2$，故 $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(2)$F(x)=\int_{-\infty}^x f(x)dx \Rightarrow F(x)=\begin{cases}0, & x<0 \\ x^3, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1\end{cases}$　(3)$P\{\frac{1}{2}<X<1\}=1-F(\frac{1}{2})=\frac{7}{8}$

（4）$E(X^2)=\int_0^1 x^2 3x^2 dx=\dfrac{3}{5}$，故 $DX=\dfrac{3}{5}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{3}{80}$

四、（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 6xdy=6x(1-x), & 0\le x\le 1 \\ 0, & \textit{其他}\end{cases}$；

$f_Y(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y 6xdx=3y^2, & 0\le y\le 1 \\ 0, & \textit{其他}\end{cases}$

（2）由于 $f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$，所以 X 与 Y 不相互独立

（3）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 6x^2(1-x)dx=1/2$，$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_X(x)dx=\int_0^1 6x^3(1-x)dx=3/10$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 3y^3 dy=3/4$，$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f_Y(y)dy=\int_0^1 3y^4 dy=3/5$，

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1/20$，$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=3/80$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 6x^2 ydy=2/5$，$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1/40$

所以 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

五、联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\begin{cases} 0, & z\le 0 \\ \int_0^z dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=z-1+e^{-z}, & 0<z<1 \\ \int_0^1 dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=1-e^{-(z-1)}+e^{-z}, & z\ge 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} (e-1)e^{-z}, & z\ge 1 \\ 1-e^{-z}, & 0<z<1 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

或者利用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$ 直接计算也可。

六、(1) $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_i!}\Rightarrow \ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}[x_i\ln\lambda-\lambda-\ln(x_i!)]$，由

$\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\sum_{i=1}^{n}[\dfrac{x_i}{\lambda}-1]=0\Rightarrow\hat{\lambda}_{MLE}=\bar{x}$。又因为 $X\sim P(\lambda)$，所以 $E(\overline{X})=E(X)=\lambda$，即 $\hat{\lambda}_{MLE}$ 为 λ 的无偏估计。

(2) 令 $E(X)=\overline{X}$，又 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{\theta}\dfrac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)dx=\dfrac{\theta}{2}$，于是 $\hat{\theta}_M=2\overline{X}$

七、(1)总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 μ 未知，所以 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$，

又 n=31，$S^2=64$，$\alpha=0.05$，所以 $\chi^2_{0.025}(30)=46.979$，$\chi^2_{0.975}(30)=16.791$，

$(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})=(40.869,114.347)$

(3) 根据题意须检验假设 $H_0:\mu=75, H_1:\mu\ne 75$，由于 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 σ^2 未知，令检验统计量

$t=\dfrac{\overline{X}-75}{S/\sqrt{n}}\overset{H_0}{\sim}t(n-1)$，由 $P(H_1|H_0)=\alpha$ 得拒绝域为 $|t|>t_{\alpha/2}(n-1)$，又 $\overline{X}=73$，$\alpha=0.05$，

$t_{0.025}(30)=2.0423$，所以 $|t|=1.392<2.0423$，接受 H_0，即赞同这位老师的说法。

八、(**本题满分 8 分**)(1) $F_Y(y)=P(Y\le y)$。当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=1$。

当 $1\le y<2$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(Y\le y,X\le 1)+P(Y\le y,1<X<2)+P(Y\le y,X\ge 1)$

$=P(Y\le y,1<X\le 2)+P(X\ge 2)=\int_1^y\dfrac{1}{9}x^2dx+\dfrac{19}{27}=\dfrac{y^3}{27}+\dfrac{18}{27}$。

(2) $P(X\le Y)=P(X<Y)+P(X=Y)=P(X\le 1)+P(1<X<2)=P(0<X<2)$ $=\int_0^2\dfrac{1}{9}x^2dx=\dfrac{8}{27}$。