河海大学 2020-2021 学年工科类《概率论与数理统计》试卷

一、填空题（每小题 3 分，本大题共六小题满分 18 分）

1. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x\}=a\dfrac{\lambda^x}{x!},\ x=0,1,2,\cdots$，其中 $\lambda>0$ 为常数，则常数 $a=$ ______；

2. 随机变量 $X\sim B(10,\ 0.2),\ Y\sim N(0,\ 4)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $D(X-2Y)=$ __________；

3. 设事件 A,B 满足 $P(A)=0.6,\ P(B)=0.7$，且 $P(AB)$ 取到最小值，则 $P(A\cup B)=$ _________；

4. 假设检验中，由样本观察值判断假设 H_0 正确性的依据是______________________________；

5. 设 X_1，X_2，$\cdots$，X_n 是来自 X 的样本，且 $E(X)=0$，试写出 $E(X^2)$ 的一个无偏估计量________；

6. 随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}25\,x\,e^{-5x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，则 $Y=10X\sim\chi^2$ (_____)分布（填数字).

【注：$\chi^2(n)$ 密度函数 $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$，$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha),\ \Gamma(1)=\Gamma(2)=1$】

二、（本题满分 10 分）仓库中有 10 件产品，已知其中特等品件数可能是 1 件, 2 件, 3 件这三种情形，且特等品件数是 1 件, 2 件, 3 件的可能性相同. 现作放回抽样，每次从仓库中随机抽取 1 件产品，共连续抽取两次.

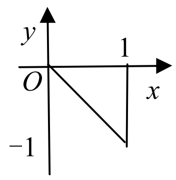
1. 求两次都抽到特等品的概率；
2. 若已知第二次抽到了特等品，求第一次也抽到了特等品的概率.

三、（本题满分 12 分） 已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}ke^{-4x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$

求：1．常数 k； 2．$Y=X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)$； 3．概率 $P\{X>0.1\}$.

四、（本题满分 16 分） 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的在区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,-x<y<0\}$ 上服从均匀分布，求：



1．X 与 Y 的联合密度函数 $f(x,y)$；
2．X 与 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 及 $f_Y(y)$；
3．$Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

五、（本题满分 16 分）设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}x, & 0<x\le\theta\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的样本，求：

1．求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$；
2．求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}$；
3．讨论矩估计量 $\hat{\theta}_M$ 是否为 θ 的无偏估计量.

六、（本题满分 14 分）随机地从一批钉子中抽取 9 枚，测得其长度(单位：毫米) 如下：

49.6　49.3　50.1　50.0　49.2　49.9　49.8　51.0　50.2

设这批钉子的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

1．若$\sigma>0$未知，检验假设H_0：$\mu=\mu_0=50,\quad H_1$：$\mu\neq\mu_0$（取显著性水平$\alpha=0.05$）

2．若已知$\sigma=0.3$，求μ的置信度为95%的双侧置信区间.

【注：本题样本均值$\overline{x}=49.9$，样本标准差$s=0.53$．部分标准正态分布表和t分布表如下】

七、（本题满分 14 分）设随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x},\ x\geq 0\\ 0,\ x<0\end{cases}$$

定义随机变量Y_1，Y_2为

$$Y_k=\begin{cases}0,\quad X\leq k\\ 1,\quad X>k\end{cases},\quad k=1,\ 2$$

1. 求Y_1和Y_2的联合分布律；
2. 问Y_1与Y_2是否相互独立？请给出计算依据；
3. 证明：$E(Y_1Y_2)>E(Y_1)\cdot E(Y_2)$。

参考解答

一．1. $e^{-\lambda}$； 2．17.6； 3. 1； 4. 小概率(事件)原理； 5. $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$或$A_2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$等； 6. 4；

二． 设A_i(i=1,2)——第i次抽到特等品，B_j(j=1,2, 3)——10 件产品中有j件特等品

1. $P(A_1A_2)=\sum_{j=1}^{3}P(A_1A_2\mid B_j)P(B_j)=(\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{3}{10})\times\frac{1}{3}=\frac{7}{150}\approx 0.047$；

2. $P(A_2)=P(A_2\Omega)=P(A_2(A_1\cup\overline{A}_1))=P(A_1A_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)-0$

$$P(\overline{A}_1A_2)==\sum_{j=1}^{3}P(\overline{A}_1A_2\mid B_j)P(B_j)=(\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{10})\times\frac{1}{3}=\frac{23}{150}$$

故 $P(A_1\mid A_2)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\dfrac{7/150}{7/150+23/150}=\dfrac{7}{30}\approx 0.233$为所求.

三． 1. 由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}ke^{-4x}dx,\ 1=k\cdot\frac{1}{-4}e^{-4x}\big|_0^{+\infty}\Rightarrow k=4$

2. $\forall y\in R, F_{X^2}(y)=P\{X^2\leq y\}=\begin{cases}P\{-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\},\ y\geq 0\\ 0,\quad y<0\end{cases}=\begin{cases}\int_0^{\sqrt{y}}4e^{-4x}dx=1-e^{-4\sqrt{y}},\ y\geq 0\\ 0,\quad y<0\end{cases}$

3. $P\{X>0.1\}=\int_{0.1}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0.1}^{+\infty}4e^{-4x}dx=e^{-0.4}$.

四． 1. 设$f(x,\ y)=\begin{cases}A,\ (x,\ y)\in D\\ 0,\quad 其他\end{cases}$，由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，有

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy+\iint\limits_{R^2-D}f(x,\ y)dxdy=\iint\limits_D Adxdy+0=A\cdot\frac{1}{2}=1\ \Rightarrow\ A=2$$

故 $f(x,\ y)=\begin{cases}2,\ (x,\ y)\in D\\ 0,\quad 其他\end{cases}$

2. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy==\begin{cases}\int_{-x}^{0}2dy=2x,\quad 0<x<1\\ 0,\qquad 其他\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1}2dx=2(1+y),\quad -1<y<0\\ 0,\qquad 其他\end{cases}$$

3. $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$

$$=\begin{cases} 0, \quad z\le 0 \\ \int_0^z dx\int_x^0 2dy+\int_z^1 dx\int_{-x}^{z-x}2dy \text{ 或 } 2\cdot[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot(1-z)^2],\ 0<z<1 \\ 1, \quad x\ge 1 \end{cases}=\begin{cases} 0, \quad z\le 0 \\ 2z-z^2,\ 0<z<1 \\ 1, \quad z\ge 1 \end{cases},$$

故 $f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\begin{cases} 2-2z,\ 0<z<1 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$.

五. 1. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{\theta}x\cdot\frac{2}{\theta^2}xdx=\frac{2}{3}\theta=\overline{X}$，故 $\hat{\theta}_M=\frac{3}{2}\overline{X}$

2. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，

当 $0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta$，有 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n(x_1x_2\cdots x_n)$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 已知时，$L(\theta)$ 取最大值，需要 θ 最小，而 $0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta$，

故 $\hat{\theta}_{MLE}=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

3. $E(\overline{X})=E(X)=\frac{2}{3}\theta$，所以 $E(\frac{3}{2}\overline{X})=E(X)=\theta$，即 $\frac{3}{2}\overline{X}$ 为 θ 无偏估计.

六. 1. 对假设 $H_0:\mu=\mu_0=50$，$H_1:\mu\ne\mu_0$，取检验统计量 $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\overset{H_0为真}{\sim}t(n-1)$

由 $P\{|T|>t_{\alpha/2}(n-1)\}=\alpha$，得拒绝域为 $|T|>t_{\alpha/2}(n-1)$.

又 $n=9$, $\bar{x}=49.9$, $s=0.53$, $\alpha=0.05$, $t_{0.025}(8)=2.3060$，$T=\frac{|49.9-50|}{0.53/3}=0.566<2.3060$

故接受 H_0.

2. 因为 $\sigma=0.3$ 已知，故总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为

$(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$，又 $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$, 故

$(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=(49.9-1.96\times\frac{0.3}{3},\ 49.9+1.96\times\frac{0.3}{3})=(49.704,\ 50.096)$.

七. 1. Y_1，Y_2 分别取 0，1

$P\{Y_1=0,\ Y_2=0\}=P\{X\le 1\}=\int_0^1 e^{-x}dx=1-e^{-1}$，$P\{Y_1=0,\ Y_2=1\}=0$

$P\{Y_1=1,\ Y_2=0\}=P\{1<X\le 2\}=\int_1^2 e^{-x}dx=e^{-1}-e^{-2}$

$P\{Y_1=1,\ Y_2=2\}=P\{X>2\}=\int_2^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-2}$

Y_1 \ Y_2	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

故 $(Y_1,\ Y_2)$ 的联合分布律如右表

2. Y_1 的分布律 $P\{Y_1=0\}=P\{X\le 1\}=\int_0^1 e^{-x}dx=1-e^{-1}$，$P\{Y_1=1\}=P\{X>1\}=\int_1^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-1}$

Y_2 的分布律 $P\{Y_2=0\}=P\{X\le 2\}=\int_0^2 e^{-x}dx=1-e^{-2}$，$P\{Y_2=1\}=P\{X>2\}=\int_2^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-2}$

而 $P\{Y_1=0,\ Y_2=0\}=1-e^{-1}\ne P\{Y_1=0\}P\{Y_2=0\}=(1-e^{-1})(1-e^{-2})$

故 Y_1，Y_2 不相互独立.

3. $E(Y_1Y_2)=1\cdot e^{-2}$, $E(Y_1)\cdot E(Y_2)=1\cdot e^{-1}\cdot 1\cdot e^{-2}=e^{-1}\cdot e^{-2}$

而 $1>e^{-1}$, $1\cdot e^{-2}>e^{-1}\cdot e^{-2}$，故 $E(Y_1Y_2)>E(Y_1)\cdot E(Y_2)$.