第十一章

麦克斯韦方程组
电磁场

§1　位移电流

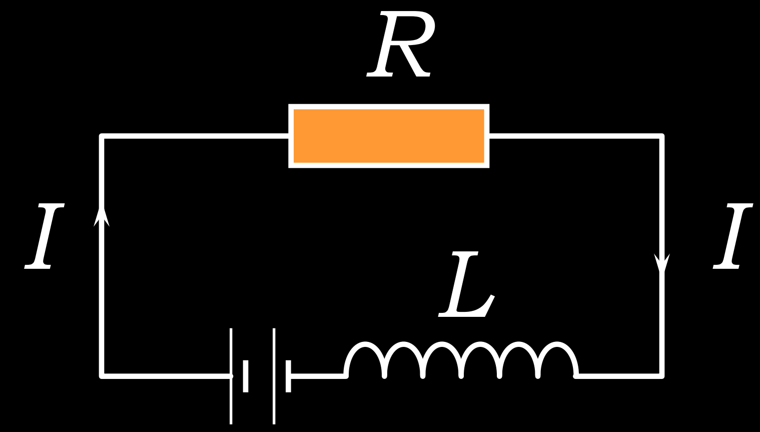
§2　麦克斯韦方程的积分形式

§3　电磁波

§1 位移电流

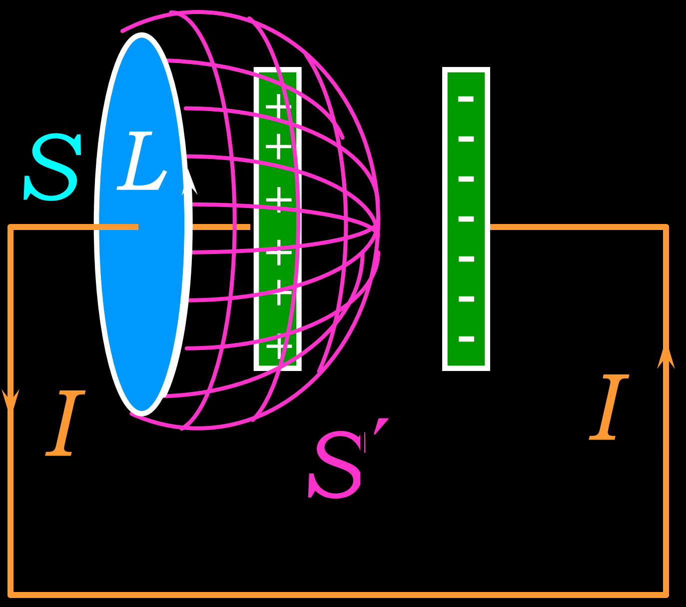
电流的连续性问题

　　包含有电阻、电感线圈的电路是连续的。

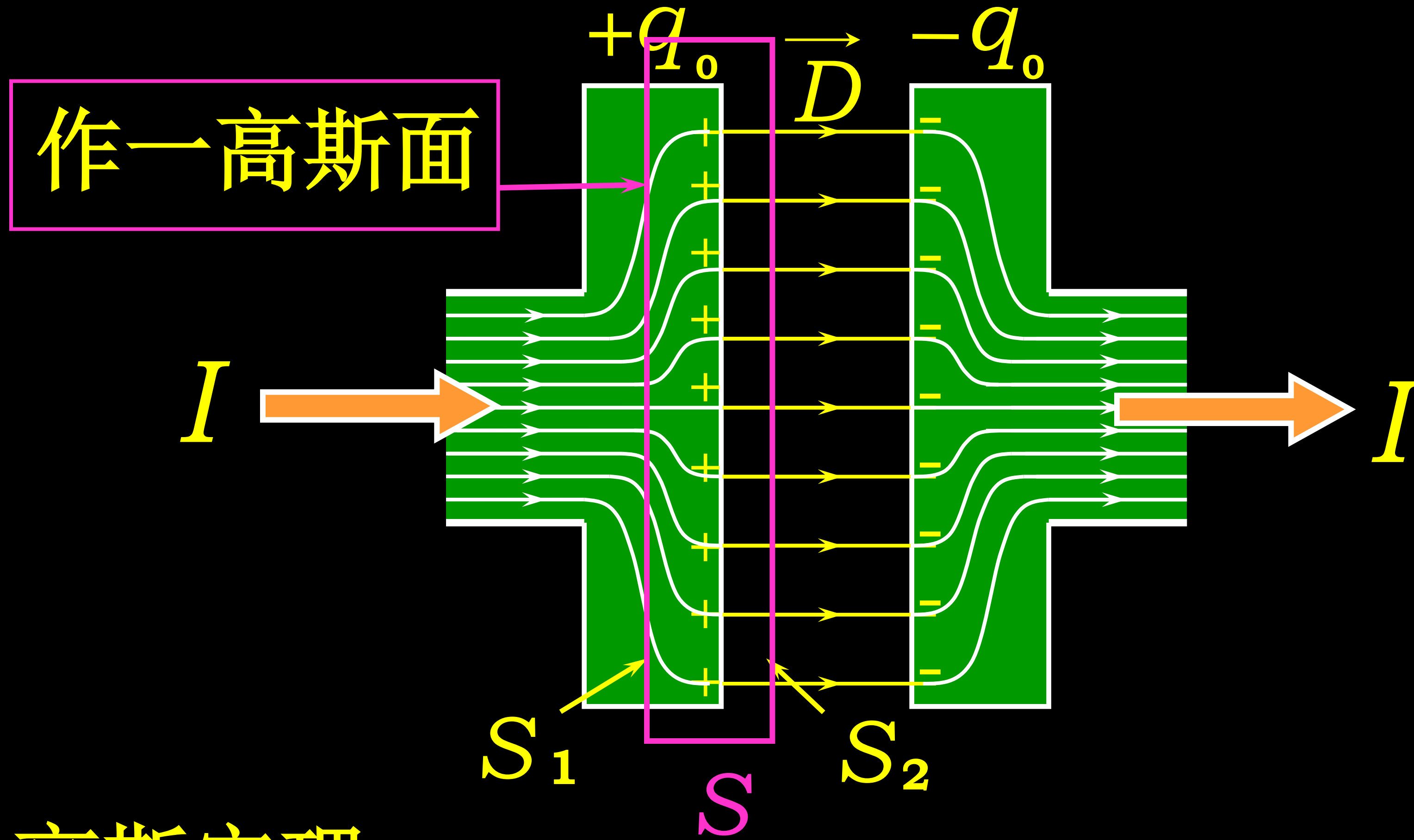


考虑一个包含有电容的电路

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \begin{cases} I & \text{对 } S \text{ 面} \\ 0 & \text{对 } S' \text{ 面} \end{cases}$$



问题：在电流非稳恒状态下安培环路定律是否正确？



由高斯定理：

$$q = \oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}_{=0} + \iint_{S_2} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

由上面得到 $q = \oint\!\!\!\oint_{S_2} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \Phi_e$

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{S_2} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t} = \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

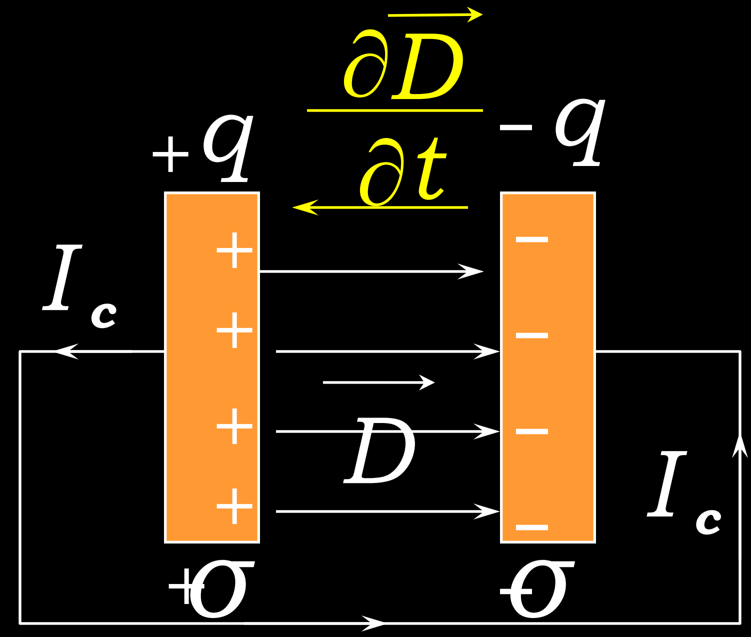
上式的最左端是**传导电流**，若把最右端**电通量的时间变化率**看作为一种电流，那么电路就连续了。麦克斯韦把这种电流称为**位移电流**。

$$I_d = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{\delta}_d \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\vec{\delta}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$I_d = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{\delta}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



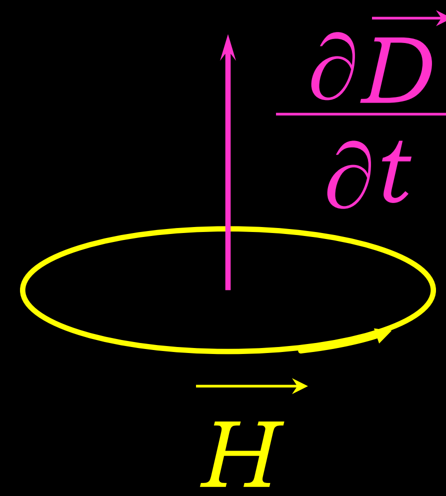
位移电流的方向和传导电流是否相同？

放电时：$q \downarrow \rightarrow \sigma \downarrow \rightarrow D \downarrow$

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 与 $\vec{D}$ 的方向相反，I_d 与 I_c 方向相同

充电时：（同学自证）

3. 位移电流在产生磁场这一点上和传导电流完全相同。并且 $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 和 $\vec{H}$ 构成右旋关系。



4. 在真空中位移电流无热效应。在介质中位移电流有热效应，但是并不遵守焦耳定律。

5. 由位移电流产生的磁场也是有旋场。

$$I_d = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{\delta}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

讨论：

1. 在上述例子里，位移电流只存在于电容器两极板之间，而传导电流只存在于导线中。在一般情况下，通过一个横截面同时存在传导电流、运流电流及位移电流。这三电流之和称为全电流。

2. 在电流非稳恒的电路中，安培环路定律仍然正确。

选例1 试证明平行板电容器中的位移电流可写为：

$$I_d = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

式中C是电容器的电容，U是两极板间的电势差。如果不是平行板电容器，上 式可以应用吗？如果是圆柱形电容器，其中的位移电流密度和平板电容器时有何不同？

证：$I_d = C\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$

证：设极板面积S，板间距d　$\Phi = \mathrm{ES} = \dfrac{U}{d}S$

$\therefore I_d = \varepsilon_0 \dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$　　$(C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d})$　　$\Phi = \dfrac{C}{\varepsilon_0}U$

若不是平行板电容器，上式仍可适用。

位移电流密度　$\vec{\delta}_d = \dfrac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}$

平行板电容器　$D = \sigma$　　$\delta_d = \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$

圆柱形电容器　$D = \dfrac{\lambda}{2\pi r}$　　$\delta_d = \dfrac{1}{2\pi r}\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}$

选例2 在一对巨大的圆形极板(电容C=1.0×10^{-12} F)上，加上频率为50Hz、峰值为174000V的交变电压，计算极板间位移电流的最大。

已知： $C=1.0\times10^{-12}\,F$, $f=50\text{Hz}$，

$U_{\mathrm{m}}=1.74\times10^{5}\,V$ 　　求： I_{dm}

解： $I_d=\varepsilon_0\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 　　 $\Phi=ES=\dfrac{S}{d}U_{\mathrm{m}}\cos\omega t$

$C=\varepsilon_0\dfrac{S}{d}$ 　　 $\therefore$ 　　 $I_d=-C\omega U_{\mathrm{m}}\sin\omega t$

I_d 的最大值 $I_{dm}=C\omega U_{\mathrm{m}}=C\,2\pi f U_{\mathrm{m}}$

$=1.0\times10^{-12}\times2\pi\times50\times1.74\times10^{5}=5.74\times10^{-5}(\text{A})$

选例3 有一平板电容器，极板是半径为R的圆形板，现将两极板由中心处用长直引线连接到一远处的交变电源上，使两极板上的电荷量按规律$q=q_0\sin\omega t$变化。略去极板边缘效应，试求两极板间任一点的磁场强度。

解：
$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad H\,2\pi r=\pi r^2\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$$

$$H=\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} \qquad S\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

$$H=\frac{r}{2\mathrm{S}}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{r}{2\mathrm{S}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q_0\sin\omega t)$$

$$=\frac{r}{2\pi R^2}\omega q_0\cos\omega t$$

§2 麦克斯韦方程的积分形式

静电场
$$\begin{cases} \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q \\ \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

静磁场
$$\begin{cases} \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I \end{cases}$$

如果电场及磁场都在随时间变化，变化磁场产生电场，变化电场产生磁场，电场和磁场不可分割，称为电磁场。

电磁场的场方程
(麦克斯韦方程的积分形式)

一、电场的性质

$\vec{D}_1 \longrightarrow$ 静止电荷产生的静电场

$\vec{D}_2 \longrightarrow$ 变化磁场产生的感生电场

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S (\vec{D}_1 + \vec{D}_2)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \oint_S \vec{D}_1\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \underbrace{\boxed{\oint_S \vec{D}_2\cdot \mathrm{d}\vec{S}}}_{=0}$$

$$= \Sigma\, q = \iiint_V \rho\, \mathrm{d}V$$

二、磁场的性质

$\vec{B}_1 \longrightarrow$ 传导电流的磁场

$\vec{B}_2 \longrightarrow$ 位移电流的磁场

$$\oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\!\!\oint_S (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

三、变化电场和磁场的关系

$\vec{H}_1 \longrightarrow$ 传导电流的磁场

$\vec{H}_2 \longrightarrow$ 位移电流的磁场

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{H}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{H}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= I_c + I_d$$

$$= \iint_S \vec{\delta}_c \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \iint_S \left(\vec{\delta}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

四、变化磁场和电场的关系

$\vec{E}_1 \longrightarrow$ 静止电荷产生的静电场

$\vec{E}_2 \longrightarrow$ 变化磁场产生的感生电场

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \underbrace{\boxed{\oint_L \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}}}_{=0} + \oint_L \vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

麦克斯韦方程的积分形式：

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}V$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \left(\vec{\delta}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

麦克斯韦方程的微分形式

$$\begin{cases} \mathrm{div}\ \vec{D} = \rho \\ \mathrm{div}\ \vec{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\ \vec{H} = \vec{\delta}_c + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{\delta}_c + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

哈密顿算符 $\Rightarrow$ $\nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

用同样方法可以得到：

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

设 $E_y=E$， $H_z=H$ 则有：

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

而平面机械波波动方程为：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

两者比较可知，E 及 H 满足波动方程，也就是 E 及 H 是以波的形式在空间传播。

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

平面机械波波动方程 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

比较后还可以得到：

$$\frac{1}{u^2}=\varepsilon\mu \longrightarrow u=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

即电场和磁场是以速度 u 在空间传播的。

麦克斯韦就是从电磁场方程出发预言了电磁波的存在。通过实验可测得:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} = 12.566 \times 10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$$

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2 \cdot m^{-2} \cdot N^{-1}}$$

理论上预言电磁波在真空中的传播速度为:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.9979 \times 10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

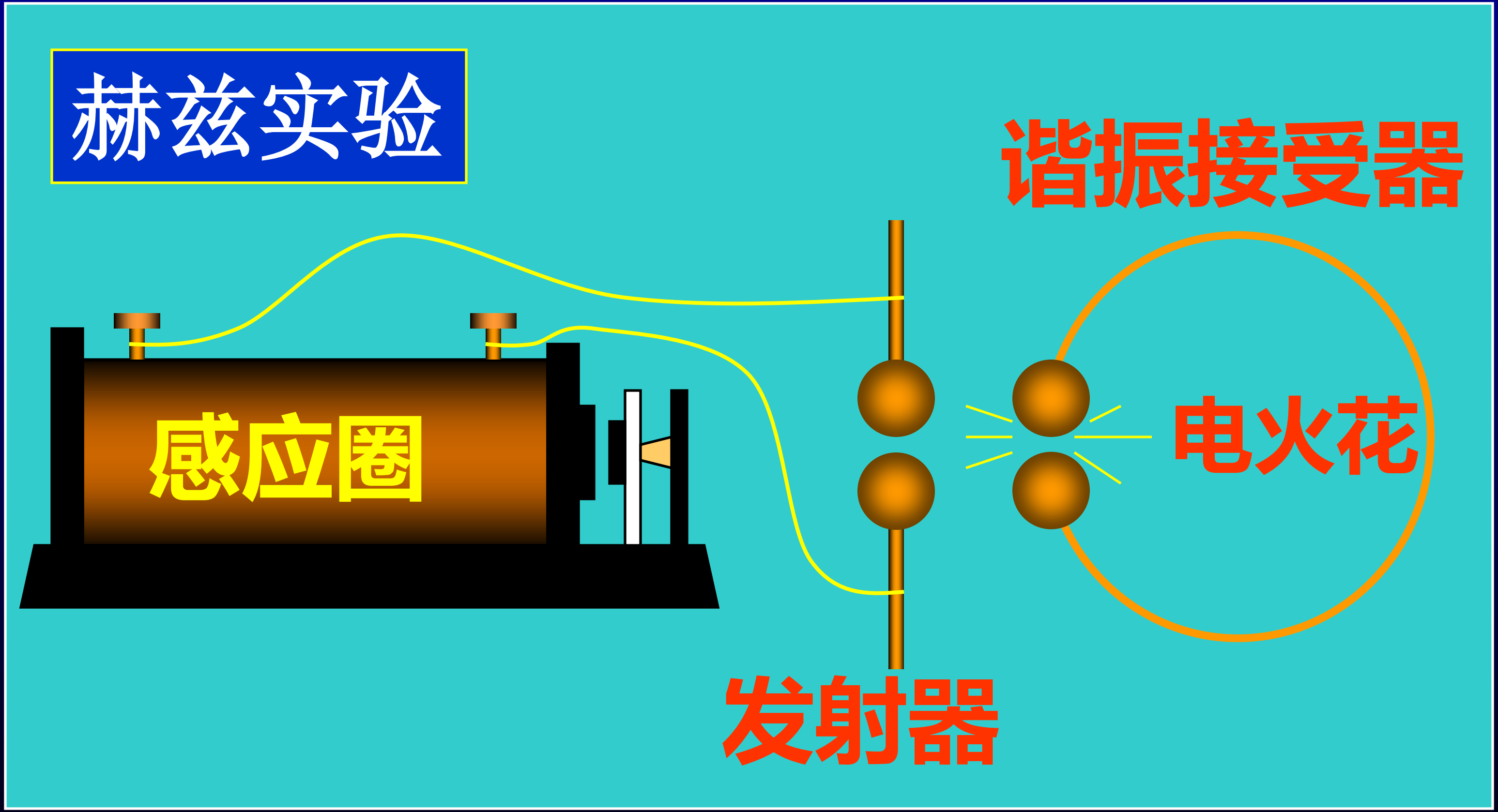
由实验测得真空中的光速为:

$$c = 2.99792458 \times 10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

两个数据惊人的吻合，成为光波是电磁波的重要实验证据。

麦克斯韦不但预言了电磁波的存在。还预言了电磁波传播的速度。

1888年赫兹用实验证实了电磁波的存在。



二、电磁波的性质

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

由上述波动方程得到满足沿 x 轴正方向传播的平面余弦波的特解为:

$$E = E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

在前面已经得到

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$E = E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$H = -\frac{1}{\mu}\int \frac{\partial E}{\partial x}\,\mathrm{d}t$$

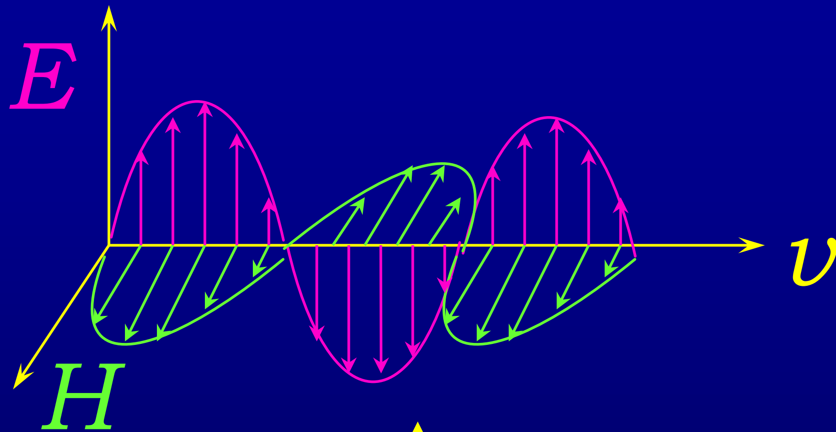
$$= -\frac{E_0\omega}{\mu u}\int \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]\mathrm{d}t$$

$$H = \frac{E_0}{\mu u}\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$= H_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$H_0 = \frac{E_0}{\mu u} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0 \Rightarrow \sqrt{\varepsilon}\,E_0 = \sqrt{\mu}\,H_0$$

从上面的讨论可以得到在无限大均匀绝缘介质（或真空中）传播的平面简谐电磁波的性质：



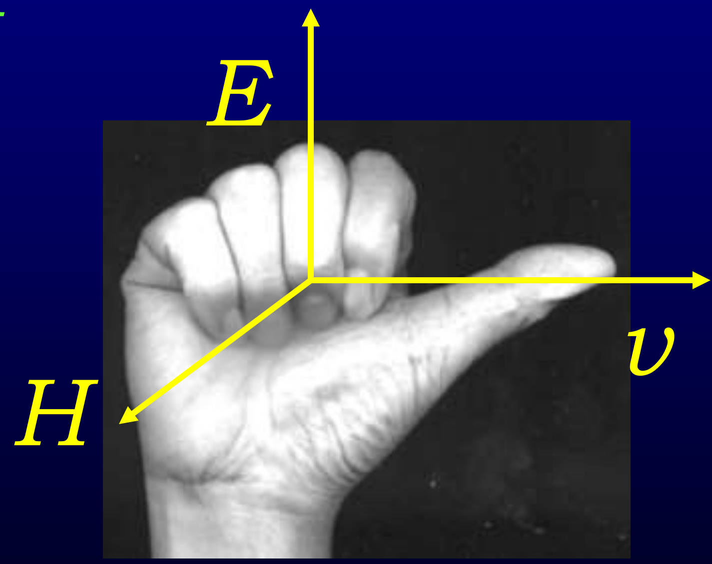
1. $\sqrt{\varepsilon}\,E=\sqrt{\mu}\,H$

2. E 与 H 同步变化

3.电磁波是一横波，

E、H、υ 两两垂直，

且三者成右旋关系。



4. 电磁波的偏振性。

（E 及 H 都在各自的平面内振动。）

三、电磁波的能量

电场能量与磁场能量体密度分别为：

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \qquad w_m = \frac{1}{2}\mu H^2$$

电磁场能量体密度为：

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$$

$S \longrightarrow$ 辐射强度（能流密度）单位时间内，通过垂直于波的传播方向的单位面积的辐射能。

$$\boxed{\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} \qquad \boxed{\sqrt{\varepsilon}\,E = \sqrt{\mu}\,H}$$

$$S = w\boxed{\upsilon} = \left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

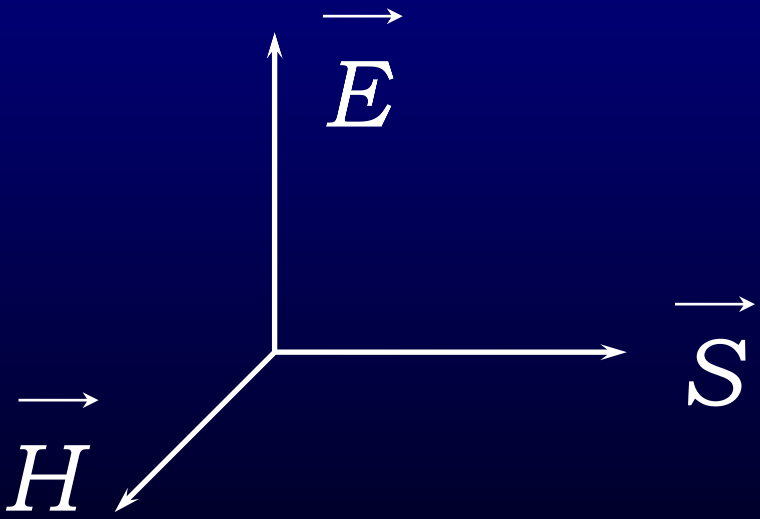
$$= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\sqrt{\varepsilon}\,E\boxed{\sqrt{\varepsilon}\,E} + \sqrt{\mu}\,H\boxed{\sqrt{\mu}\,H}\right)$$

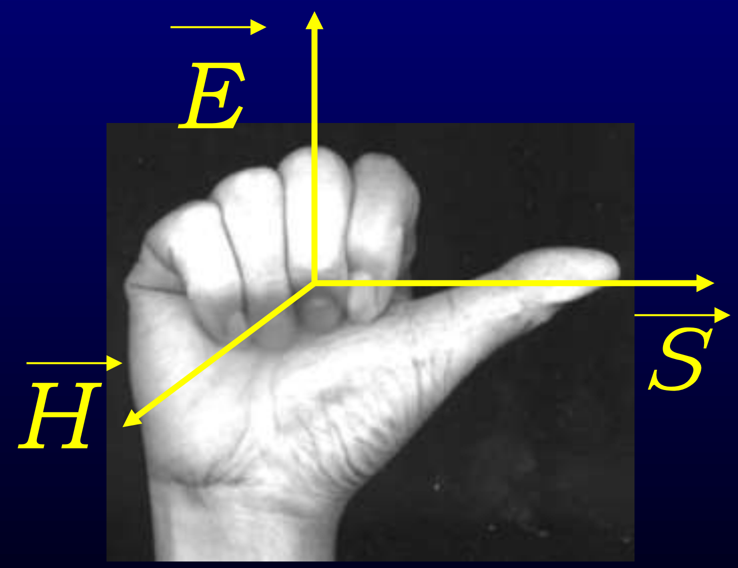
$$= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\sqrt{\varepsilon}\,E\boxed{\sqrt{\mu}\,H} + \sqrt{\mu}\,H\boxed{\sqrt{\varepsilon}\,E}\right)$$

$$= EH$$

坡印廷矢量

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}}$$



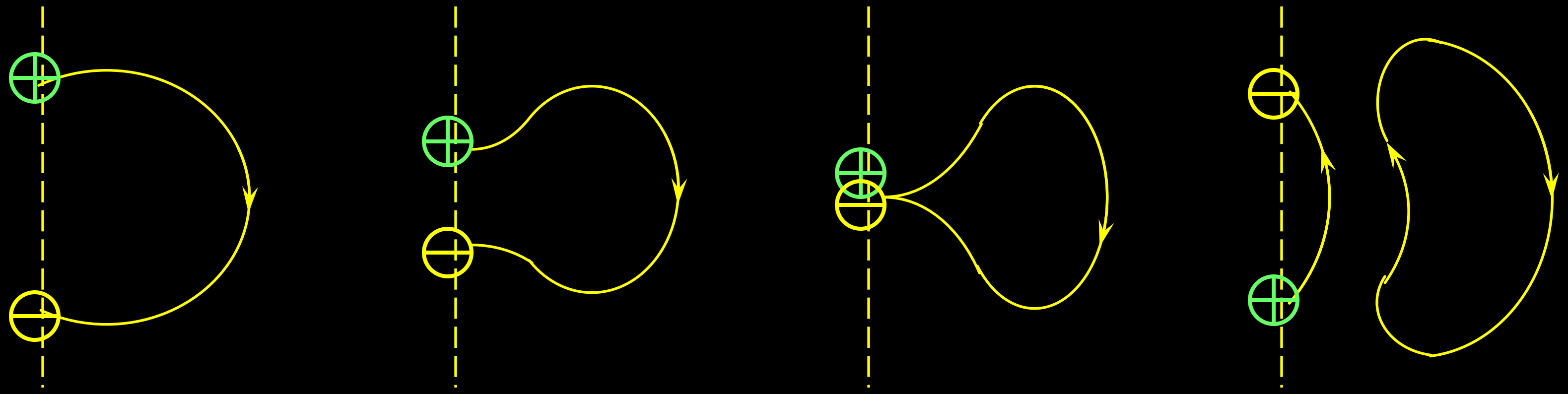


四、电磁波的辐射

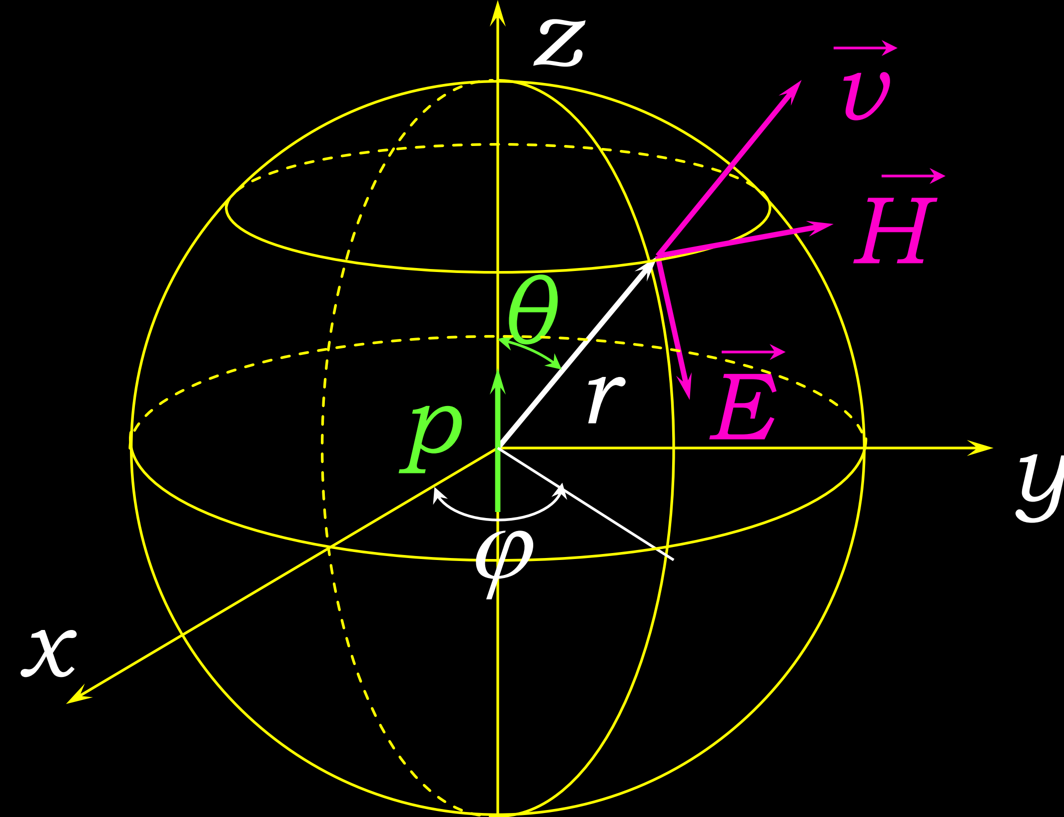
振荡偶极子

偶极子的电矩 $p = p_0 \cos \omega t$

偶极子辐射过程



振荡偶极子的辐射



$$E = \frac{\omega^2 p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$H = \frac{\omega^2 p_0 \sin\theta}{4\pi c r} \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

振荡偶极子的辐射强度

$$S = EH$$

$$= \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \cos^2 \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

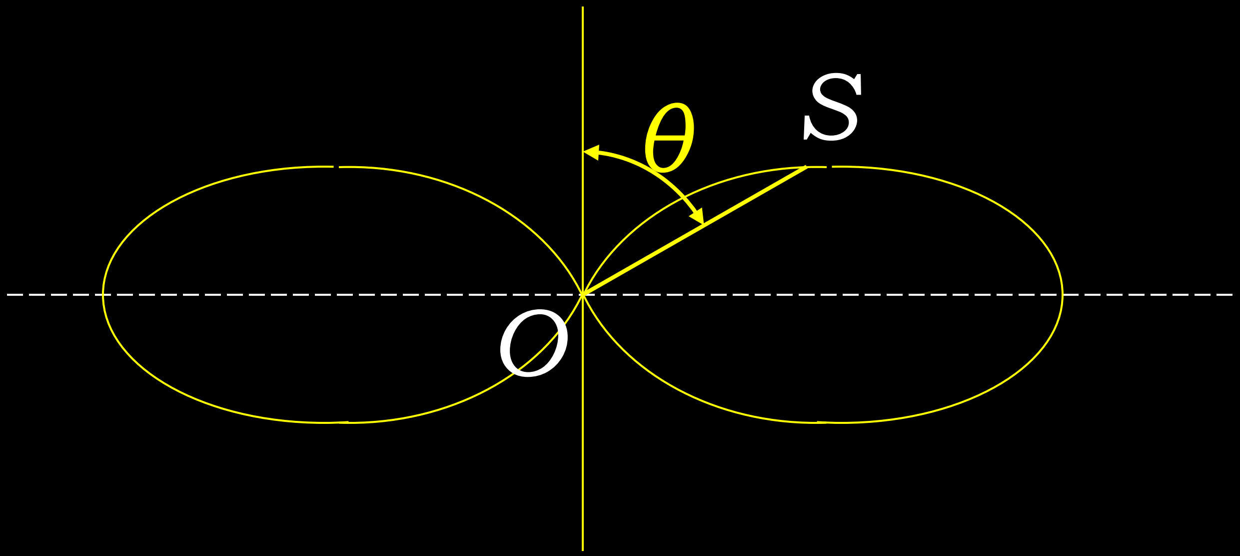
$$= \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 c\, r^2} \cos^2 \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

平均辐射强度为：

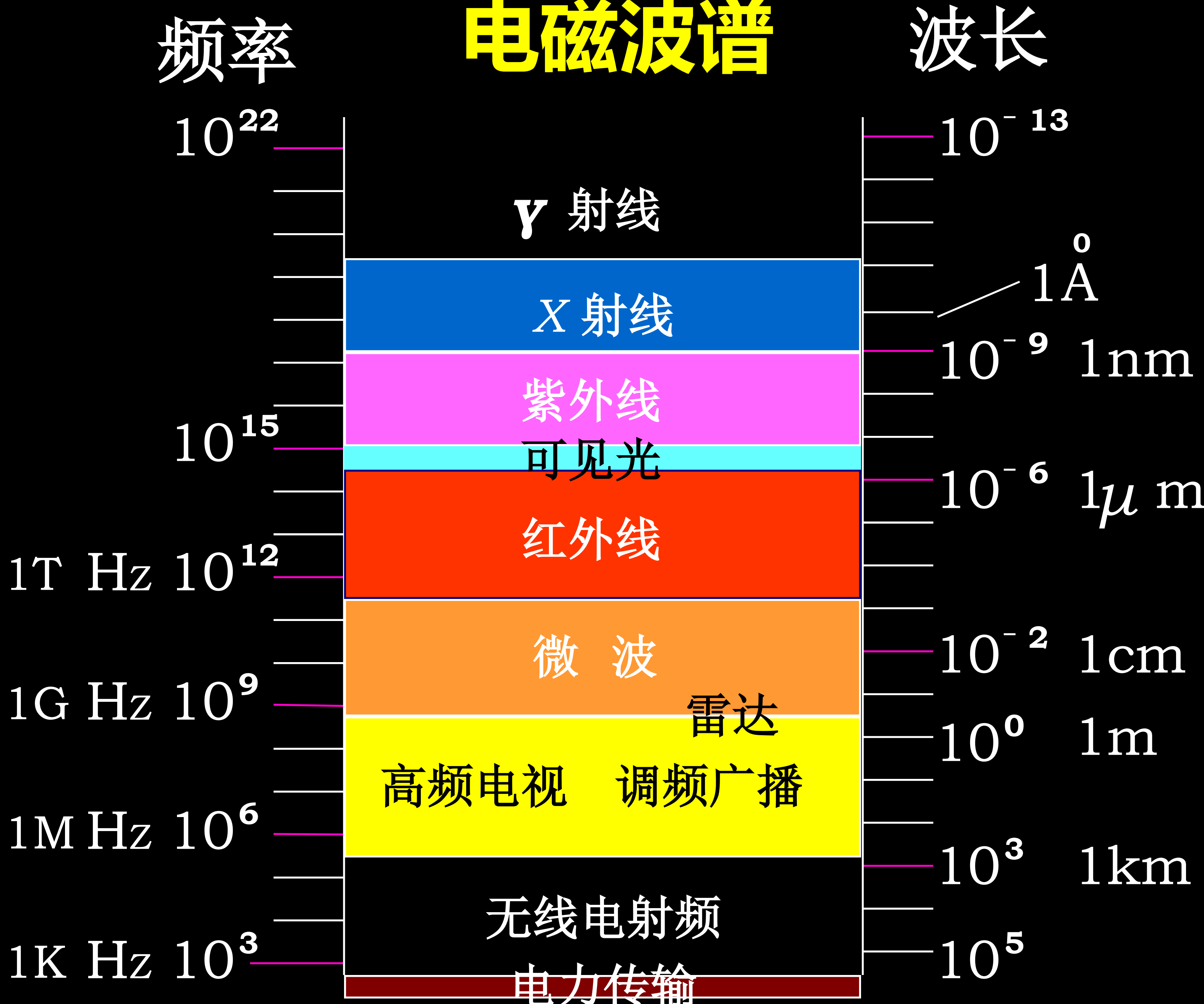
$$\overline{S} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2 \sin^2\theta}{32\pi^2 c\, r^2}$$

与偶极子距离 r 一定时，

辐射强度大小与θ的关系



电磁波谱



频率
波长
10^{22}
10^{-13}
γ 射线
1Å
X 射线
10^{-9} 1nm
紫外线
10^{15}
可见光
10^{-6} 1μm
红外线
1T Hz 10^{12}
微 波
10^{-2} 1cm
1G Hz 10^{9}
雷达
10^{0} 1m
高频电视 调频广播
1M Hz 10^{6}
10^{3} 1km
无线电射频
1K Hz 10^{3}
10^{5}
电力传输

选例5 为了在一个$1.0\mu F$的电容器内产生1.0A的瞬时位移电流，加在电容器上的电压变化率应是多大?

解：

$$I_d = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{I_d}{C}$$

$$= \frac{1.0}{1.0\times10^{-6}} = 1.6\times10^{6}(\mathrm{V})$$

选例6 一圆形极板电容器，极板的面积为S，两极板的间距为 d 。一根长为d的极细的导线在极板间沿轴线与两板相连，已知细导线的电阻为 R，两极板外接交变电压 $U=U_0\sin\omega t$，求：

(1)细导线中的电流；

(2)通过电容器的位移电流；

(3)通过极板外接线中的电流；

(4)极板间离轴线为r处的磁场强度。设r小于极板的半径。

已知：S、d、 R、 $U = U_0 \sin \omega t$

求：(1)I, (2)I_d, (3)I' (4)H

解：(1) $$I = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t$$

(2) $$I_d = C \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U_0 \omega \cos \omega t$$

(3) $$I' = I + I_d$$

$$= \frac{U_0}{R} \sin \omega t + \frac{\varepsilon_0 S}{d} U_0 \omega \cos \omega t$$

(4)

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I'$$

$$H 2\pi r = I + I_d$$

$$= \frac{U_0}{R}\sin\omega t + \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d} U_0 \omega \cos\omega t$$

$$H = \frac{1}{2\pi r}\left(\frac{U_0}{R}\sin\omega t + \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d} U_0 \omega \cos\omega t\right)$$

Good Bye Every One!

河海大学 丁万平

物理教研室

E-mail:dwp59@hotmail.com

邮编：210098