河海大学 2020-2021 学年第一学期《高等数学 AI》期末试卷参考答案

一、ADBAC

二、1. 4　　2. 77760　　3. $x=\frac{1}{2}$　　4. $x-2$　　5. $\frac{\pi}{2}$

三、1. 解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$

2. 解：原式$=\int\tan^3 x\sec^2 x d\tan x\overset{2'}{=}\int\tan^3 x(1+\tan^2 x)d\tan x\overset{2'}{=}\frac{\tan^4 x}{4}+\frac{\tan^6 x}{6}+C.$

3. 解：$I=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}d\cos x=-e^{2x}\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xde^{2x}=1+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx$

$=1+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}d\sin x=1+2e^{2x}\sin x\Big|_0^{\pi/2}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xde^{2x}=1+2e^{\pi}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin xdx$

$=1+2e^{\pi}-4I,\qquad \therefore I=\frac{1+2e^{\pi}}{5}.$

4. 解：$f(x)=\left[1+2x+\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{3!}(2x)^3+o(x^3)\right](1+x+x^2+x^3+o(x^3))$

$=1+3x+5x^2+\frac{19}{3}x^3+o(x^3).$

5. 解：令 $f(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$, 则 $f'(x)=2\arctan x\geq 0, if\ x\geq 0,$

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.又 $f(0)=0,\therefore f(x)\geq 0,\forall x\geq 0,$
又 $f(x)$ 是偶函数，故 $f(x)\geq 0,\forall x\in \mathrm{R}.$

四、解：方程两边求导可得 $y'+2y=2x,$ 且有 $y(0)=0.$

从而 $(e^{2x}y)'=2xe^{2x}$，$e^{2x}y=\int 2xe^{2x}dx=(x-\frac{1}{2})e^{2x}+C$，又 $y(0)=0\Rightarrow C=\frac{1}{2}$

故　$y=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2x}$

五、解：特征方程为 $r^2-2r-3=0,$ 特征根 $r_1=3, r_2=-1,$ 齐次方程通解 $Y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$

特解形式 $y_0=x(Ax+B)e^{-x}$, 代入原方程并化简，可得 $-8Ax+2A-4B=2x,$ 故 $A=-\frac{1}{4}$，

$B=-\frac{1}{8},$ 故 $y_0=-\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x\right)e^{-x}$ (3’)，原方程通解 $y=-\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x\right)e^{-x}+C_1e^{3x}+C_2e^{-x}.$

六、解：.............

七、解：(1) $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx\overset{令x=\pi-t}{=}\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))d(\pi-t)=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt$

$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx,$ 故 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx.$

(2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+1-\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}.$

八、解：(1). $S=S_1+S_2=\int_0^k (kx-x^2)dx+\int_k^1 (x^2-kx)dx=\left(\frac{k}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^k+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2\right)\Big|_k^1$

$=\frac{k^3}{3}-\frac{k}{2}+\frac{1}{3}$ ， $\frac{dS}{dk}=k^2-\frac{1}{2}$, 令 $\frac{dS}{dk}=0\Rightarrow k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ or $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (舍), 故 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 是 S=$S(k)$在(0,1)

内唯一驻点, 又 $S''(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}>0$，故 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，S 取到最小值, 最小值为 $S(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$.

(2). $V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2-(x^2)^2\right]dx=\pi\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi.$