河海大学 2021-2022 学年第一学期《高等数学 AI》期末试卷(A 卷)参考答案

一．BCBDC

二．1. 2; 2. 4; 3. $\dfrac{\pi}{3}$; 4. $\dfrac{1}{1+p}$; 5. $x+(C_1+C_2x)e^{3x}$

三．1. 解: 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\frac{1}{2}x^3}\cdot\lim\limits_{x\to0}e^{-2x}\overset{3'}{=}2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}\overset{2'}{=}2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{6x}\overset{1'}{=}\dfrac{1}{3}$

2. 解：令 $t=\sqrt{x}$，原式$=\int t\sin t\,dt^2=2\int t^2\sin t\,dt=-2\int t^2 d\cos t=-2t^2\cos t+2\int\cos t\,dt^2$

$=-2t^2\cos t+4\int t\,d\sin t=-2t^2\cos t+4t\sin t-4\int\sin t\,dt=-2t^2\cos t+4t\sin t+4\cos t+C$

$=(4-2x)\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C$

3. 解: $x'(t)=\dfrac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1+\dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，$(1+e^y)y'(t)=\dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{2t}{1+e^y}$

4. 解：面积 $S=\int_0^{2\pi}y\,dx=\int_0^{\pi}2(1-\cos t)d[2(t-\sin t)]=4\int_0^{\pi}(1-\cos t)^2dt=6\pi$

5. 证: 令 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-1-\dfrac{x^2}{2},x>0$．则 $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}-x$，$f''(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-1$ 可见 $f''(x)>0,\forall x>0$，故 $f'(x)$ 严格单调递增，又 $f'(0)=0$，故 $f'(x)>0,\forall x>0$，故 $f(x)$ 在 $x\ge0$ 时单调递增，又 $f(0)=0$，故 $f(x)>0,\forall x>0$，得证.

四．解：(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}+xe^{-x}=\sum\limits_{k=0}^{n}\left[(-x)^k+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^k}{2^k}\right]+x\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-x)^k}{k!}+o(x^n)$

$=\dfrac{3}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left[(-1)^k+\dfrac{1}{2^{k+1}}+\dfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\right]x^k+o(x^n)$；

(2) $f^{(4)}(0)=4!\cdot\left[(-1)^4+\dfrac{1}{2^5}+\dfrac{(-1)^3}{3!}\right]=\dfrac{83}{4}$

五．解：特征方程 $r^2-3r+2=0$，特征根 $r_1=1,r_2=2$，齐次方程通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.因自由项 $f(x)=2e^x$,故特解形式 $y_0=Axe^x$，代入原方程解得 $A=-2$，故特解 $y_0=-2xe^x$,原方程通解为 $y=-2xe^x+C_1e^x+C_2e^{2x}$.又 $y(0)=1$，$y'(0)=\left.\left(\dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}-2\cos2x\right)\right|_{x=0}=-1$，故 $C_1=1$，$C_2=0$，综上，$y=-2xe^x+e^x$.

六．解：(1) 等式两边求导可得 $y'+y=2e^{-x}\cos x$，故 $(e^x y)'=2\cos x$，$e^x y=2\sin x+C$，又 $y(0)=0$，故 $C=0$，$y=2e^{-x}\sin x$.

(2) $V=\pi\int_0^{\pi}y^2dx=4\pi\int_0^{\pi}e^{-2x}\sin^2 xdx=2\pi\int_0^{\pi}e^{-2x}(1-\cos 2x)dx=\pi(1-e^{-2\pi})-2\pi I$，其中

$$I=\int_0^{\pi}e^{-2x}\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{-2x}d\sin 2x=0-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2xde^{-2x}=\int_0^{\pi}e^{-2x}\sin 2xdx$$

$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{-2x}d\cos 2x=\frac{1-e^{-2\pi}}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2xde^{-2x}=\frac{1-e^{-2\pi}}{2}-I$，解得 $I=\frac{1-e^{-2\pi}}{4}$，

故 $V=\frac{\pi(1-e^{-2\pi})}{2}$.

七．证：由 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}x^3f(x)dx$ 和积分中值定理知，存在 $a\in[0,\frac{1}{3}]$，使得 $f(1)=a^3f(a)$，令 $F(x)=x^3f(x)$，则 $F(1)=F(a)$，又 $F(x)$ 在[0,1]上连续且可导，故存在 $\theta\in(a,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\theta)=3\theta^2f(\theta)+\theta^3f'(\theta)=0$，即 $f'(\theta)=-\frac{3}{\theta}f(\theta)$.

八．证：(1) $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt=\int_0^{x}f(-s)d(-s)=-\int_0^{x}f(-s)ds$，因为 f 是偶函数，故 $F(-x)=-\int_0^{x}f(s)ds=-F(x)$，所以 $F(x)$ 是奇函数；

(2) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+T}f(t)dt=f(x+T)-f(x)=0$，故 $\int_x^{x+T}f(t)dt\equiv C=\int_0^{T}f(t)dt=F(T)$ 与 x 无关；

(3) 由(2)知，$F(nT)=\int_0^{nT}f(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT}^{kT+T}f(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}F(T)=nF(T)$；

(4) 当 $x>0$ 时，必存在 n，使得 $nT\le x<(n+1)T$．因 f 是非负函数，故 F(x)在 x>0 时单调增，从而 $F(nT)\le F(x)<F[(n+1)T]$，再利用(3)的结论，即有 $nF(T)\le F(x)<(n+1)F(T)$，从而

$\frac{nF(T)}{(n+1)T}<\frac{nF(T)}{x}\le\frac{F(x)}{x}<\frac{(n+1)F(T)}{x}\le\frac{(n+1)F(T)}{nT}$，由夹逼准则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\frac{F(T)}{T}$.

河海大学 2021-2022 学年第一学期《高等数学 AI》期末试卷(B 卷)参考答案

一．ADCDB

二．1.　2;　 2.　4;　 3.　$x+(C_1+C_2x)e^{3x}$;　 4.　$\frac{1}{1+p}$;　 5.　$\frac{\pi}{3}$