河海大学 2021-2022 学年第二学期《高等数学 AII》期中试卷参考答案

一．DDACB

二．1. $-\pi^3/e$　　2. -6　　3. $-3dx-2\sqrt{2}dy$　　4. $(e-1)/2$　　5. (1, 1, 2)

三．1. 解: $\vec{l}=(-4,-\dfrac{2t}{1+t^2},3(1+t)^2)\Big|_{t=0}=(-4,0,3)$，单位方向向量 $\vec{l}_0=(-\dfrac{4}{5},0,\dfrac{3}{5})$【3 分】

$\nabla u\big|_{(4,1,1)}=(y^2z^3,2xyz^3,3xy^2z^2)\big|_{(4,1,1)}=(1,8,12)$，$\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(4,1,1)}=(1,8,12)\cdot(-\dfrac{4}{5},0,\dfrac{3}{5})=\dfrac{32}{5}$.【3 分】

2. 解：$z_x=yf'(xy)+2g_1'(2x-y,x)+g_2'(2x-y,x)$【3 分】

$z_{xy}=f'(xy)+xyf''(xy)-2g_{11}''(2x-y,x)-g_{12}''(2x-y,x)$【3 分】

3. 解：以 x 为参数，方程组两边同时对 x 求导，有 $2x+4yy'=z',4x+6yy'+2zz'-6z'=0$，将 $(x,y,z)=(-1,1,3)$ 代入，解得 $y'=z'=\dfrac{2}{3}$，故切向量 $\vec{t}=(1,\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})//(3,2,2)$　【4 分】，故切线方程为 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{2}$，法平面方程为 $3(x+1)+2(y-1)+2(z-3)=0$.【2 分】

4. 解：令 $L=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(2x+2y+z-6)$，由 $\begin{cases}L_x=2(\lambda+1)x+2\mu=0\\L_y=2(\lambda+1)y+2\mu=0\\L_z=2z-\lambda+\mu=0\\L_\lambda=x^2+y^2-z=0\\L_\mu=2x+2y+z-6=0\end{cases}$

【4 分】,解得 $(x,y,z)=(1,1,2),(-3,-3,18)$，故最短距离为 $\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$.【2 分】

5. 解：$I\overset{2'}{=}\iint\limits_D\rho(x-2)^2dxdy\overset{2'}{=}\int_{-1}^1dx\int_{x^2}^1\rho(x-2)^2dy\overset{2'}{=}\dfrac{28}{5}\rho.$

四．解：(1)由于 $|f(x,y)|\le|y|$, 故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，故函数在原点连续；【2 分】

(2) 由定义，$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0;$ 类似可得　$f_y(0,0)=0;$【3 分】

(3) 因 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$，而

$\lim\limits_{\Delta y=\Delta x\to0}\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(\Delta x)^3}{|\Delta x|^3}$ 不存在，故函数在原点不可微。【3 分】

五．解：$M\overset{1'}{=}\oint_L\sqrt{x^2+y^2}ds\overset{4'}{=}\int_0^1\sqrt{2x^2}\cdot\sqrt{2}dx+\int_1^2\sqrt{2x}\cdot\dfrac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}+\int_0^2xdx\overset{3'}{=}3+2\sqrt{2}..$

六．解：补充 $L_1: y=0, x:0\to 2a$, 记原积分为 I，由 Green 公式知，

$$-I+\int_{L_1} Pdx+Qdy=\iint_D (Q_x-P_y)dxdy=\iint_D (-2)dxdy=-\pi a^2$$ 【4 分】,

又 $\int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_0^{2a} 2xdx=4a^2$ 【3 分】，故 $I=(\pi+4)a^2$.【1 分】

七．解：$F(t)=\int_0^{\pi/6} d\varphi\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^t f(r)r^2\sin\varphi dr=(2-\sqrt{3})\pi\int_0^t r^2 f(r)dr$【4 分】，故 $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t)=0$, 由

洛必达法则，$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{\pi t^4}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{(2-\sqrt{3})\pi t^2 f(t)}{4\pi t^3}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}f'(0)$.【2 分】

八．解：(1)投影区域为 $D: x^2+y^2\le 3$, 故所求面积

$$S=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2rdr}{\sqrt{4-r^2}}=4\pi.$$【5 分】

(2) 由奇偶对称性，$I=\iiint_\Omega zdxdydz=\int_0^1 dz\iint_{x^2+y^2\le 3z} zdxdy+\int_1^2 dz\iint_{x^2+y^2\le 4-z^2} zdxdy$ 【2 分】

$$=\int_0^1 3\pi z^2 dz+\int_1^2 \pi z(4-z^2)dz=\frac{13}{4}\pi.$$【3 分】