

河海大学 2020-2021 学年第一学期

《高等数学 AI》期末试卷

考试对象: 2020 级物理、力学、海洋专业

考试时间: 2021 年 1 月 21 日

专业_____学号_____姓名_____成绩_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩
得分									

得分	
----	--

一. 选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 下列与 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ 的定义等价的是().

A. $\forall \varepsilon \in (0,1), \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - a| < \varepsilon$

B. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $|x| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - a| < \varepsilon$

C. $\exists \delta > 0$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - a| < \varepsilon$

D. $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0$, 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - a| < \varepsilon$

2. 已知当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = (1 - \sin x)^{\frac{1}{2x}}$, 则定义 $f(0) = (\quad)$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

A. e

B. \sqrt{e}

C. $\frac{1}{e}$

D. $\frac{1}{\sqrt{e}}$

3. 下列选项中正确的是().

A. $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) + C$

B. $\int f'(x) dx = f(x) + C$

C. $d(\int f(x) dx) = f(x)$

D. $\int f'(x^2) dx = f(x^2) + C$

4. 下列反常积分中收敛的是().

A. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

B. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

D. $\int_0^{+\infty} \cos x dx$

5. 曲线 $xy + \ln y = 1$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为().

A. $x - 2y + 1 = 0$

B. $2x - y - 1 = 0$

C. $x + 2y - 3 = 0$

D. $2x + y - 3 = 0$

得分	
----	--

二. 填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos 2x) \sin x^2$ 是 x 的_____阶无穷小(写出阶数).

2. 设 $f(x) = (x+1)(2x+3)^2(3x+4)^3$, 则 $f^{(6)}(x) =$ _____.

3. 曲线 $y = \frac{1}{e^{1-x} - e^x}$ 的垂直渐近线方程为_____.

4. 设 $f(x)$ 连续且满足 $f(x) = x + \int_0^2 f(t)dt$, 则 $f(x) =$ _____.

5. $\int_{-1}^1 \frac{1+x^{2021}}{1+x^2} dx =$ _____.

得分	
----	--

三. 解答题(每小题 6 分, 共 30 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \cot x \right]$.

2. 求不定积分 $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$.

3. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx$.

4. 求 $f(x) = \frac{e^{2x}}{1-x}$ 的带 Peano 余项的 3 阶麦克劳林公式.

5. 证明: 对任意实数 x , 恒有 $2x \arctan x \geq \ln(1+x^2)$.

得分	
----	--

四. (8 分) 设连续函数 $y = y(x)$ 满足 $y(x) + 2\int_0^x y(t)dt = x^2$, 求 $y(x)$.

得分	
----	--

五. (8 分) 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 2xe^{-x}$ 的通解.

得分	
----	--

六. (8 分) 设 $f(x) \in C[-2,2]$ 且 $f(x) > 0$. 证明曲线 $y = \int_{-2}^2 |x-t| f(t)dt$ 在 $[-2,2]$ 上是凹的.

得分	
----	--

七. (8 分) (1) 设 $f(x) \in C[0,1]$, 证明: $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)dx$.

(2) 求 $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

得分	
----	--

八. (8 分) 设直线 $y = kx$ ($0 < k < 1$) 与抛物线 $y = x^2$ 所围成的图形 A 的面积为 S_1 , 且它们与直线 $x = 1$ 所围成的图形 B 的面积为 S_2 .

(1) 当 k 为何值时, $S_1 + S_2$ 达到最小? 并求此最小值.

(2) 当 $S_1 + S_2$ 达到最小值时, 求平面图形 A 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

