河海大学 2022-2023 学年第二学期

《高等数学 AII》期中试卷

考试对象: 2022 级物理、力学、海洋专业

考试时间: 2023 年 04 月 17 日

专业__________学号____________姓名___________成绩__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩
得分									

得分	

一. 选择题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 下列二重极限不存在的是(　　).

A. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{1+x+y}$　　B. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$　　C. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\sin\dfrac{1}{y}$　　D. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$

2. 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为(　　).

A. $x-y+z=-2$　　B. $x+y+z=0$

C. $x-2y+z=-3$　　D. $x-y-z=0$

3. 设 $u(x,y)=f(x+y)+f(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}g(t)\mathrm{d}t$，其中 f 二阶可导, g 一阶可导，则必有(　　).

A. $u_{xx}=-u_{yy}$　　B. $u_{xx}=u_{yy}$　　C. $u_{xy}=u_{yy}$　　D. $u_{xy}=u_{xx}$

4. 函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点处(　　).

A. 不连续　　B. 可偏导　　C. 沿各方向的方向导数皆存在　　D. 可微

5. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$(　　).

A. $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x-1}f(x,y)\mathrm{d}y$

B. $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

得分	

二．填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 曲线$\begin{cases} x^2-2y^2=3 \\ z=0 \end{cases}$绕$x$轴旋转一周的旋转曲面方程为______________________________.

2. 函数$u=xy+\dfrac{z}{y}$在点$(2,1,1)$处沿向量$\vec{n}=(1,2,2)$的方向导数为______________________.

3. 设函数$z=z(x,y)$由方程$e^{x+2y+3z}+xyz=1$确定，则$\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$ _______________________.

4. 设平面曲线$L:x^2+y^2=1$，逆时针方向，则$\oint_L \dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=$_______________________.

5. 设D是直线$y=x, x=-1, y=1$所围区域，f连续，则$\iint\limits_D [1+xyf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

得分	

三．解答题(每小题 6 分，共 30 分)

1. 求$\iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是直线$y=x, y=2x$和$y=2$所围区域.

2. 设$z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中f二阶可导，g具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 求曲线$\begin{cases}3x^2-2y^2+z^2=11\\ x+1=y^2+2z^2\end{cases}$在点 $(2,-1,1)$ 处的切线方程.

4. 求第一型曲线积分$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中 $L:x^2+y^2=2x$.

5. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 含在柱体 $x^2+y^2\le 2x$ 内的部分，求 Σ 面积.

得分	

四．(8 分)设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

(1) 该函数在原点是否连续，为什么？

(2) 计算该函数在原点的两个一阶偏导数；

(3) 判断函数在原点的可微性, 并证明.

得分	

五．(7 分)已知一物体由上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成, 其密度函数为 $\rho(x,y,z)=z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求该物体的质量.

得分	

六．(7 分)求 $I=\int_L (3x^2y-y)\mathrm{d}x+(x^3-2y)\mathrm{d}y$，其中 L 是由原点沿上半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 经第一象限到点 $(0,2)$ 的有向曲线段.

得分	

七．(7 分)设 $f(x)$ 连续，$f(0)=1$，柱体 Ω_t 由 $0\le z\le 1, x^2+y^2\le t^2$ 确定. 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$，其中

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega_t}[z+f(\sqrt{x^2+y^2})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

得分	

八．(11 分) 设有一小山，取它的底面所在平面为 xOy 坐标面，其底部所占区域为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-xy\le 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点，即要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.