河海大学 2022-2023 学年第二学期《高等数学 AII》期中试卷参考答案

一．BABCD

二．1. $x^2-2(y^2+z^2)=3$　　2. 5/3　　3. $-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$　　4. 2π　　5. 2

三．1. 解：$I\overset{3'}{=}\int_0^2 dy\int_{y/2}^{y}e^{-y^2}dx\overset{3'}{=}\frac{1}{2}\int_0^2 ye^{-y^2}dy=\frac{1}{4}(1-e^{-4})$

2. 解：$z_x=2f'(2x-y)+g_1'(x,xy)+yg_2'(x,xy)$【3 分】

$z_{xy}=-2f''(2x-y)+xg_{12}''(x,xy)+g_2'(x,xy)+xyg_{22}''(x,xy)$【3 分】

3. 解：$\vec{n}_1=(6x,-4y,2z)\big|_{(2,-1,1)}=(12,4,2),\ \vec{n}_2=(1,-2y,-4z)\big|_{(2,-1,1)}=(1,2,-4),$【2 分】切向量

$\vec{t}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-20,50,20)//(-2,5,2)$　【2 分】，故切线方程为 $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{2}$【2 分】

4. 解：曲线参数方程为 $x=1+\cos\theta,y=\sin\theta,\theta\in[0,2\pi]$【2 分】故

$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\sqrt{x'(\theta)^2+y'(\theta)^2}d\theta=2\int_0^{2\pi}|\cos\frac{\theta}{2}|d\theta=8.$【4 分】

5. 解：$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$【3 分】，故面积 $S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\pi.$【3 分】

四．解：(1)由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)=0,\left|\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le1,$ 故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，故函数在原点连续；【2 分】 (2) 由定义，$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{|x|}=0;$ 类似可得 $f_y(0,0)=0;$【3 分】 (3) 因 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$，故函数在原点可微。【3 分】

五．解：$M\overset{1'}{=}\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz\overset{4'}{=}\int_0^{\pi/6}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr\overset{2'}{=}\frac{\pi}{20}$.

六．解：补充 $L_1:x=0,y:2\to0,$

$I+\int_{L_1}Pdx+Qdy\overset{Green}{=}\iint\limits_{D}(Q_x-P_y)dxdy=\iint\limits_{D}[3x^2-(3x^2-1)]dxdy=\frac{\pi}{2}$【4 分】故

$I=\frac{\pi}{2}-\int_{L_1}Pdx+Qdy=\frac{\pi}{2}-\int_2^0(-2y)dy=\frac{\pi}{2}-4.$【3 分】

七．解：$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t dr\int_0^1[z+f(r)]rdz=\frac{1}{2}\pi t^2+2\pi\int_0^t rf(r)dr$【4 分】，再由洛必达法则，知

$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}=\dfrac{\pi}{2}+\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{2\pi t f(t)}{2t}=\dfrac{\pi}{2}+\pi f(0)=\dfrac{3}{2}\pi$.【3 分】

八．解：(1)沿梯度方向方向导数最大，梯度为 $\nabla h\big|_{(x_0,y_0)}=(-2x_0+y_0,-2y_0+x_0)$, 最大值为

$g(x_0,y_0)=\sqrt{5(x_0^2+y_0^2)-8x_0y_0}$.【4 分】

(2) 记 $f(x,y)=g(x,y)^2=5(x^2+y^2)-8xy$, 令 $L=f(x,y)+\lambda(x^2+y^2-xy-75)$ 【2 分】，令

$\begin{cases} L_x=10x-8y+2\lambda x-\lambda y=0 \\ L_y=10y-8x+2\lambda y-\lambda x=0 \\ \quad x^2+y^2-xy-75=0 \end{cases}$【2 分】，解得 $(x,y)=(5\sqrt{3},5\sqrt{3}),(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}),(5,-5)$或$(-5,5)$.

由于 $f(5\sqrt{3},5\sqrt{3})=f(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})=150<f(5,-5)=f(-5,5)=450$, 故起始点位置为(5,-5)或(-5,5).【3 分】