河海大学 2022-2023 学年第一学期《高等数学 AI》期末试卷(A 卷)参考答案

一．BAADB

二．1. 2024　　2. $e^{\sin x}\cot x dx$　　3. $\pi/2$　　4. $1/2$

5. $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ s.t. $\forall x_1, x_2\in I$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，恒有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

三．1. 解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)x}{2x-2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4}\dfrac{x^3}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4}\dfrac{3x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4}\dfrac{6x}{\sin x}=\dfrac{3}{2}$【6 分】

2. 解：$I=\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$【3 分】，　$I=\arcsin\dfrac{x}{2}\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{6}$【3 分】

3. 解：$I=\dfrac{1}{3}\int\arctan x d(x^3)=\dfrac{1}{3}x^3\arctan x-\dfrac{1}{3}\int\dfrac{x^3}{1+x^2}dx$【3 分】

$=\dfrac{1}{3}x^3\arctan x-\dfrac{1}{6}\int(1-\dfrac{1}{1+x^2})d(x^2)==\dfrac{1}{3}x^3\arctan x-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$【3 分】

4. 解：$f(x)=\dfrac{1}{1+(x-1)}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}$【2 分】$=\sum\limits_{k=0}^{4}(-1)^k(x-1)^k-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{4}(-1)^k(\dfrac{x-1}{2})^k+o((x-1)^4)$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}(x-1)+\dfrac{7}{8}(x-1)^2-\dfrac{15}{16}(x-1)^3+\dfrac{31}{32}(x-1)^4+o((x-1)^4)$【4 分】

5. 解：$-\sin(xy)(y+xy')+e^{-y^2}y'=1,\ y'=[1+y\sin(xy)][e^{-y^2}-x\sin(xy)]^{-1}$【3 分】

$f(0)=1,\ f'(0)=e,$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(1/n)-1]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(1/n)-f(0)}{1/n}=f'(0)=e$【3 分】

四．解：$r^2-4r+5=0, r_{1,2}=2\pm i,$ 相应齐次方程通解 $Y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$【4 分】因

$f(x)=2(x-1)e^x,$ 特解形式 $y_0=(ax+b)e^x.$ 代入方程化简为 $ax-a+b=x-1,\quad a=1, b=0.$ 故

$y_0=xe^x,$ 原方程通解 $y=xe^x+e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.【4 分】

五．解：(1) $F(x)=\int_0^x e^{-t}d\sin t=e^{-t}\sin t\Big|_0^x+\int_0^x\sin t\cdot e^{-t}dt=e^{-x}\sin x-\int_0^x e^{-t}d\cos t$

$=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x+1-\int_0^x e^{-t}\cos t dt,\ F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)$【4 分】

(2) $F'(x)=e^{-x}\cos x$，$(0,\pi/2)$上，$F'>0$; $(\pi/2,3\pi/2)$上，$F'<0$; $(3\pi/2,2\pi)$上，$F'>0$; 故

极大值为 $F(\pi/2)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$，极小值为 $F(3\pi/2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{2}}$.【4 分】

六．解：$\left[\dfrac{1}{x}f(x)\right]'=\dfrac{3}{2}a,\ \dfrac{1}{x}f(x)=\dfrac{3}{2}ax+C,\ f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+Cx$【3 分】

面积 $S=\int_0^1\left(\frac{3}{2}ax^2+Cx\right)dx=\frac{a}{2}+\frac{C}{2}=2,\quad C=4-a,\quad f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x.$ 【2 分】

由 $f(x)=x(\frac{3}{2}ax+4-a)>0,\forall x\in(0,1)$ 知，$\frac{3}{2}ax+4-a>0,\forall x\in(0,1)$，故 $4-a\geq 0,4+\frac{1}{2}a\geq 0$，

$a\in[-8,4]$．体积 $V(a)=\int_0^1\pi f(x)^2dx=\frac{\pi}{30}(a^2+10a+160),\ a\in[-8,4]$．【3 分】

令 $V'=0$，得 $a=-5\in[-8,4]$，又 $V''(-5)>0$，故 $a=-5$ 时，体积最小.【2 分】

七．解：令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)+\sin x-2x-\frac{1}{2}x^2,x\in(0,\pi).$

$f'(x)=\ln(1+x)+1+\cos x-2-x,\quad f''(x)=\frac{1}{1+x}-\sin x-1<0,\forall x\in(0,\pi)$ 【4 分】

故 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上严格单减，又 $f'(0)=0$，故 $f'(x)<0,\forall x\in(0,\pi)$，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上严格单减，又 $f(0)=0$，故 $f(x)<0,\forall x\in(0,\pi)$.【2 分】

八．(1) $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)g(x)dx+\int_0^a f(x)g(x)dx=\int_a^0 f(-t)g(-t)d(-t)+\int_0^a f(x)g(x)dx$

因 $g(x)$是偶函数，$f(-x)+f(x)=A$，故上式$=\int_0^a f(-x)g(x)dx+\int_0^a f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx$

【4 分】

(2) 记 $f(x)=\arctan e^x,g(x)=|\sin x|$，$g(x)$是偶函数，且易知 $f(-x)+f(x)=\frac{\pi}{2}$．由(1)结论

知，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{\pi}{2}$.【4 分】

河海大学 2022-2023 学年第一学期《高等数学 AI》期末试卷(B 卷)参考答案

二．ABBAD

二．1. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ s.t. $\forall x_1,x_2\in I$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

2. 2024　　3. $\pi/2$　　4. $e^{\sin x}\cot x dx$　　5. 1/2