『数理逻辑』.

No.

DATE / /

一、命题逻辑.

最小完备集：$\{\neg,\wedge\}$ $\{\neg,\vee\}$ $\{\neg,\to\}$

I. 命题：有唯一真值的陈述句. < 简单命题 / 复杂、、 + 联结词

$\boxed{\text{符号化}}$

优先级：$(\ )\ \neg\ \wedge\ \vee\ \to\ \leftrightarrow$

① $\vee$ 或 < 相容或 / 排斥或 ② $\to$ 蕴涵 $p\to q$ q P

命题变项 + 联结词 + ( ) ⇒ 公式.

重言式 矛盾式.

II. 等值. $A\Leftrightarrow B$.

等值式：① 蕴涵等值式：$A\to B \Leftrightarrow \neg A\vee B$.

② 等价 、、、 ：$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow (A\to B)\wedge(B\to A)$.

③ $A\to B\Leftrightarrow \neg B\to\neg A$;

$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow \neg A\leftrightarrow\neg B$;

$(A\to B)\wedge(A\to\neg B)\Leftrightarrow\neg A$.

III. 文字 → 简单析取（合取）式.

→ 合取（析取）范式.

→ 主合取（析取）范式.

S个极小项 m_i. S个极大项 M_i.

⇒ S个成真赋值，(2^n-S)个成假、、。 ⇒ S个成假、、，(2^n-S)个成真、、.

IV. 推理：P_3.

§二、一阶逻辑（谓词逻辑）

I. 符号化：
- 个体词 ⟨ 个体常项：a, b, c；个体变项：x, y, z。 $\boxed{\text{个体域}}$
- 谓词：F, G, H.
- 量词 ⟨ 全称 $\forall$；存在 $\exists$。 $\boxed{\text{辖域}}$

II. 推理：P_6

『集合论』

§二元关系

I. 笛卡尔积：$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A, y \in B\}$.
有序对.

II. xRy. → 特例：$\emptyset$. I_A. E_A. → 关系矩阵：$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
⇒ $fldR = domR \cup ranR$.

III. 运算：
① 逆：$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}$
② 右复合：$F \circ G = \{\langle x, y\rangle \mid \exists t\,(\langle x, t\rangle \in F \wedge \langle t, y\rangle \in G)\}$
③ 限制：$R \upharpoonright A$ 限制 dom
④ 像：$R[A] = ran\,(R \upharpoonright A)$

IV. 性质：
① ⟨ 自反；反自反 ⇒ R自反、对称、传递，则 $x \sim y$. $\boxed{\text{等价}}$
② ⟨ 对称；反对称
③ 传递

等价类：$[x]_R$ → $\forall x \in A$. R为A上的等价关系. $[x]_R$为x的等价类
商集：$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$. → 等价类的集合. all in.

⇓

偏序关系：R自反、反对称、传递 → 哈斯图. → 4元.（可比 条件下向）
→ 4界.

『图』

No.
DATE / /

I. $\sum d_i = 0 \pmod 2$ $\Leftrightarrow$ 可图化 $\longrightarrow$ 可简单图化 $\Rightarrow \Delta(G) \le n-1$.

握手定理: $\boxed{\sum d_i = 2m}$

图同构: $G_1 \cong G_2$.

- 生成子图 (点不变).
- 导出子图. $G[V']$. $G[E']$.

无奇圈 $\Leftrightarrow$ 二部图

↳ 完全二部图: $K_{r,s}$.

II. 各边异: 简单通(回)路

+

各点异: 初级 . . . < 奇圈 / 偶圈

if 边重复: 复杂 . . .

- 点割集: 删点后. $P(G-V) > P(G)$ 连通分支 ↑.
  - ↳ 割点
- 边割集: 删边后. P ↑.
  - ↳ 桥.

弱连通图: D基图为连通图

⇓ 任2点连通.

∃经过all点通路 ⇔ 单向 . . .

⇓ 任2点. 相互可达.

∃经过all点回路 ⇔ 强 . . .

III. 矩阵表示. ① G. 关联矩阵. 点-边 < 0. 不关联. / 1. 关联1次. / 2. 环.

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ \\ v_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & e_4 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

点-边 < 1 出 / 0 无 / -1 入

② D. 关联矩阵.

$$M(D) = \begin{array}{c} \\ \\ v_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & e_2 & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

点-点 (邻接边数).

③ D. 邻接矩阵.

$$A(D) = \begin{array}{c} \\ \\ v_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & v_2 & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow a_{22}^{(1)} \Rightarrow$$

A^l 中 $a_{ij}^{(l)}$ 表 D 中 $v_i \to v_j$ 长度为 l 的通路数.

点-点 < 1. 可达 / 0. 不 . .

④ D. 可达矩阵.

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ v_2 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow B_d = A + A^2 + \cdots + A^d$

No.
DATE / /

IV. 欧拉图. 点

- $\mathring{E}.G \Leftrightarrow C$ + 无奇点.
- $S\mathring{E}.G \Leftrightarrow C$ + 2奇点.
- $\mathring{E}.D \Leftrightarrow$ 强C + each点 $d^+=d^-$.
- $S\mathring{E}.D \Leftrightarrow$ 单向C + 恰2-出-入奇点.

△ *Fleury* 算法. 求欧拉回路路线. (不走桥).

非平凡 $\mathring{E}.G \Leftarrow C$ + *composed of* 边不重的圈s.

V. 哈密顿图. 边

- $S\mathring{H}.G \Rightarrow p(G-V_1) \le |V_1|+1$. (for 二部图)
- $\mathring{H}.G \Rightarrow \cdots \le |V_1|$.
- $S\mathring{H}.G \Leftarrow \forall$ 不相邻2点. $d_1+d_2 \ge n-1$.
- $\mathring{H}.G \Leftarrow \cdots \ge n$.

n阶简单G. $\delta \ge \frac{n}{2} \Rightarrow \mathring{H}.G$

n阶完全G. n为奇 $\Rightarrow$ 有 $\frac{n-1}{2}$ 个边不重的 $\mathring{H}$ 回路.

VI. 树. 

$m=n-1$

G有生成T $\Leftrightarrow$ G.C.

↳ 避圈法 (*Kruskal* 算法) 作生成T. (取 W_{min} 边 + 无回路.)

根树 → 子树 (任一点及其后代导出子树)

↓ each点 ≤ r 个儿子

r叉树

↓ = r个

r叉正则树

↓ each 树叶层高 = 树高.

r叉完全正则树

→ 2叉树 → 最优2叉树 (W_{min})

△ Huffman 算法 ⇅ 二元前缀码 (0,1) → 平均编码长度 L.

2叉树的 3序遍历.

VII. 平面图：G可嵌入平面.

↳ 划分出 many 面s. 包围面的边界长度为次数. $deg(R)$. $\sum deg(R_i) = 2m$.

同胚：插/删 2度点 n次后同构.

Kuratowski 定理：（库拉图斯基）

- 平面G $\Leftrightarrow$ G 不含与 K_5. $K_{3,3}$ 同胚子图.
- … 可收缩至 K_5, $K_{3,3}$ 的子图.

欧拉公式：$n-m+r=2$.

$\Downarrow$ k个连通分支.

$n-m+r=k+1$.

VIII. 着色

- 点 (无环) $\chi(G)$ ⟶ 着色图：
  - 零图. $\chi(G)=1$.
  - K_n. $\chi=n$.
  - 奇圈 & 奇阶轮图. $\chi=3$；偶阶轮图. $\chi=4$.
  - 二部图. $\chi=2$
  - 无环G. $\chi \le \Delta G+1$.
  - CG. 非K_n. 非奇圈. $\chi \le \Delta(G)$. (布鲁克斯定理).
- 面 $\chi^*(G)$ （对偶图. 转化.）
- 边 (无环) $\chi'(G)$
  - (维津定理). 简单G. $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$.
  - 偶圈. $\chi'=2$；奇圈. $\chi'=3$.
  - K_n. $\begin{cases} n为偶. & \chi'=n-1. \\ n为奇. & \chi'=n. \end{cases}$
  - 二部图. $\chi'=\Delta(G)$.
  - W_n. $\chi'=n-1$.

证明题：

① $F\cdot(G\cap H)\subseteq F\cdot G\cap F\cdot H$

证：任取 $\langle x,y\rangle$

$\langle x,y\rangle\in F\cdot(G\cap H)$

$\Leftrightarrow$ ...

② $F[A\cap B]\subseteq F[A]\cap F[B]$

证：任取 y

$y\in F[A\cap B]$

$\Leftrightarrow y\in \mathrm{ran}(F\restriction(A\cap B))$

$\Leftrightarrow \exists x(\langle x,y\rangle\in F\restriction(A\cap B))$

$\Leftrightarrow \exists x(\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in(A\cap B))$

$\Leftrightarrow \exists x((\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in A)\wedge(\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in B))$

$\Rightarrow$ ...

③ $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

证：对任意 x,

$x\in A-(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\cup C$

$\Leftrightarrow$ ...

△前束范式

$\forall x(A(x)\to B)\Leftrightarrow \exists x A(x)\to B$

$\forall x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to\forall A(x)$

$A(x)$ 在前面时，有 $\neg A(x)$。
但 $\forall x\neg A(x)\Leftrightarrow\neg\exists x A(x)$
∴会变号。
在后面不会。