河海大学 2021-2022 学年第一学期

《高等数学 AI》期末试卷（A 卷）

考试对象: 2021 级力学、物理、海洋等专业

考试时间: 2022 年 1 月 12 日

专业__________学号____________姓名___________成绩__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩
得分									

得分	

一. 选择题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 已知 $x \to 0$ 时，$\cos x-(1+ax+bx^2)$ 是 x^2 的高阶无穷小，则 a,b 分别为(　　).

A. $a=0,b=-1$　　B. $a=0,b=-\dfrac{1}{2}$　　C. $a=-1,b=0$　　D. $a=1,b=\dfrac{1}{2}$

2. 下列关于曲线 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的论断中正确的是(　　).

A. 该曲线有一条水平渐近线
B. 该曲线仅有一条垂直渐近线，无其它渐近线
C. 该曲线有一条垂直渐近线和一条斜渐近线
D. 该曲线仅有一条斜渐近线，无其它渐近线

3. 设 $I=\int_0^1(1+x\sin x)dx$，$J=\int_0^1 e^{x^2}dx$，$K=\int_0^1(1+x^2)dx$，则 I,J,K 的大小关系是(　　).

A. $I<J<K$　　B. $I<K<J$　　C. $J<K<I$　　D. $J<I<K$

4. 下列反常积分中发散的是(　　).

A. $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$　　B. $\int_0^1\ln xdx$　　C. $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{(x-1)^2}$　　D. $\int_1^{+\infty}\sin xdx$

5. 设 $f(x)$ 是 $(-1,1)$ 上的连续函数且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x^2}{x^3}=2$，则(　　).

A. $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点
B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点
D. 无法判断 $x=0$ 是否 $f(x)$ 的极值点

得分	

二．填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}+x\sin\dfrac{1}{x^2}, & x<0 \\ a\cos x+x, & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$________________.

2. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=0$，$f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+2x\sin x)}{x^2}=$________________.

3. $\int_{-1}^{1}\dfrac{1+\sin x}{\sqrt{4-x^2}}dx=$________________________.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=$__________________________(其中 p 是正数).

5. 设 $y_1=x$，$y_2=x+e^{3x}$，$y_3=x(1+e^{3x})$ 是二阶线性非齐次微分方程的特解，则该微分方程的通解为 $y=$____.

得分	

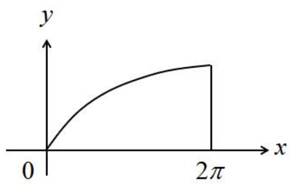
三．解答题(每小题 6 分，共 30 分)

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)e^{-2x}}{\sqrt{1+x^3}-1}$.

2. 求 $\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$.

3. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}) \\ y+e^y=1+\int_0^{t^2}\frac{1}{\sqrt{1+s}}ds \end{cases}$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$.

4. 求摆线 $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}, t\in[0,\pi]$ 与 x 轴及直线 $x=2\pi$ 所围平面图形的面积.



5. 证明：当 $x>0$ 时，$\frac{e^x+e^{-x}}{2}>1+\frac{x^2}{2}$.

得分	

四．(7 分)设 $f(x)=\dfrac{3}{(1+x)(2-x)}+xe^{-x}$. (1) 求 $f(x)$ 的带 Peano 余项的 n 阶麦克劳林公式；

(2) 求 $f^{(4)}(0)$.

得分	

五．(8 分)设 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^{x}$，且其图形与曲线 $y=e^{\arctan x}-\sin 2x$ 在点(0,1)处相切，求函数 $y=y(x)$.

得分	

六．(8 分)设连续函数 $y=y(x)$ 满足

$$y(x)+\int_0^x y(t)dt=e^{-x}(\sin x-\cos x)+1.$$

(1) 求 $y=y(x)$；(2) 求 $y=y(x),x\in[0,\pi]$ 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体体积.

得分	

七．(5 分)设 $f(x)$ 在 [0,1] 上可导，且 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}x^3f(x)dx.$ 证明：$\exists\theta\in(0,1)$，使得 $f'(\theta)=-\dfrac{3}{\theta}f(\theta).$

得分	

八．(12 分) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的非负连续偶函数.

(1) 考察函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的奇偶性；

(2) 证明 $\int_x^{x+T} f(t)dt$ 与 x 无关；

(3) 证明对任意的正整数 n，都有 $F(nT)=nF(T)$；

(4) 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=\dfrac{F(T)}{T}$.