3. METODY RUNGEGO-KUTTY

Metoda Rungego- Kutty II rzędu

W metodzie tej wzór na całkowanie równania różniczkowego ma postać:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \tag{3.1}$$

gdzie:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{3.2}$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h; y_i + q_{11} k_1 h) \tag{3.3}$$

Zależności między współczynnikami są postaci:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 p_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 q_{11} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pokażemy teraz sposób wyznaczania współczynników a_1, a_2, p i q dla metody RK II rzędu. Wartości współczynników znajdziemy przez porównanie wyrazów w rozwinięciu funkcji w szereg Taylor'a a zależnościami (3.1-3.3).

Rozwińmy funkcję f(x,y) w szereg Taylor'a. Otrzymamy:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)h^2}{2!} + 0(h^3)$$

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \left(\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{h^2}{2!} + 0(h^3)$$

Dowolną ciągłą funkcję g(x,y) możemy przedstawić w postaci:

$$g(x + r, y + s) = g(x, y) + r\frac{\partial g}{\partial x} + s\frac{\partial g}{\partial y} + \dots \tag{3.5}$$

Zatem (3.3) możemy zapisać w postaci:

$$k_2 = f(x_i + p_1 h; y_i + q_{11} k_1 h) = f(x_i, y_i) + p_1 h\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11} k_1 h\frac{\partial f}{\partial y} + 0(h^2) \tag{3.6}$$

gdzie $0(h^2)$ oznacza wyrazy wyższego rzędu.

Zgodnie ze wzorem metody R-K (3.1) po podstawieniu (3.2) oraz (3.3) otrzymujemy:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 hf(x_i, y_i) + a_2 hf(x_i, y_i) + a_2 p_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \\ + a_2 q_{11} h^2 \frac{\partial f}{\partial y} f(x_i, y_i) + 0(h^3) \tag{3.7}$$

Po pogrupowaniu odpowiednich wartości otrzymamy:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)[a_1 + a_2] + \left[a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} \frac{\partial f}{\partial y} f(x_i, y_i) \right] h^2 + 0(h^3) \tag{3.8}$$

Wyrażenie powyższe musi być równoważne z rozwinięciem funkcji w szereg Taylor'a:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx})\frac{h^2}{2!}$$

Z tego wynika, że muszą zachodzić relacje:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 p_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 q_{11} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Podobnie możemy wyprowadzić znane nam już wzory dla metod R-K:

1. Metoda Heun'a z jednym korektorem: $a_2=1/2$
   zgodnie z zależnościami (3.9) $a_1=1/2$, $p_1=q_{11}=1$

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2)h \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + h; y_i + k_1 h) \end{aligned} \tag{3.11}$$

2. Metoda punktu środkowego (mid-point method) $a_2=1$, zgodnie z zależnościami (3.9) $a_1=0$, $p_1=q_{11}=1/2$

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h; y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \end{aligned} \tag{3.13}$$

3. Metoda Ralstona'a (zapewnia najmniejszy błąd obcięcia dla metod R-K II-go rzędu) $a_2=2/3$

zgodnie z zależnościami (3.9) $a_1=1/3$, $p_1=q_{11}=3/4$

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2)h \tag{3.14}$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{3}{4}h; y_i + \frac{3}{4}k_1 h) \tag{3.15}$$

Przykład 3.1:
Obliczyć wartość funkcji w punkcie x=0.5. Założenia: war. pocz. y(0)=1, x należy do przedziału (0,4), h=0,5

$$f(x_i, y_i) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

• metoda Ralstona'a

$$k_1 = f(0{,}1) = -2\cdot 0^3 + 12\cdot 0^2 - 20\cdot 0 + 8{,}5 = 8{,}5$$
$$k_2 = f(0 + \frac{3}{4}\cdot 0{,}5; \frac{3}{4}\cdot 8{,}5\cdot 0{,}5) = f(0.375; 3{,}1875) =$$
$$= -2(0{,}375)^3 + 12(0{,}375)^2 - 20(0{,}375) + 8{,}5 = 2{,}58203125$$

Funkcja przyrostowa wynosi:

$$\varphi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n$$
$$\varphi = \frac{1}{3}\cdot 8{,}5 + \frac{2}{3}\cdot 2{,}58203125 = 4{,}5546875$$

ostatecznie otrzymujemy:

$$y(0{,}5) = y(0) + \varphi \cdot h$$
$$y(0{,}5) = 1 + 4{,}5546875\cdot(0{,}5) = 3{,}27734375$$

błąd procentowy wynosi:

$$\varepsilon = -1{,}82\%$$

• metoda punktu środkowego

$$k_1 = f(0{,}1) = -2\cdot 0^3 + 12\cdot 0^2 - 20\cdot 0 + 8{,}5 = 8{,}5$$
$$k_2 = f(0 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}5; \frac{1}{2}\cdot 8{,}5\cdot 0{,}5) = f(0.25; 2{,}125) =$$
$$= -2(0{,}25)^3 + 12(0{,}25)^2 - 20(0{,}25) + 8{,}5 = 4{,}21875$$

Funkcja przyrostowa wynosi:

$$\varphi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n$$
$$\varphi = 0 \cdot 8{,}5 + 1 \cdot 4{,}21875 = 4{,}21875$$

ostatecznie otrzymujemy:

$$y(0{,}5) = y(0) + \varphi \cdot h$$
$$y(0{,}5) = 1 + 4{,}21875 \cdot (0{,}5) = 3{,}109375$$

błąd procentowy wynosi:

$$\varepsilon = 3{,}4\%$$

Metoda R-K rzędu III

Wzór na całkowanie równania różniczkowego ma postać:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h \tag{3.16}$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h; y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \tag{3.17}$$
$$k_3 = f(x_i + h; y_i - k_1 h + 2k_2 h) \tag{3.18}$$

- błąd aproksymacji:$E_a \sim O(h^4)$
- bład globalny:$E_t \sim O(h^3)$

Metoda R-K rzędu IV

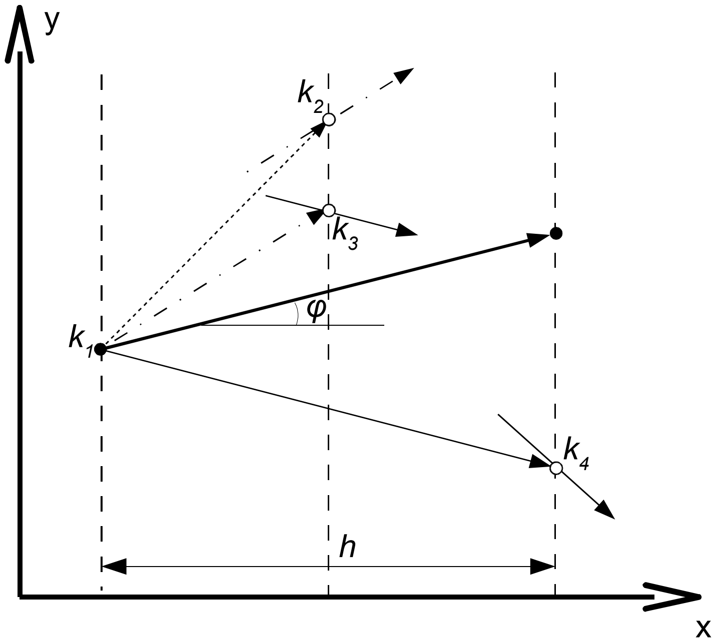
Metoda ta jest najbardziej popularna wśród metod R-K (często używana w obliczeniach inżynierskich).
Wzór na całkowanie równania różniczkowego ma postać:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \tag{3.19}$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h; y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \tag{3.20}$$
$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \tag{3.21}$$
$$k_4 = f(x_i + h; y_i + k_3 h)$$
$$\varphi = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{3.22}$$

- błąd aproksymacji: $E_a \sim O(h^5)$
- bład globalny: $E_t \sim O(h^4)$

Kolejność olbliczania współczynników k pokazano na Rys3.1.



Rys. 3.1 Interpretacja graficzna metody R-K IV rzędu

Metody R-K rzędu V (Butcher 1964)

W metodzie R-K V rzędu wzór na całkowanie ma postać:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h \tag{3.23}$$