Ejercicios tema 2

Blanca Cano Camarero

20 de abril de 2020

Índice

1. Ejercicio 9

Sea G un grupo y sean $a, b \in G$ tales que $ba = ab^k$, $a^n = 1 = b^m$ con $n, m > 0$

Demuestre

1. **Para todo** $i = 0, ..., m-1$ **se verifica** $b^i a = ab^{ik}$

   Demostraremos por inducción que se cumple para todo $i = 0, ..., m-1$.

   - Caso base $i = 0$: evidente, $b^0 a = a = ab^{0k}$
   - Hipótesis de inducción:
     Supongamos que para $i \in \{0...m-2\}$ se cumple y veamos que para i+1 también.

     $$b^{i+1}a = bb^i a = b(b^i a) = (ba)b^{ik} = ab^k b^{ik} = ab^{(i+1)k.}$$

     Donde hemos usado la hipótesis de inducción y después aplicando las hipótesis iniciales.

     Por tanto hemos probado lo que se quería.

2. **Para todo** $j = 0, ..., n-1$ **se verifica** $ba^j = a^j b^{k^j}$

   Lo demostraremos por inducción que se cumple para todo $j = 0, ..., n-1$:

   - Caso base $j = 0$ evidente.
   - Supongamos que para $j \in \{0...n-2\}$ se cumple y veamos que para j+1 también.

     $$ba^{j+1} = (ba^j)a.$$

     Por la hipótesis de inducción $(ba^j)a = a^j b^{k^j} a$
     Usando ahora el partado 1 de este mismo ejercicio.
     $a^j (b^{k^j} a) = a^j ab^{k^j k} = a^{j+1} b^{k^{j+1}}$

     Como queríamos ver.

3. **Para todo i=0,..,m-1 y para todo j = 0,..n-1 se verifica** $b^i a^j = a^j b^{ik^j}$**.**

   Sea un j cualquiera en el rango mencionado. y ahora demostraremos por inducción sobre i el enunciado.

   - Caso base i=0, evidente para cualquier j.
   - Hipótesis de inducción, supongamos cierto para $1 \leq i < m - 2$ y veamos que se cumple para el caso $i + 1$.

     $$b^{i+1}a^j = b(b^i a^j) = (ba^j)b^{ik^j} = a^j b^{k^j} b^{ik^j} = a^j b^{(i+1)k^j}$$

     Donde para la primera igualadas se ha usado la prompiedad asociativa, para la segunda la hipótesisi de inducción, para la tercera el apartado 2 de este mismo ejercicio y finalmente otra vez la propiedad asociativa.

     Como el j era arbitrario hemos probado lo buscado.

4. **Demostrar que todo elemento de** $< a, b >$ **puede escribirse como** $a^r b^s$ **con** $0 \leq r < n$, $0 \leq s < m$.

   Esto es consecuencia directa del apartado anterior y la definición de grupo generado. Todo elemento tendrá la forma $a^{z_0}b^{z_1}a^{z_2}...$ con los exponenetes enteros.

   Por tanto utilizando el apartado 3 repetidas veces podremos quedarnos con que $a^{z_0}b^{z_1}a^{z_2}... = a^x b^y$ con x,y enteros.

   Y como sea cual sera x e y podemos expresarlos como $x = pn + r, y = qm + s$. Usando las hipótesisis iniciales y que $a^{pn} = 1 = b^{qm}$.

   $$a^x b^y = a^{pn+r}b^{qm+s} = a^r b^s$$

   Concluyendo con esto la demostración.

2. Ejercicio 10

> Demostrar que un subconjunto no vacío $X \subseteq G$ de un grupo G es un subgrupo si y solo si $X =< X >$.

Condición suficiente

$X \subseteq< X >$ y además, sea cual sea $y \in< X >$, éste tendrá la forma de producto de elementos de X (definición de grupo generado), como X es subgrupo entonces será cerrado para el producto y tenemos por tanto que $X =< X >$.

Condición necesaria

Por ser un grupo generado, para cualesquiera $a, b \in X$ se tiene que $ab^{-1} \in< X >$ Como por hipótesis $< X >= X$ acabamos de probar que X es subgrupo.

3. Ejercicio 13

1. Demostrar que si $H \leq G$ es un subgrupo, entonces $[G : H] = |G|$ si y solo si, $H = \{1\}$, mientras que $[G : H] = 1$ sii $H = G$.

Todo esto es consecuencia inmediata del teorema de Lagrange.
Para $[G : H] = |G|$ si y solo si, $H = \{1\}$

- **Condición necesaria**. Por ser H subgrupo distinto del vacío $1 \in H$. El teorema de lagrange nos dice que $[G : H]|H| = |G|$, entonces tenemos que $|H| = 1$ y esto implica que $H = \{1\}$.
- **Condición suficiente**. Si $H = \{1\}$ entonces $|H| = 1$ y por el teorema de lagrange $[G : H] = |G|$.

Para $[G : H] = 1$ sii $H = G$.

- **Condición necesaria**. Como $H \leq G$ y por el teorema de lagrange $|H| = |G|$ entonces $H = G$ (Un subgrupo con la misma cardina que el grupo es el propio grupo).
- **Condición suficiente**. Si $H = G$ entonces $|H| = |G|$ y por el teorema de lagrange no nos queda más que $[G : H] = 1$, como queriamos probar.

2. Demostrar que si se tienen los subgrupos $G_2 \leq G_1 \leq G$, entonces $|G : G_2| = [G : G_1][G1 : G2]$

Por la transitividad de ser subgrupo y el teorema de lagrange, llegamos a las siguientes igualdades:

$$|G| = [G : G_1]|G_1| \tag{1}$$

$$|G| = [G : G_2]|G_2| \tag{2}$$

$$|G_1| = [G_1 : G_2]|G_2| \tag{3}$$

Sustituimos en la primera igualdad la el valor de $|G|$ que nos da la segunda y para el mienbro de la derechas Sustituimos el valor de $|G_1|$ por el que nos da la tercera igualdad obteniendo la siguiente ecuación.

$[G : G_2]|G_2| = [G : G_1][G_1 : G_2]|G_2|$, por tanto hemos probado lo que buscábamos

$$[G : G_2]|G_2| = [G : G_1][G_1 : G_2]|G_2|$$

3. Demostrar que si se tiene una cadena descendente de subgrupos de la forma

$$G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_{r-1} \geq G_r,$$

entonces

$$|G : G_r| = \prod_{i=0}^{r-1} [Gi : G_{i+1}]$$

Procederemos a demostrarlo por inducción, el caso base $r = 3$ ya está hecho en el apartado anterior. Supongamos ahora cierta la hipótesis de inducción $|G : G_r| = \prod_{i=0}^{r-1}[Gi : Gi + 1]$ para $r \geq 3$ y veamos que se cumple para $r + 1$. Por la transitividad de ser subgrupo y el teorema de lagrange, llegamos a las siguientes igualdades:

$$|G| = [G : G_r]|G_r| \tag{4}$$

$$|G| = [G : G_{r+1}]|G_{r+1}| \tag{5}$$

$$|G_r| = [G_r : G_{r+1}]|G_{r+1}| \tag{6}$$

Sustituimos en (4) el valor de $|G|$ con (5) y $|G_r|$ con (6), llegando a

$$[G : G_{r+1}]|G_{r+1}| = [G : G_r][G_r : G_{r+1}]|G_{r+1}|,$$

entonces $[G : G_{r+1}] = [G : G_r][G_r : G_{r+1}]$ y utilizando la hipótesis de inducción llegamos a

$$[G : G_{r+1}] = (\prod_{i=0}^{r-1}[Gi : G_{i+1}])[G_r : G_{r+1}] = \prod_{i=0}^{r}[Gi : G_{i+1}].$$

Probando lo que queríamos.

4. Demostrar que si se tiene una cadena descendente de subgrupos de la forma

$$G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_{r-1} \geq G_r = \{1\},$$

entonces

$$|G| = \prod_{i=0}^{r-1} [Gi : G_{i+1}]$$

Esto es consecuencia se los apartado (1) y (3) de este ejercio.

Gracias a (3) tenemos que $|G : G_r| = \prod_{i=0}^{r-1} [Gi : G_{i+1}]$, usando ahora la hipótesis de que $G_r = \{1\}$ y por el apartado (1)

$$|G| = |G : G_r| = \prod_{i=0}^{r-1} [Gi : G_{i+1}]$$

Probando con ello lo que buscábamos.

4. Ejercicio 21

Sea G un grupo, $a, b \in G$.

1. Demuestra que el elemento b y su conjugado aba^{-1} tienen el mismo orden.

2. Desmostra que o(ba) = o(ab).

Apartado primero

$$(aba^{-1})^r = ab^r a^{-1} = 1 \Longleftrightarrow b^r = 1.$$

Por tanto si r es el orden de alguno de ellos también lo será de su conjugado.

Visto lo mismo de manera detallada:

Sea $n = ord(b) \Longrightarrow (b)^n = 1 \Longrightarrow 1 = a(b)^n a^{-1} = (aba^{-1})^n$

Veamos ahora que n es el natural más pequeño que cumple que $(aba^{-1})^n = 1$

Supongamos que existe $0 < m < n$ que cumple que $(aba^{-1})^m = 1$ entonces $1 = a(b)^m a^{-1}$ y por tanto $1 = a^{-1}1a = a^{-1}a(b)^m a^{-1}a = (b)^m$. Lo cual es una contradicción ya que $ord(b) = n$. Con esto se ha demostrado que si $ord(b) = n \Longrightarrow n = ord(ab^{a^{-1}})$

La otra implicación:

Sea $n = ord(aba^{-1})$ entonces n será el menor natural que cumple que $1 = (aba^{-1})^n = ab^n a^{-1}$. Desarrollando $1 = a^{-1}1a = a^{-1}a(b)^n a^{-1}a = (b)^n$, y por tanto n será el menor natural que cumple la igualdad.

Apartado segundo

Por hipótesis $a, b \in G$, un grupo; entonces $a^{-1}, ab \in G$. Por el primer apartado sabemos además que

$$ord(ab) = ord(a^{-1}ab(a^{-1})^{-1}) = ord(a^{-1}aba) = ard(ba)$$

Demostrando con ello el segundo apartado.

5. Ejercicio 27

i) Describir los subgrupos del retículo del grupo V de Klein.

Recordemos que $\mathcal{V} = \mu_2 \times \mu_2$ o con otra carateterización $\mathcal{V} = \{1, a, b, ab : a^2 = 1 = b^2, ab = ba\}$

Por tanto $|\mathcal{V}| = 4$ y el teorema de lagrange nos aseguro que todos sus subgrupos tendrán cardinalidad divisor de 4.

Disquisición de subgrupos:

1. De tamaño 1 (subgrupo impropio): 1 y no puede haber otro porque sería la identidad.

2. De tamaño 2: Por la segunda definición vemos que tienen tres ciclos de orden 2. $< (-1, 1) >= a$, $b =< (1, -1) >$ y $ab =< (-1, -1) >$ ya que $(ab)^2 = abba = a1a = 1$.

3. De tamaño 4: Subgrupo impropio $\mathcal{V}$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{V} & \\
< (1,-1) > \arrow[ur] & < (-1,-1) > \arrow[u] & < (-1,1) > \arrow[ul] \\
& < (1,1) > \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

iv) Describir los subgrupos del retículo del grupo Q_2 de Cuarterniones.

Una de las carateterizaciones de este subgrupo es:

$Q_2 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ tal que se cumplen las siguientes propiedades $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

$|Q_2| = 8$ Por el teorema de lagrange tenemos la siguiente disquisición de posibles subgrupos:

- De tamaño 1: Subgrupo impropio $\{1\}$.
- Tamaño 2: El único ciclo tamaño 2: $< -1 >$. No hay subgrupo generados por dos elementos, ya que necesariamente uno debería ser la identidad.
- Tamaño 4: Son los grupos cíclicos

  $$< i >= \{i, -1, -i, 1\}; < j >= \{j, -1, -j, 1\}; < k >= \{k, -1, -k, 1\};$$

  No hay ningún otro grupo, ya que tendría que ser generado por mínimo dos elementos, como 1 y -1 pertenecen a todos los subgrupos cíclicos de tamaño 4, por tanto los elementos generadores deberían ser i,j o k y como mínimo contendría a dos de los subgrupos cícliclos.
- Tamaño 8: subgrupo impropio Q_2

Por tanto el retículo quedaría:

$$\begin{tikzcd}
 & Q_2 & \\
< i > \arrow[ur] & < j > \arrow[u] & < k > \arrow[ul] \\
 & < -1 > \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \\
 & \{1\} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$