Control 1

Blanca Cano Camarero

12 de mayo de 2020

Índice

1. Ejercicio 1 **1**
1.1. Apartado primero 1
1.2. Apartado segundo 2
1.3. Apartado tercero 3
1.4. Apartado cuarto 4

2. Ejercicio 2 **6**
2.1. Apartado primero 6
2.2. Apartado segundo 8
2.3. Apartado tercero 9
2.4. Apartado cuarto 11

3. Ejercio 3 **13**
3.1. Apartado primero 13
3.2. Apartado segundo 17
3.3. Apartado tercero 18

4. Ejercicio 4 **21**
4.1. Apartado primero 21
4.2. Apartado segundo 24

1. Ejercicio 1

En el grupo simétrico S_8 se consideran los elementos

$$\pi = (145)(283)(67) \text{ y } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 7 & 8 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

1.1. Apartado primero

Descomponed β como producto de ciclos disjuntos y como producto de transposiciones. ¿Cuál es el orden de β? ¿Cuál es la signatura?

Descomposición como ciclos disjuntos

Toda permutación se puede expresar de forma única (salvo reordenaciones) en ciclos disjuntos, es este caso:
$\beta = (13)(258)(476)$

Descomposición en productos de transposiciones

Todo ciclo se puede expresar como producto de transposiciones, que no necesariamente tiene porqué ser único (aunque sí siempre de la misma paridad). Para este caso tenemos que: Es más cualquier ciclo de la forma $(x_0x_1...x_r)$ se puede expresar como producto de trasposiciones $(x_0x_1...x_r) = (x_0x_1)(x_1x_2)...(x_{r-1}x_r)$ por lo que podríamos expresar

$$\beta = (13)(25)(58)(47)(76)$$

Otras posibilidades serían:
$\beta = (13)(58)(28)(67)(46)$ y $\beta = (34)(14)(58)(28)(67)(36)(34)$

Orden de β

El orden de una permutación es el mínimo común múltiplo de las longitudes que de los ciclos disjuntos que lo componen, en este caso sería $mcm(2, 3, 3) = 6$.

El orden de β es 6.

Signatura de β

La signatura, signo o paridad de una permutación s es $\sigma(s) = (-1)^n$ donde n es el número de tranposiciones con el que se puede expresar.

Por el teorema anterior sabemos que éste es indiferente de la expresión que tomemos, ya que la paridad del número de transposiciones se mantiene.

En este caso $n = 5$ y por tanto $\sigma(\beta) = (-1)$.

1.2. Apartado segundo

Hallad un elemento $\alpha \in S_8$ tal que $\beta = \alpha\pi\alpha^{-1}$.

De manera general se puede caracterizar a los conjugados de la siguiente manera: γ una transposición cualquiera y $(x_0...x_r)$ un ciclo:

$$\gamma(x_0...x_r)\gamma^{-1} = (\gamma(x_0)...\gamma(x_r))$$

Para nuestro caso el α buscado debe cumplir pues que:

$$\alpha\pi\alpha^{-1} = \alpha(145)(283)(67)\alpha^{-1} = \alpha(145)\alpha^{-1}\alpha(283)\alpha^{-1}\alpha(67)\alpha^{-1}$$
$$= (\alpha(1)\alpha(4)\alpha(5))(\alpha(2)\alpha(8)\alpha(3))(\alpha(6)\alpha(7)) = \beta = (13)(258)(476)$$

Por lo que necesariamente: $(\alpha(6)\alpha(7)) = (13)$ es decir que se podría tener que $\alpha(6) = 1, \alpha(7) = 3$ o $\alpha(6) = 3, \alpha(7) = 1$.

Para los siguientes ciclos podriamos tener que

$(\alpha(2)\alpha(8)\alpha(3)) = (258); (\alpha(1)\alpha(4)\alpha(5)) = (476)$ o que $(\alpha(2)\alpha(8)\alpha(3)) = (476); (\alpha(1)\alpha(4)\alpha(5)) = (258)$

Por lo que una solución (de las múltiples posibles sería):
$\alpha(6) = 1, \alpha(7) = 3;$
$\alpha(2) = 2, \alpha(8) = 5, \alpha(3) = 8$
$\alpha(1) = 4, \alpha(4) = 7\alpha(5) = 6)$

Luego un $\alpha = (1473856)$

1.3. Apartado tercero

Si calculamos el producto $\alpha\pi\alpha^{-1}$ para todas las permutaciones de $\alpha \in S_8$. ¿Cómo podemos caracterizar a las permutaciones obtenidas? ¿Cuántos resultados diferenctes obtenemos?.

Caracterización

En virtud de la proposición mencionada en el apartado anterior. Tenemos lo siguiente:

Sea s, r permutaciones cualquiera, y $s = s_0 s_1 ... s_m$ es una descomposición en ciclos disjuntos de s, entonces tenemos que

$$rsr^{-1} = rs_0 s_1 ... s_m r^{-1} = (rs_0 r^{-1})(rs_1 r^{-1})...(rs_m r^{-1}.)$$

Por consiguiente, para nuestro caso cada permutación obenida tendrá tres ciclos disjuntos, dos de ello de longitud 3 y uno de longitud 2.

Cardinalidad.

El número de permutaciones posibles, las podemos ver gracias a la división en ciclos disjuntos anterior y la biyectividad de las permutaciones, es decir todas serán de la forma

$$(x_0 x_1)(x_2 x_3 x_4)(x_5 x_6 x_7) \text{ con } x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j$$

Para el ciclo $(x_0 x_1)$ de dos elementos tenemos combinación de 8 elementos cogidos de 2 en dos sin repetición y sin importar el orden. $\frac{8!}{(8-2)!} = 28$, que nos deja todavía $8 - 2$ elementos por combinar en los dos ciclos de longitud tres disjuntos, esto será (ahora si importa el orden, quitaremos los casos repetidos luego):

$$\frac{6!}{3!}$$

Pero cada ciclo se puede representar de tres formas distintas, luego habrá que quedarnos con un tercio de los casos. El siguiente ciclo vendrá impuesto por los 3 elementos, y razonando igual que en el anterior

serán $\frac{3!}{3} = 2$

Por tanto los ciclos de orden dos (quitando la mitad por conmutatividad) serán $\frac{6!}{3!}$ Pero le tenemos que quitar la mitad de estos casos ya que por la propiedad conmutativa, para estos ciclos de orden 2, ya que la composición de ciclos disjuntos es conmutativa.

Por tanto el número total de casos son:

$$\frac{1}{2}\frac{8!}{6!}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{6!}{3!} = \frac{8!}{63!} = 1120.$$

Ahora bien, estas son todas las posibles, pero ¿podemos obtenerlas todas?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y la demostración es constructiva, siguiendo la misma idea del apartado anterior.

Sea una permutación $\beta \in S_8$ de la forma$\beta = (x_0x_1)(x_2x_3x_4)(x_5x_6x_7)$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ para ella siempre existirá algún $\alpha \in S_8$ que cumpla que $\beta = \alpha\pi\alpha^{-1}$.

1.4. Apartado cuarto

¿Es el grupo generado por β un subgrupo normal de S_8?

Por la caracterización de normalidad esto se dará si para cualquier $s \in S_8$ $s < \beta > s^{-1} =< \beta >$; o equivalentemente que para cualesquiera $b \in< \beta >$, $s \in S_8$ va a existir un $c_{b,s} \in< \beta >$ que cumple que $sbs^{-1} = c_{b,s}$.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} < \beta >= \{&id, \beta = (13)(258)(476), \beta^2 = (285)(462),\\ &\beta^3 = (13), \beta^4 = (258)(476),\\ &\beta^5 = (13)(285)(462)\} \end{aligned}$$

seleccionamos una permutación que no esté en $< \beta >$ y que tenga el mismo número de ciclos disjuntos y de la misma logitud (la caracterización del apartado dos) por ejemplo $\gamma = (12)(358)(476)$ y por lo visto en el apartado anterior, sabemos que existirá algún $\alpha \in S_8$ que cumpla que $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}$.

Y por consiguiente habremos probado que es **no es normal.**

De hecho acabamos de ver más, una condición para que sea normal: que no se pueda descomponer en ciclos disjuntos, es decir **que la permutación sea un ciclo**, ya que supongamos que existe β una permutación que se puede descomponer en ciclos disjuntos, $\beta = b_0 b_1 ... b_n$, tendríamos por commutatividad que $\beta^n = b_0^n b_1^n ... b_n^n$. Ahora cogemos una permutación γ que sea idéntica a β salgo que los dos primeros elementos de los ciclos disjuntos sea han intercambiado entre sí (esto es si $\beta = (x_0, x_1...)(y_0 y_1..)...(z_0, z_1...)$ entonces $\gamma = (y_0, x_1...)(x_0 y_1..)...(z_0, z_1...)$, y por tanto no pertenecerá al grupo generado por β). y por lo visto en el apartado anterior, sabemos que existirá algún $\alpha \in S_8$ que cumpla que $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}$.

Pero por otra parte hemos visto cómo son los elemento de $< \beta >$, así que γ no pertenecerá.

2. Ejercicio 2

2.1. Apartado primero

Describid los subgrupos de orden 2 y de orden 4 del grupo diédrico D_8. ¿Contiene D_8 algún subgrupo isomorfo a Q_2, el subgrupo de los cuaternios?

Sabemos que $D_n =< r, s | r^n = 1 = s^2 \wedge sr = r^{n-1}s >$. La cardinalidad de D_n es $2n$ y el teorema de Lagrange nos asegura que la cardinalidad de sus subgrupos será un divisor de $2n$. Por tanto para este caso tiene sentido plantearse cuáles son los subgrupos de de orden 2 y 4 de D_8.

Orden 2

Los subgrupos de este orden deberán de ser cíclicos, es decir, generados por algún elemento, ya que de otra forma el subgrupo S contendría dos elementos $x \neq y \neq 1$ para los que se cumpliría que no existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x^n = y$, además como S es subgrupo $1 \in S$; por tanto necesariamente la cardinalidad de S sería mayor de dos, ya que $x, y, 1 \in S$.

Veamos ahora qué condiciones deben de cumplir los elementos que generen los grupos cíclicos de orden 2:

Por cómo se ha definido D_n, todos sus elementos son de la forma $r^i s^j$ con $i, j \in \mathbb{Z}$ y si $< a >$ es de orden 2, entonces necesariamente $a^2 = 1$.

Por tanto los generadores deben cumplir que $1 = (r^i s^j)(r^i s^j)$,por estar en D_n se tienen dos posibilidades $j \equiv 1$ o $j \equiv 0$.

Para el primer caso, $j \equiv 1$:

$r^i(sr^i)s = r^i r^{i(n-1)} s^2 = r^{i-i} r^{in} s^2$

Donde para la primera igualdad se ha utilizado i veces la caracterización de $sr = r^{n-1}s$ de D_n.

Pero claro, también sabemos que $r^n = 1 = s^2$ y que $r^0 = 1$ por lo que llegamos a la conclusión de que si $j \equiv 1$, sea cual sea el valor de i se tendrá que $r^{i-i} r^{in} s^{2j} = 1$ y todo $< r^i s >$ va a ser de orden 2.

Para el segundo caso ($j \equiv 0$)tenemos que se debe cumplir que $r^i r^i = 1$ y por otro lado sabemos que $r^n = 1$ entonces para que esto suceda no queda más remedio que $2i \equiv n$.

Conclusión:

Los subgrupo de orden 2 de D_8 son de la forma $< r^i s >$ o equivalentemente $< sr^i >$ con $i \in \{0.,7\}$ y el subgrupo $< r^4 >$.

Subgrupos de orden 4

Por el apartado anterior los subgrupos candidatos serán o grupos cíclico $< r^i >$ con i no congruente a 4 o grupos generados por r^i, sr^j con $i \in \{1..n-1\}, j \in \{0..n-1\}$.

Veamos el primer caso:

Buscamos que el orden de $< r^i >$ sea 4, entonces necesariamente $(r^i)^4 = 1$ y eso equivale a que $4i \equiv 1$.

Segundo caso, $< r^i, r^j s >$:

Como $n > 2$ en D_n entonces por lo general $r^i s \neq r^{i(n-1)} s$ y además ambos distintos del 1. Está claro pues que $1, r^i, r^j s, r^{i+j} s$, pertenecen a $S =< r^i, r^j s >$.

Y a demás por estar en D_8 necesariamente $i = 4$ ya que debe de cumplirse que $sr^i = r^{i(n-1)s}$ y que sea cerrado.

Por otra parte veamos si debemos exigir alguna condición a j, es decir que cumpla que es cerrado para esos elementos:

	1	r^4	$r^j s$	$r^{4+j} s$
1	1	r^4	s	$r^{4+j} s$
r^4	r^4	1	$r^{4+j} s$	$r^j s$
$r^j s$	$r^j s$	$r^{4+j} s$	1	1
$r^{4+j} s$	$r^{4+j} s$	$r^j s$	1	1

¡Podemos ver que para cualquier j es cerrado!

Conclusión: Los subgrupos de orden 4 son $< r^2 >, < r^4, r^j s >$ con $j \in \{0.,3\}$ o quivalentemente $< r^4, sr^j >$ con $j \in \{0.,3\}$(No hasta el siente porque si no se repetirían).

¿Contiene D_8 algún subgrupo isomorfo a Q_2?

No porque los órdenes de los elementos no es el mismo, en Q_2 el único elemento de orden 2 será -1, mientras que en S $|Q_2| = 8$ por tanto nuestro subgrupo deberá de ser de orden 8, el teorema de lagrange nos dice que esto es posible.

Otra forma de verlo sería: Buscamos un subgrupo de orden 8, que por las consideraciones de los apartados anteriores será de la forma $S =< r^i, r^j s >$.

Supongamos que existe f un isomorfismo de grupos entre S y Q_2 existirán $a \in \{1.,7\}$ y $q \in i, k, q \subset Q_2$ que cumpla que $f(r^a s) = b$ con como mucho existirá un b que cumpla que $f((r^b)^2) = -1$ porque sumpodría que $(r^b)^4 = 1$ y solo $b = 4$ cumpla eso) y $s^2 = 1$ así que $f(s)$ no podrá ser ni i, k, j.

Ahora bien si $f(r^a s) = b$ entonces se tendría que $-1 = b^2 = f(r^a s)f(r^a s)$ que por ser un isomorfismo sería equivaldría a $f((r^a s)^2) = f((r^a r^{a(n-1)}) = f(1)$ lo cual es una contradición, ya que en un isomorfo $f(1) = 1$.

Por tanto no puede existir.

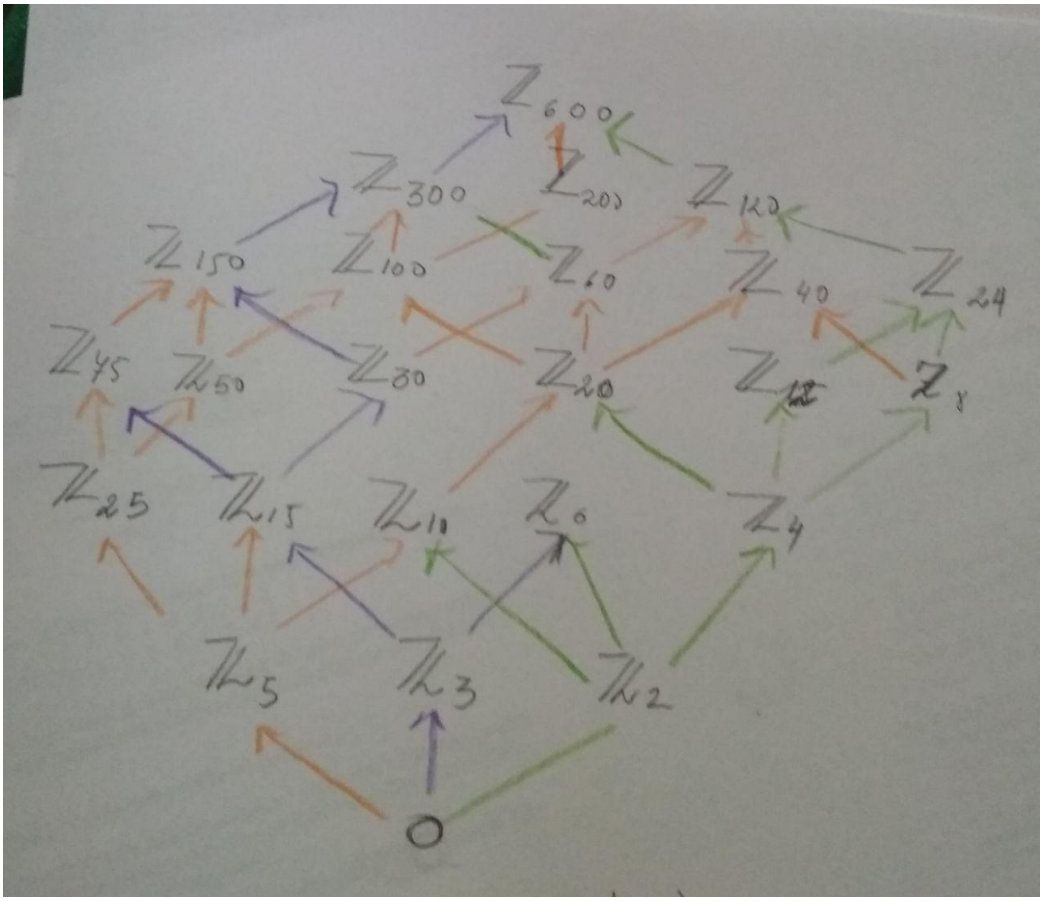
2.2. Apartado segundo

Describid el retículo de subgrupos del grupo $\mathbb{Z}_{600}$

Sabemos que si $< a >$ es un grupo cíclico de orden n, todos sus subgrupos serán ciclos de orden divisor de n, y además $p, d \in \mathbb{N}$ con $pq = n$ entonces $< a^p >$ será subgrupo de $< a >$ y y su orden será $\frac{n}{mcd(n,p)} = q$.

Pues bien volvamos a nuestro caso particular, $\mathbb{Z}_{600}$ con la operación suma seguirá esta misma estructura $\mathbb{Z}_{600} =< 1|1^{600} = 1 >$. Por tando si sus subgrupos serán los $\mathbb{Z}_p =< 1|1^p = 0 >$ con p divisor de 600, que a su vez tendrán como subgrupos los Z_t con t divisores

En pos de preservar mi salud mental y a riesgo de encutrecer el pdf, he decido hacerle el grafo del retículo manuscrito, espero que me sepa perdonar.



Nota: el 0 del grafo representa a $\{0\}$

2.3. Apartado tercero

Consideramos las permutaciones de S_9, $\sigma = (26)(132859)(263)$ y $\tau = (6734)(46)(37)$. Demostrad que el subgrupo generado por ellas $< \sigma, \tau >$, es cíclico. Determine su orden y uno de sus generadores.

Lo primero que vamos a hacer es expresar σ y τ como ciclos disjuntos:

- $\sigma = (13859)$, que es un ciclo de longitud (y por tanto orden) 5.
- $\tau = (47)$, que es un ciclo de longitud (y por tanto orden) 2.

Si β es una permutación de longitud n entonces $\beta^n = 1$.

Además, supongamos ahora α es una permutación o composición de permutacionens que se puede descomponer como $\alpha = a_0 a_1 .. a_r$ con a_i ciclos disjuntos de longitud l_i, entonces se tiene que el $mcm(l_1, l_2 .. l_r)$ será el orden de la permutación, ya que si $m = mcm(l_0, l_1, .., l_3)$ y además por ser $a_0, a_1, .., a_r$ disjuntos serán conmutativos se tendrá que

$$\alpha^m = (a_0 a_1 .. a_r)^m = a_0^m a_1^m .. a_r^m = 1$$

Ya que m es múltiplo de todos las longitudes y además será el orden por ser el mínimo número en cumplir eso.

Y si además $l_0, l_1, ...l_r$ son primos relativos, se tiene la siguiente igualdad:

$m_0 = mcm(l_1, .., l_r)$ (nótese que hemos quitado el primero, ni que tampoco hemos perdido genarilidad, ya que son comnutativos podemos reordenar.)

Por tanto

$$\alpha^{m_0} = (a_0 a_1 .. a_r)^{m_0} = a_0^{m_0} a_1^{m_0} .. a_r^{m_0} = a_0^{m_0} \tag{1}$$

Puesto que m_0 será múltiplo de todos los l_i salvo de l_0.

Y esto va a describir a las permutaciones que generen $< \alpha >$, ya que serán todas aquellas de la forma $s = a_0^{-L_0} a_1^{-L_1} a_r^{-L_r}$ con L_i múltiplo de los l_j salvo del i-ésimo y primo relativo con el resto de L_j. Veamos que $< s >=< \alpha >$.

Si $\lambda = \prod_{i=0}^{r} Li$ se tentrá por (1) que para cualquier ciclo disjunto a_i

$$a_i = s^{\frac{\lambda}{L_i}}$$

Con esto hemos probado que $< \alpha > \subseteq < s >$. Para la otra inclusión, si $L_i = \prod_{i=0}^{i-1} l_i \prod_{i+1}^{r} l_i$ (que recordamos que eran primos relativos) entonces el

$$ord(< s >) = mcm(L_0, ..., L_r) = L_i l_i = mcm(l_0, l_1, ..., l_r) = ord(< \alpha >)$$

para cualquier i subíndice de los coeficientes.

Por lo que concluimos que

$$< \alpha >=< s >$$

y es un grupo cíclico.

Nuestro caso particular

Vamos a elegir los L_i más simples, para σ la longitud de τ y para τ la de σ. Por tanto

$$\gamma = \sigma^{-2}\tau^{-5} = \sigma^{5-2}\tau = (15398)(47)$$

Se tendrá que

$$< \gamma >=< \sigma, \tau >$$

Por tanto $< \sigma, \tau >$ **será un grupo cíclico y uno de sus generadores será** γ.

Su **orden** será el mínimo común múltiplo de las longitudes de σ y *tau*:

$$ord(< \sigma, \tau >) = mcm(ord(\sigma), ord(\tau)) = mcm(5, 2) = 10.$$

2.4. Apartado cuarto

Sea $n \geq 2$ y $p \leq n$ un número primo. Demostrad que en S_n los únicos elementos de orden p son los productos de ciclos disjuntos de longitud p. ¿Cuántos elementos de orden 2 tiene S_5?

Condición suficiente.

Sea $s \in S_n$ una permutación de orden p, si s es un ciclo entonces es eviendente. Si no, admitirá ser expresado como la composición de ciclos disjuntos $s = a_0..a_r$ que tendrá respectivamente $l_0, ..., l_r$ órdenes, y por tanto $ord(a) = mcm(l_0, ..., l_r)$ pero claro el $ord(a) = p$ que es primo, entonces necesariamente $p = l_0 = ... = l_r$.

Condición necesaria.

Por las consiceraciones sobre orden del apartado anterior, sabemos que para $s \in S_n$, descomponible en ciclos disjuntos de longitud p; entonces su orden va a ser el mínimo común múltiplo del orden de sus ciclos disjuntos, pero como este es siempre p entonces el orden de s es p.

Elementos de orden 2 en S_5

En S_5 existe $\frac{1}{2}\frac{5!}{3!} = \frac{1}{2}5 \times 4 = 10$ ciclos de orden 2 diferentes. (hemos dividido entre dos ya que los simétricos representan la misma transposición).

Y por el apartado anterior todos los elementos de orden 2 que existe serán producto de estos ciclo disjuntos, (sin que importe el orden a la hora de componer): Es más, no podrá contener una composición mayor de dos trasposiciones disjuntas, ya que si hubiera más habría algún elemento que se repetiría formando algún ciclo mayor y ya no podría ser de orden 2 o ese caso es equivalente a uno de composición de menos de dos juntos disjuntos (el cual ya habriamos contabilizado).

Vamos a ver cuántas permutaciones habrá como composición de dos ciclos disjuntos. Tomamos una de las 10 posibles (x_0x_1) y de esta nos quedarán por combinar $5-2$ elementos, es decir $\frac{3!}{2}$ casos quitando simtrías. Finalmente como tenemos 10 permutaciones, elimitando la mitad (por conmutatividad) $\frac{10}{2}\frac{3!}{2} = 15$

Con lo que concluimos que habrá elementos de orden dos: $10 + 15 = 25$ casos.

3. Ejercio 3

3.1. Apartado primero

Sean las matrices de Heisenberg.
Demostar que G es un grupo (con producto de matrices). ¿Es abeliano? ¿Es cíclico? ¿Es H un subgrupo de G? En caso afirmativo, ¿Es normal en G?
Probar que $f :\leftarrow \mathbb{R}$ defini como $f(A) = a + c$ es un homomorfismo de grupos

G es un grupo.

Por la caracterización de grupo debe cumplir:

1. **Existencia de un elemento neutro**, la matriz identidad pertenece a G (que por tanto es no vacío) y a demás es el elemento neutro.

2. **Propiedad asociativa.** El producto de matrices es asociativo, así que aquí también lo será.

3. **Existencia de un elemento inverso** en G para todo elemento de G. Esto se ve fácilmente de la siquiente manera:

$$SeaA \in G \text{ y por tanto es de la forma } A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con $a, b, c \in \mathbb{R}$

Y queremos encontrar una matriz de la forma

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con $x, y, z \in \mathbb{R}$ (incógnitas) que cumplan que $AB = 1$

Por tanto lo único que nos faltaría ver es que el sistem que forman x, y, z tiene solución,

las ecuaciona a las que da lugar son

$$\begin{cases} x + a = 0 \\ y + az + b = 0 \\ z + c = 0 \end{cases}$$

Que tienen como sulución $x = -a, z = -c, y = ac - b$ que cumplen $x, y, z \in \mathbb{R}$ y como queriamos demostrar, para toda matriz de G existe su inversa en G.

No es abeliano

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + a & y + az + b \\ 0 & 1 & z + c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + a & b + xc + y \\ 0 & 1 & z + c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la entrada $(3, 3)$ es diferente, luego no es cíclico.

No es cíclico

Vamos a verlo por la numerabilidad de $\mathbb{R}$ (sí, confieso que he matado moscas a cañonazos). Que fuera cíclico supondría que $\mathbb{R}$ es numerable, ya que si existera una matriz $E \in G$, de tal forma que $< E >= G$, necesariamente E distinta de la identidad entonces alguna de sus entradas correspondientes a a, b, c serán no nulas , llamemos a la posición en la matriz de esta entrada e. Pues bien si ahora, considera cualquier $r \in \mathbb{R}$, cogemos una matriz R igual a la identidad salvo en e que en vez de 0, tiene en esa casilla r.

Sabemos que por ser un ciclo existiría un n natural tal que $E^n = R$ y por tanto habriamos encontado una inyección de los reales en los naturales, lo cual es un contradición.

H es un subgrupo de G

Esto será si para todo $X, Y \in H$ se cumple que $XY^{-1} \in H$ Por el primer apartado hemos visto que si

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces la inversa Y será de la forma:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y finalente

$$XY^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que es de las formas de las matrices de H, por lo que es un subgrupo.

Normalidad de H en G

H será normal en G si y solo si $AHA^{-1} \leq H$ para cualquier $A \in G$. Sean cualesquieras

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Y \in H, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$AHA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego H es normal en G.

f es un homomorfismo de grupos

Para que sea homomorfismo debe cumplir que $f(AB) = f(A)f(B)$ para cualesquiera matrices $A, B \in G$.

$$f(A) + f(B) = f\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a + c) + (x + z)$$

y por otro lado

$$f(AB) = f\begin{pmatrix} 1 & x + a & y + az + b \\ 0 & 1 & z + c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x + a) + (z + c)$$

Ambas expresiones son iguales por tanto es un homomorfismo.

Núcleo de f

Se define el $ker(f)$ como $ker(f) = \{e \in G | f(e) = 0\}$ luego

$$ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Imagen de f

Es todo $\mathbb{R}$, bastará con ver que cierto conjunto de G su imagen ya es R.

Dada una matriz de G fijamos a arbitrariamente y por cómo está definida en c la imagen podrá ser cualquier real.

No es monormorfismo

Ya que su núcleo no es la identidad.

Es epimorfismo

Ya que $Img(f) = \mathbb{R}$

3.2. Apartado segundo

Sea $f : S_4 \to S_6$ la aplicación dada por $f(\sigma) = \bar{\sigma}$, donde $\bar{\sigma}$ es el elemento de S_6 que actúa igual que σ sobre los elementos $\{1, 2, 3, 4\}$ y sobre los elementos $\{5, 6\}$ los fija se σ es par, o los intercambia si σ es impar.
Demostad que f es un homomorfismos inyectivo de grupos y que su imagen está contenida en A_6.

Es homomorfismo

Para que sea homomorfismo debe cumplir que $f(ab) = f(a)f(b)$, para cualesquiera $a, b \in S_4$.

Distinguiremos los siguientes casos:

- $a, b \in S_4$ pares, entonces ab es par y por tanto $f(a)f(b) = ab = f(ab)$.
- $a, b \in S_4$ impares ambos, entonces ab es par y por tanto $f(a)f(b) = a(56)b(56)$. Como $b \in S_4$ no contendrá ni al 5 ni al 6 y será disjunto con (56) por tanto podemos comutarlos (solo con ese, no con a.) $a(56)b(56) = ab(56)(56) = ab = f(ab)$ por ser ab par.
- $a, b \in S_4$ con a impar y b par: $f(a)f(b) = a(56)b$ y aplicando de nuevo que $(56), b$ son disjuntos podemos conmutarlos:$a(56)b = ab(56) = f(ab)$ por ser ab impar.
- $a, b \in S_4$ con b impar y a par:$f(a)f(b) = ab(56) = f(ab)$ ya que ab es impar.

Inyectividad de f

Sean $a, b \in S_4$ tales que $f(a) = f(b)$. vamos a ver que necesariamente $a = b$.

$$id = f(a)f^{-1}(b) = f(a)f(b^-1) = f(ab^{-1})$$

Donde hemos utilizado que f es un homomorfismo y ahora por cómo se ha construido f, llegamos a la igualdad $id = ab^{-1}$ de la que concluimos que $a = b$ como queriamos probar.

Imgen de f contenida en A_6

El grupo alterado An se define como las permutaciones pares de Sn, veamos pues que la imagen de f está formada por permutaciones pares.

Para ello distinguiremos dos casos, ya que toda permutación es par o impar.

- $a \in S_4$ par, luego $f(a) = a$ que será par.
- $a \in S_4$ impar, luego $f(a) = a(56)$ que es composición de dos impares, luego será par.

3.3. Apartado tercero

Sea K un cuerpo de $SL(K) = \{A \in GL_n(K)/det(A) = 1\}, n \geq 2$.
Demostrad que $SL_n(K)$ es un subgrupo normal de $GL_n(K)$. ¿Quién es el grupo cociente $GL_n/SL_n(K)$?
Si K es un cuerpo finito con q elementos, determinad los órdenes de estos dos grupos, esto es, $|GL_n(K)|$ y $|SL_n(K)|$.

$SL_n(K)$ es un subgrupo de $GL_n(K)$

Sean cuales quiera $A, B \in SL_n(K)$, decir que el determinantes de ambos es 1. Por las propiedades de los determinantes: $det(AB-1) = det(A)frac1det(B) = 1$ luego $AB^{-1} \in SL_n(K)$ y por tanto es un subgrupo.

Normalidad

Habremos probado que $SL_n(K)$ es un subgrupo normal de $GL_n(K)$ si para toda $m \in GL_n(K)$, se tiene que $mSL_n(K)m^{-1} \leq SL_n(K)$, o lo que es lo mismo que $\{msm^{-1} | s \in SL_n(K)\} \leq SL_n(K)$.

Y esto es cierto por las propiedades de los determinantes y por estar s en $SL_n(K)$ (ya que $det(s) = 1$). Veámoslo:

$det(msm^{-1}) = det(m)det(s)\frac{1}{det(m)} = det(s) = 1$.

por tanto $msm-1 \in SL_n(K)$.

y es un subgrupo normal.

Otra forma de verlo, más rápida que la anterior es darse cuenta que la definición dada de $SL(K)$ se corresponde con la del núcleo del determinante y esto es siempre un subgrupo normal.

Caracterización del grupo cociente

Vista la observación anterior y gracias al primer teorema de isomorfía tenemos que

$$\frac{GL_n(K)}{SL_(K)} \cong det_*(GL_n(K)) = K^\times \tag{2}$$

Nótose que no es isomofro a K ya que $GL_n(K)$ son las matrices invertibles con entradas en K, es decir su determinante no puede ser nulo.

Órdenes para K finito de q elementos.

Por la caracterización del grupo cociente (2) y por ser K un cuerpo fininto de q elementos tenemos que:

$$|GL_n(K)| = (q-1)|SL_n(K)| \tag{3}$$

Si hay q elementos y las matrices son de $n \times n$. Se tendrá que cada fila admite q^n combinaciones, pero tenemos que tener en cuenta:

- Que la primera no puede ser nula, lo cual nos deja $q^n - 1$ posibilidades.
- Que la fila $m + 1 \leq n$ no puede ser combinación lineal de las m anteriores, es decir que admite $q^n - q^m$

De lo que se deduce que:

$$|GL_n(K)| = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$$

y por (3) que si $q > 1$:

$$|SL_n(K)| = \frac{1}{q-1}\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$$

El caso $q = 1$ no se puede dar ya que $n \geq 2$ y toda matriz con todas sus entradas iguales tienen determinante 0 y no son invertibles, es decir $GL_n(k) = \emptyset$.

Esto nos sugiere además que para que la ecuaciones sean válidas, $q \leq 2$, ya que la matriz identidad de $GL_n(k)$ tienen dos elementos y es siempre invertible.

4. Ejercicio 4

4.1. Apartado primero

Sean A, B, C subgrupos de un grupo G con $B \trianglelefteq A$.
Demostrad que $B \cap C \trianglelefteq A \cap C$ y que

$$\frac{A \cap C}{B \cap C} \cong \frac{B(A \cap C)}{B}$$

$B \cap C$ es subgrupo de $A \cap C$

Por la caracterización de subgrupo tenemo que comprobar que para cualquier $a, b \in B \cap C$ se cumple que $ab^{-1} \in B \cap C$.

Sean $a, b \in B \cap C$ o equivalentemente dos elemento que cumplen que $a, b \in B$ y $a, b \in C$ donde B, C son ambos sumbgrupos, y por tanto deducimos que $ab^{-1} \in B$ y $ab^{-1} \in C$, es decir que $ab^{-1} \in B \cap C$

Por hipótesis sabemos además que $B \trianglelefteq A$ luego si $ab^{-1} \in B$ también se tendrá que $ab^{-1} \in A$; y como ya habíamos visto antes que $ab^{-1} \in C$ entonces $ab^{-1} \in A \cap C$; probando con ello lo que buscábamos, que $B \cap C$ es subgrupo de $A \cap C$.

$B \cap C$ es subgrupo normal de $A \cap C$

Como hipótesis partimos de que $B \trianglelefteq A$ y que $A, B, C \in sub(G)$.

Entonces en particular tenemos que $A \cap C$ es un subgrupo de A y que $A \cap B = B$.

Con esto y una sonrisa podemos, ya que se cumplen las hipótesis del tercer teorema de isomorfía ($B, A \cap C \leq A$ y $B \trianglelefteq A$) podemos afirmar que $B \cap (A \cap C) \trianglelefteq (A \cap C)$ pero claro, $B \cap (A \cap C) = (B \cap C)$.

Por tanto hemos probado que

$$B \cap C \trianglelefteq A \cap C.$$

Lo recién demostrado da derecho a la vida de $\frac{A \cap C}{B \cap C}$ y por tanto a la pregunta siguiente del examen tiene sentido (cosa que no había dudado en ningún momento).

Demuestre que

$$\frac{A \cap C}{B \cap C} \cong \frac{B(A \cap C)}{B}$$

Hemos visto en el apartado anterior que se cuplen las hipótesis del tercer teorema de isomorfía y utilizando toda la artillería llegamos a las siguientes igualdades:

$$\frac{A \cap C}{B \cap C} = \frac{A \cap C}{B \cap (A \cap C)} \cong \frac{(A \cap C)B}{B} = \frac{B(A \cap C)}{B}$$

- Para la primera igual hemos usado la observación conjuntística.
- Para el primer isomorfismo, la tercera consecuencia del tercer teorema de isomorfía.
- Para la segunda igualdad,aprovechamos que $B \trianglelefteq A$ es decir que $aB = Ba$ para todo $a \in A$ entonces en particular lo será para cualquiera $a \in A \cap C$ lo que a nivel de conjuntos se traduce en que $B(A \cap C) = (C \cap A)B$.

Si además $C \trianglelefteq G$, demostrad que $BC \trianglelefteq AC$ y

$$\frac{AC}{AC} \cong \frac{A}{A \cap (BC).}$$

$C \trianglelefteq G$, **demostrad que** $BC \trianglelefteq AC$**.**

En esta demostración utilizaré la siguiente relación de normalidad:

Si $N \trianglelefteq S$ entonces sean cuales sean $s \in S, n \in N$ existirán $n', n'' \in N$ tales que $sn = sn'$ y $ns = sn''$. (De hecho $n'' = n$).

Queremos probar que $BC \trianglelefteq AC$, esto será si para todo $ac \in AC$ se cumple que $acBC(ac)^{-1} \leq BC$ o equivalentemente que para todo $\beta\gamma \in BC$ se cumple que $ac\beta\gamma(ac)^{-1} \in BC$.

Vamos a ir operando con $ac\beta\gamma(ac)^{-1}$.

- $ac\beta\gamma(ac)^{-1} = ac\beta\gamma c^{-1}a^{-1}$.
- C es un subgrupo, y $\gamma, c \in C$, luego existe $c_1 \in C$ tal que $c_1 = \gamma c^{-1}$.
- Por la observación del principio y por ser $C \trianglelefteq G$ existirá un c_2 tal que $c_1 a^{-1} = a^{-1}c_2$. Luego $ac\beta c_1 a^{-1} = ac\beta a^{-1}c_2$.
- Como $B \trianglelefteq A$ repetimos varias veces el razonamiento anterior.

Finalmente llegamos a que $ac\beta\gamma(ac)^{-1} = aa^{-1}b_2c_3$ con $b_2 \in B$, $c_3 \in C$, y por ende que $ac\beta\gamma(ac)^{-1} \in BC$ como queríamos ver.

Algo notable de esta demostración es que podríamos debilitar las hipótesis iniciales, es decir que en vez de que $C \trianglelefteq G$ nos bastaría con que $C \trianglelefteq A$. De todas formas utilizaremos la normalidad más estricta para el siguiente apartado.

Si además $C \trianglelefteq G$, demostrad que

$$\frac{AC}{AC} \cong \frac{A}{A \cap (BC).}$$

En el contexto en que que estamos trabajando son válidas las siguientes afirmaciones:

1. Como $B \trianglelefteq A$ entonces $A = AB$.
2. Por el apartado anterior $BC \trianglelefteq AC$ y además que $A, BC \leq AC$. $A \leq AC$ ya que C es subgrupo y contiene al cero y por tanto para todo $a \in A$ se tiene que $a1 \in AC$ lo que hace que $AsubsetAC$

Primero por la observación (1) y luego por la segunda obtenemos lo que queriamos demostrar.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{ABC}{BC} = \frac{A}{A \cap (BC).}$$

4.2. Apartado segundo

Sea G un grupo. Un subgrupo $H \leq G$ se dice que un subgrupo de Hall de G si su índice en G es primo relativo con su orden.
Sea $N \triangleright G$ un subgrupo de orden de G. Demostrad que si H es un subgrupo de Hall de G, entonces $H \cap N$ es un subgrupo de Hall de N y HN/N es un subgrupo de Hall de G/N.

$H \cap N$ es un subgrupo de Hall de N

Gracias al teorema de lagrange sabemso que $|G| = [G : H]|H| = pq$ con p, q primos relativos Se tiene que N es subgrupo normal de G, sabemos que $1 \leq |N| \leq |G|\}$. Por otro lado la interseción de subgrupos es un subgrupo así que $1 \in |H \cap N|$ y si teníamos que $|H| = p$ entonces $1 \leq |N \cap H| \leq p$. Además el teorema de Larange nos da las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} |G| = [G : H]|H| \\ |G| = [G : N]|N| \\ |N| = [N : N \cap H]|N \cap H| \end{cases} \tag{4}$$

Y queremos ver que $mcd([N : N \cap H], |N \cap H|) = 1$.

Como N es normal se cumplen las hipótesis del teorema de Lagrange y tenemos también que $N \cap H \trianglelefteq H$ lo que da derecho a la vida a

$$\frac{H}{N \cap H}$$

y nos indica además que $|N \cap H|$ es divisor de $|H|$.

Y concatenando las igualdades de (4) tenemos la siguiente igualdad

$$[G : N][N : N \cap H]|N \cap H| = [G : H]|H|$$

Y saca a relucir que si queremos que $mcd([N : N \cap H], |N \cap H|) = 1$, $[N : N \cap H]$ debe de ser únicamente producto de factores de $[G : H]$, es decir un divisor suyo.

Lo cual se cumple por la siguiente igualdad:

$$[N : N \cap H] = \frac{|N|}{|N \cap H|} = \frac{|N|}{|H|}\frac{|H|}{|N \cap H|} = \frac{|N|}{|H|}\frac{|HN|}{|N|} \tag{5}$$

$$= |HN|\frac{|G:H|}{|G|} = \frac{|G:H|}{|G:HN|}$$

Que ha sido deducida siguiendo estos pasos:

1. Despejando el índice de la tercera ecuación de (4).
2. Aplicando el teorema de isomorfía.
3. Despejando $|H|$ de la primera ecuación de (4) y sustituyendo su valor.
4. NH es subgrupo de G y por Teorema Lagrange.

Recapitulando

Tenemos que $[N : N \cap H]$ es divisor de $|G : H|$ y que $|N \cap H|$ lo es de H, por tanto

$$mcd([N : N \cap H], |N \cap H|) = 1$$

y hemos probado que $|N \cap H|$ es subgrupo de Hall de H.

HN/N es un subgrupo de Hall de G/N

Procederemos igual que el apartado anterior buscando factorizar en términos conocidos $|HN/N|$ y $[HN/N : G/N]$.

Por el tercer teorema de isomorfía

$$|HN/N| = \frac{|H|}{|H \cap N|}$$

luego es divisor de H.

Para $[HN/N : G/N]$ vamos a tener que trabajar un poquillo más:

Sabemos por el tercer teorema de isomorfía que $N \trianglelefteq NH$ y N es normal en G, por tanto $\frac{HN}{N} \leq \frac{G}{N}$ y se cumplen las hipótesis del segundo teorema de isomorfía, el cual podemos aplicar tras despejar nuestro índice, del Teorema de Lagrange

$$[HN/N : G/N] = \frac{|G/N|}{|HN/G|} = |G|/|HN|$$

y de la ecuación (5) del apartado anterior podemos despejar HN como $|HN| = \frac{[N:N\cap H]|G|}{[G:H]}$ llegando a queda

$$|G|/|HN| = |G|\frac{[G:H]}{[N:N\cap H]|G|}$$

Luego

$$[HN/N : G/N] = \frac{[G:H]}{[N:N\cap H]}$$

y por tanto es divisor de $[G:H]$.
En conclusión tenemos que:

- $|HN/N|$ divisor de H.
- $[HN/N : G/N]$ es divisor de $[G:H]$.
- H y $[G:H]$ son primos relativos.

Luego $|HN/N|$ y $[HN/N : G/N]$ son primos relativos y HN/N es un subgrupo de hall de G/N.

Comentario final

Pensando el ejercicio se me ocurrió y que con una condición más fuerte, que me parece , que en vez de primos relaticos sean primos (a esto llamaré condición de Hall fortidicada :) Se tendría que gracias al teorema de lagrange $|G| = [G : H]|H| = pq$ con p, q primos, pero es que esta informacíon va más allá, porque cualquier otro subgrupo propio S de G también será un subgrupo de Hall fortificado, ya que el teorema de Lagrange fuerza a que $|G| = [G : S]|S|$ y los únicos divisores de $|G|$ son $1, p, q, |G|$ y 1 y $|G|$ no son porque el subgrupo es propio.