1	2	3	4
7'75	8'5	9'5	10

9

Álgebra II. Doble grado Informática-Matemáticas.

Curso 2019-2020.
Control 2.

Ejercicio 1 (10 puntos). .

(a) [2 puntos] Sea $\{f_i : G_i \to H_i\}_{i=1,2,\ldots n}$ un conjunto de n homomorfismos de grupos ($n \geq 2$). Demostrad que existe un homomorfismo de grupos

$$f : \prod_{i=1}^{n} G_i \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} H_i$$

único tal que, para todo $i = 1, \ldots n$, el cuadrado siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \prod_{i=1}^{n} G_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_i"'] & \prod_{i=1}^{n} H_i \arrow[d, "q_i"] \\ G_i \arrow[r, "f_i"] & H_i. \end{tikzcd}$$

esto es, $q_i \circ f = f_i \circ p_i$, siendo p_i, q_i las correspondientes proyecciones canónicas.

Demostrad que si f_i es un monomorfismo (respectivamente, epimorfismo, isomorfismo) para todo $i = 1, \ldots n$, entonces f es un monomorfismo (respectivamente, epimorfismo, isomorfismo).

Revisar (b) [2 puntos] Sea $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ una familia de n grupos ($n \geq 2$). Demostrad que existe un homomorfismo de grupos

$$\Psi : \prod_{i=1}^{n} Aut(G_i) \longrightarrow Aut(\prod_{i=1}^{n} G_i),$$

que es un monomorfismo.

(c) [4.5 puntos] Sea $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ una familia de n grupos finitos ($n \geq 2$) con m. c. d.$(|G_i|, |G_j|) = 1$, para todo $i \neq j$. Demostrad que el homomorfismo Ψ del apartado anterior es un isomorfismo.

(d) [1.5 puntos] Describid el grupo $Aut(K \times C_5)$, donde K denota el grupo de Klein y C_5 el grupo cíclico de orden 5. ¿Cúal es su orden?

Ejercicio 2 (10 puntos). .

(a) [4.5 puntos] Sea G un grupo abeliano finito con $|G| = n$, $n \geq 2$. Sea $n = p_i^{t_1} \dots p_k^{t_k}$ la factorización de n en números primos, demostrad que

$$l(G) = t_1 + \cdots + t_k,$$

y

$$fact(G) = \{C_{p_1} \overset{(t_1)}{\ldots}, C_{p_1}, C_{p_2} \overset{(t_2)}{\ldots}, C_{p_2}, \dots, C_{p_k} \overset{(t_k)}{\ldots}, C_{p_k}\},$$

donde C_{p_i} denota el grupo cíclico de orden p_i.

(b) [1.5 puntos] Sea $n \geq 3$ y consideremos el grupo diédrico D_n. Demostrad que si $n = p_i^{t_1} \dots p_k^{t_k}$ es la factorización de n en números primos, entonces

$$l(D_n) = t_1 + \cdots + t_k + 1,$$

y

$$fact(D_n) = \{C_{p_1} \overset{(t_1)}{\ldots}, C_{p_1}, C_{p_2} \overset{(t_2)}{\ldots}, C_{p_2}, \dots, C_{p_k} \overset{(t_k)}{\ldots}, C_{p_k}, C_2\}.$$

(c) [4 puntos] Encontrar todas las series de composición del grupo diédrico D_6

Ejercicio 3 (10 puntos). .

Sea G un grupo finito y consideremos la acción de G sobre sí mismo por traslación

$$G \times G \to G,\ (g,x) \mapsto {}^g x := gx.$$

Sea

$$\phi : G \to S(G)$$

la representación asociada.

(a) [5 puntos] Demostrad que si $g \in G$ es un elemento de orden n y $|G| = mn$, entonces $\phi(g)$ es un producto de ciclos disjuntos de longitud n. Deducid que $\phi(g)$ es una permutación impar si, y sólamente si, el orden de g es par y el cociente del orden de G y el de g es impar.

(b) [3 puntos] Demostrad que si $Img(\phi)$ contiene una permutación impar, entonces G tiene un subgrupo de índice 2.

(c) [2 puntos] Demostrad que si $|G| = 2k$, con k impar, entonces G tiene un subgrupo de índice 2.

Ejercicio 4 (10 puntos). .

(a) [3.5 puntos] Sea G un grupo finito y p un número primo divisor del orden de G. Sea $\mathfrak{P}$ un p-subgrupo de Sylow de G y N un subgrupo normal de G. Demostrad que $N \cap \mathfrak{P}$ es un p-subgrupo de Sylow de N y $N\mathfrak{P}/N$ es un p-subgrupo de Sylow de G/N.

(b) [3 puntos] Sea G un grupo simple de orden 168 y $\mathfrak{P}$ un 7-subgrupo de Sylow de G. Calculad el orden de $N_G(\mathfrak{P})$ (el normalizador de $\mathfrak{P}$ en G) y razonad entonces que G no tiene subgrupos de orden 14. ¿Cuántos elementos de orden 7 tiene G?

(c) [3.5 puntos] Sea G un grupo con $|G| = 2^n 3$, $n \geq 0$. Demostrad que G es resoluble.

Ejercicio 1

a) Sea $\{f_i : G_i \to H_i\}_{i=1,2,\dots n}$ un conjunto de n homomorfismos de grupos $(n \geq 2)$. Demostrar que existe un homomorfismo de grupos $f \prod_{i=i}^{n} G_i \to \prod_{i=1}^{n} H_i$ único, tal que, para todo $i = 1, \dots, n$ el cuadrado siguiente es conmutativo, esto es $q_i \circ f = f_i \circ p_i$, siendo p_i, q_i las correspondientes proyecciones canónicas.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i=i}^{n} G_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_i"'] & \prod_{i=1}^{n} H_i \arrow[d, "q_i"] \\
G_i \arrow[r, "f_i"] & H_i
\end{tikzcd}$$

2

Definamos $f : \prod_{i=1}^{n} G_i \to \prod_{i=1}^{n} H_i$ de la siguiente forma

$\forall\, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} G_i \quad f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))$

Veamos que está bien definido, es decir, que f es un homomorfismo

Esto será si $\forall\, a, b \in \prod_{i=1}^{n} G_i \quad f(ab) = f(a)\, f(b)$

$\cdot\; f(ab) = f((a_1, \dots a_n)(b_1, \dots b_n)) = f((a_1 b_1, a_2 b_2, \dots a_n b_n))$ (1)

$= (f_1(a_1 b_1), f_2(a_2 b_2), \dots, f_n(a_n b_n))$

Para la última igualdad hemos aplicado la definición de f.

$\cdot\; f(a) f(b) = (f_1(a_1), f_2(a_2), \dots f_n(a_n)) \cdot (f_1(b_1) \dots f_n(b_n))$ (2)

$= (f_1(a_1) \cdot f_1(b_1), \dots, f_n(a_n) f_n(b_n))$

$= (f_1(a_1 \cdot b_1), \dots, f_n(a_n \cdot b_n))$

Para la última igualdad hemos utilizado que $\{f_i\}$ es una familia de homomorfismos.

En (1) y (2) hemos llegado al mismo resultado, por tanto hemos probado lo que buscabamos.

Comprobemos ahora que $q_i \circ f = f_i \circ p_i$

Esto se ve fácilmente por la definición dada de f.

$\forall x \in \prod_{i=1}^{n} G_i$

- $q_i \circ f(x) = q_i(f_1(x_1), \dots, f_i(x_i), \dots, f_n(x_n)) = f_i(x_i)$

- $f_i \circ p(x) = f_i(x_i)$

Unicidad

Supongamos que existe g un homomorfismo $g: \prod_{i=1}^{n} G_i \to \prod_{i=1}^{n} H_i$ esto será que que cumpla la propiedad de conmutatividad, esto será que

$f_i \circ g = f_i \circ p_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Luego sea cual sea $x \in \prod_{i=1}^{n} G_i$ se tiene que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$

$q_i \circ g = g_i(x_i) = f_i\, p(x) = f_i(x_i) =$

entonces concluimos que $g = f$.

Demostrad que si f_i es un monomorfismo (respectivamente, epimorfismo, isomorfismo) para todo $i = 1, \dots, n$, entonces f es un monomorfismo (respectivamente, epimorfismo ~~de grupo~~ isomorfismo)

Monomorfismo

Probemos tal caracterización considerando al $\ker(f)$

$$\ker(f) = \left\{ x \in \prod_{i=1}^{n} G_i \mid f(x) = 1 \right\} \overset{(1)}{=} \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid f_i(x_i) = 1 \right\} =$$

$$= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \ker(f_i) \right\} \overset{(2)}{=} \{ (1, \dots, 1) \} = \{ 1 \}$$

Hemos utilizado

(1) Definición f

(2) f_i es monomorfismo $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Epimorfismo

Veamos que $\operatorname{Img}(f) = \prod_{i=1}^{n} H_i$

Tenemos que para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$ f_i es epimorfismo, (3) consecuentemente para todo $y_i \in H_i$ existe $x_i \in G_i$ que cumpla que $f(x_i) = y_i$.

Luego dado cualquier $y \in \prod_{i=1}^{n} H_i$

$$y = (y_1, \dots, y_n) \overset{(3)}{=} (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$$

por tanto existirá $x \in \prod_{i=1}^{n} G_i$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$ tal que $f(x) = y$; probando con esto que $\operatorname{Img}(f) \supseteq \prod_{i=1}^{n} H_i$

con lo que concluimos que $\operatorname{Im}(f) = \prod_{i=1}^{n} H_i$ y por ende f es un epimorfismo.

Isomorfismo

Si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ f_i es isomorfo, es decir inyectiva y sobre f también será inyectiva y sobre, por definición un isomorfismo. Hemos visto que

b) Sea $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ una familia de n grupos ($n \geq 2$).

Demostrad que existe un homomorfismo de grupos.

$\psi: \prod_{i=1}^{n} Aut(G_i) \to Aut\left(\prod_{i=1}^{n} G_i\right)$ que es monomorfismo.

0'5

Recordemos que $Aut(G) = \{f: G \to G \mid f \text{ es automorfismo}\}$

$f: G \to G$ es un isomorfismo de un grupo a sí mismo.

Definamos ψ como $\psi: (f_1, \ldots, f_n) \longrightarrow (f_1, \ldots, f_n)$, y es el homomorfismo buscado:

y veamos que tiene derecho a la vida

· Bien definido: $(f_1, \ldots, f_n) \in \prod_{i=1}^{n} Aut(G_i)$ cumple que todo

$f_i \in Aut\, G$ es un isomorfismo de la forma $f_i: G \to G$.

luego $(f_1, f_2, \ldots f_n): \prod_{i=1}^{n} G_i \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} G$.

Y además es un isomorfismo por lo probado en el apartado a,

por lo que tenemos que es un automorfismo y $\psi: \prod_{i=1}^{n} Aut(G) \to Aut\left(\prod G\right)$

Faltaría probar que es ψ es un monomorfismo.

$Ker(\psi) = \{F = (f_1, \ldots, f_n) \in \prod_{i=1}^{n} Aut(G_i) \mid \psi(F) = Id\}$

No está claro cómo defines ψ.

Pero por cómo hemos construido ψ esto si y sólo si

$F = (id_1, id_2, \ldots id_n)$.

De lo que concluimos que $Ker(\psi) = \{1\}$ y es por ello un monomorfismo.

c) Sea $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ una familia de n grupos finitos $(n \geq 2)$ con $mcd(|G_i|, |G_j|) = 1$ para todo $i \neq j$. Demostrad que el homomorfismo Ψ del apartado anterior es un isomorfismo.

Procedamos a demostrarlo por inducción. 4'5

Caso $n=2$

G_1, G_2 son dos grupos finitos con $|G_1|, |G_2|$ primos relativos.

Tengamos presente lo siguiente.

$G_1 \times \{1\}, \{1\} \times G_2 \leq G$, y $G_1 \overset{i_1}{\cong} G_1 \times \{1\}$, $G_2 \overset{i_2}{\cong} \{1\} \times G_2$

donde i_1, i_2 son los isomorfismo inclusión.

Además si f es un homomorfismo del tipo $f: G_1 \times G_2 \to G_1 \times G_2$ (respectivamente monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo) por ser $|G_1|, |G_2|$ primos relativos. $\forall x_1 \in G_1$

$f(x_1, 1) = (y_1, 1)$ con $y_1 \in G_1$

Pues si fuera de otro modo, sea $r = ord(x_1)$

- $f^r((x_1, 1)) = ((x_1, 1)^r) = (1, 1) = 1$
- $f^r(x_1, 1) = (y_1, y_2)^r = (1, y_2^r)$ $y_2 \in G_2$ y como $mcd(|G_1|, |G_2|)$ $y_2^r \neq 1$ si $y_2 \neq 1$.

Se razona igual para la segunda variable.

Esto además implica que si f es un monomorfismo, epimorfismo, o iso:

$f_i = \pi_i \circ f \circ i_i$ también lo sea.

$Ker(f_i) = \pi_{i*}(Ker f)$ y $Img(f_i) = \pi_{i*}(f)$

Veamos demostración

$\cdot \ Ker(f) = \{Id_{G_1 \times G_2}\}$ Si es inyectiva f entonces

$\Pi_{i*}(Ker(f)) = \{Id_{G_i}\} \Rightarrow f_i$ inyectiva

f_i sobreyectiva si f lo es

$Img(f) \leq G_1 \times G_2$ por ser $mcd(|G_1|, |G_2|) = 1$

entonces (proposición 14 marzo 24) $\exists$ Existe $H_1 \leq G_1$, $H_2 \leq G$ con $H_1 \times H_2 = Img(f)$

Luego $Img(f) = G_1 \times G_2$ si f es sobre $(f_i = \Pi_i f\, i)$

$Img(f_1) \cong Img(f(G_1 \times \{1\})) \cong G_1 \times \{1\} \cong \{G_1\}$ Por ser inyectiva 1^{er} T^a Isomorfía luego $|Img(f_i)| = |G_i|$ y $Img(f_i) \leq G_i$

y llegamos a que $\underline{Img}(f_i) = G_i$ y por tanto es sobre.

Como consecuencia para todo $f \in Aut(G_1 \times G_2)$ podemos definir

$g = (\Pi_1 f\, i_1, \Pi_1 f\, i_2) \in Aut(G_1) \times Aut(G_2)$

y que por cómo hemos definido φ, $\varphi(g) = f$.

Probando con esto que todo elemento del codominio tiene preimagen, es decir que es sobre.

<u>Hipótesis de inducción</u> cierta para n

Veamos que $\prod_{i=1}^{n+1} Aut(G_i) \cong Aut\left(\prod_{i=1}^{n+1} G_i\right)$

Definimos $\gamma = \prod_{i=1}^{n} G_i$ que por proposición 1.2 de marzo 24 $|\gamma| = \prod_{i=1}^{n} |G_i|$ y que por ser $mcd(|G_i|, |G_j|)$ $\forall\, i,j \le n$ con $i \ne j$ el $mcd(|G|, |G_{n+1}|) = 1$.

Por tanto

$$Aut\left(\prod_{i=1}^{n+1} G_i\right) = Aut(\gamma \times G_{n+1}) \overset{(n=2)}{\cong} Aut(\gamma) \times Aut(G_{n+1}) \overset{n=n}{\cong} \left(\prod_{i=1}^{n} Aut(G_i)\right) \times Aut(G_n) \cong \prod_{i=1}^{n+1} Aut(G_i)$$

hipótesis inducción

Faltaría ver que el isomorfismo que obtienes a partir de la inducción es el isomorfismo φ del apartado (b) para el caso $n+1$

2a

Por ser G abeliano sabemos que

(1) – Todo subgrupo suyo es normal; $\forall H \leq G$, $H \trianglelefteq G$

(2) – Para todo H, K subgrupos de G, $HK = H \vee K = KH \leq G$

Además por ser G finito, en virtud del primer teorema de Sylow:

(3) Para cualquier p primo $i \in \mathbb{N}$ que cumpla que p^i divide a $|G| = n$ existirá un subgrupo $H \leq G$ con $|H| = p^i$

Por tanto defino $H_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ como el subgrupo formado por

$H_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = K^1_{i_1} K^2_{i_2} \ldots K^k_{i_k}$ con $K^q_{i_j} \leq G$ y $|K^q_{i_j}| = p_q^{i_j}$

($p_q^{i_j}$ es divisor de n y p primo). $K^q_{i_j}$ existirá por (3) y $H_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ por (2)

Podemos considerar por ello la serie:

$G = H_{t_1, t_2, \ldots, t_k} \trianglerighteq H_{(t_1-1), t_2, \ldots, t_k} \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq H_{0, t_2, \ldots, t_k} \trianglerighteq \ldots$

$\trianglerighteq H_{0, (t_2-1), \ldots, t_k} \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq H_{0,0,\ldots,0} = \{1\}$

Que es una serie de composición ya que (abuso notación)

$$\left| \frac{H_{0, \ldots, i_j+1, \ldots, t_j, \ldots, t_k}}{H_{0, \ldots, i_j, t_j, \ldots, t_k}} \right| = p_q$$ por teorema de Lagrange,

esto hará que no pueda tener subgrupos y por tanto los factores son simples.

Además, es abeliano, ya que si $H, K \leq G$ con H abeliano con $K \trianglelefteq H$ $\frac{H}{K}$ es abeliano

$(\forall a, b \in \frac{H}{K} \quad a \cdot b = h_1 h_2 K \overset{H \text{ abeliano}}{=} h_2 h_1 K = b \cdot a)$

KYOWA KIRIN

Sus factores son simples, abelianos y de orden primo entonces son isomorfos a C_p.

4'5

Con todo esto ya tenemos lo que buscábamos probar

$$fact(G) = \{ C_{p_1}, \overset{(t_1)}{\ldots}, C_{p_2}, \overset{(t_2)}{\ldots}, C_{p_2}, C_{p_k}, \overset{(t_k)}{\ldots}, C_{p_k} \}$$

Por cómo hemos construido la serie, tiene un total de $\sum_{i=1}^{k} t_i$ factores, es decir $l(G) = \sum_{i=1}^{k} t_i$.

$\boxed{2 \mid b}$ Sea $n \geq 3$ y se considera el grupo diédrico D_n. Demostrad que si $n = p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k}$ es la factorización de n en números primos, entonces

$$l(D_n) = t_1 + \dots + t_k + 1 \quad y \quad fact(D_n) = \{ C_{p_1} (t_1), C_{p_1}, \dots C_2 \}$$

0

Sabemos que $|D_n| = 2n = p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k} \cdot 2^1$

Por tanto lo que se nos pide demostrar es directo con el apartado 2 de la demostración anterior.

No, pues D_n no es abeliano

$\boxed{2 \mid C}$ Encontrar todas las series de composición del grupo diédrico D_6.

Este ejercicio fue parcialmente resuelto el 14 de abril, así que entiendo que falta completar los apartados que pone "comprobadlo!!!" y que de otra forma sería "copiar - pegar",

i) Comprobad que $C_2^{III} = \{1, r^2 s\}$ $C_2^{IV} = \langle r^3 s \rangle$, $C_2^{V} = \{1, r^4 s\}$ y $C_2^{VI} = \{1, r^5 s\}$ no son normales.

$r \cdot (r^2 s) r^{-1} = r^3 \cdot r^{5} s = r^3 \cdot r^1 = r^4 s \notin C_2^{III} \Rightarrow C_2^{IV}$ No es normal

de manera generar $r \cdot (r^i s) r^{-1} = r \cdot (r^i s) r^5 = r^{i+1} \cdot r s = r^{i+2} s \notin C_2^{i+1}$

con $i \in \{2 \dots 4\}$

$\boxed{2 | C}$ Sabemos que $D_6 = \langle r, s : r^6 = 1 = s^2, sr = r^5 s \rangle$

Además $|D_6| = 12$ y por tanto los subgrupos tendrán orden 2, 3, 4 o 6.

Los subgrupos de orden 2 son cíclicos generados por elementos de orden 2.

y así obtenemos siete grupos de orden 2:

$C_2 = \langle r^3 \rangle = \{1, r^3\}$; $C_2' = \langle s \rangle = \{1, s\}$ $C'' = \langle r^2 s \rangle = \{1, r^2 s\}$

$C_3^{III} = \langle r^3 s \rangle = \{1, r^3 s\}$ $C_2^{V} = \langle r^4 s \rangle$ y $C_2^{VI} = \langle r^5 s \rangle$

Además por el ejercicio 9 de la relación 3 tenemos que

$r^3 \in Z(D_6)$ por tanto $a \langle r^3 \rangle a^{-1} \leq \langle r^3 \rangle \ \forall a \in D_6$ y

$C_2 = \langle r^3 \rangle \trianglelefteq D_6$

<u>El resto no son normales</u>

De forma general $r(r^n s) r^{-1} = r(r^n s) r^5 = r^{n+1} r^{25} s = r^{n+2} s$

luego para cualquier $n \in \{0 \ldots 5\}$

$C_2^{(n+1)} \not\ni r^{n+2} s$ y por tanto no serán normales.

(Ejemplo $r r^4 s r^{-1} = r^6 s = s$ $s \notin C_2^{V} = \{1, r^4 s\}$

Los subgrupos de orden 3 son cíclicos generados por elementos de orden 3 de D_6. Hay dos elementos de orden 3 en D_6 que son r^2 y r^4 que generan el mismo subgrupo, luego obtenemos un único subgrupo de orden 3.

$C_3 = \langle r^2 \rangle = \{1, r^2 r^4\} = \langle r^4 \rangle$

Veamos que es normal gracias a su tabla de multiplicar.

$a \in D_6$ $a =$	1	r	r^2	r^3	$\dots r^5$	s	rs	$r^2 s$	$\dots\ r^5 s$
	1								

$\underbrace{r \ r^2 \ r^3 \dots r^5}_{r^2}$ $\underbrace{s \ \ rs \ \ r^2 s \dots r^5 s}_{\text{Por fórmula anterior:}}$

Si $a \in D_6$ es de la forma r^i $0 \leq i \leq 5$

$\Rightarrow r^i r^2 r^{-i} = r^2 \in D_6$

Si $a \in D_6$ es de la forma $r^i s$,

Tenemos que $r^i s . (r^2)(r^i s)^{-1} = r^i s r^2 s r^{-i}$

que aplicando la fórmula anterior $s r^n = r^{5.n} s$ quedaría

$r^i r^{2.5} r^{-i} = r^4 \in D_6$

Luego es normal

Los subgrupos de orden 4 son cíclicos generados por elementos de orden 4 o tipo Klein. Como en D_6 no hay elementos de orden 4, entonces no tiene subgrupos cíclicos de orden 4. Por lo que los subgrupos de tipo Klein son generados por elementos de orden 2 que conmutan entre sí:

$K_1 = \langle r^3, s \rangle$, $K_2 = \langle r^3, rs \rangle$, $K_3 = \langle r^2 s, r^5 s \rangle$

Veamos que ninguno es un subgrupo normal de D_6,

$r s r^{-1} = r^2 s \notin K_1$

$r (rs) r^{-1} = r^3 s \notin K_2$

$r \ r^2 s \ r^{-1} = r^4 s \notin K_3$

Los subgrupos de orden 6 son cíclicos y generados por elementos de orden 6 o isomorfos a D_6, por el ejercicio 23 de la relación 2. Hay dos elementos de orden 6 en D_6 que son r y r^5 que genera $C_6 = \langle r \rangle$.

Veamos ahora si D_6 tiene subgrupos de orden 6 isomorfos a D_3, esto es si $\exists\, a,b \in D_6$ con $a^3 = 1 = b^2 \wedge ba = a^2 b$.

Los casos posibles son:

$a = r^2,\ b = s \Rightarrow ba = sr^2 = r^{+4}s = a^2 b$

$H_1 = \langle r^2, s \rangle = \{1, r^2, r^4, s, r^2 s, r^4 s\} \cong D_3$

y $H_1 \leq D_6$

~~$a = r^i,\ b = r^3 s \Rightarrow$~~ ~~con~~ $i = 2,4$

$H_2 = \langle a = r^2, b = rs \rangle = \{1, r^2, r^4, rs, r^3 s, r^5 s\} \cong D_3$

El resto de casos se repite

$a =$	$b =$	$H =$	Coincide con:
r^2	$r^2 s$	$1\ r^2\ r^4\ r^2 s,\ r^4 s,\ s$	H_1
r^2	$r^3 s$	$1\ r^2\ r^4\ r^3 s,\ r^5 s,\ rs$	H_2
r^2	$r^4 s$	$1\ r^2\ r^4\ r^4 s,\ s,\ r^2 s$	H_1
r^2	$r^5 s$	$1\ r^2\ r^4\ r^5 s\ rs,\ r^3 s$	H_1
r^4	s	$1\ r^4\ r^2\ s,\ r^4 s\ r^2 s$	H_1
r^4	rs	$1\ r^4\ r^2\ rs\ r^5 s\ r^3 s$	H_2
r^4	$r^2 s$	$1\ r^4\ r^2\ r^2 s\ s, r^4 s$	H_1
r^4	$r^3 s$	$1\ r^4\ r^2\ r^3 s\ rs,\ r^5 s$	H_2
r^4	$r^4 s$	$1\ r^4\ r^2\ r^4 s\ r^2 s\ s$	H_1
r^4	$r^5 s$	$1\ r^4\ r^2\ r^5 s\ r^3 s\ rs$	H_2

Por otro lado

$$[D_8 : H_1] = \frac{|D_6|}{|H_1|} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow H_1 \trianglelefteq D_6$$

$[D_6 : H_2] = 2$ $\quad H_2 \trianglelefteq D_6$

$[H_1 : \langle r^2 \rangle] = 2$ $\quad \langle r^2 \rangle \trianglelefteq H_1$

$[H_2 : \langle r^2 \rangle] = 2$ $\quad \langle r^2 \rangle \trianglelefteq H_2$ 4

$[\langle r \rangle : \langle r^2 \rangle] = 2$ $\quad \langle r^2 \rangle \trianglelefteq \langle r \rangle$

y $\langle r^3 \rangle \trianglelefteq \langle r \rangle$ ya que elemento a elemento

$$r^i \langle r^3 \rangle = r^i \{1, r^3\} = \{r^i, r^{i+3}\} = \{1, r^3\} r^i .$$

Por tanto todas las series de composición de D_6 son

$\{1\} \triangleleft \langle r^2 \rangle \triangleleft \langle r \rangle \triangleleft D_6$

$\{1\} \triangleleft \langle r^3 \rangle \triangleleft \langle r \rangle \triangleleft D_6$

$\{1\} \triangleleft \langle r^2 \rangle \triangleleft H_1 \triangleleft D_6$

$\{1\} \triangleleft \langle r^3 \rangle \triangleleft H_2 \triangleleft D_6$.

d) Describid al grupo $Aut(K \times C_5)$ donde K denota al grupo de Klein y C_5 el grupo cíclico de orden 5. ¿Cuál es su orden?

$(K = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

0'75

Por el apartado anterior $Aut(K \times C_5) \cong Aut(K) \times Aut(C_5)$

Por el ejercicio 20. Relación 3: $Aut(K) \cong S_3$

Por el ejercicio 18. Relación 3: $(\mathbb{Z}_5^{\times}) \cong Aut(C_5)$

Por tanto concluimos que $Aut(K \times C_5) \cong S_3 \times \mathbb{Z}_5^{\times}$

<u>Cardinalidad</u>

Como S_3 y $\mathbb{Z}_5^{\times}$ son finitos,

$$|Aut(K \times C_5)| = |S_3 \times \mathbb{Z}_5^{\times}| = |S_3|\,|\mathbb{Z}_5^{\times}| = 3! \cdot \varphi(5) = 6 \cdot 4 = 24.$$

Te falta describir los elementos de $Aut(K \times C_5)$, es decir, quiénes son como automorfismos de $K \times C_5$

Ejercicio 3. Sea G un grupo finito y consideremos la acción de G sobre sí mismo por traslación.

$G \times G \to G$, $(g, x) \overset{g}{\longmapsto} x : gx$.

Sea $\phi : G \to S(G)$ la representación asociada.

a) Demostrad que si $g \in G$ es un elemento de orden n y $|G| = mn$, entonces $\phi(g)$ es ~~una permutación~~ un producto de ciclos disjuntos de longitud n.

Esto será si $\forall x \in G$ $\quad g^n x = (\phi^{\cancel{n}}(g))^n(x) = x$

$(\phi^{\cancel{n}}(g))^n(x) = g^n x = x$ por ser g de orden n.

Deducid que $\phi(g)$ es una permutación impar si, y sólamente si, el orden de g es par y el cociente del orden de G y el de g es impar.

KYOWA KIRIN

a) 3

Producto de ciclos disjuntos de longitud n

Esto será si $\forall x \in G \quad \phi^n(g)(x) = x$. 4'5

Por ser ϕ la acción de translación:

$(\phi^{\cancel{n}}(g))^n(x) = g^n \cdot x = 1$ ya que por hipótesis $ord(g) = n$.

Uno de los ciclos disjuntos que forman $\phi(g)$

será de la forma $(x \;\; \phi(g)(x) \;\; (\phi^{\cancel{2}}(g))^2(x) \; \dots \; (\phi^{(n-1)}(g))^{n-1}(x)) = \alpha_0$

si tomamos otro $x_i \in G$ tal que $(\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_j)(x_i) = x_i$ podremos construir otro ciclo disjunto α_i de orden n.

por qué existe tal x_i?

De donde deducimos que $\phi(g) = \prod_{i=0}^{m-1} \alpha_i$ ya que $\frac{|G|}{ord(g)} = \frac{n \cdot m}{n}$

es decir $\phi(g)$ es expresable en la composición de m ciclos disjuntos.

Paridad permutación

Podemos descomponer cada α_i en $(n \bar{+} 1)$ transposiciones por ser de orden n.

Entonces $\phi(g)$ se podrá descomponer en $m \cdot (n \bar{+} 1)$ transposiciones.

Luego ϕ será impar si y solo si $m = \frac{|G|}{ord(g)}$ es impar

y $ord(g) = n$ es par.

16 | 3 Por estar trabajando con ϕ la acción por traslación y $|G| = mn$ finito.

Tenemos que $G \cong \operatorname{Im}(\phi)$ $\quad S(G) \cong S_{nm}$

Además por teoría general de homomorfismo $\operatorname{Img}(\phi) \leq S(G)$.

Por otra parte recordemos que

- $H \leq G$ un grupo y $N \trianglelefteq G$ $\quad N \leq H \Rightarrow N \trianglelefteq G$
- Si $f: G \to G'$ entonces $\operatorname{Ker}(f) \trianglelefteq G$

Consideremos ahora el homomorfismo signatura $\sigma: S(G) \to \{-1, 1\}$ y restrinjámonos a $\operatorname{Im}\phi$, donde $\sigma|_{\operatorname{Im}\phi}$ sigue siendo homomorfismo.

Aplicando el primer teorema de isomorfía:

$$\frac{\operatorname{Img}\phi}{\operatorname{Ker}(\sigma|_{\operatorname{Im}\phi})} \cong \operatorname{Img}(\sigma|_{\operatorname{img}\phi}) \quad \text{por tanto } [\operatorname{Img}\phi : \operatorname{Ker}(\sigma|_{\operatorname{Im}\phi})] = \left|\frac{\operatorname{Img}\phi}{\operatorname{Ker}(\sigma|_{\operatorname{Img}\phi})}\right| = |\operatorname{Img}(\sigma|_{\operatorname{Img}\phi})|$$

Veamos ahora la cardinalidad de $|\operatorname{Img}(\sigma|_{\operatorname{Img}\phi})|$

Por ser $\operatorname{Img}\phi$ subgrupo $\Rightarrow$ $id \in \operatorname{Img}(\phi)$ $\quad (\sigma(id) = 1)$

Además por hipótesis existe $s \in \operatorname{Img}(\phi)$ impar $\quad (\sigma(s) = -1)$

Luego concluimos que la imagen $|\operatorname{Img}(\sigma|_{\operatorname{Img}\phi})| = 2$ tomando todos sus posibles valores.

3

Como $G \overset{f}{\cong} \operatorname{Im}\phi$, llamamos f a tal isomorfismo y ya hemos probado que $[\operatorname{Img}\phi : \operatorname{Ker}(\sigma|_{\operatorname{Im}\phi})]$ entonces $[G : f^*(\operatorname{Ker}(\sigma|_{\operatorname{Im}\phi}))] = 2$ siendo $f^*(\operatorname{Ker}(\sigma|_{\operatorname{Img}\phi}))$ el subgrupo buscado y con el que concluimos la demostración.

$\boxed{3}\boxed{c}$

Por ser $|G| = 2k$ el primer teorema de Sylow nos asegura que existe $H \leq G$ con $|H| = p$. Tomemos pues $x \in H$ con $x \neq 1$ necesariamente $x^2 = 1$, ya que de otra forma $|H| > 2$.

- El orden de x es 2, par.
- $\dfrac{|G|}{ord(x)} = k$ que es impar

2

Luego podemos utilizar el apartado (a) de este ejercicio y $\phi(x) \in Img(\phi)$ será una permutación impar, lo que nos permite apoyarnos en el aparta (b) para concluir probando lo que buscábamos: G contiene un subgrupo de índice 2.

4 a Sea G un grupo finito y p un número primo divisor del orden de G. Sea B un p-subgrupo de Sylow de G y N un subgrupo normal de G. Demostrad que $N \cap B$ es un p-subgrupo de Sylow de N y $\frac{NB}{N}$ es un p-subgrupo de Sylow de G/N.

Sea $|G| = p^k m$ con $mcd(p,m)=1$ y por ser $N \trianglelefteq G$ $|N| = p^r m'$ con $0 \leq r \leq k$

35

Vamos a probar que $N \cap B$ es un p-subgrupo de Sylow de N

[illegible]

Como $N, B \leq G$ entonces $N \cap B$ será un subgrupo también de [illegible] $N \cap B \leq N$.

Además se cumplen las hipótesis del segundo teorema de isomorfía y tenemos que $N \cap B \trianglelefteq B$, $N \trianglelefteq NB$

$$\frac{B}{N \cap B} \cong \frac{NB}{N}$$

Consideremos además las siguientes propiedades:

i) $N \cap B \trianglelefteq B$ luego $|N \cap B| \mid |B|$ y por tanto $|N \cap B| = p^i$ $0 \leq i \leq k$

ii) $B \leq NB$ luego $|NB| = p^k m''$ con $mcd(p,m'')=1$, y k máximo por ser B un p-subgrupo de Sylow.

Por el teorema de Lagrange:

$$\frac{|B|}{|N \cap B|} = \frac{|NB|}{|N|} \Leftrightarrow \frac{p^k}{p^i} = \frac{p^k m''}{p^r m'}$$ de donde deducimos

que $i = r$ y $m'' = m'$, concluyendo con esto la demostración ya que hemos probado que $|N \cap B| = p^r$ y ya teníamos que $|N| = p^r m'$, es decir $N \cap B$ es un p-subgrupo de Sylow de N.

Ahora nos quedaría ver que $\frac{NB}{N}$ es un p-subgrupo de $\frac{G}{N}$.

Como acabamos de ver $m' = m'$ por tanto.

$$\left|\frac{NB}{N}\right| = \frac{|NB|}{|N|} = p^{k-r},$$ es un p-subgrupo.

y por T.ª Lagrange

$$\left|\frac{G}{N}\right| = \frac{|G|}{|N|} = \frac{p^k n}{p^r m'} = p^{k-r} \cdot \frac{n}{m}$$

Por ende $\left|\frac{NB}{N}\right|$ es la potencia máxima de p.

resultando ser un p-subgrupo de Sylow de $\frac{G}{N}$.

4 | b i) Orden de $N_G(B)$ B un 7-subgrupo de Sylow de G

Comenzamos viendo el número de 7-subgrupos existentes: n_7

Por el segundo Teorema de Sylows para G grupo con $|G| = 2^3 3\, 7 = 24 \cdot 7$

se tiene que

$n_7 \mid 24$ y $n_7 \equiv 1 \mod 7$ Luego $n_7 \in \{1, 4\}$

Si fuera $n_7 = 1$ existiría un único 7-subgrupo normal, pero por hipótesis G es simple, es decir no admite subgrupos normales propios, por lo que $n_7 = 1$ no puede ser solución y la única posibilidad es $n_7 = 8$.

Esta consideración es interesante ya se nos pide la cardinalidad de $N_G(B) = \{g \in G \mid gB = Bg\}$ y por otra parte sabemos que todos los 7 subgrupos son conjugados. Por ende estamos buscando los elementos que considerando la acción conjugado no nos apliquen en otro 7 grupo.

Sea $X = \{B_i\}_{i \in \{1 \ldots 8\}}$ nuestra familia de nuestros 7 subgrupos de Sylow.

Consideremos la acción conjugada de $G \times X \to X$

y notemos que $N_G(B) = Stab_G(x) \overset{\text{def}}{=} \{g \in G \mid {}^g x = x\}$

además por teoría conocemos que $|O(x)| = [G : Stab(x)]$

Donde por ser la proposición 1.4 de teoría y ser $n_7 = 8$

$|O(x)| = 8$ (Ya que si $O(x) = O(y) \Rightarrow Stab_G(x)$ y $Stab(y)$ son conjugados)

Así que en virtud del teorema de Lagrange,

$|G| = [G : Stab(B_i)]\,|Stab(B_i)| \Rightarrow N_G(B) = \frac{|G|}{|O(B)|} = \frac{2^3 3\, 7}{8} = 21$

12) Razonad que G no tiene subgrupos de orden 14

Supongamos que existe $H \leq G$ tal que $|H| = 2 \cdot 7$, por el primer Teorema de Sylow existirá $S \leq H$ con S un 7-subgrupo de Sylow de H, y además por las consideraciones del segundo teorema de Sylow:

$n_7 \mid 2$ y $n_7 \equiv 1 \mod 7$ Luego $n_7 = 1$

y S será normal $S \trianglelefteq H$.

Ahora consideremos el normalizador del apartado anterior, que hemos visto que $|N(\mathfrak{B})| = 21$ $(\mathfrak{B} \trianglelefteq N_G(\mathfrak{B}))$
$(\mathfrak{B} \in \mathfrak{X})$

Y además, el segundo T^a de Sylow nos asegura que todo p-subgrupo de G está contenido en un p-subgrupo de Sylow de G, es decir que hay un $\mathfrak{B} \in \mathfrak{X}$ tal que $S < \mathfrak{B}$, y como $|S| = |\mathfrak{B}|$ entonces $S = \mathfrak{B}$.

Tenemos pues que $\mathfrak{B} \trianglelefteq S$ y que $\mathfrak{B} \trianglelefteq N_G(\mathfrak{B})$, como el normalizador contiene el mayor subconjunto de elementos de G, en el que $\mathfrak{B}$ es normal y $\mathfrak{B} \trianglelefteq S$ entonces $H \leq N(\mathfrak{B})$:

pero esto supondría que:
$|H| \mid |N(\mathfrak{B})|$ esto es $14 \mid 21$ lo cual es una contradicción que tiene origen en suponer la existencia de H.

$\boxed{4}\boxed{6}$ ¿Cuántos elementos de orden 7 tiene G?

Sabemos que todo $x \in G$ con $ord(x) = 7$ pertenece a $\mathcal{B} \in \mathfrak{X}$

Sean $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j \in \mathfrak{X}$ con $\mathcal{B}_i \neq \mathcal{B}_j$, veamos si tienen elementos comunes.

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j \leq \mathcal{B}_i \\ \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j \leq \mathcal{B}_j \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} |\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j| \mid |\mathcal{B}_i| \\ |\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j| \mid |\mathcal{B}_j| \end{matrix}\right\}$$

luego $|\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j| \in \{1, 7\}$ pero no puede ser 7 porque supondría que $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j$

Luego $|\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j| = 1$ y como son ambos subgrupos $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \{1\}$

Por otro lado, por ser $|\mathcal{B}| = 7$ primo $\mathcal{B}$ será un ciclo de orden 7 (primo) luego $\langle x \rangle = \mathcal{B}$ y todo $y \in \mathcal{B}$ $y = x^r$ $0 \leq r \leq 1$

$$ord(y) = \frac{|\mathcal{B}|}{mcd(r, |\mathcal{B}|)} = 7.$$

3

Finalmente $\bigcup_{\mathcal{B} \in \mathfrak{X}} \mathcal{B} - \{1\}$ son todos los elementos "sin repetir" de orden 7. Es decir $n_7 \cdot (|\mathcal{B}| - 1) = 8 \cdot 6 = 48$ es el número de elementos de orden 7 en G.

4 C Sea G un grupo con $|G| = 2^n 3$, $n \geq 0$. Demostrad que G es resoluble.

<u>Si $n=0$</u> $|G| = 3$ luego será un 3-grupo y por tanto resoluble.

<u>Si $n \geq 1$</u>

Puesto que $|G| = 2^n 3$ finito gracias al segundo Teorema de Sylow podremos calcular el número de 2-grupos que podrían existir. n_2 debe cumplir que $n_2 \mid 3$ y $n_2 \equiv 1 \mod 2$. Luego podría darse que $n_2 = 1$ o $n_2 = 3$.

Distinguimos casos:

<u>i) $n_2 = 1$</u>: Tenemos que hay un único 2-grupo de Sylow, P que será normal y resoluble.

La normalidad nos permite considerar el cociente $\left|\frac{G}{P}\right| = 3$, que es un 3-grupo y por ello resoluble.

Finalmente conocemos que si $Q \trianglelefteq G$ grupo y Q es resoluble, $\frac{G}{Q}$ también, G es entonces resoluble, por ende hemos probado que G es resoluble.

<u>ii) $n_2 = 3$</u>

Utilizaremos la "tecnica de contar elementos"

Sean P_1, P_2, P_3 los tres 2-subgrupos de Sylow de G, donde para todo $i,j \in \{1,2,3\}$ $|P_i| = 2^n$ y $|P_i| = |P_j|$ si $i \neq j$

Veamos ahora que $P_i \cap P_j = \{1\}$ si $i \neq j$

Definimos $X \stackrel{def}{=} \{P_1, P_2, P_3\}$ y consideramos la acción conjugación

$G \times X \longrightarrow X \quad g P_i g^{-1}$

Notemos que $|g P_i g^{-1}| = |P_i| = 2$ luego $g P_i \in X$ ya que X contiene a todos los 2-subgrupos.

Consideremos ahora el homomorfismo relaciona con la acción

$\phi : G \longrightarrow S(X) \cong S_3 \qquad g \longmapsto \phi(g)$

con $\phi(g) : X \longrightarrow X \quad \phi(g)(P_i) = g P_i g^{-1}$.

Calculamos ahora su núcleo.

$Ker(\phi) = \{ g \in G / \phi(g) = id_X \} = \{ g \in G / \phi(g)(P_i) = P_i \ \forall i \in \{1, ,3\} \} =$

$= \{ g \in G / g P_i g^{-1} = P_i \}$

Como $n_2 = 3$ ninguno es normal en G. luego $Ker(\phi) \lneq G$ es un subgrupo propio. y como $|G| = 2^n 3$

Luego $|Ker(\phi)| = 2^i 3^j$ con $0 \leq i \leq n$ si $j = 0$ y $0 \leq i < n$ si $j = 1$.

Estudiemos ahora los diferentes casos.

(Por el 1er T^a de isomorfía)

$G / Ker(\phi) \cong Img(\phi) \leq S_3$ (S_n es resoluble $\Leftrightarrow n \leq 4$)

Luego S_3 es resoluble y entonces sus subgrupos también lo serán.

$\frac{G}{Ker(f)}$ es resoluble.

Comprobemos ahora que $Ker(\phi)$ es resoluble:

$|Ker(\phi)| = 2^i 3^j$

i) $i=j=0$ $|Ker(\phi)| = 1$

Entonces $Ker(\phi) = \{1\}$, $G \simeq G/Ker(\phi) \simeq Im(\phi)$

luego será resoluble

ii) $|Ker(\phi)| = 2^i$ o $|Ker(\phi)| = 3$ $0 < i \leq n$

Será entonces un p-grupo, que son resolubles luego G también.

iii) $|Ker(\phi)| = 2^i 3$ $0 < i < n$

No faltaría ver que el $Ker(\phi)$ es resoluble con

$|Ker(\phi)| = 2^i 3 < 2^n 3 = |G|$

Si lo fuera $\left|\frac{G}{Ker\phi}\right| = 2^{n-i}$ 2-subgrupo también resoluble

y como consecuencia G sería resoluble.

En resumen G es resoluble si $Ker(\phi)$ lo es. Abstrayendo la situación: G un grupo de la forma $|G| = 2^n 3$ será resoluble si $Ker\phi = H_0 \trianglelefteq G$ con $|H_0| = 2^k 3$ $k < n$ lo es, $n > k \geq 0$.

Pero de igual manera H_0 será resoluble si

$H_1 = Ker(\phi_{H_0}) = \{g \in H_0 \mid \phi(g) = Id\}$ lo es. 3^j

Este kernel por los casos visto anteriores será resoluble de la forma $|H_1| = 2^i 3^j$ $0 \leq i < K$ $j \in \{0,1\}$

si $|H_1| = 2^i$ o $|H_1| = 3 \Rightarrow$ Resoluble y $|G|$ resoluble

si podriamos volver a considerar su kernel de la misma manera y como la potencia de 2 de la cardinalidad se van reduciendo, entonces en algún momento de sta "serie" H_i cumplirá el caso (i) o (ii) implicando $Ker\phi$ lo sea y por tanto G también.

Por si no ha quedado claro voy a hacer un gráfico del algoritmo "recursivo".

Tengamos en cuenta la siguiente notación:

- K_{i+1} es el Kernel de K_i y su orden será de la forma $2^{r_{i+1}} 3^{j_{i+1}}$ con $r_{i+1} < r_i$ y $j_i, j_{i+1} \in \{0,1\}$.

Por tanto el algoritmo es finito ya que tras un máximo de K_{i+1} iteraciones se llegará a un caso ~~K_0~~ (i) o (ii) ya que el orden disminuye siempre y mantiene el patrón.

$G = K_0$ { caso (i) : Resoluble ⇒ Finaliza
caso (ii) : Resoluble ⇒ Finaliza
caso (iii) : Depende de $K_1 = Ker(K_1)$; K_1 cumple hipótesis método por tanto nos preguntamos si es resoluble igual ~

⇓

K_1 { caso (i) ⇒ Sí ⇒ K_1 y K_0 resoluble
caso (ii) → Resoluble K_1 y K_0
caso (iii) ⇒ Volvemos a plantear método

⇓

...

K_{i+1} { caso (i) ⇒ $\forall K_r$ $r \leq i+1$ Resoluble
caso (ii) ⇒ $\forall K_r$ Resoluble
caso (iii) = ...