

Ejercicios tema 2

Blanca Cano Camarero

16 de abril de 2020

Índice

1. Ejercicio 9	1
2. Ejercicio 10	3
3. Ejercicio 13	3

1. Ejercicio 9

Sea G un grupo y sean $a, b \in G$ tales que $ba = ab^k, a^n = 1 = b^m$ con $n, m > 0$

Demuestre

1. **Para todo $i = 0, \dots, m - 1$ se verifica $b^i a = ab^{ik}$**

Demostraremos por inducción que se cumple para todo $i = 0, \dots, m - 1$.

- Caso base $i = 0$ evidente
- Supongamos que para $i \in \{0 \dots m - 2\}$ se cumple y veamos que para $i+1$ también
 $b^{i+1}a = bb^i a$ usando hipótesis de inducción y después hipótesis iniciales llegamos a $b(b^i a) = (ba)b^{ik} = ab^k b^{ik} = a^{(i+1)k}$ Como se quería probar.

2. **Para todo $j = 0, \dots, n - 1$ se verifica $ba^j = a^j b^{kj}$**

Lo demostraremos por inducción que se cumple para todo $j = 0, \dots, n - 1$:

- Caso base $j = 0$ evidente.
- Supongamos que para $j \in \{0 \dots n - 2\}$ se cumple y veamos que para $j+1$ también $ba^{j+1} = (ba^j)a$. Por la hipótesis de inducción $(ba^j)a = a^j b^{kj} a$
Usando ahora el apartado 1 de este mismo ejercicio.
 $a^j (b^{kj} a) = a^j ab^{k^j k} = a^{j+1} b^{k^{j+1}}$

Como queríamos ver

3. **Para todo $i=0,\dots,m-1$ y para todo $j = 0,\dots,n-1$ se verifica $b^i a^j = a^j b^{ik^j}$.**

Sea un j cualquiera en el rango mencionado. Lo demostraremos por inducción sobre i .

- Caso base $i=0$, evidente para cualquier j .
- Hipótesis de inducción, supongamos cierto para $1 \leq i < m-1$ y veamos que se cumple para el caso $i+1$.

$$b^{i+1}a^j = b(b^i a^j) = (ba^j)b^{ik^j} = a^j b^{k^j} b^{ik^j} = a^j b^{(i+1)k^j}$$
Donde para la primera igualdad se ha usado la propiedad asociativa, para la segunda la hipótesis de inducción, para la tercera el apartado 2 de este mismo ejercicio y finalmente otra vez la propiedad asociativa.
Como el j era arbitrario hemos probado lo que queríamos.

4. **Demostrar que todo elemento de $\langle a, b \rangle$ puede escribirse como $a^r b^s$ con $0 \leq s < m$ $0 \leq r < n$.**

Esto es consecuencia directa del apartado anterior y la definición de grupo generado, ya que todo elemento tendrá la forma $a^{z_0} b^{z_1} a * z_2 \dots$ con los exponentes enteros. Por tanto utilizando el apartado 3 podremos quedarnos con que $a^{z_0} b^{z_1} a * z_2 \dots = a^x b^y$ con x, y enteros.

Y como sea cual sea x e y podemos expresarlos como $x = pm + r, y = qm + s$ Usando las hipótesis iniciales probamos con ello lo que queríamos.

2. Ejercicio 10

Demostrar que un subconjunto no vacío $X \subseteq G$ de un grupo G es un subgrupo si y solo si $X = \langle X \rangle$.

Condición suficiente Si $y \in \langle X \rangle$ entonces tendrá la forma de producto de elementos de X (definición de grupo generado), como X es subgrupo entonces será cerrado para el producto y tenemos por tanto que $X = \langle X \rangle$.

Condición necesaria Para cualesquiera $a, b \in X$ se tiene que $ab^{-1} \in \langle X \rangle = X$ (por hipótesis) entonces acabamos de probar que X es subgrupo.

3. Ejercicio 13

1. Demostrar que si $H \leq G$ es un subgrupo, entonces $[G : H] = |G|$ si y solo si, $H = \{1\}$, mientras que $[G : H] = 1$ sii $H = G$.

Todo esto es consecuencia inmediata del teorema de Lagrange.

Para $[G : H] = |G|$ si y solo si, $H = \{1\}$

- **Condición necesaria.** Por ser H subgrupo distinto del vacío $1 \in H$. El teorema de Lagrange nos dice que $[G : H]|H| = |G|$, entonces tenemos que $|H| = 1$ y esto implica que $H = \{1\}$.
- **Condición suficiente.** Si $H = \{1\}$ entonces $|H| = 1$ y por el teorema de Lagrange $[G : H] = |G|$.

Para $[G : H] = 1$ sii $H = G$.

- **Condición necesaria.** Como $H \leq G$ y por el teorema de Lagrange $|H| = |G|$ entonces $H = G$.
- **Condición suficiente.** Si $H = G$ entonces $|H| = |G|$ y por el teorema de Lagrange no nos queda más que $[G : H] = 1$, como queríamos probar.

2. Demostrar que si se tienen los subgrupos $G_2 \leq G_1 \leq G$, entonces $|G : G_2| = [G : G_1][G_1 : G_2]$

Por la transitividad de ser subgrupo y el teorema de lagrange, llegamos a las siguientes igualdades:

$$|G| = [G : G_1]|G_1| \tag{1}$$

$$|G| = [G : G_2]|G_2| \tag{2}$$

$$|G_1| = [G_1 : G_2]|G_2| \tag{3}$$

Sustituimos en la primera igualdad la el valor de $|G|$ que nos da la segunda y para el miembro de la derechas Sustituimos el valor de $|G_1|$ por el que nos da la tercera igualdad obteniendo la siguiente ecuación.

$[G : G_2]|G_2| = [G : G_1][G_1 : G_2]|G_2|$, por tanto hemos probado lo que buscábamos

$$[G : G_2]|G_2| = [G : G_1][G_1 : G_2]|G_2|$$