Ejercicios tema 2

Blanca Cano Camarero

16 de abril de 2020

Índice

1. Ejercicio 9 **1**

2. Ejercicio 10 **3**

3. Ejercicio 13 **4**

4. Ejercicio 21 **7**

1. Ejercicio 9

Sea G un grupo y sean $a, b \in G$ tales que $ba = ab^k, a^n = 1 = b^m$ con $n, m > 0$

Demuestre

1. **Para todo** $i = 0, ..., m-1$ **se verifica** $b^i a = ab^{ik}$

   Demostraremos por inducción que se cumple para todo $i = 0, ..., m-1$.

   - Caso base $i = 0$ evidente
   - Supongamos que para $i \in \{0...m-2\}$ se cumple y veamos que para i+1 también
     $b^{i+1}a = bb^i a$ usando hipótesis de inducción y después hipótesis iniciales llegamos a $b(b^i a) = (ba)b^{ik} = ab^k b^{ik} = a^{(i+1)k}$ Como se quería probar.

2. **Para todo** $j = 0, ..., n-1$ **se vereifica** $ba^j = a^j b^{k^j}$

   Lo demostraremos por inducción que se cumple para todo $j = 0, ..., n-1$:

   - Caso base $j = 0$ evidente.
   - Supongamos que para $j \in \{0...n-2\}$ se cumple y veamos que para j+1 también $ba^{j+1} = (ba^j)a$. Por la hipótesis de inducción $(ba^j)a = a^j b^{k^j} a$
     Usando ahora el partado 1 de este mismo ejercicio.
     $a^j(b^{k^j} a) = a^j ab^{k^j k} = a^{j+1} b^{k^{j+1}}$

     Como queríamos ver

3. **Para todo i=0,..,m-1 y para todo j = 0,..n-1 se verifica** $b^i a^j = a^j b^{ik^j}$**.**

   Sea un j cualquiera en el rango mencionado. Lo demostraremos por inducción sobre i.

- Caso base i=0, evidente para cualquier j.
- Hipótesis de inducción, supongamos cierto para $1 \leq i < m-1$ y veamo que se cumple para el caso $i+1$.
  $b^{i+1}a^j = b(b^i a^j) = (ba^j)b^{ik^j} = a^j b^{k^j} b^{ik^j} = a^j b^{(i+1)k^j}$ Donde para la primera igualadas se ha usado la prompiedad asociativa, para la segunda la hipótesisi de inducción, para la tercera el apartado 2 de este mismo ejercicio y finalmente otra vez la propiedad asociativa.

  Como el j era arbitrario hemos probado lo que queríamos.

4. **Demostrar que todo elemento de $< a, b >$ puede escribirse como $a^r b^a$ con $0 \leq s < m$ $0 \leq r < n$.**

   Esto es consecuencia directa del apartado anterior y la definición de grupo generado, ya que todo elemento tendrá la forma $a^{z_0} b^{z_1} a * z_2 ...$ con los exponenetes enteros. Por tanto utilizando el apartado 3 podremos quedarno con que $a^{z_0} b^{z_1} a * z_2 ... = a^x b^y$ con x,y enteros.

   Y como sea cual sera x e y podemos expresarlos como $x = pnr, y = qm + s$ Usando las hipótesisi iniciales probamos con ello lo que queríamos.

2. Ejercicio 10

> Demostrar que un subconjunto no vacío $X \subseteq G$ de un grupo G es un subgrupo si y solo si $X =< X >$.

Condición suficiente Si $y \in< X >$ entonces tendrá la forma de producto de elementos de X (definición de grupo generado), como X es subgrupo entonces será cerrado para el producto y tenemo por tanto que $X =< X >$.

Condición necesaria Para cualesquiera $a, b \in X$ se tiene que $ab^{-1} \in< X >= X$ (por hipótesis) entonces acabamos de probar que X es subgrupo.

3. Ejercicio 13

1. Demostrar que si $H \leq G$ es un subgrupo, entonces $[G : H] = |G|$ si y solo si, $H = \{1\}$, mientras que $[G : H] = 1$ sii $H = G$.

Todo esto es consecuencia inmediata del teorema de Lagrange.
Para $[G : H] = |G|$ si y solo si, $H = \{1\}$

- **Condición necesaria**. Por ser H subgrupo distinto del vacío $1 \in H$. El teorema de lagrange nos dice que $[G : H]|H| = |G|$, entonces tenemos que $|H| = 1$ y esto implica que $H = \{1\}$.
- **Condición suficiente**. Si $H = \{1\}$ entonces $|H| = 1$ y por el teorema de lagrange $[G : H] = |G|$.

Para $[G : H] = 1$ sii $H = G$.

- **Condición necesaria**. Como $H \leq G$ y por el teorema de lagrange $|H| = |G|$ entonces $H = G$.
- **Condición suficiente**. Si $H = G$ entonces $|H| = |G|$ y por el teorema de lagrangre no nos queda más que $[G : H] = 1$, como queriamos probar.

2. Demostrar que si se tienen los subgrupos $G_2 \leq G_1 \leq G$, entonces $|G : G_2| = [G : G_1][G1 : G2]$

Por la transitividad de ser subgrupo y el teorema de lagrange, llegamos a las siguientes igualdades:

$$|G| = [G : G_1]|G_1| \tag{1}$$

$$|G| = [G : G_2]|G_2| \tag{2}$$

$$|G_1| = [G_1 : G_2]|G_2| \tag{3}$$

Sustituimos en la primera igualdad la el valor de $|G|$ que nos da la segunda y para el mienbro de la derechas Sustituimos el valor de $|G_1|$ por el que nos da la tercera igualdad obteniendo la siguiente ecuación.

$[G : G_2]|G_2| = [G : G_1][G_1 : G_2]|G_2|$, por tanto hemos probado lo que buscábamos

$$[G : G_2]|G_2| = [G : G_1][G_1 : G_2]|G_2|$$

3. Demostrar que si se tiene una cadena descendente de subgrupos de la forma

$$G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_{r-1} \geq G_r,$$

entonces

$$|G : G_r| = \prod_{i=0}^{r-1} [Gi : G_{i+1}]$$

Procederemos a demostrarlo por inducción, el caso base $r = 3$ ya está hecho en el apartado anterior. Supongamos ahora cierta la hipótesis de inducción $|G : G_r| = \prod_{i=0}^{r-1}[Gi : Gi + 1]$ para $r \geq 3$ y veamos que se cumple para $r + 1$. Por la transitividad de ser subgrupo y el teorema de lagrange, llegamos a las siguientes igualdades:

$$|G| = [G : G_r]|G_r| \tag{4}$$

$$|G| = [G : G_{r+1}]|G_{r+1}| \tag{5}$$

$$|G_r| = [G_r : G_{r+1}]|G_{r+1}| \tag{6}$$

Sustituimos en (4) el valor de $|G|$ con (5) y $|G_r|$ con (6), llegando a

$$[G : G_{r+1}]|G_{r+1}| = [G : G_r][G_r : G_{r+1}]|G_{r+1}|,$$

entonces $[G : G_{r+1}] = [G : G_r][G_r : G_{r+1}]$ y utilizando la hipótesis de inducción llegamos a

$$[G : G_{r+1}] = (\prod_{i=0}^{r-1}[Gi : G_{i+1}])[G_r : G_{r+1}] = \prod_{i=0}^{r}[Gi : G_{i+1}].$$

Probando lo que queríamos.

4. Demostrar que si se tiene una cadena descendente de subgrupos de la forma

$$G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_{r-1} \geq G_r = \{1\},$$

entonces

$$|G| = \prod_{i=0}^{r-1} [Gi : G_{i+1}]$$

Esto es consecuencia se los apartado (1) y (3) de este ejercio.

Gracias a (3) tenemos que $|G : G_r| = \prod_{i=0}^{r-1}[Gi : G_{i+1}]$, usando ahora la hipótesis de que $G_r = \{1\}$ y por el apartado (1)

$$|G| = |G : G_r| = \prod_{i=0}^{r-1} [Gi : G_{i+1}]$$

Probando con ello lo que buscábamos.

4. Ejercicio 21

Sea G un grupo, $a, b \in G$.

1. Demuestra que el elemento b y su conjugado aba^1 tienen el mismo orden.

2. Desmostra que o(ba) = o(ab).

$$(aba^{-1})^r = ab^r a^{-1} = 1 \Longleftrightarrow b^r = 1$$

. Por tanto si r es el orden de alguno de ellos también lo será ara el otro.