Ejercicios tema 4.
Grupos cociente. Teoremas de isomorfismo.Productos.

Blanca Cano Camarero

29 de abril de 2020

Índice

1. Ejercicio 10 1

2. Ejercicio 11 2

3. Ejercicio 23. 3

4. Ejercicio 26 4

1. Ejercicio 10

Sean H,K dos subgrupos finitos del grupo G, uno de ello, H normal. Demostrar que

$$|H||K| = |HK||H \cap K|$$

Por el tercer teorema de isomorfía sabemos que

$$\frac{K}{H \cap K} \cong \frac{KH}{H}$$

de lo que deducimos que el respectivo número de clases laterales el mismo, es decir que

$$[K : H \cap K] = \left| \frac{K}{H \cap K} \right| = \left| \frac{KH}{H} \right| = [KH : H].$$

Además por el teorema de Lagrange sabemos que:
$|K| = [K : H \cap K]|H \cap K|$ y que $|HK| = [KH : H]|H|$
Por tanto, combinando estas igualdades, podemos desmejar la igualdad que se nos pedía demostrar.

$$\frac{|K|}{|H \cap K|} = \frac{|HK|}{|H|}$$

2. Ejercicio 11

sea $N \trianglelefteq G$. Probar que $G/N \cong G$ si y solo si $N = \{1\}$.
Probar que $G/N \cong \{1\}$ si y solo si $N = G$

Condiciones suficientes

Gracias al teorema de lagrage sabemos que $|G| = |G/N||N|$ Como por hipótesis $G/N \cong G$ entonces $|G/N| = |G|$. De estas dos igualdades anteroriores deducimos que: $|N| = 1$ y como la unidad pertenece por ser subgrupo no queda más remedio que $N = \{1\}$.

Si por el contrario, nuestra hipótesis fuera $G/N \cong \{1\}$ entonces $|N| = |G|$, y el único subgrupo de G que tiene la misma cardinalidad es él mismo, es decir $N = G$.

Condiciones necesarias

3. Ejercicio 23.

Sean G, H y K grupos. Demostrar que:

$$H \times K \cong K \times H.$$

$$G \times (H \times K) \cong (G \times H) \times K.$$

Primer isomorfismo

Definamos $f : H \times K \to K \times H$, de la forma $f(h,k) = (k,h)$. Veamos que esto es un isomorfismo:

- Epimorfismo: Sean $(k_1, h_1), (k_2, h_2) \in K \times H$ tales que $f^{-1}(k_1, h_1) = f^{-1}(k_2, h_2)$ entonces por cómo se ha definido la aplicación se tiene que $(k_1, h_1) = (k_2, h_2)$.
- Monomorfismo: $f^*(1,1) = \{(1,1)\}$.

Segundo isomorfismo

.

No consigo entender qué hay que probar ¿no es evidente por cómo se define el producto directo que $G \times H \times K \cong G \times (H \times K) \cong (G \times H) \times K$.?

4. Ejercicio 26

No todo subgrupo de un grupo directo es producto directo de subgrupos.

Ejemplo dado el grupo $(\mathbb{Z}_2, \times)$, para $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ se tiene que $<(1,1)>= \{(0,0),(1,1)\}$ no es ningún subgrupo generado por subgrupos de $\mathbb{Z}_2$, ya que estos son:

$$\begin{array}{rcl} \{0\} \times \{0\} & = & \{(0,0)\} \\ \{0\} \times \mathbb{Z}_2 & = & \{(0,0),(0,1)\} \\ \mathbb{Z}_2 \times \{0\} & = & \{(0,0),(1,0)\} \\ \mathbb{Z}_2 \times \{0\} & = & \{(0,0),(1,0),(0,1)(1,1)\} \end{array}$$

El recíproco sí es cierto.