Algebra II (Doble grado Informática-Matemáticas)

Relación 4

Curso 2019-2020

Grupos resolubles

Ejercicio 1. Demostrar que para cualesquiera dos grupos G y H se verifica que $[G \times H, G \times H] = [G,G] \times [H,H]$.

Ejercicio 2. Determinar el subgrupo conmutador de los grupos S_3, A_4, D_4 y Q_2.

Ejercicio 3. Demostrar que, para todo $n \geq 3$, el subgrupo derivado de S_n es A_n.

Ejercicio 4. Demostrar que, para $n \geq 3$, el grupo alternado A_n es el único subgrupo de orden $n!/2$ en S_n.

Ejercicio 5. Sea $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal y simple de un grupo G. Demostrar que si G/N tiene una serie de composición entonces G tiene una serie de composición.

Ejercicio 6. Sea G un grupo abeliano. Demostrar que G tiene series de composición si y sólo si G es finito.

Ejercicio 7. Sea H un subgrupo normal de un grupo finito G. Demostrar que existe una serie de composición de G uno de cuyos términos es H.

Ejercicio 8. Se define la longitud de un grupo finito G, denotada $l(G)$, como la longitud de cualquiera de sus series de composición. Demostrar que si H es un subgrupo normal de un grupo finito G, entonces $l(G) = l(H) + l(G/H)$.

Ejercicio 9. Encontrar todas las series de composición, calcular la longitud y la lista de factores de composición de los siguientes grupos:

1. El grupo diédrico D_4.
2. El grupo alternado A_4.
3. El grupo diédrico D_5.
4. El grupo de cuaternios Q_2.

5. El grupo cíclico C_{24}.

Ejercicio 10. Encontrar todas las series de composición del grupo S_4. Calcular la longitud y la lista de los factores de composición de este grupo simétrico.

Ejercicio 11. Encontrar todas las series de composición del grupo S_n, para $n \geq 5$. Calcular la longitud y la lista de los factores de composición de este grupo simétrico.

Ejercicio 12. Encontrar todas las series de composición del grupo D_6. Calcular la longitud y la lista de los factores de composición de este grupo diédrico.

Ejercicio 13. Si G y H son grupos finitos, demostrar que

$$\ell(G \times H) = \ell(G) + \ell(H), \;\; fact(G \times H) = fact(G) \cup fact(H).$$

Concluir que el producto directo de grupos resolubles es resoluble.

Ejercicio 14. Sean H y K subgrupos normales de un grupo G tales que G/H y G/K son ambos resolubles. Demostrar que $G/(H \cap K)$ también es resoluble.

Ejercicio 15. Demostrar que si G es un grupo resoluble con una serie de composición entonces G es finito.

Ejercicio 16. Sea G un grupo finito, y

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_{r-1} \rhd G_r = \{1\}$$

una serie de G. Demostrar que

$$l(G) = \sum_{i=0}^{r-1} l\left(\frac{G_i}{G_{i+1}}\right), \qquad fact(G) = \bigcup_{i=0}^{r-1} fact\left(\frac{G_i}{G_{i+1}}\right).$$

Ejercicio 17. Si $G_1, G_2 \ldots, G_r$ son grupos finitos, demostrar que

$$l(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_r) = \sum_{i=1}^{r} l(G_i), \quad fact(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_r) = \bigcup_{i=1}^{r} fact(G_i).$$

Ejercicio 18. Demostrar que D_4, D_5, S_2, S_3 y S_4 son grupos resolubles.

Ejercicio 19. Sea G un grupo resoluble y H un subgrupo normal de G no trivial. Demostrar que existe un subgrupo no trivial $A \leq H$ que es abeliano y normal en G.